CHAPITRE III : FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE ET DEVELOPPEMENTS LIMITES

A. FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE :

I. Généralités :

1. Fonction paire, impaire et périodique, Axe de symétrie et centre de symétrie :

a. Fonction paire :

Une fonction est dite paire sur un intervalle **I** de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$
- $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Si f est paire alors la courbe (C_f) de f admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Exemple : La fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}$est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire car $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

b. Fonction impaire :

Une fonction est dite impaire sur un intervalle de **I** de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, -x \in \boldsymbol{I}$
- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$.

Si f est impaire alors la courbe (C_f) de f admet le point O comme centre de symétrie.

Exemple :

la fonction $f(x) = x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

c. Fonction périodique :

Une fonction numérique f définie sur D est périodique, de période T $(T > 0)$, si pour tout x,

$$x \in D\,, \qquad (x + T) \in D \;\; et \;\; f(x + T) = f(x).$$

Si T est une période de f alors $kT\ (\forall k \in \mathbb{N}) est\ aussi\ une\ période\ de\ f$.

Exemple :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π et plus généralement, les fonctions

$t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$

d. Axe de symétrie :

Soit ***a*** un nombre réel. La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) de f si et seulement si :

$\forall x \in \mathbb{R}, on\ a: \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} a - x \in D_f \\ a + x \in D_f \\ f(a-x) = f(a+x) \end{cases}$

Exemple :

La fonction $f(x) = \frac{3}{x^2-2x+2}$ est définie sur ℝ. La représentation graphique admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \in \mathbb{R}\ et\ 1 + x \in \mathbb{R}$

$$f(1-x) = f(1+x) = \frac{3}{x^2+1}$$

e. Centre de symétrie

Soit a et b deux nombres réels. Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) de f si et seulement si

$\forall x \in \mathbb{R}, on\ a: \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$ ou $\begin{cases} a - x \in D_f \\ a + x \in D_f \\ f(a-x) + f(a+x) = 2b \end{cases}$

Exemple

Démontrer que le point $\Omega(-2\,;3)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

2. Limites :

a. Limite en un point :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, $l \in \mathbb{R}$.
$\lim_{x\to a} f(x) = l$ signifie que $\lim_{x\to a}(f(x) - l) = 0$ où $f(x) = l + \varphi(x) avec \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

b. Limite en l'infinie :

- **Fonction polynôme :**

Théorème : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to-\infty}(3x^4 + x^2 - 5x + 2) = \lim_{x\to-\infty}(3x^4) = +\infty$

- **Fonction rationnelle :**

Théorème : la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du rapport de ses monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x^2-x}{5x^2-x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{5} = +\infty$

c. Opérations sur les limites :

Si les fonctions f et g définies sur un intervalle I admettent les limites l et l' en **a** avec :
a $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l, l' \in \mathbb{R}$ $alors$:

- $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = l + l'$: $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big) = l \times l'$; $\lim\limits_{x\to a}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda l$
- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}(l' \neq 0)$; $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}(l \geq 0)$; $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |l|$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l' alors \lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = l'$

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalles $I. l\ et\ l'$ deux réels :

- Si $f(x) \geq g(x)\ et \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\ alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)\ et \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\ alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Si $|f(x) - l| \leq g(x)\ \ et \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0\ alors \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \ et \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l\ \ alors \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$

Exemple : Soit $f(x) = -4x + 3 - \cos x$. Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$

NB : les quatre théorèmes ci-dessus sont aussi valables quand l'étude des limites se fait en a$\in$ $\mathbb{R}$ ou en $-\infty$.

d. Fonctions équivalentes

Les fonctions f et g sont dites équivalentes au voisinage de a s'il existe un intervalle I contenant a et une fonction ε définie sur I tels que pour tout x $\in$ I :

$f(x) = g(x)[1 + \varepsilon(x)] avec \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. On écrit $f \backsim g$.

Remarques :

- Si $g(x) \neq 0$ sur I alors $f \backsim g$ signifie que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- Cette notion peut s'étendre au voisinage de $+\infty\ ou\ de - \infty$.
- En $+\infty\ ou - \infty$: $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 \backsim a_nX^n (n \in \mathbb{N})$.

Exemple : au voisinage de 0.

Dans ces exemples, les fonctions f considérées sont infiniment petits au voisinage de 0, c'est-à-dire

que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

- $\sin(x) \backsim x$
- $\ln(1+x) \backsim x$
- $\cos(x) \backsim 1 - \frac{x^2}{2}$
- $e^x - 1 \backsim x$
- $(1+x)^a \backsim 1 + ax$
- $\sqrt{1+x} \backsim 1 + \frac{x}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \backsim 1 - \frac{x}{2}$
- $\tan(x) \backsim x$

Propriété :

Si f, g, f_1, g_1 sont des fonctions définies au voisinage de a telles que $f \backsim f_1$ et $g \backsim g_1$ alors

$f \times g \backsim f_1 \times g_1$ et $\frac{f}{g} \backsim \frac{f_1}{g_1}$, $g \neq 0$ $et g_1 \neq 0$

e. **Limites et branches infinies**

Soit f une fonction de représentation graphique (**Cf**)

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = a, a \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à (**Cf**) si et seulement si nous avons l'un des cas suivants :

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ est asymptote horizontale à (**Cf**) **en** $+\infty$(respectivement en $-\infty$)

si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Asymptote oblique :

La droite d'équation $y = ax + b$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ est une asymptote oblique à (**Cf**) en $+\infty$

(resp. en $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou bien si

$f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique. Le signe de $\varphi(x)$ permet de situer la courbe (**Cf**).

Branches paraboliques :

Soit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- Si $a = 0$ alors (**Cf**) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.
- Si $a = \infty$ alors (**Cf**) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
- Si $a \in \mathbb{R}^*$, on effectue le calcul $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$.
- ➢ Si $b = \infty$ alors (**Cf**) admet une branche parabolique de direction la droite (**D**) d'équation $y = ax$.
- ➢ Si $b \in \mathbb{R}$ alors la courbe (**Cf**) admet une asymptote oblique d'équation $(\Delta): y = ax + b$.

3. Continuité

a. Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant **a.**

f est continue en **a** si et seulement si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

b. Continuité sur un intervalle

Définition

Une fonction f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout élément de I

Exemples :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;\ +\infty[$
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

- Les fonctions $\boldsymbol{f^n}$, $\boldsymbol{f+g}$, $\boldsymbol{f \times g}$, $\boldsymbol{\lambda . f}$sont continues sur I.
- Si $g(x) \neq 0$ sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si $g(x) \geq 0\ alors\ \sqrt{g}$ est continue sur I.

Propriété 2

- L'image d'un intervalle I par une fonction f continue est un intervalle noté f(I).
- Si I est fermé $(\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}])\ alors$ f(I) est un intervalle fermé ou un singleton.
- Si I n'est pas fermé, f(I) peut être un intervalle fermé, ou un intervalle ouvert ou encore un intervalle ni fermé ni ouvert.

c. Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et si $k (k \in \mathbb{R})$ est compris entre f(a) et f(b) alors il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

Corollaire : si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ telle que f(a) et f(b) sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]a\ ; b[$.

NB : Déterminer une valeur approchée ou un encadrement de α se fera par la méthode de balayage ou de dichotomie.

d. Prolongement par continuité

Soit f est une fonction continue sur I de $\mathbb{R}$, $a \notin I$, $b \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ alors f admet un prolongement par continuité au point a et ce prolongement est la fonction g définie sur $I \cup \{a\}$ par: $\begin{cases} g(x) = \quad f(x) \quad si\ x \in I \\ \quad g(a) \quad = b \end{cases}$

<u>Exemple :</u> Soit la fonction f définie sur $D_f =]-\infty; -\mathbf{1}[\cup]-\mathbf{1}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$-1 \notin \boldsymbol{D_f}$ donc f n'est pas continue en -1 mais la fonction f est continue sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$ car elle est une fonction rationnelle.

par ailleurs $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2.$

Donc f est prolongeable par continuité en -1et son prolongement par continuité en -1 est la fonction g continue sur $\mathbb{R}$ et définie par: $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \quad si\ x \neq -1 \\ \quad g(-1) = -2 \end{cases}$

4. <u>Dérivabilité</u>

a. <u>Dérivabilité en un point</u>

<u>Définition</u>

Soit f une fonction et $\boldsymbol{D_f}$ son ensemble de définition contenant a
f est dérivable en a lorsque $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un réel.
Ce réel est appelé nombre dérivé de f en a et noté f'(a).

<u>Théorème :</u> Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

<u>Remarque :</u> La réciproque de ce théorème est fausse.

b. <u>Interprétation graphique du nombre dérivé</u>

Le nombre dérivé de f en a, $\boldsymbol{f'(a)}$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\boldsymbol{a}$. Cette tangente a pour équation $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

c. <u>Dérivées de fonctions</u>

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.
- La somme et le produit de deux fonctions dérivables sur un même intervalle I est dérivable sur I.
- Le quotient de deux fonctions dérivables f et g noté $\frac{f}{g}$ sur un intervalle I tel que :

$\forall x \in I, g(x) \neq 0$, est dérivable sur I.

- **Fonctions dérivées usuelles**

$f(x)$	$a(a \in \mathbb{R})$	$ax(a \in \mathbb{R})$	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	a	nx^{n-1}	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

- **Opérations sur les fonctions dérivées**

$f(x)$	$U+V$	$\alpha V, \alpha \in \mathbb{R}$	$U.V$	$\frac{1}{V}$	$\frac{U}{V}$	$\sqrt{U}$	$U^n, n \in \mathbb{N}$	$U°V$
$f'(x)$	$U' + V'$	$\alpha V'$	$U'.V + U.V'$	$\frac{-V'}{V^2}$	$\frac{U'.V - U.V'}{V^2}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$nU'U^{n-1}$	$V'.U'°V$

d. **Dérivée et sens de variation**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ *de* $\mathbb{R}$.

- Si $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, f'(x) > 0$ alors *f* est strictement croissante sur **I**.
- Si $\forall \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{I}, f'(x) < 0$ alors *f* est strictement décroissante sur **I.**
- Si $\forall \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{I}, f'(x) = 0$ alors *f* est constante sur **I.**

Conséquence : Extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et $\alpha \in]a;b[$

Si **f '** s'annule sur $]a;b[$ en α en changeant de signe alors on obtient l'un des tableaux :

x	a	α	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

x	a	α	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

f(α) est le maximum de *f* sur $]a;b[$

f(α) est le minimum de *f* sur $]a;b[$.

e. **Fonction continue strictement monotone**

Théorème :

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I :

- f réalise une bijection de I dans f(I)

- f admet une application réciproque notée f^{-1}définie sur $f(I)$ à valeurs dans I, continue et strictement monotone de même sens de variation que f
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), les courbes représentatives de f et de f^{-1}sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- L'équation $x \in \boldsymbol{I},\ f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ admet une solution unique dans l'intervalle I

α un élément de $f(I)$ et β un réel tel que $f(\beta) = \alpha$. Si $f'(\beta)$ est non nulle alors f^{-1} est dérivable en α et $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{(f'of^{-1})(\alpha)} = \frac{1}{f'(\beta)}$.

f. <u>Inégalité des accroissements finis</u>

Soit la fonction f définie sur $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a;b[$. s'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in [a;b],\ m \leq f'(x) \leq M$ alors on a : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$

<u>Exemple :</u>

Soit la fonction f définie sur $[60;61]$ par $f(x) = \sqrt{x}$

1. Donner un encadrement de $f'(x)\ sur\ [60;61]$
2. En déduire un encadrement du réel $A = \sqrt{61} - \sqrt{60}$

g. <u>Concavité et convexité :</u>

<u>Définition :</u>

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe si $f'\ est\ croissante\ sur\ I.$
- f est concave si $f'\ est\ décroissante\ sur\ I.$

➢ **<u>Propriété1 :</u>**

Soit une fonction f définie et deux fois dérivables sur un intervalle I.

- f est convexe si $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$;
- f est concave si $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$;

➢ **<u>Propriété2 :</u>**

Si **f''** s'annule en $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$ et change de signe de part et d'autre de $\boldsymbol{x_0}$**,** le point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$ est un point d'inflexion à la courbe représentative de f.

➢ **<u>Remarque :</u>**

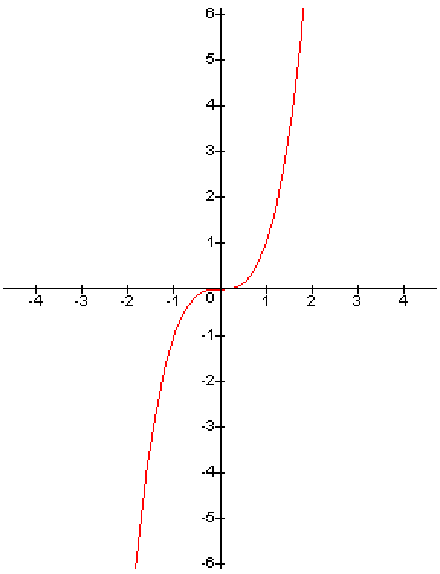
- La courbe représentative d'une fonction convexe est située au-dessus de toute tangente.
- La courbe représentative d'une fonction concave est située en-dessous de toute tangente.
- La tangente en un point d'inflexion traverse la courbe.

<u>Exemple :</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

f est deux fois dérivables sur ℝ car f est une fonction polynôme.$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 \ \ et \ \ f''(x) = 6x}$.

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$		0	
Concavité	$f''(x) < 0$ (Cf) tournée vers le bas		$f''(x) > 0$ (Cf) tournée vers le haut



Le point O est un point d'inflexion à (C_f) car $f''(0) = 0 \ \ et \ f''$ change de signe en 0.

II. Fonction logarithme, fonction exponentielle, fonction puissance

1. Fonction logarithme

La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ est la primitive sur $]0 \,; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

a. Propriétés algébriques et limites usuelles

➢ Propriétés algébriques

$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}$

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(a^r\right) = r \ln a$$

➢ Limites usuelles

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

*

b. Dérivées :

- Si **u** est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K alors $\ln(u)$ est dérivable sur K et on a : $(\mathbf{ln}(\boldsymbol{u}))' = \frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u}}$
- Si **u** est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

2. Fonction Exponentielle

La fonction exponentielle $x \mapsto \boldsymbol{e}^x$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.

a. Propriétés algébriques et limites usuelles

Pour tous nombres réels x et y et pour tout nombre rationnel r, on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e}^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\boldsymbol{e}^x) = x$; $\forall x \in]0;+\infty[$, $\boldsymbol{e}^{\ln(x)} = x$; $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \boldsymbol{e}^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]0;+\infty[\\ x = \ln(y) \end{cases}$
- $\boldsymbol{e}^0 = 1$; $\boldsymbol{e}^1 = e$; $\boldsymbol{e}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{e}}$; $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{e}^x e^y$
- $\boldsymbol{e}^{-x} = \frac{1}{\boldsymbol{e}^x}$; $\boldsymbol{e}^{rx} = (\boldsymbol{e}^x)^{\mathrm{r}}$; $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{e}^y \Leftrightarrow x = y$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{e}^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{e}^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\boldsymbol{e}^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x\boldsymbol{e}^x = 0$

b. Dérivée :

Si **u** est dérivable sur un intervalle **K** alors la fonction $\boldsymbol{e}^u$ est dérivable sur **K** et on a :

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K},\ \ \left(\boldsymbol{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

3. Fonction puissance

a. Définition

Soit α un réel, on appelle fonction puissance $\alpha^{\text{ième}}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} \; si\ \alpha\ entier\ naturel \\ \mathbb{R}^* \; si\ \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ \mathbb{R}_+^* \; si\ \alpha \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

On se limitera au cas $x \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

On note $f(x) = x^\alpha = \boldsymbol{e}^{\alpha \ln(x)}$

On a :$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Une primitive de f est : $\begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ \ si\ \alpha \neq -1\ et\ c\ une\ constante \\ \ln|x| + c \ \ si\ \alpha = -1\ et\ c\ une\ constante \end{cases}$

b. <u>Croissance comparée</u>

Soit α un nombre réel et strictement positif . On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ ; \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha \ln(x) = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\boldsymbol{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} x^\alpha \boldsymbol{e}^{-x} = 0.$$

c. <u>Fonction de type $\boldsymbol{u^\alpha}$</u>

Soit α un nombre réel et $\boldsymbol{u}$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle **K.** la fonction $[u(x)]^\alpha = \boldsymbol{e}^{\alpha \ln(u(x))}$ est dérivable sur **K** et on a :$\left[\left(u(x)\right)^\alpha\right]' = \alpha[u(x)]'[u(x)]^{\alpha-1}$

III. <u>Fonctions circulaires réciproques</u>

1. <u>Fonction Arc sinus</u>

Sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est continue, strictement croissante et prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1; 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement croissante, définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

C'est la fonction **Arc sinus** notée : $\boldsymbol{x \mapsto Arcsin(x)}$.

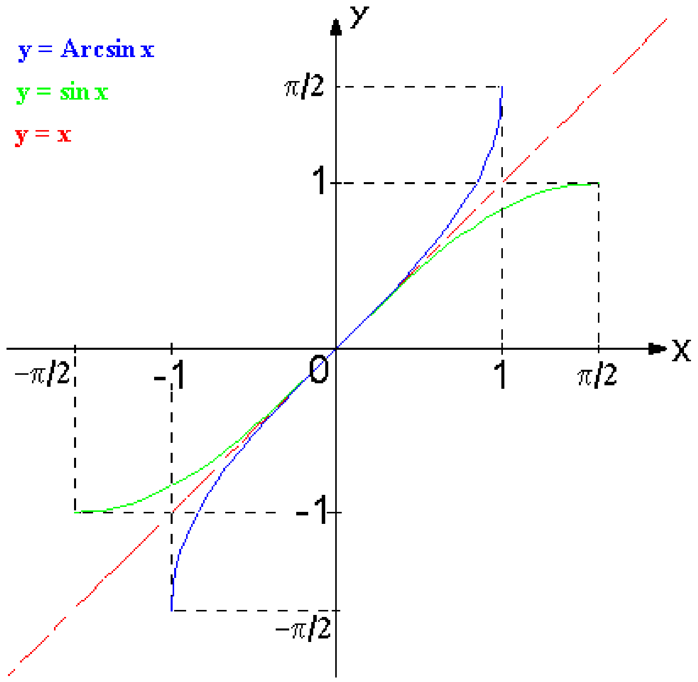
$y = \arcsin(x)$est équivalent à $x = \sin y \ \ avec\ y \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.On démontre que la fonction arc sinus est dérivable sur $]-1; 1[$ et l'on a : $(\mathbf{arcsin})'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^\mathbf{2}}}$

On en déduit le tableau de variation et le tableau de valeur valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

x	-1	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

La courbe (C') représentant la fonction ***arc sinus*** se déduit de la courbe (C) représentant la fonction **sinus** sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.



m

2. **Fonction arc cosinus**

Sur l'intervalle $[0;\pi]$, la fonction cosinus est continue, strictement décroissante et prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1;1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement décroissante, définie sur l'intervalle $[-1;1]$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $[0;\pi]$.

C'est la fonction **Arc cosinus** notée : $\boldsymbol{x \mapsto Arc\cos(x)}$.

$y = \arccos(x)$ est équivalent à $x = \cos y \;\; avec\; y \in [0;\pi]$

On démontre que la fonction arc cosinus est dérivable sur $]-1;1[$ et l'on a :

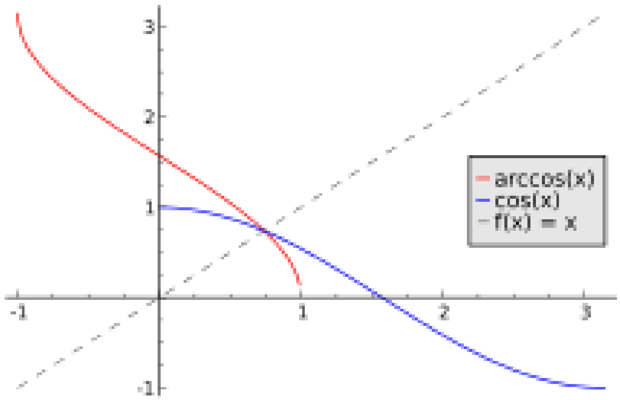
$(\textbf{arc cos})'(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

On en déduit le tableau de variation et le tableau de valeur valeurs :

X	-1	$+1$
$\arccos(x)$	π ↘	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

La courbe (C') représentant la fonction **arc cosinus** se déduit de la courbe (C) représentant la fonction **Cos x** sur $[0;\pi]$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$



3. Fonction arc tangente

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ la fonction tangente est continue, strictement croissante et prends ses valeurs sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

C'est la fonction **arc tangente** notée : $\boldsymbol{x \mapsto arctan(x)}$.

$y = \arctan(x)$ est équivalent à $x = \tan y$ *avec* $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

On montre que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $\boldsymbol{(arctan)'(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$

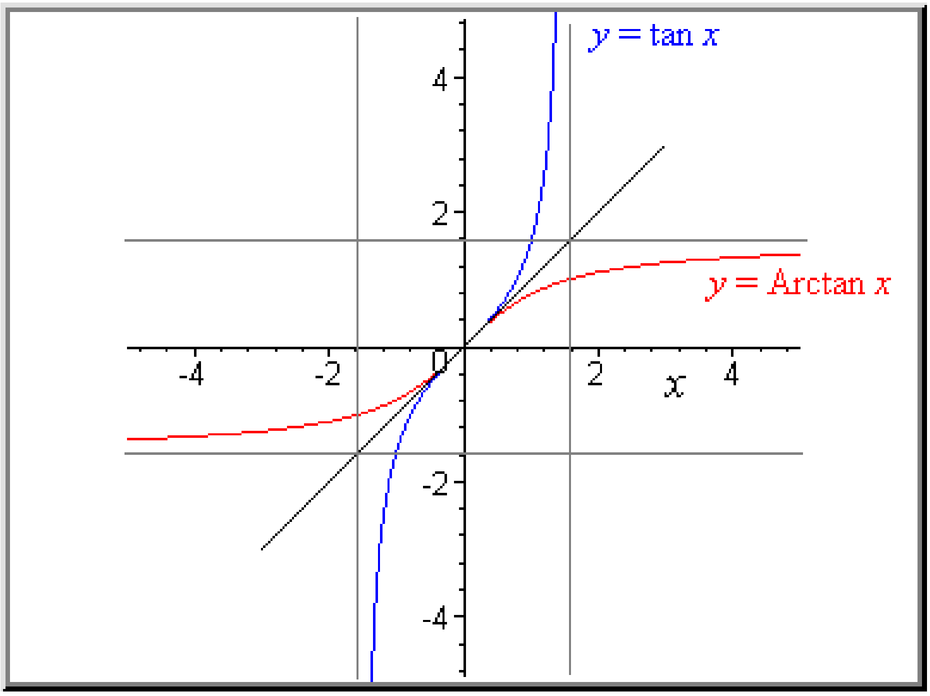
On en déduit le tableau de variation et de valeurs suivant :

X	$-\infty$	$+\infty$
Arctan x	$-\frac{\pi}{2}$	↗ $\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} Arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} Arctg(x) = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

La courbe (C') représentant la fonction **arc tangente** se déduit de la courbe (C) représentant la fonction **tangente** sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (**D**) d'équation $y = x$.



La fonction **cosinus hyperbolique** notée **ch** est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{ch: x \mapsto ch(x)} = \frac{\boldsymbol{e^x+e^{-x}}}{\mathbf{2}}$.

Elle est paire car pour tout réel **x**: $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \boldsymbol{ch(x)}$.

On l'étudie donc sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On a immédiatement

$ch(0) = 1 \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $ch(x)'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$ qui est positive sur $[0;+\infty[$, négative sur $]-\infty;0]$. La fonction **ch** est croissante sur $[0;+\infty[$, et décroissante sur $]-\infty;0]$

b. <u>Etude de la fonction hyperbolique sh</u>

La fonction **sinus hyperbolique** notée **sh** est définie sur $\mathbb{R}$ par : $sh\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{sh(x)} = \frac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\boldsymbol{2}}$.

Elle est impaire car pour tout réel x : $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = \boldsymbol{-sh(x)}$.On l'étudie donc sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On a immédiatement $sh(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(sh)'(x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch(x)$ qui est positive, donc la fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}$.

c. <u>Propriétés</u>

Pour tout x, y et des nombres réels, on a :

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \qquad ch(x) + sh(x) = \boldsymbol{e^x} \qquad ch(x) - sh(x) = \boldsymbol{e^{-x}}$.

$\big(ch(x) + sh(x)\big)^\alpha = \boldsymbol{e^{\alpha x}} \qquad \big(ch(x) - sh(x)\big)^\alpha = \boldsymbol{e^{-\alpha x}}$.

$ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$.

B. DEVELOPPEMENTS LIMITES

I. <u>Développement limité d'une fonction au voisinage de 0.</u>

<u>Définition 1</u>

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre **n** au voisinage de **0** en abrégé (DL_0^n), S'il existe des réels $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots\ldots \boldsymbol{a}_n$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ tels que $f(x) = \boldsymbol{a}_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots\ldots + a_nX^n + X^n\varepsilon(x)$.

Le polynôme $\boldsymbol{a}_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots\ldots + a_nX^n$est appelé la partie régulière du développement limité et la quantité $X^n\varepsilon(x)$ est appelé la partie complémentaire.

<u>Définition 2</u>

Un développement limité d'ordre n au voisinage de a admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x, x \in I$:

$f(x) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1(x-a) + \boldsymbol{a}_2(x-a)^2 + \ldots\ldots + \boldsymbol{a}_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$ avec

$\lim_{x\to a} \varepsilon\,(x-a) = 0$.

Le polynôme P_n est : $P_n(x) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1(x-a) + \boldsymbol{a}_2(x-a)^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n(x-a)^n$.

II. Formules de Taylor - Young et Mac-laurin

1. Formule de Tavlor –Young

Soit f une fonction de classe C^n . La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, donné par la formule suivante :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \quad (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

NB : Une fonction est dite de classe C^nau voisinage de $\boldsymbol{a}$ lorsqu'elle est n fois dérivable sur un intervalle contenant $\boldsymbol{a}$ et que sa dérivée $n^{ième}$est continue en $\boldsymbol{a}$.

2. Formule de Maclaurin

Dans la formule de **Taylor —Young**, lorsque a=0, on obtient la formule de Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$$

Corollaire :

Si une fonction f est de la classe C^∞ au voisinage de O (c'est-à-dire f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0), alors f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.

3. Développements limités usuels

Exemple: un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de $\boldsymbol{e^x}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) = \boldsymbol{e}^x \Rightarrow f(0) = \boldsymbol{e}^0 = 1 \\ f'(x) = \boldsymbol{e}^x \Rightarrow f'(0) = \boldsymbol{e}^0 = 1 \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = \boldsymbol{e}^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ \ldots\ldots\ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \ldots\ldots.. \ + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \ldots\ldots.. + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \ldots\ldots. + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ \ldots\ldots.. + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$

III. Propriétés

1. Troncature

Si f admet un $\boldsymbol{DL_0^n}$, alors f admet un $\boldsymbol{DL_0^m}$ pour tout $m < n$. En effet si un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de f est :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots\dots.. + a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ \dots\dots \ + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$

alors un $\boldsymbol{DL_0^m}$ de f est : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots\dots. + a_mx^m + x^m\varepsilon(x)$ avec à chaque fois $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to 0}} \boldsymbol{\varepsilon(x) = 0}$

Exemple :

Un DL_0^6 de $\boldsymbol{e^x}$ étant : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x)$Donc un DL_0^4 de e^x

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \ avec \ \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$

2. **Linéarité**

Soient : $f(x) = \boldsymbol{P}_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de f et : $g(x) = \boldsymbol{q}_n(x) + x^n\varepsilon(x) \ un \ \boldsymbol{DL_0^n}$ de g.
Un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de$(\boldsymbol{\lambda f + \mu g}), \forall\lambda, \ \mu \in \mathbb{R}$ est :
$(\boldsymbol{\lambda f + \mu g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda P_n(x) + \mu q_n(x) + x^n\varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to 0}} \boldsymbol{\varepsilon(x) = 0.}$

Exemple :

Un $\boldsymbol{DL_0^4}$ de **Chx** avec $\boldsymbol{Chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}}$**.**

3. **Produit**

Soient : $f(x) = \boldsymbol{P}_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de f et : $g(x) = \boldsymbol{q}_n(x) + x^n\varepsilon(x) \ un \ \boldsymbol{DL_0^n}$ de g.

Le produit $f \times g$ admet un $\boldsymbol{DL_0^n}$ dont la partie régulière s'obtient en effectuant le produit P_n(x) par q_n(x) que l'on tronque à l'ordre n.

Exemple : Un $\boldsymbol{DL_0^3} \ de \ \boldsymbol{e^x \cos(x)}$

4. **Parité**

Si f admet un $\boldsymbol{DL_0^n}$ et si de plus f est une fonction paire (respectivement impaire), alors la partie régulière du développement limité n'admet que des monômes de degrés pairs (respectivement des monômes de degrés impairs).

Exemple : un $\boldsymbol{DL_0^5}$ de $\sin(x) \ et \ \cos(x)$.

5. **Quotient**

Soient : $f(x) = \boldsymbol{P}_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ un $\boldsymbol{DL_0^n}$ de f et : $g(x) = \boldsymbol{q}_n(x) + x^n\varepsilon(x) \ un \ \boldsymbol{DL_0^n}$de g.

Si de plus $g(0) \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un $\boldsymbol{DL_0^n}$ et la partie régulière du $\boldsymbol{DL_0^n}$:
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes de x de la partie régulière du numérateur par celle du dénominateur à l'ordre n.

Exemple :

$\boldsymbol{DL_0^3}$: $\tan x$ avec $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

6. **Primitive**

Soit f une fonction admettant un $\boldsymbol{DL_0^{n-1}}$

$\boldsymbol{DL_0^{n-1}}$: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$.

Si F est une primitive de f, alors F admet un $\boldsymbol{DL_0^n}$ et $\boldsymbol{ce\ DL_0^n}$ $est\ donn$é par :

$F(x) = F(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + x^n\varepsilon(x)$.

Exemple : Un $\boldsymbol{DL_0^4}$ de $\frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$. La dérivée de $\ln(1+x)$ est $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$ donc

$\ln(1+x)$ est une primitive de $\frac{1}{1+x}$ donc

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

7. Dérivation d'un développement limité

Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière $P_n(x)$, alors f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, développement limité dont la partie régulière est $P'_n(x)$.

Exemple :

Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$

8. Développement d'une fonction composée

Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 tel que :

$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$; Si **u** est une fonction admettant un développement limité à l'ordre **n** au voisinage de 0 tel que $u(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec

$\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $u(0) = 0$, alors la fonction $f \circ u$ admet un développement limité au voisinage de 0 dont la partie régulière est obtenue en remplaçant dans $P(x)$ chaque x^n par $\left(Q(x)\right)^n$ en ne conservant que les termes de dégré inférieur ou égal à n.

Cas particulier :

Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière $P_n(x)$, alors :

- La fonction $x \mapsto f(ax)$ $avec$ $a \neq 0$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n de partie régulière $P_n(ax)$;
- La fonction $x \mapsto f(x^p)$admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre np de partie régulière $P_n(x^p)$.

Exemple :

Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2, de $x \mapsto \ln(1+3x)$.

Remarques :

- Etablir un développement limité de f au voisinage de $\boldsymbol{a}$ revient à établir un développement limité au voisinage de 0 en posant $\boldsymbol{y = x - a}$.
- Etablir un développement limité de f au voisinage de $+\infty$ revient à établir un développement limité au voisinage de 0 en posant $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$.

Exemple :

Développement limité au voisinage de e, à l'ordre 4, de $x \mapsto \ln(x)$:

Développement limité au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 3, de $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$:

IV. Détermination des limites

Exemple1 :

Calculons la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Exemple2 :

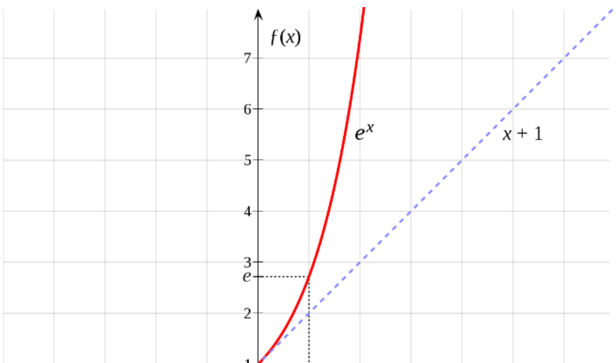
Calculons la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

V. Application à l'étude locale d'une fonction au voisinage de 0.

Soit le développement limité de f au voisinage de 0 :
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, a_n étant le premier coefficient non nul au-delà du terme du premier degré. On a :

- ✓ $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$ et une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = a_1 x + a_0$
- ✓ $\boldsymbol{f(x) - (a_0 + a_1 x) \sim a_n x^n}$ au voisinage de 0.
  - Si n est pair, alors la courbe reste localement d'un même côté de la tangente.
  - Si n est impair, alors on a un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente).

Exemple : Considérons la fonction f(x) $= e^x$et (C_f) sa courbe représentative.



Au point zéro : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ $avec$ $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
Au point $A(0; 1)$, (C_f) admet pour tangente la droite d'équation (Δ): $y = f(0) + xf'(0)$ soit $y = 1 + x$. Si T et M sont les points d'abscisse x de la tangente et de la courbe, alors, $\overline{TM} = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. D'où au voisinage de zéro, $\overline{TM} \sim \frac{x^2}{2}$soit $\overline{TM} > 0$
Donc la courbe (C_f) est au-dessus de la tangente (Δ).

VI. Application à l'étude locale d'une fonction au voisinage de ∞

Après avoir posé $y = \frac{1}{x}$, si le développement limité de f au voisinage de ∞ à l'ordre *n* est : $f(x) = a_0 + a_1x + \frac{a_n}{x^n} + x^n\varepsilon(x)$, a_n étant le premier coefficient non nul au-delà du terme du premier degré. On a :

- ✓ une équation de l'asymptote à la courbe représentative de *f* en ∞ est : $y = a_1x + a_0$
- ✓ $\boldsymbol{f(x) - (a_0 + a_1x) \sim \frac{a_n}{x^n}}$ au voisinage de ∞.

La position relative de la courbe représentative de *f* et son asymptote s'obtient en étudiant le signe de $\boldsymbol{\frac{a_n}{x^n}}$

Exemple :

Soit la fonction f definie sur [0; +∞[par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$. On pose $x = \frac{1}{x}$.
$e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 + 1} = \frac{e^{-u}}{u}\sqrt{u^2 + 1}(u > 0)$.
Au voisinage de 0 :
$\sqrt{u^2 + 1}$=$1 + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ et $e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$
$e^{-u}\sqrt{u^2 + 1} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$ $\Rightarrow$ $\frac{e^{-u}}{u}\sqrt{u^2 + 1} = \frac{1}{u} - 1 + u + u\varepsilon(u)$

D'où : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$, $f(x) - (x - 1) > 0$ et donc la courbe est au-dessus de l'asymptote.

VII. Compléments des développements

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots.. + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x);$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots.. + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x);$$

$$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6\varepsilon(x);$$

$$Argshx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^4}{8\cdot 5} + \ \dots.. + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots..\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x);$$

$$Argthx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ \dots. + \frac{x^{2n+2}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x);$$

$$Arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^4}{8\cdot 5} + \ \dots. + \frac{1\cdot 3\cdot \dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots\cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x);$$

$$Arccosx = \frac{\pi}{2} - Arcsinx$$

$$Arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1 :

1. Soit la fonction numérique *f* définie sur IR, paire, de période 4 telle que :

$$\begin{cases} si \quad 0 \leq t \leq 1 \quad alors \quad f(t) = t \\ si \quad 1 \leq t \leq 2 \quad alors \quad f(t) = 1 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction *f* sur l'intervalle [-6 ; 6].

Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0 et en 1

2. Soit la fonction numérique *g* définie sur IR, impaire, de période 4, telle que :

$$\begin{cases} si \quad 0 \leq t \leq 1 \quad alors \quad g(t) = t \\ si \quad 1 \leq t \prec 2 \quad alors \quad g(t) = 1 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction *g* sur l'intervalle [-6 ; 6].

Exercice 2 :

Calculez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-6}}$ 2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-16}$ 3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \ln x}{x^2-1}$ 4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - x)\tan x$

Exercice 2

Après avoir précisé le ou (ou les) intervalle(s) où la fonction est dérivable, déterminer dans chaque cas la fonction dérivée :

$i(x) = x^2 \tan(5x)$;
$q(x) = arcos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$; $u(x) = \sin(\arctan(x))$;

$t(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin(x) - x$.

Exercice 3 : Déterminer le développement limité au voisinage de 0 de :

1. $f(x) = \sin 3x$ à l'ordre 5.
2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 4.
3. $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ à l'ordre 3.
4. $f(x) = \frac{1}{cos^2 x}$ à l'ordre 6.
5. $f(x) = \ln(\cos x)$ à l'ordre 5.
6. $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)}$ à l'ordre 3.

7. $f(x) = e^x \cos x + \frac{x^3}{3} - x - 1$ à l'ordre 4.
8. $f(x) = \sqrt{1+x} \times \ln(1+x)$ à l'ordre 3.

Exercice 4 :

Soit la fonction f $\mathbb{R}$ de vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1+\ln(x+1)}{x+1}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ d'unité graphique : 2cm.

1.
   a. Déterminer Df l'ensemble de définition de f
   b. Calculer les limites de f aux bornes de Df.
   c. Montrer que la droite $(D): y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
   d. Etudier la position relative de (C) et de (D).
2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation .
3.
   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Vérifier que $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.
4.
   a. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   b. En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 puis la position de (C) par rapport à (T) au voisinage de ce point.
5. Représenter (C), (D) et (T) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

Exercice 5 :

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} \ si \ x > 0 \\ e \ si \ x = 0 \end{cases}$$

(C) la courbe représentative de f

1.
   a. Donner l'ensemble de définition D_f de f.

Donner le développement à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

   b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$x \mapsto \left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] - 1.$$

2. En remarquant que le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est donné par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}\right)e + x^2\varepsilon(x).$$

   a. Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0.
   b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

c. En utilisant le développement limité d'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0. Donner une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 0 et préciser les positions relatives de (Δ) et de (C)au voisinage du point d'abscisse 0.

3.
a. En étudiant les variations sur $[0;+\infty[$ de la fonction g définie par :
$$g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$
b. Donner le signe de g sur $[0;+\infty[$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

4.
a. Montrer que (C) possède au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation.
b. Représenter graphiquement la courbe (C) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm. (On placera la tangente (Δ)).

Exercice 6

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1 cm.
On considère les fonctions ch, sh et th définies sur $\mathbb{R}$ par :
$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

1. a) Etudier la fonction sh.
b) Etudier la fonction ch.
c) Démontrer que les courbes de sh et ch sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$.
d) Représenter graphiquement ch et sh dans le même repère.

2. a) Exprimer $th(x)$ en fonction de e^{2x} puis en fonction de e^{-2x}.
b) Etudier la fonction th.
c) Représenter graphiquement th.

3. a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
b) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, ch(ix) = cosx$ et $ish(ix) = sinx$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f .

1. Montrer que f est continue en 0.

2. a) Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$, puis le développent limité que l'on note $DL_0^4(e^{-x})$.

b) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro , développement limité que l'on notera $DL_0^2 f(x)$.

c)En utilisant le $DL_0^2 f(x)$, montrer que la fonction f est dérivable au point 0 et déterminer f '(0).

d) En utilisant le $DL_0^2 f(x)$, donner une équation de tangente (T) de f à (C_f) au point d'abscisse 0 et préciser la position de cette tangente (T) par rapport à (C_f) au voisinage du point d'abscisse 0.

3. a) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par :

$g(x) = (1+x)e^{-x} - 1.$

b) Monter que pour tout nombre réel non nul x ,$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

<u>Exercice 8</u>

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. a) Trouver le développement limité en - ∞ de $xe^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.

b) En déduire une équation de l'asymptote (D) à (C_f) en - ∞.

c) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D) .

3. a) Trouver le développement limité en $+\infty$ de $x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ à l'ordre 2.

b) En déduire une équation de l'asymptote (D') à (C_f) en + ∞.

c) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D') . .