IMETP
Section Professionnelle

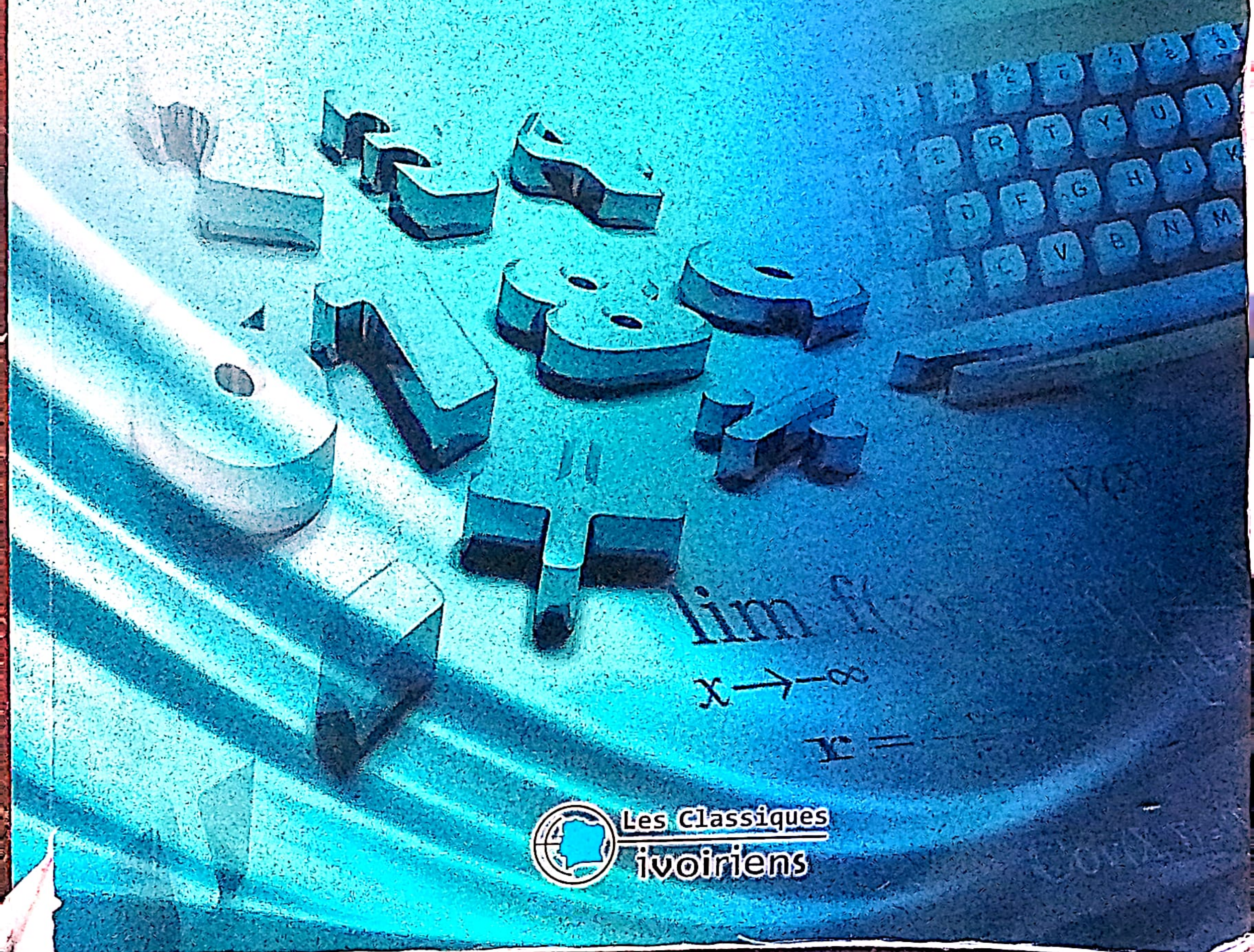
MATHS-PRO

Cours & sujets d'examen

TOME 1

Filières Tertiaires

CAP, BEP, BT, BP



Les Classiques ivoiriens

MATHS - PRO

COURS ET SUJETS D'EXAMEN
TOME I
FILIAIRES TERTIAIRES CAP - BEP - BT - BP

Sous la Direction de
Charles ZOKO SEBE
Professeur certifié de Mathématiques
Inspecteur Général
Inspecteur Général Coordonnateur du METFP
chargé de la pédagogie

AUTEURS

Professeurs certifiés de Mathématiques
Conseillers Pédagogiques
- ASSAHI Koffi - KOUAME Kouassi Denis
- KOUYA Wotto Germain - SOUARE Bakary Sidiki

Professeur certifié de Mathématiques
- KOUAO Vendex

Professeurs licenciés de Mathématiques
- ASSOUA Kouakou Blé Gérard - GOHI Ernest
- KOUAME Sébastien Martial - PIBA Nema Albert

CIV 517

Les Classiques ivoiriens

10 B.P. 1034 Abidjan 10 • Tél : 21 56 50 63 • Fax : 21 36 56 57
info@classiquesivoiriens.com

AVANT-PROPOS

Dans son souci permanent de produire des supports pédagogiques de qualité et après ses premières expériences, le groupe IMETP, fort de vos critiques et suggestions, s'est remis au travail pour proposer à la communauté mathématique de l'Enseignement Technique et de la Formation Professionnelle, de nouveaux ouvrages qui répondent aux défis sans cesse croissant de la qualité de nos enseignants, de nos enseignements et de nos élèves.

C'est pourquoi, le présent ouvrage qui s'adresse aux élèves et aux enseignants des classes d'examen des filières tertiaires de l'Enseignement Professionnel, se propose dans un premier temps d'accompagner l'apprenant tout le long de l'année scolaire.
Pour ce faire, des exercices d'application suivent chaque résumé de cours afin de permettre aux élèves d'apprécier leur propre progression.
Par la suite, une compilation des épreuves de Mathématiques aux différents examens du CAP, BEP, BP et BT, depuis 2000 à ce jour, vous est proposée.
En bonus, les corrigés de ces sujets vous sont offerts.

Cet ouvrage se veut donc un véritable outil de travail, aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant qui aura désormais à disposition et dans un seul document, non seulement la nomenclature des cours à dispenser, mais aussi des exercices qui pourront l'inspirer dans l'élaboration de ses fiches de travaux dirigés.

Merci à toutes les bonnes volontés qui ont contribué à la naissance de cet ouvrage, à nos familles respectives, à nos épouses notamment et au Professeur SALIOU TOURE pour ses conseils et son soutien sans faille à IMETP.
Nos remerciements vont également à l'endroit de tous les proviseurs qui se sont succédés au Lycée Technique d'Abidjan dont les locaux ont servi et servent encore de laboratoire à IMETP.

La bataille pour la quête de l'excellence continue certes, mais grâce à vos critiques et suggestions pour lesquelles nous vous remercions d'avance, nous sommes persuadés de la gagner en apportant de l'amélioration au contenu et à la forme de cet ouvrage.

Charles ZOKO SEBE
Inspecteur Général
Inspecteur Général coordonnateur du METFP
Chargé de la Pédagogie

PREFACE

Enseigner les Mathématiques requiert de la part des enseignants une remise en cause permanente et des efforts constants afin de donner aux élèves une qualité de prestation à la hauteur des attentes des partenaires du système éducatif.

C'est pourquoi, je salue la volonté des enseignants réunis au sein de IMETP de proposer des ouvrages qui répondent mieux aux attentes de la communauté mathématique et qui prennent en compte les critiques et suggestions des précédentes expériences.

Cet ouvrage qui, inéluctablement doit s'imposer par la richesse et la qualité de son contenu, étanche ma soif de formateur tant dans sa conception que dans la rigueur qui le dispute à la clarté.

Les différentes cibles que sont les enseignants et les élèves en classe d'examen tiennent dans leur main un véritable outil leur permettant, chacun en ce qui le concerne, d'avoir des éléments d'auto-évaluation.

C'est donc tout naturellement que je le recommande à la communauté mathématique tout en lui souhaitant un avenir radieux dans les rayons des librairies et autres bibliothèques.

Je reste persuadé que IMETP ne s'arrêtera pas en si bon chemin.

Les membres pourront toujours compter sur mon soutien et mes bénédictions.

Je souhaite à tous autant de plaisir que j'ai eu à parcourir leurs œuvres.

Professeur Saliou TOURE
Président de la Société Mathématique de Côte d'Ivoire
Président de l'Union Mathématique Africaine
Membre de l'Académie des Sciences non Linéaires de Moscou
Président de l'Université Internationale de Grand- Bassam

AVANT-PROPOS

Dans son souci permanent de produire des supports pédagogiques de qualité et après ses premières expériences, le groupe IMETP, fort de vos critiques et suggestions, s'est remis au travail pour proposer à la communauté mathématique de l'Enseignement Technique et de la Formation Professionnelle, de nouveaux ouvrages qui répondent aux défis sans cesse croissant de la qualité de nos enseignants, de nos enseignements et de nos élèves.

C'est pourquoi, le présent ouvrage qui s'adresse aux élèves et aux enseignants des classes d'examen des filières tertiaires de l'Enseignement Professionnel, se propose dans un premier temps d'accompagner l'apprenant tout le long de l'année scolaire.
Pour ce faire, des exercices d'application suivent chaque résumé de cours afin de permettre aux élèves d'apprécier leur propre progression.
Par la suite, une compilation des épreuves de Mathématiques aux différents examens du CAP, BEP, BP et BT, depuis 2000 à ce jour, vous est proposée.
En bonus, les corrigés de ces sujets vous sont offerts.

Cet ouvrage se veut donc un véritable outil de travail, aussi bien pour l'élève que pour l'enseignant qui aura désormais à disposition et dans un seul document, non seulement la nomenclature des cours à dispenser, mais aussi des exercices qui pourront l'inspirer dans l'élaboration de ses fiches de travaux dirigés.

Merci à toutes les bonnes volontés qui ont contribué à la naissance de cet ouvrage, à nos familles respectives, à nos épouses notamment et au Professeur SALIOU TOURE pour ses conseils et son soutien sans faille à IMETP.
Nos remerciements vont également à l'endroit de tous les proviseurs qui se sont succédés au Lycée Technique d'Abidjan dont les locaux ont servi et servent encore de laboratoire à IMETP.

La bataille pour la quête de l'excellence continue certes, mais grâce à vos critiques et suggestions pour lesquelles nous vous remercions d'avance, nous sommes persuadés de la gagner en apportant de l'amélioration au contenu et à la forme de cet ouvrage.

Charles ZOKO SEBE
Inspecteur Général
Inspecteur Général coordonnateur du METFP
Chargé de la Pédagogie

PREFACE

Enseigner les Mathématiques requiert de la part des enseignants une remise en cause permanente et des efforts constants afin de donner aux élèves une qualité de prestation à la hauteur des attentes des partenaires du système éducatif.

C'est pourquoi, je salue la volonté des enseignants réunis au sein de IMETP de proposer des ouvrages qui répondent mieux aux attentes de la communauté mathématique et qui prennent en compte les critiques et suggestions des précédentes expériences.

Cet ouvrage qui, inéluctablement doit s'imposer par la richesse et la qualité de son contenu, étanche ma soif de formateur tant dans sa conception que dans la rigueur qui le dispute à la clarté.

Les différentes cibles que sont les enseignants et les élèves en classe d'examen tiennent dans leur main un véritable outil leur permettant, chacun en ce qui le concerne, d'avoir des éléments d'auto-évaluation.

C'est donc tout naturellement que je le recommande à la communauté mathématique tout en lui souhaitant un avenir radieux dans les rayons des librairies et autres bibliothèques.

Je reste persuadé que IMETP ne s'arrêtera pas en si bon chemin.

Les membres pourront toujours compter sur mon soutien et mes bénédictions.

Je souhaite à tous autant de plaisir que j'ai eu à parcourir leurs œuvres.

Professeur Saliou TOURE
Président de la Société Mathématique de Côte d'Ivoire
Président de l'Union Mathématique Africaine
Membre de l'Académie des Sciences non Linéaires de Moscou
Président de l'Université Internationale de Grand- Bassam

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

RESUMES DE COURS

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

RESUMES DE COURS

THEME 1

CALCULS COMMERCIAUX

- CHAPITRE 1 : PROPORTIONNALITE
- CHAPITRE 2 : POURCENTAGES
- CHAPITRE 3 : FORMATION DES PRIX

CHAPITRE 1

PROPORTIONNALITE

1- RAPPORT ET PROPORTION

1- 1- Rapport de deux nombres

Considérons deux nombres réels a et b avec $b \neq 0$. On appelle rapport de a à b, le quotient de a par b. On note : $\frac{a}{b}$.

a est le premier terme du rapport et b est le deuxième terme.

Exemple:

Un commerçant a accordé une remise de 12 500 F sur un achat de 250 000 F.

Quel est le rapport de la remise au prix d'achat ?

Solution

Soit k ce rapport. On a : $k = \frac{12500}{250000}$

$k = 0{,}05$.

1- 2- Proportion

1- 2-1- Définition

Soient les nombres réels a, b, c et d non nuls.

L'égalité des deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est appelée une proportion. On la note : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

a, b, c, d sont les quatre termes de la proportion,

a et d sont les termes extrêmes,

b et c sont les termes moyens.

1- 2- 2- Propriété et conséquences

1-2-2-1- propriété

Dans une proportion, le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a \times d = b \times c.$$

1-2-2-2- Conséquences

1-2-2-2-1- Permutation des termes

- **Permutation des termes extrêmes**

Dans une proportion, si on permute les termes extrêmes, on établit une nouvelle proportion :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ équivaut à } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

- **Permutation des termes moyens**

Dans une proportion, si on permute les termes moyens, on établit une nouvelle proportion :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ équivaut à } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

- **Permutation simultanée**

Dans une proportion, si on permute simultanément les termes extrêmes et les termes moyens, on établit une nouvelle proportion :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ équivaut à } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

Remarque

Dans une proportion, on peut permuter les termes moyens entre eux et les termes extrêmes entre eux sans modifier le caractère de proportionnalité.

1-2-2-2-2- Calcul de la quatrième proportionnelle

Soit x le terme inconnu dans une proportion.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \Leftrightarrow ax = bc$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{bc}{a}.$$

Le réel x est appelé la quatrième proportionnelle.

2- GRANDEURS PROPORTIONNELLES

2-1- Notion de grandeurs proportionnelles

Considérons deux grandeurs A et B.

Le réel k est le rapport d'une mesure de A à une mesure correspondante de B.

Les mesures respectives de A sont : 12 ; 16 ,8 ; 30 ; 48 ; 52,8.

Les mesures respectives de B sont : 5 ; 7 ; 12,5 ; 20 ; 22.

Le tableau suivant nous donne une idée de l'ordre de disposition de ces mesures:

	1er ordre	2ème ordre	3ème ordre	4ème ordre	5ème ordre
A	12	16,8	30	48	52,8
B	5	7	12,5	20	22
k	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4

En faisant le rapport d'une mesure de A à une mesure de même ordre de B, on constate que ce rapport k est le même pour tous les ordres.

On dit alors que la grandeur A est proportionnelle à la grandeur B.

Ce rapport constant est appelé **coefficient de proportionnalité.**

Conséquence 1

Soients $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ les mesures respectives de la grandeur A et $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, les mesures respectives de la grandeur B.

A est une grandeur proportionnelle à B de coefficient de proportionnalité k signifie que :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Conséquence 2

Si k est le coefficient de proportionnalité de A par rapport à B, alors :

$$k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$$

C'est-à-dire $k = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$.

Exemple

Reprenons les données du tableau précédent :

$$k = \frac{12 + 16,8 + 30 + 48 + 52,8}{5 + 7 + 12,5 + 20 + 22}$$

k= 2,4

Conséquence 3

Si A est une grandeur proportionnelle à B, de coefficient de proportionnalité k (avec $k \neq 0$), alors B est une grandeur proportionnelle à A de coefficient de proportionnalité $\frac{1}{k}$.

2-2- Type de grandeurs proportionnelles

2-2-1- Proportionnalité directe

2-2-1-1- Expression mathématique

Soient $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ les mesures respectives de la grandeur A et $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, les mesures respectives de la grandeur B.

A est directement proportionnelle à B signifie que :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k.$$

2-2-1-2- Règle

Deux grandeurs A et B sont directement proportionnelles si le rapport de toute mesure de l'une à la mesure du même ordre de l'autre est constant.

2-2-2- Proportionnalité indirecte

2-2-2-1- Expression mathématique

Soient $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ les mesures respectives de la grandeur C et $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$, les mesures respectives de la grandeur D.

La grandeur C est inversement proportionnelle à la grandeur D signifie que :

$$\frac{c_1}{\frac{1}{d_1}} = \frac{c_2}{\frac{1}{d_2}} = \frac{c_3}{\frac{1}{d_3}} = ... = \frac{c_n}{\frac{1}{d_n}}$$

<u>**Conséquence**</u>

Si la grandeur C est inversement proportionnelle à la grandeur D alors :

$$c_1 d_1 = c_2 d_2 = c_3 d_3 = ... = c_n d_n.$$

2-2-2-2- Règle

Deux grandeurs C et D sont inversement proportionnelles si le produit des mesures de même ordre est constant.

2-2-3 - Proportionnalité composée

2-2-3-1 – Expression mathématique

Soient $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ les mesures respectives de la grandeur A;

$b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ les mesures respectives de la grandeur B;

$c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ les mesures respectives de la grandeur C.

Trois situations peuvent se présenter:

- **Première situation**

La grandeur A est directement proportionnelle aux grandeurs B et C. Cela signifie que :

$$\frac{a_1}{b_1c_1} = \frac{a_2}{b_2c_2} = \frac{a_3}{b_3c_3} = ... = \frac{a_n}{b_nc_n}.$$

- **Deuxième situation**

La grandeur A est directement proportionnelle à la grandeur B et inversement proportionnelle à la grandeur C. Cela signifie que:

$$\frac{a_1}{b_1\frac{1}{c_1}} = \frac{a_2}{b_2\frac{1}{c_2}} = \frac{a_3}{b_3\frac{1}{c_3}} = ... = \frac{a_n}{b_n\frac{1}{c_3}}$$

- **Troisième situation**

La grandeur A est inversement proportionnelle aux grandeurs B et C. Cela signifie que:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1c_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2c_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3c_3}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_nc_n}}.$$

2-2-3-2 – Règle

La grandeur A est inversement proportionnelle aux grandeurs B et C signifie que :

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3 = ... = a_nb_nc_n.$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

On partage une prime de 250 000 F entre trois ouvriers proportionnellement à leur nombre d'enfants à charge qui sont 8 ; 7 ; 5.

Calculer la prime de chaque ouvrier.

Solution

Soient x, y, z, les primes reçues par les ouvriers qui ont respectivement 8 ; 7 ; 5 enfants.

x, y, z sont directement proportionnelles à 8 ; 7 ; 5 signifie que : $\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{8+7+5} = k$.

Or $x + y + z = 250\,000$ et $8 + 7 + 5 = 20$.

Ce qui entraine $k = \frac{250\,000}{20}$, donc $k = 12\,500$.

- Déterminons la prime x reçue par l'ouvrier qui a 8 enfants à charge :

$\frac{x}{8} = 12\,500$ implique $x = 12\,500 \times 8$; soit une prime de 100 000F.

- Déterminons la prime y reçue par l'ouvrier qui a 7 enfants à charge :

$\frac{z}{5} = 12\,500$, soit une prime de 62 500 F.

Vérification : 100 000 + 87 500 + 62 500 = 250 000.

Remarque

- Les valeurs 8 ; 7 et 5 sont appelées nombres proportionnels.
- Dans un partage proportionnel, on peut multiplier ou diviser les nombres proportionnels par un même nombre non nul sans modifier le résultat du partage.

Exercice 2

Un oncle a laissé à ses 3 neveux un héritage s'élevant à 3 570 000 F. Il a chargé le notaire de le répartir proportionnellement à leurs nombres d'enfants respectifs 2 ; 3 ; 5 et en raison inverse de leurs salaires 250 000 F, 600 000 F, 400 000 F.

Calculer le montant d'héritage de chaque neveu.

Solution

Soit H_1, H_2, H_3, le montant de la part d'héritage de chaque neveu. Ces montants H_1, H_2, H_3 sont directement proportionnels à 2 ; 3 ; 5 et inversement proportionnels à 250 000, 600 000 et 400 000.

On obtient la relation : $\dfrac{H_1}{\frac{2}{250000}} = \dfrac{H_2}{\frac{3}{600000}} = \dfrac{H_3}{\frac{5}{400000}}$

qui devient $\dfrac{H_1}{\frac{2}{5}} = \dfrac{H_2}{\frac{3}{12}} = \dfrac{H_3}{\frac{5}{8}} = \dfrac{H_1 + H_2 + H_3}{\frac{2}{5} + \frac{3}{12} + \frac{5}{8}}$ (E)

Ramenons ce partage composé en un partage directement proportionnel.

On sait que (E) équivaut à $\dfrac{H_1}{\frac{48}{120}} = \dfrac{H_2}{\frac{30}{120}} = \dfrac{H_3}{\frac{75}{120}} = \dfrac{H_1 + H_2 + H_3}{\frac{153}{120}}$ ce qui donne le rapport

$k = \dfrac{H_1}{48} = \dfrac{H_2}{30} = \dfrac{H_3}{75} = \dfrac{H_1 + H_2 + H_3}{153}$, c'est-à-dire : $k = \dfrac{3\,570\,000}{153} = \dfrac{70000}{3}$,

or $H_1 + H_2 + H_3 = 3\,570\,000$.

Donc : $\dfrac{H_1}{48} = \dfrac{70000}{3}$, soit $H_1 = 1\,120\,000$ F.

$\dfrac{H_2}{30} = \dfrac{70000}{3}$, soit $H_2 = 700\,000$ F.

$\dfrac{H_3}{75} = \dfrac{70000}{3}$, soit $H_3 = 1\,750\,000$ F.

Vérification : 1 120 000 + 700 000 + 1 750 000 = 3 570 000.

Exercice 3

Monsieur COULIBALY est marié à trois femmes. La première a 18 ans de vie conjugale. La seconde en a 12 et la troisième 8.

A l'occasion de la fête de l'an 2006, il leur a offert des complets de pagne. Le partage s'est effectué par erreur, en raison inverse de ses nombres d'années. La dernière femme a reçu alors 3 complets de pagne de plus que la deuxième.

1) Calculer, dans les conditions d'erreur, le nombre de complets de pagne de chaque femme et le nombre total des complets de pagne.
2) Quelle aurait été la part de chacune d'elles si le partage avait été proportionnel à la durée de vie conjugale?

Solution

1 - Le nombre de complets de pagne reçu par chaque femme dans les conditions d'erreur.

Désignons par :

x : le nombre de complets de pagne de la première femme ;

y : le nombre de complets de pagne de la deuxième femme ;

z : le nombre de complets de pagne de la troisième femme ;

P : le nombre total de complets de pagne.

On a : $x + y + z = P$ et $\dfrac{x}{\frac{1}{18}} = \dfrac{y}{\frac{1}{12}} = \dfrac{z}{\frac{1}{8}} = \dfrac{x+y+z}{\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}$

Or PPCM (18, 12, 8) = $2^3 \times 3^2 = 72$, alors on peut écrire $\dfrac{x}{\frac{4}{72}} = \dfrac{y}{\frac{6}{72}} = \dfrac{z}{\frac{9}{72}} = \dfrac{x+y+z}{\frac{19}{72}}$

On obtient : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{9} = \dfrac{x+y+z}{19}$

Recherchons la valeur de y :

$\dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{9}$ et $z = y + 3$ signifie que $\dfrac{y}{6} = \dfrac{y+3}{9}$ implique $y = 6$.

Recherchons la valeur de x :

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{6}$ signifie que $\dfrac{x}{4} = 1$; par suite $x = 4$

Recherchons la valeur de z :

$z = y + 3$ et $y = 6$, donc $z = 9$.

Dans les conditions d'erreurs ;

La première épouse a reçu 4 complets de pagne ;

La deuxième épouse a reçu 6 complets de pagne ;

La troisième épouse a reçu 9 complets de pagne.

Monsieur COULIBALY aura distribué au total 19 complets de pagne.

2- Déterminons le nombre de complets de pagne de chacune des femmes si le partage avait été proportionnel aux nombres d'années de vie conjugale

$\frac{x}{18} = \frac{y}{12} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{18+12+8}$ or $x+y+z= 19$, donc $\frac{x}{18} = \frac{y}{12} = \frac{z}{8} = \frac{19}{38}$.

Recherchons la valeur de x :

$\frac{x}{18} = \frac{19}{38}$ donc $x = 9$;

Recherchons la valeur de y :

$\frac{y}{12} = \frac{19}{38}$ donc $y = 6$;

Recherchons la valeur de z :

$\frac{z}{8} = \frac{19}{38}$ donc $z = 4$.

Si le partage avait été proportionnel aux nombres d'années de vie conjugale,

La première épouse aurait reçu 9 complets de pagne ;

La deuxième épouse aurait reçu 6 complets de pagne ;

La troisième épouse aurait reçu 4 complets de pagne.

CHAPITRE 2

POURCENTAGES

1- DÉFINITION

Un pourcentage est un rapport dont le deuxième terme est 100.

On note $\frac{t}{100}$ ou encore t %. t est le taux du pourcentage.

Exemple

Un commerçant accorde un rabais de 15 % sur un prix marqué.

Un rabais de 15 % signifie que sur un prix marqué de 100 F, le client a un rabais de15 F .

2- DIFFÉRENTS POURCENTAGES

On distingue :

- le pourcentage direct
- le pourcentage indirect
- les pourcentages successifs
- les pourcentages par tranches.

2-1- Pourcentage direct

2-1-1- Notion de pourcentage direct

Problème 1

Un commerçant accorde un rabais de 15 % sur un prix marqué de 240 000 F à un client.
Calculer le montant du rabais.

Solution

Soit x le montant du rabais.

Il y a deux grandeurs A et B directement proportionnelles:

A : rabais de mesures 15 et x

B : prix marqué de mesures 100 et 240 000.

A	15	x
B	100	240 000

Calculons x

$\frac{15}{100} = \frac{x}{240000} \Rightarrow x = 36000$.

Le montant du rabais est de 36 000 F

2-1-2- Règle

Pour calculer t % d'une valeur (connue), on la multiplie par $\frac{t}{100}$.

Application

Calculons le montant d'un rabais de 15 % appliqué sur la valeur connue de 240 000 F.

Soit x la valeur du rabais.

On a : $x = 240000 \times \frac{15}{100}$; x = 36 000 F.

Remarque

Le résultat obtenu est le même que celui de la quatrième proportionnelle

2-2 - Pourcentage indirect

2-2-1- Notion de pourcentage indirect

Problème 2

Après une remise de 7,5 %, un client paie finalement une mobylette à 344 100 F.

Quel était le montant de la remise ?

Solution

Soit x le montant de la remise.

Une remise de 7,5 %, signifie que sur un prix marqué de 100 F, il y a une remise de 7,5 F.

On paie finalement (100 – 7,5) = 92,5 F.

On constate donc deux grandeurs A, B directement proportionnelles.

A : Prix net de mesures 344100 ; 92,5

B : Remise de mesures x ; 7,5

A	344100	92,5
B	x	7,5

Application

Dans le cas de l'exercice précédant, soit x le montant de la remise.

On écrit alors : $\frac{344\,100}{x} = \frac{92,5}{7,5}$ soit $x = \frac{344100 \times 7,5}{92,5}$

donc $x = 27\,900$ F.

2-1-2- Règles

Connaissant la valeur nette :

- pour calculer la réduction de t % on multiplie la valeur nette par $\frac{t}{100-t}$.

- Pour calculer l'augmentation de t % on multiplie la valeur nette par $\frac{t}{100+t}$.

Application

Dans le cas de l'exercice précédant, soit x le montant de la remise.

7,5 % est appliqué sur le prix marqué inconnu et non directement sur 344 100.

Il faut utiliser la règle du pourcentage indirect.

$x = \frac{344100 \times 7,5}{100 - 7,5}$ ce qui donne $x = 27\,900$. Soit 27 900 F.

De même pour une valeur nette de 20 600 F suite à une augmentation de 3 %, on peut calculer le montant a de cette augmentation en faisant : $a = \frac{20\,600 \times 3}{100+3}$ soit $a = 600$ F

2-3 - Pourcentages successifs

2-3-1-Définition

Les pourcentages successifs sont des réductions accordées à un client. Ces pourcentages successifs se déterminent l'un à la suite de l'autre sur chaque résultat net. On dit que ces montants se calculent par cascades.

On distingue, par ordre de détermination, différents types de réductions :

- Les réductions sur le poids des marchandises.

Ce sont : la tare, la freinte, la réfaction, le don et le surdon.

- Les réductions sur le prix.

Ce sont :

- Les réductions commerciales : le rabais, la remise, la ristourne ;
- La réduction financière : l'escompte de règlement.

La résultante de tous ces pourcentages définit le coefficient multiplicateur.

2-3-2 - Coefficient multiplicateur

On appelle coefficient multiplicateur, le nombre réel k qui multiplie un nombre A pour obtenir un nombre B. On a: $k A = B$, donc $k = \frac{B}{A}$. (On utilise le coefficient multiplicateur pour des valeurs non nulles)

Le coefficient multiplicateur permet également de trouver le taux unique de réduction r.

$$r = 1 - k$$

2-4- Pourcentages par tranches

2-4-1- Notion :

Les pourcentages par tranches sont des pourcentages appliqués séparément à des intervalles de nombres spécifiques.

Le principe de calcul de pourcentage par tranches est appliqué dans certaines entreprises lors du paiement des commissions.

2-4-2- Application :

Le barème de rémunération proposé par l'assurance ACI à ses démarcheurs est le suivant :

- de 0 à 50.000 : 1 %,
- de 50.000 à 100.000 : 2,5 %,
- de 100.000 et plus : 6 %.

Le démarcheur AKIS a pu trouver dans le mois de février deux clients X et Y.

Le client X souscrit à un contrat de 90 000 F et Y à un contrat de 250 000 F.

Compte tenu d'une commission fixe de 30 000 F offert à chaque démarcheur, calculer le gain de AKIS pour le mois de février.

<u>Solution</u>

1- Commission obtenue avec X

$$(50\,000 - 0) \times \frac{1}{100} = 50\,000 \times \frac{1}{100} = 500$$

$$(90\,000 - 50\,000) \times \frac{2{,}5}{100} = 40\,000 \times \frac{2,5}{100} = 1\,000$$

Total avec X : 500 + 1 000 = 1 500

2- Commission obtenue avec Y

$$(50\,000 - 0) \times \frac{1}{100} = 50\,000 \times \frac{1}{100} = 500$$

$$(100\,000 - 50\,000) \times \frac{2{,}5}{100} = 50\,000 \times \frac{2{,}5}{100} = 1\,250$$

$(250\,000 - 100\,000) \times \frac{6}{100} = 150\,000 \times \frac{6}{100} = 9\,000$

Total avec Y : 500 + 1 250 + 9 000 = 10 750

3 – Le gain de AKIS : 30 000 F + 1 500 F + 10 750 F = 42 250 F

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Une coopérative de production de coton vend 8 tonnes de coton brut à la C.I.D.T. aux conditions suivantes :

- Prix d'un Kg de coton : 280 F
- Tare : 2,5‰
- Don : 10 Kg
- Freinte : 0,15 %
- Remise : 10 %

Déterminer le net commercial payé par la C.I.D.T..

Solution

Détermination du net commercial payé par la C.I.D.T.

Poids brut avec la tare : 8 000 Kg

La tare (poids de l'emballage) : $\frac{8\,000 \times 2,5}{1\,000} = 20$ Kg

Poids brut du coton : $8\,000 - 20 = 7\,980$ Kg

Poids brut don déduit : $7\,980 - 10 = 7\,970$ Kg

Freinte : $\frac{7970 \times 0,15}{100} = 11,955$

Poids net du coton : $7\,970 - 11,955 = 7\,958,045$ Kg

Prix brut du coton : $280 \times 7\,958,04 = 2\,228\,252,6$

Prix net du coton : $\frac{2\,228\,252,6 \times 90}{100} = 2\,005\,427,34$

Le net commercial payé par la C.I.D.T est de 2 005 427 F.

Exercice 2

Une ristourne de fin d'année est calculée sur le montant des achats annuels selon le barème suivant :

Montant des achats	Taux de ristourne
Jusqu'à 50 000 F	3 %
De 50 000 F à 200 000 F	5 %
De 200 000 F à 500 000 F	8 %
Au-delà de 500 000 F	10 %

Déterminer la ristourne accordée à un client pour un montant annuel d'achat de 300 000 F.

Solution

Tableau de calcul

Tranche	Montant de la tranche	Ristourne
$]0 ; 50\,000]$	50 000 F	$50\,000 \times \frac{3}{100} = 1\,500$ F
$]50\,000 ; 200\,000]$	150 000 F	$150\,000 \times \frac{5}{100} = 7\,500$ F
$]200\,000 ; 300\,000]$	100 000 F	$100\,000 \times \frac{8}{100} = 8\,000$ F
		Total : 17 000 F

La ristourne annuelle de ce client s'élève à 17 000 F.

Exercice 3

On propose à un vendeur d'appareils électriques deux possibilités de rétribution.

Possibilité 1 : l'attribution d'une rémunération mensuelle fixe de 270 000 F augmentée d'une commission de 4 % évaluée sur le montant des ventes mensuelles.

Possibilité 2 : une rémunération ne comprenant qu'une commission de 13 % sur le montant des ventes mensuelles.

1) Déterminer le montant des ventes mensuelles qui assure la même rétribution.
2) Quelle est la meilleure rétribution en fonction du montant des ventes mensuelles ?
3) Pour un montant de ventes mensuelles de 400 000 F, quelle possibilité choisira le vendeur ?

Solution

Soit x le montant des ventes mensuelles

Soit y_1 la rémunération de la possibilité 1

Soit y_2 la rémunération de la possibilité 2

1) montant des ventes mensuelles assurant la même rétribution.

Détermination des rémunérations

- Possibilité 1 : $y_1 = 270\,000 + \frac{4x}{100}$, soit $y_1 = 270\,000 + 0{,}04x$.

- Possibilité 2 : $y_2 = \frac{13x}{100}$. Soit $y_2 = 0{,}13x$

1-1) montant des ventes mensuelles assurant la même rétribution.

$$y_1 = y_2$$
$$270\,000 + 0{,}04x = 0{,}13x$$
$$0{,}04x - 0{,}13x = -270\,000$$
$$-0{,}09x = -270\,000$$
$$0{,}09x = 270\,000$$
$$x = \frac{270\,000}{0{,}09}$$
$$x = 3\,000\,000$$

Le montant des ventes mensuelles assurant la même rétribution est de 3000 000 F.

2) la meilleure rétribution en fonction du montant des ventes mensuelles.

La possibilité 1 est la meilleure lorsque :

$$y_1 > y_2$$
$$270\,000 + 0{,}04x > 0{,}13x$$
$$0{,}04x - 0{,}13x > -270\,000$$
$$-0{,}09x > -270\,000$$
$$0{,}09x < 270\,000$$
$$x < \frac{270\,000}{0{,}09}$$
$$x < 3\,000\,000$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $x > 3\,000\,000$, la deuxième possibilité est la meilleure.

Conclusion :

Pour des ventes inférieures à 3 000 000 F, la possibilité 1 est la meilleure.

Pour des ventes supérieures à 3 000 000 F, la possibilité 2 est la meilleure.

3) Pour un montant de ventes mensuelles de 400 000 F, le vendeur choisira la première possibilité.

CHAPITRE 3

FORMATION DES PRIX

1- COUTS ET PRIX DE REVIENT

1-1- Définitions

1-1-1 -Prix marqué

C'est le prix d'achat brut qui figure dans le catalogue du fournisseur.

On l'appelle aussi prix affiché.

1-1-2- Frais

Ce sont des dépenses accessoires liées à une opération principale. On distingue plusieurs types de frais :

- **frais d'achat (F/A)** : ce sont les frais de transport, de manutention, d'assurance lors d'un achat, etc. ;
- **frais de transformation ou de production (F/P)**: ce sont les charges liées à la production. Elles sont composées de salaires, du coût d'électricité, d'eau et de téléphone, et des charges financières liées à la fabrication des articles etc. ;
- **frais de distribution ou de vente (F/D)**: ce sont les charges liées à la commercialisation telles que les commissions des vendeurs, les dépenses d'entretien des produits, le loyer des magasins, etc.

1-2- Prix d'achat net hors taxe (PANHT)

Le prix d'achat net hors taxe (PAN_{HT}) est la différence entre le prix d'achat brut hors taxe (PAB_{HT}) et toutes les réductions sur achat ($R_{/A}$).

$$PAN_{HT} = PAB_{HT} - R_{/A}.$$

1-3- Coût d'achat (CA)

C'est le prix d'achat net HT augmenté des frais d'achat (F/A)

$$CA = PAN_{HT} + F/A.$$

1-4- Coût de production (CP)

C'est le coût d'achat augmenté des frais de production (F/P)

$$CP = CA + F/P.$$

1-5- Coût de revient ou prix de revient (PR)

Il se définit différemment selon que nous sommes dans une entreprise commerciale ou dans une entreprise industrielle.

- Cas d'une entreprise commerciale :

Le prix de revient est le coût d'achat augmenté des frais de distribution :

$$PR = CA + F/D .$$

- Cas d'une entreprise industrielle

Le prix de revient est le coût de production augmenté des frais de distribution (vente):

$$PR = CP + F/D.$$

2- PRIX DE VENTE

On distingue :

- le prix de vente hors taxe,
- le prix de vente toutes taxes comprises.

2-1- Le prix de vente hors taxe (PVHT)

Le prix de vente hors taxe est le prix de revient augmenté du bénéfice ou de la marge nette.

$$PV_{HT} = PR + B.$$

2-2 -Le bénéfice

2-2-1- Définition

Le bénéfice ou marge nette est le revenu de l'activité commerciale d'une entreprise.

2-2-2- Calcul du bénéfice

Selon qu'il s'agit d'une entreprise industrielle ou commerciale, le bénéfice se détermine de la même manière.

$$\textbf{Bénéfice} = PV_{HT} - PR$$

Remarque:

Marge brute = $PV_{HT} - CA$

Marge nette = marge brute – frais de vente.

2-2-3 -Taux de bénéfice

Le bénéfice se définit soit par rapport au prix de revient, soit par rapport au prix de vente hors taxe.

Par rapport au prix de revient, le taux qui se dégage est dit taux de marge (T_m).

$$T_m = \frac{B}{PR} \times 100.$$

Par rapport au prix de vente hors taxe, le taux qui en ressort est appelé taux de marque (T_M).

$$T_M = \frac{B}{PV_{HT}} \times 100.$$

A retenir

- Il existe une relation entre le taux de marge et ses déterminants.

$$T_m = 100\frac{PV_{HT}}{PR} - 100.$$

- Il existe aussi une relation entre le taux de marque et ses déterminants :

$$T_M = 100 - 100\frac{PR}{PV_{HT}}.$$

2-3 - Prix de vente toutes taxes comprises (PVTTC).

Le prix de vente toutes taxes comprises est le prix de vente hors taxe augmenté de toutes les taxes.

$$PV_{TTC} = PV_{HT} + \text{Taxes}$$

3-TAXE SUR LA VALEUR AJOUTEE : TVA

3-1- Définition

La taxe sur la valeur ajoutée est un impôt indirect payé par le consommateur final lors de l'achat d'un article et reversé à l'Etat par le vendeur de l'article.
Elle est déterminée en pourcentage par l'autorité fiscale (ou le fisc) selon la nature de l'article et du prix.

3-2- Le taux de la TVA

Actuellement en Côte d'Ivoire, il existe un taux unique de T.V.A qui est 18% sur le prix hors taxe. Ce taux est appelé **taux d'incidence** ou **taux réel** et nous le notons r :

$$TVA = \frac{PV_{HT} \times r}{100}.$$

Toutefois, lorsque le prix toutes taxes comprises d'un article est donné, on déduit la taxe en utilisant le **taux légal** de 15,25% que nous notons t :

$$TVA = \frac{PV_{TTC} \times t}{100}.$$

A retenir

Il existe une relation entre le taux légal t et le taux réel r.

On sait que $TVA = \frac{PV_{TTC} \times t}{100}$ et $TVA = \frac{PV_{HT} \times r}{100}$.

Alors : $\frac{PV_{HT} \times r}{100} = \frac{PV_{TTC} \times t}{100}$ c'est-à-dire $PV_{HT} \times r = PV_{TTC} \times t$.

Soit $r = \frac{PV_{TTC} \times t}{PV_{HT}}$

$$r = \frac{PV_{TTC} \times t}{(PV_{TTC} - TVA)} \text{ or } TVA = \frac{PV_{TTC} \times t}{100}$$

donc $r = \frac{t}{100-t} \times 100$.

On montre aussi que $t = \frac{r}{100+r} \times 100$.

3-3 - Principe d'application de la TVA

Lors d'une opération d'achat, le fournisseur facture la TVA au commerçant qui l'incorpore à son prix d'achat pour avoir le prix d'achat toutes taxes comprises. Cette taxe sur le prix d'achat est appelée TVA sur achat ou TVA déductible.

Après avoir déterminé son prix de vente, le commerçant ajoute la TVA sur vente pour fixer son PV_{TTC} auquel il vend son article au consommateur. Le montant de la TVA recueillie par le commerçant auprès du consommateur s'appelle TVA collectée ou TVA exigible à la vente.

De la TVA sur vente, le commerçant retire la TVA sur achat et verse le reliquat appelé **TVA nette** ou **TVA à payer** au fisc.

TVA nette = TVA / vente – TVA / achat

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1

Un grossiste vend 500 assiettes en porcelaine à un commerçant. Après une remise de 10%, le commerçant paie au grossiste la somme de 360 000 F.

1) Déterminer le prix d'achat initial des assiettes.
2) Pendant le transport qui a coûté 90 000 F, 20 % des assiettes se sont brisées. Déterminer le prix auquel le commerçant doit vendre une assiette s'il veut réaliser une marge de 10% par rapport au prix de vente.

Solution

1) Prix d'achat initial

Remise : R = 10%
Prix d'achat brut : PAB = x
Prix d'achat net : PAN = 360 000 F
PAB = PAN + R

	PAB	R	PAN
Montant	x	R	360 000

Calcul du montant x du Prix d'achat brut :

$$\frac{360\,000}{90} = \frac{R}{10} = \frac{x}{100}$$

$\frac{360\,000}{90} = \frac{x}{100}$ donne $x = \frac{360\,000}{90} \times 100$. Par suite $x = 400\,000$

Le prix d'achat initial est de 400 000F

2. Prix de vente d'une assiette : PVu

Coût d'achat : CA

CA = PAN + F/A = 360 000 + 90 000 = 450 000 F

Nombre d'assiettes restantes : $500 - \frac{500 \times 20}{100} = 400$

Il reste donc 400 assiettes.

Coût d'achat d'une assiette vendue $\frac{450\,000}{400} = 1125$ F

Prix de vente d'une assiette : y

PV = CA+MARGE

	PV	MARGE	CA
Montant	y		1 125
%	100	10	90

Calcul du montant x du PV :

$$\frac{y}{100} = \frac{1125}{90} \text{ alors } y = \frac{1125 \times 100}{90}$$

$$y = 1\,250$$

Le prix de vente d'une assiette est 1 250 F.

Exercice 2

M. BAKARY est commerçant à la rue 12 de Treichville. Il achète auprès de son fournisseur HASSAN un lot de marchandises dont le prix d'achat hors taxe est 460 000 F. BAKARY obtient de HASSAN deux remises successives de 7,5 % et 4 %. Ses frais d'achat s'élève à 5 % du prix d'achat net hors taxe. Pour déterminer son prix de vente, BAKARY applique un taux de marque (T_M) de 25 %.

La TVA est fixé à 18 %.

Déterminer :

1) Le prix d'achat net hors taxe
2) Le coût d'achat
3) Le prix de vente hors taxe
4) Le prix de vente toutes taxes comprises.

solution

1) **Calcul du prix d'achat hors taxe.**

Le prix d'achat brut est 460 000 F.

1ère remise (R_1) de 7,5 % : $R_1 = \frac{460000 \times 7,5}{100} \Rightarrow R_1 = 34500$, soit 34 500 F.

1er net commercial (N) : $N = 460000 - 34500 = 425500$, soit 425 500 F

2ème remise (R_2) de 4 % : $R_2 = \frac{425500 \times 4}{100} \Rightarrow R_2 = 17020$, soit 17 020 F.

Prix d'achat net HT (PAN_{HT}) $PAN_{HT} = 425500 - 17020$

$PAN_{HT} = 408480$

Le prix d'achat net hors taxe est 408 480 F.

2) **Calcul du coût d'achat(CA).**

Frais d'achat (FA) : $FA = \frac{408480 \times 5}{100} = 20424$, soit 20 424 F

Coût d'achat (CA) : CA = 408 480 + 20 424

CA = 428 904

Le coût d'achat est 428 904 F

3) **Calcul du prix de vente hors taxe (PV_{HT}).**

On sait que : $T_M = 100 - \frac{100PR}{PV_{HT}}$.

D' où $T_M - 100 = -\frac{100PR}{PV_{HT}}$ c'est-à-dire $100 - T_M = \frac{100PR}{PV_{HT}}$ et donc $PV_{HT} = \frac{100PR}{100 - T_M}$

Ici PR = Coût d'achat (il n'y a pas de frais de distribution).

Soit $PV_{HT} = \frac{100 \times 428904}{100 - 25} \Rightarrow PV_{HT} = 571872$

Le prix de vente hors taxe est 571 872 F.

4) **Calcul du prix de vente toutes taxes comprises (PV_{TTC}).**

TVA sur vente

$\text{TVA sur vente} = \frac{571872 \times 18}{100} = 102937$, soit 102 937 F.

Prix de vente toutes taxes comprises

$PV_{TTC} = PV_{HT} + TVA$

$PV_{TTC} = 571872 + 102937$

$PV_{TTC} = 674809$

Le prix de vente toutes taxes comprises est : 674 809 F.

Exercice 3

Ayant reçu un rabais de 10 % et un escompte de règlement de 2 %, la cliente Adjo paie à son fournisseur un net financier de 7 938 000 F.

1) Calculer le prix d'achat brut des marchandises.
2) Calculer le coût d'achat si les frais d'achat sont évalués à 4 % du prix d'achat brut.
3) Les frais de vente s'évaluent à 2 % du coût d'achat. Calculer le prix de revient.
4) La cliente Adjo applique un taux de marge de 10 %. Calculer le prix de vente HT.
5) Si le taux de TVA s'élève à 18 %, calculer la TVA versé à l'Etat.

Solution

1) **Calcul du prix d'achat brut (PAB).**

$$PAB = \frac{7938000 \times 10000}{90 \times 98} = 9000000$$

$$PAB = 9000000\,F$$

2) **Détermination du coût d'achat**

• Calcul des frais d'achat (FA)

$$FA = \frac{9000000 \times 4}{100} \Rightarrow FA = 360000\,F.$$

• Calcul du prix d'achat net hors taxe (PAN_{HT})

PAN_{HT} = 9 000 000×(1 – 0,1). On obtient PAN_{HT} = 8 100 000 F

• Calcul du coût d'achat (CA).

CA = 8 100 000 + 360 000. Soit CA = 8 460 000 F.

3) **Calcul des frais de vente (F / V).**

$$F/V = \frac{8460000 \times 2}{100} \Rightarrow F/V = 169200\,F.$$

• Calcul du prix de revient (PR).

PR = 8 460 000 + 169 200. Soit PR = 8 629 200 F.

4) **Détermination du prix de vente hors taxe**

• Calcul du bénéfice (B)

$$T_m = \frac{100 \times B}{PR} \Leftrightarrow B = \frac{PR \times T_m}{100}.$$

$$\text{Donc } B = \frac{8629200 \times 10}{100} \Leftrightarrow B = 862920\,F$$

• Calcul du prix de vente HT (PV_{HT}).

PV_{HT} = PR + B.

PV_{HT} = 8 629 200+862 920. On obtient PV_{HT} = 9 492 120 F.

5) Calcul de la TVA versée à l'Etat (TVA nette).

TVA nette = TVA sur vente – TVA sur achat.

Or $\text{TVA sur vente} = \dfrac{9492\,120 \times 18}{100}$, soit $\text{TVA sur vente} = 1708\,582\,\text{F}$

et $\text{TVA sur achat} = \dfrac{7\,938\,000 \times 18}{100}$ c'est-à-dire $\text{TVA sur achat} = 1428\,840\,\text{F}$.

D'où TVA nette = 1 708 582 – 1 428 840. Conclusion TVA nette = 279 742 F.

THEME 2

OPERATIONS FINANCIERES

- CHAPITRE 1 : INTERETS SIMPLES
- CHAPITRE 2 : ESCOMPTE COMMERCIAL
- CHAPITRE 3 : EQUIVALENCE D'EFFETS
- CHAPITRE 4 : INTERETS COMPOSES

CHAPITRE 1

INTERETS SIMPLES

1- GENERALITES SUR LES INTERETS

1-1- Intérêt

L'intérêt est le revenu d'un capital placé.

Il représente le loyer payé par l'emprunteur au prêteur pour avoir utilisé son capital pendant un temps donné.

Dans la pratique, pour les opérations financières dont la durée n'excède pas un an, on utilise généralement les **intérêts simples.**

Quant aux opérations financières dont la durée excède un an, on utilise généralement les **intérêts composés** dont on parlera dans le dernier chapitre des opérations financières.

1-2- La valeur du capital placé

La valeur du capital placé est la valeur retenue à une date déterminée choisie comme origine du temps. C'est la valeur du capital au moment du placement.

1-3 -La valeur acquise

La valeur acquise est la valeur du capital au moment du remboursement, c'est-à-dire la valeur du capital placé augmentée des intérêts.

2 – LES COMPOSANTES DE L'INTERET SIMPLE

L'intérêt simple est directement proportionnel :

- au montant du capital placé ;
- au taux d'intérêt ;
- à la durée du placement.

2-1- Le taux d'intérêt

Le taux d'intérêt est l'intérêt d'un capital de 100 F placé pendant une période de capitalisation, généralement l'année.

2-2- La durée du placement

La durée du placement est l'intervalle de temps qui sépare la date de remboursement de la date de placement.

D'une manière générale, l'année est comptée pour 360 jours soit 12 mois de 30 jours chacun.

Cependant, lorsque les dates sont données, les mois sont comptés au nombre de jours réels c'est-à-dire que le mois de janvier compte 31 jours, le mois de février 28 ou 29 jours, le mois de mars 31 jours et ainsi de suite.
Par ailleurs, on convient de considérer le jour de remboursement et de ne pas compter le jour du placement.

Quelques exemples :

- Supposons un placement effectué du 1er octobre au 31 décembre de la même année.

Octobre :	31 - 1 = 30 j
Novembre :	30 j
Décembre :	31 j
Nombre de jours	n = 91 jours

La durée du placement est donc de 91 jours.

- Considérons un placement du 11 février au 09 avril 2004.

Février :	29 - 11 = 18
Mars :	31
Avril :	9
Nombre de jours	n = 58 jours

NB : L'année 2004 est bissextile.

3 – CALCUL DE L'INTERET SIMPLE

3-1- Méthode fondamentale

On désigne par I : l'intérêt simple,
C : valeur du capital placé,
t : le taux d'intérêt annuel,
n : la durée du placement (une année commerciale compte 360 jours).

3-1-1- La durée du placement est en jours

L'intérêt au bout de n jours de placement est : $I = \frac{C \times t \times n}{36\,000}$

3-1-2 -La durée du placement est en mois

L'intérêt au bout de n mois de placement est : $I = \frac{C \times t \times n}{1\,200}$

3-1-3 -La durée du placement est en années

L'intérêt au bout de n années de placement est : $I = \frac{C \times t \times n}{100}$

Exemple

Le 10 mai 2006, M. AZANE, un commerçant de la place, se rend à sa banque. Il demande un prêt de 1 460 000 FCFA pour la construction de son nouveau magasin. Il convient de rembourser cette somme le 09 juillet de la même année à un taux annuel de 12%.

a) Calculez la durée du prêt (en jours)

b) Quel est l'intérêt du banquier ?

Solution

a) Détermination de la durée n

mai	:	31 - 10 = 21
juin	:	30
juillet	:	9
Nombre de jours		n = 60 jours

b) Calcul de l'intérêt I

$$I = \frac{C \times t \times n}{36000}$$

$$I = \frac{1\,460\,000 \times 12 \times 60}{36\,000} \quad \text{Soit} \quad I = 29\,200 \text{ F}$$

L'intérêt du banquier est de 29 200 F

3.2- Méthode des nombres et des diviseurs fixes

Pour le calcul de l'intérêt de plusieurs capitaux placés au même taux, on utilise la méthode des nombres et des diviseurs.

Selon la méthode fondamentale, on a : $I = \dfrac{C \times t \times n}{36\,000}$

Divisons le numérateur et le dénominateur du rapport par t.

On obtient : $I = \dfrac{\frac{C \times t \times n}{t}}{\frac{36000}{t}} = \dfrac{C \times n}{\frac{36000}{t}}$ On pose $D = \dfrac{36\,000}{t}$ Alors on a : $I = \dfrac{C \times n}{D}$.

Le produit C×n est appelé "**nombre**" et D est appelé "**diviseur fixe**".

4 - CALCUL DE LA VALEUR ACQUISE

Soit A la valeur acquise par le capital C:

$$A = C + I$$

4.1- La durée est en jours

La valeur acquise d'un capital au bout de n jours de placement est : $A = C + \dfrac{C \times t \times n}{36\,000}$

Exemple

Un capital d'une valeur $C = 120\ 000$ F est placé à intérêt simple au taux t de 6 % pendant une durée $n = 72$ jours . Quelle est la valeur acquise A par ce capital ?

Solution

$$A = C + \frac{C \times t \times n}{36000}$$

$A = 120\ 000 + \dfrac{120\ 000 \times 6 \times 72}{36\ 000}$. On obtient $A = 121\,440$ F.

4-2 - La durée est en mois

La valeur acquise d'un capital au bout de n mois de placement est : $A = C + \dfrac{C \times t \times n}{1200}$.

Exemple

Quelle est la valeur acquise d'un capital de 50 000 F placé au taux annuel de 9 % pendant 3 mois ?

Solution

$$A = C + \frac{C \times t \times n}{1200}$$

$$A = 50000 + \frac{50000 \times 9 \times 3}{1200}.$$

Donc A= 51 125 F

4-3 - La durée est en années

La valeur acquise d'un capital au bout de n années de placement est :

$$A = C + \frac{C \times t \times n}{100}.$$

Exemple

Un capital de 250 000 F est placé pendant deux ans au taux annuel de 6 %.

Quelle est la valeur acquise par ce capital.

Solution

$$A = C + \frac{C \times t \times n}{100}$$

$A = 250\ 000 + \dfrac{250\ 000 \times 6 \times 2}{100} = 280\ 000$. Donc A= 280 000 F

5 – REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

5-1 - Représentation graphique de l'intérêt

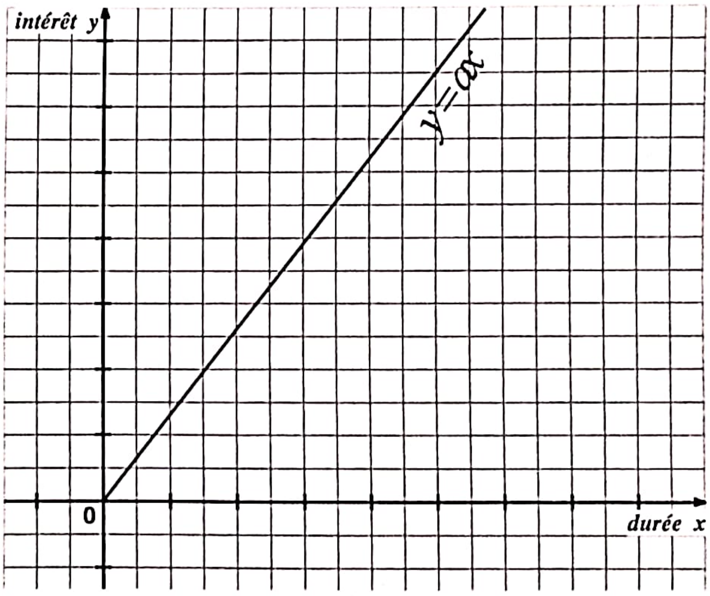
On peut établir une relation fonctionnelle entre l'intérêt I et l'une de ses composantes (n, t, C).

Considérons la composante n comme variable et les autres composantes comme des constantes. $I = \frac{C \times t \times n}{36000}$.

Posons $I = y$, $\frac{C \times t}{36000} = \alpha$ et $n = x$.

L'intérêt I est donc de la forme: $y = \alpha x$.

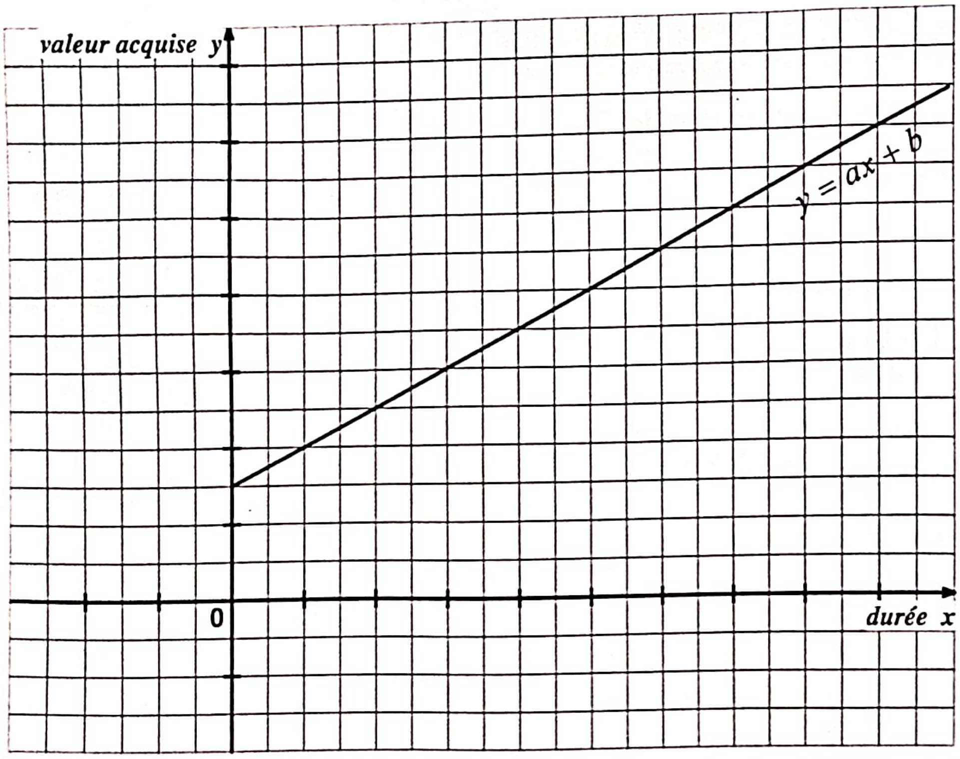
C'est une fonction linéaire du temps qui est strictement croissante.



5-2- Représentation graphique de la valeur acquise

Dans l'expression de la valeur acquise A = C + I, si on remplace A par y, C par b et I par ax, on obtient $y = ax + b$.

La **valeur acquise** peut se mettre sous la forme d'une **fonction affine**. Elle est strictement croissante pendant la durée de placement.



EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Un capital de 14400000 F placé le 3/ 03/08 à intérêt simple a acquis le 01 juin 2008 une valeur de 14 796 000 F. calculer :

1) La durée de placement
2) L'intérêt du placement
3) Le taux d'intérêt du placement

Solution

1) Calculons la duré de placement (du 03 /03/ 2008 au 01 / 06 / 2008)

Décompte :

Mars	:31−3= 28
Avril	: 30
Mai	: 31
Juin	: 1

Durée = 90 jours

2) Calculons l'intérêt (I) du placement

Soit A la valeur acquise et C la valeur nominale.

On a $A = C + I$ soit $I = A - C$

AN : $I = 14\ 796\ 000 - 14\ 400\ 000$. Donc : I = 396 000 F.

3°) Le taux d'intérêt du placement.

On a : $I = \dfrac{C \times t \times n}{36000}$ d'où $t = \dfrac{36000 \times I}{C \times n}$

AN : $t = \dfrac{36\ 000 \times 396\ 000}{14\ 400\ 000 \times 90}$ c'est-à-dire $t = 11$. Soit un taux de placement annuel de 11%

Exercice 2

Un capital de 720 000 F a été placé à 10 % l'an pendant x jours.

1) Ecrire l'expression algébrique de l'intérêt y en fonction de x.
2) Calculer l'intérêt de 70 jours de placement.
3) Pendant combien de jour faut il placer ce capital pour avoir un intérêt de 25 000 F ?
4) Représenter graphiquement l'intérêt y en fonction de x.
5) Interpréter cette représentation graphique.

Solution

1) Donnons l'expression algébrique de l'intérêt.

$y = \dfrac{C \times t \times x}{36000} \Rightarrow y = \dfrac{720000 \times 10 \times x}{36000} = 200x$. Soit $y = 200x$.

2) Calculons l'intérêt de 70 jours de placent

$y = 200x$. Pour $x = 70$ on a alors :

$y = 200 \times 70 \Rightarrow y = 14\ 000$.

L'intérêt de 70 jours de placement est de 14 000 F.

3) Durée de placement pour un intérêt de 25 000 F.

$y = 200x$. Pour $y = 25\ 000$, on a :

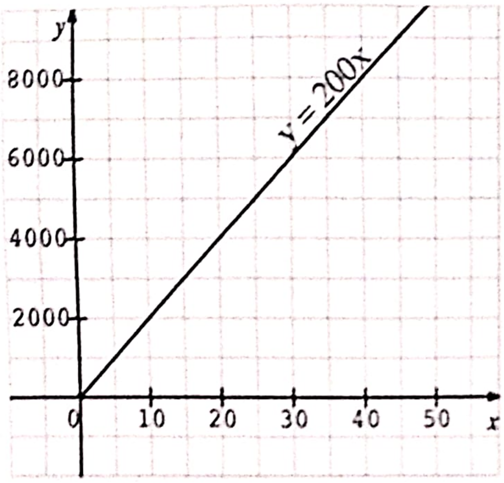
$25\ 000 = 200x$

$x = \dfrac{25\ 000}{200}$

$x = 125$

La durée de placement pour un intérêt de 25000 F est de 125 jours.

4) Représentation graphique.



5) **interprétation du graphique**

- Sur le graphique on constate que la droite traduisant les intérêts en fonction de la durée de placement passe par l'origine du repère. Cela traduit le fait que l'intérêt est une fonction linéaire de la durée de placement.
- Sur le graphique on constate que la droite traduisant les intérêts en fonction de la durée de placement est strictement croissante. Cela traduit le fait que l'intérêt est une fonction croissante de la durée de placement.

Donc l'intérêt est une fonction linéaire croissante de la durée de placement.

Exercice 3

Un capital C est placé à intérêt simple, à 6% l'an pendant n mois ($n \in \mathbb{N}^*$). Ce placement a rapporté un intérêt de 160 F. Soit $Q = C \times n$ le produit du capital par la durée de placement.

1) Déterminer le nombre Q.
2) Si le capital C avait été placé pendant (n + 4) mois, au même taux, la valeur acquise A serait de 8 320 F.

   Exprimer la valeur acquise A en fonction de C et Q.
3) Déduire de la question 2, la valeur du capital C.
4) Calculer n le nombre de mois de placement du capital C.

Solution

Déterminons le nombre Q

$Q = C \times n$

En remplaçant C×n par Q dans l'expression $I = \frac{C \times n \times t}{1200}$, on obtient $I = \frac{Q \times t}{1200}$,

alors $Q = \frac{1200 \times I}{t}$

$$Q = \frac{1200 \times 160}{6} = 32000$$

2) Exprimons la valeur acquise A en fonction de C et Q

$$A = C + \frac{C \times t \times (n+4)}{1200}$$

$$A = C + \frac{C \times 6 \times (n+4)}{1200}$$

$$A = \frac{51}{50}C + \frac{Q}{200}$$

4) Déduction de la valeur du capital C

$$A = \frac{51}{50}C + \frac{Q}{200}$$

$$C = \frac{50}{51}\left(A - \frac{Q}{200}\right)$$

$$C = \frac{50}{51}\left(8320 - \frac{32000}{200}\right)$$

$$C = 8\,000$$

Soit $C = 8\,000$ F

5) Calcul du nombre n de mois de placement du capital C

$$Q = C \times n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{Q}{C}$$

$$n = \frac{32000}{8000} = 4$$

La durée du placement du capital C est de 4 mois.

CHAPITRE 2

ESCOMPTE COMMERCIAL

1- GÉNÉRALITÉS

1-1- Effet de commerce

Un effet de commerce est un titre par lequel une personne physique ou morale appelée « tireur » donne l'ordre à une autre personne appelée « tiré », de payer à une tierce personne nommée « bénéficiaire » une somme donnée à une date déterminée.

On distingue deux types d'effets :

- la lettre de change ou traite (établie par le fournisseur ou tireur) ;
- le billet à ordre (établi par le client tiré).

1-2- Opération d'escompte

L'opération d'escompte est une opération par laquelle un banquier met à la disposition de son client, escompteur d'un effet de commerce, le montant de cet effet avant son échéance sous réserve de déduction d'un intérêt.

1-3- Valeur nominale d'un effet

La valeur nominale d'un effet est le montant de l'effet payable à l'échéance.

1-4- L'escompte commercial

L'escompte commercial est l'intérêt prélevé par le banquier acquéreur de l'effet.

1-5- La valeur actuelle

La valeur actuelle est la différence entre la valeur nominale et l'escompte commercial.

2- CALCUL DE L'ESCOMPTE COMMERCIAL ET DE LA VALEUR ACTUELLE

Soit :

- E : le montant de l'escompte commercial.
- A : la Valeur nominale.
- t : le taux d'escompte.
- n : la durée séparant la date de négociation de la date d'échéance ;

La durée n est encore appelée période à courir.

2-1- Escompte commercial

$$E = \frac{A \times t \times n}{36\,000}$$

En posant $D = \frac{36\,000}{t}$, E devient $E = \frac{A \times n}{D}$

2-2- Valeur actuelle

Appelons a la valeur actuelle.

$a = A - E$ c'est-à-dire $a = A - \frac{A \times n}{D}$ et donc $a = A\left(1 - \frac{n}{D}\right)$. Par suite $a = A\left(\frac{D - n}{D}\right)$

3- REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

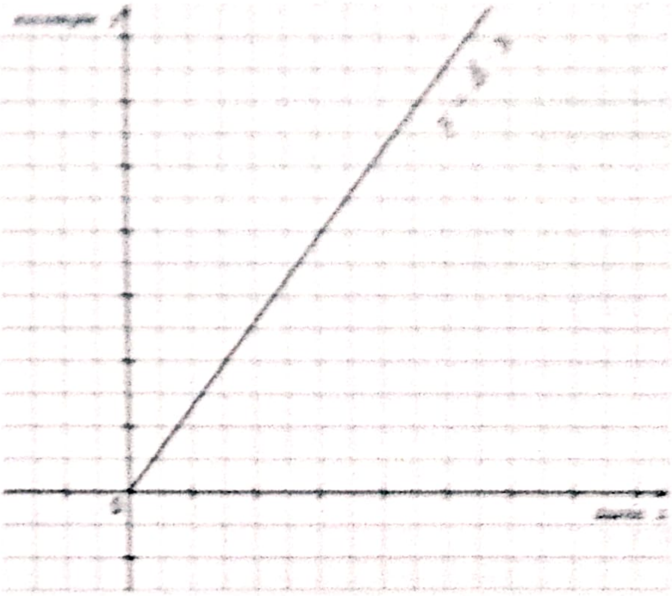
3-1- Escompte commercial

$E = \frac{A \times n}{D}$ ou encore $E = \frac{A}{D} \times n$

Considérons que A et D sont des valeurs connues.

Posons $y = E$; $d = \frac{A}{D}$ et $n = x$.

On obtient alors E sous la forme $y = d \cdot x$ qui est une fonction linéaire croissante.



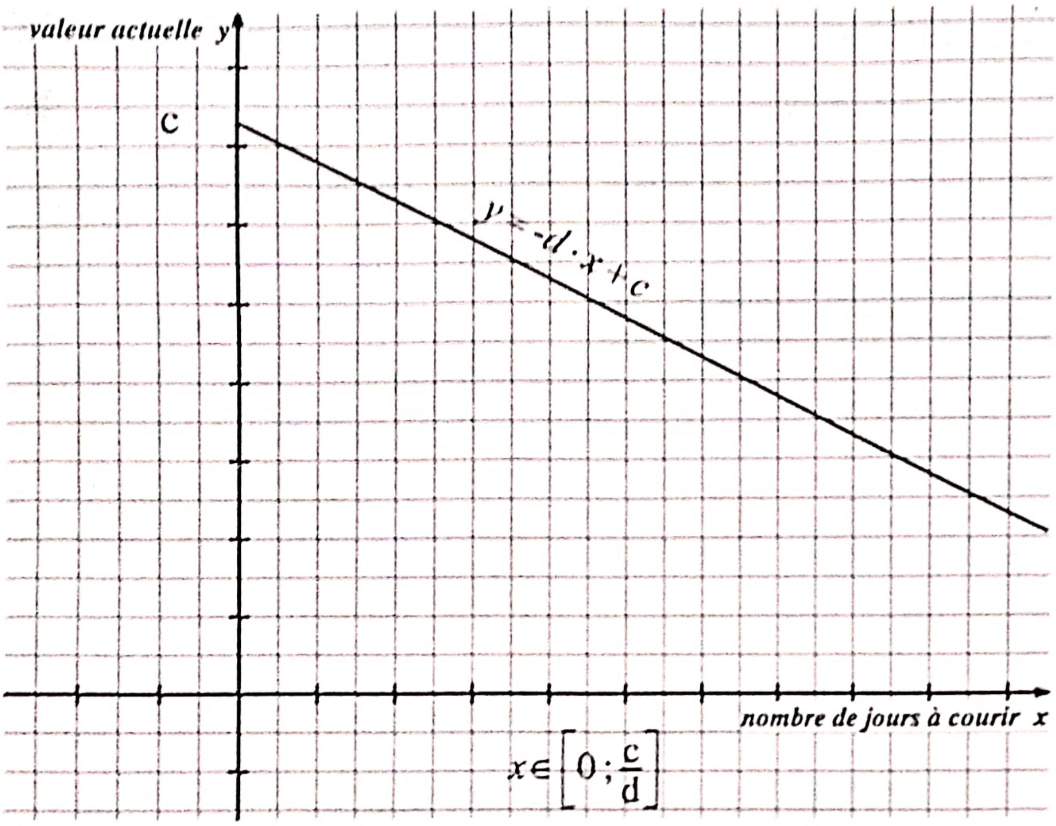
3-2- Valeur actuelle

$a = A - \frac{A \times n}{D} \Leftrightarrow a = -\frac{A \times n}{D} + A$

Considérons A et B comme des valeurs connues.

Posons $a = y$; $\frac{A}{D} = d$; $n = x$ et $A = c$ on obtient alors $y = -d \cdot x + c$ qui est une fonction affine décroissante.

REPRESENTATION GRAPHIQUE



4- PRATIQUE DE L'ESCOMPTE

4-1- Définitions

4-1-1- l'agio

Les banques perçoivent à l'occasion des opérations d'escompte, non seulement l'escompte commercial, mais aussi diverses commissions et la taxe sur activité financière.

La somme de l'escompte commercial, des commissions et de la taxe sur activité financière, s'appelle **agio.**

4-1-2- Les commissions

La banque ne verse pas entièrement à son client la valeur actuelle de l'effet. Elle retient en plus de l'escompte, différentes commissions destinées à compenser les frais qu'elle devra engager pour l'encaissement de cette traite.

On distingue plusieurs types de commissions :

- **Les Commissions habituelles**

-Les Commissions fixes : ce sont des commissions indépendantes de la valeur nominale et du temps.

Exemples : Commission de manipulation – commission d'acceptation.

-Les Commissions variables : ce sont des commissions qui varient en fonction de la valeur nominale et du temps. Dans ces commissions on distingue celles qui ne dépendent que de la valeur nominale telle que la commission de bordereau et celles qui dépendent de la valeur nominale et du temps telle que la commission d'endos.

- **Les Commissions exceptionnelles**
- Commission pour retrait d'effet,
- Commission pour effets prorogés,
- Commission pour effets impayés,
- Commission pour présentation à l'acceptation,
- Commission d'avis de sort.

4-1-3- La taxe sur opérations bancaires (TOB)

C'est un impôt qui se calcule généralement sur l'ensemble des prélèvements opérés par la banque.

4-2- Calculs

4-2-1-Calcul de l'agio

L'agio comprend l'escompte, les commissions et la taxe sur opération bancaire.

Agio = Escompte + commissions + TOB

Remarque : $Agio_{(HT)}$ = Escompte + Commissions

4-2-2- Calcul de la valeur nette

La valeur nette est égale à la valeur nominale diminuée de l'agio.

Valeur nette = valeur nominale – agio

4-2-3- Calcul des taux de l'escompte

- **Le taux réel d'escompte**

Le taux réel d'escompte est le taux qu'il faudrait appliquer à la valeur nominale, compte tenu du nombre de jours effectifs restant à courir, pour obtenir l'agio.

Soit θ le taux réel d'escompte, A la valeur nominale et n la période à courir.

Par définition on a : $\frac{A \times \theta \times n}{36000} = Agio$, donc $\theta = \frac{36000 \times Agio}{A \times n}$.

θ est le coût supporté par le client (pour une période d'une année à courir) sur chaque 100 F remis à l'escompte.

- **Le taux d'aggravation de l'escompte**

On appelle taux d'aggravation de l'escompte, la différence entre le taux réel d'escompte et le taux d'escompte.

Soit θ' le taux d'aggravation.

$$\theta' = \text{taux réel d'escompte - taux d'escompte}$$

$$\theta' = \theta - t$$

- **Taux de rendement**

Le taux de rendement est le taux qu'il faudrait appliquer à la valeur nominale diminuée de l'agio$_{(HT)}$, compte tenu du nombre de jours effectifs restant à courir, pour obtenir l'escompte commercial.

Soit θ" le taux de rendement:

Par définition $\frac{(A - agio_{HT}) \times \theta'' \times n}{36\,000} = E$ donc $\theta'' = \frac{36\,000 \times E}{(A - agio_{HT}) \times n}$

θ" est le gain du banquier sur chaque 100 F (pour une période d'une année à courir) payé au client escompteur.

- **Le taux de revient**

Le taux de revient est le taux qu'il faudrait appliquer à la valeur nette, compte tenu du nombre de jours effectifs restant à courir, pour obtenir l'agio.

Soit α le taux de revient.

Par définition on a : $\frac{(A - Agio) \times \alpha \times n}{36\,000} = Agio$ donc $\alpha = \frac{36\,000 \times Agio}{(A - Agio) \times n}$.

α indique le coût de chaque 100 F reçu par le client (pour une période à courir d'une année).

5- BORDEREAU D'ESCOMPTE

5-1 -Notion de bordereau

Le bordereau d'escompte est un document établi par une banque qui accepte d'escompter des effets de commerce. Il donne le détail du calcul de l'agio et indique la valeur nette à remettre au client ou à porter au crédit de son compte.

5-2- Application

Lors de l'établissement du bordereau, on tient compte des conditions imposées par la banque qui accepte d'escompter les effets.

La valeur nette est effective généralement le lendemain de la remise à l'escompte.

Exemple

Le 1er mars, commerçant KOFFI a négocié auprès de sa banque les effets suivants :

1er effet A_1 : 35 890 sur Bouaké au 15 mars,

2ème effet A_2 : 64 520 sur Agboville au 30 avril,

3ème effet A_3 : 607 380 sur Abidjan au 30 avril,

4ème effet A_4 : 718 560 sur Bassam au 10 mai,

5ème effet A_5 : 259 190 sur San-Pédro au 31 mai.

Conditions :

- Escompte : 14,5 % "1 jour de banque",
- Commission d'endos : 0,4 % l'an (même base que l'escompte),
- Commission de services : 400 F par effet,
- Commission d'avis de sort: 500 F par effet pour les effets A_2 et A_4.

TOB : 10 %

Présenter le bordereau d'escompte

NB : Arrondir tous les résultats à l'unité près

Solution

BORDEREAU D'ESCOMPTE

Abidjan 01-03-2005

Banque A Abidjan Client : KOFFI

A

LIEU DE PAIEMENT	MONTANT	ECHÉANCE	JOURS	ESCOMPTE	COMMISSIONS D'ENDOS
Bouaké	35 890	15-03	15	217	6
Agboville	64 520	30-04	61	1 585	44
Abidjan	607 380	30-04	61	14 923	412
Bassam	718 560	10-05	71	20 549	567
San-Pédro	259 190	31-05	92	9 604	265
TOTAL	**1 685 540**	-	-	46 878	1 294

Total des valeurs nominales		1 685 540
Escompte	46 878	
Commission d'endos	1 294	
Commission de services (400 × 5)	2 000	
Commission d'avis de sort (500× 2)	1 000	
AGIO$_{HT}$	51 172	
TOB ($\frac{51\,172 \times 10}{100}$)	5117	
AGIO	56 289	
Valeur nette au 2/03/05		**1 629 251**

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

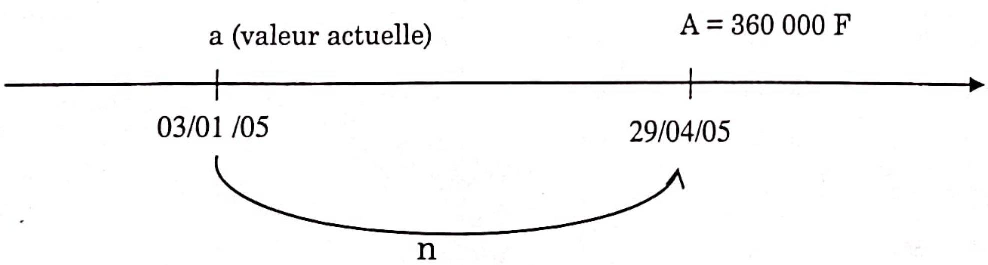
Un effet de commerce d'une valeur nominale égale à 360 000 F au 29 avril 2005 a été escompté le 3 janvier 2005 au taux d'escompte de 15 %.

Calculer :

1) Le nombre de jours à courir.
2) L'escompte commercial.
3) La valeur actuelle de l'effet au 3 janvier 2009.

Solution

1) Calcul du nombre de jours à courir.



Décompte :

Janvier	31 – 3 = 28
Février	28
Mars	31
Avril	29
	n = 116 jours

2) Calcul de l'escompte commercial (E).

$E = \frac{Atn}{36000}$ soit

$E = \frac{360000 \times 15 \times 116}{36000} = 17400$

Donc $E = 17400\,F$.

3) Calcul de la valeur actuelle au 03 / 01 / 05.

$a = A - E$

$a = 360\,000 - 17\,400 = 342\,600$

Donc $a = 342\,600\,F$

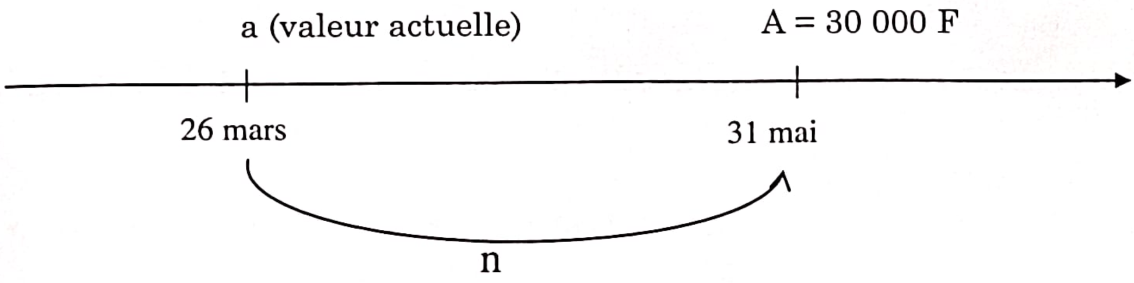
Exercice 2

Le 10 mars 2007, M. BLE, un grand commerçant grossiste vend à un détaillant nommé ZIGBE un lot de marchandises pour un montant de 30 000 F, le règlement devant intervenir le 31 mai. BLE obtient de ZIGBE un billet à ordre confirmant le règlement de la dette au 31 mai. BLE sollicite le 26 mars, une avance auprès de son banquier, avance garantie par la créance qu'il possède sur ZIGBE.

Quelle est la somme d'argent reçue par BLE à la suite de cette opération d'escompte ?

Le taux d'escompte est de 12 %. (on suppose que le banquier ne prélève que l'escompte)

Solution



- Calcul du nombre de jours restant à courir

$n = (31 - 26) + 30 + 31.$

$n = 66$ jours.

- Calcul de la valeur actuelle a

$a = A - \frac{Atn}{36\,000}$

$a = 30\,000 - \frac{30\,000 \times 12 \times 66}{36\,000}$ soit $a = 29\,340$ F

Exercice 3

Quel est la date de négociation d'un effet de commerce d'une valeur nominale $V = 12\ 000$ F échéant le 15 octobre 2008 si le taux de négociation est $t = 12\ \%$ et l'escompte prélevé par le banquier est $e = 288$ F ?

Solution

Calcul du nombre de jours à courir

On a : $e = \frac{Vtn}{36000}$ soit $n = \frac{36000 \times e}{Vt}$.

AN : $n = \frac{36000 \times 288}{12000 \times 12}$. On obtient $n = 72$ jours.

Détermination de la date de négociation.

Si on retranche des 72 jours, 15 jours pour le mois d'octobre et 30 jours pour le mois de septembre, il reste 27 jours pour le mois d'août. Donc la négociation a lieu dans le mois d'août.

Soit x la date de négociation.

On a $31 - x = 27$ soit $x = 31 - 27$. On obtient $x = 4$.

La négociation à lieu le 4 août 2008.

CHAPITRE 3

EQUIVALENCE D'EFFETS

1- EQUIVALENCE DE DEUX EFFETS

1-1 - Définition

Deux effets sont équivalents à une date donnée si escomptés à cette date et au même taux, ils ont la même valeur actuelle.

On appelle date d'équivalence de deux effets, la date à laquelle ils ont la même valeur actuelle.

1-2 - Expression mathématique

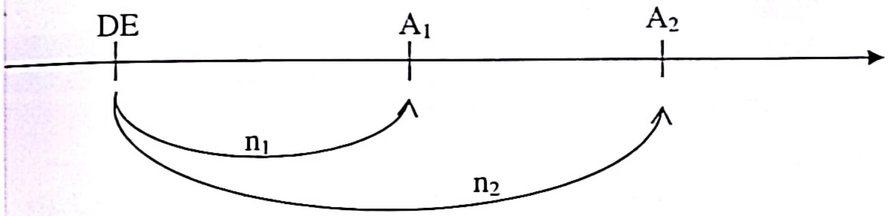
Soit DE la date d'équivalence.

Soient A_1 et A_2 les valeurs nominales de deux effets.

Soient n_1 et n_2 les périodes à courir de ces effets avec $n_1 < n_2$.

Soit D le Diviseur.

Soient a_1 et a_2 les valeurs actuelles respectives des deux effets.



- Valeur actuelle du 1er effet à l'époque DE :

$$a_1 = A_1 - \frac{A_1 n_1}{D}$$

- Valeur actuelle du 2ème effet à l'époque DE

$$a_2 = A_2 - \frac{A_2 n_2}{D}$$

Les effets seront équivalents si leurs valeurs actuelles sont égales ;

c'est-à-dire $a_1 = a_2$

$$A_1 - \frac{A_1 n_1}{D} = A_2 - \frac{A_2 n_2}{D}$$

On en déduit que : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D - n_2}{D - n_1}$

1-3- Théorème sur l'équivalence

- Lorsqu'elle existe, la date d'équivalence de deux effets de valeurs nominales différentes et d'échéances différentes est unique. Cette date est alors antérieure aux dates d'échéances de chacun des effets.
- Pour qu'il y ait équivalence, il faut et il suffit que l'échéance de l'effet ayant la plus forte valeur nominale soit la plus éloignée de la date de négociation.

Autrement dit :

($A_2 > A_1$ et $n_2 > n_1$) si et seulement si il existe une date à laquelle A_2 et A_1 sont équivalents.

2 – RENOUVELLEMENT D'EFFET

Selon la situation de trésorerie favorable ou non, un débiteur peut demander un renouvellement ou un remplacement de son effet.

Deux possibilités s'offrent à lui :

- Soit il choisit une nouvelle échéance et on calcule la nouvelle valeur nominale,
- Soit il fixe la nouvelle valeur nominale et on détermine l'échéance nouvelle.

Lors de cette opération de renouvellement, la date d'équivalence est le jour ou le remplacement est effectué. On prend la date la plus antérieure si la date d'équivalence n'est pas définie. Ce jour là, les valeurs actuelles des effets doivent être égales.

3 – EQUIVALENCE D'UN EFFET OU D'UN GROUPE D'EFFETS A UN ENSEMBLE D'EFFETS

- Un effet est équivalent à plusieurs autres effets, si escompté au même taux, à une date donnée (date d'équivalence), la valeur actuelle de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

- Un groupe d'effets est équivalent à un autre groupe d'effets, si escompté au même taux, à une date donnée (date d'équivalence), la somme des valeurs actuelles des effets du premier groupe est égale à la somme des valeurs actuelles des effets du second groupe.

3-1- Echéance commune

3-1-1- Définition

L'échéance commune est l'échéance de l'effet unique équivalent à plusieurs autres.

3-1-2- Expression mathématique

On a : trois effets de valeurs nominales A_1 ; A_2 ; A_3 qu'on veut remplacer par un effet unique A.

On peut demander :

- soit de calculer la valeur nominale de cet effet si sa date d'échéance est connue.
- soit de calculer la date d'échéance de cet effet (échéance commune) si la valeur nominale A est connue.

Dans les deux cas, le jour du remplacement, on aura : $a = a_1 + a_2 + a_3$, a étant la valeur actuelle de l'effet unique et $a_1 ; a_2 ; a_3$ les valeurs actuelles des trois autres effets.

Comme $a = a_1 + a_2 + a_3$, on a :

$$A - \frac{A \times n}{D} = A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} + A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D} + A_3 - \frac{A_3 \times n_3}{D}$$

$$A\left(\frac{D-n}{D}\right) = A_1 + A_2 + A_3 - \frac{1}{D}(A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3)$$

$$A\left(\frac{D-n}{D}\right) = \sum_{i=1}^{3} A_i - \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{3} A_i n_i$$

On pourra généraliser la formule ainsi : $A\left(\frac{D-n}{D}\right) = \sum_{i=1}^{p} A_i - \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{p} A_i n_i$ pour p effets.

4 - ECHEANCE MOYENNE

4-1-Définition

L'échéance moyenne de plusieurs effets est l'échéance commune de ces effets dans le cas où la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

4-2-Expression mathématique

On veut maintenant remplacer A_1 ; A_2 ; A_3 par un effet A qui est la somme des trois valeurs nominales et à partir de là chercher l'échéance de l'effet unique qui est l'échéance moyenne.

Hypothèse 1 : $A = A_1 + A_2 + A_3$

Hypothèse 2 : $a = a_1 + a_2 + a_3$

A l'équivalence : $a = a_1 + a_2 + a_3$.

On a donc :

$$n = \frac{A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

De façon générale :

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i n_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i}$$

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

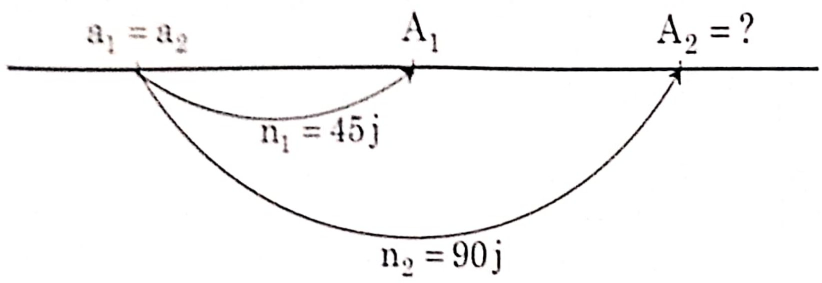
Un créancier accepte de remplacer une lettre de change de 280 000 F payable dans 45 jours par une lettre payable dans 90 jours.

Taux d'escompte : 12 %.

Quelle est la valeur nominale de la nouvelle lettre de change ?

Solution

$t = 12\ \% \Rightarrow D = \dfrac{36000}{12} = 3000.$



A la date de la négociation (date 0), la valeur actuelle de la nouvelle lettre est égale à la valeu actuelle de l'ancienne lettre ($a_1 = a_2$).

Alors : $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D - n_2}{D - n_1}$$

$$A_2(D - n_2) = A_1(D - n_1)$$

$$A_2 = \frac{A_1(D - n_1)}{D - n_2}$$

$$A_2 = 280\,000\,\frac{3000 - 45}{3000 - 90} \Rightarrow A_2 = 284\,330\text{ F}$$

La valeur nominale de la nouvelle lettre est de 284 330 F.

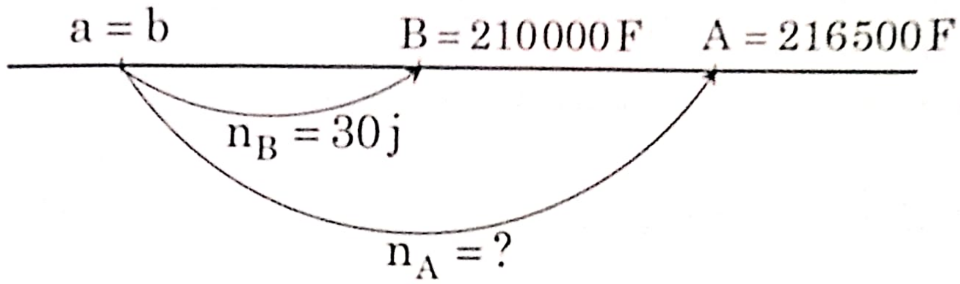
Exercice 2

Un effet A de nominal 216 500 F est équivalent le 05 / 10 / 98 à un autre effet B de nominale 210 000 F échéant dans 30 jours.

Taux d'escompte : 10 %.

Quelle est la date d'échéance de l'effet A.

Solution



B = 210000 ; n_B = 30j. D = $\dfrac{36000}{10} = 3600$

A = 216500 ; n_A = ?

Soit a , la valeur actuelle de l'effet A et b celle de l'effet B

A la date du 05 / 10 / 90, a = b .

$$b = 210\,000 - \frac{210\,000 \times n_B}{3600} \Rightarrow b = 210\,000 - \frac{210\,000 \times 30}{3600} \Rightarrow b = 208\,250$$

$$a = 216\,500 - \frac{216\,500 \times n_A}{3600} \Rightarrow a = 216\,500 - \frac{2165 \times n_A}{36}$$

$$\text{Or } a = b \Leftrightarrow 216\,500 - \frac{216\,5 \times n_A}{36} = 208\,250$$

On obtient après calcul, $n_A = 137$ jours après le 05 / 10 / 98

Donc la date d'échéance de l'effet A est le 19 février 99.

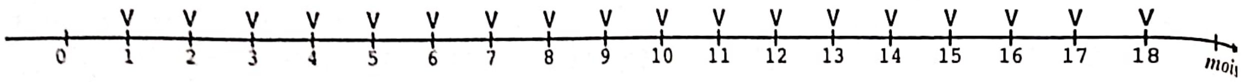
Exercice 3

Pour s'acquitter d'une dette de 897 625 F, un débiteur convient avec son créancier de lui verser immédiatement 20 % de la somme due, et le solde en 18 traites mensuelles de valeurs nominales égales entre elle, la première payable dans un mois.

Le taux d'escompte est de 10 %.

1) Calculer la valeur nominale commune des 18 traites (on la notera V)
2) Déterminer leur échéance moyenne.

Solution



1) **Calcul de la valeur nominale commune (V) des 18 traites.**

• Calcul de la dette D.

$D = 331\,500 - \dfrac{331\,500 \times 20}{100}$ on obtient $D = 265\,200$ soit une dette de $265\,200$ F.

• Calcul de V.

Le créancier n'accepte ce mode de paiement que si la somme des valeurs actuelles des 18 traites est égale à la dette. Ce qui nous permet d'écrire:

$$\sum_{n=1}^{18}\left(V - \frac{Vtn}{1200}\right) = D$$

$$V \cdot \sum_{n=1}^{18}\left(1 - \frac{tn}{1200}\right) = D$$

$$V\left(18 - \frac{t}{1200}\sum_{n=1}^{18} n\right) = D\ , \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{18} n = 18 \times \frac{1+18}{2}.$$

Donc $\left(18 - \dfrac{10}{1200} \times 18 \times \dfrac{1+18}{2}\right)V = 265\,200$

$$16{,}575V = 265\,200$$

$V = \dfrac{265\,200}{16{,}575}$. On obtient alors : $V = 16\,000$ soit 16 000 F.

2) **Détermination de l'échéance moyenne.**

Soit n le nombre de jour restant à courir de l'effet qui remplacerait les 18 traites et dont la valeur nominale est la somme des valeurs nominales de ces 18 traites.

$$18V - \frac{18Vtn}{1200} = D$$

On a : $\dfrac{18Vtn}{1200} = 18V - D$

$$18Vtn = 1200(18V - D)$$

$$n = \frac{1200(18V - D)}{18Vt}$$

$$n = \frac{1200(18 \times 16\,000 - 265\,200)}{18 \times 16\,000 \times 10}$$

On obtient : n=9,5 , soit 9 mois 15 jours. L'échéance moyenne à lieu le 15 du 9ème mois à partir de la date où la dette a été contractée.

CHAPITRE 4

INTERETS COMPOSES

1- DEFINITION

Un capital est placé à **intérêts composés** lorsque l'intérêt s'incorpore au capital à la fin de chaque période et porte ainsi intérêt pendant la période suivante.

On dit que l'intérêt est capitalisé en fin de période.

2- PERIODE DE CAPITALISATION

Le temps est divisé en parties égales que l'on appelle période.

Ces périodes peuvent être par exemple, l'année, le semestre, le trimestre, le mois.

3- TAUX

En matière d'intérêts composés, le taux d'intérêt représente l'intérêt rapporté par 1 F en une période ; le taux d'intérêt peut être annuel, semestriel, trimestriel ou mensuel.

4- VALEUR ACQUISE PAR UN CAPITAL A INTERETS COMPOSES

4-1-Définition

La valeur acquise par un capital placé à intérêts composés au taux i pendant n périodes est la valeur de remboursement de ce capital.

4-2-Détermination de la valeur acquise

Soit A la valeur acquise,

C le capital placé,

i l'intérêt pour 1 F de capital sur une période de capitalisation,

n le nombre de périodes de placement.

La valeur acquise A du capital C placé au taux i pendant n périodes est donnée par la formule: $A = C(1 + i)^n$

Exemple

Quelle est, au bout de 7 ans, la valeur acquise d'un capital de 5 000 F placé à intérêts composés au taux annuel de 8 % ?

Solution

Calcul de la valeur acquise C_7.

$C_n = C(1+i)^n$ avec C = 5 000 ; n = 7.

Par ailleurs, pour un taux de 8% l'an, i est $\frac{8}{100}$. Soit i = 0,08.

Par suite, $C_7 = 5000(1+0,08)^7$.

On obtient à l'aide de la calculatrice, $C_n = 8\,569,1$ soit une valeur acquise de 8 569,1 F.

5 - VALEUR A L'ORIGINE D'UN CAPITAL PLACE A INTERETS COMPOSES

5-1-Définition

On désigne par **valeur à l'origine** d'un capital, la valeur de ce capital le jour de so placement.

La valeur à l'origine peut aussi s'appeler **valeur actuelle.**

5-2-Expression de la valeur à l'origine

Soit A la valeur d'un capital à l'époque n. Déterminons sa valeur à l'époque 0, c'est-à-dire s valeur à l'origine que nous noterons a.

On a : $A = a\,(1+i)^n$ donc $a = \dfrac{A}{(1+i)^n}$ Ou encore $a = A(1+i)^{-n}$.

Exemple

Quelle est la valeur du capital qui, placé à intérêts composés au taux de 10 % l'an, donne à la fin de la 4ème année une valeur acquise de 146 410 F ?

Solution

Détermination du capital initial.

On a : $C = C_4(1+0,1)^{-4}$ avec $C_4 = 146\,410$.

Soit $C = 146\,410(1,1)^{-4}$. A l'aide de la calculatrice on obtient $C = 100\,000$ soit un capital 100 000 F.

6- TAUX EQUIVALENT – TAUX PROPORTIONNEL

Ici, chaque taux considéré représente l'intérêt de 1 F pour la période à laquelle il est rattaché

6-1- Taux équivalents

6-1-1- Définition

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents si, po un même capital donné et pour une même durée de placement, ils conduisent à la mêı valeur acquise à intérêts composés.

6-1-2- Détermination d'un taux équivalent à un taux donné

- Equivalence entre un taux semestriel i_s et un taux annuel i_a :

$$(1+i_s)^2 = (1+i_a) \Leftrightarrow i_s = (1+i_a)^{\frac{1}{2}} - 1 \Leftrightarrow i_a = (1+i_s)^2 - 1 .$$

- Equivalence entre un taux trimestriel i_t et un taux annuel i_a :

$$(1+i_t)^4 = (1+i_a) \Leftrightarrow i_t = (1+i_a)^{\frac{1}{4}} - 1 \Leftrightarrow i_a = (1+i_t)^4 - 1 .$$

- Equivalence entre un taux mensuel i_t et un taux annuel i_a :

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a) \Leftrightarrow i_m = (1+i_a)^{\frac{1}{12}} - 1 \Leftrightarrow i_a = (1+i_m)^{12} - 1 .$$

Exemple

Calculer les taux mensuel, trimestriel et semestriel équivalents au taux annuel de 17,5%.

Solution

Le taux annuel est $i_a = 0,175$
En appliquant les relations ci-dessus, on a :

$$i_m = (1+0,175)^{\frac{1}{12}} - 1 \Rightarrow i_m = 0,0135 \text{ soit } 1,35\%$$

$$i_t = (1+0,175)^{\frac{1}{4}} - 1 \Rightarrow i_t = 0,0411 \text{ soit } 4,11\%$$

$$i_s = (1+0,175)^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow i_S = 0,084 \text{ soit } 8,4\%.$$

6-2- Taux proportionnels

6-2-1- Définition

Deux taux portant sur des périodes de capitalisation différentes sont dits **proportionnels** si, pour un même capital donné et pour une même durée de placement, ils conduisent au même intérêt simple.

Propriété

Lorsque deux taux sont proportionnels, leur rapport est égal à celui des périodes de capitalisation correspondantes.

6-2-2- Détermination d'un taux proportionnel à un taux donné

On a : $\frac{i_a}{i_s} = \frac{12}{6}$; $\frac{i_a}{i_t} = \frac{12}{3}$; $\frac{i_a}{i_m} = \frac{12}{1}$ d'où $i_a = 2i_s$; $i_a = 4i_t$; $i_a = 12i_m$;

Exemple

Calculer les taux mensuel, trimestriel et semestriel proportionnels au taux annuel de 18%.

Solution

Le taux annuel est $i_a = 0{,}18$

Calculons le taux mensuel i_m proportionnel à $i_a = 0{,}18$

$$i_a = 12i_m \Rightarrow i_m = \frac{0{,}18}{12} \text{ on obtient : } i_m = 0{,}015 \text{ soit } 1{,}5\%.$$

$$i_a = 4i_t \Rightarrow i_t = \frac{0{,}18}{4} \text{ on obtient : } i_m = 0{,}045 \text{ soit } 4{,}5\%.$$

$$i_a = 2i_s \Rightarrow i_s = \frac{0{,}18}{2} \text{ on obtient : } i_m = 0{,}09 \text{ soit } 9\%.$$

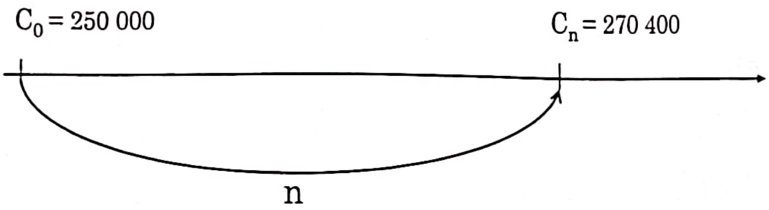
EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Une personne place au taux d'intérêts composés semestriels de 4 % pendant un certain temps, un capital de 250 000 F pour obtenir une valeur acquise de 270 400 F.

Calculer la durée de placement de ce capital.

Solution



Soit n la durée du placement.

On a :

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow \qquad (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(1+i) = \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{270\,400}{250\,000}\right)}{\ln(1+0{,}04)} = \frac{\ln(1{,}0816)}{\ln(1{,}04)} = 2$$

La durée de placement du capital est de 2 semestres

Exercice 2

Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 8 % (Capitalisation annuelle des intérêts). Le jour du retrait, l'intérêt total produit est de 469 329,0768.

Calculer la durée de placement puis la valeur de ce capital sachant que, s'il était placé à intérêts simples, l'intérêt produit serait 40 % du montant du capital initialement placé.

Solution

Soit C, le montant du capital placé, n la durée en années du placement et t le taux du placement.

Calcul de la durée n :

$\frac{C\times t\times n}{100}=\frac{40\times C}{100}$, soit $t\times n=40$. C'est-à-dire $n=\frac{40}{t}\Rightarrow n=\frac{40}{8}$.

On obtient $n=5$. La durée de placement est de 5 ans.

Calcul du capital C :

Par hypothèse : $C(1+i)^n-C=469329{,}0768$ (i étant l'intérêt de 1 F au bout d'une année)

D'où : $C\left[(1+i)^n-1\right]=469329{,}0768$

$$C=\frac{469329{,}0768}{(1+i)^n-1}$$

$$C=\frac{469329{,}0768}{(1{,}08)^5-1}$$

C = 1 000 000. Le capital placé est de 1 000 000 F.

Exercice 3

Un capital de 50 000 F est placé à intérêts composés pendant 3 ans (capitalisation annuelle des intérêts). Il acquiert alors la valeur de 66 550 F.

Déterminer à l'aide de la table financière, le taux annuel de placement.

Solution

Notons : C = 50 000 F ; C' = 66 550 F ; i est l'intérêt pour 1 F placé pendant une année.

On a : $C(1+i)^3=C'$. Soit $(1+i)^3=\frac{C'}{C}\Rightarrow(1+i)^3=\frac{66\,550}{50\,000}\Rightarrow(1+i)^3=1{,}331$.

Sur la table des valeurs de $(1+i)^n$, 1,331000 se trouve à l'intersection de la colonne du taux de 10 % et de la ligne de n = 3. Donc le taux annuel de placement est 10%.

THEME 3

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

- CHAPITRE 1 : SERIES STATISTIQUES A UNE VARIABLE
- CHAPITRE 2 : SERIES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

CHAPITRE 1

SERIES STATISTIQUES A UNE VARIABLE

- VOCABULAIRE DE BASE

1-1- Population

ne population est l'ensemble de référence sur lequel portent des observations.

l peut s'agir d'un ensemble de personnes, d'animaux ou de choses.

xemple

onsidérons comme ensemble d'étude statistique, les machines à dactylographier stockées ans une salle.

'ensemble des machines à dactylographier de cette salle constitue une population atistique.

1 - 2- Individu

n individu ou une unité statistique est un élément de la population.

xemple

ne machine de la salle est un individu.

1– 3 - Caractère

n caractère est l'objet de l'étude sur la population.

ur les machines à dactylographier, on peut étudier les caractères suivants:

- la marque ;
- le nombre de touches ;
- la durée de vie ; etc

1-4- Modalité

ne modalité est une valeur du caractère.

xemple

our le caractère « la durée de vie » les modalités peuvent être exprimées en nombres d'années uivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; etc.

1-5- Effectif d'une modalité

'effectif d'une modalité x est le nombre de fois que cette modalité est observée.

1-6- Effectif total

L'effectif total noté N d'une population est le nombre d'individus de cette population.

On a : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ ou encore $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ où n_i est l'effectif de la modalité x_i .

1-7- Fréquence d'une modalité

La fréquence d'une modalité x_i , notée f_i, est le rapport de son effectif n_i par l'effectif total N :

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

1- 8- Caractère qualitatif

Un caractère qualitatif est un caractère dont les modalités ne sont pas mesurables.

Exemple

Le caractère « marque » est un caractère qualitatif parce qu'une machine prise dans la salle aura comme marque, IBM ou Perfect ou Samsung, etc.

On ne peut pas mesurer par exemple le terme "IBM".

1-9- Caractère quantitatif

1-9-1- Définition

Un caractère quantitatif est un caractère dont chaque modalité est une valeur mesurable.

Exemple

Le caractère nombre de touches est un caractère quantitatif

Un caractère quantitatif peut être discret ou continu.

1-9-2- Variable discrète

Une variable discrète (ou discontinue) est une variable dont les modalités ne prennent qu'un nombre fini de valeurs mesurables.

Exemple

Le caractère « nombre de touches » a pour modalités : 30 ; 31 ; 32, etc.

« Nombre de touches » est donc un caractère discret.

1-9-3- Variable continue

1-9-3-1- Définition

Une variable continue est une variable dont les modalités sont susceptibles de prendre toutes les valeurs d'un intervalle donné appelé classe statistique.

Exemple

Le caractère « durée de vie » peut être regroupé selon les modalités suivantes : moins de 1 an ; de 2 à 4 ans ; de 4 à 5 ans ; plus de 5 ans.

Le regroupement d'une série statistique en classe n'est pas unique.

1-9-3-2- Classe

Une classe statistique est un intervalle de modalités.

L'intervalle de modalités « de 2 à 5 ans » est une classe statistique.

Une classe présente deux bornes ou limites, un centre, une amplitude, un effectif relatif et une fréquence relative.

On la note généralement $[a_i ; a_{i+1}[$ où i est un entier naturel non nul.

1-9-3-3- Centre d'une classe

Le centre c_i d'une classe $[a_i ; a_{i+1}[$ d'origine a_i et d'extrémité a_{i+1}, est la demi somme des bornes.

On a : $c_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

1-9-3-4- Amplitude d'une classe

L'amplitude d'une classe d'origine a_i et d'extrémité a_{i+1}, notée généralement A_i, est la différence de la borne supérieure et de la borne inférieure.

C'est la longueur de l'intervalle $[a_i ; a_{i+1}[$: $A_i = a_{i+1} - a_i$.

1-9-3-5- Effectif relatif d'une classe

L'effectif relatif à une classe, noté n_i, est le nombre d'individus dont les modalités sont contenues dans cette classe.

1-9-3-6- Fréquence relative d'une classe

La fréquence relative d'une classe i, notée le plus souvent f_i est le rapport de l'effectif relatif n_i par l'effectif total N : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$

Comme $N = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$

Alors : $\dfrac{n_1}{N} + \dfrac{n_2}{N} + \dfrac{n_3}{N} + ... \dfrac{n_k}{N} = \dfrac{N}{N} = 1$

Ainsi: $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = 1$.

NB : La fréquence peut aussi s'exprimer en pourcentage.

Dans ce cas, elle est de la forme $f_i = \dfrac{n_i}{N} \times 100$ et $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = 100$

1-10- Effectifs cumulés

Les modalités x_i sont rangées dans l'ordre croissant

- On appelle effectifs cumulés croissants de la modalité x_i la somme des effectifs des modalités inférieures ou égale à x_i.

- On appelle effectifs cumulés décroissants de la modalité x la somme des effectifs des modalités supérieures ou égale à x.

1-11- Collecte d'information

On dispose de plusieurs méthodes de collectes d'informations

1-11-1- Enquête

Une enquête est une méthode de collecte d'informations qui porte sur tous les individus de la population (enquête exhaustive) ou sur une partie de la population (enquête partielle).

1-11-2- Recensement

Un recensement est une enquête qui porte sur tous les individus de la population.

On l'appelle aussi enquête exhaustive.

1-11-3- Sondage

Le sondage ou enquête partielle, porte sur un échantillon ou portion de la population.

1-12-Traitement des données

Le traitement des données se fait selon la démarche suivante :

1-12-1- Dépouillement

Le dépouillement des résultats d'une enquête sur une population est une opération de décompte des individus en fonction des modalités ou des classes.

1-12-2- Tableau de dépouillement

Le tableau de dépouillement comprend 3 colonnes.

La 1ère colonne donne la liste des modalités ou la nomenclature des modalités.

La 2ème colonne met en évidence le mode de décompte choisi.

On distingue généralement deux modes de décompte :

- la technique du balai. Exemple ~~IIII~~
- la méthode du pendu. Exemple ⍂

La 3ème colonne donne l'effectif d'individus rattaché à chaque modalité.

Exemple de dépouillement du caractère sexe des élèves d'une classe.

Liste des modalités du caractère	Dépouillement	Effectif
Masculin	~~IIII~~	5
Féminin	II	2

1-12-3- Tableau statistique

Un tableau statistique est un tableau récapitulatif de l'enquête.

Exemple

Répartition de 50 employés d'une entreprise selon le nombre d'enfants à charge

Nombre d'enfants à charge	Nombre d'employés
0	5
1	14
2	15
3	7
4	3
5	5
6	1
Total	50

2- REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

Un graphique est une synthèse visuelle de toutes les informations recueillies dans un tableau statistique. Quoique moins précis qu'un tableau de valeurs statistiques, le graphique offre une vue d'ensemble de la répartition spatiale ou chronologique de la population.

Suivant la nature du caractère étudié, on utilise différents modes de représentation.

2-1- Caractère qualitatif

Les représentations graphiques d'un caractère qualitatif sont très nombreuses et sont fonction des différentes modalités du caractère. Nous nous limiterons à deux types de graphiques les plus utilisés dans le secteur tertiaire.

2-1-1- Construction d'un Diagramme à bandes

Un diagramme à bandes se construit de la façon suivante :

- on construit deux axes perpendiculaires
- sur l'axe des abscisses on place les différentes modalités
- sur l'axe des ordonnées on place les effectifs relatifs n_i ou les fréquences relatives f_i
- on trace une bande verticale proportionnelle à l'effectif associé à chaque modalité.

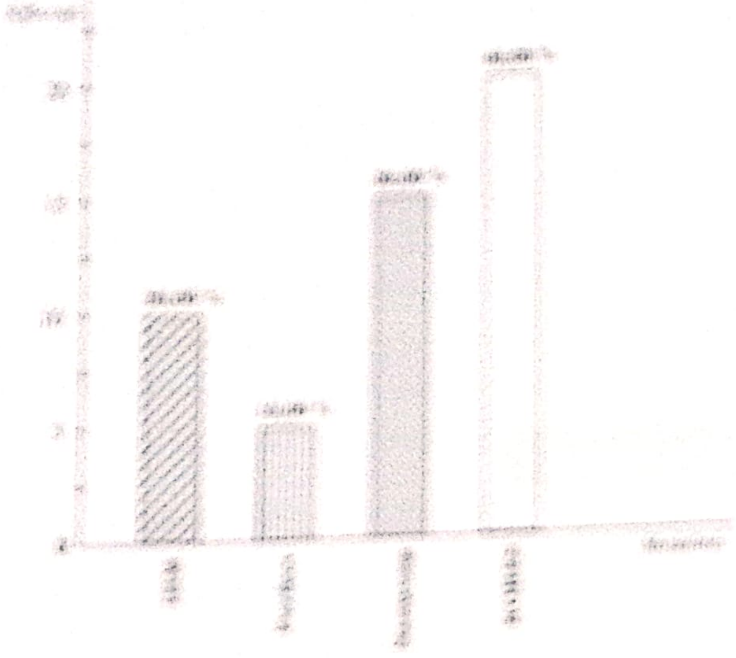
Exemple

Dans un magasin est stocké un ensemble de 50 machines à dactylographier. La répartition de ces machines selon leur marque est consignée dans le tableau suivant :

Marques	IBM	Perfect	Samsung	KORES	**Total**
Effectifs	**10**	**5**	**15**	**20**	**50**

Représentons cette série par un diagramme à bandes

DIAGRAMME A BANDES



2-1-2 Construction d'un diagramme à secteurs

L'effectif total est représenté par un disque (ou demi-disque).

A chaque modalité x_i du caractère on fait correspondre un secteur angulaire α_i dont la mesure est proportionnelle à l'effectif relatif n_i correspondant à cette modalité.

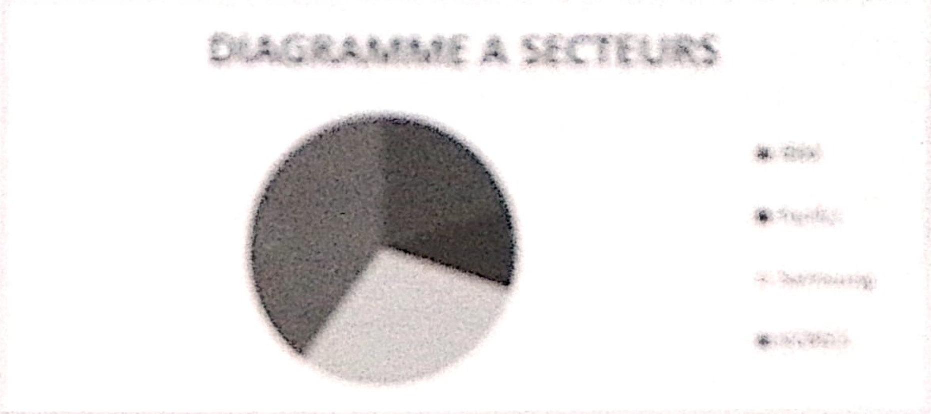
$\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360$ pour le disque

$\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 180$ pour le demi disque

Exemple

Représentons la série précédemment étudiée par un diagramme à secteurs

Solution



2.2 Caractère quantitatif

2.2.1 Cas d'une variable discrète

2.2.1.1 Construction d'un diagramme à bâtons

Nous marquerons sur l'axe des abscisses les modalités et sur l'axe des ordonnées, les effectifs ou les fréquences.

En chaque point de coordonnées (x_i, n_i) ou (x_i, f_i) obtenu, on construit un segment (bâton) parallèle à l'axe des ordonnées jusqu'à l'axe des abscisses.

Nous obtenons alors un diagramme à bâtons.

Exemple : voir exercice 7 de la partie exercices de statistique à une variable

2.2.1.2 Polygone des effectifs (ou des fréquences) cumulé(e)s

Le polygone des effectifs (ou fréquences) cumulé(e)s est la courbe représentative de la fonction qui, à chaque modalité, associe son effectif (ou sa fréquence) cumulé(e) (croissant(e) ou décroissant(e)).

Exemple : voir exercice 3 et 7 de la partie exercices de statistique à une variable

2.2.2 Cas d'une variable continue

2.2.2.1 Histogramme

On distingue deux cas :

- **Les amplitudes sont égales**

Dans le cas d'amplitudes égales, chaque classe associée à son effectif (ou fréquence) est représentée par un rectangle dont la largeur est égale à l'amplitude de la classe et la hauteur égale à l'effectif (ou à la fréquence).

- **Les amplitudes sont inégales**

Dans le cas où les classes ont des amplitudes inégales, il y a lieu d'apporter certaines corrections des effectifs ou fréquences avant de construire l'histogramme.
La technique de correction est la suivante :

- Choisir une amplitude de référence A_0, généralement, l'amplitude la plus petite.
- Pour une classe d'amplitude A_i et d'effectif n_i, l'effectif corrigé n'_i est alors :

$$n'_i = \frac{n_i \times A_0}{A_i}$$

Exemple : voir exercice 1 de la partie exercice de statistique à une variable

2-2-2-2- Polygone des effectifs (ou fréquences) cumulé(e)s

- Pour construire le polygone des effectifs cumulés croissants (ou fréquences cumulées croissantes), on construit les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et dont les ordonnées sont les effectifs cumulés (ou les fréquences cumulées) croissants. Le polygone est la ligne joignant ces points.
- Pour le polygone des effectifs cumulés décroissants (ou des fréquences cumulées décroissantes), on construit les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes et dont les ordonnées sont les effectifs (ou fréquences) cumulés décroissants. Le polygone des effectifs (ou des fréquences) cumulés décroissants est la ligne joignant ces points.

Exemple : voir exercice 3 et 7 de la partie exercice de statistique à une variable

3 - PARAMETRES DE POSITION

Les graphiques nous permettent de visualiser la série statistique. Les paramètres de position encore appelés caractéristiques de tendance centrale vont permettre de décrire au mieux la population observée.

3- 1 -Le mode

3-1-1- Définition

Le mode M_0 (ou dominante) d'une série statistique est la valeur du caractère qui a l'effectif (ou la fréquence) maximal(e).
Il peut exister plusieurs modes dans une même série.

3-1-2- Détermination du mode

- **Cas d'une variable discrète**

Un mode se lit aisément dans le tableau des valeurs (ou sur un graphique) à travers la valeur de la modalité ayant l'effectif ou la fréquence le plus élevé.

- **Cas d'une variable continue**

Dans le cas d'une variable continue, on détermine, dans un premier temps la classe modale grâce au plus grand effectif (ou plus grand effectif corrigé si les classes sont d'amplitudes différentes.).

On détermine ensuite le centre de cette classe qui est le mode de la population.

3-2- La moyenne arithmétique

On distingue deux types de moyenne arithmétique: la moyenne arithmétique simple et la moyenne arithmétique pondérée.

3-2-1- La moyenne arithmétique simple

Prenons une population de n individus, de modalités $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La **moyenne arithmétique simple** notée $\overline{x}$ est le quotient de la somme des modalités par le nombre n des individus : $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

3-2-2- la moyenne arithmétique pondérée

Considérons une population de N individus, de modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et dont les effectifs sont : $n_1, n_2, \ldots, n_p$

La moyenne arithmétique pondérée est égale à $\overline{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$ ou bien $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$

Dans le cas d'une variable continue, les valeurs x_i désignent les centres c_i des classes.

3- 3 - La médiane

3-3-1- Définition

On appelle **médiane** la modalité qui partage la série en deux parties de même effectif lorsque les modalités sont rangées par ordre croissant ou décroissant.

3-3-2- Détermination de la médiane

- **Cas d'une variable discrète**

Si l'effectif total est un nombre impair : $(n = 2p+1)$ la médiane est la modalité de rang $(p+1)$:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_p \leq \underbrace{x_{p+1}}_{Me} \leq x_{p+2} \leq x_{p+3} \leq \ldots \leq x_{2p+1}.$$

Exemple1

Cinq étudiants d'une classe de BT ont obtenu les notes de Maths suivantes : 11 ; 05 ; 14 ; 09 ; 12. Quelle est la note médiane ?

Solution

En rangeant ces notes par ordre croissant, 05 ; 09 ; 11 ; 12 ; 14, la médiane est 11 car on observe deux notes à gauche de 11 et deux notes à droite de 11.

Si l'effectif total est un nombre pair $(n = 2p)$, la médiane existe lorsque le terme de rang p et le terme de rang $p + 1$ sont identiques. Dans le cas contraire la médiane n'existe pas.

Exemple 2

Six étudiants d'une classe de BT ont obtenu les notes de Maths suivantes : 05 ; 09 ; 12; 12 ; 14 ; 16. Quelle est la note médiane ?

Solution

La troisième et la quatrième note sont identiques donc la médiane est 12.

Cependant on peut constater qu'une autre série statistique de même espèce présente un intervalle médian et non une médiane. C'est l'exemple de quatre étudiants avec les notes 05 ; 09 ; 11; 12.

- **Cas d'une variable continue**

On appelle médiane d'une série statistique d'effectif total N, le nombre réel Me qui divise l'effectif total en deux parties égales.

Méthodes de détermination

- La détermination de la médiane se fait par interpolation linéaire à l'aide des effectifs cumulés croissants ou des fréquences cumulées croissantes.
- Elle se fait aussi graphiquement à l'aide des polygones des effectifs (ou des fréquences) cumulé(e)s croissant(e)s ou décroissant(e)s.

  C'est l'abscisse du point de ces polygones qui a pour ordonnée $\frac{N}{2}$ en effectifs cumulés ou 50% en fréquences cumulées.

  C'est aussi l'abscisse du point d'intersection des deux polygones.

3-4- Les quantiles

3-4-1- Définitions

La division de l'effectif total en n parties égales induit les quantiles.

Ainsi :

- la division de l'effectif total en quatre parties égales induit les quartiles.

  On distingue trois quartiles : Q_1, Q_2, Q_3

  -Q_1 est la modalité qui correspond à $\frac{N}{4}$;

  -Q_2 est la modalité qui correspond à $\frac{N}{2}$;

  -Q_3 est la modalité qui correspond à $\frac{3N}{4}$

- la division de l'effectif total en dix parties égales induit les déciles.

  On distingue neuf déciles : $D_1, D_2, \ldots D_9$

D_1 (respectivement $D_2, \ldots D_9$) est la modalité qui correspond à $\frac{N}{10}$ (respectivement $\frac{2N}{10} \ldots \frac{9N}{10}$)

- la division de l'effectif total en cent parties égales induit les centiles.

  On distingue quatre vingt dix neuf centiles : $C_1, C_2, \ldots C_{99}$

C_1 (respectivement $C_2, \ldots C_{99}$) est la modalité qui correspond à $\frac{N}{100}$

(respectivement $\frac{2N}{100} \ldots \frac{99N}{100}$).

3-4-2- Détermination

Les quantiles se déterminent de la même manière que la médiane.

4 - PARAMETRES DE DISPERSION

Les paramètres de position d'une série (mode, moyenne, médiane, quantiles) donnent une idée de la tendance centrale de la distribution des observations, mais ils ne suffisent pas à apprécier la dispersion de la distribution.

Pour avoir une parfaite connaissance de cette distribution, il faut voir comment les valeurs de la série sont réparties autour des paramètres de position. Ce sont des paramètres de dispersion qui permettent une telle connaissance.

4-1- L'étendue

On appelle étendue d'une série statistique, la différence entre la plus grande et la plus petite valeur que peut prendre le caractère.

[illegible] L'écart absolu moyen

[illegible] Définition

[illegible]

[illegible] Expression mathématique

[illegible]

[illegible] La Variance

[illegible] Définition

[illegible]

[illegible] Expression mathématique

[illegible]

[illegible] L'écart type

[illegible] Définition

[illegible]

[illegible] Expression mathématique

[illegible]

[illegible] Écart interquartile

[illegible]

[illegible] Coefficient de variation

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

F

« Une enquête portant sur la discipline enseignée par les professeurs d'un établissement secondaire technique»

G

« Une enquête sur le kilométrage annuel de 1 695 voitures d'Abidjan... »

Solution

A

Population : Les 100 ouvriers d'un atelier

Individu : un ouvrier

Caractère : nombre de pièces fabriquées

Nature statistique du caractère : quantitatif discret

Deux exemples de modalité : 3 pièces, 10 pièces

B

Population : les 384 familles

Individu : une famille

Caractère : le nombre d'enfants

Nature statistique du caractère : quantitatif discret

Deux exemples de modalité : 7 enfants, 4 enfants

C

Population : les candidats au BAC de l'établissement

Individu : un candidat

Caractère : série du BAC

Nature statistique du caractère : Qualitatif

Deux exemples de modalité : A, G1

D

Population : personnel d'une entreprise

Individu : un travailleur

Caractère : l'ancienneté en années de travail

Nature statistique du caractère : quantitatif continu

Deux exemples de modalité : 3,5 ans ; 4 ans

E

Population : **Les clients d'une banque**

Individu : **un client**

Caractère : **montants (en francs) des soldes**

Nature statistique du caractère : **quantitatif continu**

Deux exemples de modalité : **200 000 f, 50 129,5 f**

F

Population : **les professeurs de l'établissement**

Individu : **un professeur**

Caractère : discip**line enseignée**

Nature statistique du caractère : **qualitatif**

Deux exemples de modalité : **Mathématiques, EPS**

G

« Une enquête sur le kilométrage annuel de 1 695 voitures d'Abidjan… »

Population : **1 695 voitures d'Abidjan**

Individu : **une voiture**

Caractère : **kilométrage annuel**

Nature statistique du caractère : **quantitatif continu**

Deux exemples de modalité : **2514,9 km ; 354500 km.**

Exercice 2

On mène une enquête pour déterminer la région de naissance (Centre, Est, Nord, Ouest et Sud) de chaque élève de votre classe.

On demande :

1) De réaliser cette enquête au sein de votre classe en interrogeant chaque élève sur sa région de naissance,
2) D'effectuer le dépouillement dans un tableau approprié,
3) D'élaborer le tableau statistique comportant :
   - La colonne des effectifs de chaque modalité
   - La colonne des fréquences en valeurs décimales
   - La colonne des fréquences en pourcentages
4) Quelle est la région qui présente le plus grand nombre d'élèves dans la classe ?

Exercice 3

Une enquête portant sur tous les 50 étudiants d'une classe de BTS, a donné ci-dessous le nombre de sœurs de chacun d'eux.

5, 2, 0, 3, 1, 3, 0, 3, 2, 5
4, 1, 4, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 1
3, 0, 3, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 4
4, 3, 1, 3, 0, 3, 4, 2, 5, 3
3, 2, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3

On demande :

1) De déterminer la population et le caractère étudiés
2) De citer toutes les modalités du caractère
3) De préciser si cette enquête est un sondage ou un recensement
4) a) D'élaborer un tableau de dépouillement,
   b) De présenter le tableau des effectifs ayant :
   - Des fréquences en pourcentage,
   - Des fréquences cumulées croissantes en pourcentage.
5) Quel est le pourcentage d'étudiants ayant :
   a- Au moins deux sœurs ?
   b- Au plus une sœur ?

Solution

1) Déterminons la population et le caractère étudiés

Population : les 50 Etudiants d'une classe de BTS

Caractère : Nombre de sœurs

2) Citons toutes les modalités du caractère

Modalités du caractère : 0; 1; 2; 3; 4 ; 5.

3) Précisons si cette enquête est un sondage ou un recensement

L'enquête porte sur tous les individus de la population. Il s'agit donc d'un recensement.

4) a) Elaborons le tableau du dépouillement

Liste de nombres de sœurs	Dépouillement	Liste de nombres d'élèves
0	~~IIII~~	5
1	~~IIII~~ IIII	9
2	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
3	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
4	~~IIII~~ III	8
5	III	3
Total		50

4) b) Le tableau statistique

Nombres de sœurs (x_i)	Nombres d'élèves (n_i)	Fréquences d'élèves : f_i	f_i %	Fréquences cumulées croissantes en %	Fréquences cumulées décroissantes en %
0	5	0,1	10	10	100
1	9	0,18	18	28	90
2	10	0,20	20	48	72
3	15	0,30	30	78	52
4	8	0,16	16	94	22
5	3	0,06	6	100	6
Total	50	1	100		

5) Le pourcentage d'élèves ayant :

a) au moins deux sœurs est 72, qui correspond à la fréquence cumulée décroissante de la modalité 2

b) au plus 1 sœur est 28, qui correspond à la fréquence cumulée croissante de la modalité 1

Exercice 4

Dans une entreprise on a demandé à chacun des 35 ouvriers quelle était la durée du trajet de son domicile à son service. Ces durées arrondies aux multiples de 5 supérieurs, sont :

45 60 90 90 60 100 100 105 100 60
75 60 60 100 90 75 85 105 110 60
30 70 75 90 60 90 100 35 75 100
110 125 120 100 90.

1) Ranger ces durées par ordre croissant.
2) Constituer les classes statistiques d'amplitude constante égale à 15 minutes.
3) Dresser le tableau comportant la colonne:
   - des classes
   - des centres de classe
   - des effectifs
   - des fréquences relatives en valeurs décimales
   - des fréquences relatives cumulées croissantes et décroissantes en pourcentages.
4) Donner la classe modale
5) Quel est le pourcentage d'ouvriers faisant :
   a) Moins d'une heure de trajet
   b) Au moins une heure 30 minutes de trajet.

Solution

1) Rangeons les durées du trajet par ordre croissant

30 ; 35 ; 45 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ;

70 ; 75 ; 75 ; 75 ; 75 ; 85 ; 90 ; 90 ; 90 ; 90

90 ; 90 ; 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 100 ; 105

105 ; 110 ; 110 ; 120 ; 125.

2) Constituons les classes d'amplitude égale à 15

[30 ; 45 [; [45 ; 60[; [60 ; 75[; [75 ; 90[; [90 ; 105 [; [105 ; 120[; [120 ; 135[

3) Dressons le tableau des effectifs

Durées du trajet	Centre	Nombre d'ouvriers	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes	Fréquences cumulées décroissantes
[30; 45 [	37,5	2	0,06	0,06	1
[45; 60[	52,5	1	0,03	0,09	0,94
[60; 75[	67,5	8	0,23	0,32	0,91
[75; 90[	82,5	5	0,14	0,46	0,68
[90;105[	97,5	13	0,37	0,83	0,54
[105;120[	112,5	4	0,11	0,94	0,17
[120;135[	127,5	2	0,06	1	0,06
Total		35	1		

4) Donnons la classe modale

La classe modale est [90 ; 105[

5) Le pourcentage d'ouvriers faisant :

a) moins d'une heure de trajet est 9% qui correspond à la fréquence cumulée croissante de la classe [45, 60[

b) au moins une heure 30 mn est 54 % qui correspond à la fréquence cumulée décroissante de la classe [90,105[.

CHAPITRE 2

SERIES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

1- DEFINITIONS

1-1- Série statistique double

P est une population de N individus, sur laquelle sont définis deux caractères X et Y.

Sur chaque individu i de P, on observe une modalité x_i du caractère X et une modalité y_i du caractère Y.

On appelle **série statistique double** de caractères (X ; Y) l'ensemble des couples de modalités $(x_i\,;y_i)$.

1- 2- Nuage de points

Considérons la population statistique P à N éléments pour laquelle on se propose d'étudier simultanément les caractères X et Y.

Individus	1er	2ème	3ème	...	(n-1)^{ème}	n ^{ième}
Modalités de X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
Modalités de Y	y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n

Dans un repère orthogonal (O, I, J) du plan, on associe à chaque couple (x_i , y_i) un point M_i représentant un individu de la population.

On appelle **nuage de points** de la série double (X,Y), l'ensemble des points M_i du plan

1-3- Point moyen d'un nuage

On appelle point moyen d'un nuage de n points de coordonnées (x_i , y_i), le point $G(\overline{X};\overline{Y})$ tel que $\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ et $\overline{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$.

1 – 4 – Notion d'ajustement affine

Il s'agit de déterminer une courbe simple et régulière qui reflète le plus fidèlement possible la tendance générale du nuage de points associés à la série.

Lorsque la forme du nuage de points donne la possibilité de tracer une droite qui passe le plus près possible des points, on dit alors que l'on a **un ajustement affine.**

Cette **droite d'ajustement** encore appelée droite d'estimation est un précieux **instrument de prévisions.**

2 – AJUSTEMENT AFFINE

Nous retenons deux méthodes pour déterminer une équation de la droite d'ajustement

On considère la série double (x_i, y_i) de caractère X et Y avec i variant de 1 à N.

2 -1- Ajustement affine par la méthode de Mayer

2-1-1 Principe de la méthode

On range les modalités du caractère X dans l'ordre croissant

On partage la série en deux sous séries de même effectif ou à une unité près.

On calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque sous série

La droite (G_1G_2) est la droite d'ajustement **de MAYER.**

2-1-2 - Détermination de l'équation réduite de la droite de MAYER.

L'équation réduite de la droite de Mayer est de la forme $y = a\,x + b$ avec a et b des nombres réels à déterminer.

Sachant que les coordonnées des points moyens $G_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ vérifient l'équation de la droite de MAYER, on a : $a = \dfrac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}$ et $b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1$

N.B : La **droite de MAYER** passe par le point moyen G du nuage.

2-2 - Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

2-2-1- Covariance de la série à deux variables.

La covariance de X et Y est le nombre réel noté $\text{cov}(X, Y)$ et défini par :

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{X}\,\overline{Y}$$

2-2-2- Coefficient de corrélation linéaire.

Le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X, Y) est le nombre réel noté r défini par la relation : $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$.

Propriété

- On a toujours $-1 \le r \le 1$.
- Lorsque $0,87 \le |r| \le 1$, il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

Dans ce cas un ajustement affine est justifié.

2-2-3- Equations des droites de régression

- **Droite de régression de Y en X**

Elle a pour équation réduite $y = a\,x + b$ avec $\begin{cases} a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \\ b = \overline{Y} - a\overline{X} \end{cases}$

- **Droite de régression de X en Y**

Elle a pour équation réduite $x = a'y + b'$ avec $\begin{cases} a' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} \\ b' = \overline{X} - a'\overline{Y} \end{cases}$

2-3- Utilisation de l'équation de la droite d'ajustement comme instrument de prévision

- Connaissant une valeur x_0 donnée, on peut déterminer y_0 correspondant à l'aide de l'équation de la droite de régression de Y en X.
- Connaissant une valeur y_0 donnée, on peut déterminer x_0 correspondant à l'aide de l'équation de la droite de régression de X en Y.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Un organe d'information en Côte d'Ivoire a relevé pendant les 6 derniers mois le montant de son chiffre d'affaire X et le montant de ses frais de publicité Y en millions de francs.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous :

x_i	48	49	55	57	61	60
y_i	9	9,8	10	10,5	10,8	11

1) Déterminer un ajustement affine par la méthode de MAYER.
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y. Commenter le résultat.
3) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression :
   a) de y en x.
   b) de x en y.
4) Pour un chiffre d'affaire de 100 millions, quel serait le montant des frais de publicité ? (on utilisera l'équation de la droite de régression de y en x)

Solution :

1) Déterminons un ajustement affine par la méthode de Mayer

- On range d'abord les modalités x_i en ordre croissant.
- On partage ensuite la série en deux sous série de même effectif (on a un effectif pair 6 individus) ;

(S_1)

x_i	48	49	55
y_i	9	9,8	10

(S_2)

x_i	57	60	61
y_i	10,5	11	10,8

- On calcule les coordonnées des point moyens G_1 associé à la série S_1 et G_2 associé à S_2 $G_1(\overline{x}_1;\overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2;\overline{y}_2)$.

On a $\overline{x}_1 = \frac{48+49+55}{3}$ c'est-à-dire $\overline{x}_1 = 50,67$ et $\overline{y}_1 = \frac{9+9,8+10}{3}$ d'où $\overline{y}_1 = 9,6$

On a aussi : $\overline{x}_2 = \frac{57+60+61}{3}$ soit $\overline{x}_2 = 59,33$ et $\overline{y}_2 = \frac{10,5+10,8+11}{3}$ d'où $\overline{y}_2 = 10,77$

Donc $G_1(50,67 ; 9,6)$ et $G_2(59,33 ; 10,77)$

- Détermination de l'équation réduite de la droite de Mayer.

L'équation réduite de la droite de Mayer est de la forme : $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} \quad \text{et} \quad b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1$$

$$a = \frac{9,6 - 10,77}{50,67 - 59,63} = 0,13$$

$$b = 9,6 - 0,13 \times 50,67 = 3,01$$

L'équation réduite de la droite de Mayer est alors : $y = 0,13x + 3,01$

2) Calculons le coefficient de corrélation linéaire r

Tableau de calcul

							Total
x_i	48	49	55	57	61	60	**330**
y_i	9	9,8	10	10,5	10,8	11	**61,1**
$x_i y_i$	432	480,2	550	598,5	658,8	660	**3379,5**
x_i^2	2304	2401	3025	3249	3721	3600	**18300**
y_i^2	81	96,04	100	110,25	116,64	121	**624,93**

Calcul des moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, des variances $V(X)$ et $V(Y)$, et de la covariance cov $(X ;Y)$.

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{330}{6}$. Soit $\overline{x} = 55$; $\overline{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{61,1}{6}$. Soit $\overline{y} = 10,18$.

$$V(X) = \frac{\sum {x_i}^2}{N} - (\overline{x})^2$$

$$V(X) = \frac{18300}{6} - (55)^2 = 25$$

$$V(Y) = \frac{\sum {y_i}^2}{N} - (\overline{y})^2$$

$$V(Y) = \frac{624,93}{6} - (10,18)^2 = 0,5226$$

$$\text{cov}(X;Y) = \frac{\sum x_i y_i}{6} - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{3\,379,5}{6} - 55 \times 10,18. \text{ Soit } \text{cov}(X;Y) = 3,35.$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{v(X) \times v(Y)}}$$

$$r = \frac{3,35}{\sqrt{25 \times 0,5226}}$$

$$r = 0,92$$

Le coefficient de corrélation linéaire est 0,92. Il est proche de 1. Il y a donc une forte corrélation linéaire entre les frais de publicité et le chiffre d'affaires.

3) Déterminons par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression :

- **de y en x.**

Une équation de la droite de régression de y en x est de la forme :

$y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{3,35}{25}$ ce qui donne $a = 0,134$

et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$ c'est-à-dire $b = 10,18 - 0,134 \times 55$ d'où $b = 2,81$.

Par suite, $y = 0,134x + 2,81$.

Une équation de la droite de régression de y en x est $y = 0,134x + 2,81$.

- **de x en y.**

Une équation de la droite de régression de x en y est de la forme :

$x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} = \frac{3,35}{0,5226}$ ce qui donne $a' = 6,41$

et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$ c'est-à-dire $b' = 55 - 6,41 \times 10,18$ d'où $b' = -10,25$.

Par suite, $x = 6,41y - 10,25$.

Une équation de la droite de régression de x en y est $x = 6,41y - 10,25$.

4) Déterminons le montant des frais publicitaire pour un chiffre d'affaire de 100 millions.

On a $x = 100$ donc $y = 0,134 \times 100 + 2,81$ soit $y = 16,21$.

Pour un chiffre d'affaire de 100 millions, les frais de publicité s'estiment à 16,21 millions.

Exercice 2

Le tableau suivant donne pour les six premiers mois de l'année 2004, les montants x_i des frais de publicité de l'entreprise de presse « BON JOURNAL » et les montants y_i de ses chiffres d'affaires, exprimés en millions de francs.

mois	Jan.	Fév.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7						
y_i	127	102	137	116	117	142						

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à cette série.

Echelle : Abscisses : 2,5 cm pour 1 million à partir de 4 millions

Ordonnées : 2,5 cm pour 10 millions à partir de 100 millions.

2) Est-il possible d'envisager un ajustement linéaire ? Pourquoi ?

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire pour confirmer votre réponse en 2)

4) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

5) En supposant que les frais de publicité augmente chaque mois de 500 000 F à partir du mois de juin, et que les chiffres d'affaires évoluent suivant l'équation de la droite de régression de y en x, compléter le tableau en déterminant :

   a. les frais de publicité des six derniers mois,

   b. les chiffres d'affaires prévisionnels de ces mois.

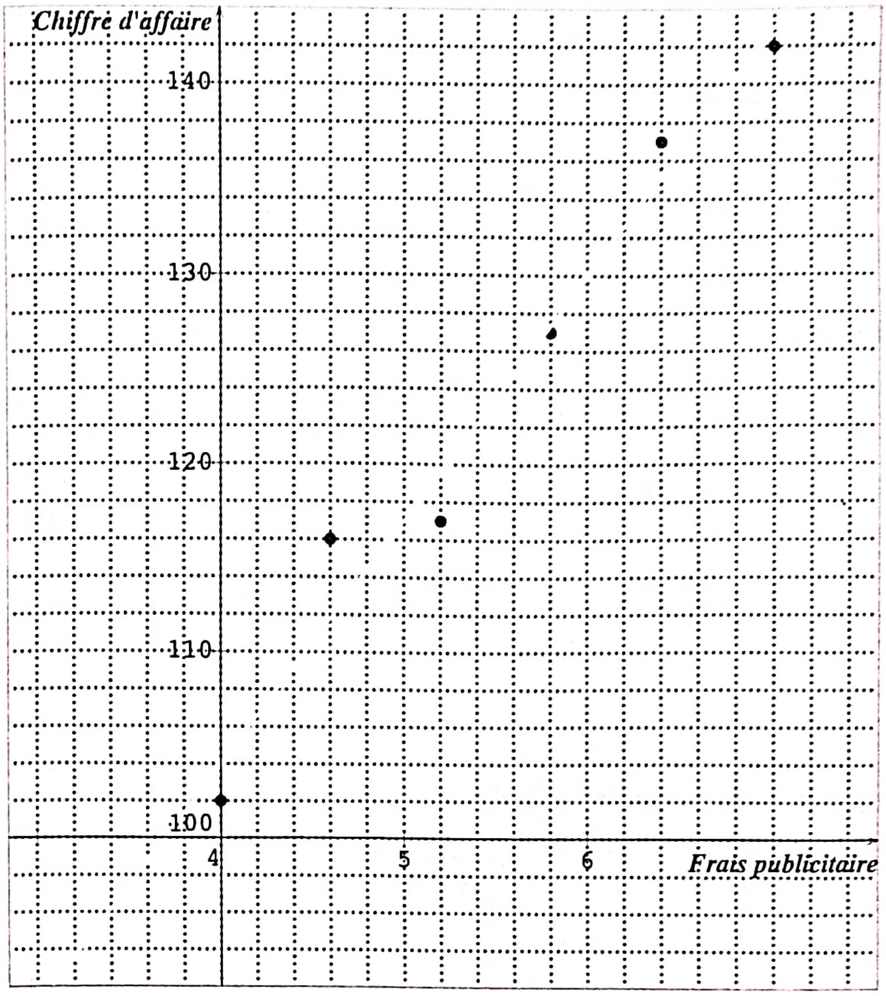
6) Etablir une équation de la droite de régression de x en y.

À quelle date « BON JOURNAL » pourrait-il atteindre 223,51 millions de chiffre d'Affaires ?

NB : *On donnera les résultats des calculs au 1000ème près.*

olution

1) **Représentons graphiquement le nuage de points**



2) **Il est possible d'envisager un ajustement linéaire car le nuage de points a une forme allongée.**

3) **Calculons le coefficient de corrélation linéaire** r

Tableau de calcul

							Total
x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7	**33**
y_i	127	102	137	116	117	142	**741**
x_i^2	33,64	16	40,96	21 ,16	27,04	49	**187,8**
y_i^2	16 129	10 404	18 769	13 456	13 689	20 164	**92 611**
$x_i y_i$	736,6	408	876,8	533,6	608,4	994	**4 157,4**

- Calcul des moyennes :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(33) = 5,5 \qquad \overline{Y} = \frac{1}{6}(741) = 123,5$$

- Calcul des variances

$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$ $\qquad$ $V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{Y}^2$

$V(x) = \frac{1}{6}(187,8) - 5,5^2 = 1,05$

$V(y) = \frac{1}{6}(92\,611) - 123,5^2 = 182,917$

- Calcul de covariance

$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$

$cov(x, y) = \frac{1}{6}(4\,157,4) - 5,5 \times 123,5 = 13,65$

Déterminons r : $\qquad r = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$

$$r = \frac{13,65}{\sqrt{1,05 \times 182,917}} = 0,984$$

r est proche de 1. Cette valeur de r confirme notre affirmation en 2), c'est-à-dire qu'un ajustement affine est justifié.

4. Déterminons une équation de la droite (D) de régression de y en x.

Une équation de (D) est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x, y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

- Calcul de a $\qquad$ Calcul de b

$a = \frac{cov(x, y)}{V(x)}$ $\qquad$ $b = \overline{y} - a\overline{x}$

$a = \frac{13,65}{1,05} = 13$ $\qquad$ $b = 123,5 - 13 \times 5,5 = 52$

Une équation de (D) est donc $\mathbf{y = 13x + 52}$

5. Complétons le tableau

a), b)

Mois	Jan.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.
Frais de publicité x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7	7,5	8	8,5	9	9,5
Chiffres d'affaires y_i	127	102	137	116	117	142	149,5	156	162,5	169	175,5

6. a) Déterminons une équation de la droite de régression (D') de x en y

Une équation de (D') est de la forme $x = \alpha y + \beta$ avec $\alpha = \frac{cov(x,y)}{V(y)}$ et $\beta = \bar{x} - \alpha \bar{y}$

- Calcul de α

$\alpha = \frac{cov(x,y)}{V(y)}$

$\alpha = \frac{13,65}{182,917} = 0,075$

Calcul de β

$\beta = \bar{x} - \alpha \bar{y}$

$\beta = 5,5 - 0,075 \times 123,5 = -3,763$

On en déduit qu'une équation de (D') est donc $\mathbf{x = 0,075y - 3,763}$.

b) Déterminons la date à laquelle le chiffre d'affaires de « BON JOURNAL » pourra atteindre 223,51 millions de francs.

- **Estimons x connaissant y**

Pour $y = 223,51$, $x = 0,075 \times 223,51 - 3,763 = 13$

En Décembre 2004, $x = 10$. Sachant que chaque mois les frais de publicité augmentent de 500 000 F, c'est-à-dire x augmente de 0,5 ; pour atteindre 13, BON JOURNAL fonctionnera pendant 6 mois $\left(\frac{13-10}{0,5} = 6\right)$, à partir de décembre 2004.

Il ressort de cette analyse que « BON JOURNAL » pourrait atteindre **223,51** millions de francs de chiffres d'affaires en juin 2005

Exercice 3

Il a été relevé chez huit (8) planteurs de coton, la superficie X (en ha) et la production Y (en tonnes) dans le tableau ci-dessous :

x_i	2	4	14	8	10	12	6	16
y_i	8	13	33	20	25	27	15	35

1) **Représenter le nuage de point associé à cette série dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 ha en abscisse et 1 cm pour 5 tonnes en ordonnées).**
2) **Déterminer les coordonnées du point moyen G et placer-le dans le repère.**
3) **a) Partager la série en deux sous séries E_1 et E_2.**

   b) Calculez les coordonnées du point moyen de chaque sous nuage (on note G_1, le point moyen du premier sous nuage et G_2 celui du deuxième sous nuage).

   c) Placez les points G_1 et G_2 dans le repère.

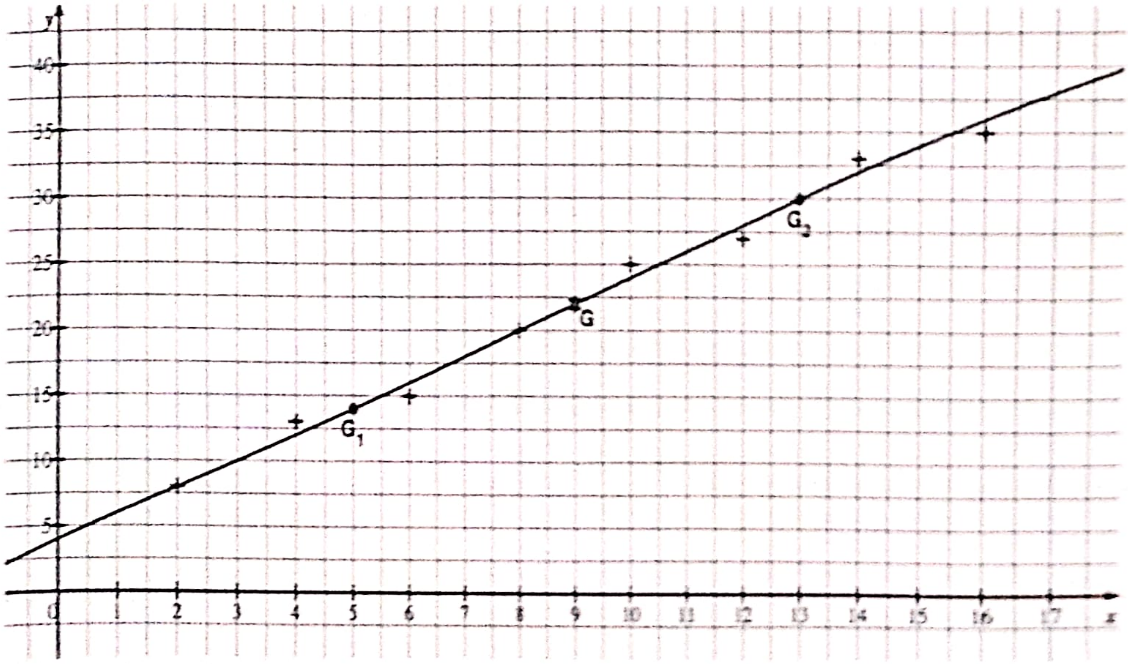
4) a) Déterminer une équation de la droite de Mayer associée à la série étudiée.

b) Quelle serait la production pour une superficie de 20 ha ?

c) Quelle serait la superficie d'un champ de coton qui produirait 45 tonnes ?

Solution

1) Représentons graphiquement le nuage de points



2) Calculons les coordonnées du point moyen G.

$G(\overline{X} \,;\, \overline{Y})$

$\overline{X} = \frac{2+4+14+8+10+12+6+16}{8}$, soit $\overline{X} = 9$

$\overline{Y} = \frac{8+13+33+20+25+27+15+35}{8}$, soit $\overline{Y} = 22$

Donc $G(9 \,;\, 22)$

3) a) Partageons la série en deux sous séries

On range par ordre croissant les modalités x_i avant de partager la série en deux sous séries.

Tableau ordonné selon l'ordre croissant des x_i.

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16
y_i	8	13	15	20	25	27	33	35

Tableau de la première sous série E_1

x_i	2	4	6	8
y_i	8	13	15	20

Tableau de la deuxième sous série E_2

x_i	10	12	14	16
y_i	25	27	33	35

b) Calculons les coordonnées de G_1 et G_2

- **Coordonnées de G_1**

$x_{G1} = \dfrac{2+4+6+8}{4} = 5$ et $y_{G1} = \dfrac{8+13+15+20}{4} = 14$; donc $G_1(5\,;14)$

- **Coordonnées de G_2**

$x_{G2} = \dfrac{10+12+14+16}{4} = 13$ et $y_{G2} = \dfrac{25+27+33+35}{4} = 30$; donc $G_2(13\,;20)$

$x_{G_2} = \dfrac{10+12+14+16}{4}$ soit $x_{G_2} = 13$ et $y_{G_2} = \dfrac{25+27+33+35}{4}$ soit $y_{G_2} = 30$

Donc $G_2(13\,;30)$

c) Plaçons sur le graphique les points G_1 et G_2

Voir graphique

4) a) Déterminons l'équation réduite de la droite de Mayer

Elle est de la forme $y = ax + b$ avec :

$a = \dfrac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}$ et $b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1$

$a = \dfrac{14-30}{5-13} = 2$

$b = 14 - 2\times 5 = 4$

Donc l'équation réduite de la droite de Mayer est : $y = 2x + 4$.

b) Estimation

- Pour une superficie 20 ha, la production s'estime à : $y = 2\times 20 + 4 = 44$.

  Soit 44 tonnes

- Pour une production de 45 tonnes, on a :

  $45 = 2x + 4$. Soit $x = \dfrac{45-4}{2} = 20{,}5$; c'est-à-dire une superficie de 20,5 ha

THEME 4

MATHEMATIQUES GENERALES

CHAPITRE 1

FONCTIONS NUMERIQUES A UNE VARIABLE REELLE

1- LIMITES

1-1- Limites de référence

Soit k un nombre réel fixé.

1-1-1- Limites en l'infini de fonctions élémentaires

Nous admettons les résultats suivants :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- si $n \in \mathbb{N}^*$ et n est pair alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- Si $n \in \mathbb{N}$ et n est impair alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

1-1-2- Limite en un nombre réel a de fonctions élémentaires

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to a} k = k$; $\lim\limits_{x \to a} x = a$; $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$; si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

  en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$
- Si $a \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Si n est pair alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n impair alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

1-2- Limites et opérations sur les fonctions

Soit a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels.

Soit f et g deux fonctions.

1- 2-1-Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut conclure immédiatement

1-2-2 - Limites du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$\ell' (\ell' \neq 0)$	$\ell' (\ell' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$, si $\ell' > 0$ $-\infty$, si $\ell' < 0$	$-\infty$, si $\ell' > 0$ $+\infty$, si $\ell' < 0$	On ne peut conclure immédiatement	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

On en déduit que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors, pour tout entier naturel n non nul,

on a : $\lim\limits_{x \to a} f^n(x) = \ell^n$

1-2-3 - Limites du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut conclure immédiatement	

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$
$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

1-2-4- Limite de la composée de deux fonctions.

Soient f et g deux fonctions, a, m et ℓ trois nombres réels.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = m$ et $\lim_{x \to m} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to a} g[f(x)] = \ell$

Remarque

Lorsque a, m et ℓ prennent des valeurs infinies la propriété reste encore valable.

1-2-5- Limites en l'infini de quelques fonctions particulières

- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

1-3 - Propriétés des calculs de limites

1-3-1 – Propriété de l'existence et unicité de la limite

Soit f une fonction définie en a.

Si f admet une limite en a, alors : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Lorsqu'une fonction admet une limite en un nombre réel a, cette limite est unique

1-3-2 -Propriétés de comparaison

Soit f une fonction, m un nombre réel.

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $[m ; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $[m ; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour deux fonctions g et h telles que : $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $[m ; +\infty[$ et a un élément de l'intervalle $[m ; +\infty[$,

  Si $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Remarques

Pour les deux premières propriétés, on a des propriétés analogues lorsque x tend vers - ∞.

Pour la troisième propriété, on a une propriété analogue lorsque x tend vers - ∞ ou + ∞.

1-4- Asymptotes

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et a, b et ℓ des nombres réels.

1-4-1- Asymptotes parallèles aux axes

- Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$). Cette asymptote est parallèle à l'axe (OI).
- Si f admet une limite infinie à droite en a ou à gauche en a, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à la courbe (C_f). Cette asymptote est parallèle à l'axe (OJ).

1-4-2- Asymptotes non parallèles aux axes

a et b sont des nombres réels et a est non nul.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) non parallèle aux axes.

2- CONTINUITE

2-1- Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel.
f est continue en a si f est définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2-2- Critères de continuité

2-2-1- Continuité en a de fonctions élémentaires

Les fonctions élémentaires suivantes sont continues en tout élément a de leur ensemble de définition :

- La fonction : $x \mapsto |x|$ est continue en a, a élément de $\mathbb{R}$;
- La fonction : $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue en a, a élément de $\mathbb{R}$;
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en a, a élément de $[0;+\infty[$;
- La fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue en a, a élément de $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$

- Les fonctions $f + g$, fg, kf $(k \in \mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues en a.
- Si $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a
- Si $f(a) \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a

2-2-2- Continuité sur un intervalle

- Une fonction f est dite continue sur un intervalle K lorsqu'elle est continue en tout élément de K.
- La fonction : $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- La fonction : $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$;
- La fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

3 – DERIVATION

3-1- Dérivabilité en a

3-1-1- Nombre dérivé d'une fonction en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et a un élément de K.

On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a.

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

3- 1-2- Tangente à une courbe

Soit a un nombre réel, f une fonction numérique dérivable en a et de représentation graphique (C_f).

- La droite passant par le point de (C_f) d'abscisse a et de coefficient directeur $f'(a)$

est tangente à (C_f).

- Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a est alors : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

En particulier :

si $f'(a) = 0$, l'équation de la tangente au point d'abscisse a devient $y = f(a)$

On dit alors que (C_f) admet une **tangente parallèle à l'axe des abscisses** au point dont le couple de coordonnées est : $(a\ ;\ f(a))$.

3-1-3-Dérivabilité et continuité en a

Propriété

Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Remarque

Il existe des fonctions qui sont continues en a sans être dérivable en a.

Exemple ; la fonction : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3-1-4- Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

Définitions

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]c\ ;\ a]$.

f est dite dérivable à gauche en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie à gauche en a.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en a et est notée $f_g'(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; b[$.

f est dite dérivable à droite en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en a et est notée $f_d'(a)$.

Propriété

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

3-1-5- Fonction dérivée

Définitions

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et I un intervalle inclus dans D_f .

f est dite dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout élément de I.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ pour tout élément x de I est appelée la fonction dérivée de f sur I.

3- 2 –Dérivées de fonctions

3-2-1-Dérivées des fonctions élémentaires

La fonction f	a pour dérivée f'	dérivable sur
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

3-2-2- Dérivées et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables

fonction f	fonction f'
$u+v$	$u'+v'$
$ku \ (k \in \mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$, si v ne s'annule pas	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$, si v ne s'annule pas	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$ si $u>0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

3- 3-Applications de la dérivation

3-3-1 Sens de variation d'une fonction

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

- f est croissante sur K si et seulement si f ' est positive sur K.
- f est décroissante sur K si et seulement si f ' est négative sur K.
- f est constante sur K si et seulement si f ' est nulle sur K.
- si f ' est strictement positive sur K alors f est strictement croissante sur K.
- si f ' est strictement négative sur K alors f est strictement décroissante sur K.

3- 3-2- Extremum relatif d'une fonction

Propriété

b et c sont des nombres réels.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle] b ; c[et a un élément de]b ; c[.

Si f ' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet sur] b ; c[, un extrémum relatif en a

x	b	a	c
f '(x)	+	0	−
f(x)	$\nearrow$	f(a)	$\searrow$

f admet f(a) pour maximum relatif en a

x	b	a	c
f '(x)	−	0	+
f(x)	$\searrow$	f(a)	$\nearrow$

f admet f(a) pour minimum relatif en a.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^3} \right)$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4} \right)$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x + 5 \right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 4}$ 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 5x + 4}{6x^7 - 3x + 1}$ 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 7x + 1}{-5x - 1}$

Solution

1) **Calcul de** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^3} \right)$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^3} \right) = +\infty}$

2) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4} \right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^4} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4} \right) = +\infty}$

3) **Calcul de** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 5)$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \to +\infty} x^2$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 5) = +\infty}$$

4) **Calcul de** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 4}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 4} = +\infty}$.

5) **Calcul de** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 - 5x + 4}{6x^7 - 3x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 5x + 4}{6x^7 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3}{6x^7}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 5x + 4}{6x^7 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^4}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 5x + 4}{6x^7 - 3x^2 + 1} = 0}$$

6) **Calcul de** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-7x+1}{-5x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-7x+1}{-5x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{-5x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-7x+1}{-5x-1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{5}x$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-7x+1}{-5x-1} = -\infty}$$

Exercice 2

Compléter le tableau suivant puis conclure pour $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ dans chaque cas.

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)$
$\dfrac{x}{x-2}$					
$\sqrt{x^2+1}$					
$\sqrt{x-1}$					
$3x+1-\dfrac{2}{x}$					
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$					

Solution

Remplissage du tableau

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)$
$\dfrac{x}{x-2}$	1	1	0	0	$+\infty$
$\sqrt{x^2+1}$	$+\infty$	$+\infty$	1	1	$\sqrt{5}$
$\sqrt{x-1}$	$+\infty$	N'existe pas	N'existe pas	N'existe pas	1
$3x+1-\dfrac{2}{x}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	6
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$	1	N'existe pas	N'existe pas	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$

Conclusion pour $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Pour $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; Pour $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$;

Pour $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas ; Pour $f(x) = 3x+1-\dfrac{2}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas ;

Pour $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$, on admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1) Compléter le tableau suivant :

$f(x)$	$\dfrac{x^2}{2}+x$	$x^2+x-\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x+1}$	$\dfrac{1}{8}(x^2+1)^4$
$f'(x)$				

2) Choisir les dérivées qui sont justes.

$f(x)$	$f_1'(x)$	$f_2'(x)$	$f_3'(x)$	$f_4'(x)$
$4x+1$	4	$4x$	$x+1$	5
$\dfrac{x^2+1}{x}$ $(x \neq 0)$	$1-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{x^2-1}{x^2}$	$2x$	$2x+1$
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ $(x>0)$	$\dfrac{\sqrt{x}}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$	$2\sqrt{x}+3$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$
$3x+1-\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$3+\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{x^2+1}{x}$	$\dfrac{3x^2+1}{x^2}$	$\dfrac{3x^2+x-1}{x^2}$
5	4	0	5	3

Solution

1) Remplissage du tableau

$f(x)$	$\dfrac{x^2}{2}+x$	$x^2+x-\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x+1}$	$\dfrac{1}{8}(x^2+1)^4$
$f'(x)$	$x+1$	$x+1+\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$	$x(x^2+1)^3$

2) **Choix des dérivées : (les dérivée sont encadrées)**

$f(x)$	$f_1'(x)$	$f_2'(x)$	$f_3'(x)$	$f_4'(x)$
$4x+1$	$\boxed{4}$	$4x$	$x+1$	5
$\dfrac{x^2+1}{x}$ $(x\neq 0)$	$\boxed{1-\dfrac{1}{x^2}}$	$\boxed{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$	$2x$	$2x+1$
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ $(x>0)$	$\dfrac{\sqrt{x}}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$	$2\sqrt{x}+3$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}}$
$3x+1-\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$	$\boxed{3+\dfrac{1}{x^2}}$	$\dfrac{x^2+1}{x}$	$\dfrac{3x^2+1}{x^2}$	$\dfrac{3x^2+x-1}{x^2}$
5	4	$\boxed{0}$	5	3

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) On admet que f est dérivable sur D_f et f' sa dérivée.

   Déterminer f '(x).

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) représentative de la fonction f au point A (0 ; 1).

Solution

1) **Détermination de l'ensemble de définition**

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+x\neq 0\}$$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

2) Déterminons f '(x)

f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

3) Equation de la tangente (T) au point A (0 ; 1)

$f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$.

Une équation de la tangente (T) est de la forme :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = -1(x) + 1$

$\boxed{y = -x + 1}$

CHAPITRE 2

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1- DÉFINITION

La fonction logarithme népérien notée ln, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, qui s'annule en 1, et dont la dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

2- CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

- $\forall x \in \,]0\,;+\infty[,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

Remarque : Il existe un nombre réel noté e tel que $\ln e = 1$. Ce nombre est appelé le nombre de Neper.

Une valeur approchée du nombre de Neper est : 2,71828183

2-3- Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout nombre rationnel r, on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r \ln a$
- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

2-4- Limites de références

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

2-5- Etude des variations de la fonction logarithme népérien

2-5-1- Le sens de variation

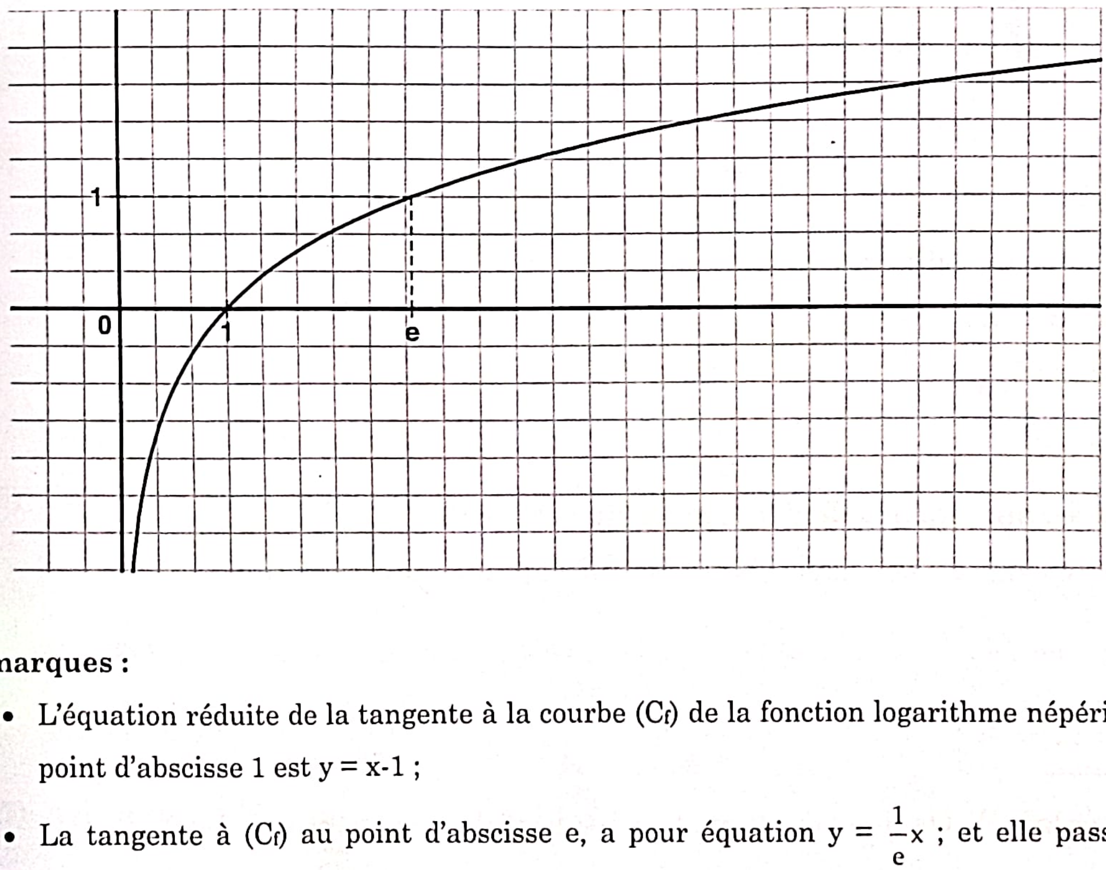
Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ or $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.

La fonction logarithme est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2-5-2 -Tableau de variation

x	0	+∞
ln'(x)	‖ +	
lnx	‖ −∞ ↗	+∞

Représentation graphique



Remarques :

- L'équation réduite de la tangente à la courbe (C_f) de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1 est $y = x-1$;
- La tangente à (C_f) au point d'abscisse e, a pour équation $y = \frac{1}{e}x$; et elle passe par l'origine du repère.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

On donne la fonction f définie par $f(x) = \ln(-x)$ et (C_f) sa courbe représentative.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Calculer les limite de f aux bornes de D_f.
3) On note par f' la fonction dérivée de f sur D_f. Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de D_f.
4) Donner les variations de f et en déduire son tableau de variations.
5) Résoudre l'équation $x \in D_f, f(x) = 0$.
6) On désigne par A le point de (C_f) dont le couple de coordonnées est $(-1\,;\,0)$. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à (C_f) au point A.
7) Montrer que l'axe des ordonnées est asymptote à (C_f).
8) Calculer $f(-e)$ puis tracer (T_A) et (C_f) dans un même repère (unité : 1 cm).

Solution

$f(x) = \ln(-x)$.

1) Ensemble de définition de f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x > 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$

$\boxed{D_f =]-\infty\,;\,0[}$

2) Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-x)$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ c'est-à-dire

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(-x) = +\infty$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln(-x)$. Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$ avec $-x > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty}$.

3) Calcul de $f'(x)$.

f est dérivable sur D_f et $\forall x \in D_f$, $f'(x)=\dfrac{-1}{-x}$ c'est-à-dire $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{x}}$

4) Variation et tableau de variation de f.

Pour $x<0$, $\dfrac{1}{x}<0$ et donc $f'(x)<0$. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur D_f.

On déduit de ce qui précède, le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

5) Résolution de l'équation $x\in D_f, f(x)=0$.

$$
\begin{aligned}
x\in D_f, f(x)=0 \iff \ & \ln(-x)=0\\
& \ln(-x)=\ln 1\\
& -x=1\\
& x=-1
\end{aligned}
$$

La solution de l'équation est -1.

6) Equation de la tangente (T) au point A.

On $A(-1\,;0)$ et $f'(-1)=\dfrac{1}{(-1)}$ soit $f'(-1)=-1$.

Or $(T_A): y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$ d'où $(T_A): y=-1(x+1)+0$.

Par suite $\boxed{(T_A): y=-x-1}$

7) Asymptote à (C_f).

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=0$, donc l'axe des ordonnées (d'équation $x=0$) est une asymptote à la courbe (C_f).

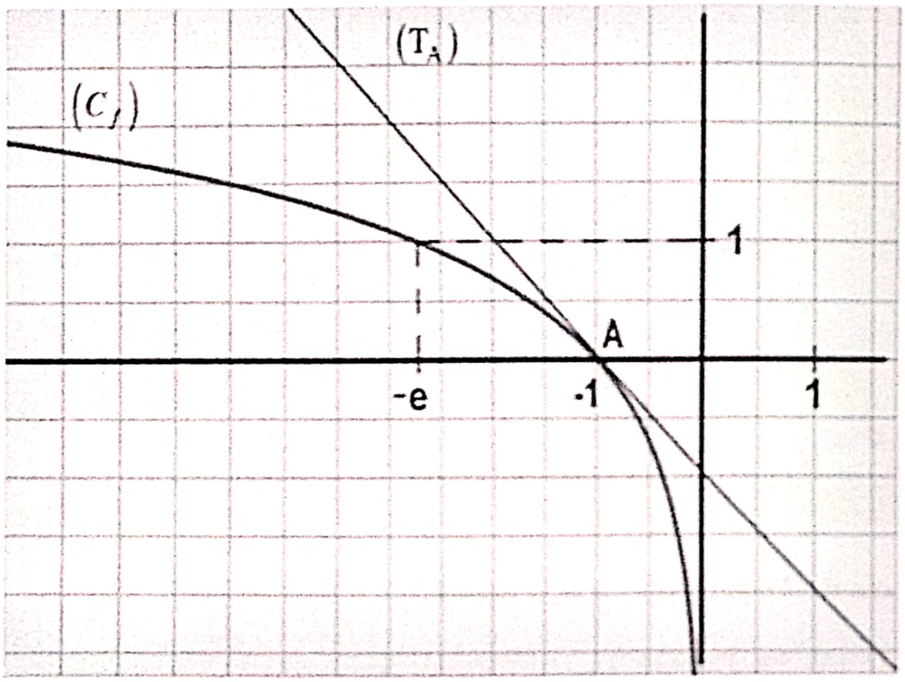
8) Calculons $f(-e)$ et traçons (T_A) et (C_f).

Calcul de $f(-e)$.

$f(-e) = \ln(-(-e))$

$f(-e) = \ln(e)$

$\boxed{f(-e) = 1}$



Exercice 2

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x} - 2 + \ln x$

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que la courbe de f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(1\,;-1)$.

5) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère.

Solution

1) Déterminons l'ensemble de définition

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x > 0\}$

$\boxed{D_f =]0\,;+\infty[}$

2) Limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ >}}\left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ >}} \frac{1}{x}(1 - 2x + x\ln x).$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-2x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}(1 - 2x + x\ln x) = +\infty$.

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3) Tableau de variation de f.

- Fonction dérivée de f.

f est dérivable sur D_f. Soit f' la fonction dérivée de f sur D_f.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0$ avec $x^2 \neq 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Sur D_f, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)$.

D'où le tableau de signe suivant :

x	0		1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe, on déduit le tableau de variation suivant :

- Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=\frac{1}{1}-2+\ln 1$

$f(1)=-1$

4) Montrons que la courbe représentative de f admet au point $A(1\,;-1)$, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

$f(1)=-1$ et $f'(1)=0$. Donc la courbe représentative de f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(1\,;-1)$.

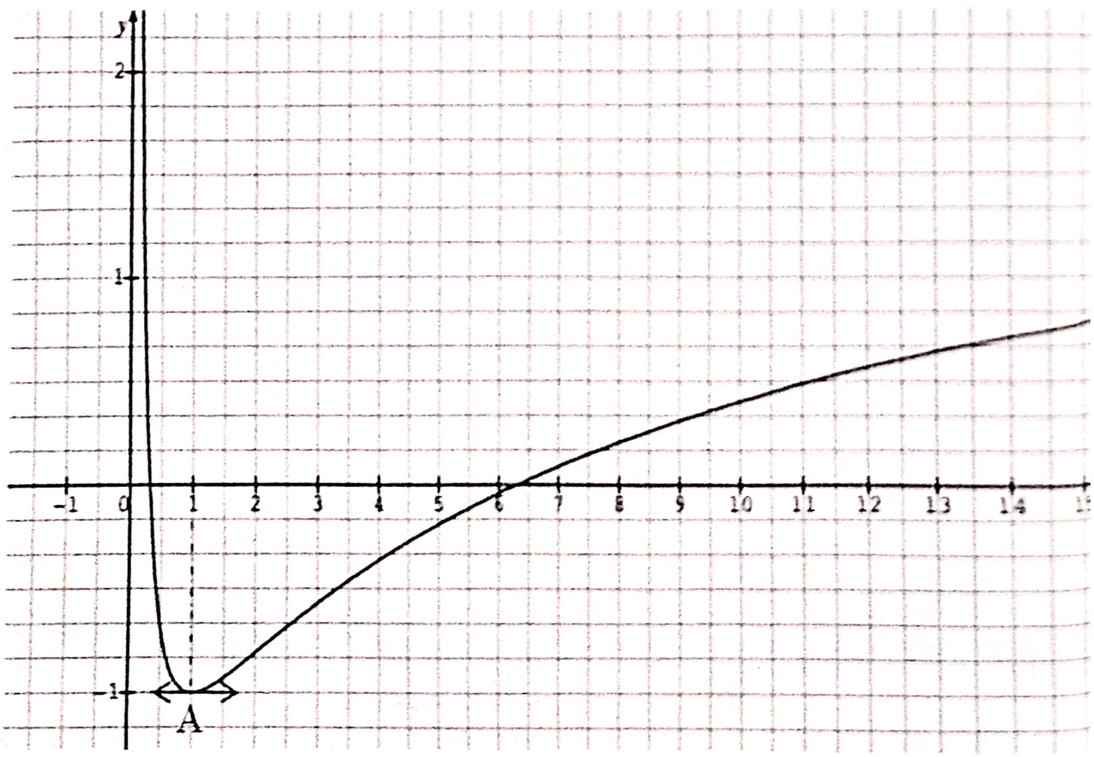
(Pour la représentation, voir graphique)

5) Représentation graphique de f.

- Tableau de valeur

x	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	10	12
$f(x)$	0,61	-0,69	-1,00	-0,81	-0,57	-0,36	-0,19	-0,04	0,40	0,57

- Courbe



Exercice 3

Soit la fonction de f $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2°) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3°) a) Démontrer que pour tout nombre réel x élément de D_f, $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur D_f puis, dresser son tableau de variation.

4°) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

5°) Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Construire $(\mathcal{C})$.

Solution

1) Ensemble de définition de f.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x-1} > 0\right\}$

Après l'étude du signe de $\frac{x}{x-1}$, on obtient :

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

2) Calcul des limites de f aux bornes de D_f.

La fonction f est la composée de deux fonctions h et g définies par $h(x) = \frac{x}{x-1}$ et $g(x) = \ln x$ telles que $f = g \circ h$ (c'est-à-dire $f(x) = g(h(x))$)

- Limite de f à $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(h(x)) = 0$;

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- Limite à $-\infty$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(h(x)) = 0$;

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

- Limite de f à gauche en 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x}{x-1} = 0$ avec $\frac{x}{x-1} > 0$ pour $x < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty.$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

- Limite à droite en 1

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0$ avec $x - 1 > 0$ pour $x > 0$ soit $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x}{x-1} = +\infty$, et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

3) a- Démontrons que pour tout nombre réel x de D_f, $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$

f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f.

$\forall x \in D_f$, on a : $$f'(x) = \frac{\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$$

b- Déduisons le sens de variation et le tableau de variation de f.

- Tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$				$-$

- Sens de variation

$\forall x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$, $f'(x)<0$, alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right[$ et sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

- Tableau de variation

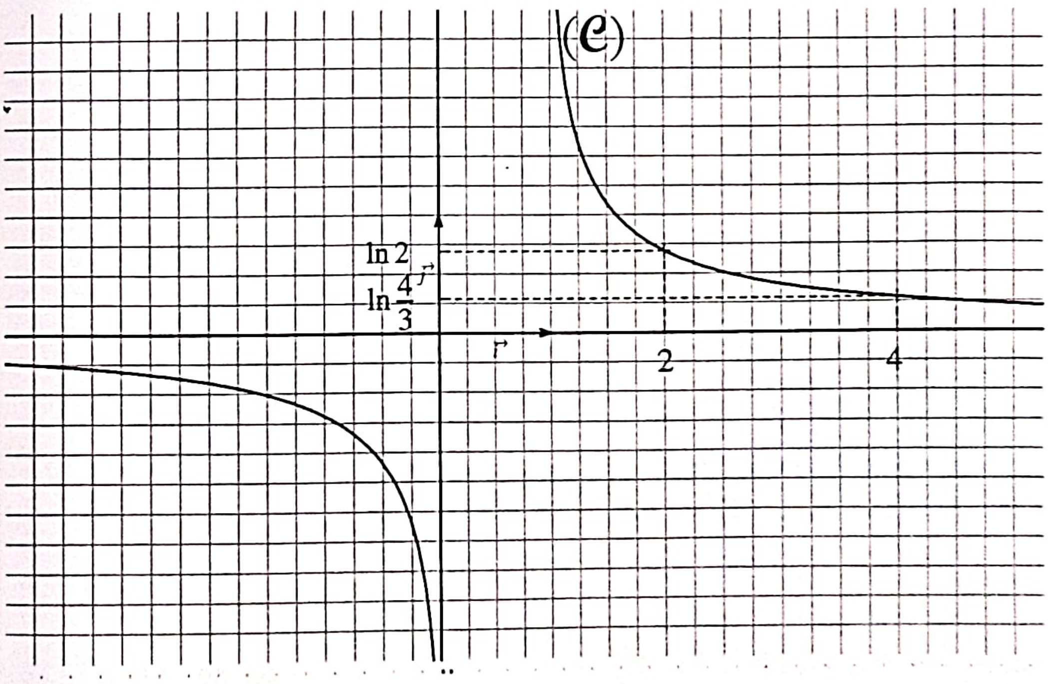
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$				$+\infty \searrow 0$

4) Calculons $f(2)$ et $f(4)$

$$f(2)=\ln\left(\frac{2}{2-1}\right)=\ln 2$$

$$f(4)=\ln\left(\frac{4}{4-1}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

5) Construction de la courbe $(\mathcal{C})$ de f.



[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

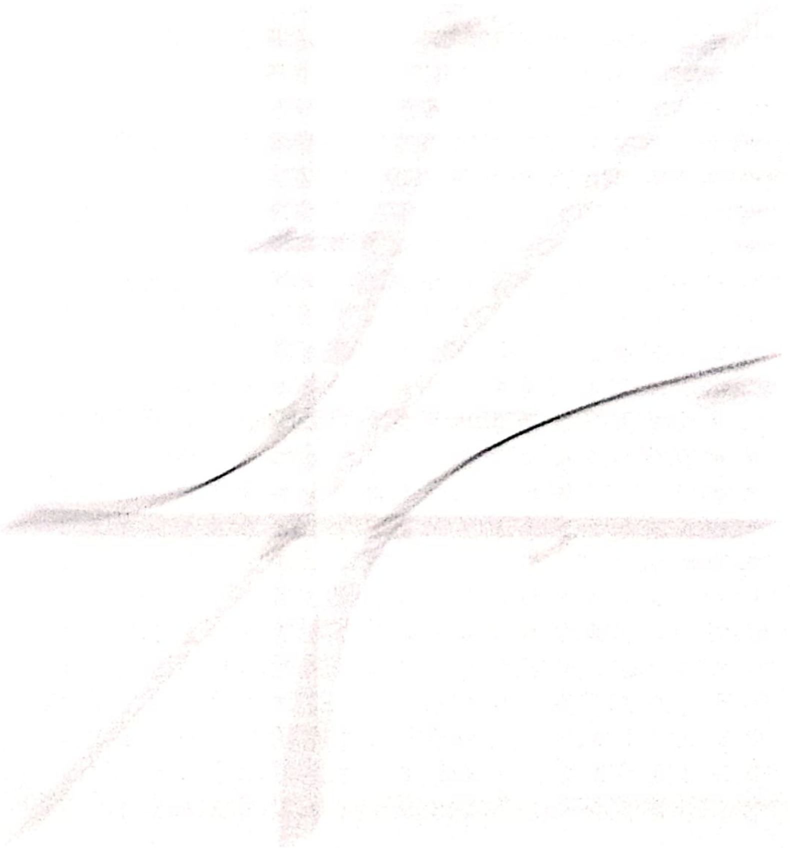
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1- GENERALITES

1-1- Définition

La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est la bijection réciproque de la fon[ction] logarithme népérien.

L'exponentielle d'un nombre réel x est noté exp (x) (ou e^x).

1-2- Conséquence de la définition

on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \,]0 ; +\infty[$, $e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \,]0 ; +\infty[$, on a : $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$

1-3- Propriétés

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
- $e^{ra} = (e^a)^r$
- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$;
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.

2- ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIONNELLE

2-1- Limites de référence

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$;

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2-2- Sens de variation

La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et pour tout nombre réel x, on a : $\exp'(x) = e^x$.

Or pour tout nombre réel x, exp(x) est strictement positif.

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ .

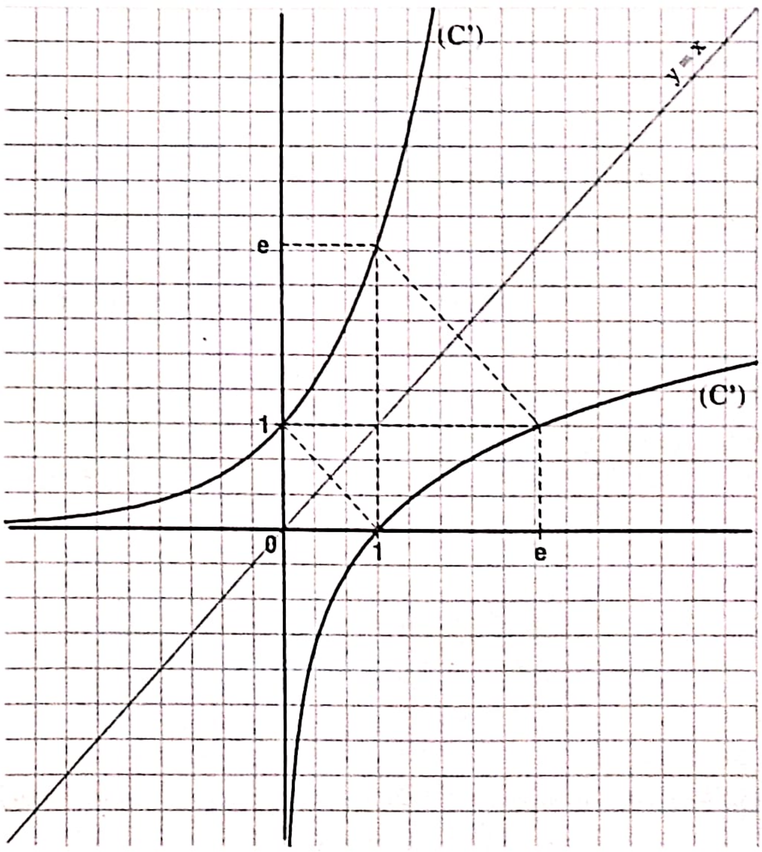
2-2 - Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp'(x)	+
exp(x)	0 ↗ $+\infty$

2-4- Courbe représentative

Soit (C') la courbe de la fonction exponentielle népérienne et (C) celle de la fonction logarithme népérien. (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation

y = x.



EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit la fonction numérique à variable réelle g définie par : $g(x)=e^{-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
2) Calculer les limites de g aux bornes de Dg et interpréter graphiquement les résultats si possible.
3) Etudier le sens de variation de g.
4) Dresser le tableau de variation de g.
5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 .
6) Tracer la courbe représentative de g et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 dans le plan muni d' un repère orthonormé (O,I, J).

Solution

1) Déterminons l'ensemble de définition D_g de g

$D_g=\mathbb{R}$

$D_g=]-\infty\,;+\infty[$

2) Calculons les limites de g aux bornes de D_g.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$. C'est à dire $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$. Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

C'est à dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, donc l'axe des ordonnées (d'équation y = 0) est une asymptote à la courbe (C_g) en $+\infty$.

3) Etudions le sens de variation de g.

La fonction g est dérivable sur D_g.

$\forall x \in D_g$, $\boxed{g'(x) = -e^{-x}}$.

$\forall x \in D_g$, $g'(x) < 0$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.

4) Dressons le tableau de variation de g.

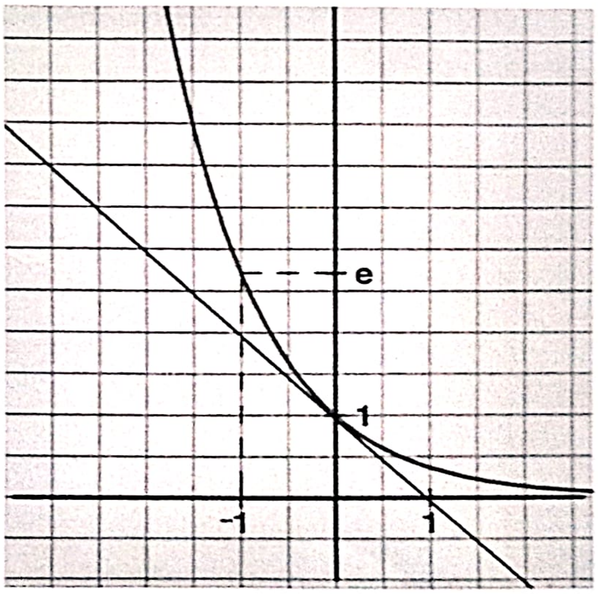
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

5) Déterminons une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$, or

$g(0)=1$ et $g'(0)=-1$, donc $\boxed{y=-x+1}$

6) Représentons la courbe (C_g) et la tangente



Exercice 2

1-Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

2- Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3- Etudier le sens de variation de la fonction f

4- Dresser le tableau de variation de f

5- Représenter la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ;

Solution

1-Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f

$$D_f = \mathbb{R}$$
$$D_f =]-\infty\,;+\infty[$$

2- Calculons les limites aux bornes de D_f.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3-Etudions le sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

4-Dressons le tableau de variation de f

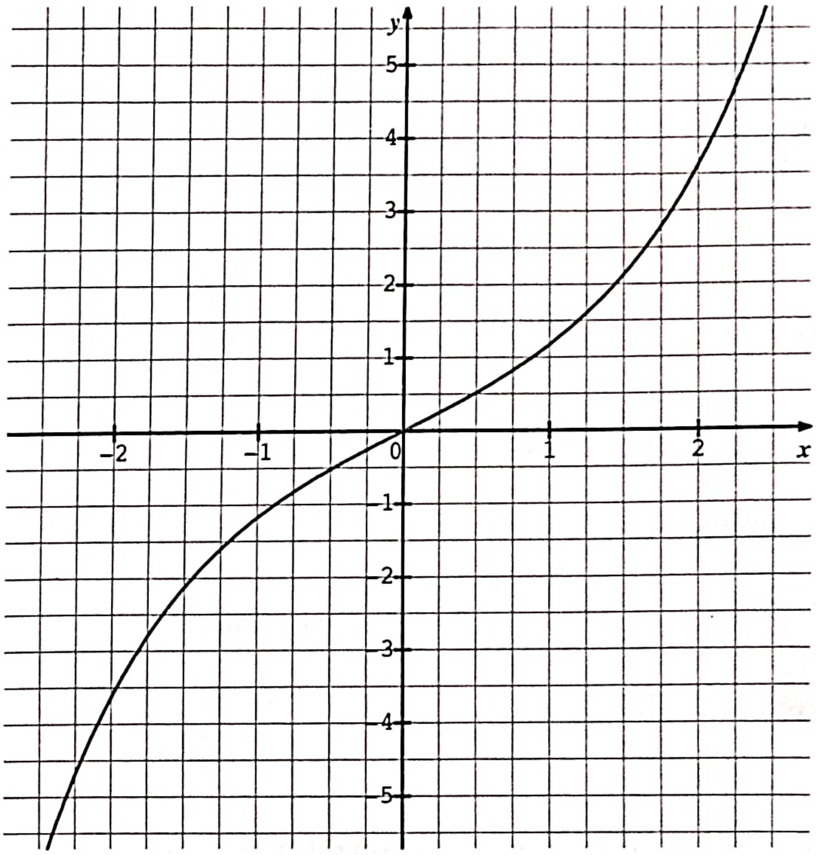
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5-Représentons graphiquement la courbe de f

- Tableau de valeurs

x	- 2	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-3,63	-2,13	-1,18	-0,52	0	0,52	1,18	2,13	3,63

- Courbe



Exercice 3

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (O ; I ; J) unités graphiques : 1 cm sur (OI) ; 2 cm sur (OJ).

1°) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$. (on pourra poser $X=-\frac{x}{2}$ pour la limite en $+\infty$)

2°) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x et en déduire le sens de variation de g.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses puis avec l'axe des ordonnées.

4°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère (O ; I ; J)

Solution

1°) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

- Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$.

Et, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = -\infty$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

- Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)$.

En posant $X = -\frac{x}{2}$, ce qui donne $x = -2X$, on a : quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$.

Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} -2X e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{1}{2} e^{X} = 0$. D'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right) = 0$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$.

2-a-Calculons $g'(x)$ et déduisons le sens de variation de g.

- Calculons $g'(x)$.

g est dérivable sur D_g et $\forall x \in D_g$, $g'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

$$g'(x) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

- Signe de $g'(x)$ et sens de variation de g.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Donc $g'(x)$ est du signe de $\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)$.

De plus $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0$

$$x = \frac{3}{2}$$

On en déduit alors ce qui suit :

- Tableau de signe de $g'(x)$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Ainsi :

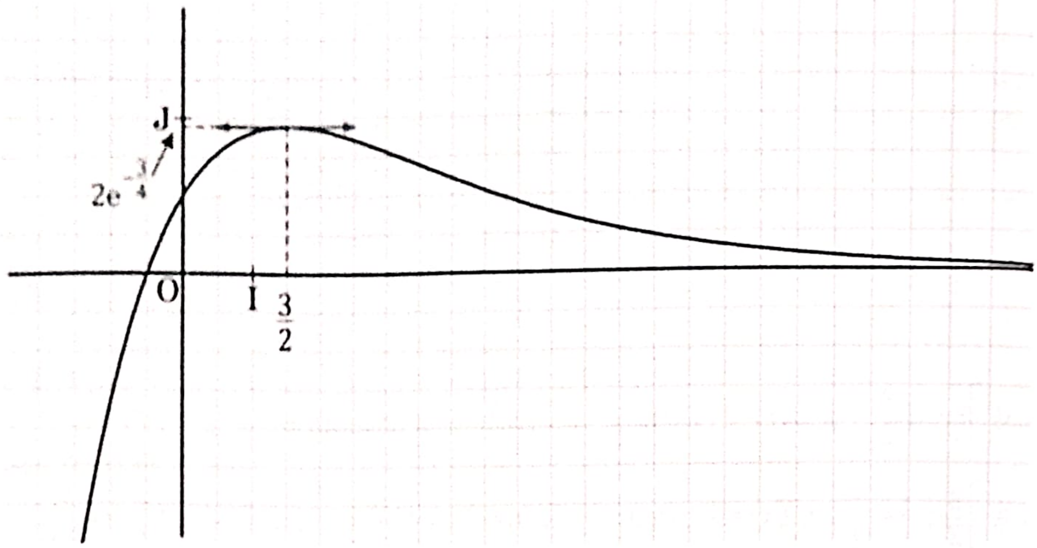
- $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$, $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$.
- $\forall x \in \left]\frac{3}{2} ; +\infty ;\right[$, $g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]\frac{3}{2} ; +\infty ;\right[$.

b) Tableau de variation de g.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$ 0

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}}=2e^{-\frac{3}{2}}.$$

4) Représentons graphiquement la courbe de g.



CHAPITRE 4

SUITES NUMERIQUES

1- GENERALITES

1-1 Définition

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Soit D un ensemble inclus dans $\mathbb{N}$.

La fonction

$u : D \to \mathbb{R}$ est une suite numérique notée $(u_n)_{n\in D}$ ou (u_n) ou encore u
$n \mapsto u(n)$

$u(n)$ est noté u_n et est appelé terme d'indice n ou terme général de u.

1-2 -Déterminations d'une suite numérique

Une suite numérique (u_n) peut être déterminée par :

- une formule explicite donnant u_n en fonction de n ;
- le premier terme et une formule de récurrence qui exprime généralement u_n en fonction u_{n-1} ou u_{n+1} en fonction u_n.

Remarque :

En tant que fonction, toute suite numérique peut être représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère.

Il est aussi possible de représenter les termes d'une suite sur un axe.

2- ETUDE D'UNE SUITE NUMERIQUE

Soit (u_n) une suite numérique et n_0 un entier naturel.

2-1- Suite minorée

(u_n) est minorée, à partir du rang n_0, s'il existe un nombre réel m tel que,

$\forall\ n \geq n_0,\quad u_n \geq m.$

Toute suite minorée à partir d'un certain rang est minorée (sur tout son ensemble de définition).

2-2- Suite majorée

(u_n) est majorée, à partir du rang n_0, s'il existe un nombre réel M tel que,

$\forall\ n \geq n_0,\quad u_n \leq M$.

Toute suite majorée à partir d'un certain rang est majorée(sur tout son ensemble de définition).

2-3- Suite bornée

(u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Ou encore

(u_n) est bornée à partir du rang n_0 s'il existe deux nombre réels m et M tels que,

$\forall n \geq n_0,\ m \leq u_n \leq M$.

Remarque :

Une suite est positive (resp. négative) si elle est minorée (resp. majorée) par 0.

2-4- Sens de variation

Propriété :

D est un ensemble de nombres consécutifs inclus dans $\mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite numérique.

- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n \leq u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est croissante sur D.
- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n \geq u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est décroissante sur D.
- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n = u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est constante sur D.

2-5 -Notion de convergence

On se propose d'étudier le comportement des suites lorsque n tend vers $+\infty$.

2-5-1-Définitions

Une suite est convergente si elle a une limite finie.

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarques :

Les règles de calcul sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.

2-5-2 -Propriétés

- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

3 - SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

3-1 -Suites arithmétiques

3-1-1-Définition

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\in N}$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout *n* élément de N, on a : $u_{n+1} = u_n + r$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

Remarques :

- Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante ;
- Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante ;
- Si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est constante.

3-1-2 -Expression du terme u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite arithmétique de raison r et u_k un terme. Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_k + (n-k)r$.

Remarque :

On déduit de la propriété précédente que :

- Pour $k = 0$, $u_n = u_0 + nr$.
- pour $k = 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

3-1-3- Somme de termes consécutifs

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit de n par la demi somme des termes extrêmes.

$$S = n \times \left(\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\right).$$

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite arithmétique

- Pour $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$; on a : $S = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- Pour $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$; on a : $S = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)$

2-2- Suite majorée

(u_n) est majorée, à partir du rang n_0, s'il existe un nombre réel M tel que,

$\forall\ n \geq n_0,\quad u_n \leq M.$

Toute suite majorée à partir d'un certain rang est majorée(sur tout son ensemble de définition).

2-3- Suite bornée

(u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Ou encore

(u_n) est bornée à partir du rang n_0 s'il existe deux nombre réels m et M tels que,

$\forall n \geq n_0, m \leq u_n \leq M.$

Remarque :

Une suite est positive (resp. négative) si elle est minorée (resp. majorée) par 0.

2-4- Sens de variation

Propriété :

D est un ensemble de nombres consécutifs inclus dans $\mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite numérique.

- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n \leq u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est croissante sur D.
- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n \geq u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est décroissante sur D.
- Si $\forall\ n \in D,\quad u_n = u_{n+1}$ alors la suite (u_n) est constante sur D.

2-5 -Notion de convergence

On se propose d'étudier le comportement des suites lorsque n tend vers $+\infty$.

2-5-1-Définitions

Une suite est convergente si elle a une limite finie.

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarques :

Les règles de calcul sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.

2-5-2 -Propriétés

- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

3 - SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

3-1 -Suites arithmétiques

3-1-1-Définition

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\in N}$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

Remarques :

- Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante ;
- Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante ;
- Si $r = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est constante.

3-1-2 -Expression du terme u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite arithmétique de raison r et u_k un terme. Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_k + (n-k)r$.

Remarque :

On déduit de la propriété précédente que :

- Pour $k=0$, $u_n = u_0 + nr$.
- pour $k=1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

3-1-3- Somme de termes consécutifs

La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit de n par la demi somme des termes extrêmes.

$$S = n \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right).$$

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite arithmétique

- Pour $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$; on a : $S = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- Pour $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$; on a : $S = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)$

3-2- Suites géométriques

3-2-1-Définition

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout n élément de N

on a : $u_{n+1} = qu_n$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in N}$

3-2-2-Expression du terme u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et u_k un terme de la suite .

Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_n = u_k q^{n-k}$.

Remarque :

On déduit de la propriété précédente que, pour tous nombres entiers naturels n et k $(k \le n)$, on a :

$$u_n = u_k \cdot q^{n-k}$$

Pour $k = 0$, $u_n = u_0 q^n$

Pour $k = 1$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

3-2-3- Somme de termes consécutifs

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison q.

Si $q \neq 1$, alors $S = a \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Si $q = 1$, alors $S = n.a$.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Une suite arithmétique (u_n) a pour raison 5 et pour premier terme $u_1 = 3$.

Calculer n sachant que $u_n = 1988$.

Solution

On a : $u_1 = 3$ et $r = 5$.

Or : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

D'où $u_n = 3 + (n-1) \times 5$

$u_n = 3 + 5n - 5$

$u_n = 5n - 2$.

Comme $u_n = 1988$ alors $5n - 2 = 1988$

$5n = 1990$

$n = \dfrac{1990}{5}$

$\boxed{n = 398}$

Exercice 2

Une suite arithmétique (u_n) a pour raison -2 et pour premier terme $u_0 = 1$.

1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Exprimer $u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n.
3) Sachant que $u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n = -99$, calculer n.

Solution

On a : $u_0 = 1$; $r = -2$

a) **Exprimons u_n en fonction de n.**

$u_n = u_0 + nr$

$u_n = 1 + n \times (-2)$

$u_n = -2n + 1$

b) **Exprimons $u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n.**

Notons $S_n = u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

On a : $S_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

$$S_n = \frac{(n+1)(1+1-2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2-2n)}{2}$$

$$S_n = \frac{2(n+1)(1-n)}{2}$$

$$S_n = (n+1)(1-n)$$

$$S_n = 1-n^2$$

Or : $S_n = -99$

$$1-n^2 = -99$$

$$100-n^2 = 0$$

$$(10-n)(10+n) = 0$$

$10-n=0$ ou $10+n=0$

$n=10$ ou $n=-10$.

n est un entier naturel ; donc on retient seulement $\boxed{n=10}$.

Exercice 3

Soit (u_n), une suite géométrique de raison 5 telle que $u_{10} = 3$.

Calculer u_8 et u_{12}.

Solution

On a : $u_{10} = 3$ et $q = 5$.

- Déterminons u_8

$$u_{10} = qu_9$$

$$u_{10} = q \times qu_8 \quad \Rightarrow \quad u_{10} = q^2 u_8$$

$$u_8 = \frac{u_{10}}{q^2} \quad \Rightarrow u_8 = \frac{3}{5^2}$$

$$u_8 = \frac{3}{25}$$

- Déterminons u_{12}.

$u_{12} = qu_{11}$ or $u_{11} = qu_{10}$, donc $u_{12} = q^2 u_{10}$

$$u_{12} = (5)^2 \times 3 = 75$$
$$u_{12} = 75$$

Exercice 4

Soit 3 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; ... et ainsi de suite (en divisant toujours par 2).

Quel est le 15e terme de cette liste ?

Solution

Les termes de cette liste sont ceux d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, de premier terme $u_0 = 3$; alors le 15e terme est u_{14}.

$$u_n = q^n u_0$$
$$u_{14} = 3q^{14}$$
$$u_{14} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

DEUXIEME PARTIE

EXERCICES TYPES EXAMEN

CALCULS COMMERCIAUX

EXERCICE 1

Pour constituer une PME, Monsieur KONAN et Monsieur DIABY ont apporté respectivement 2 600 000 F et 5 400 000 F.

Monsieur DIABY est chargé de gérer cette PME. A la fin de l'exercice, il est attribué 25 % du bénéfice total à Monsieur DIABY en sa qualité de gérant. Le reste du bénéfice est partagé proportionnellement aux apports. Monsieur DIABY perçoit alors la somme de 605 000 F, représentant 25 % du bénéfice total et le gain du partage.

Calculer :

1. Le bénéfice total de la PME ;
2. La part bénéficiaire de Monsieur KONAN ;
3. Le pourcentage du gain de Monsieur DIABY.

EXERCICE 2

Après avoir bénéficié d'une remise de 5 % et d'un escompte de règlement de 2 %, un commerçant paye à un grossiste pour l'achat d'un salon, la somme de 465 500 F.

Pour calculer son prix de vente, le commerçant tient compte :

de ses frais d'achat qui s'élèvent à 10 500 F ;

de ses frais de vente qui s'élèvent à 3 % du prix de vente hors taxe ;

d'un taux de marque brut de 20 % ;

d'un taux de TVA de 18 %.

Calculer :

1- Le prix d'achat brut.
2- Le coût d'achat.
3- Le prix de vente hors taxe.
4- Le prix de vente toute taxe comprise.
5- Le bénéfice du commerçant.

(BT_2008)

EXERCICE 3

La compagnie du sud (Com Sud) a reçu des matières premières.

Le fournisseur lui a accordé les réductions suivantes :

- Remise 15 %
- Rabais 20 %
- Escompte de règlement 5 %

1. Déterminer le taux unique de réduction appliqué par le fournisseur.
2. La Com Sud a payé pour des marchandises, 2 584 000 F. Trouver le prix d'achat brut des marchandises.
3. Les frais d'achat (F.A) se chiffrent à 30 % du prix d'achat net (PAN). Les frais de transformation de ces matières s'élèvent à 35 % du coût de production.
   Calculer le coût d'achat et le coût de production.
4. La Com Sud estime ses frais de vente à 40 % du coût de revient et son taux de marque net à 30 %.
   Calculer
   a) Le prix de vente hors taxe (PVHT).
   b) La marge brut (MB) et la marge nette (MN).

(BT_2009)

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique et vend deux produits A et B. Le prix d'achat des matières premières nécessaires à la fabrication de ces produits est identique.

Les frais de fabrication de A représentent 20 % du prix d'achat et la marge de 20 % du prix de vente.

Les frais de fabrication de B représentent 40 % du prix d'achat et la marge est de 30 % du prix de vente.

Sachant que la somme des prix de vente de ces deux produits A et B est 35 000 F, calculer:

1. Le prix d'achat des matières premières,
2. Le prix de revient de chaque produit,
3. Le prix de vente et le bénéfice réalisé sur chaque produit,
4. Le bénéfice global de l'entreprise.

EXERCICE 5

Un grossiste accorde à un commerçant une remise de 10 % et un escompte de 2 % sur ses achats dont le prix d'achat net hors taxe vaut 2 646 000 F.

1. Calculer le prix d'achat brut hors taxe,
2. Quel est le coût d'achat si les frais d'achat représentent 5 % du prix d'achat net hors taxe.
3. Pour obtenir son prix de vente toutes taxes comprises, le commerçant applique un coefficient multiplicateur de 2,05 au prix d'achat net hors taxe.
   Calculer le prix de vente toutes taxes comprises
4. En considérant un taux légal de TVA évalué à 20 %, calculer le prix de vente hors taxe

5. Calculer le taux de marque appliqué par le commerçant si les frais de vente sont estimés à 61 140 F.

EXERCICE 6

Le commerçant COULIBALY a acheté des articles pour un prix d'achat brut hors taxe de 400 000 F aux conditions suivantes :

- Remise 10 % et 5 %
- Escompte 2 %

Il évalue ses frais d'achat à 5 % du prix d'achat brut hors taxe. On suppose qu'il applique un taux de marque de 20 %, et réalise des frais de vente de 20 % par rapport au prix de revient.

1. Déterminer :
   a- Le prix d'achat net hors taxe de ces articles,
   b- Le prix de vente hors taxe de ces articles,
   c- La marge réalisée par COULIBALY.
2. On désigne par x le prix d'achat brut hors taxe et par y le prix de vente hors taxe.
   a- Exprimer y en fonction de x.
   b- Représenter y dans un repère orthonormé (O,I,J), pour $0 \leq x \leq 1\ 000\ 000$.
   Echelles :
   Sur (OI) : 2 cm → 100 000 F
   Sur (OJ) : 1 cm → 100 000 F
3. Déterminer graphiquement :
   a- Le prix d'achat hors taxe correspondant à un prix de vente hors taxe de 887 900 F
   b- Le prix de vente hors taxe correspondant à un prix d'achat hors taxe de 500 000 F
4. Vérifier algébriquement ces résultats.

EXERCICE 7

Un commerçant reçoit la livraison d'un lot de marchandises accompagnée de la facture d'un montant brut hors taxe de 760 000 F. Les frais d'achat sont évalués à 12 % du prix d'achat brut hors taxe. Le taux de marque appliqué est 25 %.

Le coefficient multiplicateur qui permet de calculer directement le prix de vente toutes taxes comprises à partir du prix d'achat brut hors taxe est 1,792.

Calculer :

1. Le prix de vente toutes taxes comprises ;
2. Le prix de vente hors taxe ;
3. Le taux de la TVA appliqué à ce lot de marchandises.

EXERCICE 8

Un commerçant achète des marchandises dont le prix d'achat brut hors taxe est 250 000F. Il obtient de son fournisseur deux remises successives de 7,5 % et 4 %. Ses frais d'achat s'élèvent à 5 % du prix d'achat net hors taxe.

1. Déterminer :
   a- le prix d'achat net hors taxe,
   b- le coût d'achat,
   c- le coefficient multiplicateur du coût d'achat par rapport au prix d'achat brut hors taxe.
2. Déterminer :
   a- Le prix de vente hors taxe, si ce commerçant applique un taux de marque de 25%
   b- Le prix de vente toutes taxes comprises en supposant une TVA au taux légal de 20%
   c- La TVA versée au fisc.

EXERCICE 9

La fabrication des meubles de salon par une entreprise se fait dans les conditions suivantes :

- Prix d'achat brut des matières premières 593 750 F.
- Remise de 4 % sur les matières premières.
- Frais d'achat : 5 % du coût d'achat.
- Frais de production : 25 % du coût de production.
- Frais de distribution : 2 % du prix de revient.
- Marge nette : 184 000 F.
- Taux de TVA : 18 %.

Calculer :

1. le prix d'achat net et le coût d'achat,
2. le coût de production,
3. le coût de revient,
4. le prix de vente hors taxe,
5. le prix de vente toutes taxes comprises.

OPERATIONS FINANCIERES

EXERCICE 1

Un effet de commerce d'une valeur nominale de 80 000 F échéant le 11 mai 2008 est présenté à l'escompte le 16 avril 2008 dans une banque aux conditions suivantes :

Taux d'escompte commercial : t %

Taux d'endos : 0,5 %

Commission fixe : 120 F

Commission indépendante du temps : 0,1 %

Majoration de 2 jours de banque.

La banque remet au porteur de l'effet une somme de 78 870 F.

1- Déterminer le nombre de jours à courir de l'effet.
2- Calculer le montant de l'agio retenu par la banque.
3- Exprimer l'agio en fonction du taux d'escompte t.
4- En déduire la valeur du taux d'escompte t.
5- Calculer le taux réel d'escompte.

(BT_2008)

EXERCICE 2

Trois capitaux sont proportionnels aux nombres 20, 12 et 15.

1. Calculer ces capitaux sachant que le premier est 90 000 F.
2. Le capital de 90 000 F est placé à 12 % le 15 mars.

a- Exprimer sa valeur acquise y en fonction du nombre de jours de placement x.

b- Représenter graphiquement les variations de la valeur acquise en fonction de x ; $x \in [0 ; 90]$.

<u>Echelle</u> : 1 cm pour 10 jours en abscisse.

1 cm pour 300 F en ordonnée à partir de 90 000 F.

c- Calculer la valeur acquise par ce capital le 29 mai suivant, puis vérifier le résultat sur le graphique.

3. La somme de 92 250 F représente, au comptant, le prix toutes taxes comprises de marchandises soumises à un taux de TVA de 15,25 %.

Retrouver le prix hors taxe de ces marchandises.

EXERCICE 3

Monsieur BLE a effectué le placement d'un capital de 90 000 F pendant un certain temps, à un taux d'intérêt annuel de 10 %. A la fin de ce premier placement, il place automatiquement la valeur acquise à un autre taux annuel pour acquérir finalement au bout de 14 mois une valeur de 126 000 F. Calculer :

1. La durée du premier placement si le taux du deuxième placement est 12 %.
2. Le taux annuel du deuxième placement si la durée du premier est 2 ans.

N.B. : Les placements sont faits à intérêts simple.

EXERCICE 4

Deux capitaux A et B sont inversement proportionnels à 17 et 28. A surpasse B de 110 000 F. Ces deux capitaux sont placés à intérêts simples.

Le premier A, placé au taux de 12 % pendant n jours, rapporte un intérêt de 11 200 F.

Le deuxième B, placé au taux t % a acquis pendant 6 mois une valeur de 178 500 F.

On demande de calculer :

1. Le montant de chaque capital
2. La durée de placement du premier capital
3. Le taux de placement du deuxième capital.

EXERCICE 5

Deux capitaux dont la somme est 50 000 F, sont placés, le premier à t %, le second à (t-1) %.

Le revenu annuel du premier capital est 1 200 F et celui du second est 1 500 F.

1. Exprimer chacun des deux capitaux en fonction de t.
2. Calculer les deux taux, puis les deux capitaux,
3. Exprimer la valeur acquise de chaque capital en fonction du nombre d'années x.
4. Dans combien d'années la différence des valeurs acquises sera-t-elle égale à 11 500F ?
5. Représenter graphiquement ces valeurs acquises dans un même repère (O, I, J).

   Echelles : Abscisses : 1 cm pour 5 ans

   Ordonnées : 1 cm pour 10 000 F.

EXERCICE 6

Le 17 juin, trois effets sont présentés à l'escompte. La banque remet au porteur la même somme pour chacun d'eux. Sachant que le premier est de 425 000 F au 15 octobre, le deuxième de 420 000 F au 6 août et le troisième de 417 860 F.

Déterminer :

1. Le taux d'escompte ;
2. L'échéance du troisième effet ;
3. La date à laquelle ces 3 effets pourraient être remplacés par un paiement unique de 1 263 000 F.

EXERCICE 7

Une personne achète une voiture dont le prix est de 9 675 000 F.

Le concessionnaire lui propose trois modes de paiement :

- **mode 1:** en payant au comptant, il lui accorde une remise de 3 % sur le prix de vente de la voiture.
- **mode 2 :** 20 % à la commande ; le solde en cinq mensualités, La première étant payable un mois après la commande. Taux annuel de 15%.
- **mode 3:** 500 000 F à la commande et acceptation de huit traites mensuelles de 1 200 000 F chacune, la première traite est payée trois mois après l'achat.

1. Quel est le prix payé en choisissant le 1er mode ?
2. Quel est le montant d'une mensualité pour le deuxième mode ?
3. Quel est le taux de crédit consenti par le concessionnaire sachant que le premier et le troisième mode sont équivalents le jour de l'achat ?

EXERCICE 8

Le 12 avril 2005, deux effets de valeurs nominales $V_1 = 36000\ F$ et $V_2 = 72000\ F$ échéant respectivement dans 45 et 52 jours sont escomptés au même taux t. L'escompte prélevé par le banquier pour les deux effets s'élève à 1490 F.

1. Calculer le taux t d'escompte.

Le banquier retient en plus de l'escompte et sur chaque effet :

- Une commission d'endos au taux de 0,6 %
- Une commission indépendante du temps au taux de 0,5 %
- Une commission fixe de 150 F.

Une taxe sur opération bancaire (TOB) est aussi prélevée.

2. Calculer les différentes commissions et la TOB.
3. Calculer l'agio TTC.
4. En déduire la valeur nette résultante de cette opération.
5. Pendant combien de jours faut-il placer la valeur nette pour avoir au moins une valeur acquise $V_a = V_1 + V_2$?

(BT blanc au CBCG Cocody_2008)

EXERCICE 9

Un commerçant propriétaire de plusieurs points de vente de produits vivriers dans une ville, réalise ses opérations avec plusieurs banques. Le 03 juillet d'une année, il dispose de 10 000 000 F qu'il place à intérêts simples dans 3 banques différentes A, B et C. Les périodes de placement, ainsi que les différents capitaux placés sont dans le tableau suivant.

Banques	Capitaux	Taux annuels	Périodes
A	900 000 F		Du 03/7 au 31/07
B		9 %	Du 03/07 au 28/08
C			Du 03/07 au 27/09

- La banque A lui a versé 5 950F d'intérêts.
- Le placement effectué dans la banque B a acquis une valeur de 5 577 000 F.
- L'intérêt total versé à la fin de ces 3 placements est 177 500F.

1. Déterminer le taux annuel de la banque A.
2. Calculer le capital placé dans la banque B par le commerçant.
3. **a.** Calculer le taux annuel de la banque C.

   b. En déduire le taux moyen de ces différents placements.

EXERCICE 10

Un commerçant effectue un achat de matériel au prix marqué de 120 000F. Il a le choix entre deux possibilités de règlement.

1. Première possibilité :

Achat au comptant avec une remise de 3 %. Calculer le montant à payer au comptant.

2. Deuxième possibilité :

20 % au comptant et le reste en deux traites de même valeur nominale. La première traite est payable 3 mois après l'achat et la deuxième payable, 5 mois après l'achat. Le taux de l'escompte est de 12 %.

On demande :

a- Le montant du matériel payé comptant ;

b- La valeur nominale de chaque traite ;

c- Le coût total du matériel à crédit ;

d- Le coût du crédit.

3. Quelle est la possibilité la plus avantageuse ?

EXERCICE 11

Une personne a placé dans une entreprise, le premier juillet 1990 une somme de 40 000F. Le 01 juillet 1994, elle a retiré 30 000F. Le 01 juillet 1998, le solde de son compte s'élevait, compte tenu des intérêts capitalisés, le 01 juillet de chaque année, à 2 1 108, 47 F.

1. Quel a été le taux annuel de capitalisation ?
2. Quel aurait été le taux semestriel proportionnel ? Le taux semestriel équivalent ?

EXERCICE 12

Monsieur KOBON dispose de la somme de 780 000 F.

Il place 500 000 F à intérêts composés au taux annuel de 8 % pendant 5 ans.

Il place 280 000 F à intérêts simples au taux annuel de 4 % sur 10 mois.

1. Déterminer la valeur acquise par chacun des placements.
2. Déterminer l'intérêt produit par chacun des placements.
3. On suppose qu'il place x francs en intérêts composés sur 5 ans à 8 % et y francs en intérêts simples sur 10 mois à 4 %.

Déterminer x et y pour que l'intérêt produit par x soit égale à la valeur acquise de y.

(BT_2009)

EXERCICE 13

Pour accroître sa production, l'entreprise « ARIANE » a décidé de s'acheter une nouvelle machine. Le fournisseur lui fait payer 30 % du prix P au comptant et le reste peut être réglé selon les 2 modes supposés équivalents au taux annuel d'actualisation i relativement faible.

Mode 1 : payer 480 000 F dans un an et 214 000 F dans 3 ans.

Mode 2 : payer 527 000 F dans deux ans et 180 000 F dans 3 ans.

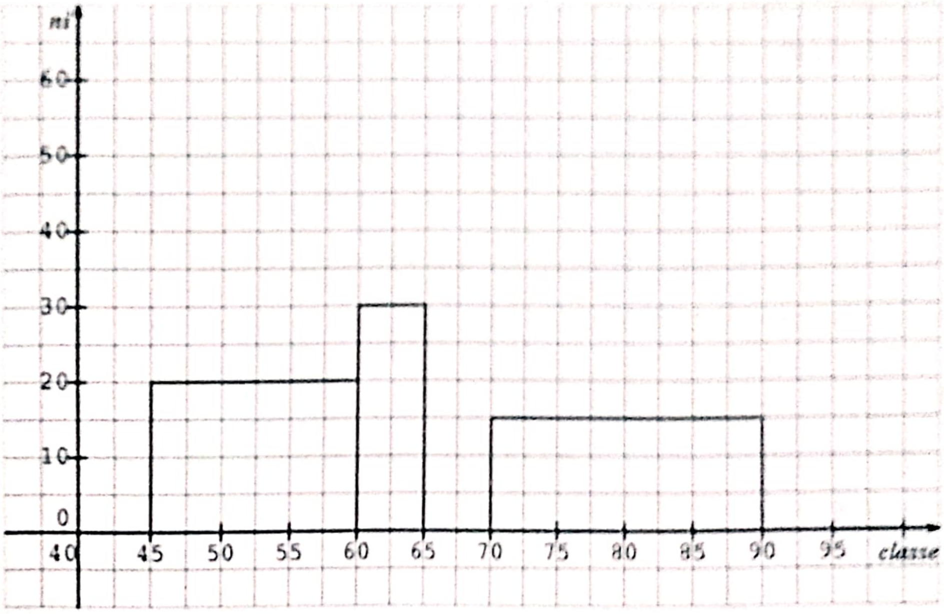
1) Calculer i.
2) Calculer P.
3) « ARIANE » choisit le mode 2 mais propose à son fournisseur de faire un versement unique X à échéance dans 5 ans. Calculer ce versement unique compte tenu du taux d'actualisation annuel i.

__N.B.__ : Les actualisations sont à intérêts composés

SERIES STATISTIQUES A UNE VARIABLE

EXERCICE 1

On considère l'histogramme ci-dessous



1. Calculer les effectifs des classes et compléter le tableau suivant :

Classes x_i	Effectifs n_i	Fréquence f_i (en %)	Effectifs cumulés décroissants
[; [			
[; [			140
[65 ; 70[		25	
[; [			

2. Tracer le polygone des effectifs après avoir construit le rectangle correspondant à la classe [65 ;70[.

Echelle :

1 cm pour 5 unités sur l'axe des abscisses

1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées

EXERCICE 2

Dans une localité donnée, 50 habitations ont été recensées suivant le nombre de pièces de chacune d'elles. Le résultat du recensement se présente comme suit :

5 ; 3 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3 ; 3 ; 3 ; 2 ; 4 ; 3 ; 2 ; 3 ; 1 ; 4 ;

5 ; 1 ; 3 ; 4 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 4 ; 2 ; 3 ; 4 ; 3 ; 2 ; 3 ; 1 ;

5 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 5 ; 3 ; 2 ; 3 ; 4 ; 2 ; 3 ; 4 ; 3 ; 1 ; 2 ; 3.

1. a – Quelle est la population étudiée ?

   b- Quel est le caractère étudié ; préciser la nature de ce caractère (qualitatif, quantitatif discret, quantitatif continu)

   c- Déterminer les modalités de ce caractère.

2. Elaborer un tableau de dépouillement.
   En déduire un tableau statistique comportant les fréquences cumulées croissantes et cumulées décroissantes en pourcentage
3. Quel est le pourcentage d'habitations ayant :
   a-trois pièces ?
   b- moins de quatre pièces ?
   c- au moins trois pièces ?
4. Si une société immobilière souhaite construire des habitations à louer dans cette localité, quel type d'habitations réaliserait-elle ? Pourquoi ?

EXERCICE 3

M. KONAN vend des marchandises sur les marchés de la région. Il vous communique les statistiques de ses ventes sur les 200 derniers jours de l'année.

Nombre d'articles vendu	Nombre de jours n_i	Les valeurs centrales x_i	amplitudes	Effectifs corrigés	$n_i x_i$	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[50 ; 250[	8						
[250 ; 450[	14						
[450 ; 650[	30						
[650 ; 750[	62						
[750 ; 850[	48						
[850 ;1050[	26						
[1050;1250[	12						

1. Pour cette série statistique, préciser : la population, les individus, le caractère et l'effectif total.
2. reproduire et compléter le tableau ci-dessus.
3. Déterminer le mode.
4. Construire le diagramme des effectifs cumulés croissants.
5. Déterminer graphiquement les quartiles Q_1, M_e, Q_3 et interpréter chaque résultat.

(BT_2009)

EXERCICE 4

80 employés d'une agence de tourisme, répartis suivant le nombre d'enfants à charge sont soumis à la fin de l'année à une rétribution de prime à raison de 2 500 F par enfant à charge. Le tableau incomplet de la répartition se présente comme suit :

NOMBRE D'ENFANTS A CHARGE	EFFECTIFS D'EMPLOYES	FREQUENCES f_i	FREQUENCES CUMULEES DECROISSANTES
0			
1		0,1875	0,95
2	29		
3		0,225	
4	10		
5		0,0375	
6			0,0125

1. Compléter le tableau.
2. Quel est le nombre d'employés ayant :
   a- 0 enfant à charge ?
   b- Moins de 4 enfants ?
   c- Au moins 3 enfants ?
3. Quel est le montant global des primes perçues par les employés ayant :
   a- entre 2 et 5 enfants ?
   b- au plus 2 enfants ?
   c- plus de 4 enfants ?

EXERCICE 5

Une enquête portant sur le nombre d'enfants scolarisés de 40 ouvriers de l'entreprise ADAD, a donné les résultats suivants :

2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 2 ; 4 ;2 ; 4 ; 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 2 ; 4 ; 4 ; 2 ;

1 ; 5 ; 0 ; 4 ; 2 ; 4 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 5 ; 2 ; 3 ;

1. a- Quelle est la population étudiée ?
   b- Quel est le caractère étudié ?
   c- Déterminer les modalités du caractère.

2. Elaborer un tableau de dépouillement, puis en déduire un tableau statistique comportant les effectifs, les fréquences relatives, cumulées croissantes et cumulées décroissantes en pourcentage.

3. Quelle est la proportion d'ouvriers ayant :
   a- moins de trois enfants scolarisés ?
   b- au plus un enfant scolarisé ?
   c- au moins deux enfants scolarisés ?

4. Si l'entreprise ADAD se propose d'allouer 2 500 F par enfant scolarisé, calculer :
   a- le montant du budget affecté à l'ensemble des enfants scolarisés,
   b- le montant du budget consacré aux parents (ouvriers) ayant plus d'un enfant scolarisé.

5. Construire le diagramme à bâtons des effectifs d'ouvriers.

6. Déterminer le mode, la moyenne, la médiane puis donner le sens de ces paramètres de position.

EXERCICE 6

Le tableau ci-dessous nous donne les notes des élèves d'une classe à un devoir :

Note sur 20	Nombre d'élèves	Centre des classes	Produit n_ix_i
[0 ; 2 [	7		
[2 ; 6 [	12		
[6 ; 12 [	x		
[12 ; 14 [	02	....	....
Total	....	....	....

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus
2. a- Donner l'expression de l'effectif total en fonction de x.
   b- calculer l'effectif x de la classe [6 ; 12 [, sachant que la note moyenne est 5,4.
   c- en déduire l'effectif total.
3. Calculer la note médiane.

(BT_2008)

EXERCICE 7

Le tableau ci-dessous présente un extrait des résultats de notes obtenues par des élèves à une interrogation :

Note sur 10	Effectifs	Fréquence en %	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[2 ; 4[			3	
[4 ; 5[			9	
[5 ; 8[			14	
[8 ; 10[			20	
Total				

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.
2. Calculer la note médiane
3. a) Construire sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

   b) En déduire graphiquement la valeur de la médiane.

Echelle : Abscisses : 1 cm → 1

Ordonnées : 1 cm → 2 élève.

(BT_2009)

EXERCICE 8

Une administration disposant d'un parc de véhicules endommagés a relevé pour 184 d'entre eux les distances parcourues. Certains résultats sont consignés dans le tableau ci-après :

Distances parcourues (en milliers de km)	Amplitude (A_i)	Centre (X_i)	Effectifs des véhicules (n_i)	Effectifs cumulés		Effectifs corrigés
				Croissants	Décroissants	
[80 : [				10		
[: 90 [	5					
[: [		95	60		160	
[: [	10			128	100	
[: [			20			
[: 150 [	25			176		
[: [		175			8	

1. Indiquer les éléments suivants :
   a- La population étudiée
   b- L'individu
   c- Le caractère étudié.
2. Compléter le tableau
3. Quel est le nombre de véhicules ayant parcouru
   a- moins de 100 000 kilomètres ?
   b- au moins 110 000 kilomètres ?
   c- entre 90 000 et 125 000 kilomètres inclus ?
4. Quelle est la distance parcourue
   a- par la majorité des véhicules endommagés ?
   b- par l'ensemble des véhicules endommagés ?
5. Construire l'histogramme de la répartition.

EXERCICE 9

Après la dévaluation du franc CFA, suivie de l'augmentation du prix du riz sur le marché national, l'inspection générale des prix de Côte d'Ivoire a procédé à un contrôle des prix dans 100 magasins d'Abidjan. Prix moyen du kilogramme de riz calculé est de 441 CFA.

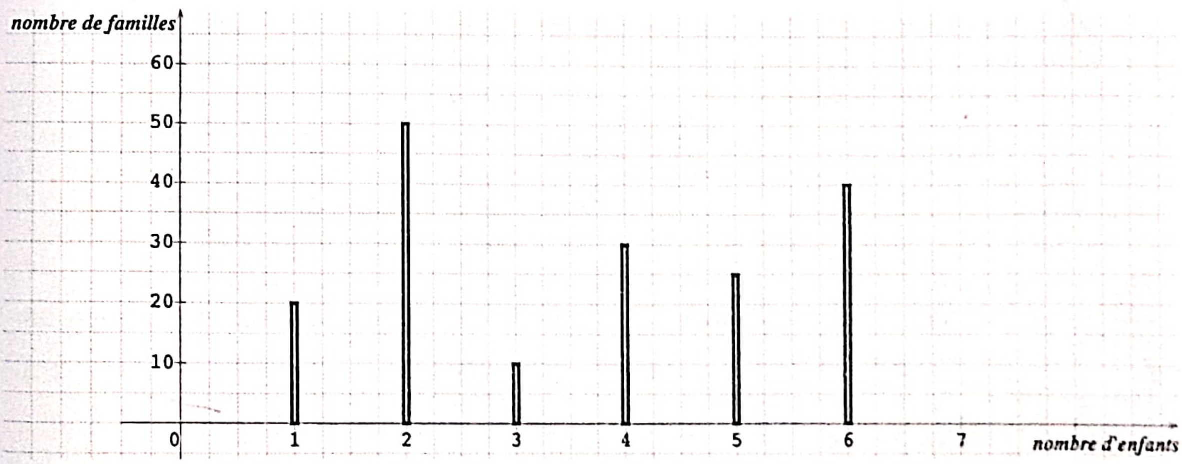
Certains résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous:

Prix en FCFA	Nombre de magasin n_i	Effectifs cumules croissant	Effectifs cumulés décroissants	Centres De classe (x_i)	$x_i\ n_i$
[250-300]	n_1				
[300-350]	4				
[350-400]	14				
[400-450]	36				
[450-500]	n_5				
[500-550]	16				

1. Déterminer les valeurs de n_1 et de n_5.
2. Compléter le tableau ci-dessus.
3. Déterminer la médiane Me.

EXERCICE 10

Le diagramme en bâtons ci-dessous, représente la distribution des familles du quartier Vridi-Cité à Abidjan dans la commune de Port - Bouët, selon le nombre d'enfants à charge:



1. Etablir le tableau statistique donnant les valeurs du caractère et les effectifs correspondants.
2. Calculer $\overline{x}$ le nombre moyen d'enfants à charge par famille (à l'unité près).
3. Calculer la variance V et l'écart type σ de cette distribution statistique.

EXERCICE 11

Le tableau statistique ci-dessous donne la distribution des notes obtenues par un élève de la filière Secrétariat Bureautique, au cours de l'année scolaire 2006-2007.

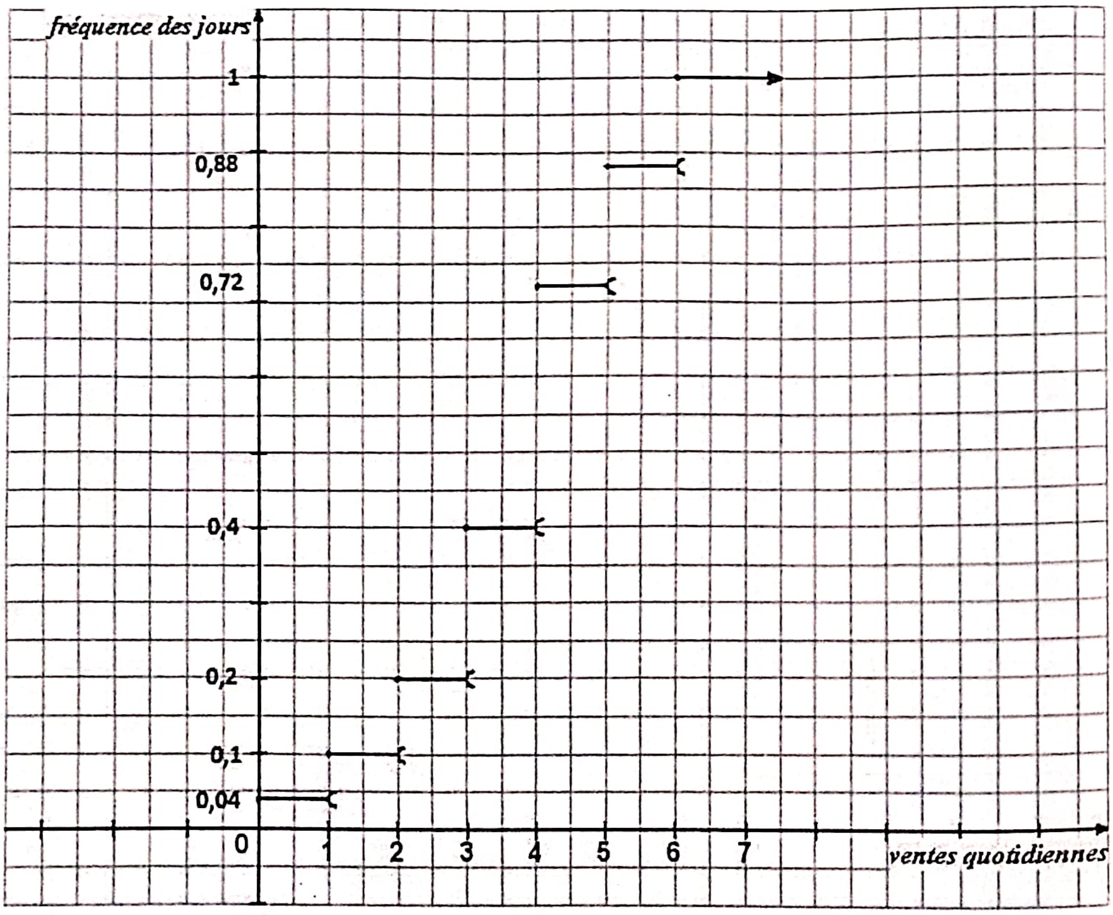
Notes	6	8	9	10	12	13	15	19
Effectifs	1	3	2	4	3	1	2	1

1. Préciser le caractère étudié et sa nature.
2. Déterminer la note modale.
3. Calculer la note moyenne $\overline{x}$ de l'élève.
4. Tracer le diagramme en bâtons des effectifs.

Echelle : $\begin{cases} \text{Abscisse} : 0{,}5\text{ cm} \to 1 \\ \text{Ordonnée} : 1\text{ cm} \to 1 \end{cases}$

EXERCICE 12

La distribution des 50 jours ouvrables d'un magasin suivant le nombre de ventes quotidiennes d'un article est représentée sur le graphique ci-dessous.



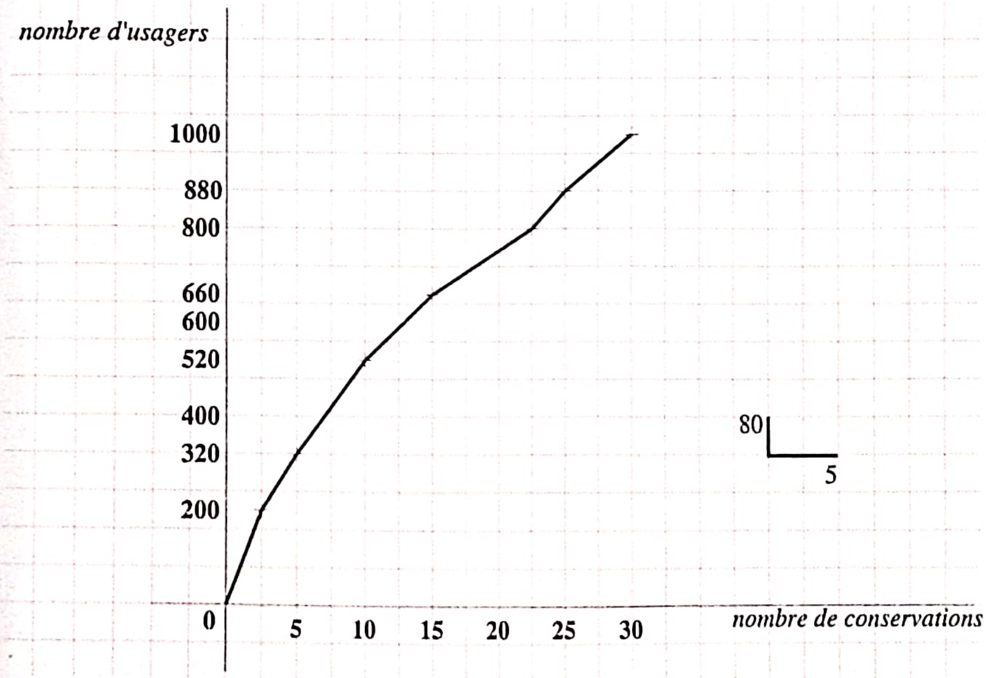
1. Quelle est la population étudiée ?

2. a- Quel est le caractère étudié ?
   b- Quelle est la nature statistique de ce caractère ?
3. Quelle est la nature de cette représentation graphique ?
4. Dresser le tableau des effectifs.
5. Indiquer le mode M_o, et calculer la médiane et la moyenne arithmétique, puis interpréter ces paramètres.
6. Calculer l'étendue et l'écart type.
7. Quel est l'intervalle qui contient 50 % des observation ?
8. Construire le diagramme en bâtons.

EXERCICE 13

Le graphique ci-après est le seul document statistique qu'on a pu sauver des ravages d'un incendie qui s'est déclaré dans le bureau des contraventions d'un commissariat de police.

Elle présente la courbe cumulative de la répartition des contraventions récoltées au cours de l'année 1988 par un certain nombre d'usagers de la route.



Au vu de ce document, on vous demande de :

1. a- Trouver l'effectif total de la population étudiée,

   b- Déterminer graphiquement le premier quartile, la médiane et le troisième quartile de cette série statistique.

2. a- Reconstituer les classes.

   b- Calculer la moyenne $\overline{X}$ de la série.

   c- Déterminer l'écart type σ.

3. Déterminer l'intervalle $[\overline{X} - 2\sigma ; \overline{X} + 2\sigma]$.

SERIES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

Une entreprise de transport de marchandises a relevé de 2001 à 2008 le tonnage annuel de marchandises consigné dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang des années X	1	2	3	4	5	6	7	8
Tonnage Y	58	60	62	65	68	70	72	74

1. Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de MAYER.
2. Quel tonnage l'entreprise peut-elle espérer atteindre en 2009 ?

(On pourra utiliser le rang de l'année (1, 2, 3,...) pour effectuer les calculs).

(BT_2009)

EXERCICE 2

Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une société ont été enregistrés dans le tableau suivant :

Dépenses x_i (en dizaines de millions de F)	12	17	11	13	31	20
Chiffres d'Affaires y_i (en dizaines de millions de F)	99	130	92	108	232	150

1. a) Représenter le nuage de points.
   b) Est-il possible d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi?
2. Déterminer les coordonnées $(\overline{x} ; \overline{y})$ du point moyen G.
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
4. On suppose que la tendance se conserve pour les dépenses ultérieures. Déterminer :
   a) Le Chiffre d'Affaires si la dépense est de 300 millions de francs ;
   b) La dépense si le Chiffre d'Affaires est de 2 milliards de francs.

EXERCICE 3

Le tableau ci-dessous, donne pour 10 footballeurs d'une équipe de la place :

- Le nombre d'années d'expérience (X).
- Le nombre de buts marqués par saison (Y).

Années d'expérience x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de buts marqués y_i	20	22	30	28	38	35	45	49	50	53

1. Représenter le nuage de points $M_i(X_i, Y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   Echelle : 1 cm pour une année en abscisses et 1 cm pour 10 buts en ordonnées.
2. Calculer le coefficient corrélation linéaire entre X et Y
   Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de points? Justifier votre réponse.
3. a. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées.
   b. En utilisant l'équation de cette droite, estimer le nombre de buts d'un joueur qui a 12 années d'expérience.

EXERCICE 4

Une maison de vente de jouets constate que ses chiffres d'affaires varient en fonction du nombre d'articles vendus. Le tableau ci-dessous vous donne les statistiques entre 2001 et 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Nombre d'articles x_i vendus (en milliers)	8	10	12	15	18	24
Chiffre d'Affaires y_i (en millions de francs)	6	7	8,9	12	14,5	17,6

1.a- Représenter le nuage de points dans un repère orthonormal d'unité graphique : 1cm pour 2 milliers.
   b- Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de points? Justifier votre réponse
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage puis placer-le sur le graphique.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
4. Quel est le Chiffre d'Affaires réalisé pour une vente de 30 000 articles ?

MATHEMATIQUES GENERALES

EXERCICE 1

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \geq 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{4}{x-1} > 0$.

Partie B

On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-1}$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (Unités graphiques : 1 cm pour 1 sur (OI), 1 cm pour 2 sur (OJ))

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Calculer f(-1) ; f(2) ; f(3) ; f(5).
3. Justifier que, pour tout x élément de D_f, $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}$.
4. a- Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ puis interpréter les résultats obtenus.

   b - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
5. a- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 6$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b- Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).
6. On admet que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f et f ' sa dérivée.

   a- Déterminer la fonction dérivée de f.

   b- Démontrer que, pour tout x élément de D_f, $f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

   c- En déduire le sens de variation de f.

   d- Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer les asymptotes et la courbe (C_f) dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique n articles par mois. Les charges se répartissent en charges fixes d'un montant de 750 000 F par mois et en charges variables d'un montant de 1200 F par article et par mois.

1. Exprimer en fonction de n le prix de revient r d'un article.
2. On considère la fonction numérique à une variable réelle définie par

   $f(x) = 1200 + \frac{750000}{x}$.

a- Etudier les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (limites, sens de variation, tableau de variation).

b- Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), tracer la courbe représentative de f sur [500 ; 1500] et la droite d'équation $y = 2\,000$. (Unités graphiques : 1cm pour 100 sur (OI) et 1cm pour 400 sur (OJ)

3. Chaque article est vendu à 2 000F.

a) Déterminer graphiquement le nombre minimum d'articles à produire pour que l'entreprise soit rentable.

b) Vérifier le résultat obtenu par le calcul.

EXERCICE 3

On considère la fonction numérique f à une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{2x-4}{2x-3}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I, J) (Unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. a - Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b - Interpréter géométriquement les résultats.
3. On admet que la fonction f est dérivable en tout élément de D_f.

   a- Démontrer que, pour tout élément x de D_f, $f'(x) = \dfrac{2}{(2x-3)^2}$

   b – Déterminer le sens de variation de f.

   c - Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer les asymptotes puis la courbe (C_f) dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 4

Soit f la fonction numérique à une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ et

(C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I, J) (Unités graphiques : 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ)).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f sous forme d'union d'intervalles.
2. Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que,

   pour tout nombre réel x élément de D_f, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{x-2}$

3. a- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b- Calculer les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 2

   c- Interpréter géométriquement les résultats.

4. On admet que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f et on note par f' sa fonction dérivée.

   a- Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de D_f.

   b- Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens variation de f.

   c- Dresser le tableau de variation de f.

5. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) en l'infini.

6. Tracer les asymptotes puis la courbe (C_f) dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\ln x)^2 - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (Unité graphique 2 cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2. Calculer f(1) ; f(2) ; f(e) et $f(\frac{1}{e})$.

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de D_f, $\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x} + 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$.

4. a. Calculer la limite de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

5. La courbe (C_f) admet-elle une branche parabolique en $+\infty$? Justifier votre réponse.

6. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x \geq 0$.

   b. Déterminer le sens de variation de la fonction f.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

7. Construire, dans le repère (O, I, J), l'asymptote et la courbe (C_f).

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (Unité graphique : 2 cm).

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par (C_g) la courbe représentative de g dans le repère (O,I,J).

1. a- Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

   b- Calculer les limites g aux bornes de son ensemble de définition.

2. a- Etudier la continuité de g au point d'abscisse 0.

   b- Etudier la dérivabilité de g au point d'abscisse 0.

3. On admet que g est dérivable sur D_g et g' sa dérivée.

   a- Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de D_g, $g'(x) = \left(\frac{x-1}{2x}\right) e^{\frac{1}{x}}$.

   b- Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante : $\frac{x-1}{x} \geq 0$ puis en déduire le signe de $g'(x)$.

   c- En déduire le sens de variation de g.

   d- Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$ est une asymptote à la courbe (C_g) en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Tracer la droite (D) et la courbe (C_g) dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 7

Le coût global annuel de gestion de stock d'une entreprise est donné en fonction du nombre n de commandes annuelles effectuées.

$C(n) = 40000 + \frac{6400}{n} + 4n$.

1. a- Calculer le coût global annuel si l'entreprise a effectué 16 commandes.

   b- Calculer le nombre n de commandes si l'entreprise a enregistré un coût global annuel de 40 400F (en supposant que l'entreprise fait au moins 25 commandes).

2. On admet que la fonction C est dérivable et C ' sa dérivée sur $]0;+\infty[$.

   a- Déterminer, pour n élément de $]0;+\infty[$, la fonction dérivée C ' de C.

   b- Etudier les variations de C puis dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. a- Déterminer le nombre n de commandes qui minimise le coût global de la gestion

   b- En déduire ce coût global minimum.

EXERCICE 8

Alain est un jeune travailleur dans une entreprise de la place. Le mois de janvier 2007, il a eu un salaire de 100 000 F. Pour son dynamisme, son employeur décide d'augmenter son salaire de 5 000 F chaque mois.

On note S_n son salaire au $n^{ème}$ mois (janvier 2007 étant considéré comme le 1^{er} mois).

1. a- Calculer S_2, S_3 et S_4 puis en déduire l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n.

   b- Quelle est la nature de la suite (S_n)

   c- Exprimer S_n en fonction de n.

2. Quel est le salaire total versé à Alain après 2 ans d'activité ?

EXERCICE 9

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I, J).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f sous forme d'union d'intervalles.

2. a- Calculer les limites de f aux bornes des intervalles qui composent son ensemble de définition.

   b- En déduire que (C_f) admet deux asymptotes dont on précisera les équations et la nature.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition et f ' sa dérivée.

   a- Déterminer la fonction dérivée f ' de f sur D_f.

   b- Etudier le signe de f ' et en déduire le sens de variation de f.

   c- Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

5. Tracer les asymptotes et la tangente (T) puis la courbe (C_f) dans le même repère (O, I, J).

EXERCICE 10

Chaque année la production d'une usine subit une baisse évaluée à 4 % de la production précédente. Au cours de l'année 2003, la production a été de 25 000 unités.

1. Calculer la production de l'année 2004 ; puis celle de 2005.

2. On désigne par P_0 la production de l'année 2003 ($P_0 = 25000$), P_n la production de l'année (2003 + n).

   a- Démontrer que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

b- Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, $P_n = 25\,000 \times (0{,}96)^n$.

3. La fabrication du produit n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 20 000 unités.

a- Déterminer l'année à partir de laquelle la production n'est plus rentable.

b- Déterminer la production totale pendant le temps de fonctionnement à partir du 1er janvier 2003.

(BT_2009)

EXERCICE 11

Le bénéfice réalisé par une société pour un nombre q d'articles produits est donné par la relation : $B(q) = 28\,000 + 350q - 0{,}7q^2$ (q est un entier naturel non nul).

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [100 ; 400] par :

   $f(x) = -0{,}7x^2 + 350x + 28\,000$

   a- Calculer f '(x) pour x élément de l'intervalle [100 ; 400]

   b- Etudier le signe de f '(x) suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f.

   c- Dresser le tableau de variation de f.

   d- Démontrer que f admet un maximum et donner ce maximum.

2. Calculer le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalise le bénéfice maximal. Quel est dans ce cas, ce bénéfice.

(BT_2009)

TROISIEME PARTIE

CORRIGES DES EXERCICES TYPES EXAMEN

CALCULS COMMERCIAUX

EXERCICE 1

1. Calculons le bénéfice total de la PME

Soit B, le bénéfice total , K la part de Konan , D celle de Diaby.

On a : $\frac{K}{26000000} = \frac{D}{5400000}$ donc $\frac{K}{2,6} = \frac{D}{5,4} = \frac{K+D}{2,6+5,4}$

or $K+D = \frac{75}{100} \times B$ donc $\frac{D}{5,4} = \frac{0,75\ B}{8}$ par suite $D = \frac{0,75 \times 5,4\ B}{8}$.

De plus $D = 605\ 000 - 0,25\ B$, donc $605\,000 = B\left(\frac{0,75 \times 5,4}{8} + 0,25\right)$.

En définitive on obtient : $B = \frac{605000 \times 8}{6,05}$ soit $B = 800000$ F

2. Déterminons la part de KONAN : K

$K = 800\ 000 - 605\ 000 = 195000$ .On aurait pu procéder aussi de la façon suivante :

$\frac{K}{2,6} = \frac{0,75\ B}{8} \Rightarrow K = 2,6 \times 0,75 \times \frac{800\,000}{8}$ soit $K = 195\ 000$ F

3. Le pourcentage de la part de DIABY :

$P = \frac{605\,000 \times 100}{800\,000} = 75,625$ soit 75,625 %

EXERCICE 2

1. Calculons le prix d'achat brut

Soit x le prix d'achat brut et k le coefficient multiplicateur qui permet de passer du prix d'achat brut au prix d'achat net.

On a : $k = (1-0,05)(1-0,02) \Rightarrow k = 0,931$.

Or $k \cdot x = 465\,500$. C'est-à-dire $0,931x = 465\,500$. D'où $x = 500\,000$.

Le prix d'achat brut est de 500 000 F.

2. Calculons le coût d'achat : CA .

$$CA = PAN_{HT} + F/A$$
$$= 465\,500 + 10\,500$$
$$CA = 476\,000$$

Le coût d'achat est de 476 000 F

3. Calculons le prix de vente hors taxe : PV_{HT}

$F/V = 0,03PV_{HT}$.

CA	MB	PV_{HT}
80	20	100
476 000	V	Y

$\frac{476\,000}{80} = \frac{V}{20}$. Soit $V = \frac{476\,000 \times 20}{80}$ c'est-à-dire $V = 119\,000$

Le prix de vente hors taxe est de 595 000 F

$PV_{HT} = CA + MB$

$PV_{HT} = 476\,000 + 11\,900$

$PV_{HT} = 595\,000$

4. Calculons le prix de vente toute taxe comprise : PV_{TTC}

$PV_{TTC} = PV_{HT} + Taxe$.

$Taxe = \frac{PVHT \times 18}{100} = \frac{595000 \times 18}{100}$

Taxe = 107 100 F.

$PV_{TTC} = 595\,000 + 107\,100 = 702\,100$ F.

Le prix de vente toutes taxes comprises est de 702 100 F.

5. Déterminons le bénéfice du commerçant : B

$B = MB - F/V$

$F/V = \frac{3 \times PV_{HT}}{100} = \frac{3 \times 595\,000}{100}$

$F/V = 17\,850$

B = 107 100 – 17 850 = 98 250 F

Le bénéfice du commerçant est de 89 250 F.

EXERCICE 3

1°) Déterminons le taux unique de réduction : R

Soit k le coefficient multiplicateur : $R = 1 - k$

Remise : 15 % ; rabais 20 % ; escompte : 5 %.

$k = (1 - 15\%)(1 - 20\%)(1 - 5\%)$

$k = 0{,}646$ soit $64{,}6\%$

Donc $R = 1 - 0,646$

$R = 0,354$ soit $35,4\ \%$.

2°) Trouvons le prix d'achat brut : x

$$x = \frac{2\,584\,000}{0,646} \Rightarrow x = 4\,000\,000\ F.$$

3°) Calculons le coût d'achat et le coût de production :

- le coût d'achat : CA.

  $CA = PAN + F/A$ or $F/A = 30\% PAN$

  $CA = 1,3 PAN$

  $CA = 1,3 \times 2\,584\,000 \Rightarrow CA = 3\,359\,200\ F.$

- le coût de production : CP

  $CP = CA + 35\% CP$

  $$CP = \frac{CA}{0,65} \Rightarrow CP = \frac{3\,359\,200}{0,65} \Rightarrow CP = 5\,168\,000 F.$$

4°) a) Calculons le prix de vente hors taxe : PV_{HT}

$PV_{HT} = PR + MB$

Avec PR : prix de revient ou coût de revient

et MB : marge brute.

Or $PR = CP + F/V$

$PR = CP + 40\% PR$

$PR = \frac{CP}{0,6}$ soit $PR = 8\,613\,333,3\ F$

$PV_{HT} = PR + 30\ \% PV_{HT}$

$$PV_{HT} = \frac{PR}{0,7} \Rightarrow PR = \frac{8\,613\,333,3}{0,7} \Rightarrow PV_{HT} = 11\,661\,904,7\ F$$

b) • Marge brute : MB

$MB = PV_{HT} - CP$

$MB = 11\,661\,904,7 - 5\,168\,000$

$MB = 6\,493\,904,7\ F$

• Marge nette : MN

$MN = 11\,661\,904,7 - 8\,613\,333,3$

$MN = 3\,048\,571,4\ F$

EXERCICE 4

1 – Détermination du prix d'achat des matières premières : x

Désignons par :

CF_A le Coût de fabrication de A, avec $CF_A = x + 20\,\%x = 1{,}2\ x$.

CF_B le Coût de fabrication de B, avec $CF_B = x + 40\,\%x = 1{,}4\ x$.

Y_A le Prix de vente de A

Y_B le Prix de vente de B

On a :

$Y_A = CF_A + \frac{20}{100} Y_A$ implique $Y_A - \frac{20}{100} Y_A = CF_A$ d'où $\frac{80}{100} Y_A = CF_A$ et donc $Y_A = \frac{100}{80} CF_A$.

$Y_B = CF_B + \frac{30}{100} Y_B$ donne $Y_B - \frac{30}{100} Y_B = CF_B$ soit $\frac{70}{100} Y_B = CF_B$. C'est-à-dire $Y_B = \frac{100}{70} CF_B$

Or $Y_A + Y_B = 35\ 000$. Donc $\frac{100}{80} CF_A + \frac{100}{70} CF_B = 35\,000$. Par suite

$$\frac{100}{80} \times 1{,}2\,x + \frac{100}{70} \times 1{,}4\ x = 35\,000$$

$x\ (\frac{100}{80} \times 1{,}2 + \frac{100}{70} \times 1{,}4) = 35\,000$ soit $(1{,}5 + 2)\ x = 3\ 500$.

En définitive $x = \frac{35\,000}{3{,}5}$ soit 10 000 F

2. Calcul du prix de revient de chaque produit.

$CF_A = 1{,}2\ x$ implique $CF_A = 1{,}2 \times 10\ 000$ soit 12 000 F.

$CF_B = 1{,}4\ x$ implique $CF_B = 1{,}4 \times 10\ 000$ soit 14 000 F.

3. Détermination du prix de vente de chaque produit et du bénéfice réalisé sur chaque produit.

a- Le prix de vente de chaque produit :

$$Y_A = \frac{100}{80} \times 12\ 000 \text{ donc } Y_A = 15000 \text{ soit } 15\ 000 \text{ F}$$

$$Y_B = \frac{100}{70} \times 14\ 000 \text{ donc } Y_B = 20\ 000 \text{ soit } 20\ 000 \text{ F}$$

b- Le bénéfice de chaque produit :

$B_A = PV - Cf = 15\ 000 - 12\ 000$ donc $B_A = 3\ 000$ soit 3000 F.

$B_B = 20\ 000 - 14\ 000$ donc $B_B = 6\ 000$ soit 6000 F.

4. Calcul du bénéfice total

$B_T = B_A + B_B$

$B_T = 3\,000 + 6\,000$

$B_T = 9\,000$ soit 9000 F

EXERCICE 5

1. Calculons le prix d'achat brut hors taxe :

Soit x Le prix d'achat brut hors taxe et k le coefficient multiplicateur du prix d'achat net par rapport au prix d'achat brut.

$k = \dfrac{PAN_{HT}}{x}$ implique $x = \dfrac{PAN_{HT}}{k}$

Comme $k = \left(1 - \dfrac{10}{100}\right)\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) = 0{,}882$, alors $x = \dfrac{2\,646\,000}{0{,}882} = 3\,000\,000$ soit 3 000 000 F.

2. Calculons le coût d'achat : CA

$CA = PAN_{HT} + F/A$, avec $F/A = \dfrac{2\,646\,000 \times 5}{100} = 132\,300$.

Donc $CA = 2\,646\,000 + 132\,300 = 2\,778\,300$

Le coût d'achat est de 2 778 300 F

3. Déterminons le prix de vente toutes taxes comprises : PV_{TTC}

$PV_{TTC} = 2{,}05 \times 2\,646\,000$

$PV_{TTC} = 5\,424\,300$ F.

4. Déterminons le prix de vente hors taxe : PV_{HT}

$\text{Taxe / vente} = \dfrac{5\,424\,300 \times 20}{100} = 1\,084\,860$

$PV_{HT} = PV_{TTC} - \text{taxe / vente}$

$PV_{HT} = 5\,424\,300 - 1\,084\,860 = 4\,339\,440$ soit 4 339 440 F

5. Calculons le taux de marque :

Soit Tm le taux de marque.

Le prix de revient : PR = CA + Frais de vente

PR = 2 778 300 + 61 140 = 2 839 440 soit 2 839 440 F

$\text{Bénéfice total} = PV_{HT} - PR$

$\text{Bénéfice total} = 4\,339\,440 - 2\,839\,440$

$\text{Bénéfice total} = 1\,500\,000$ soit 1 500 000 F

$T_m = \frac{1\,500\,000}{4\,339\,440} \times 100 = 34,56$. Soit 34, 56 %.

EXERCICE 6

1. a- Calcul du prix d'achat net hors taxe :

Notons PAN_{HT}, le prix d'achat net hors taxe.

Prix d'achat brut hors taxe : 400 000 F

1ère remise : $400\,000 \times \frac{10}{100} = 40\,000$ F

1er net commercial : 400 000 – 40 000 = 360 000 F

2ème remise : $360\,000 \times \frac{5}{100} = 18\,000$ F

2ème Net commercial : 360 000 – 18 000 = 342 000 F

Escompte : $342\,000 \times \frac{2}{100} = 6\,840$ F

PAN_{HT} : 342 000 – 6 840 = 335 160 F

b- Calcul du prix de vente hors taxe des articles :

Soit Le prix de vente hors taxe des articles PV_{HT} et CA le coût d'achat

On a : $CA = PAN_{HT} + F/A$

$F/A = 400\,000 \times \frac{5}{100} = 20\,000$ F

CA = 335 160 + 20 000 = 355 160 F

Le prix de revient :

Soit PR le prix de revient.

$PR = CA + F/V$

$PR = CA + \frac{20}{100}PR$

$PR - \frac{20}{100}PR = CA$

$\frac{80PR}{100} = CA$

$PR = \frac{100CA}{80}$

$PR = \frac{100 \times 355\,160}{80} = 443\,950$

Le prix de revient est : 443 950 f

Le prix de vente hors taxe :

Soit PV_{HT} Le prix de vente hors taxe

$PV_{HT} = PR + MARGE$

	PV_{HT}	PR	MARGE
Montant	y	443 950	
%	100	80	20

Calcul du montant du PV_{HT}

$$\frac{y}{100} = \frac{443\,950}{80}$$

$$y = \frac{443950 \times 100}{80} = 554937,5$$

$PV_{HT} = 554\,937,5$ F

c- La marge réalisée par Coulibaly :

$554\,937,5 - 443\,950 = 110\,987,5$ F

2. a- Expression de y en fonction de x :

Soit k le coefficient du prix de vente par rapport à PAB_{HT}.

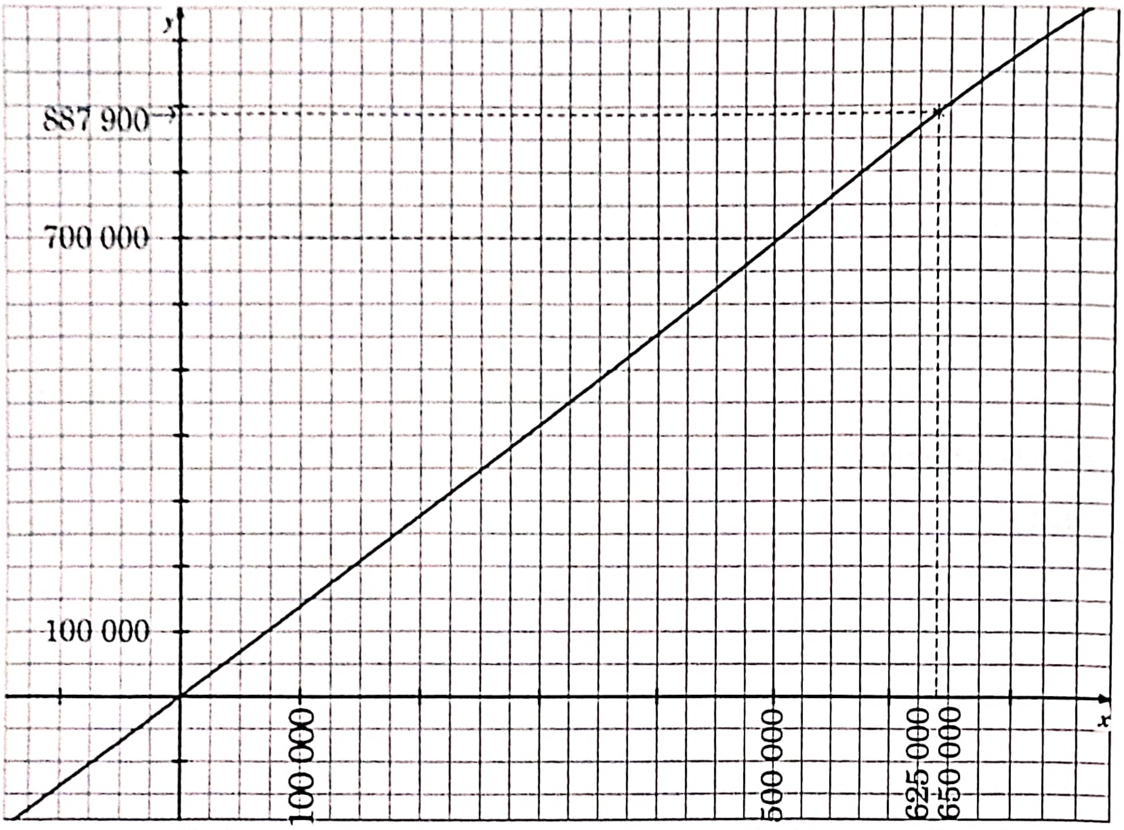
$$k = \frac{554\,937,5}{400\,000} = 1,38734$$

$PV_{HT} = k \cdot PAB_{HT}$

$y = kx$

$y = 1,38734x$

b- Représentation graphique de y en fonction de x (voir graphique page suivante).



3- a- Détermination graphiquement du prix d'achat hors taxe : voir croquis.

D'après le graphique Pour y= 887 900 F, on a x $\in$ [625 000 ; 650 000].

b -Détermination graphiquement du prix de vente hors taxe : voir croquis

D'après le graphique pour x = 500 000 F, on a $y \simeq 700\,000$.

4- Vérification algébrique:

Si x = 500 000 alors y = 1,38734 $\times$ 500 000

y = 693 670F.

Si y= 887 900 alors 887900 = 1,38734x

x = 640 000

EXERCICE 7

1 – Calcul du prix de vente toutes taxes comprises :

Notons PV_{TTC}, le prix de vente toute taxe comprise.

$PV_{TTC} = 1,792 \times 760\,000 = 1\,361\,920$ soit 1 361 920 F

2 – Calcul du prix de vente hors taxe :

Soit PV_{HT} le prix de vente hors taxe.

$PAB_{HT} = 760\ 000$

Réduction = 0

$PAB_{HT} = PAN_{HT}$

Frais d'achat : $\dfrac{760\ 000 \times 12}{100} = 91\ 200$

Frais d'achat : 91200F

Coût d'achat : 760 000 + 91 200 = 851 200 F

	PV_{HT}	MARGE	CA
%	100	25	75
Montant	y		851 200

Calcul du montant y du PV_{HT}

$$\frac{y}{100} = \frac{851\,200}{75} \Rightarrow y = \frac{851\,200 \times 100}{75} = 1\,134\,933$$

Le PV_{HT} est de 1 134 933 F.

3 – Taux légal de la taxe :

Notons t le taux légal de la taxe.

Montant de la taxe : 1 361 920– 1 134 933 = 226 987

$$t = \frac{226\,987}{1\,361\,920} \times 100$$

t = 16,67 %

EXERCICE 8

1) Déterminons :

a- Le prix d'achat net hors taxe

Prix d'achat brut : 250 000 F

$1^{ère}$ remise : $250\ 000 \times \dfrac{7,5}{100} = 18\ 750$ F.

1^{er} net commercial

250 000 – 18 750 = 231 250 F

$2^{ème}$ remise : $231\ 250 \times \dfrac{4}{100} = 9\ 250$ soit 9 250 F.

Prix d'achat net hors taxe

231 250 – 9 250 = 222 000 F

b -Le coût d'achat :

notons CA le coût d'achat et F/A, Frais sur achat.

$$F/A = 222\ 000 \times \frac{5}{100} = 11\ 100 \text{ soit } 11\ 100 \text{ F}$$

$$CA = PAN_{HT} + F/A$$

$$CA = 222\ 000 + 11\ 100 = 233\ 100 \text{ soit } 233\ 100 \text{ F}$$

c- Le coefficient multiplicateur :

Soit k Le coefficient multiplicateur.

Méthode 1

$$k = \frac{CA}{PAB}$$

$$k = \frac{233\,100}{250\,000}$$

$$k = 0{,}9324$$

Méthode 2

$$k = \left(1 - \frac{7{,}5}{100}\right)\left(1 - \frac{4}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 0{,}9324$$

2-Déterminons

a- Le prix de vente hors taxe : PV_{HT}

soit y le montant du prix de vente hors taxe.

$$PV_{HT} = CA + MARGE$$

	PV_{HT}	CA	MARGE
Montant	Y	233 100	
%	100	75	25

Calcul du montant y du PV_{HT}

$$\frac{y}{100} = \frac{233100}{75} \text{ entraine } y = \frac{233100}{75} \times 100$$

y= 310 800 soit un prix de vente hors taxe de 310 800 F

b - Le prix de vente toutes taxes comprises : PV_{TTC}

soit z le montant du prix de vente toutes taxes comprises.

$$PV_{TTC} = PV_{HT} + Taxe$$

	PV_{TTC}	PV_{HT}	TAXE
%	100	80	20
Montant	z	310 800	

Calcul du montant z du PV_{TTC}

$\frac{100}{z} = \frac{80}{310\,800}$ Entraîne $z = \frac{310\,800}{80} \times 100$.

Donc z = 388 500. Soit un prix de vente toute taxe comprise de 388 500 F

c- La TVA versée au fisc.

- Taxe sur vente : $PV_{TTC} - PV_{HT}$

  Taxe sur vente = 388 500 – 310 800 = 77 700.

  Soit 77 700 francs de taxe sur la vente

- Taxe sur achat $= \frac{PAN_{HT} \times t}{100 - t}$

- Taxe sur achat $= \frac{222\,000 \times 20}{100 - 20}$.

  Soit 55 500 francs de taxe sur achat.

- Taxe nette versée au fisc. Taxe/Vente – Taxe/Achat

  Taxe nette versée au fisc = 77 700 – 55 500 = 22 200.

  Soit 22 200 F versés au fisc

EXERCICE 9

1.

- Calcul du Prix d'Achat Net (PAN) :

PAN = PAB – Remise

avec Prix d'Achat Brut (PAB) = 593 750 F et Remise 4% sur PAB

d'où $PAN = \frac{96 \times PAB}{100} = 57000$ soit 57000 F

- Calcul du Coût d'Achat (CA) :

$$CA = PAN + FA$$

avec PAN = 570 000 F et Frais d'Achat (FA) : 5% CA

d'où $CA = \frac{100 \times PAN}{95} = 600000$ soit 600000 F

2. Calcul du Coût de Production (CP)

$$CP = CA + FP$$

avec CA = 600 000 F et Frais de Production (FP) : 25% CP

d'où $$CP = \frac{100 \times CA}{75} = 800\,000 \text{ soit } 800\,000 \text{ F}$$

3. Calcul du Coût de Revient (CR) ou Prix de Revient (PR)

$$PR = CP + FD$$

avec CP = 800 000 F et Frais de distribution (FD) : 2% PR

d'où $$PR = \frac{100 \times CP}{98} = 816\,326{,}5$$

$$PR = 816\,327 \text{ soit } 816\,327 \text{ F}$$

4. Calcul du Prix de Vente Hors Taxe PV_{HT}

$$PV_{HT} = PR + \text{Marge nette}$$

$$= 816\,327 + 184\,000$$

$$PV_{HT} = 1000327 \text{ soit } 1000327 \text{ F}$$

5. Calcul du Prix PV_{TTC}

$$PV_{TTC} = PV_{HT} + \text{Taxe} \quad \text{or} \quad \text{Taxe} = PV_{HT} \times \frac{18}{100}$$

$$\text{d'où} \quad PV_{TTC} = \frac{118 \times PV_{HT}}{100} = 1180\,385{,}86$$

$$PV_{TTC} = 1180\,386 \text{ soit } 1\,180\,386 \text{ F}$$

OPERATIONS FINANCIERES

[illegible]

Commission fixe : Cf = 120 F

Expression de l'agio :

agio = E + e + Ci + Cf . Soit agio = 60t + 30 + 80 + 120 .

On obtient : agio = 60t + 230 .

4- Valeur du taux d'escompte :

On a agio = 60t + 230 et agio = 1 130 F . D'où 60t + 230 = 1 130 $\Rightarrow t = \dfrac{1130 - 230}{60}$

On obtient après calcul, t = 15. Donc le taux d'escompte est de 15 %.

5- Calcul du taux réel d'escompte : θ

$\dfrac{V \cdot \theta \cdot n_r}{36\,000} = \text{agio} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \dfrac{36\,000 \cdot \text{agio}}{V \cdot n_r}$ avec n_r le nombre de jours effectifs restant à courir.

$n_r = (30-16)+11 \Rightarrow n_r = 25$ jours.

AN : $\theta = \dfrac{36\,000 \times 1130}{80\,000 \times 25}$. On obtient : $\theta = 20{,}34$. Soit 20,34 %.

EXERCICE 2

1. Calculons le montant de chaque capital.

Soit a, b et c les différents capitaux.

Les capitaux a, b, c, sont proportionnels à 20, 12, 15 signifie que

$$\frac{a}{20} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{47}$$

Or a = 90 000 F donc :

$\dfrac{90\,000}{20} = \dfrac{b}{12}$ implique que **b = 54 000 F**

$\dfrac{90000}{20} = \dfrac{c}{15}$ implique que **c = 67 5 00 F**

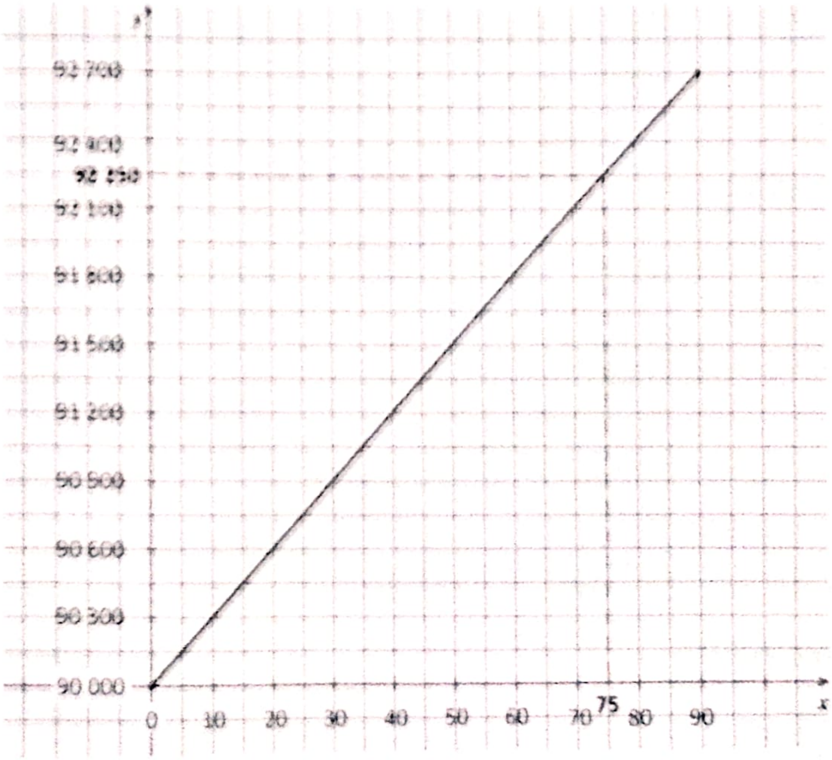
2. a- Exprimons la valeur acquise en fonction du nombre x de jours

$$y = a + \frac{a \times t \times x}{36\,000}$$

$$y = 90\,000 + \frac{90\,000 \times 12 \times x}{36\,000}$$

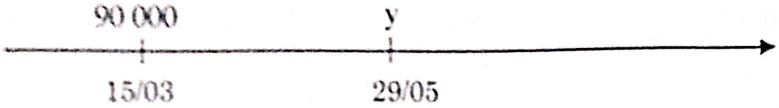
$$\mathbf{y = 30\,x + 90\,000}$$

b- Représentons graphiquement la valeur acquise en fonction de la durée :



c- Calculons la valeur acquise au 29 mai:

- schéma



Calculons le nombre x de jours :

du 15 mars au 31 mars, on a : 31-15 = 16 soit 16 jours

avril : 30 jours

mai : 29 jours

du 15 mars au 29 mai, on a au total: **75 jours**

alors $y = 30 \times 75 + 90\,000$ **= 92 250 F.**

3. Calculons le prix de vente hors taxe des marchandises

- Le montant de la taxe

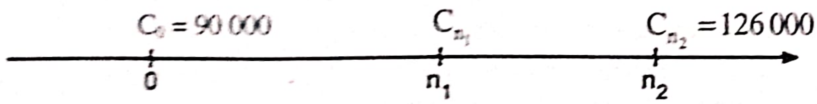
$$\text{Taxe} = \frac{92\,250 \times 15{,}25}{100} = 14\,068 \text{ F}$$

- Le prix de vente hors taxe PV_{HT}

$$PV_{HT} = 92\,250 - 14\,068 = 78\,182 \text{ F}$$

EXERCICE 3

Schéma



Par hypothèse on a :

$C_0 = 90\,000$; $t_1 = 10\,\%$.

$n_2 = 14$ mois, $C_{n_2} = 126\,000$

1. Déterminons la durée n_1 du premier placement si le taux du second est de 12%.

$$C_{n_1} = C_0 + \frac{C_0 t_1 n_1}{1200} \Rightarrow C_{n_1} = C_0\left(1 + \frac{t_1 n_1}{1200}\right)$$

$$C_{n_2} = C_{n_1} + \frac{C_{n_1} t_2 n_2}{1200} \Rightarrow C_{n2} = C_{n_1}\left(1 + \frac{t_2 n_2}{1200}\right)$$

$$C_{n_2} = C_0\left(1 + \frac{t_1 n_1}{1200}\right)\left(1 + \frac{t_2 n_2}{1200}\right)$$

Donc $126\,000 = 90\,000\left(1 + \frac{t_1 n_1}{1200}\right)\left(1 + \frac{t_2 n_2}{1200}\right)$

Si $t_2 = 12\%$

$$126 = 90\left(1+\frac{10n_1}{1200}\right)\left(1+\frac{12\times14}{1200}\right).$$

$$126 = 102,6\left(1+\frac{10n_1}{1200}\right) \Rightarrow \frac{1200+10n_1}{1200} = 1,228070.$$

$$n_1 = 27,3684$$

La durée du premier placement est de 27 mois 11 jours.

2 – Déterminons t_2 le taux annuel du 2è placement si la durée du 1er placement est de 2 ans.

$$126 = 90\left(1+\frac{10\times24}{1200}\right)\left(1+\frac{14t_2}{1200}\right)$$

$$126 = 90\times1,2\left(1+\frac{14t_2}{1200}\right)$$

$$126 = 108\left(1+\frac{14t_2}{1200}\right) \Rightarrow 1+\frac{14t_2}{1200} = 1,1666$$

$$t_2 = \frac{0,16666\times1200}{1200}$$

$$t_2 = 14,28 \text{ soit } 14,28\ \%$$

EXERCICE 4

1. Calculons le montant de chaque capital :

A le premier capital ; B le deuxième capital

Si A et B sont inversement proportionnels à 17 et 28, on montre alors que :

$\dfrac{A}{\frac{1}{17}} = \dfrac{B}{\frac{1}{28}}$ d'où $17A = 28B$. Soit $\dfrac{A}{28} = \dfrac{B}{17} = \dfrac{A-B}{28-17} = \dfrac{A-B}{11}$. Or $A-B = 110\,000$.

Par conséquent

$\dfrac{A}{28} = \dfrac{B}{17} = \dfrac{110\,000}{11} = 10\,000$. Donc : $\dfrac{A}{28} = 10000 \Rightarrow A = 280\,000$ F

et $\dfrac{B}{17} = 10\,000 \Rightarrow B = 170\,000$ F

2. Déterminons la durée de placement de A

$$I = \frac{Atn}{36\,000} \Rightarrow n = \frac{36\,000\,I}{At} = \frac{36000\times11200}{280000\times12} = 120 \text{ soit 120 jours}$$

3. Calculons le taux de placement de B

Soit t le taux de placement de B.

V_B = Valeur acquise : $V_B = B + I_B \Rightarrow I_B = V_B - B$

$I_B = 178\,500 - 170\,000 = 8\,500.$

$$8\,500 = \frac{178500 \times t \times 6}{1\,200} \Rightarrow t = \frac{8500 \times 1200}{170000 \times 6} = 10 \text{ soit } 10\,\%.$$

EXERCICE 5

1. Exprimons les 2 capitaux en fonction de t.

Soient A et B les 2 capitaux :

A + B = 50 000 ; A placé au taux de t% ; B placé au taux de (t – 1) %

$$I_A = \frac{A \times t \times 1}{100} = 1200 \Rightarrow A = \frac{1200 \times 100}{t}$$

$$I_B = \frac{B(t-1)}{100} = 1500 \Rightarrow B = \frac{1500 \times 100}{t-1}$$

2.

- Calculons les deux taux

On a : A + B = 50 000

$$\frac{120\,000}{t} + \frac{150\,000}{t-1} = 50\,000$$

$120\,000\,(t-1) + 150\,000\,t = 50\,000\,t\,(t-1)$

$12\,(t-1) + 15\,t = 5(t^2 - t)$

$12\,t - 12 + 15\,t = 5t^2 - 5t$

$27t - 12 = 5t^2 - 5t$

$5t^2 - 32t + 12 = 0$

Soit Δ le discriminant de cette équation

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a= 5$, $b= -32$ et $c=12$

$\Delta =(-32)^2 - 4\,(5)\,(12)$

$\Delta = 784$ implique $\sqrt{\Delta} = 28$ les solution de l'équation sont.

$$t = \frac{32-28}{10} = 0{,}4 \quad \text{ou} \quad t = \frac{32+28}{10} = 6.$$

Pour $t = 0{,}4$ on a $t - 1 = -0{,}6 < 0$.

Comme il n'y a pas de taux négatif, on retiendra seulement $t = 6$

Donc A est placé à 6 % et B est placé à 6 – 1 = 5 %

- Déterminons le montant des 2 capitaux

$$A = \frac{120\,000}{t} = \frac{120\,000}{6} = 20\,000 \text{ F}$$

$$B = \frac{150\,000}{t-1} = \frac{150\,000}{5} = 30\,000 \text{ F}$$

3 – Exprimons la valeur acquise de chaque capital en fonction du nombre d'années.

$Y_A = A + I$

$Y_A = 20\ 000 + 1\ 200x$

$Y_B = 30\ 000 + 1\ 500x$

4 – Déterminons le nombre d'années pour qu'on ait $Y_B - Y_A = 11\ 500$.

$Y_B - Y_A = 11\ 500 \Rightarrow 30\ 000 + 1\ 500x - 20\ 000 - 1\ 200x = 11\ 500$

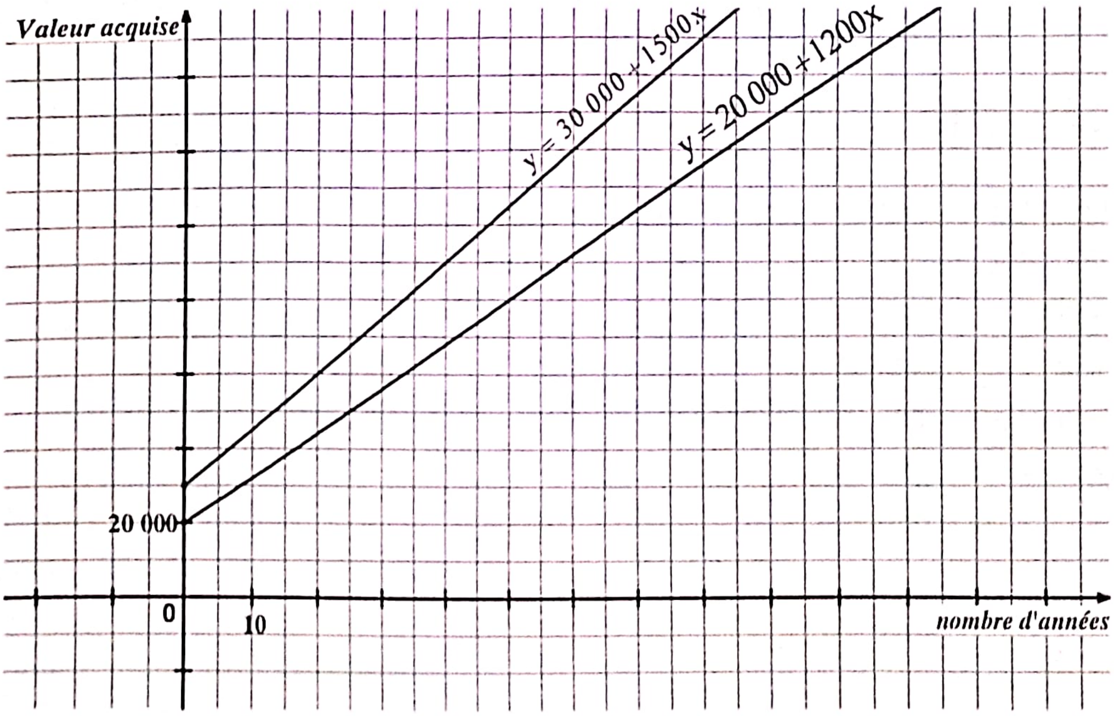
$10\ 000 + 300x = 11\ 500$ implique $x = 5$

Le nombre d'années est 5 ans.

5 – Représentation de Y_A et Y_B.

x	0	5
Y_A	20 000	26 000
Y_B	30 000	37 500

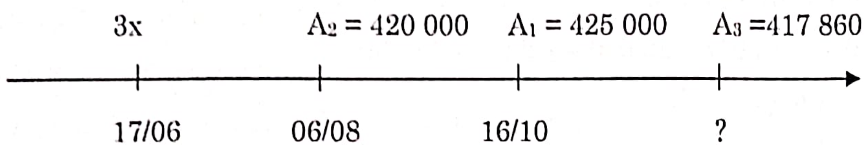
REPRESENTATION GRAPHIQUE



EXERCICE 6

Soit x la somme remise

A_1 la valeur du 1[er] effet et A_2 celle du 2[ème] et A_3 celle du 3ème



1 – Déterminons le taux d'escompte

Soit t le taux d'escompte.

On désigne par : n_1 le nombre de jours à courir du 1[er] effet

n_2 le nombre de jours à courir du 2[ème] effet

n_3 le nombre de jours à courir du 3[ème] effet

$$x = A_1 - \frac{A_1 n_1}{D} \text{ et } x = A_2 - \frac{A_2 n_2}{D}. \text{ Alors } A_1 - \frac{A_1\, n_1}{D} = A_2 - \frac{A_2\, n_2}{D}.$$

On en déduit que $D = \dfrac{A_1 n_1 - A_2 n_2}{A_1 - A_2}$

<u>Durée du premier placement</u>

juin : 30 – 17 = 13	
juillet	31
Août	31
septembre	30
octobre	15

$n_1 = 120$ jours

<u>Durée du deuxième placement</u>

juin : 30 – 17 = 13	
juillet	31
août	6

$n_2 = 50$ jours

$A_1 - A_2 = 425\ 000 - 420\ 000$

$= 5\ 000$

$$D = \frac{425\,000 \times 120 - 420\,000 \times 50}{5\,000}$$

$$D = 6\ 000 \text{ or } D = \frac{36\,000}{t} \Rightarrow t = \frac{36\,000}{6\,000} = 6 \text{ soit } 6\ \%$$

2 – L'échéance du troisième effet.

a) Calcul de x

$$x = 425\ 000 - \frac{425\,000 \times 120}{6\,000}$$

$x = 425\ 000 - 8\ 500$

x = 416 500

$$416\,500 = 417\,860 - \frac{417\,860 \times n_3}{6\,000}$$

$$n_3 = \frac{417\,860 - 416\,500}{417\,860}$$

$n_3 = 19{,}52 \approx 20$ jours

Juin : 30 – 17 = 13 jours

Juillet : 7

20 jours

L'échéance du troisième effet est le 07 juillet.

3 – La date à laquelle ces 3 effets pourraient être équivalents à 1 263 000.

Soit m le nombre de jours à courir du quatrième effet.

B = 1 263 000

A l'équivalence ;

$$B\frac{(D-m)}{D} = A_1\frac{(D-n_1)}{D} + A_2\frac{(D-n_2)}{D} + A_3\frac{(D-n_3)}{D}$$

$B(D-m) = A_1(D-n_1) + A_2(D-n_2) + A_3(D-n_3)$

Posons $\alpha = A_1(D-n_1) + A_2(D-n_2) + A_3(D-n_3)$

$B(D-m) = \alpha$

$$D - m = \frac{\alpha}{B} \Rightarrow m = D - \frac{\alpha}{B}$$

$\alpha = 425\,000\,(6\,000 - 120) + 420\,000\,(6\,000 - 50) + 417\,860\,(6\,000 - 20)$

$\alpha = 7\,496\,802\,800$

$m = 6\,000 - 5\,935{,}71 \simeq 64{,}29$ soit 65 jours

juin : 30 – 17 = 13 j

juillet : 31

Août : 21 j soit 21 août

65 jours

C'est le 21 août que ces 3 effets pourraient être remplacés par cet effet unique.

EXERCICE 7

1 – Le prix payé dans le cas du 1er mode.

Prix marqué : 9 675 000 F

Remise 3 % : $\frac{9\,675\,000 \times 3}{100} = 290\,250$ F [illegible] $P_1 = 9\ 675\ 000 - 290\ 250 = 9\ 384\ 750$ F

2 – Le montant d'une mensualité dans le cas du 2è mode.

Reste à payer : $9\ 675\ 000 \times \dfrac{80}{100} = 7\ 740\ 000$

Calcul de a :

$$7\ 740\ 000 = a - \frac{a \times t \times 1}{1200} + a - \frac{a \times t \times 2}{1200} + \dots + a - \frac{a \times t \times 5}{1200}$$

$$= 5a - \frac{a \times t}{1200}(1+2+3+4+5)$$

$$7\ 740\ 000 = 5a - \frac{a \times 15}{1200}\ 15 \Rightarrow 5a - 0{,}1875a = 7\ 740\ 000$$

$$4{,}8125a = 7\ 740\ 000$$

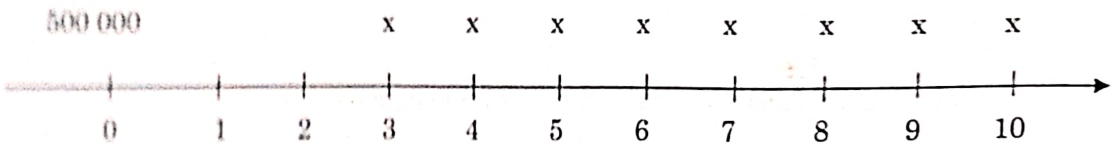
$$a = \frac{7\ 740\ 000}{4{,}8125}$$

$$a = 1\ 608\ 312 \text{ F}$$

3 – Le taux de crédit consenti

Au premier mode, le prix payé est $P_1 = 9\ 334\ 750$ F

Au deuxième mode, le prix payé P_2 se présente comme suit,



$x = 1\ 200\ 000$

$$P_2 = 500\ 000 + x - \frac{x \times t \times 3}{1200} + x - \frac{x \times t \times 4}{1200} + \dots + x - \frac{x \times t \times 10}{1200}$$

$$P_2 = 500\ 000 + 8x - \frac{x \times t}{1200}(3+4+5+\dots+10)$$

$$P_2 = 500\ 000 + 8 \times 1\ 200\ 000 - \frac{1\ 200\ 000 \times t \times 52}{1200}$$

$$P_2 = 10\ 100\ 000 - 52\ 000t$$

Si le 1er et le 2è mode sont équivalents alors : $P_1 = P_2$

$9\ 384\ 750 = 10\ 100\ 000 - 52\ 000t$

$52\ 000t = 715\ 250 \Rightarrow t = 13{,}75$ soit 13,75 %

EXERCICE 8

1. Calculons le taux d'escompte.

$$\frac{V_1 n_1 t}{36000}+\frac{V_2 n_2 t}{36000}=1490 \Rightarrow \frac{t}{36000}(V_1 n_1+V_2 n_2)=1490 \Rightarrow t=\frac{36000\times 1490}{V_1 n_1+V_2 n_2}$$

$$t=\frac{36000\times 1490}{36000\times 45+72000\times 52} \Rightarrow \boxed{t=10\ \%}$$

2. Calculons les différentes commissions :

- Commission d'endos (Ce)

$$Ce=\frac{(V_1 n_1+V_2 n_2)t_e}{36000} \Rightarrow Ce=\frac{(36000\times 45+72000\times 52)\times 0{,}6}{36000} \Rightarrow Ce=89{,}4\ F$$

- Commission indépendante du temps (C_{IT})

$$Ce=\frac{(36000+72000)\times 0{,}5}{100} \Rightarrow Ce=540\ F$$

- Commission fixe (C_F)

$$C_F=150+150 \Rightarrow C_F=300\ \text{F}$$

- Calcul de l'agio hors taxe

$$\text{agio HT}=\text{Escompte}+\text{Commission}$$

$$\text{agio HT}=1490+89{,}4+540+300 \Rightarrow \text{agio HT}=2419{,}4\ \text{F}$$

- Calcul de la TOB

$$\text{TOB}=\frac{10\times\text{agio HT}}{100}=\frac{10\times 2419{,}4}{100} \Rightarrow \text{TOB}=241{,}94\ \text{F}$$

3. Calculons l'agio TTC

$$\text{agio TTC}=\text{agio HT}+\text{TOB}$$

$$\text{agio TTC}=2\ 419{,}4+241{,}94 \Rightarrow \boxed{\text{agio TTC}=2\ 661{,}34\ \text{F}}$$

4. Calculons la valeur nette (V_{nette})

$$V_{\text{nette}}=(V_1+V_2)\ \text{- agio TTC}$$

Soit $V_{\text{nette}}=(36\ 000+72\ 000)-2\ 661{,}34 \Rightarrow \boxed{V_{\text{nette}}=105\ 339\ \text{F}}$.

5. Calculons la durée (n)

$$V_{\text{nette}}+\frac{V_{\text{nette}}tn}{36000}=V_1+V_2 \Rightarrow \frac{V_{\text{nette}}tn}{36000}=V_1+V_2-V_{\text{nette}}$$

$$V_{\text{nette}}tn=36000(V_1+V_2-V_{\text{nette}}) \Rightarrow n=\frac{36000(V_1+V_2-V_{\text{nette}})}{V_{\text{nette}}t}$$

$$n = \frac{36\,000(36\,000 + 72\,000 - 105\,339)}{105\,339 \times 10} \Rightarrow n = 90{,}94.$$

Il faut au moins 91 jours pour que placée au taux de 10 %, la valeur nette ait une valeur acquise de 36 000 + 72 000. Soit 108 000 F.

EXERCICE 9

1. Déterminons le taux annuel de la banque A:

* Intérêt I_A : $I_A = \dfrac{A \times \frac{t_A}{100}}{360} \times n_A = \dfrac{A \times t_A \times n_A}{36000}$ alors $t_A = \dfrac{36000 \times I_A}{A \times n_A}$

- Le capital placé dans la banque A: $A = 900\ 000$ F
- Intérêt versé par la banque A: $I_A = 5950$ F
- Durée n_A de placement dans la banque A: 03/07 au 31/07 soit $n_A = 28$

d'où $t_A = \dfrac{36000 \times 5950}{900000 \times 28} = 8{,}50.$

Le taux annuel de la banque A est donc 8,50 %.

2) Calculons le montant du capital placé dans la banque B:

* Intérêt versé par la banque B: $I_B = \dfrac{B \times t_B \times n_B}{36000}$

* Valeur acquise dans la banque B: $V_B = B + \dfrac{B \times t_B \times n_B}{36\ 000} = B\left(\dfrac{36\ 000 + t_B \times n_B}{36\ 000}\right)$

* Capital placé dans la banque B: $B = \dfrac{36000 \times V_B}{36000 + t_B \times n_B}$

avec
- La valeur acquise: $V_B = 5\ 577\ 000$ F
- Le taux annuel de la banque B: $t_B = 9$
- Durée n_B de placement dans la banque B: 03 /07 au 28/08 soit $n_B = 56$

d'où $B = \dfrac{36000 \times 5577000}{36000 + (9 \times 56)} = 5\ 500\ 000$ F

3) a) Calcul du taux annuel de la banque C

* Intérêt versé par la banque C: $I_C = \dfrac{C \times t_C \times n_C}{36000}$ alors $t_C = \dfrac{36000 \times I_C}{C \times n_C}$

Comme l'intérêt versé par la banque C est $I_C = 177500 - (5950 + I_B)$

et l'intérêt versé par la banque B est $I_B = \dfrac{5500000 \times 9 \times 56}{36000} = 77\ 000$

alors $I_C = 94\ 550$ F

- Capital placé dans la banque C: $C = 10\,000\,000 - (A + B) = 3\,600\,000$ F
- Durée n_C de placement dans la banque C: 03 /07 au 27/09 soit $n_c = 86$,

d'où $t_C = \dfrac{36000 \times 94550}{3600000 \times 86} = 10,99$

le taux annuel de la banque C est donc environ11 %.

b) Calcul du taux moyen des 3 placements

* Intérêt total versé : $I_t = I_A + I_B + I_C = 177\,500$ F

$$I_t = \frac{A \times t_m \times n_A}{36000} + \frac{B \times t_m \times n_B}{36000} + \frac{C \times t_m \times n_C}{36000} \quad \text{alors} \quad t_m = \frac{36000 \times I_t}{A \times n_A + B \times n_B + C \times n_C}$$

* Valeur du taux moyen:

$$t_m = \frac{36000 \times 177500}{(900000 \times 28) + (5500000 \times 56) + (3600000 \times 86)} = 9,94$$

Le taux moyen des 3 placements est donc 9,94 %.

EXERCICE 10

1 – Première possibilité

Le montant à régler est :

$120\,000 - 120\,000 \times \dfrac{3}{100} = 116\,400$ soit 116 400 F

2- Deuxième possibilité

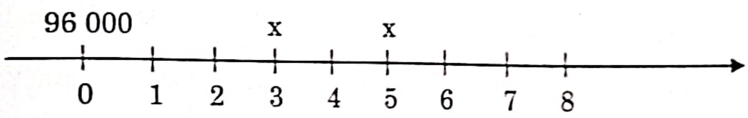
a- Montant du matériel payé comptant

$120\,000 \text{ F} \times \dfrac{20}{100} = 24\,000$ soit 24 000 F

Reste à payer : 120 000 F – 24 000 F = 96 000 soit 96 000 F

b-La valeur nominale de chaque traite

Soit x le montant de chaque traite.



$$96\,000 = x - \frac{x \times t \times 3}{1200} + x - \frac{x \times t \times 5}{1200}$$

$$96\,000 = 2x - \frac{xt}{1200}(3+5)$$

$96\,000 = 1,92x$ implique $x = 50\,000$.

Le montant de chaque traite est de 50 000 F c- Le coût total du matériel à crédit : K

$K = 24\,000 + 50\,000 \times 2 = 124\,000$ F.

d – Le coût du crédit : C

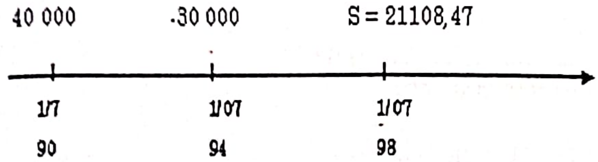
$C = 124\,000 - 120\,000 = 4\,000$ F.

3) – La possibilité la plus avantageuse

Etant donné que $116\,400 < 124\,000$ alors **l'achat comptant est plus avantageux.** Car ce mode donne la plus faible valeur actuelle.

EXERCICE 11

1 – Déterminons le taux annuel de placement



$21108{,}47 = 40\,000\,(1 + i)^8 - 30\,000\,(1 + i)^4$

$2{,}110847 = 4(1 + i)^8 - 3(1 + i)^4$

Première méthode: résolution d'équation du second degré.

Posons $x = (1+i)^4 > 0$.

L'équation devient alors : $2{,}110847 = 4x^2 - 3x$

$$4x^2 - 3x - 2{,}110847 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(4)(-2{,}110847) = 42{,}773552$$

$$\sqrt{\Delta} = 6{,}54$$

$x_1 = \dfrac{3 - 6{,}54}{8} = -\,0{,}4425$, $x_1 < 0$ *absurde*

$x_2 = \dfrac{3 + 6{,}54}{8} = 1{,}192518$; $x_2 > 0$

$(1 + i)^4 = 1{,}192518$ implique $(1 + i) = \sqrt[4]{1{,}192518} = 1{,}045$

$$i + 1 = 1{,}045$$

$$i = 0{,}045 \text{ soit } 4{,}5\ \%\ \text{l'an}$$

Deuxième méthode : Interpolation linéaire

$2{,}110847 = 4(1 + i)^8 - 3(1 + i)^4$

Si $i = 0{,}05$ alors $y = 2{,}263303$

Si $i = 0{,}04$ alors $y = 1{,}9647$

0,04	i	0,05
1,9647	2,110847	2,263303

$$\frac{i - 0{,}04}{0{,}05 - 0{,}04} = \frac{2{,}110847 - 1{,}9647}{2{,}263303 - 1{,}9647}$$

$$\frac{i - 0{,}04}{0{,}01} = 0{,}489435$$

$i = 0{,}0448 \approx 0{,}045$ soit 4.5 % l'an

2 – Le taux semestriel

a – Proportionnel

$i_a = 2i_s$ alors $\frac{i_a}{2} = \frac{0,045}{2} = 0,0225$ soit 2,25 %

b – Equivalent

$(1 + i_s)^2 = 1 + i_a$

$1 + i_s = \sqrt{1+10}$

$I_s = \sqrt{1+10} - 1$

$I_s = (1{,}045)^2 = 0{,}0222$ soit 2,22 %

EXERCICE 12

Placement à intérêt composés :

Capital placé : $C_C = 500\,000$ F

Taux d'intérêt annuel : $i = 0{,}08$

Durée de placement : $n_C = 5$ ans.

Placement à intérêts simples :

Capital placé : $C_S = 280\,000$ F

Taux d'intérêt annuel : $t = 4\%$

Durée de placement : $n_S = 10$ mois .

1°) Déterminons la valeur acquise par chacun des placements

La valeur acquise du capital placé à intérêts composés : A_C

$$A_C = C_C(1+i)^{n_c}$$

$$A_C = 500\,000 \times 1{,}08^5$$

$$A_C = 734\,664 \text{ F}$$

La valeur acquise du capital placé à intérêts simples : A_S

$$A_S = C_S\left(1 + \frac{t \cdot n_S}{1200}\right)$$

$$A_S = 280\,000\left(1 + \frac{4 \times 10}{1200}\right)$$

$$A_S = 289\,333 \text{ F}$$

2°) Déterminons l'intérêt produit par chacun des placements :

L'intérêt produit par le placement à intérêts composés : I_C

$$I_C = A_C - C_C$$
$$I_C = 734\,664 - 500\,000$$
$$I_C = 234\,664 \text{ F}$$

L'intérêt produit par le placement à intérêts simples : I_S

$$I_S = A_S - C_S$$
$$I_S = 289\,333 - 280\,000$$
$$I_S = 9\,333 \text{ F}$$

3°) Déterminons x et y :

- capital placé à intérêts composés sur 5 ans à 8 % : x
- capital placé à intérêts simples sur 10 mois à 4 % : y

Le système à résoudre est :

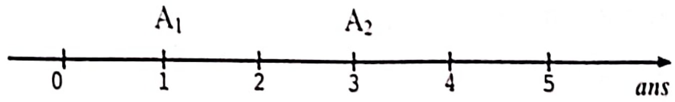
$$\begin{cases} x + y = 780\,000 \\ x(1+0{,}08)^5 = y + \dfrac{y \times 4 \times 10}{1200} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 780\,000 \\ x = \dfrac{\left(1 + \dfrac{4 \times 10}{1200}\right)}{1{,}08^5 - 1} \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 780\,000 & (1) \\ x = 2{,}2y & (2) \end{cases}$$

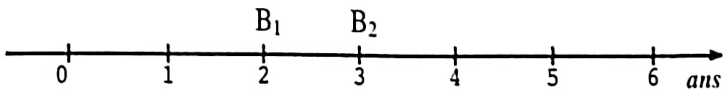
(2) dans (1) implique :

$$3{,}2y = 780\,000 \Rightarrow y = 243\,750 \text{ F}$$

On en déduit que $x = 2{,}2 \times 243\,750$, soit $x = 536\,250 \text{ F}$



$A_1 = 480\,000$ et $A_2 = 214\,000$



$B_1 = 527\,000$ et $B_2 = 180\,000$

Le règlement du reste suivant le mode 1

A l' époque 0: $R_1 = A_1\,(1+i)^{-1} + A_2\,(1+i)^{-3}$

Le règlement du reste suivant le mode 2

A l' époque 0: $R_2 = B_1\,(1+i)^{-2} + B_2\,(1+i)^{-3}$

Ces règlements étant équivalents, on a : $R_1 = R_2.$

par suite $A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-3} = B_1\,(1+i)^{-2} + B_2(1+i)^{-3}$

$$A_1(1+i)^{-1} + A_2(1+i)^{-3} - B_1(1+i)^{-2} - B_2(1+i)^{-3} = 0$$

Résolvons par interpolation linéaire

x %	2,5	i	3
f(x)	-1741,12	0	386,18

$$\frac{i-2{,}5}{3-2{,}5} = \frac{0-(-1741{,}12)}{386{,}18-(-1741{,}12)}$$

i = 2,90 soit 2,90 %

2 – Calculons le prix marqué P :

$R = 527\,000\,(1{,}029)^{-2} + 180\,000\,(1{,}029)^{-3} = 662\,920$ F

$$R = 70\ \%\ \text{de p} \Rightarrow \frac{P}{100} = \frac{662\,920}{70} \Rightarrow P = \frac{662\,920 \times 100}{70}$$

P = 947 028. Soit un prix marqué d'environ 947 000 F.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

SERIES STATISTIQUES A UNE VARIABLE

EXERCICE 1

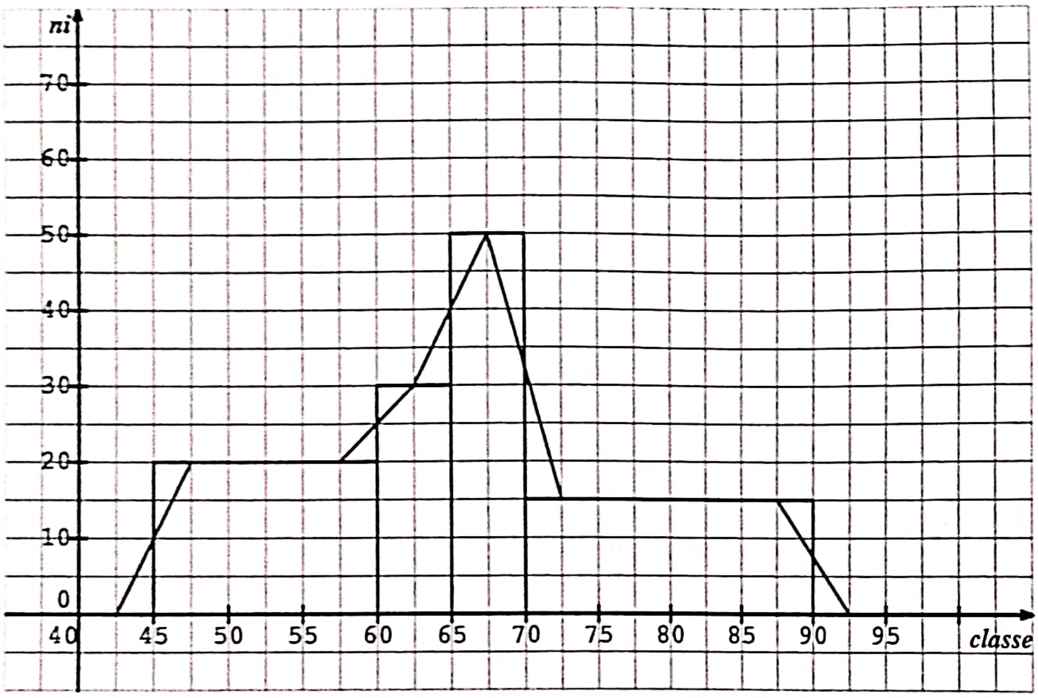
1) Calculons les effectifs des classes et complétons le tableau

Les effectifs figurant sur le graphique sont les effectifs corrigés.

Rappel : effectif corrigé $= \dfrac{\text{effectif de la classe}}{\text{amplitude}} \times$ la plus petite amplitude

Classes xi	Effectifs relatifs ni	Fréquences Relatives fi %	effectifs cumulés décroissants	Effectifs corrigés
[45 ; 60[	60	30	200	20
[60 ; 65[	30	15	140	30
[65 ; 70[	50	25	110	50
[70 ; 90[	60	30	60	15
Total	200	100		

2) – **Histogramme complété et construction du polygone des effectifs**



EXERCICE 2

1-Déterminons les éléments ci après :

a- La population étudiée est : 50 habitations d'une localité

b- Le caractère étudié est le nombre de pièces.

Nature du caractère : Caractère quantitatif discret

c- Les modalités sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2- a) Tableau de dépouillement :

Nombre de pièces	Dépouillement	Nombre d'habitations
1	////	5
2	//// //// //	12
3	//// //// //// //// /	21
4	//// ///	08
5	////	04

b) Tableau statistique

MODALITES x_i (Nombre de pièces)		1	2	3	4	5	TOTAL
Effectifs (n_i)		5	12	21	8	4	50
Fréquences f_i (%)		10	24	42	16	8	100
Fréquences	Cumulées croissantes	10	34	76	92	100	
	Cumulées décroissantes	100	90	66	24	8	

3-Le pourcentage d'habitations ayant :

a- trois pièces est 42 %

b- moins de quatre pièces est 76 %

c- au moins trois pièces est 66 %

4-La société immobilière réaliserait les habitations de 3 pièces parce que la majorité des maisons de cette localité a trois pièces; c'est la modalité correspondant au plus grand effectif.

Exercice [illegible]

1) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

2) [illegible]

[illegible] $x_0 = 100$.

[illegible]

Nombre d'articles vendus	Nombre de jours n_i	Les valeurs centrales x_i	amplitudes	Effectifs corrigés	n_ix_i	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[50 ; 250[	8	150	200	4	1200	8	200
[250 ; 450[	14	350	200	7	4900	22	192
[450 ; 650[	30	550	200	15	16500	52	178
[650 ; 750[	62	700	100	62	43400	114	148
[750 ; 850[	48	800	100	48	38400	162	86
[850 ; 1050[	26	950	200	13	24700	188	38
[1050 ; 1250[	12	1150	200	6	13800	200	12
Total	200				142900		

Déterminons le mode :

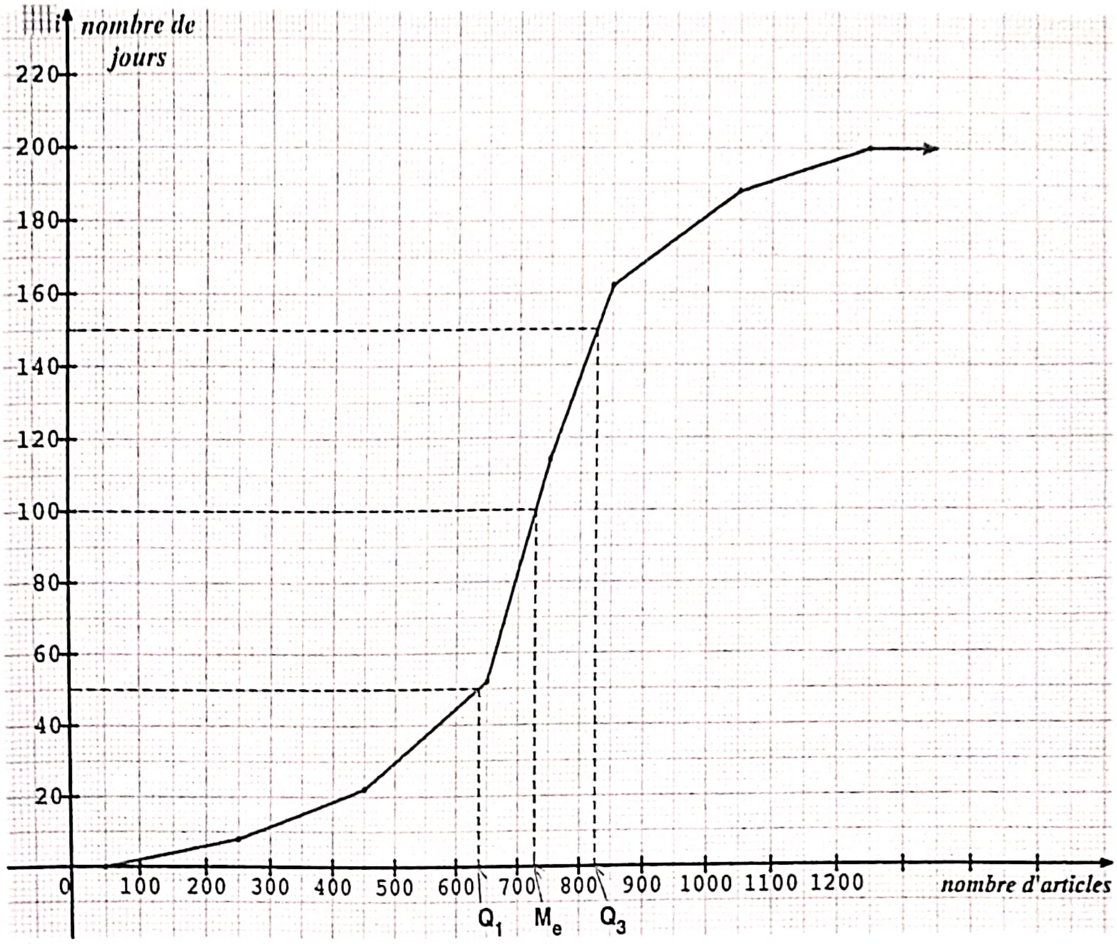
L'effectif corrigé le plus élevé est 62 qui correspond à la classe [650 ; 750 [. Donc le mode est le centre de la classe [650 ; 750 [.

Le mode M_0 est alors : $M_0 = 700$; soit 700 articles.

3) Construisons le diagramme des effectifs cumulés croissants

Unités graphiques : 1 cm pour 100 articles sur l'axe des abscisses

1 cm pour 20 jours sur l'axe des ordonnées.



4) Déterminons graphiquement Q_1, M_e et Q_3.

Sur le graphique on lit :

$Q_1 = 635$, soit 635 articles

$M_e = 725$, soit 725 articles

$Q_3 = 825$, soit 825 articles.

Interprétations :

En 50 jours de vente, on a vendu au plus 635 articles.

En 100 jours de vente, on a vendu au plus 725 articles.

En 150 jours de vente, on a vendu au plus 825 articles.

EXERCICE 4

1) Complétons le tableau

Nombre d'enfants à charge	Effectifs d'employés n_i	fréquences relatives f_i	fréquences cumulées décroissantes
0	4	0,05	1
1	15	0,1875	0,95
2	29	0,3625	0,7625
3	18	0,225	0,40
4	10	0,125	0,175
5	3	0,0375	0,0500
6	1	0,0125	0,0125
TOTAL	80	1	

2) Le nombre d'employés ayant :

a- zéro enfant à charge est 4

b- moins de 4 enfants est : 4+15+29+18 soit 66

c- au moins 3 enfants est : 1+3+10+18 soit 32

3) Montant global des primes perçues par les employés ayant :

a- Entre 2 et 5 enfants est :$[(2\times29) + (3\times18) +(4\times10) +(5\times3)] \times 2\,500 = 417\,500$ F

b- Au plus 2 enfants : $[(0\times4)+(1\times15)+(29\times2)] \times2500 = 182500$ F

c- : Plus de 4 enfants : $[(5 \times3)+(6 \times1)] \times2\,500 = 52\,500$ F.

EXERCICE 5

1)

a- La population étudiée est l'ensemble des 40 ouvriers de l'entreprise.

b- Le caractère est le nombre d'enfants scolarisés

c- Les modalités sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Tableau de dépouillement:

NOMBRE D'ENFANTS SCOLARISES	DEPOUILLEMENT	NOMBRE D'OUVRIERS	FREQUENCE (en %)
0	///	3	7,5
1	~~////~~	5	12,5
2	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	16	40
3	~~////~~ ///	8	20
4	~~////~~ /	6	15
5	//	2	5
TOTAL		40	100

Tableau statistique

nombre d'enfants scolarisés	nombre d'ouvriers n_i	Fréquences relatives f_i (en %)	Fréquences cumulées croissantes	Fréquences cumulées décroissantes
0	3	7,5	7,5	100
1	5	12,5	20	92,5
2	16	40	60	80
3	8	20	80	40
4	6	15	95	20
5	2	5	100	5
TOTAL	40	100		

3) La proportion d'ouvriers ayant :

a- moins de 3 enfants scolarisés est 60 %

b- au plus 1 enfant scolarisé est de 20 %

c- au moins 2 enfants scolarisés est de 80 %

2)

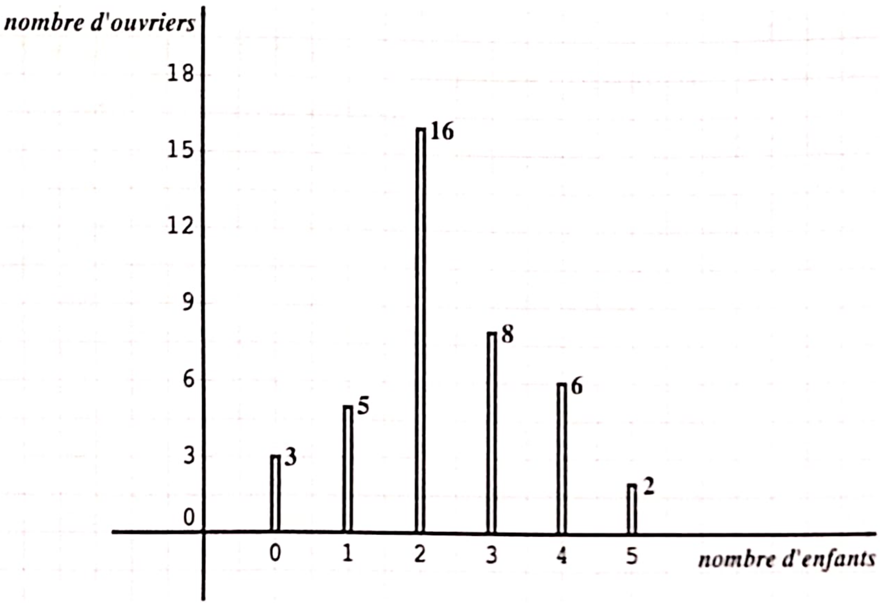
a- Le montant B_1 du budget alloué aux parents des enfants scolarisés

$$B_1 = 2\,500\,(0\times3 + 1\times5 + 2\times16 + 3\times8 + 4\times6 + 5\times2) = 237\,500 \text{ F.}$$

b- Le montant B_2 du budget consacré aux parents ayant plus d'un enfant scolarisé

$$B_2 = 2\,500\,(2\times16 + 3\times8 + 4\times6 + 5\times2) = 225\,000 \text{ F.}$$

5-Diagramme en bâtons des effectifs



6. a- Le mode $M_0 = 2$ signifie que le plus grand nombre d'ouvriers ont scolarisé 2 enfants.

b- La moyenne est $M = \frac{\sum_{1}^{6} n_i x_i}{N} = \frac{95}{40} = 2{,}375$ soit 3 enfants.

Ce résultat signifie que chaque ouvrier aurait pu scolariser 3 enfants

c- En regardant la colonne des fréquences cumulées on trouve que la médiane M_e appartient à l'intervalle [1, 2] par interpolation linéaire on obtient Me =1,75 soit 2 enfants scolarisés

EXERCICE 6

1) Remplissons le tableau en fonction de x

Note sur 20	Nombre d'élèves (ni)	Centre de classe	Produit $n_i x_i$
[0 ; 2 [	7	1	7
[2 ; 6 [	12	4	48
[6 ; 12 [	x	9	9x
[12 ; 14 [	02	13	26
Total	21 + x		81 + 9x

2) a- L'expression de l'effectif total N en fonction de x .

$N = 7 + 12 + x + 2$

$N = 21 + x$

b- Détermination de x.

5,4 est la note moyenne. D'où : $5{,}4 = \dfrac{\sum n_i x_i}{N}$, c'est à dire : $5{,}4 = \dfrac{7 + 48 + 9x + 26}{21 + x}$.

$$5{,}4 = \frac{81 + 9x}{21 + x}$$

$$5{,}4(21 + x) = 81 + 9x$$

$$113{,}4 + 5{,}4x = 81 + 9x$$

$$5{,}4x - 9x = 81 - 113{,}4$$

$$-3{,}6x = -32{,}4$$

$$x = \frac{-32{,}4}{-3{,}6}$$

$$x = 9$$

L'effectif de la classe [6 ; 12 [est 9.

c- On déduit de la réponse précédente que $N = 21 + 9$; $N = 30$

l'effectif total est de 30 élèves.

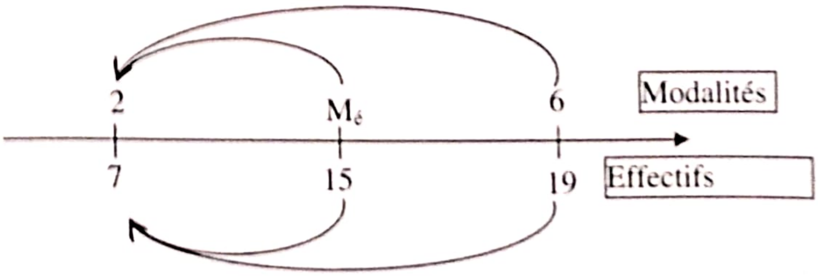
3) Déterminons de la note médiane

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$

On a : $7 < 15 < 7 + 12 \Rightarrow 7 < 15 < 19$.

Or l'effectif cumulé 7 correspond à la modalité 2 et l'effectif cumulé 7+12=19 correspond à la modalité 6. Donc la médiane est contenu dans la classe [2 ; 6 [.

Déterminer la médiane par interpolation linéaire.



$$\frac{M_é - 2}{15 - 7} = \frac{6 - 2}{19 - 7}$$

$$M_é - 2 = \frac{6 - 2}{19 - 7}(15 - 7)$$

$$M_é = \frac{6 - 2}{19 - 7}(15 - 7) + 2$$

Après calcul on obtient : $M_e = 4{,}67$.

La note médiane est de 4,67.

EXERCICE 7

1°) Reproduisons et complétons le tableau ci - dessous

Note sur 10	Effectifs	Fréquence en %	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[2 ; 4[	3	15	3	20
[4 ; 5[	6	30	9	17
[5 ; 8[	5	25	14	11
[8 ; 10[	6	30	20	6
Total	20	100		

2°) Calculons la note médiane M_e.

Le rang de la médiane : $\frac{20}{2} = 10$

Il est compris entre 9 et 14 (effectif cumulés croissants)

On a donc $5 < M_e < 8$

5	M_e	8
9	10	14

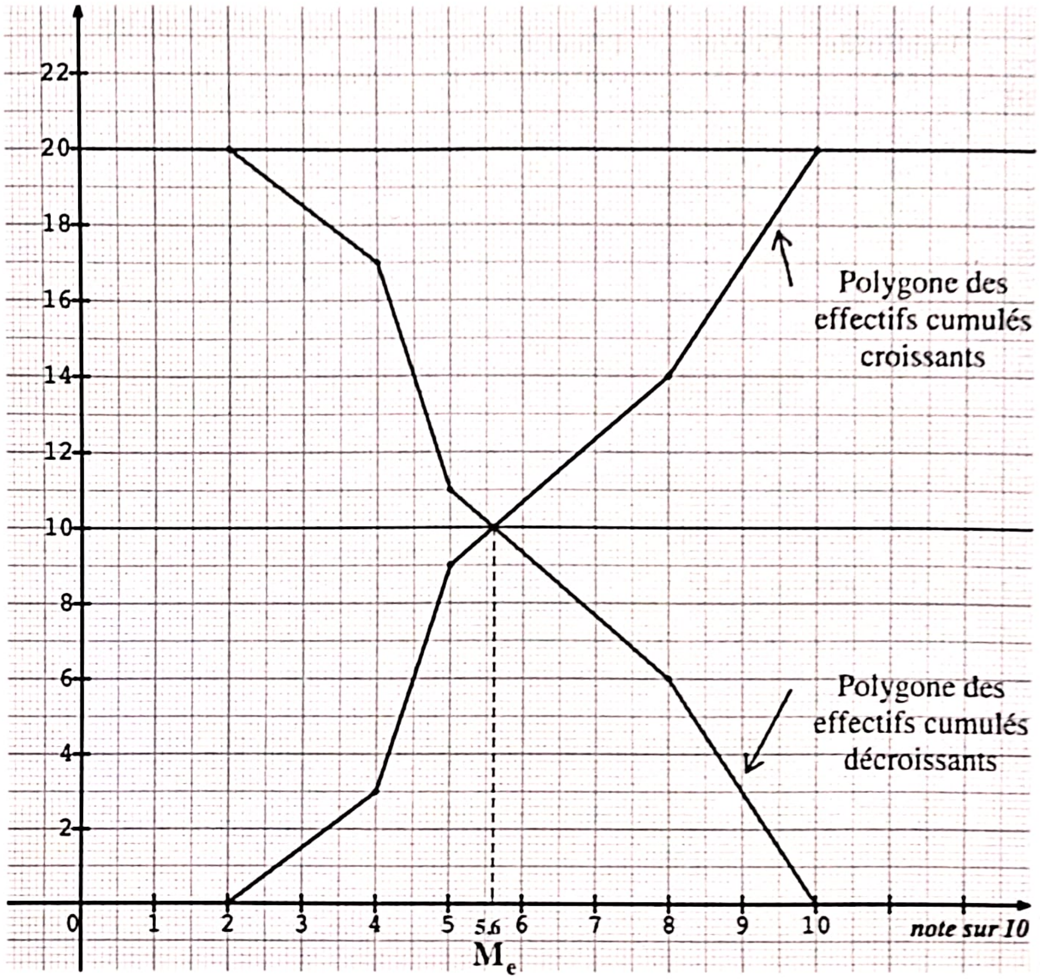
$$\frac{M_e - 5}{10 - 9} = \frac{8 - 5}{14 - 9}$$

$$M_e - 5 = \frac{3}{5}$$

$$M_e = 5{,}6$$

La note médiane est 5,6.

3°) a) Graphique des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.



b) De la question 3°) a), on déduit graphiquement la valeur médianes qui est l'abscisse du point d'intersection des deux polygones. On obtient $M_e = 5,6$.

EXERCICE 8

1. **a-** La population étudiée : 184 véhicules endommagés

   b - un individu : un véhicule endommagé.

   c-Caractère étudié est : la distance parcourue par un véhicule.

2. Complétons le tableau:

Classes (distances parcourues)	Amplitude (A_i)	Centre (C_i)	Effectifs des véhicules (n_i)	Effectifs cumulés		Effectifs corrigés
				Croissants	Décroissants	
[80 ; 85[	5	82,5	10	10	184	10
[85 ; 90[	5	87,5	14	24	174	14
[90 ; 100[	10	95	60	84	160	30
[100 ; 110[	10	105	44	128	100	22
[110 ; 125[	15	117,5	20	148	56	6,6
[125 ; 150[	25	137,5	28	176	36	5,6
[150 ; 200[	50	175	8	184	8	0,8
TOTAL			184			

3) Le nombre de véhicules ayant parcouru :

a- Moins de 100 000 km est 84

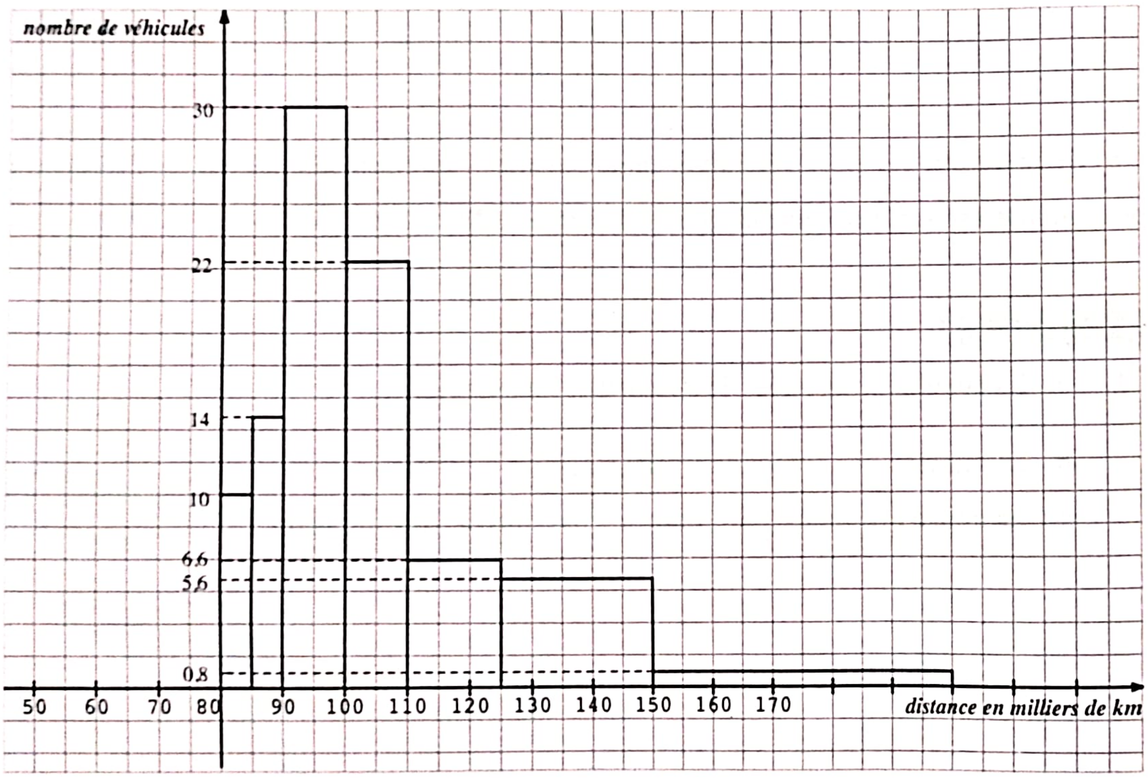
b- Au moins 110 000 km est 56

c- Entre 90 000 et 125 000 km est 124 c'est à dire (60+44+20).

4) La distance parcourue par :

a- La majorité des véhicules endommagés est le mode : M_0 = 95 000 km

b- L'ensemble des véhicules endommagés a parcouru : $\sum c_i n_i = 19\,970\,000$ km.



EXERCICE 9

1. Déterminons des valeurs n_1 et n_5

On a: $275\ n_1 + 325 \times 4 + 375 \times 14 + 425 \times 36 + 475\ n_5 + 525 \times 16 = 441 \times 100$

Soit $275\ n_1 + 475\ n_5 = 13\ 850$.

Ainsi n_1 et n_5 sont solutions du système : $\begin{cases} n_1 + 70 + n_5 = 100 \\ 275n_1 + 475n_2 = 13850 \end{cases}$

Après résolution on obtient : $n_1 = 2$ et $n_5 = 28$

2. Complétons le tableau

Prix en FCFA	Nombre de magasins n_i	Effectifs cumulés		Centre des classes x_i	$n_i x_i$
		Croissants	Décroissants		
[250 ; 300[	2	2	100	275	550
[300 ; 350[	4	6	98	325	1 300
[350 ; 400[	14	20	94	375	5 250
[400 ; 450[	36	56	80	425	15 300
[450 ; 500[	28	84	44	475	13 300
[500 ; 550[	16	100	16	525	8 400

3. Déterminons la Médiane

$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$. 50 est compris entre les effectifs cumulés croissants 20 et 56 qui correspondent respectivement aux modalités 400 et 450. Donc la classe médiane est [400 ; 450[.

Le prix médian Me, par une interpolation linéaire, est définie par : $\frac{Me - 400}{450 - 400} = \frac{50 - 20}{56 - 20}$.

Donc Me = 441,67. Le prix médian est Me = 445 FCFA.

EXERCICE 10

1. le tableau statistique

Nombre d'enfants x_i	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Nombre de familles n_i	20	50	10	30	25	40	175
$n_i x_i$	20	100	30	120	125	240	635
x_i^2	1	4	9	16	25	36	
$n_i x_i^2$	20	200	90	480	625	1440	2855

2. Calcul de $\bar{x}$, le nombre moyen d'enfants par famille:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} \text{ soit } \bar{x} = \frac{635}{175}\text{. On obtient } \bar{x} = 3{,}628 \text{ soit 4 enfants}$$

3. Calcul de la variance V:

La formule de Kœnigs: $V = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$

D'où $V = \frac{2855}{175} - (3{,}628)^2$. Par suite $V = 3{,}15$

L'écart type σ:

$\sigma = \sqrt{V}$

$\sigma = \sqrt{3{,}15} = 1{,}77$ soit environ 2 enfants

EXERCICE 11

1.

- **Caractère étudié** : Notes obtenues par un élève de la filière SB
- **Nature du caractère**: Caractère quantitatif discret (ou discontinu)

2. La note modale est 10.

3. Calcul de la note moyenne $\bar{x}$ de l'élève:

* Tableau de calculs

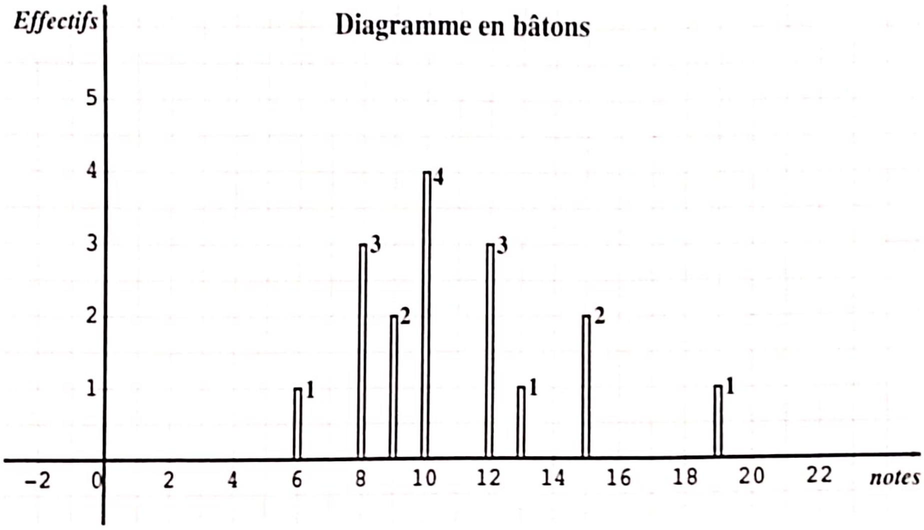
Notes x_i	6	8	9	10	12	13	15	19	TOTAL
Effectifs n_i	1	3	2	4	3	1	2	1	**N=17**
$n_i x_i$	6	24	18	40	36	13	30	19	**186**

* La moyenne $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} \text{ soit } \bar{x} = \frac{186}{17} \quad \bar{x} = 10{,}94$$

4. Tracé du diagramme en bâtons des effectifs

4. Tracé du diagramme en bâtons des effectifs



EXERCICE 12

1. **Population étudiée** : l'ensemble des 50 jours ouvrables
2. **a- Caractère étudié** : nombre de ventes quotidiennes d'un article.

   b- Caractère quantitatif discret.
3. Il s'agit d'un diagramme cumulatif .

4. Tableau des effectifs.

Modalités x_i	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs n_i	2	3	5	10	16	8	6
Effectifs cumules croissants	2	5	10	20	36	44	50
Fréquences f_i	0,04	0,06	0,1	0,2	0,32	0,16	0,12
Fréquences cumulées croissantes	0,04	0,10	0,20	0,40	0,72	0,88	1

5.

- Le mode de la série statistique est 4 ventes quotidiennes de l'article. C'est le nombre de ventes quotidiennes régulièrement demandé.
- La médiane a pour rang $r = \frac{50}{2}$ soit $r = 25$ Donc la médiane est 4. C'est la modalité qui partage la série statistique en deux séries de même effectif.
- La moyenne est : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum n_i x_i$ en divisant les n_i par N, la formule devient : $\overline{x} = \sum f_i x_i$.

  Soit $\overline{x} = 0{,}04\times0 + 0{,}1\times2 + 0{,}2\times3 + 0{,}32\times4 + 0{,}16\times5 + 0{,}12\times6$

  On obtient : $\overline{x}$ = 3,66 soit 4 ventes quotidiennes.

6.

- L'étendue : $e = 6 - 0$. C'est l'écart extrême des ventes quotidiennes

- La variance : $V(X) = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 \Leftrightarrow V(X) = \sum f_i x_i^2$.

Soit $V(X) = 0{,}04\times 0^2 + 0{,}1\times 2^2 + 0{,}2\times 3^2 + 0{,}32\times 4^2 + 0{,}16\times 5^2 + 0{,}12\times 6^2$.

On a donc $V(X) = 15{,}70$

- L'écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

$\sigma = \sqrt{15{,}70}$

$\sigma \approx 3{,}96$ soit 4 articles vendus

7. L'intervalle qui contient 50 % des jours ouvrables est l'intervalle dont les extrémités sont le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 :

Calculons Q_1 et Q_3.

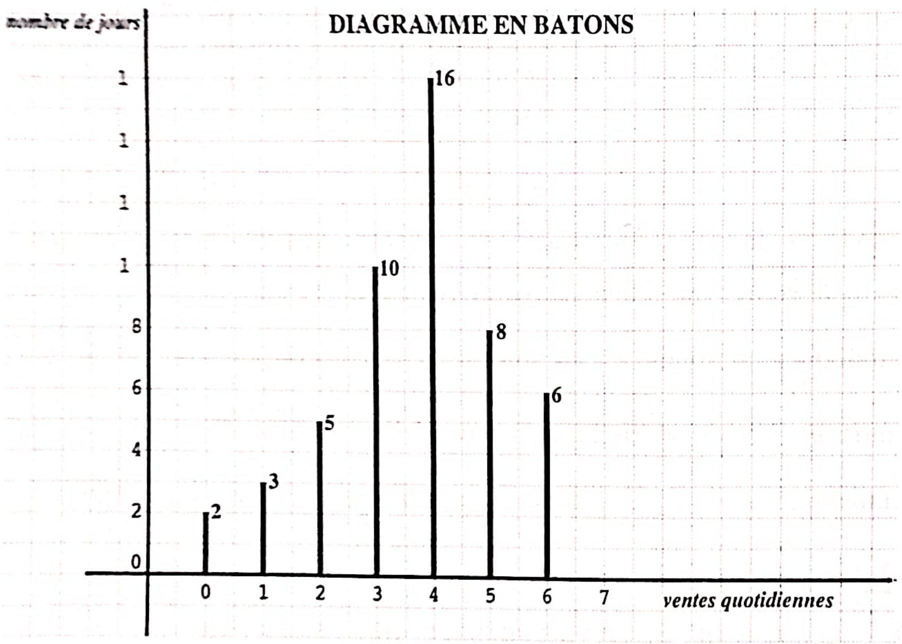
$\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$. D'après le tableau on a $10 < 12{,}5 < 20$ soit $2 < Q_1 < 3$.

Par une interpolation linéaire, on obtient $Q_1 = 2{,}25$.

De la même façon on détermine et on trouve $Q_3 = 4{,}19$.

Par conséquent, l'intervalle interquartile qui contient 50 % des observations est $[2{,}25 ; 4{,}19]$.

8. Diagramme en bâtons des effectifs.



EXERCICE 13

1. a- L'effectif total de la population étudiée est 1 000 usagers.

   b- Détermination graphique:

- Premier quartile : le rang du premier quartile est: $r_1 = \frac{1000}{4}$ soit $r_1 = 250$. Par une lecture graphique, le premier quartile est $Q_1 = 4$ contraventions.

- Médiane : le rang de la médiane est $r = \frac{1000}{2}$ c'est - à - dire $r = 500$.

On lit Me ≈ 9 contraventions.

- Troisième quartile : $r_3 = \frac{3 \times 1000}{4}$ c'est-à-dire $r_3 = 750$; on lit Q3 ≈ 18 contraventions.

2. a-Reconstitution des classes.

Nombre de contraventions	[0 ; 2,5[	[2,5 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15; 22,5[	[22,5; 25[	[25 ; 30[
Centres des classes x_i	1,25	3,75	7,5	12,5	18,75	23,75	27,5
Nombre D'usagers n_i	200	120	200	140	140	80	120
Effectifs cumules Croissants	200	320	520	660	800	880	1000
$n_i x_i$	250	450	1500	1750	2625	1900	3300
$n_i x_i^2$	312,5	1 687,5	11 250	21 875	49 218,75	45 125	90 750

b- Calcul de la moyenne : des contraventions

$$\bar{x} = \frac{11775}{1000}$$

$\bar{x} = 11,775$ soit 12 contraventions.

c- L'écart- type

- Variance :

$$V(x) = \frac{220218,75}{1000} - 138,651$$

$V(x) = 81,568$

l'écart- type : $\sigma = \sqrt{V(x)}$

$$\sigma = \sqrt{81,568}$$

$$\sigma = 9,03$$

La dispersion moyenne autour de 11,775 contraventions est 9,03 contraventions.

3. L'intervalle $[\bar{x}-2\sigma\ ;\ \bar{x}+2\sigma]$

$\bar{x}-2\sigma = 11{,}775 - 2 \times 9{,}03$ Donc $\bar{x}-2\sigma = -6{,}285$

$\bar{x}+2\sigma = 11{,}775 + 2 \times 9{,}03$ Donc $\bar{x}+2\sigma = 29{,}835$

Donc l'intervalle : $[\bar{x}-2\sigma\ ;\ \bar{x}+2\sigma] = [-6{,}285\ ;\ 29{,}835]$

Les modalités n'étant pas négatives l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma\ ;\bar{x}+2\sigma]$ devient $[0\ ;\ 30]$ (la supérieur a été arrondie à l'unité près).

SERIES STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

1. Détermination de la droite d'ajustement de Mayer.

- Partage de la série :

(S_1)

x_i	1	2	3	4
y_i	58	60	62	65

(S_2)

x_i	5	6	7	8
y_i	68	70	72	74

Soit M le point moyen du nuage de points associé à S_1, et N celui du nuage de points associé à S_2

- Calcul des coordonnées de M.

$x_M = \dfrac{1+2+3+4}{4}$. Soit $x_M = 2{,}5$

$y_M = \dfrac{58+60+62+65}{4}$. Soit $y_M = 61{,}25$

- Calcul des coordonnées de N.

$x_N = \dfrac{5+6+7+8}{4}$. Soit $x_N = 6{,}5$

$y_N = \dfrac{68+70+72+74}{4}$. Soit $y_N = 71$

- Equation de la droite de Mayer.

Une équation de la droite de Mayer est de la forme $y = ax + b$.

Or la droite de Mayer passe par les points M et N. d'où le système suivant :

$$\begin{cases} 61{,}25 = 2{,}5a + b \\ 71 = 6{,}5a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -61{,}25 = -2{,}5a - b \\ 71 = 6{,}5a + b \end{cases}$$
$$9{,}75 = 4a$$

On obtient $a = \dfrac{9{,}75}{4} \Rightarrow a = 2{,}4375$.

D'où $71 = 6{,}5 \times 2{,}4375 + b$. Soit $b = 71 - 6{,}5 \times 2{,}4375$.

$b = 55{,}15625$

L'équation de la droite de Mayer est donc $y = 2{,}4375x + 55{,}15625$.

2) Estimation du tonnage en En 2009.

En 2009, $x = 9$. Ce qui implique que $y = 2{,}4375 \times 9 + 55{,}15625$; $y = 77{,}09 \approx 77$ tonnes.

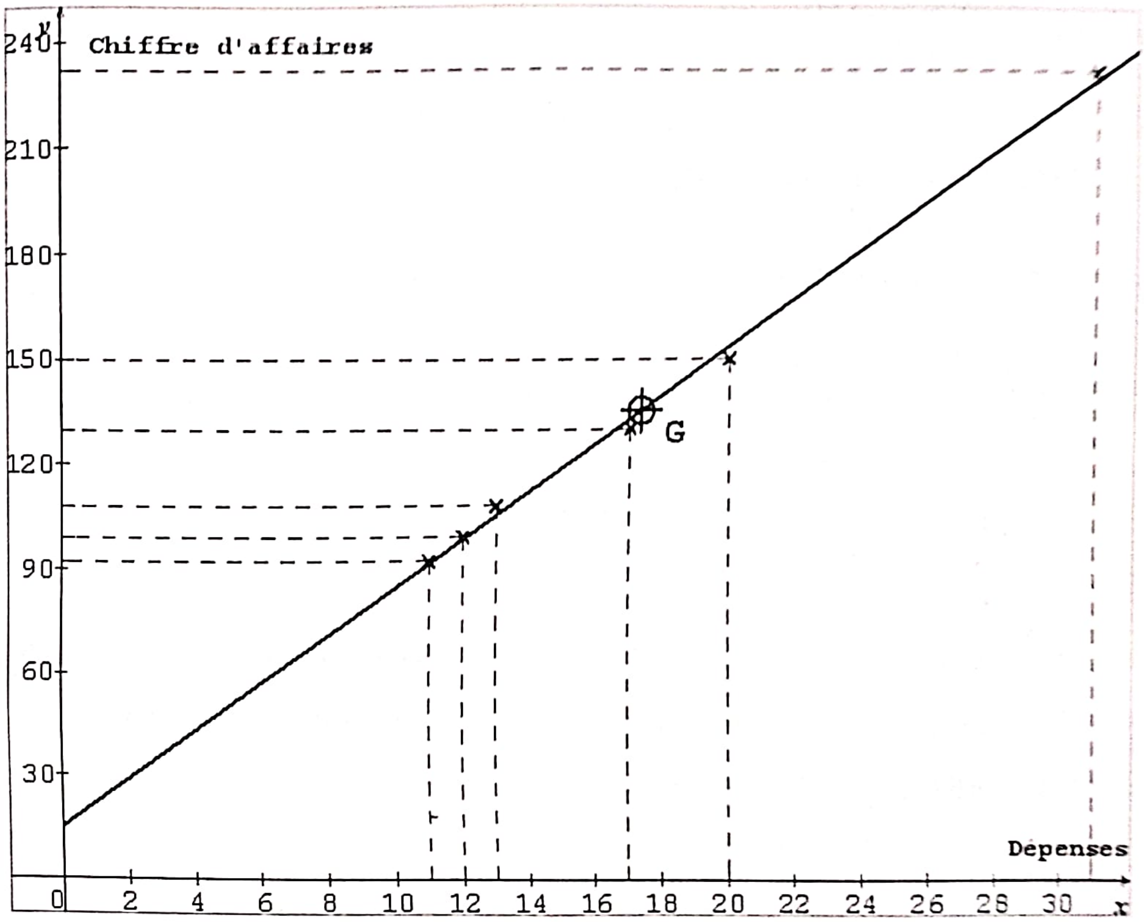
En 2009 l'entreprise peut espérer atteindre 77 tonnes.

EXERCICE 2

1. a- Représentation du nuage de points

Ordonnons les points du nuage suivant les valeurs croissantes de la variable X

x_i	11	12	13	17	20	31
y_i	92	99	108	130	150	232



b- L' ajustement affine est justifié car les points du nuage sont presque alignés.

2. Détermination des coordonnées ($\overline{x}$; $\overline{y}$) du point moyen G:

$$\overline{x} = \frac{11+12+13+17+20+31}{6}$$

$$\overline{x} = 17{,}33$$

$$\overline{y} = \frac{92+99+108+130+150+232}{6}$$

$$\overline{y} = 135{,}16$$

Donc G(17,33 ; 135,16).

3. Déterminons l'équation réduite de la droite d'ajustement affine $y = ax+b$ par la méthode de Mayer.

Soit G_1 le premier point moyen de coordonnées $\overline{x_1} = \dfrac{11+12+13}{3}$ et $\overline{y_1} = \dfrac{92+99+108}{3}$

$\overline{x_1} = 12$ et $\overline{y_1} = 99,67$

La droite d'ajustement affine de Mayer passe par les points G1 et G par

conséquent : $\begin{cases} 99,67 = 12a + b \\ 135,16 = 17,33a + b \end{cases}$

La résolution de ce système d'équation nous donne $a = 6,65$ et $b = 19,87$.

L'équation de la droite est donc $y = 6,65x + 19,87$.

4. a- Estimation du chiffre d'affaires si les dépenses s'élèvent à 300 millions

Si la dépense est de 300 millions soit $x = 30$ alors le chiffre d'affaires y vaut :

$$y = 6,65 \times 30 + 19,87$$

$y = 219,37$ dizaines de millions.

Le chiffre d'affaires est égal à 2 193 700 000 F

b- Estimation des dépenses si le chiffre d'affaires s'élève à 2 milliards.

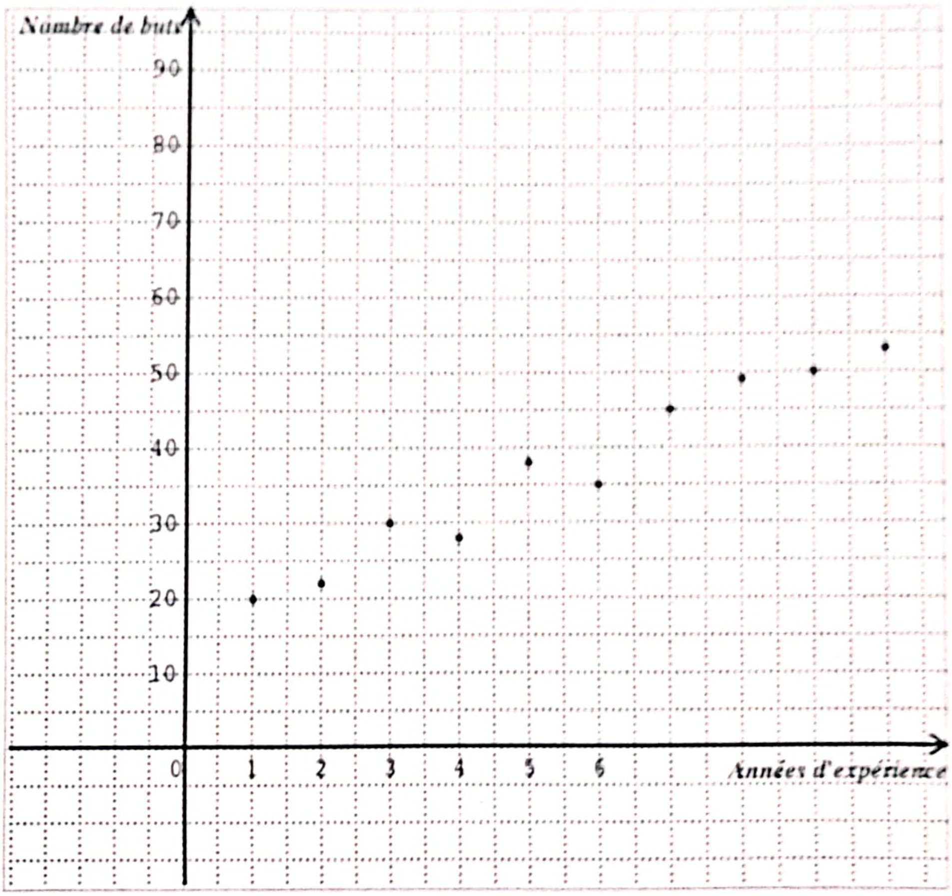
Si le chiffre d'affaires vaut 2 milliards soit 200 dizaines de millions ; les dépenses sont égale à : $200 = 6.65x+19.87$ par suite $x = \dfrac{200-19,87}{6,65}$

$x = 27,08$ dizaines de millions.

Les dépenses s'élèvent à 270 800 000 F.

EXERCICE 3

1. Représentation du nuage de points



2. Calculons le coefficient de corrélation entre X et Y

Tableau de calcul

										somme
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
y_i	20	22	30	28	38	35	45	49	50	53	370
x_iy_i	20	44	90	112	190	210	315	392	450	530	2 353
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	385
y_i^2	400	484	900	784	1444	1225	2025	2401	2500	2809	14 972

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i$$

$$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5{,}5 \qquad \bar{y} = \frac{370}{10} = 37$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}\ ; \qquad \mathrm{COV}(X,Y) = \frac{2353}{10} - 5{,}5\times 37 = 31{,}8\,.$$

$$V(X) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 \ ; \qquad V(X) = \frac{385}{10} - 5{,}5^2 = 8{,}25$$

$$V(Y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{y}^2 \ ; \qquad V(Y) = \frac{14972}{10} - 37^2 = 128{,}2$$

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}} \qquad r = \frac{31{,}8}{\sqrt{8{,}25\times 128{,}2}} = 0{,}9778$$

On a une très forte corrélation linéaire entre X et Y : un ajustement affine est donc justifié.

3. a- Déterminons une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Une équation de la droite de régression de y en x est de forme $y = ax+b$

Avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ soit $a = \frac{31{,}8}{8{,}25} = 3{,}85$; $b = 37-3{,}85\times5{,}5 = 15{,}8$

Soit $y = 3{,}85x+15{,}8$

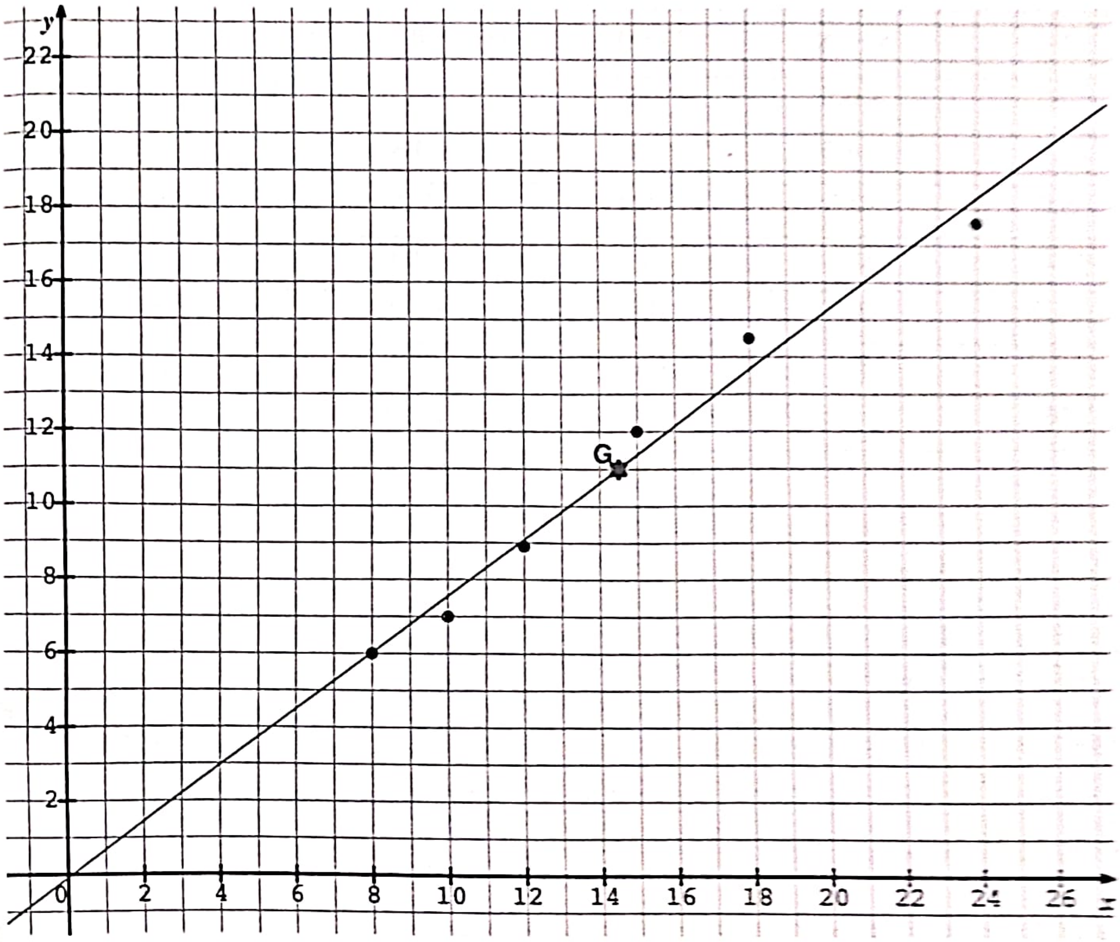
b- Estimons le nombre de buts marqués pour un joueur de 12 années d'expériences

Si $x = 12$ alors $y = 3{,}85\times12+15{,}8$ c'est-à-dire $y = 62$

soit 62 buts marqués

EXERCICE 4

1-a-Représentons le nuage de points (voir graphique à la page suivante)



1. b- Un ajustement est possible car les points du nuage sont presque alignés

2. Déterminons les coordonnées ($\bar{x}$; $\bar{y}$) du point moyen du nuage:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\bar{x} = \frac{8+10+12+15+18+24}{6} = 14,5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i$$

$$\bar{y} = \frac{6+7+8,9+12+14,5+17,6}{6} = 11$$

Le point moyen G a pour coordonnées : G(14,5; 11)

3. Déterminons une équation de la droite de régression de y en x .

Etablissons le tableau des calculs

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
8	6	- 6,5	- 5	32,5	42,25
10	7	- 4,5	- 4	18	20,25
12	8,9	-2,5	- 2,1	5,25	6,25
15	12	0,5	1	0,5	0,25
18	14,5	3,5	3,5	12,25	12,25
24	17,6	9,5	6,6	62,7	90,25
87	**66**	0	0	**131,2**	**171,5**

Une équation de la droite de régression de y en x est de la forme: $y = ax + b$

avec $a = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{131,2}{171,5} = 0,77$;

$b = \bar{y} - a\bar{x}$ soit $b = 11 - 0,77 \times 14,5 = -0,165$

La droite de régression a donc pour équation: **$y = 0,77\,x - 0,165$**

4. Estimons le chiffre d'affaire pour une vente de 30 000 articles

Si $x = 30$ alors $y = 0,77 \times 30 - 0,165$ soit $y = 22,935$ environ 23 millions.

MATHEMATIQUES GENERALES

EXERCICE 1

Partie A

1. **Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2 - 7x + 10 = 0$.**

Calculons Δ le discriminant. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10$

$$\Delta = 9$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{9}}{2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{9}}{2} = 2$$

L'ensemble de solutions de l'équation est donc $\{2 ; 5\}$

2. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \geq 0$**

D'après la question 1), on a : $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$.

Etudions le signe de $x^2 - 7x + 10$ dans un tableau:

x	$-\infty$	2		5	$-\infty$
x - 2	−	0	+		+
x - 5	−		−	0	+
$(x-2)(x-5)$	+	0	−	0	+

D'après le tableau de signe, l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ est : $]-\infty ; 2] \cup [5 ; +\infty[$.

3. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{4}{x-1} > 0$.**

Le numérateur étant positif, le signe du quotient $\frac{4}{x-1}$ est celui de $x - 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tableau de signe

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	−	0	+
$\frac{4}{x-1}$	−		+

D'après le tableau de signe l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{4}{x-1} > 0$

est :$]1 ; +\infty[$.

Partie B

1. **Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f**

f(x) existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. **Calculons f (-1) ; f(2); f(3); f(5)**

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 7\times(-1)+10}{-1-1}$$

$f(-1) = -9$

$$f(2) = \frac{(2)^2 \ -7\times 2 \ + \ 10}{2 \ - \ 1}$$

$f(2) = 0$

$$f(3) = \frac{(3)^2 \ -7\times 3 \ + \ 10}{3 \ - \ 1}$$

$f(3) = -1$

$$f(5) = \frac{(5)^2 \ -7\times 5 \ + \ 10}{5 \ - \ 1}$$

$f(5) = 0$

3. **Démontrons que pour tout nombre réel x de D_f, $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}$.**

Pour tout réel x élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a : $x - 6 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x-6)(x-1)+4}{x-1}$

$$x - 6 + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}.$$

Ainsi, pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}$.

4. a- Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$, puis interprétons les résultats obtenus

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[\frac{1}{x-1}(x^2-7x+10)\right]$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x^2-7x+10) = 4$ par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{1}{x-1}(x^2-7x+10)\right]$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2-7x+10) = 4$ par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$.

Interprétation du résultat

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$) donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote (parallèle à l'axe des ordonnées) à la courbe (C_f).

b- Calculons la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}$ c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

De la même façon, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5. a- **Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x - 6$ est une asymptote (non parallèle aux axes du repère) à la courbe (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.**

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-6)] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x-1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-6)] = 0$

De même $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x-6)] = 0$

La droite (D) d'équation $y = x - 6$ est donc une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

b- Position de (C_f) par rapport à (D).

Pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; on pose : $\varphi(x) = f(x) - (x - 6)$.

$\varphi(x) = \frac{4}{x-1}$. Alors d' après la question 3 dans la partie A, on a les résultats suivants :

- $\forall x \in]-\infty ; 1[$, $\varphi(x) < 0$ donc la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D);
- $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\varphi(x) > 0$ donc la courbe (C_f) est au dessus de la droite (D).

6)- a - Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f

f étant une fonction rationnelle, elle est continue et dérivable en tout élément de D_f.

Pour tout nombre réel x élément de D_f, on a : $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

b- Démontrons que pour tout nombre réel x élément de D_f,

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

Pour tout nombre réel x élément de Df, $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

c- Etudions les variations de f.

Pour tout nombre réel x différent de 1, $(x-1)^2$ est strictement positif donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)(x-3)$.

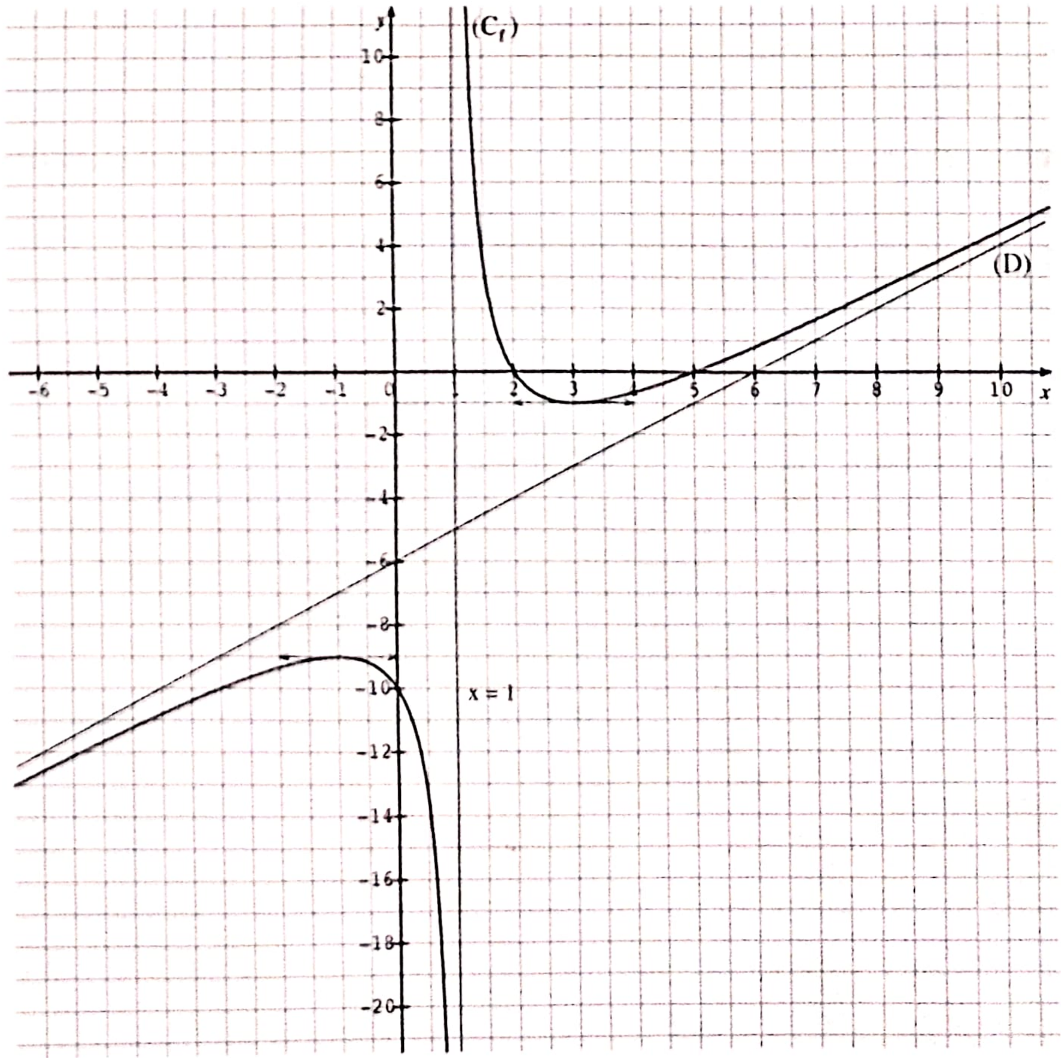
Ainsi :

- Pour tout nombre réel x élément de]-1 ; 1[∪]1 ; 3[, f '(x) < 0 donc f est strictement décroissante sur]-1 ; 1[et sur]1 ; 3[;
- Pour tout nombre réel x élément de]-∞ ; -1[∪] 3; +∞[, f '(x) > 0 donc f est strictement croissante sur]-∞ ; -1[et sur] 3; +∞[.

c- Dressons le tableau de variation de f.

x	−∞		-1		1		3		+∞
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	−∞	↗	-9	↘ −∞	‖ +∞	↘	-1	↗	+∞

7. Construisons la courbe (C_f)



EXERCICE 2

1. **Exprimons le prix de revient r d'un article par mois en fonction de n.**

On a : $r = \dfrac{1200n + 750\,000}{n}$.

$r = 1200 + \dfrac{750\,000}{n}$.

2. **a- Etudions la fonction f sur] 0 ; + ∞ [**

> Calculons les limites de f en 0 et en + ∞.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1200 + \dfrac{750\,000}{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty}(1200) = 1200$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{750\,000}{x} = 0$ par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1200$.

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(1200 + \dfrac{750\,000}{x}\right)$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(1200) = 1200$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\dfrac{750\,000}{x} = +\infty$ par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

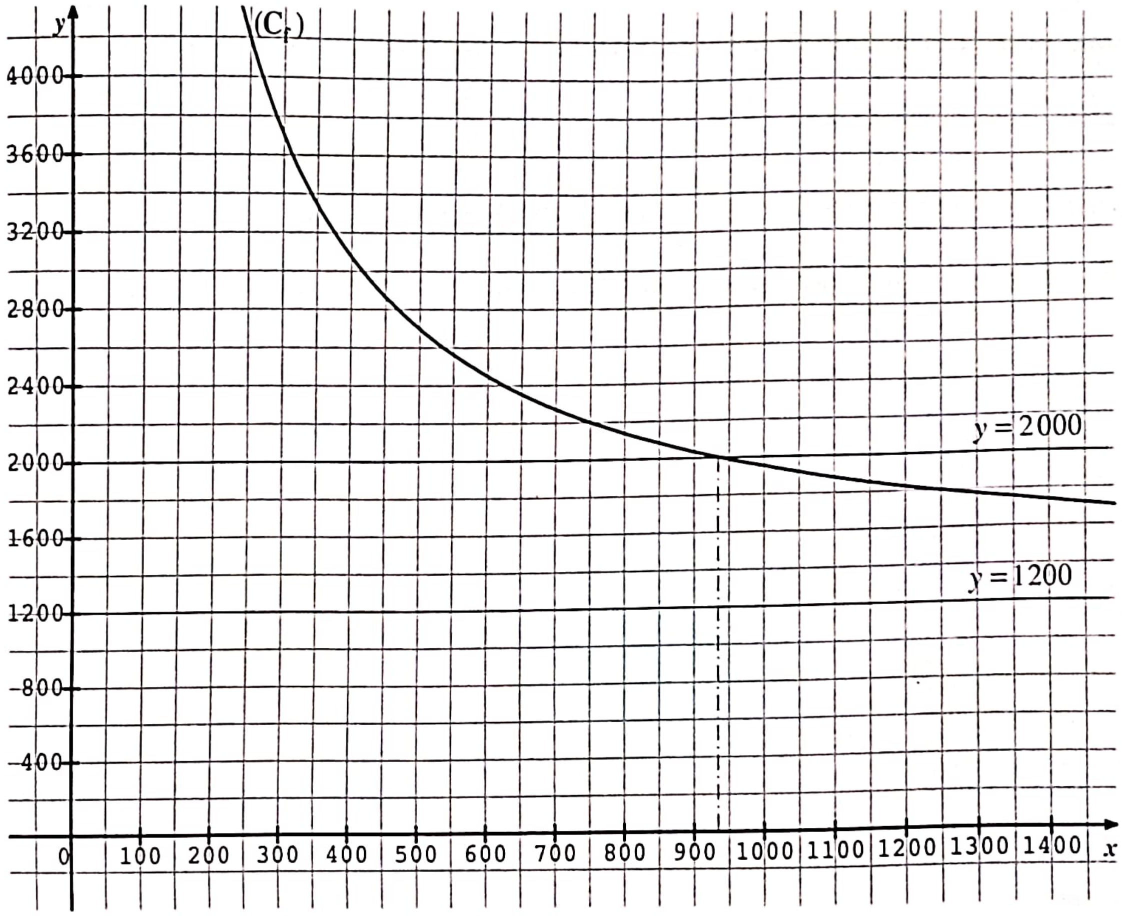
> Sens de variation de f

f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [.
Pour tout nombre réel x élément de] 0 ; + ∞ [; $f'(x) = -\dfrac{750\,000}{x^2}$.
Pour tout nombre réel x élément de]0 ;+ ∞ [, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [.

> Tableau de variation de f

x	0	+ ∞
f '(x)	‖	−
f(x)	‖ +∞ ↘	1200

b- Traçons les courbes



3. Déterminons graphiquement la valeur du nombre x d'articles

Pour y = 2000, d'après le graphique on obtient environ 940 articles:

4. Vérifions le résultat obtenu par le calcul.

Pour que l'entreprise soit rentable, il faut que : $1\,200 + \dfrac{750\,000}{x} < 2\,000$.

$$1\,200 + \frac{750\,000}{x} < 2\,000.$$

$$1\,200 + \frac{750\,000}{x} < 2\,000 \text{ équivaut à } \frac{750\,000}{x} < 800$$

$$1\,200 + \frac{750\,000}{x} < 2\,000 \text{ équivaut à } 937{,}5 < x$$

Le nombre minimal à produire est 938 articles.

EXERCICE 3

1. Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f

f(x) existe si et seulement si $2x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{3}{2}$.

L'ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ ou encore $D_f =]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$

2. Calculons les limites suivantes: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to \frac{3}{2}^<} f(x)$, $\lim_{x \to \frac{3}{2}^>} f(x)$,

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-4}{2x-3}$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x}$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-4}{2x-3}$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x}$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1$.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Interprétation géométrique:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote (parallèle à l'axe de abscisses) à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim_{x \to \frac{3}{2}^<} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^<} \frac{1}{(2x-3)}(2x-4)$ or $\lim_{x \to \frac{3}{2}^<} \frac{1}{(2x-3)} = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{3}{2}^<} (2x-4) = -1$ donc $\lim_{x \to \frac{3}{2}^<} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to \frac{3}{2}^>} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^>} \frac{1}{(2x-3)}(2x-4)$ or $\lim_{x \to \frac{3}{2}^>} \frac{1}{(2x-3)} = +\infty$ et $\lim_{x \to \frac{3}{2}^>} (2x-4) = -1$ donc $\lim_{x \to \frac{3}{2}^>} f(x) = -\infty$

Interprétation géométrique:

La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est une asymptote (parallèle à l'axe des ordonnées) à (C_f).

3. a- Démontrons que, pour tout élément x de D_f, $f'(x) = \frac{2}{(2x-3)^2}$

Pour tout nombre réel x élément de D_f, on a : $f'(x) = \frac{2(2x-3) - 2(2x-4)}{(2x-3)^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{(2x\ \ 3)^2}$$

b- Etudions le sens de variation de f.

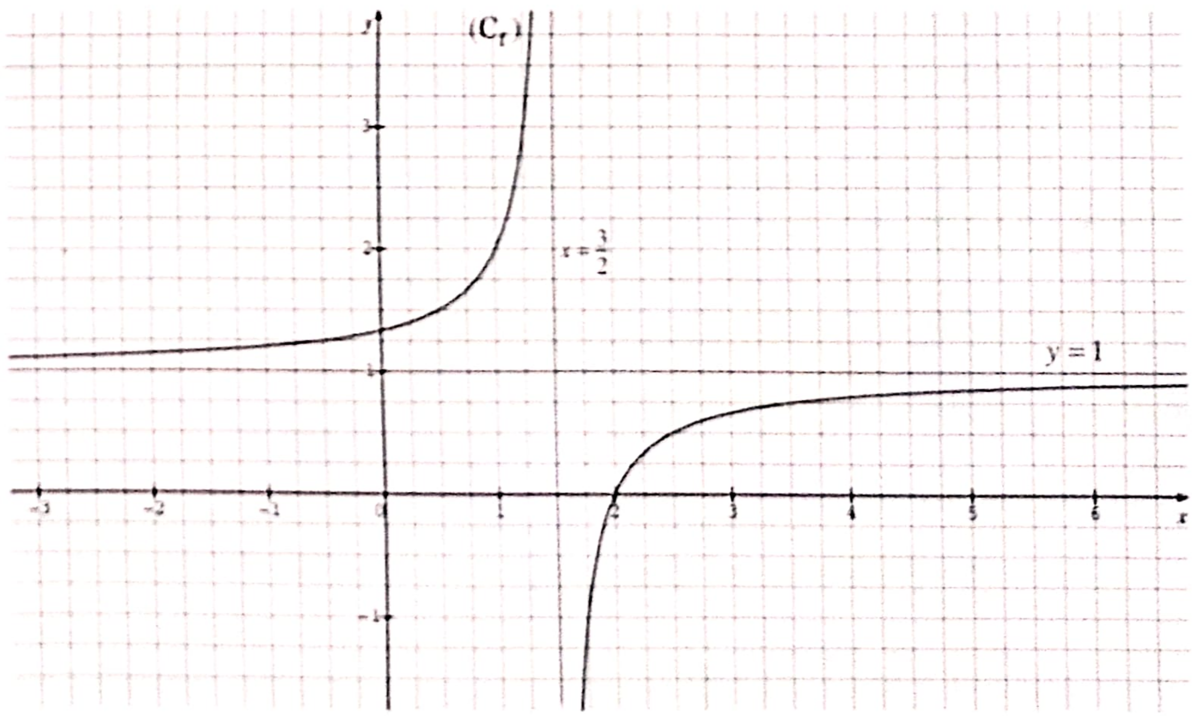
Pour tout nombre réel x élément de D_f, $(2x-3)^2 > 0$;

par conséquent, pour tout nombre réel x élément de $]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$ et sur $]\frac{3}{2} ; +\infty[$.

c- Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f '(x)	+	‖	+
f(x)	1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1

4) Traçons les asymptotes et la courbe



EXERCICE 4

1) Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f.

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - x - 2 \neq 0 \}$

Soit Considérons le polynôme P défini par : $P(x) = x^2 - x - 2$.

Le discriminent de P est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$ soit $\Delta = 9 > 0$.

Alors P a deux racines qui sont : $x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(x-2)$.

Par conséquent, $x^2 - x - 2 \neq 0$ revient à $(x+1)(x-2) \neq 0$ qui équivaut à $x+1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$. On obtient ainsi $x \neq -1$ et $x \neq 2$.

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$

ou encore sous forme d'une réunion d'intervalles : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$

2) Déterminons les nombres réels a, b, c et d

Pour tout nombre réel x élément de D_f,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-2}.$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)(x-2) + c(x-2) + d(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + (b-a)x^2 + (c+d-2a-b) + d - 2b - 2c}{(x+1)(x-2)}.$$

Or $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ et $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

D'où $\forall x \in D_f$, $ax^3 + (b-a)x^2 + (c+d-2a-b)x + d - 2c - 2d = x^3$.

Les nombres réels a, b, c et d sont alors solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c + d - 2a - b = 0 \\ d - 2b - 2c = 0 \end{cases}$$

Après calcul, on obtient : $a = 1$; $b = 1$; $c = \dfrac{1}{3}$ et $d = \dfrac{8}{3}$

On obtient : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{8}{3(x-2)}$

3) a – Calculons les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x - 2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x - 2}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

b- Calculons la limite de f à gauche et à droite en -1 puis à gauche et à droite en 2

En tenant compte du signe du polynôme x^2-x-2 suivant les valeurs de x on a :

- $\lim\limits_{x \to -1^<}(\dfrac{1}{x^2-x-2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1}(x^3) = -1$ donc $\lim\limits_{x \to -1^<} f(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to -1^>}(\dfrac{1}{x^2-x-2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1}(x^3) = -1$ donc $\lim\limits_{x \to -1^>} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 2^<}(\dfrac{1}{x^2-x-2}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^3) = 8$ donc $\lim\limits_{x \to 2^<} f(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 2^>}(\dfrac{1}{x^2-x-2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^3) = 8$ donc $\lim\limits_{x \to 2^>} f(x) = +\infty$.

Interprétation : les droite d'équation $x = -1$ et $x = 2$ sont asymptotes à la courbe de f.

b- Calculons $f'(x)$.

Pour tout nombre réel x élément de D_f,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-x-2)-x^3(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2}$$

c – Etudions le signe de f '(x) et déduisons les variations de f

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$, $f'(x) = 0$ pour les valeurs suivantes : $x = 0$; $x = 1+\sqrt{7}$; $x = 1-\sqrt{7}$.

De plus pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[\setminus\{0\}$,

$\dfrac{x^2}{(x^2-x-2)^2} > 0$ et $\dfrac{x^2}{(x^2-x-2)^2} = 0$ pour x = 0. Donc le signe de f '(x) est celui du polynôme $(x^2 - 2x - 6)$.

Or le polynôme $(x^2 - 2x - 6)$ est strictement positif sur l'intervalle $]-\infty;1-\sqrt{7}[\cup]1+\sqrt{7};+\infty[$, et il est strictement négatif sur l'intervalle $]1-\sqrt{7};1+\sqrt{7}[$.

On déduit alors que :

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;1-\sqrt{7}[\cup]1+\sqrt{7};+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1-\sqrt{7}[$ et sur $]1+\sqrt{7};+\infty[$,

Pour tout nombre réel x élément de $]1-\sqrt{7};-1[\cup]-1;2[\cup]2;1+\sqrt{7}[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur les intervalles $]1-\sqrt{7};-1[\cup]-1;2[\cup]2;1+\sqrt{7}[$.

d - Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		-1		-2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1-\sqrt{7})$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(1+\sqrt{7})$	↗	$+\infty$

Avec $f(1-\sqrt{7}) \approx -1{,}89$ et $f(1+\sqrt{7}) \approx 6{,}34$

4) Démontrons que la droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) en l'infini.

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty\,;-1[\cup]-1;\ 2[\cup]2\,;+\infty[$,

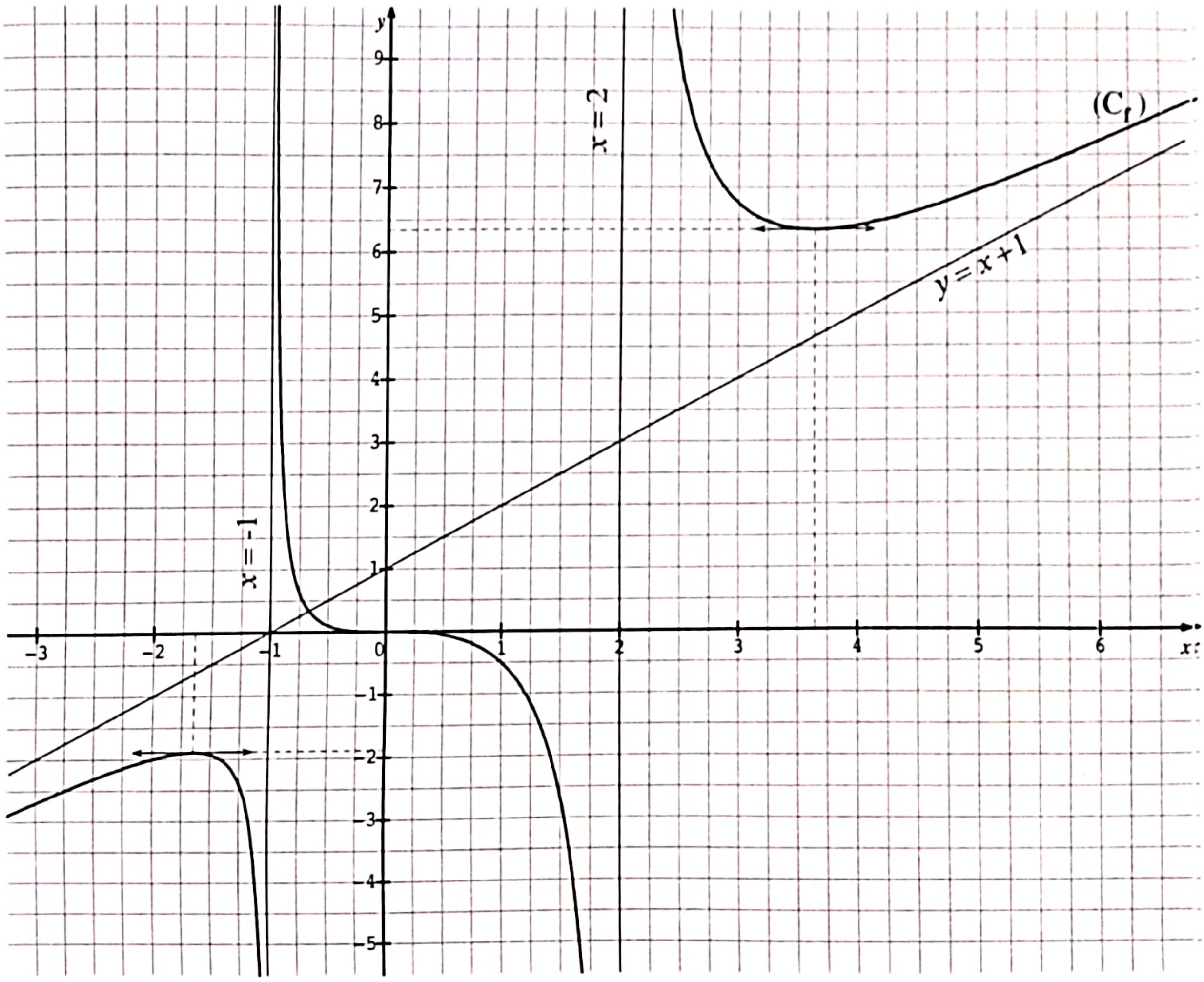
$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)} \right) = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)} \right) = 0$

La droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est donc une asymptote (non parallèle aux axes du repère) à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. **Traçons les asymptotes et la courbe** (C_f)



$f(1 - \sqrt{7}) = \dfrac{28 - 4\sqrt{7}}{9} \approx -1{,}89$; $f(1 + \sqrt{7}) = \dfrac{20 + 14\sqrt{7}}{9} \approx 6{,}34$

EXERCICE 5

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f

f(x) existe si et seulement lnx existe c'est-à-dire x > 0.

$D_f =]\,0; +\infty[$

2) Calculons f(1) ; f(2) ; f(e).

$f(1) = (\ln 1)^2 - 1 = -1$; $f(2) = (\ln 2)^2 - 1$; $f(e) = (\ln e)^2 - 1 = 0$

3) Démontrons que, pour tout x élément de D_f, $\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x} + 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$.

Pour tout nombre réel x élément de] 0; + ∞[, $\frac{f(x)}{x} = \frac{[\ln(x)]^2 - 1}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x} + \frac{[\ln(x)]^2}{x}.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x} + \frac{\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x} + 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

4-a- Calculons la limite de la fonction f à droite en 0 et interprétons graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [(\ln x)^2 - 1]$. Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-1) = -1$.

Par suite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

La droite (OJ) d'équation x = 0 est alors une asymptote à (C_f).

b-Calculons la limite de f en +∞.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(\ln x)^2 - 1]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1$ par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5) Justifions que (C_f) admet une branche parabolique en +∞.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{-1}{x}\right) + 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = 0$$

La courbe (C_f) admet donc en +∞ une branche parabolique de direction (OI).

6) a- Résolvons dans ℝ l'inéquation suivante : lnx ≥ 0.

L'ensemble de validité E_v est] 0 ; +∞[.

Soit x un élément de l'intervalle] 0 ; +∞[. On a : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle [1; + ∞[

b- Sens de variation de f.

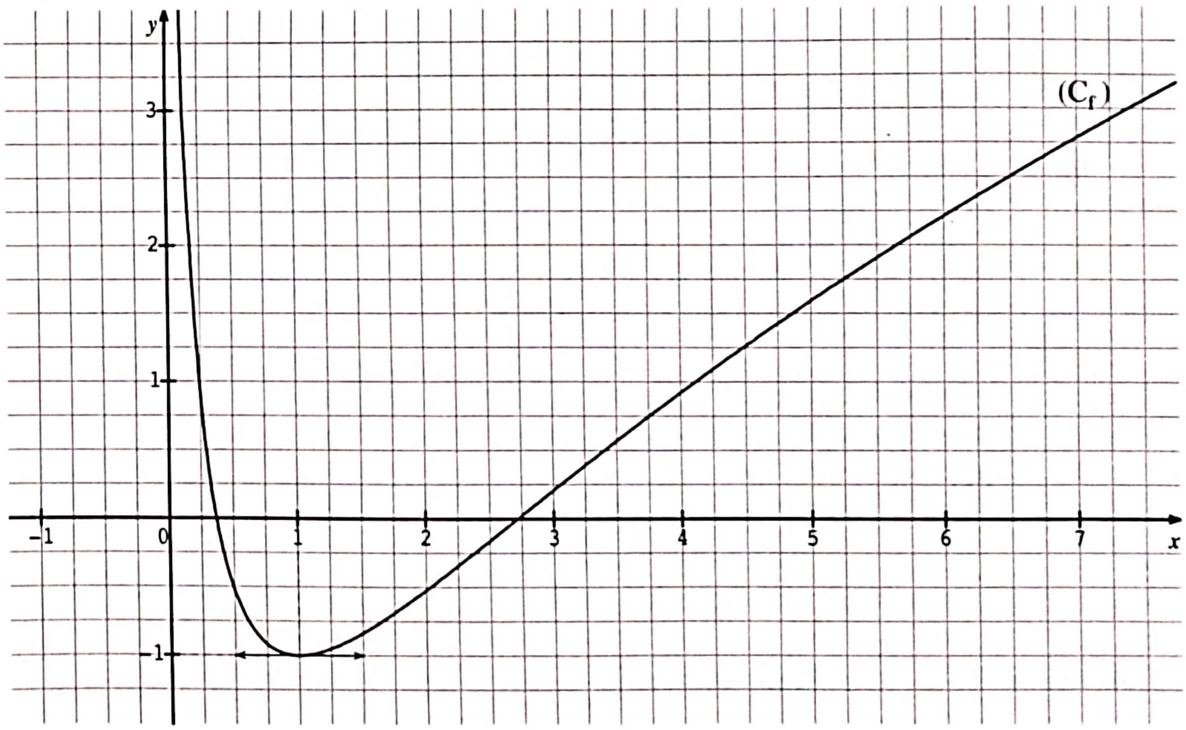
La fonction f est dérivable sur]0 ; +∞ [et pour tout x élément de]0 ; +∞ [, $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

Pour tout nombre réel x élément de]0 ; +∞[, f '(x) est du signe de lnx. D' après la question précédente, $\ln x \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$. Par conséquent, pour tout nombre réel x élément de]0 ; 1[, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur]0 ; 1[, et pour tout nombre réel x élément de]1 ; +∞[, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur]1 ; +∞[.

c –Dressons le tableau de variation

x	0		1		+∞
f '(x)		-	0	+	
f(x)	+∞	↘	-1	↗	+∞

7- Construisons la courbe (C_f)



EXERCICE 6

1. a - Déterminons l'ensemble de définition de g.

$D_g = \mathbb{R}$

b- Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}}$.

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. Par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}}$.

  Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. Par suite $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

2. a- Etudions la continuité de g au point d'abscisse 0.

Posons $z = \frac{1}{x}$ soit $x = \frac{1}{z}$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{z \to -\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^z}{z} = 0$ car $\lim\limits_{z \to -\infty} z = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^z = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(0) = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{z \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^z}{z} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(0) = +\infty$.

On en déduit que g n'est pas continue en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(0) = +\infty$. Donc la droite (OJ) est une asymptote à (C_g).

b- Etudions la dérivabilité de g au point d'abscisse 0

g n'est pas dérivable en 0 car g n'est pas continue en 0.

3. a- Démontrons que pour tout nombre réel x élément de D_g, $g'(x) = \left(\frac{x-1}{2x}\right) e^{\frac{1}{x}}$.

Pour tout nombre réel x élément de D_g, on a : $g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{x}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, donc $g'(x) = \left(\frac{x-1}{2x}\right) e^{\frac{1}{x}}$.

b- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x-1}{2x} \geq 0$.

Pour tout nombre réel x non nul, $\frac{x-1}{2x}$ a le même signe que $x(x-1)$, d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x(x-1)$	+	0	−	0	+
$\dfrac{x-1}{x}$	+	‖	−	0	+

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

- Signe de $g'(x)$

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$

Pour tout nombre réel x élément de $]0; 1[$, $g'(x) < 0$.

c- Etudions le sens de variation de g.

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]1 ; +\infty[$.

Pour tout x élément de $]0 ; 1[$, $g'(x) < 0$,donc g est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$.

d- dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}e$	↗	$+\infty$

4. Démontrons que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$ est une asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right).$$

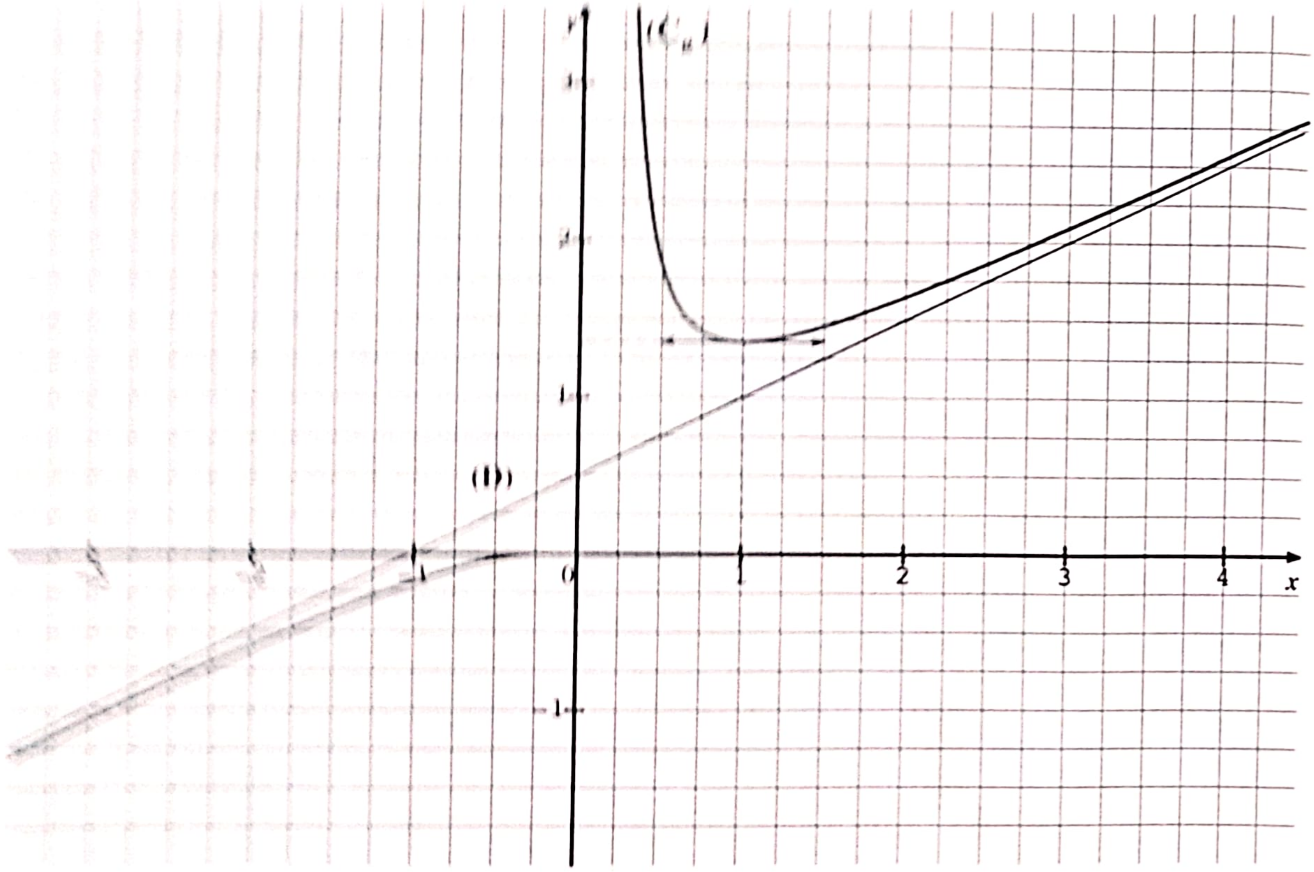
$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0 \text{ car } \lim_{u\to0}\left(\frac{e^u-1}{u}\right)=1.$$

De la même façon, on montre que $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=0$.

Donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ est une asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Représentons graphiquement les asymptotes et la Courbe (C_g)



EXERCICE 7

1. a- Calculons le coût global annuel pour 16 commandes

$$C(16) = 40\,000 + \frac{6400}{16} + 4 \times 16$$

$$C(16) = 40\,464 \text{ F}$$

b- Déterminons le nombre de commandes pour un coût global de 40 400 F

$$40\,400 = 40\,000 + \frac{6400}{n} + 4n \Leftrightarrow n^2 - 100\,n + 1600 = 0$$

Les solutions de l'équation sont : $n_1 = 20$ et $n_2 = 80$.

On prendra $n = 80$ commandes car $n \geq 25$;

2. a- Déterminons la dérivée de C.

Pour tout n élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, $C'(n) = 4 - \dfrac{6400}{n^2} = \dfrac{(2n - 80)(2n + 80)}{n^2}$

b- Etudions les variations de C

- Sens de variation de C

Le signe de $C'(n)$ est celui de $(2n - 80)$ car pour n appartenant à $]0;+\infty[$, n^2 et $(2n+80)$ sont positifs . Or pour n élément de l'intervalle $]0\,;40]$, $2n-80 \leq 0$ et pour n élément de l'intervalle $[40\,;+\infty[$, $2n-80 \geq 0$.
Donc C est strictement décroissante sur $]0\,;40]$ et C est strictement croissante sur $[40\,;+\infty[$.

- Tableau de variation de la fonction C

  Limites de C en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} C(n) = +\infty \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{6400}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 4n = +\infty .$$

$$\lim_{n\to 0} C(n) = +\infty \text{ car } \lim_{n\to 0} \frac{6400}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to 0} 4n = 0 .$$

n	0		40		$+\infty$
$C'(n)$	‖	$-$	0	$+$	
$C(n)$	‖ $+\infty$	↘	40320	↗	$+\infty$

3. a Déterminons le nombre de commandes pour lequel le coût est minimal.

$C'(n) = 0$ équivaut à $4 - \dfrac{6400}{n^2} = 0$

$C'(n) = 0$ équivaut à $n = 40$ ou $n = -40$. Seule la valeur positive convient ;

On prendra $n = 40$ commandes.

b. Calculons le coût global minimum

$C(40) = 40\,000 + \dfrac{6400}{40} + 4\times40$

$C(40) = 40\,320$ F

EXERCICE 8

1. a- Calcul de S_2; S_3 et S_4 sachant que $S_1 = 100\ 000$ F est le salaire du premier mois d'activité:

- $S_2 = S_1 + 5\,000$
  $S_2 = 100\,000 + 5\,000$
  $S_2 = 105\,000$ F

- $S_3 = S_2 + 5\,000$
  $S_3 = 105\,000 + 5\,000$
  $S_3 = 110\,000$ F

- $S_4 = S_3 + 5\,000$
  $S_4 = 110\,000 + 5\,000$
  $S_4 = 115\,000$ F

- On en déduit que :

$$S_{n+1} = S_n + 5\,000$$

b- Déterminons la nature de la suite (S_n)

La suite (S_n) est une suite arithmétique de premier terme $S_1 = 100\,000$ et de raison $r = 5\,000$

c- Expression de S_n en fonction de n.

$$S_n = S_1 + (n-1)r$$
$$S_n = 100\,000 + 5000(n-1)$$
$$S_n = 95\,000 + 5000\,n$$

2. Salaire total versé à Alain après deux années d'activité

Après 2 ans c'est-à-dire 24 mois d'activité, le salaire total versé à Alain est :

$$S_{24} = S_1 + (24-1)r$$
$$S_{24} = 100\,000 + 23\times 5\,000$$
$$S_{24} = 215\,000.$$

Soit 215 000 F

EXERCICE 9

1. Déterminons l'ensemble de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$
$$D_f = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;+\infty\right[$$

2. a- Calculons les limites de f aux bornes des intervalles qui composent D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \left(\frac{1}{x+2}\times(3x-1)\right) = +\infty \quad \text{car} \lim_{x\to-2}(3x-1) = -7 \text{ et } \lim_{x\to-2^-}\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \left(\frac{1}{x+2}\times(3x-1)\right) = -\infty \quad \text{car} \lim_{x\to-2}(3x-1) = -7 \text{ et } \lim_{x\to-2^+}\left(\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$$

b- Déduisons de ce qui précède les asymptotes à la courbe (Cf)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation y = 3 est une asymptote à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$. Cette asymptote est parallèle à l'axe des abscisses.

$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote (parallèle à l'axe des ordonnés) à (C_f).

3. a- Déterminons f'.

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$, $f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$.

b. Etudions le signe de f' et déduisons le sens de variations de f

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$, $(x+2)^2 > 0$,

donc $\frac{7}{(x+2)^2} > 0$ par suite $f'(x) > 0$.

Pour tout nombre réel x élément de $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est stricte croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.

c. Dressons le tableau de variation de f

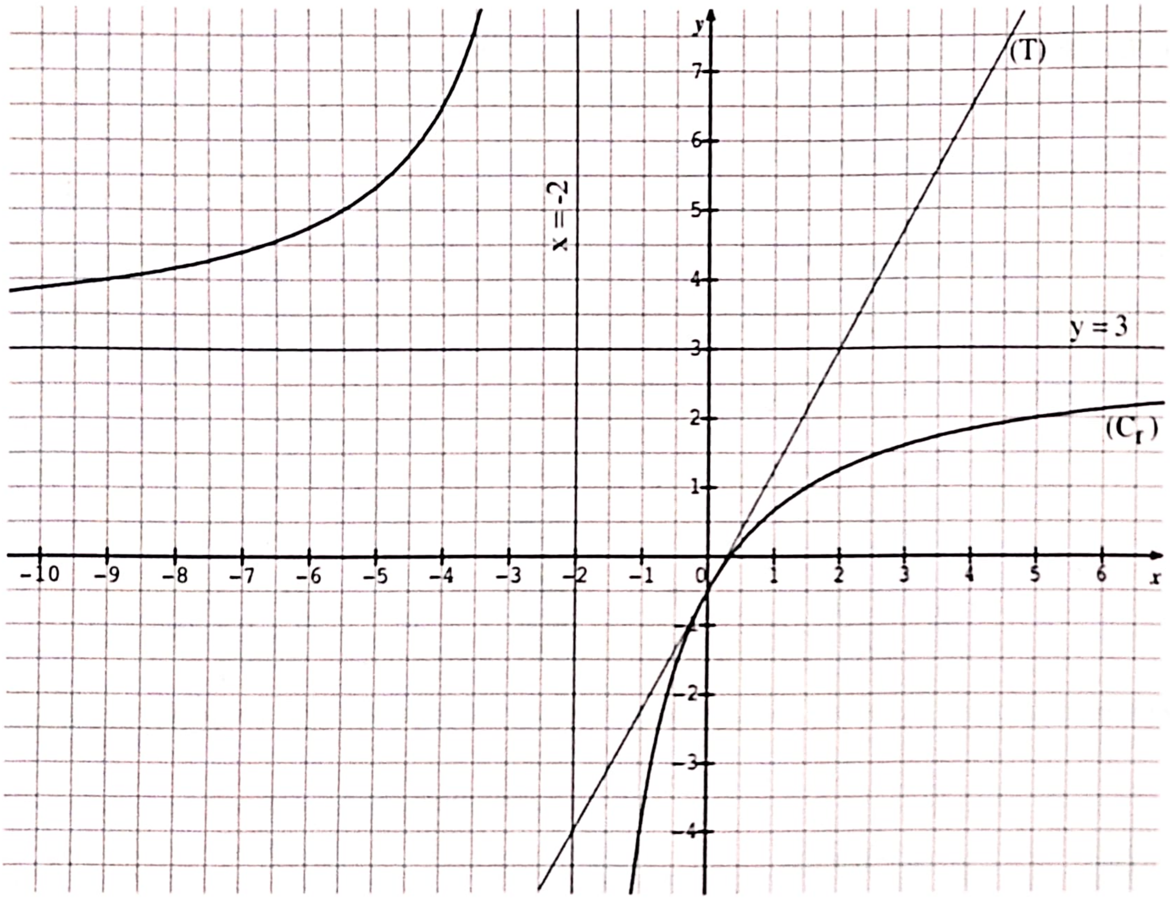
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f '(x)		+	‖	+	
f(x)	3 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	3

4. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

(T): $y = f'(0)(x-0) + f(x)$

(T) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$.

5. Traçons les asymptotes, la tangente (T) et la courbe (C_f)



EXERCICE 10

1. **Calculons la production de l'année 2004 et celle de l'année 2005.**

- Production de 2004

$$25\,000 - 25\,000 \times \frac{4}{100} = 24\,000 \text{ unités}.$$

- Production de 2005

$$24\,000 - 24\,000 \times \frac{4}{100} = 23\,040 \text{ unités}.$$

2. **a- Démontrons que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96 .**

Soit P_{n+1} la production de l'année $(2003+(n+1))$.

$$P_{n+1} = P_n - \frac{4}{100}P_n$$
$$= P_n - 0{,}04P_n$$
$$P_{n+1} = 0{,}96P_n$$

On en déduit que (P_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$.

b- Démontrons que quelque soit l'entier naturel n on a : $P_n = 25\,000 \times (0{,}96)^n$

(P_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $P_0 = 25\,000$.

On en déduit que $P_n = P_0 \times q^n$ ce qui implique $P_n = 25000 \times (0{,}96)^n$.

3. a- Déterminons l'année à partir de laquelle la production n'est plus rentable.

$$P_n \leq 20\,000$$

$$(0{,}96)^n \times 25\,000 \leq 20\,000$$

$$(0{,}96)^n \leq 0{,}8$$

$$\ln(0{,}96)^n \leq \ln 0{,}8$$

$$n \ln 0{,}96 \leq \ln 0{,}8$$

$$n \geq \frac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}96} \quad \text{car } \ln 0{,}96 < 0$$

$$n \geq 5{,}46$$

La production n'est plus rentable à partir de la 6ème année ; soit 2003+6=2009.

b- Déterminons la production totale pendant le temps de fonctionnement à partir du 1er janvier 2003.

Production totale S de tout le temps de fonctionnement :

$S = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_6$

$S = P_0 \dfrac{1-q^7}{1-q}$

$S = 25\,000 \times \dfrac{1-(0{,}96)^7}{1-0{,}96} \quad \Rightarrow \quad S = 155\,345{,}3262$

$S = 155\,345$ unités

La production totale de tout le temps de fonctionnement est de 155 345 unités.

EXERCICE 11

1.

a. Calculons $f'(x)$ pour tout élément x de l'intervalle [100,400].

$\boxed{f'(x) = -1{,}4x + 350}$.

b. Etudions le signe de $f'(x)$ et déduisons les variations de f.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}4x + 350 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 250$

Pour tout $x \in [100\,;250[$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[100\,;250[$

Pour tout $x \in]250\,;400]$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]250\,;400]$

x	100		250		400
f'(x)		+	0	−	
f(x)	56 000	↗	71 750	↘	56 000

c. **Démontrons que f admet un maximum et donnons ce maximum.**

La fonction f est croissante sur l'intervalle [100,250] puis décroissante sur [250,400] .On en déduit que le maximum de f sur [100,400] est f(250) soit 71 750.

2. **Calculons le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalise un bénéfice maximal et déterminons ce bénéfice**

$f(q) = B(q)$.

D'après 1. d) le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalise le bénéfice maximum est 250 articles.

Le bénéfice maximum est alors $B(250) = f(250) = 71\,750$ F