Chapitre 3

Le théorème de Gauss

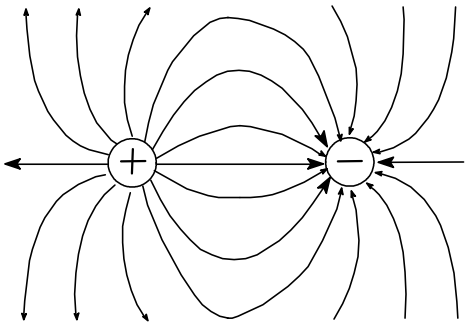
Objectif particulier 1.3

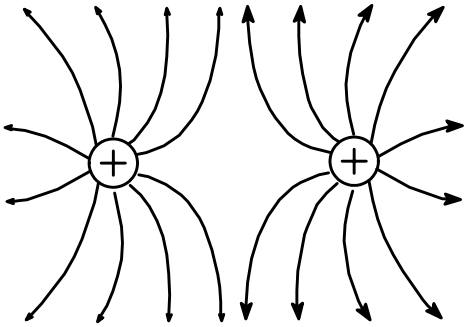
Employer le théorème de Gauss pour résoudre des problèmes de distributions de charges continues afin de déterminer le champ électrique.

Le flux électrique

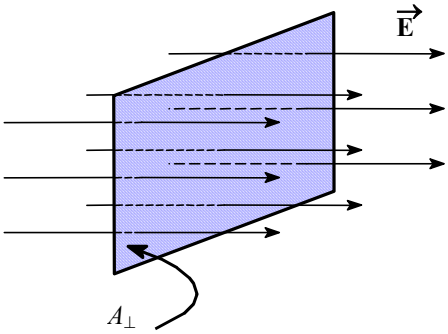
Le champ électrique produit par des charges peut être visualisé par les lignes de champ électrique. Les lignes de champ électrique obéissent aux règles suivantes:

1. Les lignes de champ électrique partent des charges positives et se terminent sur les charges négatives.
2. Les lignes de champ électrique ne se croisent jamais.
3. Les lignes de champ sont parallèles à la direction du champ électrique en chaque point.
4. Le nombre de lignes de champ électrique par unité de surface est proportionnel à la grandeur du champ électrique en chaque point.





Le flux électrique donne une indication du nombre de lignes de champ électrique traversant une surface. Pour un champ électrique uniforme, le flux électrique traversant une surface perpendiculaire au champ électrique se calcule simplement avec



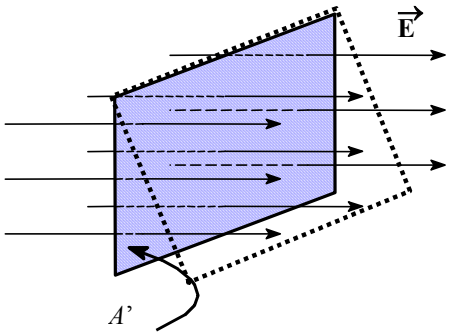
$$\Phi_E = E\ A_\perp$$

où Φ_E est le flux électrique en newtons mètres carrés par coulomb,
E est le champ électrique en newtons par coulomb
et $A_\perp$ est la surface perpendiculaire en mètres carrés.

Note: Le cas où un champ électrique uniforme traverse une surface (plane) perpendiculaire illustre la situation la plus simple pour le calcul du flux électrique.

Si la surface n'est pas perpendiculaire au champ électrique mais que le champ électrique est uniforme, la projection de la surface dans un plan perpendiculaire au champ électrique donne un flux électrique qui se calcule encore simplement avec

$$\Phi_E = E\,A'$$

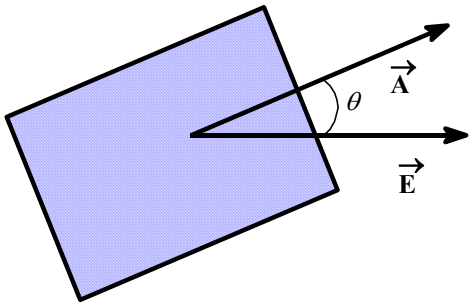


où Φ_E est le flux électrique en newtons mètres carrés par coulomb,
E est le champ électrique en newtons par coulomb
et A' est la projection de la surface sur un plan perpendiculaire (au champ électrique uniforme) en mètres carrés.

Note: Le nombre de lignes de champ électrique traversant la projection d'une surface sur un plan perpendiculaire (au champ électrique uniforme) est le même.

Pour un champ électrique uniforme, le flux électrique se calcule avec

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \bullet \vec{\mathbf{A}} = E\,A\,\cos\theta$$



où Φ_E est le flux électrique en newtons mètres carrés par coulomb,
$\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb,
$\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur surface en mètres carrés,
E est le champ électrique en newtons par coulomb,
A est la surface en mètres carrés
et θ est l'angle entre $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{A}}$ en degrés.

Note: Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est dirigé perpendiculairement à la surface. Il s'agit d'une surface plane.

1. Un champ électrique uniforme de $4{\cdot}10^3$ newtons par coulomb traverse une surface de 4 cm^2.

a) Quel est le flux électrique traversant la surface si l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface est de 0° ?

b) Quel est le flux électrique traversant la surface si l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface est de 30° ?

c) Quel est le flux électrique traversant la surface si l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface est de 60° ?

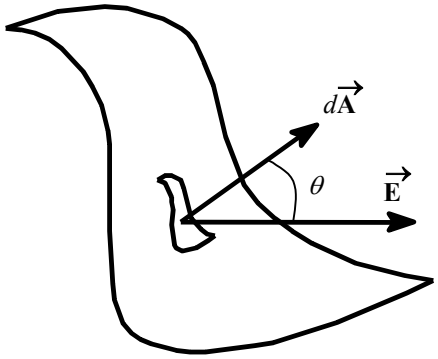
d) Quel est le flux électrique traversant la surface si l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface est de 90° ?

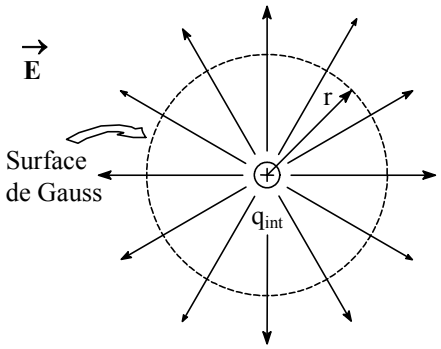
Démonstration du théorème de Gauss

Si le champ électrique n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane, le flux électrique se calcule avec

$$\Phi_E = \iint \vec{\mathbf{E}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

où Φ_E est le flux électrique en newtons mètres carrés par coulomb,
$\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb
et $d\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur élément de surface infinitésimal en mètres carrés.





Cette intégration est souvent simplifiée par la géométrie de la surface ou la symétrie du champ $\vec{\mathbf{E}}$. La surface de Gauss est une surface fermée choisie pour que l'angle soit de 0° ou 90° entre $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{A}}$ partout à la surface, ainsi on aura $\vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = 0$ ou $\vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = E\ dA$.

Par exemple, une particule chargée produit un champ électrique radial autour d'elle. Dans ce cas, la surface de Gauss est une sphère avec la particule au centre. Le champ électrique à la surface de la sphère entourant une particule chargée est constant, ainsi, le flux électrique net (pour une surface fermée) est

$$(\Phi_E)_{net} = \oiint_{\substack{\text{Surface de} \\ \text{Gauss}}} \vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = E \oiint_{\substack{\text{Surface de} \\ \text{Gauss}}} dA = E\left(4\,\pi\,r^2\right)$$

où $(\Phi_E)_{net}$ est le flux électrique net en newtons mètres carrés par coulomb,
$\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb,
$d\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur élément de surface infinitésimal en mètres carrés,
E est le champ électrique en newtons par coulomb,
dA est l'élément de surface infinitésimal en mètres carrés
et r est le rayon de la surface de Gauss en mètres.

À l'aide de l'expression du champ électrique pour une particule chargée, on a

$$E = \frac{k\,q_{int}}{r^2} = \frac{q_{int}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \Rightarrow (\Phi_E)_{net} = E\,(4\,\pi\,r^2) = \left(\frac{q_{int}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\right)(4\,\pi\,r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où E est le champ électrique en newtons par coulomb,
k est la constante de la loi de Coulomb ($8{,}99 \cdot 10^9$ N·m^2/C^2),
q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss en coulombs,
ε_0 est la permittivité du vide ($8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N·m^2),
r est le rayon de la surface de Gauss en mètres
et $(\Phi_E)_{net}$ est le flux électrique net en newtons mètres carrés par coulomb.

Ce dernier résultat, obtenu pour une sphère entourant une charge seule, est valide pour n'importe quelle surface fermée entourant une distribution de charge. Cette relation s'appelle théorème de Gauss. Le théorème de Gauss donne la relation entre la charge totale à l'intérieur d'une surface fermée et le flux électrique net (traversant cette surface fermée), soit

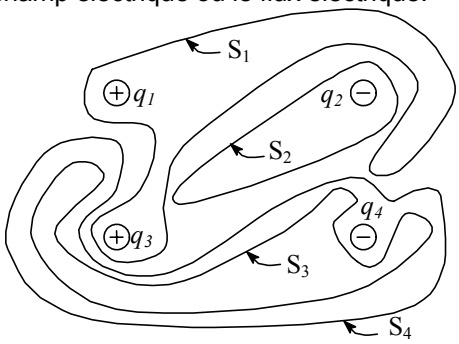
$$\oiint_{\substack{\text{Surface de} \\ \text{Gauss}}} \vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb,
$d\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur élément de surface infinitésimal en mètres carrés,
q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss en coulombs
et ε_0 est la permittivité du vide ($8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N·m^2).

Le théorème de Gauss sert généralement à trouver l'expression du champ électrique ou le flux électrique.

2. Soit la distribution de charge et les surfaces fermées ci-jointes avec les valeurs de charge suivantes:

q_1=+50 μC ,
q_2=-20 μC ,
q_3=+35 μC
et q_4=-15 μC .



a) Quel est le flux électrique traversant la surface S_1 ?

b) Quel est le flux électrique traversant la surface S_2 ?

c) Quel est le flux électrique traversant la surface S_3 ?

d) Quel est le flux électrique traversant la surface S_4 ?

3. Soit un fil rectiligne de longueur infinie chargé uniformément. La densité linéaire de charge du fil est $\lambda = 500 \cdot 10^{-6}$ C/m.

Note: La surface de Gauss pour un fil rectiligne est un cylindre fermé avec le fil au centre.

a) Quelle est l'expression du flux électrique produit par une longueur ℓ de fil ?

b) Quel est le flux électrique produit par une longueur de 20 cm de fil ?

c) Quelle est l'expression du champ électrique à une distance r du fil ?

d) Quelle est la grandeur du champ électrique à la distance de 5 cm du fil ?

Les isolants chargés

Les charges sont immobiles à l'intérieur d'un isolant parfait; il peut y avoir la présence de charges et d'un champ électrique à l'intérieur d'un isolant parfait en équilibre électrostatique. Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique pour les distributions de charges ayant une géométrie simple. La surface de Gauss employée possède, comme avant, la même symétrie que la distribution de charge.

Pour une distribution de charge à symétrie sphérique, on emploie une surface de Gauss de forme sphérique dont le centre coïncide avec celui de la sphère isolante. Pour une sphère isolante ayant une densité volumique de charge constante, la densité volumique de charge est alors

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3\,Q}{4\,\pi\,a^3}$$

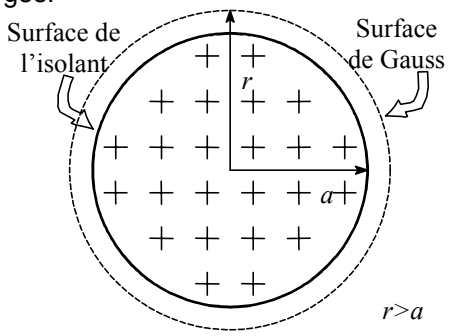
où ρ est la densité volumique de charge en coulombs par mètre cube,
Q est la charge totale de la sphère chargée en coulombs,
V est le volume de la sphère chargée en mètres cubes
et a est le rayon de la sphère chargée en mètres.

L'expression du champ électrique à l'extérieur de la sphère isolante est trouvée à l'aide d'une surface de Gauss ayant un rayon plus grand que celui de la sphère isolante chargée.

Soit

$$\oiint_{\substack{\text{Surface de}\\ \text{Gauss}}} \vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = E\,A = E\left(4\,\pi\,r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} = \frac{k\,Q}{r^2}$$

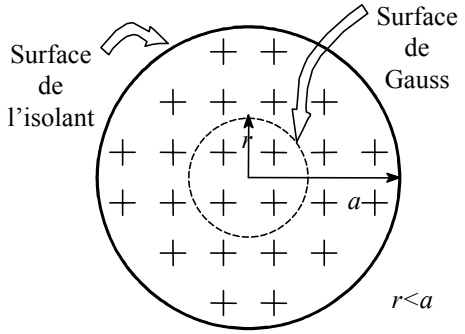


où $\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb,
$d\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur élément de surface infinitésimal en mètres carrés,
E est le champ électrique en newtons par coulomb,
A est la surface en mètres carrés,
Q est la charge totale de la sphère chargée en coulombs,
ε_0 est la permittivité du vide ($8{,}85\cdot10^{-12}$ $C^2/N\cdot m^2$)
r est le rayon de la surface de Gauss en mètres
et k est la constante de la loi de Coulomb ($8{,}99\cdot10^{9}$ $N\cdot m^2/C^2$).

L'expression du champ électrique à l'intérieur de la sphère isolante est trouvée à l'aide d'une surface de Gauss ayant un rayon plus petit que celui de la sphère isolante chargée.

La densité volumique de charge sert à déterminer la quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss, soit

$$q_{\text{int}} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho$$
$$= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\left(\frac{3Q}{4\pi a^3}\right) = \frac{r^3}{a^3}Q$$



où q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss en coulombs,
r est le rayon de la surface de Gauss en mètres,
ρ est la densité volumique de charge en coulombs par mètre cube,
Q est la charge totale de la sphère chargée en coulombs
et a est la rayon de la sphère chargée en mètres.

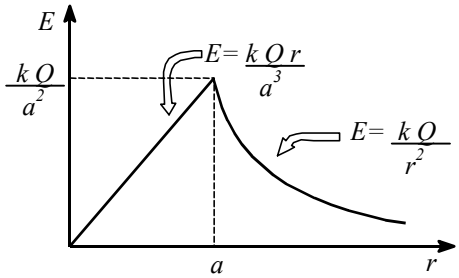
Ainsi, on a

$$\oiint_{\text{Surface de Gauss}} \vec{\mathbf{E}} \bullet d\vec{\mathbf{A}} = E\,A = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{r^3\,Q}{a^3\,\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{Q\,r}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3} = \frac{k\,Q\,r}{a^3}$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ est le vecteur champ électrique en newtons par coulomb,
$d\vec{\mathbf{A}}$ est le vecteur élément de surface infinitésimal en mètres carrés,
E est le champ électrique en newtons par coulomb,
A est la surface en mètres carrés,
r est le rayon de la surface de Gauss en mètres,
q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss en coulombs,
ε_0 est la permittivité du vide ($8{,}85\cdot10^{-12}$ C^2/N·m^2),
Q est la charge totale de la sphère en coulombs,
a est la rayon de la sphère en mètres
et k est la constante de la loi de Coulomb ($8{,}99\cdot10^{9}$ N·m^2/C^2).

Pour $r = a$, le champ électrique calculé par l'une ou l'autre des expressions est le même.



4. Soit une sphère isolante avec un rayon de 12 cm et une densité volumique de charge de 8 μC/m^3.

a) Quelle est la charge totale de la sphère isolante ?

b) Quelle est la grandeur du champ électrique à une distance de 15 cm du centre de la sphère ?

c) Quelle est la charge à l'intérieur d'une surface de Gauss ayant un rayon de 6 cm ?

d) Quelle est la grandeur du champ électrique à une distance de 6 cm du centre de la sphère ?

5. Soit un cylindre isolant de longueur infinie avec un rayon de 12 cm et une densité volumique de charge de 8 $\mu C/m^3$.

a) Quelle est l'expression du champ électrique à l'extérieur du cylindre isolant à la distance r de l'axe du cylindre ?

b) Quelle est la grandeur du champ électrique à l'extérieur du cylindre en un point situé à 15 cm de l'axe du cylindre ?

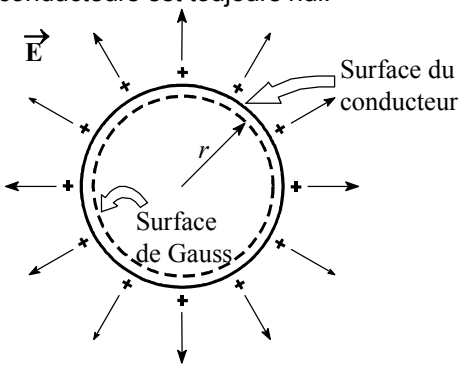
c) Quelle est l'expression du champ électrique à l'intérieur du cylindre isolant à la distance r de l'axe du cylindre ?

d) Quelle est la grandeur du champ électrique à l'intérieur du cylindre en un point situé à 6 cm de l'axe du cylindre ?

Les conducteurs chargés

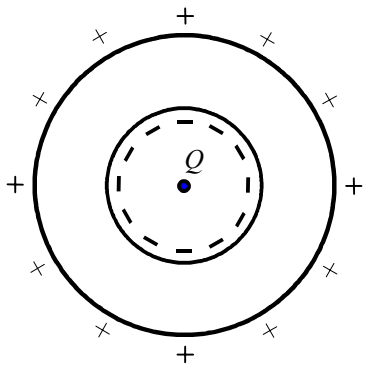
Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul si les charges sont immobiles. En effet, s'il y avait un champ électrique dans le conducteur, les électrons libres se déplaceraient. Donc, en électrostatique (lorsque les charges sont immobiles), le champ électrique dans les conducteurs est toujours nul.

On montre que le champ électrique près de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est perpendiculaire à cette surface. En effet, si le champ électrique n'était pas perpendiculaire à la surface, il y aurait une composante parallèle à la surface qui causerait un déplacement des électrons libres situés à la surface du conducteur.

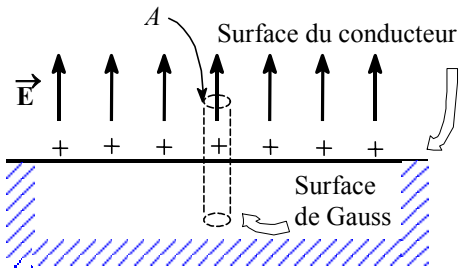


On montre également que l'intérieur du conducteur est neutre et que toute la charge se trouve sur la surface du conducteur. En effet, en prenant une surface de Gauss juste sous la surface du conducteur, le flux électrique net devient nul (puisque le champ électrique est nul dans un conducteur) et donc la quantité nette de charges est nulle à l'intérieur du conducteur.

Dans le cas où il y aurait une charge située dans une cavité isolée à l'intérieur d'un conducteur, une charge de grandeur égale et opposée est induite sur la face intérieure de la cavité afin que la charge nette à l'intérieur du conducteur soit encore nulle.



Le théorème de Gauss sert maintenant à trouver l'expression du champ électrique près de la surface d'un conducteur. La surface de Gauss choisie est un cylindre avec les extrémités parallèles à la surface du conducteur (l'une au-dessus et l'autre en-dessous). Le flux électrique traverse perpendiculairement l'extrémité extérieure du cylindre. Alors, on a



$$\left(\Phi_E\right)_{net} = E\,A = \frac{\sigma\,A}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

où $\left(\Phi_E\right)_{net}$ est le flux électrique net en newtons mètres carrés par coulomb,
E est le champ électrique en newtons par coulomb,
A est la surface en mètres carrés,
σ est la densité surfacique de charge en coulombs par mètre carré
et ε_0 est la permittivité du vide ($8{,}85\cdot10^{-12}$ $C^2/N\cdot m^2$).

6. Une sphère conductrice ayant un rayon de 8 cm porte initialement une charge de 80 μC. Par la suite, une charge ponctuelle de -20 μC est introduite au centre d'une cavité sphérique ayant un rayon de 2,5 cm à l'intérieur de la sphère.

a) Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure de la sphère conductrice ?

b) Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface intérieure de la sphère conductrice (dans la cavité) ?

c) Quelle est la charge totale sur la surface intérieure de la cavité de la sphère conductrice ?

d) Quelle est la charge totale sur la surface extérieure de la sphère conductrice ?

7. Un cylindre creux et conducteur porte initialement une densité linéaire de charge de 9 μC/m. Le rayon du cylindre est de 3 cm. Par la suite, une tige mince ayant une densité linéaire de charge de 5 μC/m est entièrement glissée au centre du cylindre creux. La tige et le cylindre ont, tous les deux, une longueur infinie.

a) Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre avant que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

b) Quelle est la densité linéaire de charge portée par la surface extérieure du cylindre creux après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

c) Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

d) Quelle est la grandeur du champ électrique à 2 cm du centre du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?

Réponses

1. a) 1,6 N·m^2/C b) 1,386 N·m^2/C c) 0,8 N·m^2/C d) 0 N·m^2/C
2. a) 9,61·10^6 N·m^2/C b) -2,260·10^6 N·m^2/C c) 0 N·m^2/C d) -1,695·10^6 N·m^2/C
3. a) $\Phi_E = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$ b) 11,30·10^6 N·m^2/C c) $E = \frac{2 k \lambda}{r}$ d) 180·10^6 N/C
4. a) 57,91 nC b) 23,16·10^3 N/C c) 7,238 nC d) 18,10·10^3 N/C
5. a) $E = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0 r}$ b) 43,39·10^3 N/C c) $E = \frac{\rho r}{2 \varepsilon_0}$ d) 27,12·10^3 N/C
6. a) 84,30·10^6 N/C b) 288,0·10^6 N/C c) +20 μC d) +60 μC
7. a) 5,400·10^6 N/C b) 14 μC/m c) 8,4·10^6 N/C d) 4,5·10^6 N/C

© Tous droits réservés, Richard Fradette