

Mécanique du point

1. CINÉMATIQUE du point

Objectifs

- Connaître le système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques
- Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques
- Connaître la définition de quelques mouvements particuliers

Sommaire

1. Définition
2. Référentiel
3. Repère
4. Vecteur vitesse
5. Vecteur accélération
6. Exemples de mouvement
7. Récapitulatif

Sommaire

1. Définition

- Définition
- Objet

2. Référentiel

3. Repère

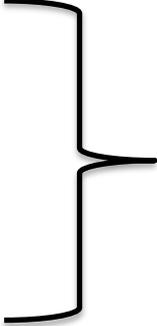
4. Vecteur vitesse

5. Vecteur accélération

6. Exemples de mouvement

7. Récapitulatif

1. DÉFINITION

- Etude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance.
- **Objet de la cinématique :**
 - Décrire la position
 - La vitesse
 - L'accélération

d'un point
au cours du temps

Sommaire

1. Définition

2. Référentiel

- Nécessité d'un référentiel
- Définition
- Caractéristique d'un référentiel
- Exemples

3. Repère

4. Vecteur vitesse

5. Vecteur accélération

6. Exemples de mouvement

7. Récapitulatif

2. REFERENTIEL

- Nécessité d'un référentiel :
 - Mouvement d'un point
 - Observateur qui analyse
 - Emplacement de l'observateur
- Un référentiel (ou solide de référence) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.

2. REFERENTIEL

- Caractéristique d'un référentiel :
 - Nom
 - Repère (Point O et 3 directions fixes)
- Exemples :
 - Référentiel de Copernic
 - Référentiel géocentrique
 - Référentiel terrestre

Sommaire

1. Définition

2. Référentiel

3. Repère

- Repère d'espace
- Repère de temps
- Systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques)

4. Vecteur vitesse

5. Vecteur accélération

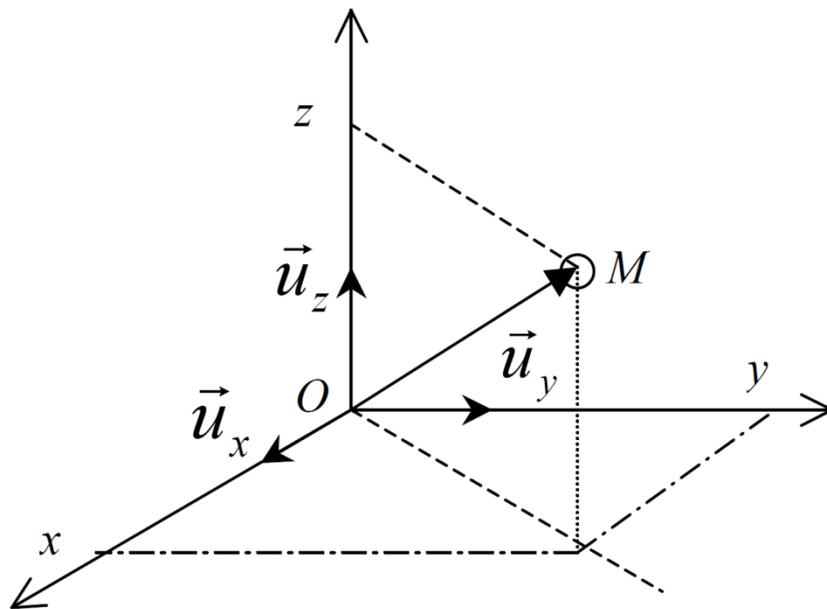
6. Exemples de mouvement

7. Récapitulatif

janvier 17

3. REPERES

Où se trouve le point ?



REPÈRE d'espace

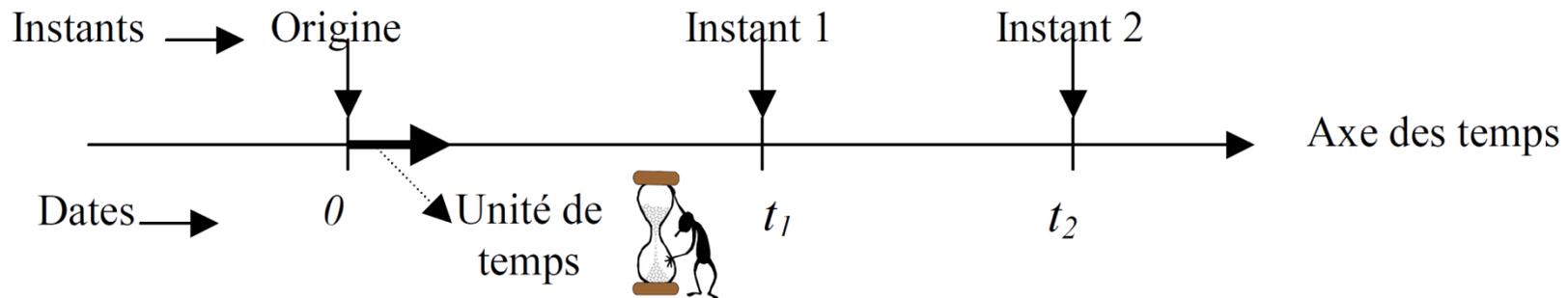
- Lié au référentiel
- **Origine O** fixe dans le référentiel
- **Axes de référence (x,y,z) .**
- Axes liés au référentiel.

3. REPERES

A quel moment ?

REPÈRE de temps

- Instant 1, instant 2
- Date t1, date t2
- Durée $t_2 - t_1$



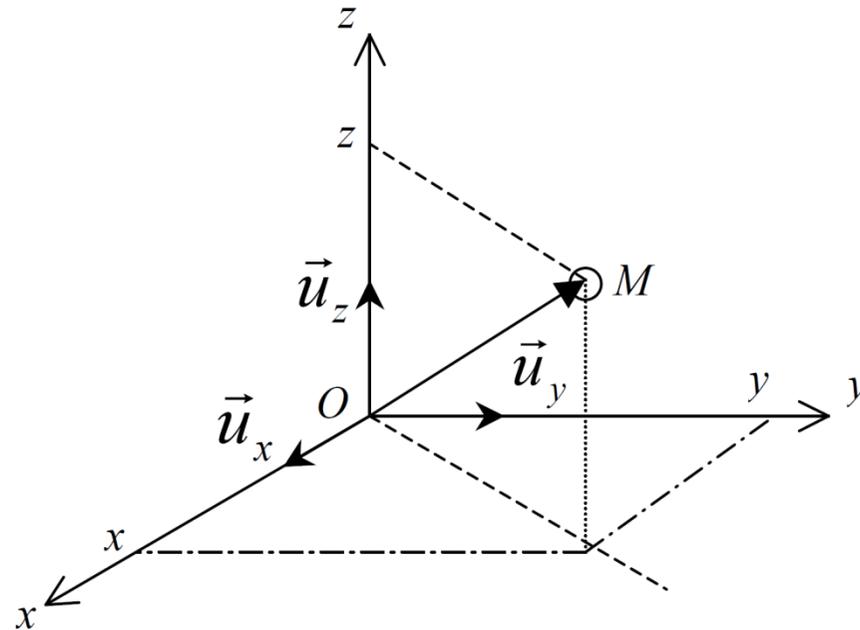
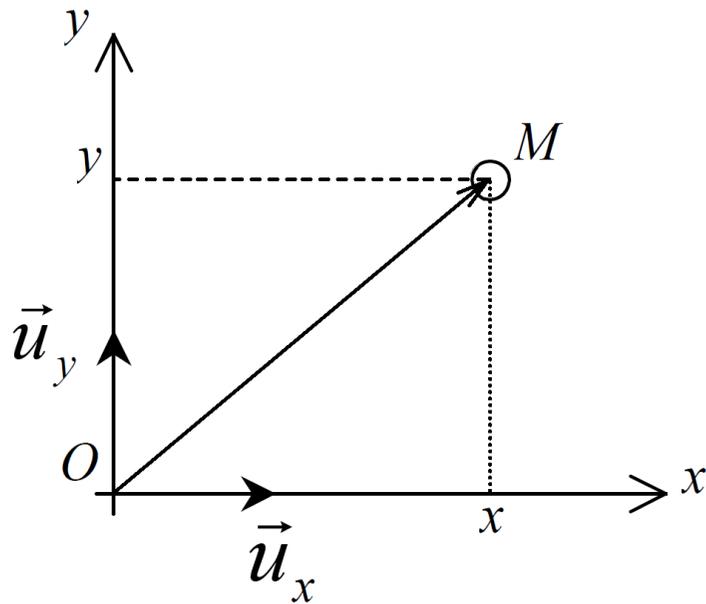
3. REPERES

- Coordonnées cartésiennes
- Coordonnées polaires
- Coordonnées cylindriques
- Système de coordonnées à choisir en fonction du mouvement du point mobile:
 - Trajectoire circulaire → coordonnées polaires
- Passage d'un système de coordonnées à un autre

3. REPERES

Coordonnées cartésiennes

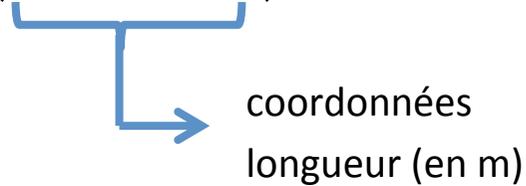
- Dans le plan
- Dans l'espace



3. REPERES

Coordonnées cartésiennes (suite)

- (x, y, z)

 coordonnées
longueur (en m)

- Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

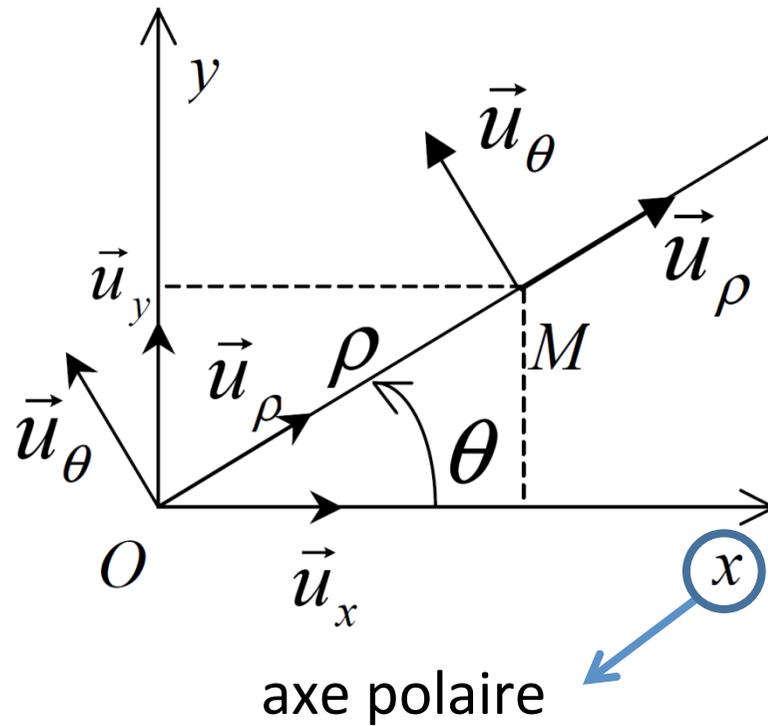
- Base fixe dans le référentiel

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

3. REPERES

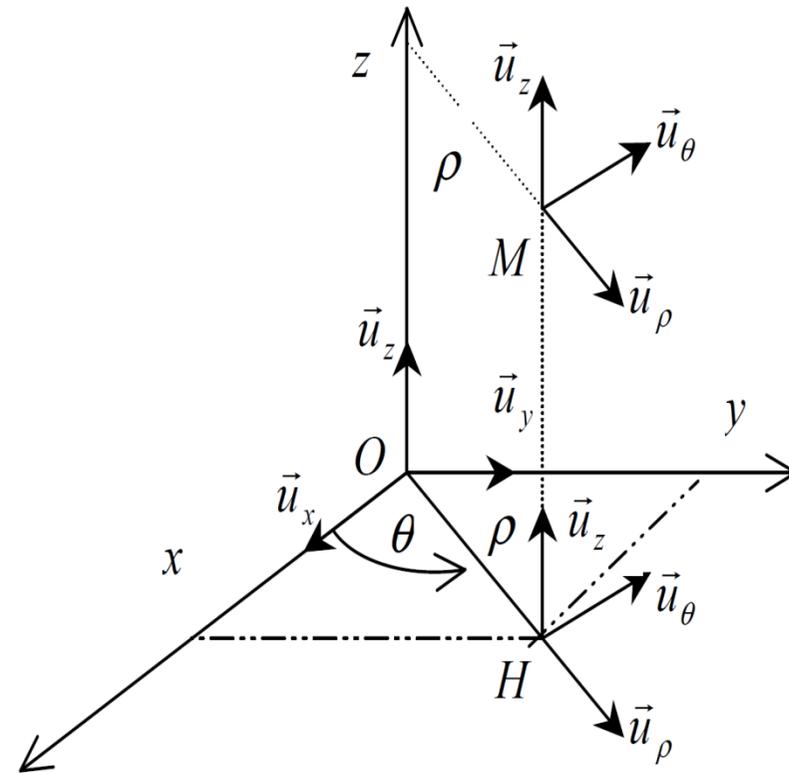
Coordonnées polaires

- Dans le plan



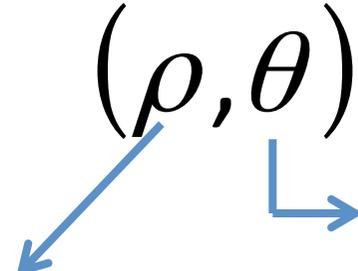
Coordonnées cylindriques

- Dans l'espace



3. REPERES

Coordonnées polaires (suite)

- (ρ, θ)


coordonnée radiale
longueur (en m)

coordonnée angulaire
(angle polaire, azimuth)
angle (en rad)

- Base mobile dans le référentiel

$$\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta \right)$$

- Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

3. REPERES

Coordonnées cylindriques (suite)

- (ρ, θ, z)
cote
longueur (en m)

- Base mobile dans le référentiel

$$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$$

- Vecteur position

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

3. REPERES

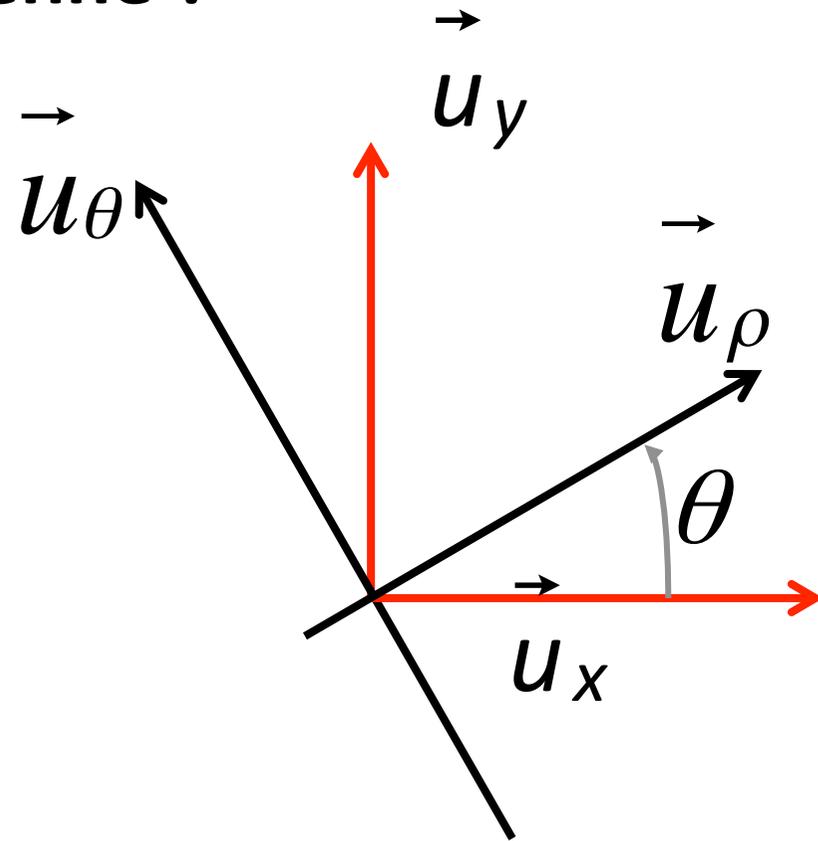
Passage polaire \rightarrow cartésienne ?

$$x = ?$$

$$y = ?$$

$$\vec{u}_x = ?$$

$$\vec{u}_y = ?$$



3. REPERES

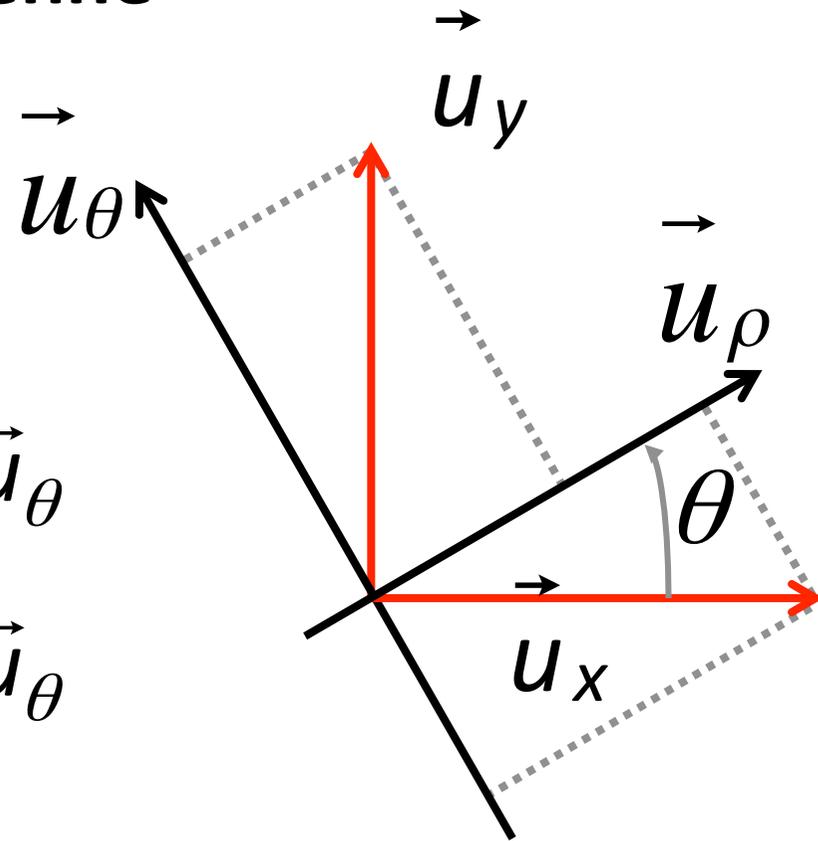
Passage polaire \rightarrow cartésienne

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\vec{u}_x = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_y = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta$$



3. REPERES

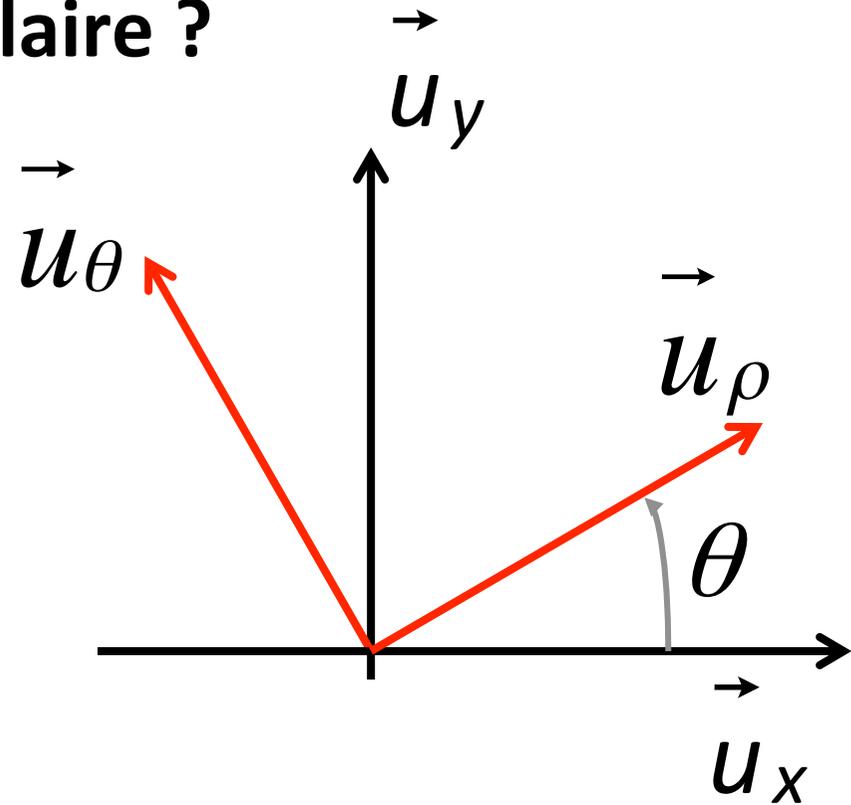
Passage cartésienne \rightarrow polaire ?

$$\rho = ?$$

$$\tan \theta = ?$$

$$\vec{u}_\rho = ?$$

$$\vec{u}_\theta = ?$$



3. REPERES

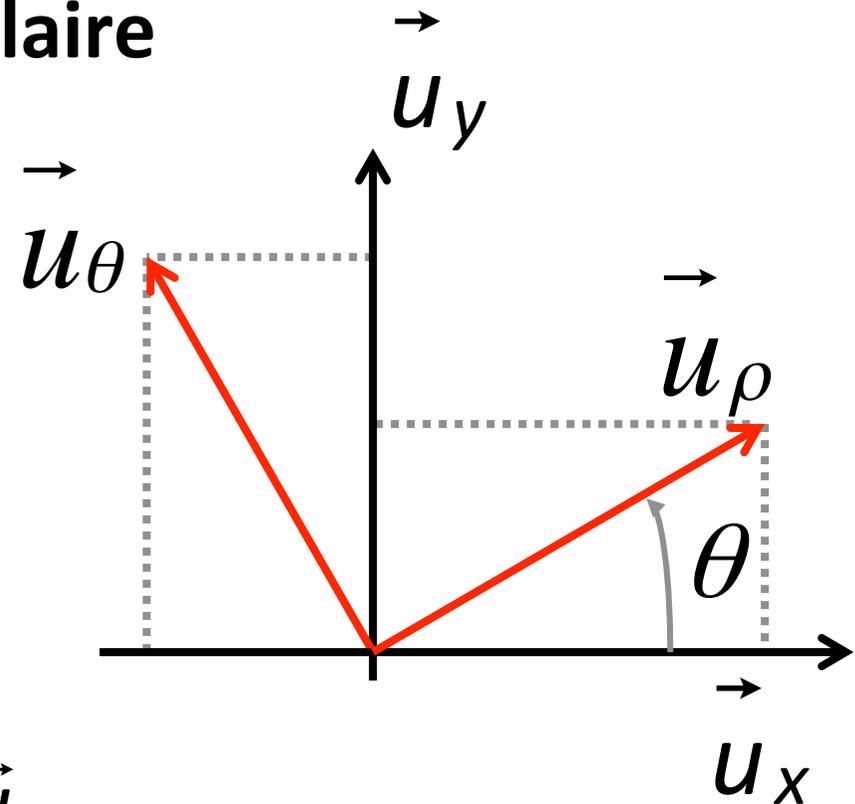
Passage cartésienne \rightarrow polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$



Sommaire

1. Définition

2. Référentiel

3. Repère

4. Vecteur vitesse

- Définitions (vitesse moy., instant., angulaire) / Unités
- Expression en coordonnées cartésiennes / polaires / cylindriques
- Expression dans la base de Freinet

5. Vecteur accélération

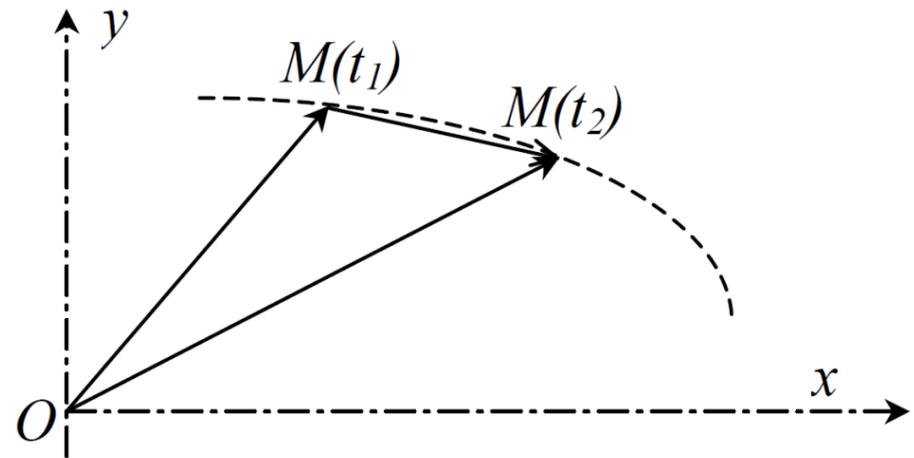
6. Exemples de mouvement

7. Récapitulatif

4. VECTEUR VITESSE

Vitesse moyenne

- Direction et sens ceux du mouvement (de M_1 vers M_2).
- *La norme renseigne* sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps.
- Unités SI
 - mètre/seconde
 - $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$



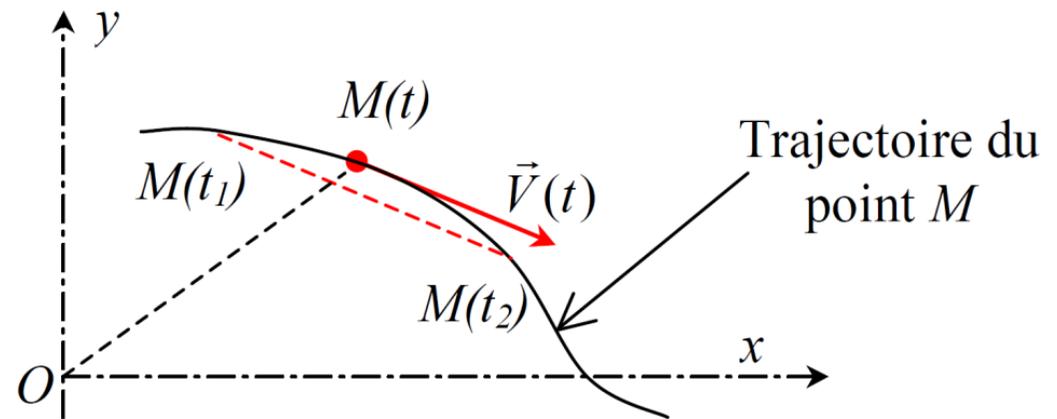
$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$$

4. VECTEUR VITESSE

Vitesse instantanée

- Vitesse = dérivée par rapport au temps du vecteur position
- Durée élémentaire (infiniment petite) : dt
- Vecteur déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{l}$$



$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow \vec{V}(t) dt = d\vec{l}$$

4. VECTEUR VITESSE

Expression en coordonnées cartésiennes

- Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

- Vecteur vitesse

$$\vec{V}(t) = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

- Norme du vecteur vitesse

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

4. VECTEUR VITESSE

Expression en coordonnées polaires / cylindriques

- Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

– Composante radiale

$$V_\rho = \dot{\rho}$$

- Vecteur vitesse

$$\vec{V}(t) = V_\rho \vec{u}_\rho + V_\theta \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

– Composante orthoradiale

$$V_\theta = \rho \dot{\theta}$$

- Norme du vecteur vitesse

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

4. VECTEUR VITESSE

Cas du mouvement plan (base de Freinet)

- Vecteur vitesse :
Tangent à la trajectoire au point M

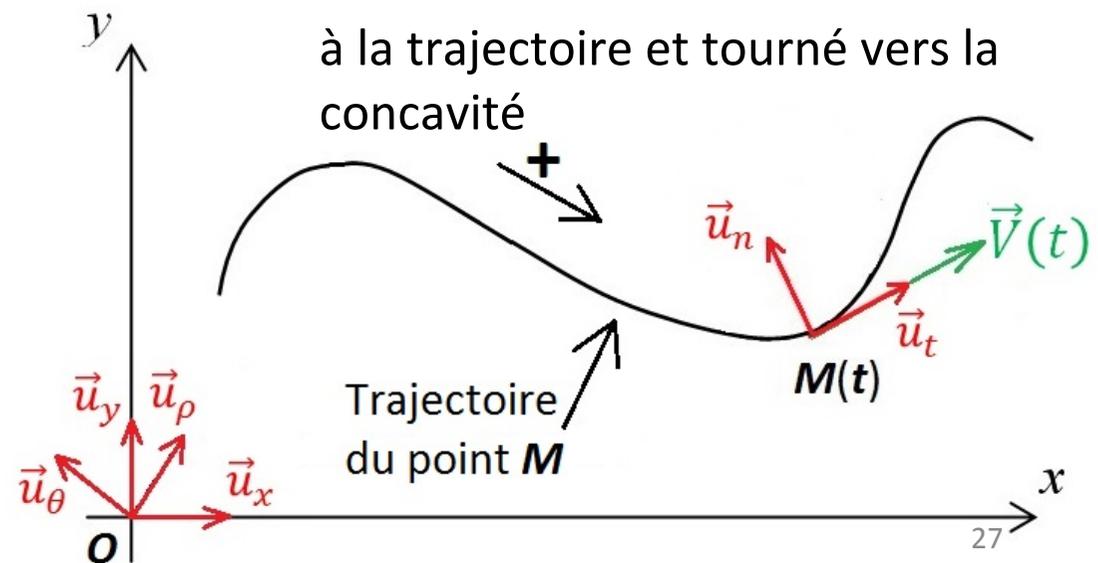
$$\vec{V}(t) = v \vec{u}_t$$

- Norme du vecteur vitesse

$$\|\vec{V}(t)\| = V = |v|$$

Base de Freinet

- Base mobile
- \vec{u}_t : vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté comme celle-ci
- \vec{u}_n : vecteur unitaire normal à la trajectoire et tourné vers la concavité



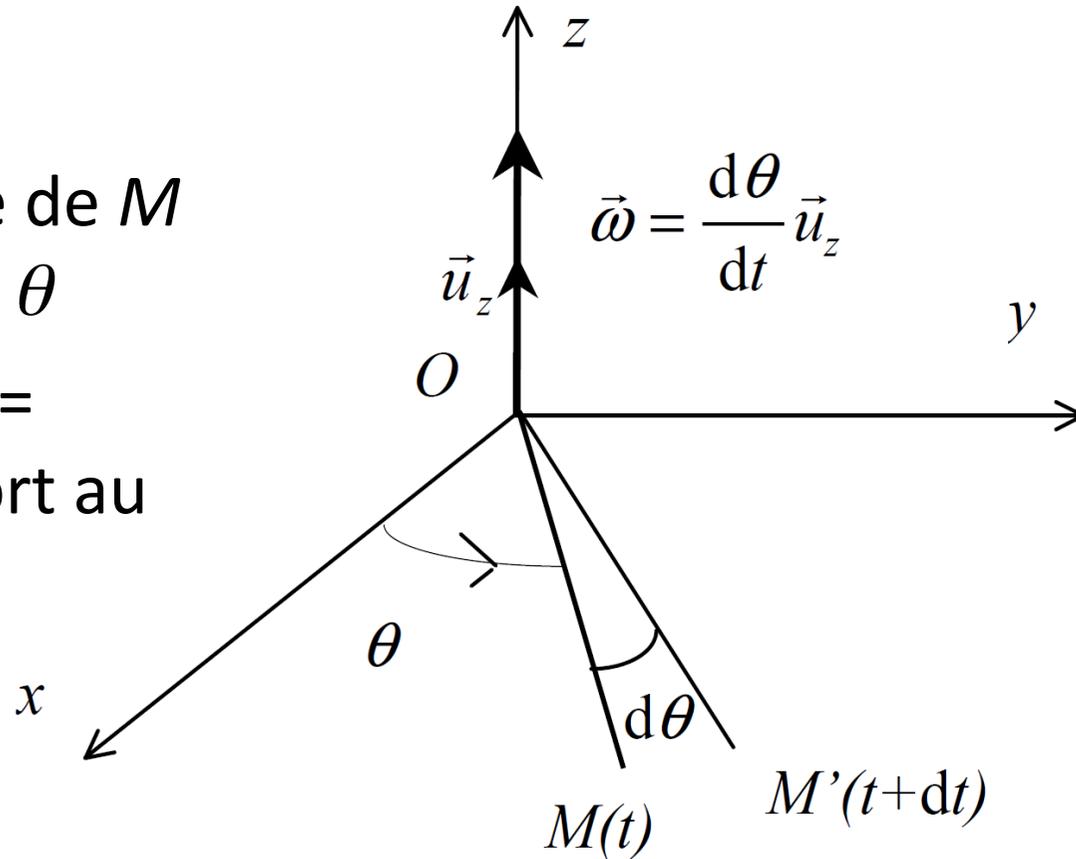
4. VECTEUR VITESSE

Vitesse angulaire

- Position angulaire de M dans le plan Oxy : θ
- Vitesse angulaire = dérivée par rapport au temps de θ
- Vecteur vitesse angulaire :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$$

- Sens positif : de x vers y



Sommaire

1. Définition
2. Référentiel
3. Repère
4. Vecteur vitesse
- 5. Vecteur accélération**
 - Définition / Unités
 - Expression en coordonnées cartésiennes / polaires / cylindriques
 - Expression dans la base de Freinet
6. Exemples de mouvement
7. Récapitulatif

5. VECTEUR ACCELERATION

- Variation du vecteur vitesse par rapport au temps
- Unités SI
 - mètre/seconde au carré
 - m.s^{-2}

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

5. VECTEUR ACCELERATION

Expression en coordonnées cartésiennes

- Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

5. VECTEUR ACCELERATION

Expression en coordonnées polaires / cylindriques

- Vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

- Composante radiale

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$$

- Composante orthoradiale

$$a_\theta = \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$$

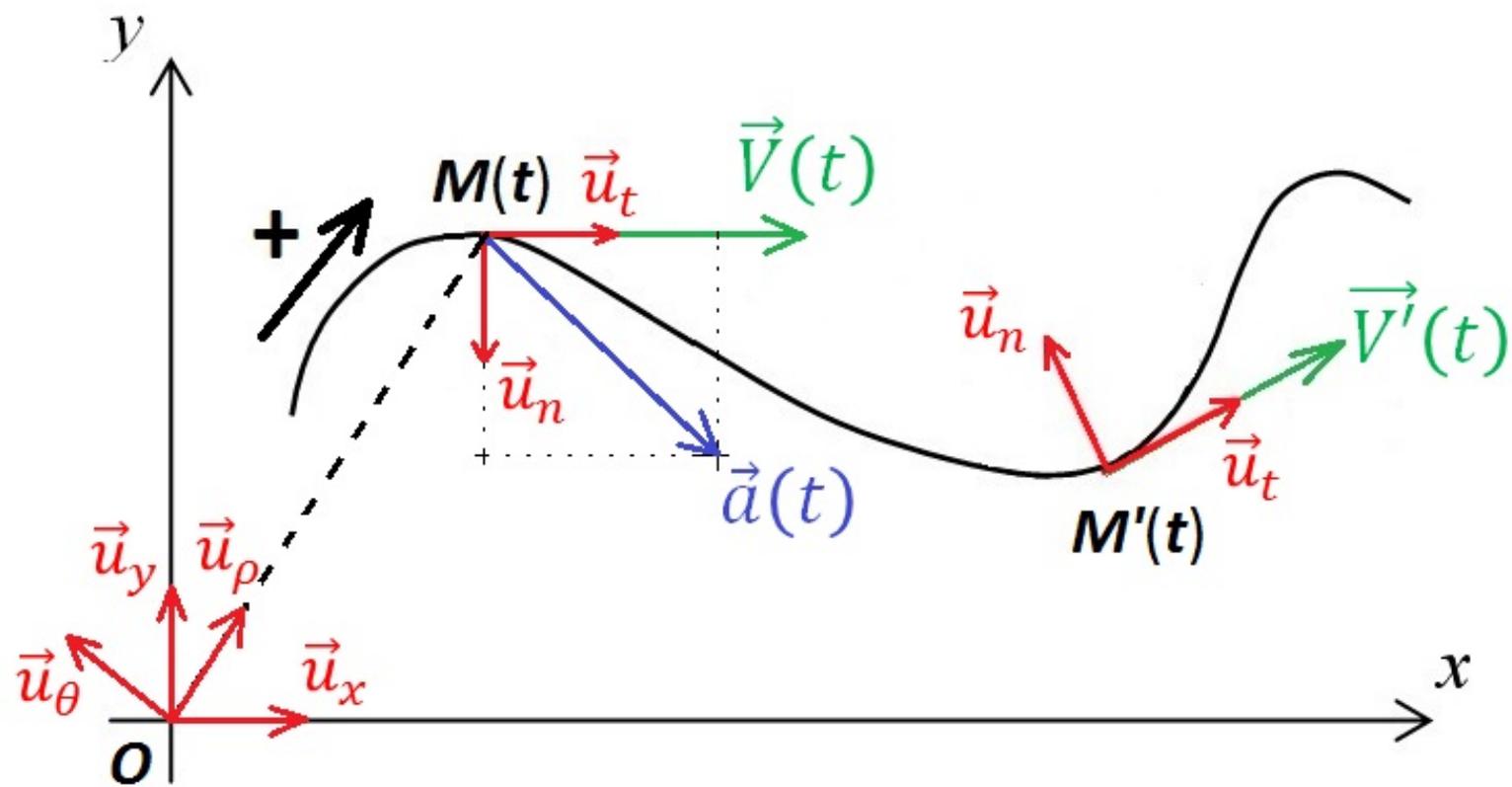
5. VECTEUR ACCELERATION

Cas du mouvement plan (base de Freinet)

- Vecteur accélération : \neq
 - Composante tangentielle : \mathbf{a}_t
 - indique si la valeur de la vitesse change
 - mvt uniforme : $\mathbf{a}_t = 0$
 - Composante normale centripète : \mathbf{a}_n
 - toujours positive
 - toujours tournée vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré
 - indique que la direction du vecteur vitesse change
 - mvt rectiligne: $\mathbf{a}_n = 0$

$$a_t = dv/dt$$

$$a_n = V^2/R$$



5. ACCELERATION

Accélération angulaire

- Vecteur accélération angulaire

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\theta} \vec{u}_z$$

Sommaire

1. Définition
2. Référentiel
3. Repère
4. Vecteur vitesse
5. Vecteur accélération
- 6. Exemples de mouvement**
 - Mouvements rectilignes
 - Mouvements circulaires
 - Mouvement parabolique
7. Récapitulatif

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

- Mouvements rectilignes
 - Quelconque
 - Uniforme
 - Uniformément varié
 - Sinusoïdal
- Mouvements circulaires
 - Quelconque
 - Uniforme
 - Uniformément varié
 - Sinusoïdal
- Mouvement parabolique

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne

- Trajectoire = portion de droite
- Une seule composante pour :
 - Position : $x(t)$
 - Vitesse : $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{u}_x = v\vec{u}_x$
 - Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x = a\vec{u}_x$
- Origine O : position de M à $t = 0$
$$x(t = 0) = 0$$
$$x_0 = 0$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne quelconque

- Vecteur accélération fonction quelconque du temps

$$a = \ddot{x} = f(t) \Rightarrow v(t) = \dot{x} = \int f(t) dt \Rightarrow x = \int v(t) dt$$

- Des conditions ou les conditions initiales (à $t=0$) permettent de déterminer V_0 et x_0 .

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne uniforme

- Vecteur vitesse constant

$$a = \ddot{x} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}(t) = \vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x \\ \vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x = v \vec{u}_x \end{array} \right\} \dot{x} = V_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = V_0 \Rightarrow x = V_0 \cdot t + x_0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right\} x = V_0 \cdot t$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne uniformément varié

- Vecteur accélération constant + mouvement rectiligne

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = a_0 \vec{u}_x \\ \vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x = a \vec{u}_x \end{array} \right\} \ddot{x} = a_0$$

$$\ddot{x} = a_0 \Rightarrow \dot{x} = a_0 \cdot t + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

- Des conditions ou les conditions initiales (à t=0) permettent de déterminer v_0 et x_0 .

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne sinusoidal

- Équation horaire fonction sinusoidale du type

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = v(t) = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = a(t) = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

— ω : pulsation (en rad/s)

— X_m : amplitude maximale du mouvement

—Phase Φ à l'instant t : $\Phi(t) = \omega t + \varphi$

— φ : phase à l'origine

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement rectiligne sinusoidal (suite)

- Équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement circulaire quelconque

- Voir doc récapitulatif

Mouvement circulaire

- Trajectoire = cercle de centre O et de rayon R
- Origine O : centre du cercle et axe Oz perpendiculaire au plan contenant la trajectoire
- Equations horaires en coordonnées polaires

$$\rho = R = cte$$

$$\theta = \theta(t)$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement circulaire uniforme (suite)

- Vecteur vitesse angulaire constant

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = \omega_0 = cte \\ \theta(t=0) = \theta_0 \end{array} \right\} \theta = \omega_0 \cdot t + \theta_0$$

$$\vec{v} = R \omega_0 \vec{u}_\theta$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement circulaire uniforme (suite)

- Vecteur accélération
 - Composante tangentielle nulle

$$\vec{a}_t = \vec{0}$$

- Composante normale

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = R \omega_0^2 \vec{u}_n = -R \omega_0^2 \vec{u}_\rho$$

⇒ Mouvement accéléré à accélération centripète

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement circulaire uniformément varié

- Vecteur accélération angulaire constant

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 = cte$$

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}_0 \cdot t + \dot{\theta}_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 \cdot t^2 + \dot{\theta}_0 \cdot t + \theta_0$$

- Les conditions initiales (à t=0) ou des conditions particulières permettent de déterminer $\dot{\theta}_0$ et θ_0 .

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

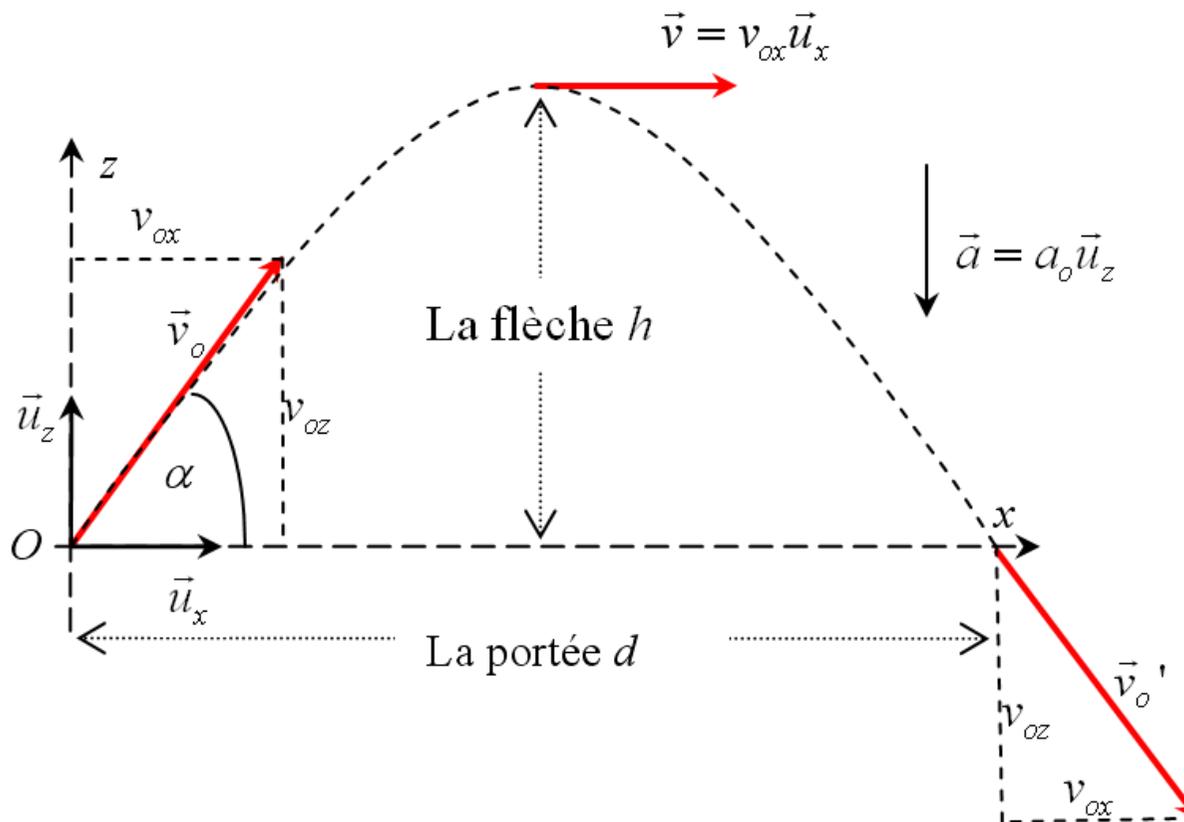
Mouvement circulaire sinusoidal

- Équation horaire fonction sinusoidale du type

$$\theta = \Theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement parabolique



6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement parabolique (suite)

- Conditions initiales

$$x(t = 0) = x_0 = 0$$

$$z(t = 0) = z_0 = 0$$

$$\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$$

- Vecteur accélération

$$\vec{a} = \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases}$$

- Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{z} = a_0 \cdot t + v_{0z} \end{cases}$$

- Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ z = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_{0z} \cdot t \end{cases}$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement parabolique (suite)

- Trajectoire

- Si $V_{0x} = 0 \rightarrow$ mouvement rectiligne uniformément varié suivant z
- Si $V_{0x} \neq 0 \rightarrow$ mouvement rectiligne uniformément varié suivant z + mouvement rectiligne uniforme suivant x
- équation de la trajectoire

$$z = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0z} \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)$$
$$z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

6. EXEMPLES de MOUVEMENT

Mouvement parabolique (suite)

- Flèche h
 - Altitude maxi que peut atteindre le point mobile

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

- Portée d
 - Distance maxi que peut atteindre le point mobile

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Sommaire

1. Définition
2. Référentiel
3. Repère
4. Vecteur vitesse
5. Vecteur accélération
6. Exemples de mouvement
- 7. Récapitulatif → travail perso**

7. Récapitulatif

- Système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques + passage de l'un à l'autre
- Expression des vecteurs position, vitesse, vitesse angulaire, accélération et accélération angulaire dans les différents systèmes de coordonnées
- Passages du vecteur position au vecteur vitesse, du vecteur vitesse au vecteur accélération
- Définition de quelques mouvements particuliers