CHAPITRE II : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I. POLYNOMES :

1. Définitions :

On appelle polynôme à coefficients complexes ou réels la fonction définie sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ par :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est le degré du polynôme
- Une constante non nulle est un polynôme de degré 0.
- La somme et le produit de deux polynômes encore des polynômes est :

$d°(P + Q) \leq (d°P, d°Q) \quad d°(PQ) = d°P + d°Q$

2. Division euclidienne :

Etant donnés deux polynômes A et B ($B \neq 0$), il existe un couple de polynômes (Q, R) vérifiant :

$A = BQ + R$ avec $d°R < d°B, Q$ est le quotient de la division euclidienne de A par B et R en est le reste.

Si R = 0, alors A est divisible par B.

Exemple 1 :

Effectuer la division euclidienne de

$$A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 \text{ par } B = X^3 + X^2 + 2$$

Indication : $Q = X^2 - 1$ et $R = -X^2 + X + 1$

3. Division suivant les puissances croissantes :

Pour un entier n donné, l'écriture $A = BQ + X^{n+1}R$ avec $d°Q \leq n$ s'appelle la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n. Dans cette division Q est le quotient à l'ordre n et R le reste à l'ordre n.

Exemple 2 :

Effectuer la division de $A = 1 + X$ par $B = 1 - X + X^2$ suivant les puissances croissante de X à l'ordre 2.

Indication : $Q = 1 + 2X + X^2$ et $R = -1 - X$

4. Racine d'un polynôme –Ordre de multiplicité

- Le nombre complexe ou réel a est appelé racine (ou zéro) du polynôme P lorsque $P(a) = 0$.
- Un polynôme P est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.

- Un nombre complexe ou réel a racine d'ordre n, $(n \in \mathbb{N})$, d'un polynôme P si et seulement si P est divisible par $(x-a)^n$, mais pas divisible par $(x-a)^{n+1}$
- Une racine simple est une racine d'ordre 1 et une racine double est racine d'ordre 2.

5. **Formule de TAYLOR**

Soient P un polynôme de degré n et a un nombre complexe ou réel.
P s'écrit suivant les puissances de $(x-a)$ sous la forme :
$P(x) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + P(a)$ Où $P^{(k)}(a)$ est dérivée $k^{ième}$ du polynôme P

Conséquence :
Un nombre complexe ou réel a est racine d'ordre α du polynôme P si et seulement si $P(a) = P'(a) = P''(a) = \cdots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0$ et $P^{(\alpha)}(a) \neq 0$
Exemple 3 :

- Ecrire suivant les puissances de $x-1$ le polynôme :
$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$
- Trouver les racines du polynôme $P(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$. Sachant qu'il admet une racine triple.

6. **Théorème de d'ALEMBERT :**

Tout polynôme dans $\mathbb{C}$, de degré $n > 0$, admet exactement n racines, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité.
Exemple :
Effectuer la division euclidienne de $x^3 + 3x - 2i$ par $x - i$, avec $i^2 = -1$. En déduire toutes les racines de $x^3 + 3x - 2i$ puis factoriser le polynôme $x^3 + 3x$-$2i$

7. **Factorisation des polynômes à coefficient réels :**

Si un polynôme à coefficients réels admet le nombre complexe z_0 pour racine, alors le conjugué de z_0 est aussi racine du polynôme.
Conséquence
Tout polynôme à coefficients réels de degré strictement supérieur à deux est factorisable sur $\mathbb{R}$. Les facteurs sont des polynômes à coefficients réels du premier degré ou second degré à discriminant négatif.
Exemple
On considère dans C l'équation : $(E) \ : \ P(z) = z^5 - z^4 + z^3 + z^2 + 2 = 0$

1) Calculer P(-1).
2) Montrer que si z est solution, $\bar{z}$ l'est aussi.

3) Trouver toutes les solutions de (E) sachant que 1+i est solution.
4) Donner la décomposition de P(x) en produits de facteurs irréductibles dans $\Re[x]$

II. FRACTIONS RATIONNELLES

1. Définitions

- On appelle fraction rationnelle toute fonction F de la forme : $\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients complexes ou réels avec $\mathrm{Q(x)} \neq 0$.
- La fonction F est dite irréductible si P et Q n'ont pas de facteurs communs, c'est-à-dire, pas de racines communes.

2. Pôle d'une fraction rationnelle

Les pôles d'une fraction rationnelle sont les racines du dénominateur.
L'ordre d'un pôle est l'ordre de multiplicité de cette racine.

3. Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ une fraction rationnelle irréductible :

- Si $\mathrm{d°(P)} < d°(Q)$, la partie entière de F est nulle.
- Si $\mathrm{d°(P)} \geq \mathrm{d°(Q)}$, la division de P par Q donne : $\mathrm{P} = \mathrm{EQ} + \mathrm{R}$ avec $\mathrm{d°(R)} < d°(\mathrm{Q})$.
  F s'écrit : $F = \mathrm{E} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q}}$. Le polynôme E est la partie entière de la fraction F.

4. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$

Les polynômes premiers de $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ **s**ont de deux types :

- les polynômes de 1$^{\text{er}}$ degré $a\mathrm{x} + b$.
- les polynômes du second degré $a\mathrm{x}^2 + b\mathrm{x} + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$

Dans $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$, il y a deux types d'éléments simples :

- un élément simple dit de 1$^{\text{ère}}$ espèce est la forme : $\frac{b}{(x-a)^n}$, a et $b \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$
- un élément simple de 2$^{\text{ème}}$ espèce qui est la forme :
  $\frac{a\mathrm{x} + \mathrm{b}}{(\mathrm{x}^2 + c\mathrm{x} + \mathrm{d})^{\mathrm{n}}}$, avec $c^2 - 4d < 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$

Toute fraction rationnelle à coefficients réels dont la partie entière est nulle se décompose d'une façon unique sur $\mathbb{R}$ en une somme d'éléments simples de 1$^{\text{ère}}$ espèce et/ou de 2$^{\text{nde}}$ espèce.

5. APPLICATIONS

a. Cas d'un rôle simple

Soit la fraction $\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$, a un zéro simple de Q(x). le coefficient λ du terme $\frac{\lambda}{\mathrm{x}-a}$ de la décomposition en élément simple de F est $(\mathrm{x}-a)\mathrm{F(x)}|_{\mathrm{x}=a}$

Exemple 5 :

- Décomposer dans $\mathbb{R}(\mathrm{x})$ en élément simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\mathrm{B(x)} = \frac{3\mathrm{x}-1}{(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+1)}, \mathrm{C(x)} = \frac{2\mathrm{x}^3+9\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+8}{\mathrm{x}(\mathrm{x}+4)}$$

b. Cas d'un pôle multiple

➢ Cas du pôle 0

$\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{x^n Q_1(x)}}, Q_1(0) \neq 0$. D'après le théorème de la décomposition en éléments simples, il existe $\mathrm{A_1, A_2, \dots, A_n} \in \mathbb{R}$, B(x) un polynôme tels que :
$\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{A_n}}{\mathrm{X^n}} + \frac{\mathrm{A_{n-1}}}{\mathrm{X^{n-1}}} + \cdots + \frac{\mathrm{A_1}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{B(x)}}{\mathrm{Q_1(x)}}$ on a alors
$\mathrm{P(x)} = (\mathrm{A_n} + \mathrm{A_{n-1}x} + \cdots + \mathrm{A_1 x^{n-1}})\mathrm{Q_1(x)} + \mathrm{x^n B(x)}$. d'après le théorème de la division suivant les puissances croissantes $\mathrm{A_n} + \mathrm{A_{n-1}x} + \cdots + \mathrm{A_1x^{n-1}}$ est le quotient de la division de P(x) par Q(x) suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre $\mathrm{n}-1$ et B(x) en est le reste.

EXEMPLE:

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :
$\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{x^5}+1}{\mathrm{x^3(x-1)}}$.

Cas d'un pôle autre que 0

- si a est un zéro multiple de Q (c'est-à-dire $\mathrm{Q(x)} = (\mathrm{x}-a)\mathrm{Q_1(x)}$), pour obtenir les coefficients relatifs au pôle a dans les décompositions en éléments simples (DES) de
  $\mathrm{F(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$, on effectuera un changement de variable $\mathrm{Y} = \mathrm{x}-a$, et on se ramènera au cas précédent (vis-à-vis de la variable Y).
- Si a est un zéro multiple de Q, alors la fraction $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$.
  Soit $\varphi(x) = (x-a)^\alpha F(x) = \frac{P(x)}{Q_1(x)}$. La formule de Taylor de φ au point a à l'ordre $\alpha-1$ s'écrit :
  $\frac{P(x)}{Q_1(x)} = \varphi(a) + \frac{(x-a)}{1!}\varphi'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\varphi^{(\alpha-1)}(a) + (x-a)^{\alpha-1}\varepsilon(x)$ D'où

$$F(x) = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)} + \frac{\varepsilon(x)}{x-a} \text{ avec}$$

$$A_j = \frac{\varphi^{(\alpha-j)}(a)}{(\alpha-j)!} \quad ; j \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}$$

EXEMPLE 7 :

Décomposer dans $\mathbb{R}(x)$ en éléments simples la fraction rationnelle suivantes :

$A(x) = \frac{1}{(x-1)^3 x(x+1)}$

c. Décomposition en éléments simples de secondes espèces

Soit F une fraction rationnelle de la forme $F(x) = \frac{P(x)}{(Q(x))^{\alpha}}$, Q(x) est un trinôme irréductible,

$\alpha \in \mathbb{N}^*$. La DES de F est de la forme : $F(x) = E(x) + \frac{A_{\alpha}(x)}{Q^{\alpha}(x)} + \frac{A_{\alpha-1}(x)}{Q^{\alpha-1}(x)} + \cdots + \frac{A_1(x)}{Q(x)}$

où E est la partie entière de F et $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{\alpha}$ des polynômes des dégrés ≤ 1.

On pourra calculer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{\alpha}$ par des divisions euclidiennes successives.

En effet, il existe des polynômes $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_{\alpha}$ tel que :

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)Q(x) + R_1(x),\ Q_1(x) = Q_2(x)Q(x) + R_2(x),\ \ldots,\ Q_{\alpha-1}(x) = Q_{\alpha}(x)Q(x) + R_{\alpha}(x) \\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, \alpha\}, \deg(R_j) < 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$F(x) = \frac{R_1(x)}{Q^{\alpha}(x)} + \frac{Q_1(x)}{Q^{\alpha-1}(x)}$$
$$= \frac{R_1(x)}{Q^{\alpha}(x)} + \frac{R_2(x)}{Q^{\alpha-1}(x)} + \frac{R_3(x)}{Q^{\alpha-2}(x)} + \cdots + \frac{R_{\alpha}(x)}{Q(x)} + Q_{\alpha}(x)$$

EXEMPLE 10 :

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ la fonction rationnelle suivante :

$$E(x) = \frac{x^8 - x^4 + 2}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Remarque de parité :

Les propriétés de parité de F peuvent permettre de déterminer les coefficients de la décomposition en éléments simples de F

Exemple : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ la fraction rationnelle suivante :

$$C(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}$$

d. **<u>décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[x]$</u>**

On appelle élément simple de $1^{\text{ère}}$ espèce toute fraction rationnelle de la forme :
$\frac{A}{(x-a)^n}$ où A$\in$ $\mathbb{C}$, a $\in\mathbb{C}$, n $\in$ $\mathbb{N}^*$

Dans l'ensemble des nombres complexes, toute fraction rationnelle irréductible dont la partie entière est nulle se décompose d'une façon unique en somme d'éléments simples de $1^{\text{ère}}$ espèce.

- Les propriétés appliquées pour la recherche de la partie entière et les éléments simples de $1^{\text{ère}}$ espèce de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ sont applicables pour la décomposition en élément simples dans $\mathbb{C}[x]$.
- Pour obtenir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$, on utilise la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[x]$, en regroupant les parties polaires relatives aux pôles conjugués.

<u>EXEMPLE 11 :</u>

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[x]$, puis dans $\mathbb{R}[x]$ la fraction rationnelle suivante :

$$G(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE N°1

1. Soit $P(x) = x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10$. Calculer P(1) puis P(2).
   En déduire la factorisation du polynôme P dans $R[X]$ puis dans $C[X]$
2. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 du polynôme P de $R[X]$.
   $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
3. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$.
4. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de
   $A(x) = 2 + 3x - 2x^2$ par $B(x) = 1 + x^2 - 2x^3$.
5. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de
   $A(x) = 4$ par $B(x) = (x-2)^2$.

EXERCICE N°2

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a. Montrer que $1 + j = -j^2$

b. Montrer que j est au moins racine double de P.

c. Trouver deux racines réelles évidentes de P.

d. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE N°3

On donne les fractions rationnelles suivantes :

$\mathrm{F}(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^2-2x+2)^3}$, $\mathrm{P}(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ et $\mathrm{R}(x) = \frac{x^3+1}{x^3(x+1)}$.

1. Déterminer les racines et les pôles de $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les racines et les pôles de $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2

Déterminer la partie entière des fractions rationnelles suivantes :

$\mathrm{F}(x) = \frac{x^5-3}{x^3}$, $\mathrm{Q}(x) = \frac{x^3+2x^2-2x+1}{x^2+1}$, $\mathrm{R}(x) = \frac{3x^2-1}{(x-2)(x+1)}$ et

$\mathrm{P}(x) = \frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2(x+2)}$.

EXERCICE 3

Décomposer en éléments simples, les fractions rationnelles suivantes :

$\mathrm{A}(x) = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$, $\mathrm{B}(x) = \frac{3x^2-7}{(x-3)(x+1)}$, $\mathrm{C}(x) = \frac{x^3+5x^2+3x+4}{x(x+4)}$ et

$D(x) = \frac{2x^2+x+1}{(x-2)(x+1)(x-1)}$.

EXERCICE 4

Décomposer en éléments simples, les fractions rationnelles suivantes :

a) $P(x) = \frac{x^6+x^4-x^2-7}{x^5}$, $Q(x) = \frac{x^4+5}{(x+1)^3}$,

b) $R(x) = \frac{x^5+1}{x^3(x-2)}$, $S(x) = \frac{1}{(x-1)^3 x(x+1)}$ et $T(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

EXERCICE 5

Décomposer en éléments simples, les fractions rationnelles suivantes :

$F(x) = \frac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$, $P(x) = \frac{x^5+x^4+x+1}{(x^2+x+4)^3}$ et $K(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$.

EXERCICE 6

Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle suivante
Dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

$H(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$