Mécanique du point

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

2IE/CPGE 1: COURS DE MECANIQUE

DIALLO YERO

INTRODUCTION

- La cinématique est le domaine de la mécanique consacré à la **description du mouvement**.
- L'étude cinématique ne fait pas référence aux origines physiques du mouvement: nous cherchons à savoir comment le point matériel se déplace, sans nous demander pourquoi il se déplace.

1. PRELIMINAIRES: SYSTEMES DE COORDONNEES

- Pour situer un point quelconque dans l’espace et le distinguer des autres points nous avons besoin de trois informations indépendantes. Ces trois informations constituent les coordonnées du point.
- Les coordonnées d’un point peuvent être des longueurs et /ou des angles.
- Dans tous les cas il y a trois coordonnées: nous évoluons dans un espace à trois dimensions.

1.1 Repérage en coordonnées cartésiennes

- Le système cartésien de coordonnées est le plus fréquemment employé, car il s'applique aux situations ne présentant aucune symétrie remarquable.

Le système d'axes

Dans le système de repérage cartésien, l'espace est rapporté à trois axes orthogonaux entre eux et sécants au point origine O: (Ox, Oy, Oz)

La base vectorielle

La base vectorielle est constitué de trois vecteurs unitaires dans les directions des trois axes. Cette base possède une propriété particulière: elle est **fixe**; elle ne dépend pas du temps.

Elle se note $(\overrightarrow{u_x}, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

On peut déporter la base cartésienne et la représenter au point de son choix; cela n'affecte pas son orientation imposée par le système d'axe.

- **Les coordonnées**

En coordonnées cartésiennes tout point M a trois coordonnées: x, y et z. Ce sont les projetés du point M sur les trois axes.

- **Le vecteur position**

Le vecteur position s'exprime à l'aide des trois coordonnées et des vecteurs unitaires de la base:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

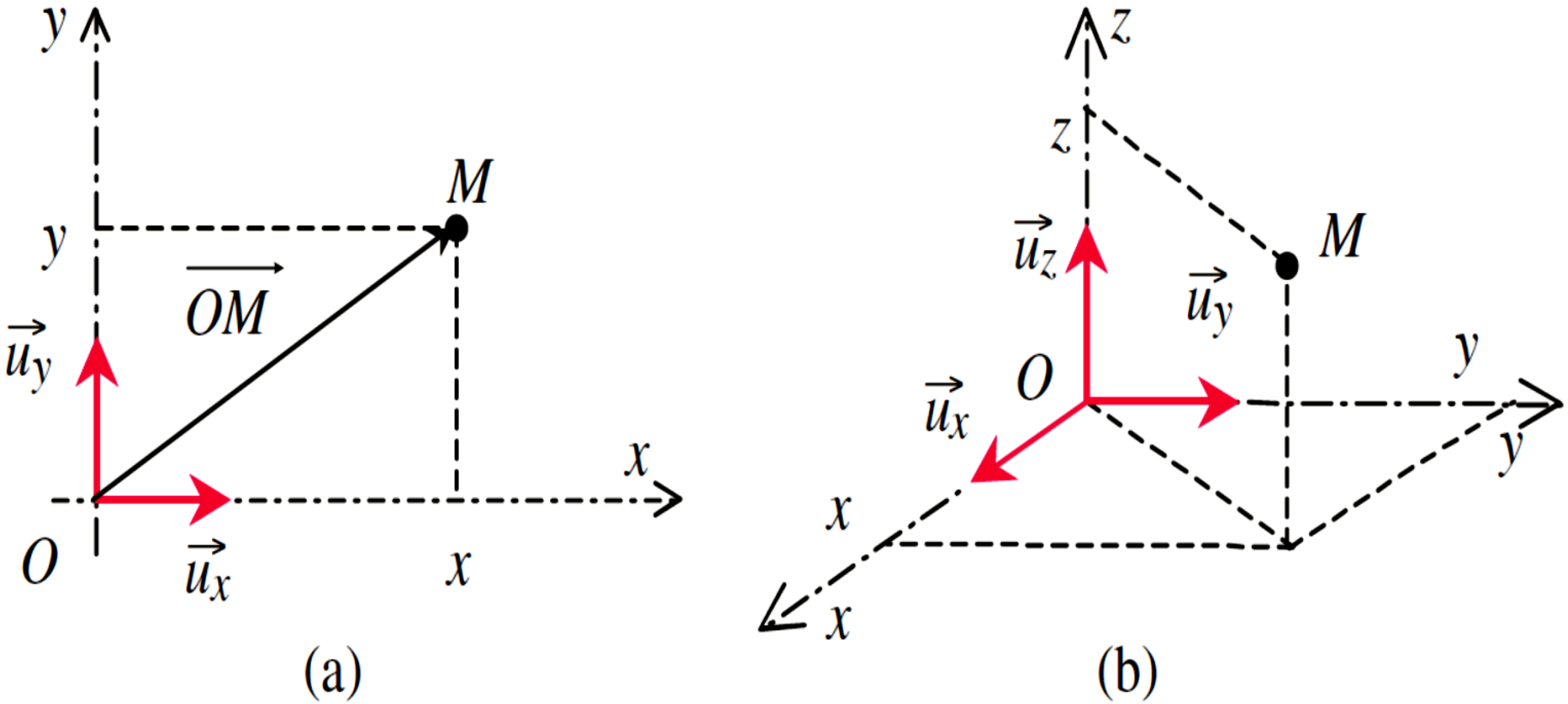


Figure 1.3 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

1.2 Repérage en coordonnées polaires

- **Le système d'axes**

Un axe Ox appartenant au plan et passant par l'origine O suffit au repérage en coordonnées polaires. Sa direction est indifférente.

- **Les coordonnées**

Deux coordonnées sont nécessaire au repérage d'un point M: r ou ρ la distance de O à M et l'angle θ formé par l'axe Ox et le segment OM.

• La base vectorielle

La base polaire est constituée de deux vecteurs orthonormés; son orientation dépend de la position du point M. Elle comprend:

❖Le vecteur radial $\vec{u}_r$ ou $\vec{u}_\rho$ dont la direction est celle du segment OM, sa norme vaut $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$

❖Le vecteur orthoradial $\vec{u}_\theta$ perpendiculaire à $\vec{u}_r$; son sens est imposé par l'angle θ.

NB: La base polaire est mobile

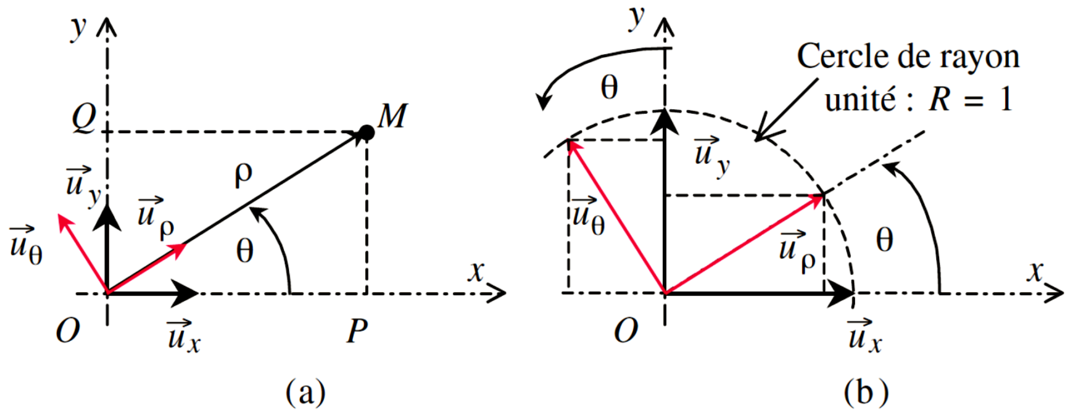


Figure 1.5 Les coordonnées polaires (ρ,θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

- **Le vecteur position**

Dans la base mobile le vecteur position s'écrit à partir de la seule coordonnée r:

$$\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\vec{u}_r = r\vec{u}_r$$

ATTENTION: il ne faut pas écrire :

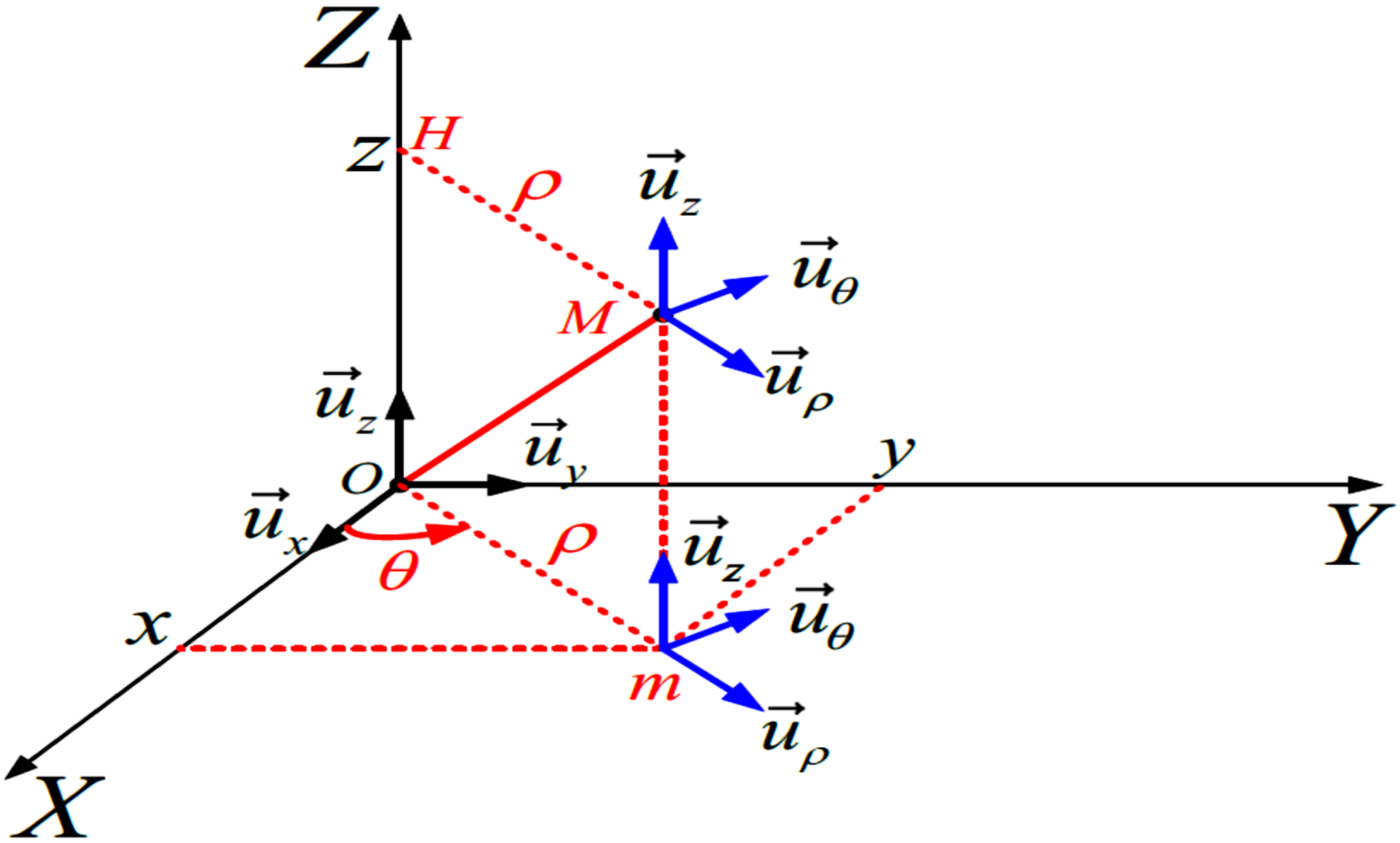
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta$$

1.3 Repérage en coordonnées cylindriques

On peut étendre le système précédent aux trois directions de l'espace en introduisant l'axe Oz perpendiculaire au plan du repérage polaire et en définissant la coordonnée axiale z le long de cet axe. Le système de repérage obtenu est dit cylindrique.

On utilise ce système de repérage pour étudier des situations où le mouvement s'organise autour d'un axe particulier.

- Système d’axes



- **Les coordonnées**

Les cordonnées cylindriques sont définies par:

❖ $r\ ou\ \rho = \overrightarrow{\|OP\|}$

❖ $\theta = angle\ (Ox, OP)$

❖ $z = projété\ de\ M\ suivant\ l'axe\ Oz$

- **La base vectorielle**

Un vecteur unitaire axial dans la direction de l’axe Oz vient compléter la base vectorielle des coordonnées polaires, soit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ qui est **mobile** et non fixe.

- **Le vecteur position**

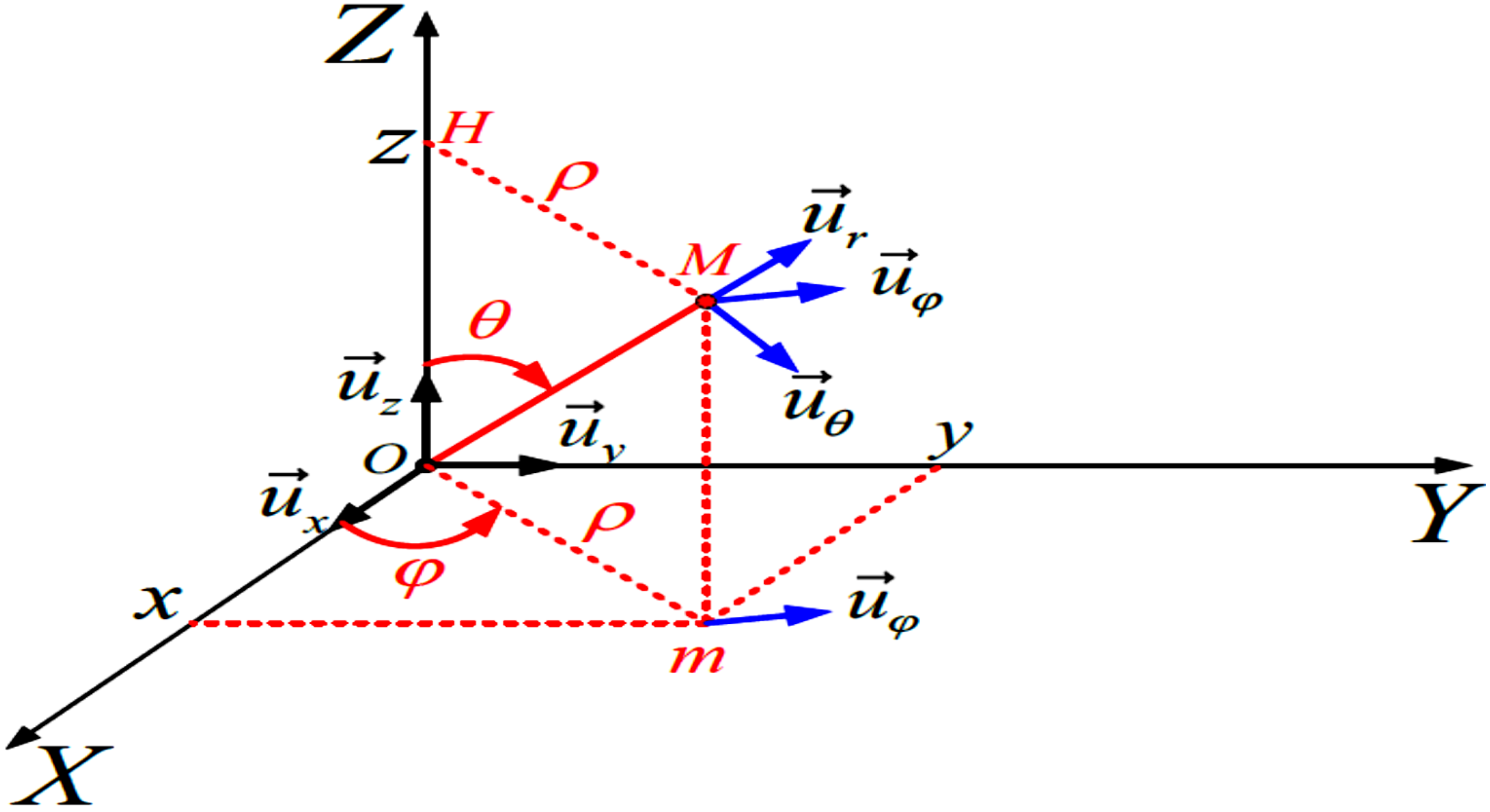
Dans la base cylindrique le vecteur position s'écrit à partir des seules coordonnées r et z:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

1.4 Repérage en coordonnées sphériques

Le système sphérique permet de repérer le point M à partir d'un point O particulier.

- **Système d’axes**



- **Les coordonnées**

❖ r la distance entre O et M

❖ L'angle φ appelé azimut ou colatitude, entre Ox et OP

❖ L'angle θ appelé longitude, entre Oz et OM

- **La base vectorielle mobile**

La base sphérique est formée des vecteurs:

❖ Le vecteur radial $\vec{u}_r$

❖ Le vecteur $\vec{u}_\varphi$ tel que l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$ est de $\frac{\pi}{2}$

❖ Le vecteur $\vec{u}_\theta$ est tel que le trièdre $(\vec{u}_r , \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ est direct.

- **Le vecteur position**

Le vecteur position s’exprime à partir de la seule coordonnée r et du vecteur de base $\vec{u}_r$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r}$$

1.5 Equivalence des systèmes de repérages

- **Relation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes**

❖ $x = r\cos\theta$

❖ $y = r\sin\theta$

❖ r= $\sqrt{x^2 + y^2}$

❖ $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- **Relation entre coordonnées cylindriques et coordonnées cartésiennes**

❖ $x = r\cos\theta$

❖ $y = r\sin\theta$

❖ $z = z$

- **Relation entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes**

❖ $x = rsin\varphi cos\theta$

❖ $y = r\, sin\varphi\sin\theta$

❖ $z = rcos\varphi$

❖ r= $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ $tg\theta = \frac{y}{x}$

❖ $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

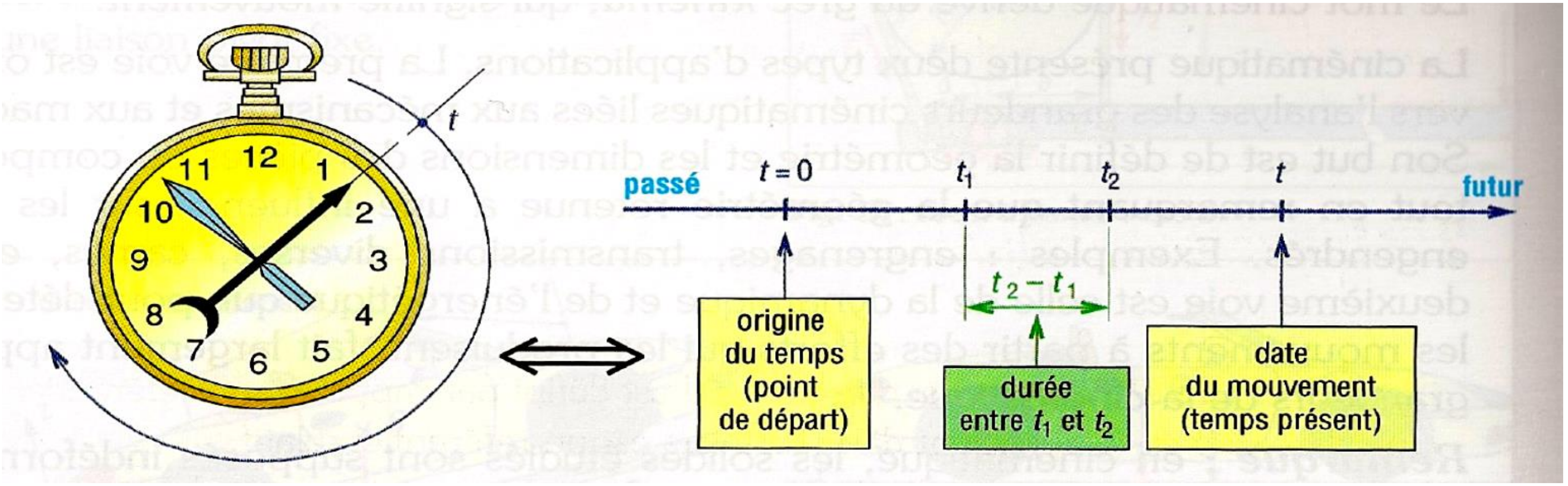
2. DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN POINT

Un point est en mouvement pour un observateur lorsque sa position évolue dans le temps, c'est-à-dire lorsque ses coordonnées sont des fonctions du temps.

Pour caractériser le mouvement il faut se doter d'un repère de temps.

2.1 Le repère de temps

Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie. À chaque instant on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.



2.2 Le choix de l’observateur

Pour décrire le mouvement d’un point matériel correctement, un observateur a besoin:

- De définir sa position à tout instant (repérage dans l’espace);
- De mesurer des intervalles de temps (repérage dans le temps).

Le repère d’espace est un solide de référence par rapport auquel l’observateur étudie la position d’un point M.

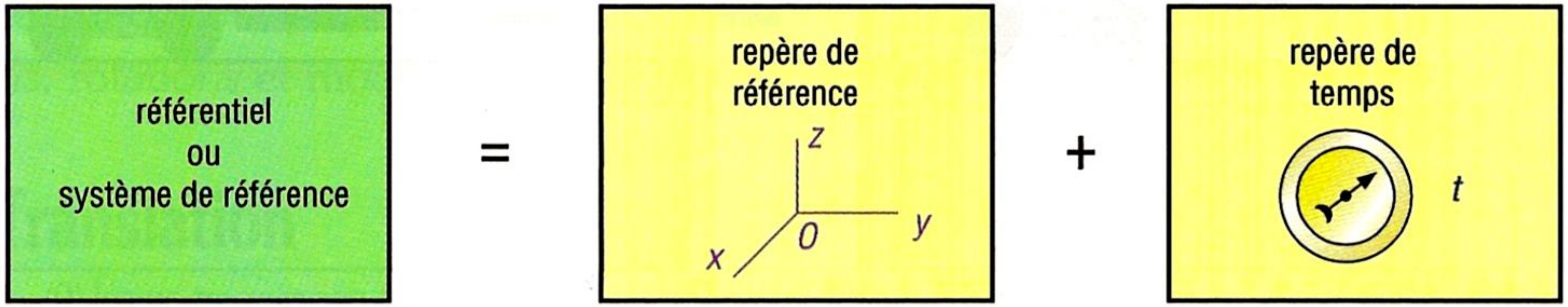
L’observateur utilise aussi un système d’axes de coordonnées lié à ce solide de référence.

Un repère d’espace est l’ensemble des systèmes de coordonnées liés à un solide de référence

2.3 Le référentiel

- On appelle référentiel $\mathcal{R}$ lié à un observateur l'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps liés à cet observateur.

$$\boxed{\text{Référentiel} = \text{Repère d'espace} + \text{Repère de temps}}$$



2.4 Position-Trajectoire-Equations horaires

On étudie le mouvement d'un point mobile dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit un système d'axes de coordonnées liés à ce référentiel.

- **Vecteur position**: A tout instant t, la position du point M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$(t).
- **Trajectoire**: c'est l'ensemble des positions successivement occupées par le point M.
- **Equations horaires:** c'est la donnée de l'évolution des coordonnées du point M au cours du temps.

2.5 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. Il est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, donc tangent à la trajectoire.

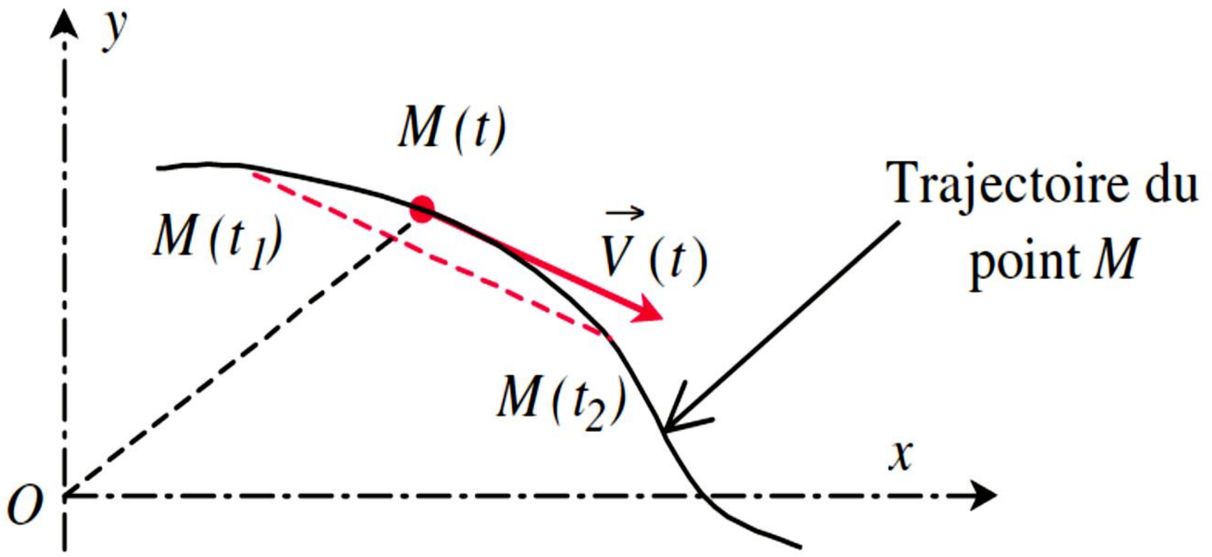


Figure 1.11 Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$ considéré.

2.6 Vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$. C’est aussi la dérivée seconde du vecteur position: $\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$.

On dit d’un mouvement qu’il est accéléré (resp. décéléré) si la norme de la vitesse augmente (resp. diminue).

On dit que le mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.

3. ELEMENTS CINEMATIQUES DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE REPERAGE

3.1 Variations des vecteurs unitaires

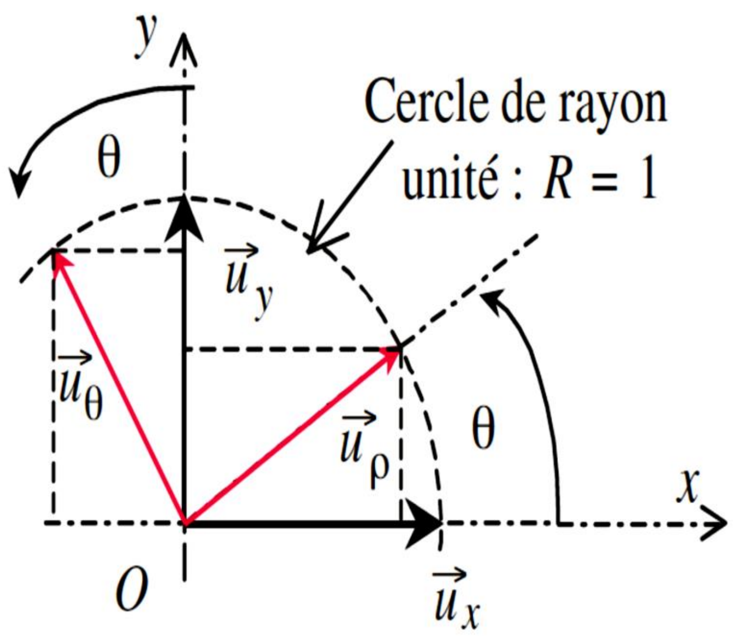
- Coordonnées cartésiennes

Les vecteurs de la base cartésienne sont fixes; ils ne dépendent pas du temps.

$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = 0, \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0, \frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0$$

• Coordonnées cylindro polaires

- $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \cos\boldsymbol{\theta}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \sin\boldsymbol{\theta}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$
- $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\boldsymbol{\theta}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \cos\boldsymbol{\theta}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$



$\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ ne dépendent que de θ

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y = \vec{u}_\theta$$

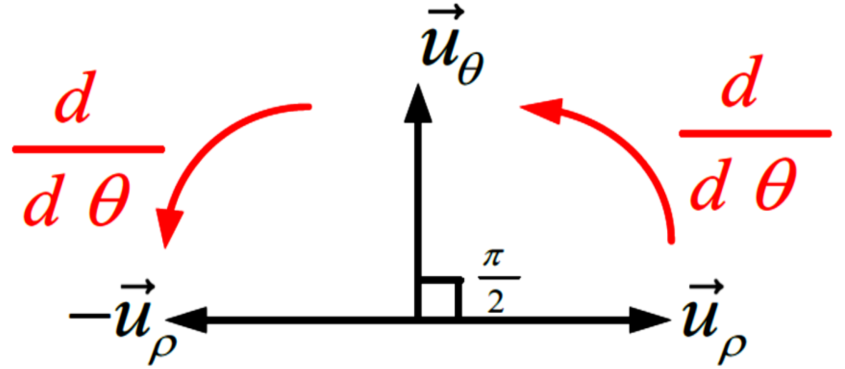
$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y = -\vec{u}_r$$

La coordonnée θ dépend du temps. Ainsi:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}{d\theta}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\theta}}{dt} = \frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\theta}}{d\theta}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}}{dt} = 0$$



3.2 Vecteurs déplacements élémentaires

- Coordonnées cartésiennes

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

- Coordonnées polaires

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta$$

- Coordonnées cylindriques
- $d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$

3.3 Vecteur vitesse et accélération d'un point

- Repérage cartésien

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\boxed{\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z\right) = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z}}$$

• Repérage polaire

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Puisque $d\theta/dt = \dot{\theta}$ et que $d\vec{u}_\rho/d\theta = \vec{u}_\theta$ il vient :

• $\boxed{\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\,)\vec{u}_\theta}}$$

- Repérage cylindrique

$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$

- $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$$

- Il suffit de rajouter $\ddot{z}$ suivant $\vec{u}_z$ à l'accélération obtenue en coordonnées polaires. Soit:

- $$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^{\,2})\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$

4. COMPOSANTES DE FRENET EN COORDONNEES INTRINSEQUES

4.1 Base de Frenet

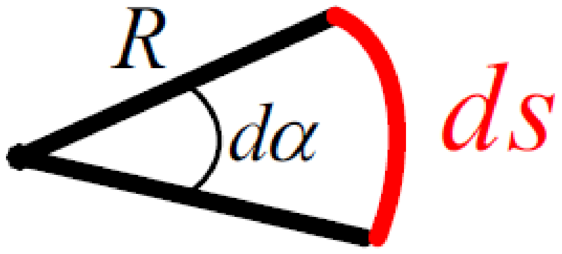
- On peut aussi exprimer la vitesse et l'accélération à partir d'une base mobile ($M, \vec{e}_t, \vec{e}_n$) définie à partir des vecteurs :

➢ $\vec{e}_t$: vecteur tangent à la trajectoire au point M dans le sens du mouvement.

➢ $\vec{e}_n$: vecteur normal à la trajectoire du mouvement dont la droite d'action passe par le centre de courbure de la trajectoire en ce point.

4.2 Vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet

- On définit une abscisse curviligne s sur le cercle qui vérifie $ds = Rd\alpha$



$$ds = Rd\alpha \Longrightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

La vitesse s'exprime par: $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t \Longrightarrow \vec{v} = v\,\vec{e}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

On sait que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \Longrightarrow \frac{d\vec{e}_t}{d\alpha} = \vec{e}_n \Longrightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \vec{e}_n\frac{d\alpha}{dt} = \vec{e}_n\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$= \vec{e}_n\frac{1}{R}v = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

D'où l'expression de **l'accélération dans la base de Frenet** :

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n}}$$

$$\boxed{\boxed{\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \Rightarrow \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right.}}$$

- ✓ a_t est appelée **accélération tangentielle**
- ✓ a_n est appelée **accélération normale centripète**. La composante a_n est toujours positive et donc **le vecteur accélération est toujours tournée vers la concavité.**

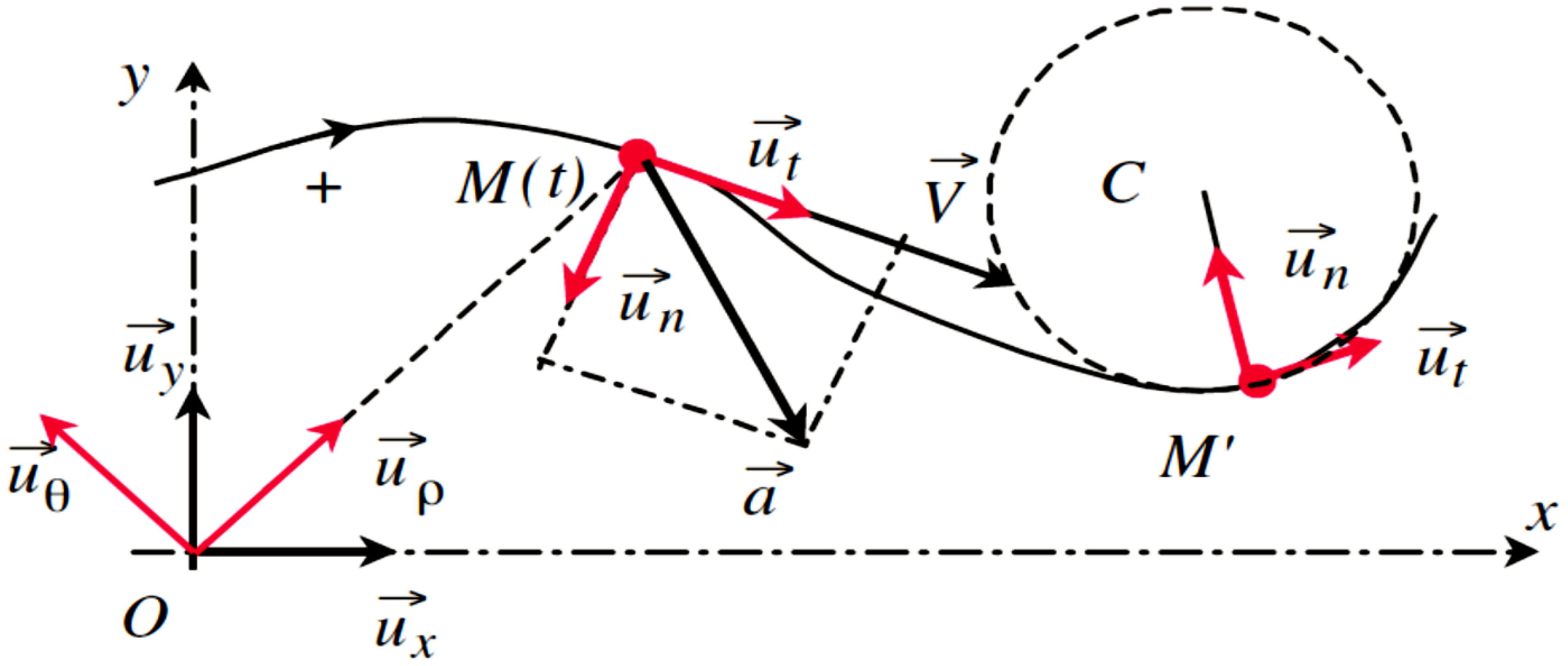


Figure 1.18 Le vecteur accélération et la base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$. Le rayon de courbure en M′ correspond au rayon CM′ du cercle tangent à la trajectoire au point M′ considéré. Les bases polaire et cartésienne sont représentées au point O pour mettre en évidence les différences avec la base de Frenet.

5. EXEMPLES DE MOUVEMENTS USUELS

5.1 Mouvement rectiligne

Mouvement rectiligne uniforme :

Vecteur vitesse constant $\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}_o = V_o \vec{u}_x$

Rectiligne uniformément varié :

$\vec{a}(t) = \text{cste} = \vec{a}_o = a_o \vec{u}_x \Rightarrow \ddot{x} = a_o$ et <u>trajectoire rectiligne</u>.

Exercice d’application:

Un point est soumis à une accélération constante de norme a, dirigé selon l’axe Ox d’un système cartésien.

1) Exprimer les vecteurs vitesse et position associés à ce mouvement.
2) Que deviennent ces vecteurs si le point est immobile à l’origine O du repère à l’instant initial?
3) Que deviennent ces vecteurs si le point est animé d’une vitesse initiale v_0 dirigé dans le sens des Oy croissants à l’instant initial?

5.2 Mouvement uniformément varié

Le vecteur accélération est constant.

Exemple: Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme, particule chargée plongée dans un champ électrique uniforme,…

5.3 Mouvement circulaire

La trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre $\boldsymbol{O}$ et son rayon $\boldsymbol{R}$. L'origine du repère est le centre du cercle. L'axe Oz est perpendiculaire au plan contenant la trajectoire. Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement.

- **Equations horaires du mouvement**
- $r = R = constante$
  $\theta = \theta(t)$

✓ mouvement circulaire uniforme si

- $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 \quad avec\ \dot{\theta} = \omega_0 = cte$: vitesse angulaire

✓ mouvement uniformément varié (accéléré ou décéléré) si

- $\ddot{\theta} = \dot{\theta}_0 = cte$

✓ sinusoïdal si $\theta(t) = \theta_m \cos(\Omega t + \varphi)$

- La figure ci-contre représente les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire quelconque. **Dans le cas où l'accélération tangentielle est dirigée comme le vecteur vitesse le mouvement est accéléré $(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{a_t} > 0)$. Dans le cas contraire, le mouvement serait freiné.**

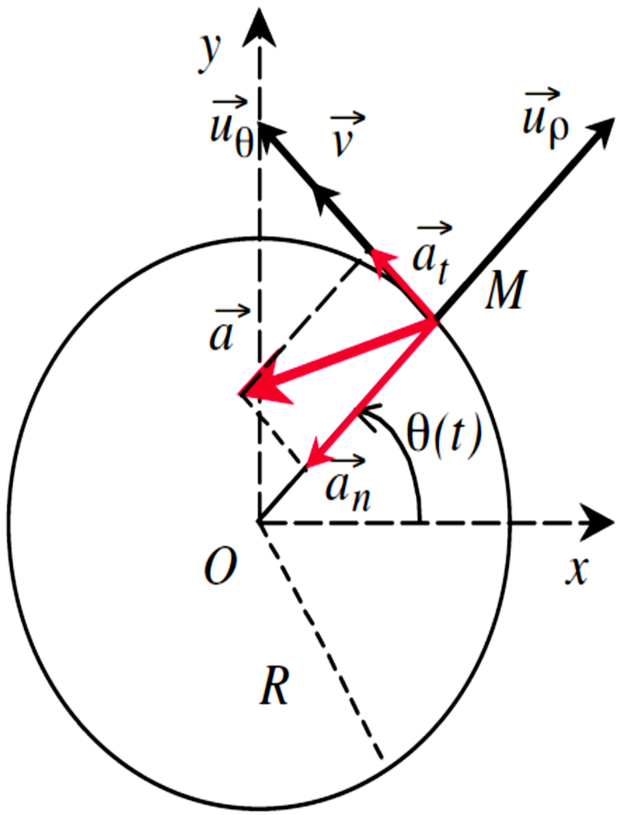


Figure 1.20 Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement circulaire quelconque.

➢ Déterminons les vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire :

✓ le vecteur vitesse

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r = R\vec{u}_r$$

- $\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\vec{u}_r) = R\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = R\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- $\boxed{\boldsymbol{\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega(t)\vec{u}_\theta}}$

✓ le vecteur accélération

- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\omega\vec{u}_\theta) = R\dfrac{d\omega}{dt}\vec{u}_\theta + R\omega\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = R\dot{\omega}\vec{u}_\theta - R\omega^2\vec{u}_r$

- $$\boxed{\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta}}$$

➢ **Déterminons les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet**

- Pour passer de la base polaire à la base de Frenet, il suffit simplement de remplacer :

- $$\begin{cases} \vec{u}_\rho = -\vec{e}_n \\ \vec{u}_\theta = \vec{e}_t \end{cases}$$

✓ le vecteur vitesse

- $$\boxed{\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\,\vec{e}_t = v\,\vec{e}_t \Rightarrow v = R\omega}}$$

✓ le vecteur accélération

- $$\boxed{\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = +R\omega^2\vec{e}_n + R\dot{\omega}\,\vec{e}_t}}$$
- $$\boxed{\boxed{\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \Rightarrow \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = R\dot{\omega} \\ a_n = R\omega^2 \end{array}\right.}}$$
- On le voit bien : **$\vec{a}_n$ est toujours dirigé vers le centre du cercle : composante normale centripète. C'est elle qui fait tourner c'est-à-dire qui rend compte de la variation de la direction du vecteur vitesse.**

- Mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement circulaire uniforme **la vitesse angulaire de rotation est constante.** L'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = \omega_0 = cte$$

L'équation horaire est obtenue par intégration

$$\theta(t=0) = \theta_0 \Longrightarrow \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega_0\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{v}(t) = R\omega_0\vec{u}_\theta}}$$

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega_0\vec{u}_\theta) = R\omega_0 \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -R\omega_0{}^2\vec{u}_r$
- $\boxed{\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = -R\omega_0{}^2\vec{u}_r}}}$

Dans la base de Frenet on a :

$$\vec{u}_r = -\vec{e}_n \Longrightarrow \vec{a} = -R\omega_0{}^2\vec{u}_\rho = R\omega_0{}^2\vec{e}_n$$

$$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = a_n\vec{e}_n = R\omega_0{}^2\vec{e}_n}}}$$

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. Uniforme ne veut donc pas dire accélération nulle.

Expressions générales des $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans un MCU

- Il est possible d'exprimer les vecteurs vitesse et accélération en introduisant le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z$. En remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$, on a :
- $\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\left(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho\right) = \omega\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_\rho = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$
- Soit :
- $\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}}$

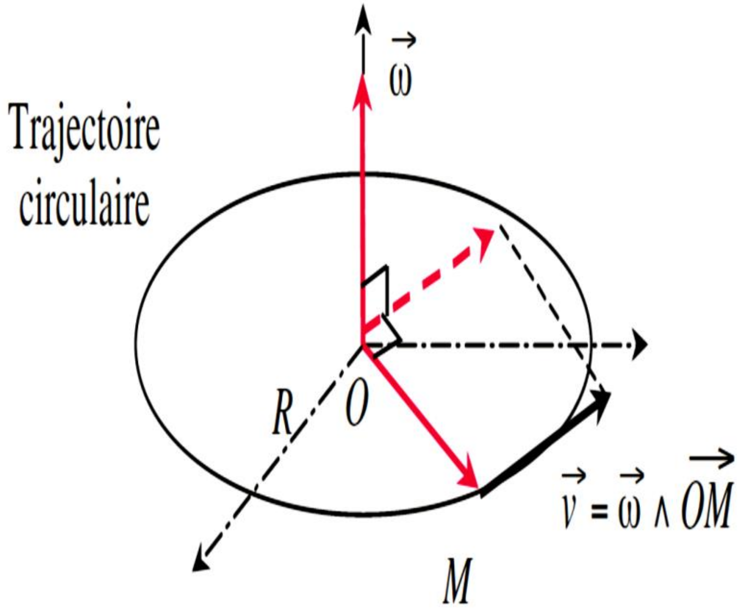


Figure 1.22 Lien entre vecteur vitesse $\vec{v}$ et vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

- Cette expression permet d'exprimer la dérivée du vecteur position indépendamment de la base choisie. **Cette relation est valable pour tout vecteur de norme constante et en rotation**. En particulier on peut écrire :
- $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r) = \omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho$
- $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r$
- $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r = -\omega(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) = \omega(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta)$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

- On admet la propriété suivante :
- **Pour un vecteur $\vec{X}$ de norme $\|\vec{X}\| = X = cte$ et tournant avec la vitesse angulaire ω (dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{\omega}$) :**
- $$\boxed{\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{X}}$$
- **Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire.**

La même règle peut être utilisée pour déterminer le vecteur accélération :

➢ **Composante radiale $\vec{a}_n$**

$$\vec{a}_n = -R\omega^2\vec{u}_r = R\omega^2(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = R\omega^2[\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r)]$$
$$= \omega\vec{u}_z \wedge (\omega\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_r)$$

- $$\boxed{\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}}}$$

➢ **Composante orthoradiale $\vec{a}_t$**

- $\vec{a}_t = R\dot{\omega}\vec{u}_\theta = R\dfrac{d\omega}{dt}(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r) = \dfrac{d(\omega\vec{u}_z)}{dt} \wedge R\vec{u}_r = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge R\vec{u}_r$

- $$\boxed{\boxed{\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}}$$

➢ **Vecteur accélération $\vec{a}$**

- $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Longrightarrow \boxed{\boxed{\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}}$

On peut obtenir directement ce résultat par

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- $$\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}}}$$

Mouvement circulaire rayon *R*	**Coordonnées polaires** **Base** $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$	**Vitesse angulaire** $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$
Position $\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho$	
Vitesse $\vec{v}$	$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta = v\vec{u}_\theta$	$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$
Accélération Normale $\vec{a}_n$	$\vec{a}_n = -R\omega^2\vec{u}_\rho$	$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$
Accélération tangentielle $\vec{a}_t$	$\vec{a}_t = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$	$\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$	$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$

6. DESCRIPTION DU MOUVEMENT D’UN SOLIDE

6.1 Définition d’un solide

Un solide est en ensemble de points rigidement liés, c’est-à-dire fixes les uns par rapport aux autres

6.2 Repérage cinématique d’un solide

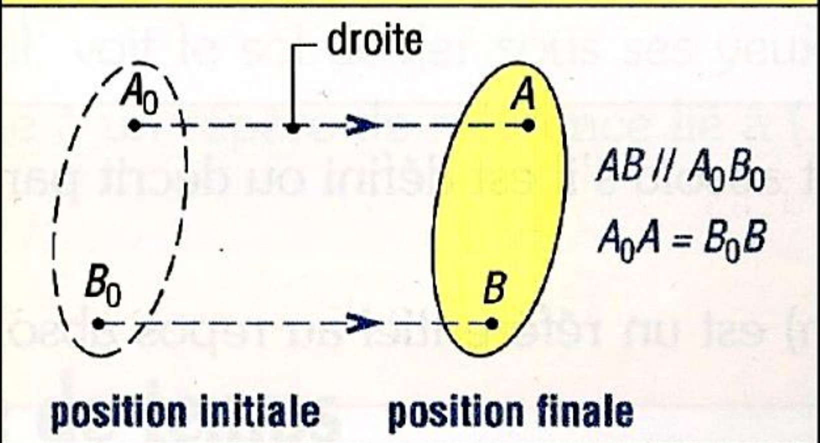
La position d’un solide est entièrement déterminée par un jeu de six variables: les trois coordonnées de l’un de ses points et trois coordonnées angulaires repérant son orientation.

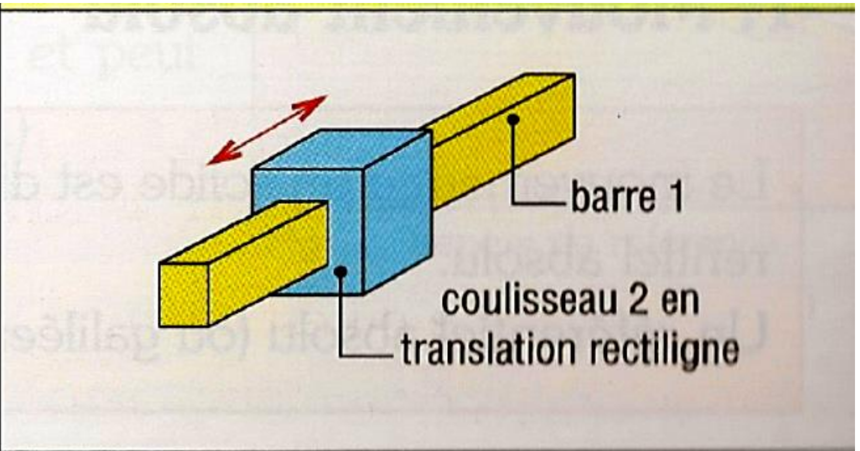
6.3 Mouvement de translation d'un solide

D'une manière générale, **lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps**. Aucune ligne ne subit la moindre rotation. Les lignes verticales restent verticales, les horizontales restent horizontales, etc., pendant toute la durée du mouvement quelles que soient les vitesses et les accélérations.

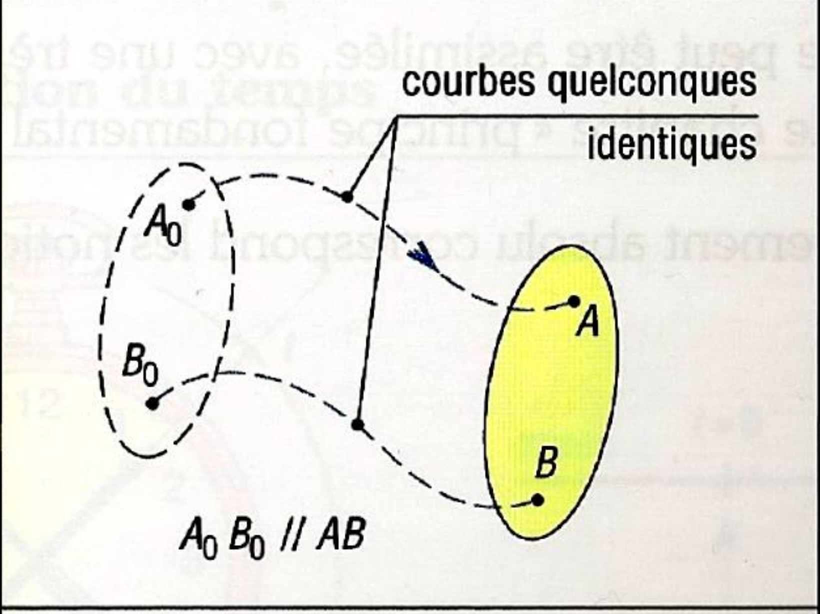
Deux types de translation

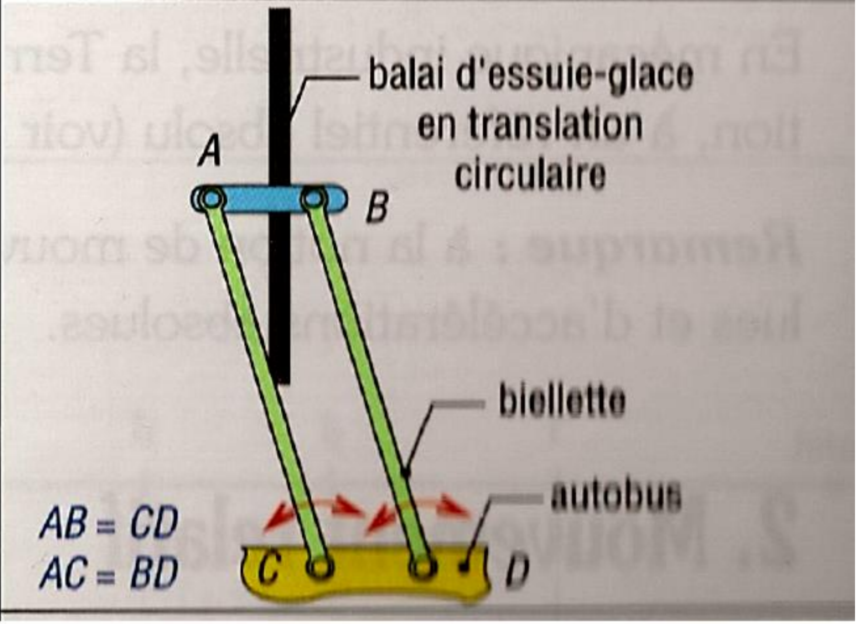
Translation rectiligne





Translation curviligne





Propriétés d'un solide en translation

- **Tous les points** du solide en translation ont des **trajectoires identiques** (courbes géométriques superposables): $T = T_A = T_B = \cdots$
- **Tous les points** du solide ont **même vitesse $\vec{v}$** : $\vec{v} = \vec{V}_A = \vec{V}_B = \cdots$
- Tous les points du solide ont **même accélération $\vec{a}$**: $\vec{a} = \vec{a}_A = \vec{a}_B = \cdots$
- **Le mouvement de translation d'un solide est. complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points**

6.4 Mouvement de rotation d’un solide

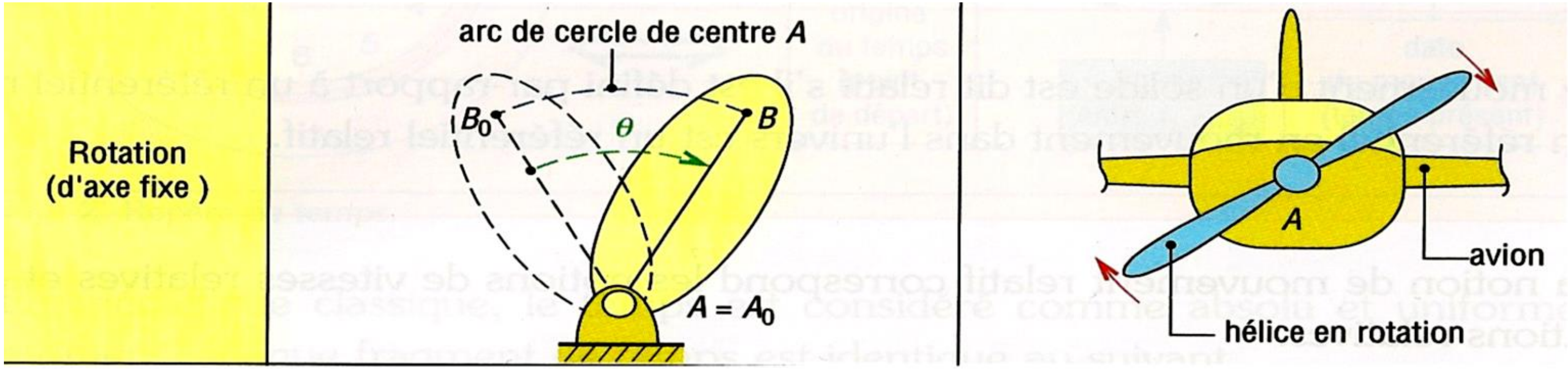
Nous nous limiterons aux **rotations d’axe fixe**. Celles-ci sont de très loin les plus répandues dans le monde des sciences et technologies industrielles. Les exemples de solides en mouvement de rotation d’axe fixe sont très nombreux qu’il s’agisse d’arbres de moteurs de toute nature (électrique, thermique…), d’arbres de turbines, de composants de machines (engrenages, courroies, poulies…), etc .

Propriétés

❑ Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement.

❑ Les points du solide décrivent des cercles ou des circonférences centrés sur l'axe

❑ Toutes les lignes ou droites du solide tournent du même angle θ à chaque instant considéré.



Vitesse d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour exprimer la vitesse d'un point M du solide, choisissons un point d'origine O appartenant à l'axe de rotation. L'axe étant fixe la vitesse du point O est nulle.

La vitesse d'un point M quelconque est donnée par la relation de Varignon:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{e}_z \wedge r\vec{e}_r = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Plus le point est loin de l'axe, plus la norme de sa vitesse est importante !