BTS ELECTRONIQUE

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre nous allons introduire un outil mathématique puissant, la transformation de Laplace, pour l'étude des circuits linéaires en régime transitoire. Cette transformation permet d'associer à toute fonction du temps f(t) une fonction F(p) d'une variable complexe $p = a + jb$. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles. L'application de la transformation de Laplace permet de plus d'avoir à écrire ces équations.

<u>Intégrales généralisées (ou intégrales impropres</u>)

<u>Définition :</u> Soit f une fonction définie sur $\left[a\,;+\infty\right[$, continue ou continue par morceau sur cet intervalle .

Si $I(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge , et on pose

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt = A$. On note alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = A$.Dans le cas contraire , on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

<u>Théorème</u> :

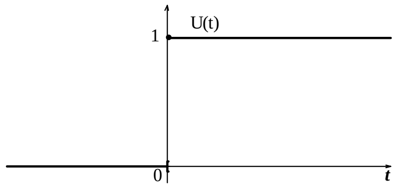
Si f est une fonction à valeurs réelles ou complexes telle que $\int_a^{+\infty} \left|f(t)\right| dt$ converge , alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge .

<u>Fonctions causales</u>

Une fonction de la variable réelle t est dite causale si pour tout t strictement négatif . On a : $f(t) = 0$.

Définition : on appelle **fonction échelon unité** (notée U (t)) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{U}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$ et représentée sur la figure 1 .



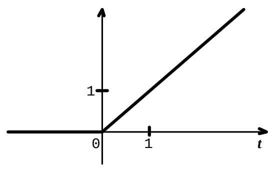
Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$,la fonction $f \times \mathrm{U}$ est **une fonction causale**.

Remarque

– **U** n'est pas continue en 0 , elle est continue à droite de 0 au voisinage de 0.
On rend une fonction causale en la multipliant par la fonction <u>échelon– unité.</u>

<u>Fonction rampe unité</u>

La fonction rampe unité est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t < 0 \\ f(t) = t & si\ t \geq 0 \end{cases}$ $\quad ou \quad f(t) = t\,\mathrm{U}(t)$



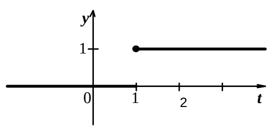
<u>Fonction échelon- unité retardée de a</u>

Soit f une fonction numérique de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$, et soit g la fonction définie par $g(t) = f(t-a)$, a étant un réel positif, on dit que la fonction g est retardée de a .

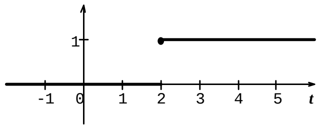
La fonction h définie par $h(t) = f(t+a)$, a étant un réel positif , est dite en avance de a .

<u>Remarque</u> : Dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$; la courbe représentative de cette fonction g se déduit de celle de f par une translation de vecteur $a\vec{i}$

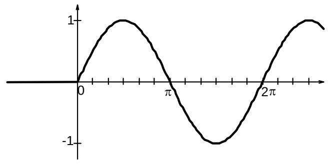
$\begin{cases} \mathrm{U}(t-1) = 0 & si\ t < 1 \\ \mathrm{U}(t-1) = 1 & si\ t \geq 1 \end{cases}$. Soit $g(t) = f(t-1)\mathrm{U}(t-1)$.



Fonction échelon- unité retardée de 2 $\begin{cases} \mathcal{U}\ (t-2)=0 & si\ t<2 \\ \mathcal{U}\ (t-2)=1 & si\ t\geq 2 \end{cases}$

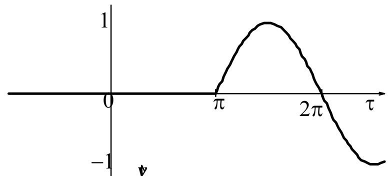


$\begin{cases} f(t)=0 & si\ t<0 \\ f(t)=\sin t & si\ t\geq 0 \end{cases}$ $\quad g(t)=\sin t\,\mathcal{U}\ (t)$



Fonction retardée de π :

$\begin{cases} f(t-\pi)=0 & si\ t<\pi \\ f(t)=\sin(t-\pi) & si\ t\geq \pi \end{cases}$;

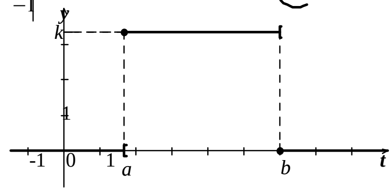


$f(t-\pi)=\sin(t-\pi)\mathcal{U}\ (t-\pi)$

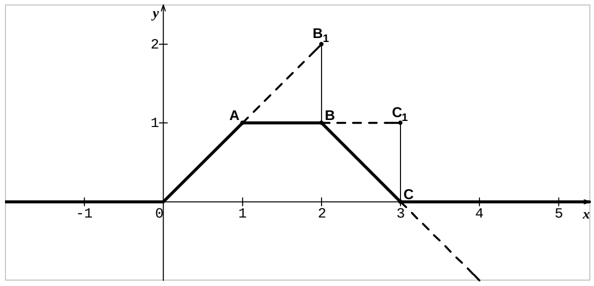
Fonction créneau

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$ et k un nombre réel .La fonction créneau est définie par $g(t)=k\left(\mathcal{U}\ (t-a)-\mathcal{U}\ (t-b)\right)$

$\begin{cases} f(t)=0 & si\ t<a \\ f(t)=k & si\ a\leq t\leq b \\ f(t)=0 & si\ t\geq b \end{cases}$



Du graphique à la formule



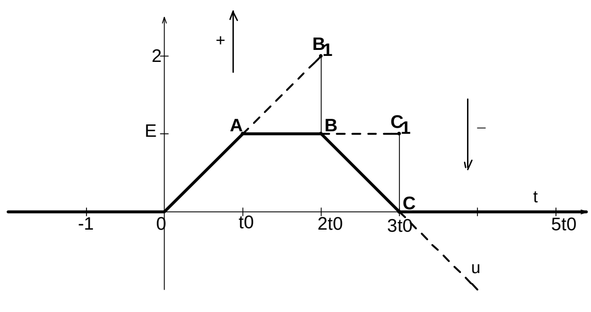
- Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, on reconnaît $f(t)=t\,\mathcal{U}\ (t)$.
- Sur l'intervalle $[1;2[$, avec $f(t)=t\,\mathcal{U}\ (t)$, on obtient le segment $[AB_1]$ et pour passer de $[AB_1]$ à $[AB]$, Il suffit d'ajouter $-(t-1)\mathcal{U}\ (t-1)$.
  Donc sur $]-\infty;2]$, $f(t)=t\,\mathcal{U}\ (t)-(t-1)\mathcal{U}\ (t-1)$.
- Sur $[2;3[$, avec l'expression ci-dessus de $f(t)$, on obtient le segment $[BC_1]$ et on a vu que pour passer de $[BC_1]$ à $[BC]$, il suffit d'ajouter $-(t-2)\mathcal{U}\ (t-2)$.
  Donc sur $]-\infty;3]$, $f(t)=t\,\mathcal{U}\ (t)-(t-1)\mathcal{U}\ (t-1)-(t-2)\mathcal{U}\ (t-2)$.
- Sur $[3;+\infty[$, avec l'expression ci-dessus de $f(t)$, on obtient la demi-droite $[Cu)$ et on a vu que pour passer de la demi-droite $[Cu)$ à $[Ct)$, il suffit d'ajouter $(t-3)\mathcal{U}\ (t-3)$.

En définitive , pour tout nombre réel t, $f(t)=t\,\mathcal{U}\ (t)-(t-1)\mathcal{U}\ (t-1)-(t-2)\mathcal{U}\ (t-2)+(t-3)\mathcal{U}\ (t-3)$.

t	$-\infty$ 0	1	2	3	$+\infty$
$t\,\mathcal{U}\ (t)$	0	t	t	t	t
$-(t-1)\mathcal{U}\ (t-1)$	0	0	$-(t-1)$	$-(t-1)$	$-(t-1)$
$-(t-2)\mathcal{U}\ (t-2)$	0	0		$-(t-2)$	$-(t-2)$
$(t-3)\mathcal{U}\ (t-3)$	0	0	0	0	$(t-3)$
$f(t)$	0	t	1	$-t+3$	0

Cas général

- Sur l'intervalle $]-\infty;t_0]$, on reconnaît $f(t)=\dfrac{E}{t_0}t\,\mathcal{U}\ (t)$.
- Sur l'intervalle $[t_0;2t_0[$, avec $f(t)=\dfrac{E}{t_0}t\,\mathcal{U}\ (t)$, on obtient le segment $[AB_1]$ et on a vu pour passer de $[AB_1]$ à $[AB]$,il suffit d'ajouter $-\dfrac{E}{t_0}(t-t_0)\mathcal{U}\ (t-t_0)$.



Donc sur $]-\infty\,;2t_0]$, $f(t)=\frac{E}{t_0}tU(t)-\frac{E}{t_0}(t-t_0)U(t-t_0)$.

- Sur $[2t_0\,;3t_0[$, avec l'expression ci-dessus de f(t) , on obtient le segment $[BC_1]$ et on a vu que pour passer de $[BC_1]$ à $[BC]$, il suffit d'ajouter $-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)U(t-2t_0)$.

  Donc sur $]-\infty\,;3t_0]$, $f(t)=\frac{E}{t_0}tU(t)-\frac{E}{t_0}(t-t_0)U(t-t_0)-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)U(t-2t_0)$.
- Sur $[3t_0\,;+\infty[$, avec l'expression ci-dessus de $f(t)$, on obtient la demi-droite $[Cu)$ et on a vu que pour passer de la demi-droite $[Cu)$ à $[Ct)$, il suffit d'ajouter $\frac{E}{t_0}(t-3t_0)U(t-3t_0)$. En définitive , pour tout nombre

réel t, $f(t)=\frac{E}{t_0}tU(t)-\frac{E}{t_0}(t-t_0)U(t-t_0)-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)U(t-2t_0)+\frac{E}{t_0}(t-3t_0)U(t-3t_0)$

2.A l'aide d'un tableau , donner l'expression de f(t) sur chacun des intervalles où elle est définie

Remarque : dans l'expression obtenue pour $f(t)$ on va donc remplacer $(t-1)$ par $(t-t_0)$, $(t-1)$ par $(t-2t_0)$ et $(t-3)$ par $(t-3t_0)$. D'autre part la droite (OA), où Aa pour coordonnées (1 ; 1) , de coefficient directeur 1 est remplacée par la droite (OA') , où A' a pour coordonnées (t_0 ; E) de coefficient directeur E/t_0 et de même , par symétrie , la droite (B'C') a pour coefficient directeur $-E/t_0$.

cas général :

t	$-\infty$ $\quad$ 0	t_0	$2t_0$	$3t_0$	$+\infty$
$\frac{E}{t_0}tU(t)$	0	$\frac{E}{t_0}t$	$\frac{E}{t_0}t$	$\frac{E}{t_0}t$	$\frac{E}{t_0}t$
$-\frac{E}{t_0}(t-t_0)U(t-t_0)$	0	0	$-\frac{E}{t_0}(t-t_0)$	$-\frac{E}{t_0}(t-t_0)$	$-\frac{E}{t_0}(t-t_0)$
$-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)U(t-2t_0)$	0	0	0	$-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)$	$-\frac{E}{t_0}(t-2t_0)$
$(E/t_0)(t-3t_0)U(t-3t_0)$	0	0	0	0	$(E/t_0)(t-3t_0)$
$f(t)$	0	$(E/t_0)t$	E	$-(E/t_0)t+3E$	0

De la formule au graphique

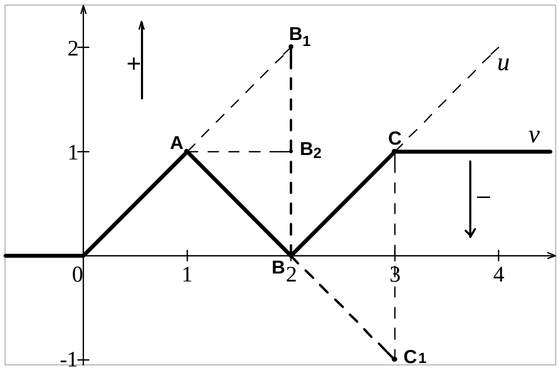
Déterminer la représentation graphique de la fonction causale $f(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(t)=t\mathbf{U}(t)-2(t-1)\mathbf{U}(t-1)+2(t-2)\mathbf{U}(t-2)-(t-3)\mathbf{U}(t-3)$.

1. à l'aide d'un tableau donnant l'expression de $f(t)$ dans chacun des intervalles à considérer.
2. En donnant l'expression de $f(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$; $[0;1[$; $[1;2[$; $[2;3[$ et $[3;+\infty[$.

t	$-\infty$ $\quad$ 0	1	2	3	$+\infty$
$tU(t)$	0	t	t	t	t
$-2(t-1)U(t-1)$	0	0	$-2(t-1)$	$-2(t-1)$	$-2(t-1)$
$2(t-2)U(t-2)$	0	0	0	$2(t-2)$	$2(t-2)$
$-(t-3)U(t-3)$	0	0	0	0	$-(t-3)$
$f(t)$	0	t	$-t+2$	$t-2$	1

b. • Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, on reconnaît $f(t)=t\,\mathbf{U}(t)$.
on retrouve l'axe des abscisses pour $]-\infty;0]$ et le segment [OA]pour $[0;1[$.



• Sur l'intervalle $[1;2[$, avec $f(t)=t\,U(t)$, on obtient le segment $[AB_1]$ et pour passer de $[AB_1]$ à $[AB_2]$,puis de $[AB_2]$ à $[AB]$ .Il suffit d'ajouter $-2(t-1)U(t-1)$.
Donc sur $]-\infty;2]$, $f(t)=t\,U(t)-2(t-1)U(t-1)$.

• Sur $[2;3[$, avec l'expression ci-dessus de $f(t)$, on obtient le segment $[BC_1]$ et on a vu que pour passer de $[BC_1]$ à $[BC]$, il suffit d'ajouter $2(t-2)U(t-2)$. Donc sur $]-\infty;3]$, $f(t)=t\,U(t)-2(t-1)U(t-1)+2(t-2)U(t-2)$.

• Sur $[3;+\infty[$, avec l'expression ci-dessus de $f(t)$, on obtient la demi-droite $[Cu)$ et on a vu que pour passer de la demi-droite $[Cu)$ à $[Cv)$, il suffit d'ajouter $-(t-3)U(t-3)$.
En définitive , pour tout nombre réel t, $f(t)=t\,U(t)-2(t-1)U(t-1)+2(t-2)U(t-2)-(t-3)U(t-3)$.

Exercices

1.Représenter graphiquement la fonction définie par : a. $f(t)=t\,U(t)-(t-1)U(t-1)-U(t-2)$.
b. $f(t)=t\,U(t)-2(t-1)U(t-1)+(t-2)U(t-2)$. c. $g(t)=t\,U(t)-2(t-\pi)U(t-\pi)+(t-2\pi)U(t-2\pi)$

2. Représenter graphiquement la fonction définie par :
a. $f(t)=\cos t\,U(t)$; b. $f(t)=\sin t\,U(t)$; c. $f(t)=t^2\,U(t)$ d. $f(t)=e^{-t}\,U(t)$ e. $f(t)=e^{-(t-\tau)}\,U(t-\tau)$.

TRANSFORMEE DE LAPLACE

Définition : On appelle transformée de Laplace d'une fonction causale f la fonction $\mathcal{L}\left[f\right]$ définie par

$$F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x}f(t)e^{-pt}dt,$$ où p est un nombre complexe.

Dans ce chapitre , on choisira pour p un réel strictement positif .
La transformée de Laplace de la fonction échelon en utilisant la définition est :

$\mathcal{L}\left[U(t)\right]=\int_0^{x}e^{-pt}dt=\left[\dfrac{-1}{p}e^{-pt}\right]_0^x=\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-px}}{p}$ Comme $p>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-px}=0$, on en déduit $\mathcal{L}\left[U(t)\right]=\dfrac{1}{p}$.

Translation : Considérons la transformée d'une fonction décalée dans le temps :
$\mathcal{L}\left[f(t-a)U(t-a)\right]=\int_0^{+\infty}f(t-a)U(t-a)e^{-pt}dt=\int_a^{+\infty}f(t-a)U(t-a)e^{-pt}dt=e^{-pa}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$; où $\boldsymbol{U}(t)$ est la fonction échelon unité .En effectuant le changement de variable $x=t-a$, il vient :
$\mathcal{L}\left[f(t-a)U(t-a)\right]=\int_a^{+\infty}f(x)e^{-p(x+a)}dx=e^{-pa}\int_0^{+\infty}f(x)e^{-px}dx$ Donc $\mathcal{L}\left[f(t-a)U(t-a)\right]=e^{-pa}F(p)$.

Théorème du retard : pour tout $t\geq\tau$, Si $\varphi(t)=f(t-\tau)U(t-\tau)$, alors
$\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]=e^{-\tau p}\mathcal{L}\left[f(t)\mathbf{U}(t)\right]=e^{-\tau p}F(p)$,
$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)U(t-\tau)\right]=\int_\tau^{x}f(t-\tau)\times e^{-pt}dt=\int_0^{x-\tau}f(u)e^{-p(u+\tau)}du=e^{-p\tau}\int_0^{x-\tau}f(u)e^{-pu}du$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x-\tau=+\infty$ et puisque la fonction f admet une transformée de Laplace, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x-\tau}f(u)e^{-pu}dt=F(p)$,
d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x}f(t-\tau)\times e^{-pt}dt=e^{-p\tau}F(p)$.

Effet de la multiplication par e^{-at}

Théorème : Si $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right]$, alors $\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\mathcal{U}(t)\right]=F(p+a)$,($a\in\mathbb{C}$)

Considérons la transformations suivante : $\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\mathcal{U}(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-pt}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-(a+p)t}f(t)dt$

Donc $\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\mathcal{U}(t)\right]=F(p+a)$.

<u>Transformée de Laplace de</u> $t\mapsto e^{-at}\mathcal{U}(t)$, a <u>réel ou complexe</u>

Il faut calculer $\mathcal{L}\left[e^{-at}\mathcal{U}(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-at}\mathcal{U}(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(a+p)t}dt$ posons $I(x)=\int_0^{x}e^{-(p+a)t}dt$

Si $p+a=0$, $I(x)=\int_0^{x}dt=x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)=+\infty$ et l'intégrale $I(x)=\int_0^{x}e^{-(p+a)t}dt$ diverge.

Si $p+a\neq 0$, $I(x)=\int_0^{x}e^{-(p+a)t}dt=\left[\dfrac{-e^{-(p+a)t}}{p+a}\right]_0^x=\dfrac{1}{p+a}-\dfrac{1}{p+a}e^{-(p+a)x}$, on suppose que $R_e(p+a)>0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-(p+a)x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)=\dfrac{1}{p+a}$. On a donc $\mathcal{L}\left[e^{-at}\mathcal{U}(t)\right]=\dfrac{1}{p+a}$ si $R_e(p)>-R_e(a)$.

<u>Transformée de</u> $f(\alpha t)\mathcal{U}(t)$; $\alpha>0$,<u>effet d'un changement d'échelle sur la variable</u>

<u>Théorème :</u> Si $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right]$, alors $\mathcal{L}\left(f(\alpha t)\mathcal{U}(t)\right)=\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$, avec $\alpha>0$.

Soit f une fonction admettant F comme transformée de Laplace et α un réel quelconque strictement positif.
On a : $\mathcal{L}\left(f(\alpha t)\mathcal{U}(t)\right)=\int_0^{+\infty}f(\alpha t)e^{-pt}dt$. En faisant le changement de variable $u=\alpha t$, on obtient $du=\alpha\, dt$

soit $dt=\dfrac{du}{\alpha}$. De plus , pour $t=0$ on a $u=0$, et pour t tend vers $+\infty$ .On obtient donc

$$\mathcal{L}\left(f(\alpha t)\mathcal{U}(t)\right)=\int_0^{+\infty}f(\alpha t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(u)e^{-\frac{p}{\alpha}u}\frac{du}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-\frac{p}{\alpha}u}du=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \text{ et } \mathcal{L}\left(f(\alpha t)\mathcal{U}(t)\right)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Exemple : $\mathcal{L}(\cos t\,\mathcal{U}(t))=\dfrac{p}{p^2+1}$, donc $\mathcal{L}(\cos\omega t\,\mathcal{U}(t))=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2}{\omega}+1}=\dfrac{p\times\omega^2}{\omega^2(p^2+\omega^2)}=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

<u>Fonctions puissances</u> $t\mapsto t^n$ ($n\in N^*$)

<u>n = 1</u> Considérons la fonction $f_1(t)=t\,U(t)$, on obtient : $\mathcal{L}\left(f_1(t)\mathcal{U}(t)\right)=\int_0^{+\infty}t\times\mathcal{U}(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}dt$

On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t)=t$ et $v'(t)=e^{-pt}$, on obtient : $u'(t)=1$ et $v(t)=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$). $\int_0^{x}t\,e^{-pt}dt=\left[\dfrac{-te^{-pt}}{p}\right]_0^x+\dfrac{1}{p}\int_0^{x}e^{-pt}dt=\left[\dfrac{-te^{-pt}}{p}-\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-pt}}{p}\right]_0^x=e^{-px}\left(\dfrac{-x}{p}-\dfrac{1}{p^2}\right)+\dfrac{1}{p^2}$.

On obtient pour $p>0$: $\mathcal{L}\left(t\mathcal{U}(t)\right))=\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}dt=\dfrac{1}{p^2}$ .Donc $F_1(p)=\mathcal{L}\left(t\mathcal{U}(t)\right)=\dfrac{1}{p^2}$

<u>n = 2</u> : $\mathcal{L}\left(f_2(t)\mathcal{U}(t)\right)=\int_0^{+\infty}t^2\times\mathcal{U}(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}t^2\,e^{-pt}dt$. On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t)=t^2$ et $v'(t)=e^{-pt}$, on obtient : $u'(t)=t$ et $v(t)=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$).

$\int_0^x t^2 e^{-pt}dt = \left[\frac{-t^2e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{2}{p}\int_0^x te^{-pt}dt = \left[\frac{-t^2e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{2}{p}\int_0^x te^{-pt}dt$, on remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-px} = 0$ et

$\mathcal{L}\,(t\,\mathcal{U}\,(t)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t\,e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}$ d'où : $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt = \frac{2}{p^3}$ et $F_2(p) = \mathcal{L}\,(t^2\mathcal{U}\,(t)) = \frac{2}{p^3}$.

Généralisation :Transformée de LAPLACE de $t^n\mathcal{U}\,(t)$ ($n\in\mathbb{N}$).

On sait déjà que pour $p>0$, $F_0(p) = \frac{1}{p}$; $F_1(p) = \frac{1}{p^2}$ et $F_2(p) = \frac{2}{p^3}$.On peut procéder à une intégration par parties, en posant : $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-pt}$, on obtient : $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt}$ d'où (si $p\neq 0$).

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-pt}dt = \left[\frac{-t^ne^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{n}{p}\int_0^x t^{n-1}e^{-pt}dt = \frac{-x^ne^{-px}}{p} + \frac{n}{p}\int_0^x t^{n-1}e^{-pt}dt \text{ ; si } p>0 \lim_{x\to+\infty} x^ne^{-px} = 0$$

Donc l'intégrale $F_n(p) = \mathcal{L}\,(t^n\mathcal{U}\,(t)) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt$ est convergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = F_n(p)$.

supposons désormais $p>0$. $F_n(p) = \frac{n}{p}F_{n-1}(p)$ et $F_{n-1}(p) = \frac{n-2}{p}F_{n-2}(p$; $F_{n-2}(p) = \frac{n-2}{p}F_{n-3}(p$,…………

$F_3(p) = \frac{3}{p}F_2(p)$ et $F_2(p) = \frac{2}{p}F_1(p) = \frac{2}{p^3}$ donc on déduit de proche en proche que

$F_n(p) = \frac{n}{p}\times\frac{(n-1)}{p}\times\frac{(n-2)}{p}\times\frac{3}{p}\times\frac{2}{p}F_1(p)$, donc pour tout $p>0$, $F_n(p) = \frac{n}{p}\times\frac{(n-1)}{p}\times\frac{(n-2)}{p}\times\frac{3}{p}\times\frac{2}{p}\times\frac{1}{p^2}$

On admet que $n(n-1)(n-2).....3\times 2\times 1 = n!$ (factoriel n). Nous admettrons qu'on obtient ainsi de proche en proche les transformées de Laplace des fonctions $t\mapsto t^n$ .On conclut que $F_n(p) = \mathcal{L}\,(t^n\,\mathcal{U}\,(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}$. $n\in N$.

$F_n(p+a) = \mathcal{L}\,(t^ne^{-at}\mathcal{U}\,(t)) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$; $p+a>0$ $n\in\mathbb{N}$ et $n=1$: $F_1(p+a) = \mathcal{L}\,(te^{-at}\mathcal{U}\,(t)) = \frac{1}{(p+a)^2}$.

Fonction cosinus

On considère la fonction causale, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)$, avec $\omega\neq 0$ .la formule d'intégration par partie s'applique aux intégrales impropres , pour peu que les intégrales convergent , on a , pour $p>0$:

$$\mathcal{L}\,\left((\cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)\right) = \int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt = 0 + \frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt$$

$$\frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt = \frac{p}{\omega}\left(\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt\right) = \frac{p}{\omega}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt\right)$$

$$= \frac{p}{\omega^2} - \frac{p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt \quad ; \quad \left(1+\frac{p^2}{\omega^2}\right)\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt = \frac{p}{\omega^2} \Leftrightarrow \frac{\omega^2+p^2}{\omega^2}\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt = \frac{p}{\omega^2}$$

$$\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt = \frac{p}{\omega^2}\times\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad donc \quad \mathcal{L}\,\left((\cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad et\ \mathcal{L}\,\left((\cos(\omega t)e^{-at}\mathcal{U}\,(t)\right) = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Fonctions sinus

Soient $\omega\neq 0$ et $p>0$ .dans le calcul de la transformée de Laplace de $t\mapsto\cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)$, on a obtenu l'égalité $\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt$, on en déduit : $\mathcal{L}\left((\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)\right)=\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{\omega}{p}\times\frac{p}{p^2+\omega^2}$

et $\mathcal{L}\left((\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ puis $\mathcal{L}\left((\sin(\omega t)e^{-at}\mathcal{U}(t)\right)=\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Transformée d'une dérivée d'ordre 1

Théorème : soit f une fonction continue sur $]0;+\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0;+\infty[$, dont la dérivée f' est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.

Si $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right]$, alors $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$. On note $f(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)$

Remarque importante :

La formule $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$ est fausse si f n'est pas continue sur $]0;+\infty[$.

Intégrons par partie : $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=\left[f(t)e^{-pt}\right]_0^x+p\int_0^x f(t)e^{-pt}dt=f(x)e^{-px}-f(0^+)+pF(p)$

Donc, sous réserve que lorsque t tend vers l'infini la fonction $f(t)$ diverge moins vite qu'une exponentielle, ce qui est le cas pour toutes les "bonnes" fonctions physiques, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)e^{-px}=0$ et enfin :

$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}=0$, donc $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=p\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt-f(0^+)=pF(p)-f(0^+)$.

Transformée d'une dérivée d'ordre2

Théorème : Soit une fonction admettons une transformée de Laplace.

Si f' est continue sur $]0;+\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0;+\infty[$, et si f'' est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$, alors $\mathcal{L}\left[f''(t)\mathcal{U}(t)\right]=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$. $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$.

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\mathcal{U}(t)\right]=\left[f'(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}pf'(t)e^{-pt}dt=p\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]-f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\mathcal{U}(t)\right]=p\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]-f'(0^+)=p\left[pF(p)-f(0)\right]-f'(0^+)=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\mathcal{U}(t)\right]=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$$

Dérivée d'une transformée de Laplace

Théorème admis : Si $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right]$, alors $\mathcal{L}\left[-t\,f(t)\mathcal{U}(t)\right]=F'(p)$

Considérons la dérivée par rapport à p de la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$:

$\frac{dF(p)}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\right)$. Comme la variable p n'apparaît que dans l'exponentielle nous avons :

$F'(p)=\frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\right)=-\int_0^{+\infty}tf(t)e^{-pt}dt$, soit encore $\mathcal{L}\left[t\,f(t)\mathcal{U}(t)\right]=\int_0^{+\infty}t\,f(t)e^{-pt}dt=-F'(p)$.

$\mathcal{L}\left[-t\,f(t)\mathcal{U}(t)\right]=\int_0^{+\infty}-t\,f(t)e^{-pt}dt=F'(p)$.

Exemple : on sait que : $\mathcal{L}\left[e^{-at}\mathcal{U}(t)\right]=\frac{1}{p+a}$, soit g la fonction causale sur $\mathbb{R}$ définie par $g(t)=-t\,f(t)\mathcal{U}(t)$

Donc $g(t)=t\,f(t)$ pour tout réel t .donc g a pour transformée de Laplace $G=-F'$.

Or $F(p)=\frac{1}{p+a}$, donc $F'(p)=-\frac{1}{(p+a)^2}$ .Donc $G(p)=\frac{1}{(p+a)^2}$.

Théorème admis : Si $F(p)=\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right]$, et si $\varphi(t)=\int_0^t f(u)\mathcal{U}(t)du$ alors $\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]=\frac{1}{p}F(p),\ avec\ p\neq 0$

Inversement, considérons la transformation de Laplace de la primitive d'une fonction f(t) :

$\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(u)du\right)e^{-pt}dt$. Intégrons par partie : $\mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\int_0^{+\infty} f(u)du\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} f(t)\frac{1}{p}e^{-pt}dt$.

Avec la même réserve sur le comportement de la primitive de la fonction $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini ,
nous obtenons : $\mathcal{L}\left[\int_0^{+\infty} f(u)\mathcal{U}(t)du\right]=\frac{1}{p}F(p)$.

<u>Exemple :</u> soit la fonction causale f définie sur ℝ par $f(t)=e^{-t}\mathcal{U}(t)$, une de ses primitives est la fonction $g(t)=-e^{-t}\mathcal{U}(t)+c$ qui prend la valeur -1 pour $t=0$ .donc la primitive de f qui s'annule pour $t=0$ est $g(t)=(1-e^{-t})\mathcal{U}(t)$ .Par linéarité de la transformation de Laplace , nous avons directement la transformée de Laplace de cette fonction : $G(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p(p+1)}$ et $\frac{F(p)}{p}=\frac{1/(p+1)}{p}=\frac{1}{p(p+1)}$

<u>Théorème de la valeur initiale admis</u>

On suppose que f ' admet une transformée de Laplace . On admet que

$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt\right)=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} f'(t)e^{-pt}\right)dt$. On sait que : $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$.

Alors , comme $\lim_{p\to+\infty} f'(t)e^{-pt}=0$, on a : $\lim_{p\to+\infty} pF(p)=f(0^+)$ si la limite est finie

<u>Théorème de la valeur finale admis</u>

On suppose que f ' admet une transformée de Laplace . On admet que

$\lim_{p\to0}\left(\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt\right)=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{p\to0} f'(t)e^{-pt}\right)dt$. Or , $\lim_{p\to0} f'(t)e^{-pt}=f'(t)$ et donc

$\lim_{p\to0}\left(\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt\right)=\left[f(t)\right]_0^{+\infty}=\lim_{t\to+\infty} f(t)-f(0^+)$ .De $\mathcal{L}\left[f'(t)\mathcal{U}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$,

on déduit alors : $\lim_{p\to0} pF(p)=\lim_{t\to+\infty} f(t)$ si les limites sont finies.

<u>Linéarité</u>

Etudions quelques propriétés utiles de la transformation de Laplace. Tout d'abord remarquons que la transformation de Laplace est une <u>application linéaire.</u> Calculons la transformée de la fonction

$g(t)=\lambda f_1(t)+\mu f_2(t)$: $\mathcal{L}\left[g(t)\mathcal{U}(t)\right]=\mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty}\left[\lambda f_1(t)+\mu f_2(t)\right]dt\right)=\lambda\mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty} f_1(t)e^{-pt}dt\right)+\mu\mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-pt}dt\right)$

Donc: $\mathcal{L}\left[\lambda f_1(t)+\mu f_2(t)\right]=\lambda\mathcal{L}\left[f_1(t)\right]+\mu\mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$.

<u>I. l .e Transformée d'une fonction périodique</u>

Considérons une fonction périodique de période T pour $t>0$ et identiquement nulle pour $t<0$:
La fonction $f(t)$ peut être vue comme une somme de fonctions définies chacune sur une période :

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+.......+f_n(t)+....=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

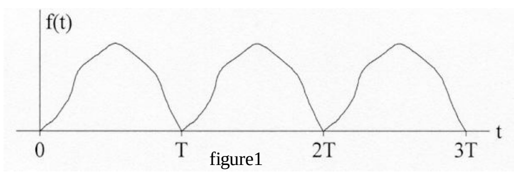


figure1

La fonction $f_1(t)$ se confond avec $f(t)$ sur la première période [0, T] et est nulle à l'extérieur.

La fonction $f_2(t)$ est définie sur la seconde période [T, 2T].

Elle se déduit de la fonction $f_1(t)$ par un décalage d'une période

$f_2(t)=f_1(t-T)=f_1(t-T)\mathcal{U}(t-T)$.

De même : $f_2(t)=f_1(t-2T)=f_1(t-2T)\mathcal{U}(t-2T)$

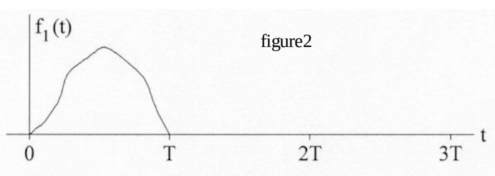
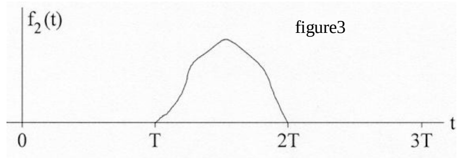


figure2

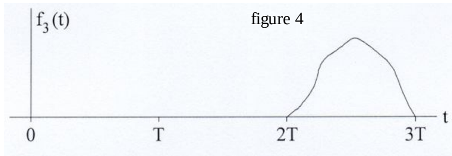
et $f_k(t) = f_k(t-kT) = f_1(t-kT)\mathcal{U}\ (t-kT)$



Nous pouvons donc encore écrire : $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)\mathcal{U}\ (t-kT)$

Calculons la transformation de Laplace de cette expression :

$$\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}\ (t)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT)\mathcal{U}\ (t-kT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\left(f_1(t-kT)\mathcal{U}\ (t-kT)\right)$$



$\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}\ (t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} F_0(p)$ où $F_0(p) = \mathcal{L}\left[f_0(t)\mathcal{U}\ (t)\right]$, est la transformée de Laplace de la fonction définie sur la première période. Nous pouvons encore écrire :

$$\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}\ (t)\right] = F_0(p)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}} \text{ ; car } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

A partir des propriétés que nous venons de passer en revue nous pouvons calculer les transformations de Laplace d'un certain nombre de fonctions. Ces transformations sont rassemblées dans des tables. Nous donnons en appendice les transformées de quelques fonctions de base continues par morceaux.

Autre démonstration : On suppose que f est T-périodique . on a : $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt$.

Or , on pose $u = t - kT$ et en utilisant la périodicité de f , on obtient :

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^T f(u+kT)e^{-p(u+kT)}du = \int_0^T f(u)e^{-pu}e^{-pkT}du = e^{-pkT}\int_0^T f(u)e^{-pu}du$$

<u>Théorème admis</u> : $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pkT}\int_0^T f(u)e^{-pu}du = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$.

<u>Original d'une fonction</u>

<u>Définition</u> : Si $\mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}\ (t)\right] = F(p)$, on dit que f est l'original de F On note $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]$.

On admet que l'original s'il existe , est unique .

Propriété Linéarité : $\mathcal{L}^{-1}\left[F+G\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[F\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[G\right]$ et $\mathcal{L}^{-1}\left[kF\right] = k\mathcal{L}^{-1}\left[F\right]$ pour tout réel k

<u>Rechercher les originaux des fonctions rationnelles F suivantes :</u>

$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5}$ et $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$; on écrira $p^2+4p+5 = (p+2)^2+1$ et on déterminera les réels a, b et c tels que : $F(p) = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$. On écrit $F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5} = \frac{p}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+1)^2+1}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \cos t\,\mathcal{U}\ (t) \text{ ; } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+1}\right) = e^{-2t}\cos t\,\mathcal{U}\ (t) \text{ ; } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t\,\mathcal{U}\ (t)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+2)^2+1}\right) = e^{-2t}\sin t\,\mathcal{U}\ (t)$,d'où $\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right) = e^{-2t}\cos t\,\mathcal{U}\ (t) - 2e^{-2t}\sin t\,\mathcal{U}\ (t) = e^{-2t}(\cos t - 2\sin t)\mathcal{U}\ (t)$.

$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$, d'où $\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right) = t\mathcal{U}\ (t) - \mathcal{U}\ (t) + e^{-t}\mathcal{U}\ (t) = (t-1+e^{-t})\mathcal{U}\ (t)$.

<u>Etude d'un système différentiel</u> Déterminer les solution causales du système différentiel :

$\begin{cases} x'(t) = -\omega y(t) - kx(t) \\ y'(t) = \omega x(t) - ky(t) \end{cases}$ qui vérifient les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$; $\omega \in \mathbb{R}^{*+}$.

on pose $\mathcal{L}\,(x(t))=X(p)$ et $\mathcal{L}\,(y(t))=Y(p)$; on obtient : $\begin{cases}\mathcal{L}\,\big(x'(t)\big)=-\omega\mathcal{L}\,\big(y(t)\big)-k\mathcal{L}\,\big(x(t)\big)\\ \mathcal{L}\,\big(y'(t)\big)=\omega\mathcal{L}\,\big(x(t)\big)-k\mathcal{L}\,\big(y(t)\big)\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\mathcal{L}\,\big(x'(t)\big)=-\omega Y(p)-k\,X(p)\\ \mathcal{L}\,\big(y'(t)\big)=\omega\,X(p)-k\,Y(p)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pX(p)-1=-\omega Y(p)-k\,X(p)\\ Y(p)=\omega\,X(p)-k\,Y(p)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(p+k)X(p)+\omega Y(p)=1\\ (p+k)Y(p)-\omega\,X(p)=0\end{cases}.$$

La résolution de ce système linéaire conduit à $X(p)=\dfrac{p+k}{(p+k)^2+\omega^2}$ et $Y(p)=\dfrac{\omega}{(p+k)^2+\omega^2}$.

D'où la solution causale du système différentiel : $x(t)=\left(e^{-kt}\cos\omega t\right)\mathcal{U}\,(t)$; $y(t)=\left(e^{-kt}\sin\omega t\right)\mathcal{U}\,(t)$.

<u>Equation différentielle d'ordre 1 :</u> $\begin{cases}RC\,s'(t)+s(t)=e(t)\\ s(0^+)=0\end{cases}$. déterminer la fonction de transfert solution avec $e(t)=E\mathcal{U}(t)$. $\mathcal{L}\,(s(t))=S(p)$; $\mathcal{L}\,(e(t))=E(p)$ et $\mathcal{L}\,(s'(t))=pS(p)-s(0^+)$, soit $\mathcal{L}\,(s'(t))=pS(p)$ d'où la relation : $RC\,pS(p)+S(p)=E(p)$, on en déduit : $(RC\,p+1)S(p)=E(p)$, soit $S(p)=\dfrac{E(p)}{(RC\,p+1)}$.

$\mathcal{L}\,\big(e(t)\big)=E\mathcal{L}\,(\mathcal{U}(t)=\dfrac{E}{p}$, d'où $S(p)=\dfrac{E}{p(RC\,p+1)}=\dfrac{E}{RC}\times\dfrac{1}{p(p+1/RC)}$. $S(p=\dfrac{1}{p(p+1/RC)}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{p+1/RC}$,

après calcul ,on obtient $a=RC$ et $b=-RC$ d'où : $S(p)=\dfrac{E}{p}-\dfrac{E}{p+1/RC}$.On obtient alors: $s(t)=E(1-e^{-t/RC})\mathcal{U}(t)$.

3. a. $f(t)=\cos t$: $\mathcal{L}\,\big((\cos(t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{it}+e^{-it})e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i)t}+e^{-(p+i)t}dt$ pour $R_e(p)>0$

$$\mathcal{L}\,\big((\cos(t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right]=\frac{1}{2}\frac{p+i+p-i}{p^2+1}=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}$$

b. $g(t)=\sin t$: $\mathcal{L}\,\big((\sin t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{it}-e^{-it})e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i)t}-e^{-(p+i)t}dt$ pour $R_e(p)>0$

$$\mathcal{L}\,\big((\sin t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right]=\frac{1}{2i}\frac{p+i-p+i}{p^2+1}=\frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}$$

c. $\mathcal{L}\,\big((\cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}\cos(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i\omega)t}+e^{-(p+i\omega)t}dt$

$$\mathcal{L}\,\big((\cos(\omega t)\mathcal{U}\,(t)\big)==\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{1}{2}\frac{p+i\omega+p-i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

d. $\mathcal{L}\,\big((\sin(\omega t)\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}e^{-(p-i\omega)t}-e^{-(p+i\omega)t}dt$

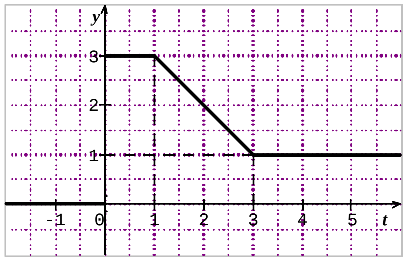
$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right]=\frac{1}{2i}\frac{p+i\omega-p+i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

e. $\mathcal{L}\,\big(e^t\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}e^te^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{(1-p)t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-1)t}dt=\left[\frac{1}{p-1}e^{-(p-1)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p-1}$ avec $\mathrm{Re}(p)>1$

f. $\mathcal{L}\,\big(e^{-t}\mathcal{U}\,(t)\big)=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p+1)t}dt=\left[\frac{1}{p+1}e^{-(p+1)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p+1}$.

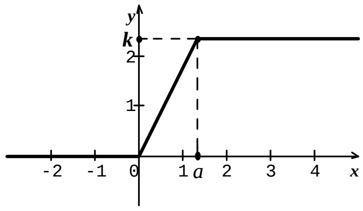
Exemple 1 : Une fonction f étant définie à l'aide de l'échelon unité , il faut savoir la définir «par morceaux » sans utiliser $\mathcal{U}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=3\mathcal{U}\,(t)-(t-1)\mathcal{U}\,(t-1)+(t-3)\mathcal{U}\,(t-3)$

	$\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t-1)$	$\mathcal{U}(t-3)$	$f(t)=$
$t<0$	0	0	0	$f(t)=0$
$t\in[0;1[$	1	0	0	$f(t)=3$
$t\in[2;3[$	1	1	0	$f(t)=3-(t-1)=-t+4$
$t\geq 3$	1	1	1	$f(t)=3-(t-1)+(t-3)=1$



Exemple 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(t)=0 & si\ \ t<0 \\ g(t)=\dfrac{k}{a}t & si\ 0\leq t\leq a \\ g(t)=k & si\ t>a \end{cases}$



la fonction g change de forme au point t= 0 et t = a .on écrit $g(t)=g_1(t)\mathcal{U}(t)+g_2(t)\mathcal{U}(t)$

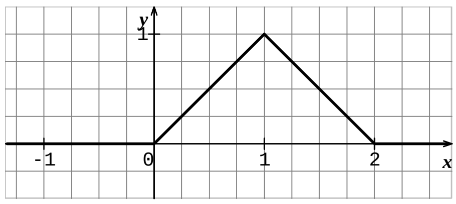
Si $t<0$, on a bien $g(t)=g_1(t)\times 0+g_2(t)\times 0=0$ .Si $0\leq t<a$, on a : $g(t)=g_1(t)\times 1+g_2(t)\times 0=g_1(t)=\dfrac{k}{a}t$

Si $t\geq a$, on a : $g(t)=g_1(t)\times 1+g_2(t)\times 1=g_1(t)+g_2(t)$, donc $g_1(t)+g_2(t)=\dfrac{k}{a}t+g_2(t)=k$

D'où $g_2(t)=k-\dfrac{k}{a}t$, on en conclut $g(t)=\dfrac{k}{a}t\mathcal{U}(t)+\left(k-\dfrac{k}{a}t\right)\mathcal{U}(t)$.

Exemple 3 : Une fonction étant définie à l'aide de l'échelon unité , il faut savoir la définir «par morceaux » sans utiliser $\mathcal{U}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=t\mathcal{U}(t)-2(t-1)\mathcal{U}(t-1)+(t-2)\mathcal{U}(t-2)$

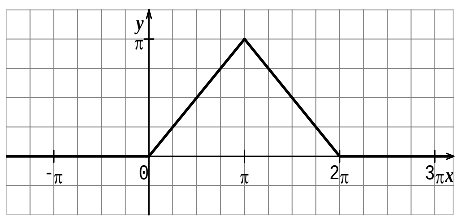
	$\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t-1)$	$\mathcal{U}(t-3)$	$f(t)=$
$t<0$	0	0	0	$f(t)=0$
$t\in[0;1[$	1	0	0	$f(t)=t$
$t\in[1;2[$	1	1	0	$f(t)=t-2(t-1)=-t+2$
$t\geq 2$	1	1	1	$f(t)=t-2(t-1)+(t-2)=0$



La représentation graphique de f est Inversement , l'échelon unité permet de définir « en une ligne » une fonction « définie par morceaux ».

Exemple4 : Une fonction étant définie à l'aide de l'échelon unité , il faut savoir la définir «par morceaux » sans utiliser $\mathcal{U}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=t\mathcal{U}(t)-2(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)+(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$

	$\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t-\pi)$	$\mathcal{U}(t-2\pi)$	$f(t)=$
$t<0$	0	0	0	$f(t)=0$
$t\in[0;\pi[$	1	0	0	$f(t)=t$
$t\in[\pi;2\pi[$	1	$(t-\pi)$	0	$f(t)=t-2(t-\pi)=-t+2\pi$
$t\geq 2\pi$	1	$(t-\pi)$	$(t-2\pi)$	$f(t)=t-2(t-\pi)+(t-2\pi)=0$



La représentation graphique de f est Inversement , l'échelon unité permet de définir « en une ligne » une fonction « définie par morceaux ».

$\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\mathcal{L}\left(tU(t)-2(t-\pi)U(t-\pi)+(t-2\pi)U(t-2\pi)\right)$
$=\mathcal{L}(tU(t))-2\mathcal{L}((t-1)U(t-\pi))+\mathcal{L}((t-2\pi)U(t-2\pi))$. La transformée de Laplace de $tU(t)$ est

$\mathcal{L}(tU(t))=\dfrac{1}{p^2}$, d'où $\mathcal{L}((t-\pi)U(t-\pi))=\dfrac{e^{-p\pi}}{p^2}$ et $\mathcal{L}((t-2\pi)U(t-2\pi))=\dfrac{e^{-2p\pi}}{p^2}$, on obtient , par combinaison linéaire : $\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\dfrac{1}{p^2}\left(1-2e^{-p\pi}+e^{-2p\pi}\right)=\dfrac{1}{p^2}\left(1-e^{-p\pi}\right)^2$.

1. Origine de $\dfrac{A}{p-a}$: $\mathcal{L}(e^{at})=\dfrac{1}{p-a}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{p-a})=e^{at}$, donc $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{A}{p-a})=Ae^{at}$.

2. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{a}{\left(p^2+a^2\right)}\right)=\sin at$, donc $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)}\right)=\dfrac{1}{a}\sin at\Rightarrow \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{a}\sin at\right)=\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)}$

3. $F(p)=\dfrac{3p+1}{(p^2+1)(p-1)}$; $F(p)=\dfrac{3p+1}{(p^2+1)(p-1)}=\dfrac{ap+b}{p^2+1}+\dfrac{c}{p-1}=\dfrac{-2p+1}{p^2+1}+\dfrac{2}{p-1}$.

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p+1}{(p^2+1)(p-1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2p+1}{p^2+1}+\frac{2}{p-1}\right)$$

Donc

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2p+1}{p^2+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p-1}\right)=-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

$f(t)=-2\cos t+\sin t+2e^t$

4. $y''-y'-2y=\sin t$ $\quad y(0)=y'(0)=0$

$\mathcal{L}\left(y''-y'-2y\right)=\mathcal{L}\left(\sin t\right)$; $\mathcal{L}\left(y\right)=Y(p)$; $\mathcal{L}\left(y'\right)=pY(p)-y(0)$ et $\mathcal{L}\left(y''\right)=p^2Y(p)-p(y(0)-y'(0)$

$p^2Y(p)-pY(p)-2Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ on a : $(p^2-p-2)Y(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ donc $Y(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)\left((p^2-p-2)\right)}$

$$Y(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left((p-2)(p+1)\right)}=\frac{\frac{1}{10}p-\frac{3}{10}}{\left(p^2+1\right)}-\frac{1}{6\left(p+1\right)}+\frac{1}{15}\frac{1}{\left(p-2\right)}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(Y(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left((p-2)(p+1)\right)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{10}p-\frac{3}{10}}{\left(p^2+1\right)}-\frac{1}{6\left(p+1\right)}+\frac{1}{15}\frac{1}{\left(p-2\right)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(Y(p)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{10}p-\frac{3}{10}}{\left(p^2+1\right)}-\frac{1}{6\left(p+1\right)}+\frac{1}{15}\frac{1}{\left(p-2\right)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{10}p-\frac{3}{10}}{\left(p^2+1\right)}\right)-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(p+1\right)}\right)+\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(p-2\right)}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{10}\cos t-\frac{3}{10}\sin t-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}$$

5. $\begin{cases}x'=2x-3y\\ y'=y-2x\end{cases}$ $\quad x(0)=8$ et $y(0)=3$; $\mathcal{L}(x)=X(p)$, $\mathcal{L}(y)=Y(p)$. $\mathcal{L}(x')=pX(p)-8$ et $\mathcal{L}(y')=pY(p)-3$.

$$\begin{cases}(p-2)X(p)+3Y(p)=8\\(p-1)Y(p)+2X(p)=3\end{cases}\quad X(p)=\frac{5}{p+1}+\frac{3}{p-4}\quad \text{et}\quad Y(p)=\frac{5}{p+1}-\frac{2}{p-4}$$

$x(t)=5e^{-t}+3e^{4t}$ et $y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}$

Quelques exemples simples pour commencer : trouver la transformée des fonctions suivantes:

1. $f(t)=5\cos(3t+\pi/4)$ or $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où

$f(t)=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\cos 3t-\sin 3t\right)$ soit $F(p)=\frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\frac{p-3}{p^2+9}\right)$

2. Connaissant l'image trouver l'original $F(p)=\frac{1}{(p+3)(p+4)}=\frac{a}{p+3}+\frac{b}{p+4}$

on multiplie par $p+3$ les deux membres et fait $p=-3$ d'où $a=\frac{1}{-3+4}=1$ de même en multipliant par $p+4$ et faisant $p=-4$ on obtient $b=\frac{1}{-4+3}=-1$ donc $F(p)=\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p+4}$ d'où $f(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$.

3. $\frac{p+2}{p(p+1)(p^2+9)}=\frac{1}{(p+1)(p^2+9)}+\frac{2}{p(p+1)(p^2+9)}$ ce qu'on va écrire $F(p)=F_1(p)+F_2(p)$.

on identifie donc $F_2(p)=\frac{2F_1(p)}{p}$.or $F'(p)=pF(p)-f(0)$ (formulaire)soit $F(p)=\frac{f(0)}{p}+\frac{F'(p)}{p}$

c'est à dire que $f_2(t)=2\left[\int f_1(t)+f(0)\right]$ d'où la <u>première méthode</u> possible. On va d'abord décomposer F_1 , en déduire $f_1(t)$ puis on va intégrer $2f_1(t)$, identifier $f(0)$ pour finalement obtenir $f(t)$.

Mais on peut aussi choisir <u>une seconde méthode</u> que nous allons examiner à titre pédagogique:

en exprimant que $F_1(p)=p\frac{F_2(p)}{2}$ en se rappelant toujours que $F'(p)=pF(p)-f(0)$ avec toujours $f(0)=\lim pF(p)$ quand p tend vers l'infini. Ici on voit que $f(0)=0$. On en conclut donc que l'on pourra calculer $f_1(t)$ simplement en dérivant $f_2(t)$ et multipliant par 1/2 le résultat. On va donc calculer $f_2(t)$

$F_2(p)=\frac{2}{p(p+1)(p^2+9)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{(p+1)}+\frac{cp+d}{(p^2+9)}$ = il vient facilement $a=\frac{2}{9}$ puis $b=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$

on fait ensuite $p=1$ dans les deux membres, soit $\frac{1}{10}=\frac{2}{9}-\frac{1}{10}+\frac{c+d}{10}$. on fait alors $p=2$:

$\frac{1}{39}=\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{2c+d}{13}$. et l'on résout ce système de 2 équations : Il vient $c=-\frac{1}{45}$ et $d=-\frac{1}{15}$ d'où

$F_2(p)=\frac{2}{9p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{1/45p}{p^2+9}-\frac{1/15}{p^2+9}$ qui conduit à $f_2(t)=\frac{2}{9}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{1}{45}\cos(3t)-\frac{1}{15}\sin(3t)$

$f_1(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin(3t)-\frac{1}{5}\cos(3t)\right)$ soit $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$, soit $f(t)=\frac{2}{9}-\frac{1}{10}e^{-t}-\frac{11}{90}\cos(3t)-\frac{1}{30}\sin(3t)$

On pouvait bien évidemment mettre en œuvre <u>la troisième solution</u> en écrivant directement

$F(p)=\frac{p+2}{p(p+1)(p^2+9)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{(p+1)}+\frac{cp+d}{(p^2+9)}$ et en exploitant la méthode vue ci-dessus; on obtient directement le $F(p)=\frac{p+2}{p(p+1)(p^2+9)}=\frac{2}{9p}-\frac{1}{10(p+1)}-\frac{(11/90)p}{(p^2+9)}-\frac{1/30}{(p^2+9)}$.résultat pour F(p) soit

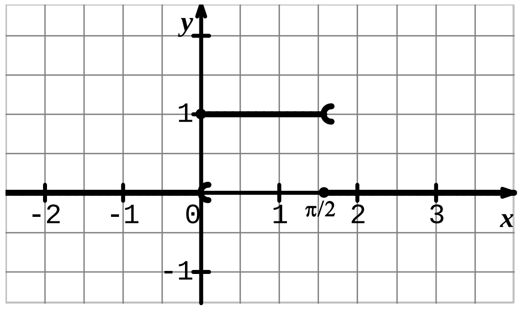
$F(p)=\dfrac{2}{9p}-\dfrac{1}{10(p+1)}-\dfrac{(11/90)p}{(p^2+9)}-\dfrac{1/30}{(p^2+9)}$ et son original identique au résultat ci-dessus.

On notera que si les trois méthodes conduisent au même résultat final, c'est évidemment la troisième qui se révèle ici la plus rapide. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Exercice 2

Trouver les solutions causales de l'équation différentielle

$$\begin{cases} s''(t)+s(t)=f(t) \\ s(0^+)=s'(0^+)=0 \end{cases}.$$



Si $s(t)$ vérifie l'équation différentielle , alors la transformée de Laplace de $s(t)\mathcal{U}(t)$ (avec $\mathcal{U}(t)$ fonction causale unité)

$$\mathcal{L}(s''(t)\mathcal{U}(t))+\mathcal{L}(s(t)\mathcal{U}(t))=\mathcal{L}(f(t)\mathcal{U}(t))$$

Calcul de $S(p)$: Si $S(p)$ désigne la transformée de Laplace de $s(t)$, on a :

$\mathcal{L}(s''(t)\mathcal{U}(t))=p^2S(p)-ps(0)-s'(0)=p^2S(p)$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}(s(t)\mathcal{U}(t))=S(p)$.

$$\mathcal{L}(f(t)\mathcal{U}(t))=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\pi/2} f(t)e^{-pt}dt+\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\pi/2} f(t)e^{-pt}dt+0=\frac{1}{p}\Big[-e^{-pt}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{p}\Big[1-e^{-p\pi/2}\Big]$$

L'équation différentielle se ramène à : $(1+p^2)S(p)=\dfrac{1}{p}\Big[1-e^{-p\pi/2}\Big]$, d'où $S(p)=\dfrac{1}{p(1+p^2)}\Big[1-e^{-p\pi/2}\Big]$

$$S(p)=\frac{1}{p(1+p^2)}-\frac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{(1+p^2)}-\frac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}$$

Calcul de $s(t)$, on passe aux transformées inverses :

$$s(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(1+p^2)}-\frac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{(1+p^2)}-\frac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(1+p^2)}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}\right)$$

d'après le formulaire on a : $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))=\dfrac{1}{p}$; $\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ $\mathcal{L}(\cos(\omega t)\mathcal{U}(t))=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, d'où

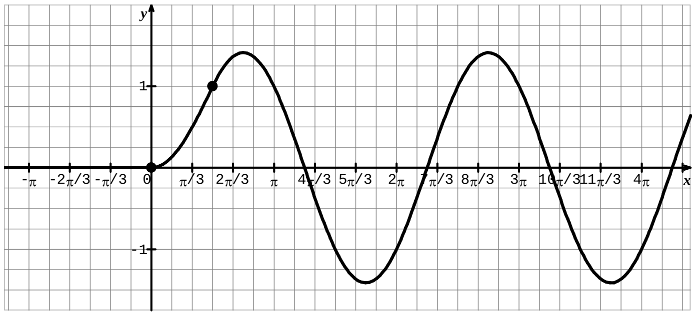
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p(1+p^2)}\right)=(1-\cos t)\mathcal{U}(t)$.

De plus $\mathcal{L}(f(t-\tau)\mathcal{U}(t))=e^{-\tau p}F(p)$, d'où $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p(1+p^2)}\right)=(1-\cos(t-\pi/2)\mathcal{U}(t-\pi/2)$

Et enfin $s(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p(1+p^2)}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-p\pi/2}}{p(1+p^2)}\right)=\Big[1-\cos t\Big]\mathcal{U}(t)-\Big[1-\cos(t-\pi/2\Big]\mathcal{U}(t-\pi/2)$

tracé de $s(t)$: $\begin{cases} s(t)=0 & si \quad t<0 \\ s(t)=1-\cos t & si \quad 0\le t<\pi/2 \\ s(t)=1-\cos t-(1-\cos(t-\pi/2)) & si \quad t\ge\pi/2 \end{cases}$ $\begin{cases} s(t)=0 & si \quad t<0 \\ s(t)=1-\cos t & si \quad 0\le t<\pi/2 \\ s(t)=1-\cos t-1+\cos(t-\pi/2) & si \quad t\ge\pi/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(t)=0 \quad si \quad t<0 \\ s(t)=1-\cos t \quad si \quad 0\le t<\pi/2 \\ s(t)=\sin t-\cos t \quad si \quad t\ge \pi/2 \end{cases}$$



Exercice 3

On considère le signale $f(t)$ défini par : $\begin{cases} f(t)=0 \quad si \quad t<0 \\ f(t)=t \quad si \quad 0\le t<10 \\ f(t)=0 \quad si \quad t\ge 10 \end{cases}$.

1. Représenter le signal $f(t)$ dans un repère orthonormal .

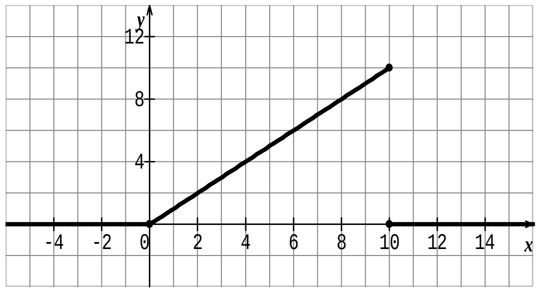
2. On note $F(p)$ la transformée de Laplace du signal causal $f(t)$ .montrer que : $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1+10p}{p^2}e^{-10p}$

3. le signal $f(t)$ est envoyé en entrée dans un circuit intégré .Il subit une transformation .

Le signal de sortie $g(t)$ est tel que sa transformée de Laplace vérifie : $G(p)=\dfrac{1}{1+10p}F(p)$. Calculer $G(p)$.

4. Décomposer $\dfrac{1}{p^2(1+10p)}$ en éléments simples .En déduire la valeur de $g(t)$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$; $[0;10[$ et sur $[10;+\infty[$.

1. voir figure ci-contre



2 .Le signal $f(t)$ étant causal, la transformée de Laplace de $f(t)$ a un sens et

$$\mathcal{L}\,(f(t)\boldsymbol{U}(t))=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{10} f(t)e^{-pt}dt+\int_{10}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{10} te^{-pt}dt+0=\frac{1}{p}\Big[-te^{-pt}\Big]_0^{10}+\frac{1}{p}\int_0^{10} e^{-pt}dt+0$$

$$\mathcal{L}\,(f(t)\boldsymbol{U}(t))=\frac{1}{p}\Big[-10e^{-10p}\Big]-\frac{1}{p^2}\Big[e^{-pt}\Big]_0^{10}=\frac{1}{p^2}-\frac{10e^{-10p}}{p}-\frac{e^{-10p}}{p^2}$$

Ainsi $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{10e^{-10p}}{p}-\dfrac{e^{-10p}}{p^2}=\dfrac{1}{p^2}-\left(\dfrac{10p+1}{p^2}\right)e^{-10p}$

3. $G(p)=\dfrac{1}{p^2(1+10p)}-\left(\dfrac{10p+1}{p^2(1+10p)}\right)e^{-10p}=\dfrac{1}{p^2(1+10p)}-\dfrac{1}{p^2}e^{-10p}$ et $G(p)=\dfrac{1}{p^2(1+10p)}-\dfrac{1}{p^2}e^{-10p}$

4. on écrit : $\dfrac{1}{p^2(1+10p)}=\dfrac{a}{p^2}+\dfrac{b}{p}+\dfrac{c}{(1+10p)}$. Pour $p=0$ $\dfrac{1}{(1+10p)}=a+bp+\dfrac{cp^2}{(1+10p)}$, d'où $a=1$; pour $p=-1/10$: $\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{a(1+10p)}{p^2}+\dfrac{b(1+10p)}{p}+c$, d'où $c=1/(1/10)^2=100$

Pour $p=1$, on obtient : $\dfrac{1}{11}=a+b+\dfrac{c}{11}$, d'où $b=\dfrac{1}{11}-a-\dfrac{c}{11}=\dfrac{1}{11}-1-\dfrac{100}{11}=\dfrac{1-11-100}{11}=-\dfrac{110}{11}=-10$

$\dfrac{1}{p^2(1+10p)}=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{10}{p}+\dfrac{100}{(1+10p)}$. $G(p)=\dfrac{1}{p^2(1+10p)}-\dfrac{1}{p^2}e^{-10p}=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{10}{p}+\dfrac{100}{(1+10p)}-\dfrac{1}{p^2}e^{-10p}$

En notant $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}$ la transformée de Laplace réciproque , on obtient : $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{10}{p}+100\frac{1/10}{(p+1/10)}-\frac{1}{p^2}e^{-10p}\right)$

$$. g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p}\right)+100\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1/10)}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}e^{-10p}\right)$$

On a les propriétés suivantes (avec $\mathcal{U}(t)$ fonction causale unité). $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))=\frac{1}{p}$; $\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$

$\mathcal{L}(t^n\mathcal{U}(t))=\frac{n!}{p^{n+1}}$, d'où $t\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)$ et $\mathcal{L}(e^{-at}\mathcal{U}(t))=\frac{1}{p+a}$, d'où $e^{-(1/10)t}\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1/10}\right)$

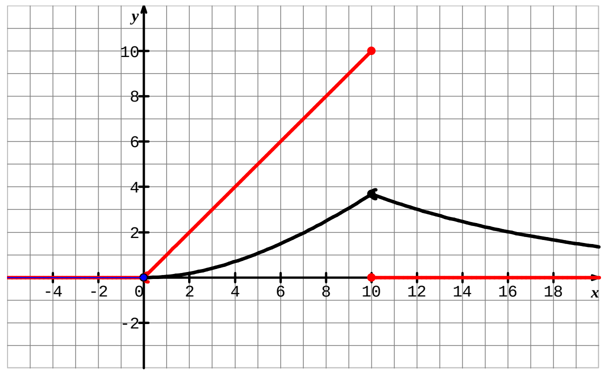
$\mathcal{L}(f(t-\tau)\mathcal{U}(t))=e^{-\tau p}F(p)$ avec $F(p)$ transformée de Laplace de $f(t)$ .en choisissant $\tau=10$ et

$t\mathcal{U}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)$.On obtient :

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-10p}}{p^2}\right)=(t-10)\mathcal{U}(t-10)$. Ainsi

$g(t)=t\mathcal{U}(t)-10\mathcal{U}(t)+100e^{-(1/10)t}\mathcal{U}(t)-(t-10)\mathcal{U}(t-10)$

$$\begin{cases} g(t)=0 \quad si \quad t<0 \\ g(t)=t-10+10e^{-t/10} \quad si \quad 0\le t<10 \\ g(t)=t-10+10e^{-t/10}-t+10=10e^{-t/10} \quad si \quad t\ge 10 \end{cases}$$



<u>Transformation de Laplace :Formulaire</u>

Original	Transformée	Remarques
$\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)=\begin{cases}0 & \forall t<0\\ 1 & \forall t>0\end{cases}$	$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)\right]=\frac{1}{p}$	$p>0$
$e^{-at}f(t)\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)\right]=F(p+a)$	a réel
$t\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}(t\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2}$	$p>0$
$t^2\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}(t^2\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{2}{p^3}$	$p>0$
$t^n\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}(t^n\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n\in\mathbb{N}$ et $p>0$
$e^{-at}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$; $e^{t}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}(e^{-at}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{1}{(p+a)}$; $\mathcal{L}(e^{t}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{1}{(p-1)}$	$\mathrm{Re}(p+a)>0$; $\mathrm{Re}(p)>1$
$t^n\,e^{-at}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}(t^ne^{-at}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$; $p+a>0$	$n\in\mathbb{N}$ et $n=1$: $\mathcal{L}(te^{-at}\boldsymbol{\mathcal{U}}(t))=\frac{1}{(p+a)^2}$
$f'(t)\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)$	$\mathcal{L}\left[f'(t)\boldsymbol{\mathcal{U}}(t)\right]=pF(p)-f(0^+)$	Les conditions initiales sont indispensables

$f''(t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\left[f''(t)\boldsymbol{U}(t)\right] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$	Idem
$-t\ f(t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\left[-t\ f(t)\boldsymbol{U}(t)\right] = F'(p)$	
$f(\alpha t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ (f(\alpha t)\boldsymbol{U}(t)) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$	$\alpha \in \mathbb{R}^*$; $f(\alpha t)$ est appelé « dilatée » de f
$\sin(\omega t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\sin(\omega t)\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	ω réel
$\sin(\omega t)e^{-at}\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\sin(\omega t)e^{-at}\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$p+a>0$
$\sin(t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\sin(t)\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{1}{p^2+1}$	$\mathrm{Re}(p)>0$
$\cos(\omega t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\cos(\omega t)\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$	ω réel
$\cos(t)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\cos(t)\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{p}{p^2+1}$	($\mathrm{Re}(p)>0$
$(\cos(\omega t)e^{-at}\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\ \left((\cos(\omega t)e^{-at}\boldsymbol{U}(t)\right) = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$p+a>0$
$\left(\int_0^{+\infty} f(u)du\right)\boldsymbol{U}(t)$	$\mathcal{L}\left[\left(\int_0^{+\infty} f(u)du\right)\boldsymbol{U}(t)\right] = \frac{1}{p}F(p)$	$p>0$
$f(t-a)\boldsymbol{U}(t-a)$	$\mathcal{L}\left[f(t-a)\boldsymbol{U}(t-a)\right] = e^{-pa}F(p)$	e^{-pa} s'appelle le facteur de retard ; $a>0$
$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ où f est T–périodique	$\mathcal{L}\left[f(t)\boldsymbol{U}(t)\right] = F_1(p)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$	$F_1(p)$ est la transformée de la restriction de f à sa première période
$g(t) = \lambda\ f_1(t) + \mu\ f_2(t)$	$\mathcal{L}\left[\lambda\ f_1(t) + \mu\ f_2(t)\right] = \lambda\ \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \mu\ \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$	Linéarité de $\mathcal{L}$