PROGRAMME APC

Collection

PYRAMIDE

1re D

Mon livre de MATHÉMATIQUES

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

Scannez moi !

3 500 F CFA

PROGRAMME
APC

1re D

Collection
PYRAMIDE
Mon livre de MATHÉMATIQUES

KOUDOU Broubier François
Inspecteur de l'enseignement secondaire

AIKO Jean Claude
Encadreur Pédagogique

MAHI Louis Clément
Encadreur Pédagogique

GAGNIE Guillaume
Encadreur Pédagogique

AKA Aboli
Encadreur Pédagogique

Sous la direction de

TANOH KOUACOU
Docteur en Mathématiques

Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
et de l'Alphabétisation

JD Editions
L'Edition autrement

21 BP 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

ISBN : 978-2-493344-46-5

DÉCOUVRIR VOTRE MANUEL

Le manuel de mathématiques de la **collection « PYRAMIDE »** des classes de **Première D** est le fruit d'une étroite collaboration entre plusieurs acteurs du système éducatif de Côte d'Ivoire : Inspecteurs de mathématiques, Encadreurs Pédagogiques de mathématiques et Enseignants de mathématiques des lycées et collèges.

Conforme au programme officiel en vigueur, cet ouvrage a été conçu pour accompagner efficacement la mise en œuvre de l'approche par les compétences. Ce souci d'aide et d'accompagnement des apprenants et des enseignants a amené les auteurs à intégrer à ce support pédagogique sept blocs rédactionnels :

BLOC 1 : COMMENTAIRE DE LA LEÇON

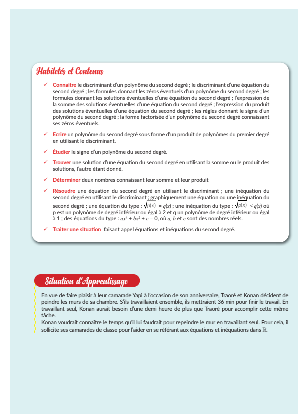
Ce bloc donne un aperçu historique de la notion mathématique, objet de l'étude. Il informe brièvement le lecteur des acquis de l'apprenant par rapport à la leçon, ce qui est attendu de lui lors du déroulement de la leçon et précise éventuellement l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant. Ce bloc donne également le domaine d'application de la leçon.

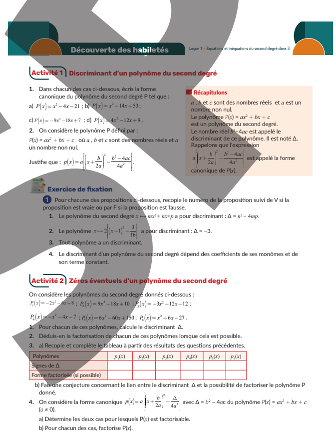
BLOC 2 : HABILETÉS ET CONTENUS

Il présente pour chaque leçon, la liste des habiletés et contenus prescrits par le programme officiel en vigueur. Elle fera l'objet de découpage par le professeur afin d'organiser ses séances journalières de cours.

BLOC 3 : SITUATION D'APPRENTISSAGE

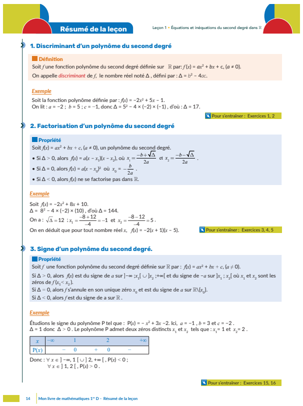
Il s'agit ici de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages. Durant toute la leçon, il sera possible d'exploiter la situation d'apprentissage.





BLOC 4 : DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

Constitué d'activités de découverte, ce bloc permet de mettre l'élève en situation de recherche. Il comprend également la synthèse de l'activité appelée « récapitulons », suivie d'un ou de plusieurs exercices de fixation.

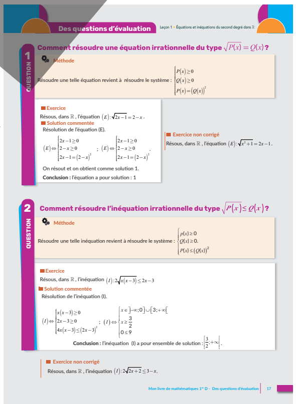


BLOC 5 : RÉSUMÉ DE LA LEÇON

Ce bloc présente l'essentiel à retenir par l'apprenant. Il comprend des définitions, des propriétés, des remarques…
Chaque définition donnée est suivie d'un exemple et chaque propriété est suivie d'un exemple d'application. Ce bloc oriente les apprenants à travers la rubrique « pour s'entraîner » vers certains types d'exercices contenus dans le bloc «mes séances d'exercices».

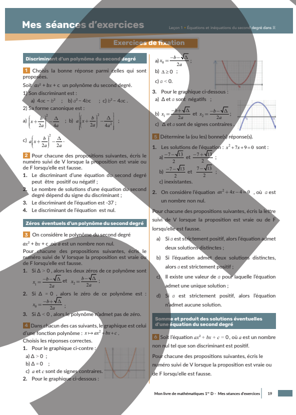
BLOC 6 : DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

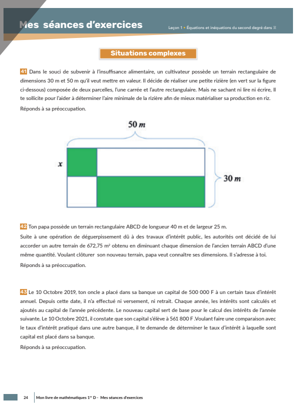
Il est constitué de plusieurs habiletés/contenus exigibles selon le programme. Chaque habileté/contenu retenu est formulé sous la forme d'une question. Un point méthode relatif à l'habileté/contenu est proposé au lecteur. Ce point méthode est suivi d'un exercice corrigé et commenté. Un autre exercice du même type est proposé afin de vérifier l'acquisition de l'habileté/contenu retenu.

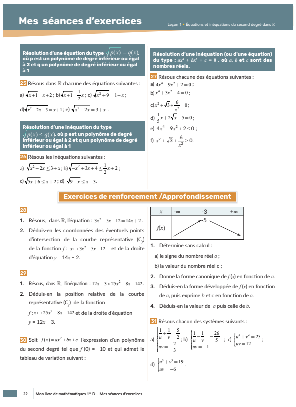


BLOC 7 : MES SÉANCES D'EXERCICES

Ce bloc est composé d'exercices de fixation, d'exercices de renforcement, d'exercices d'approfondissement et de situations complexes. L'objectif ici est de renforcer les acquis installés durant le déroulement de la leçon.







Les auteurs voudraient s'excuser pour d'éventuelles erreurs ou fautes de frappe contenues dans ce manuel. Ils vous remercient d'avance de bien vouloir les signaler à l'adresse : jdeditions@yahoo.fr, afin de contribuer à l'amélioration continue du présent ouvrage.

Comment utiliser ce manuel

Pour l'élève

- Commentaire de la leçon : Il t'indiquera l'historique de la notion que tu vas étudier. Il te dira ce que tu as déjà appris sur cette notion et ce que deviendra la notion au cours de tes études ultérieures.
- Habiletés et contenus : Il t'informera sur ce que tu dois savoir et ce que tu dois savoir faire à l'issue de cette leçon. Tu t'entraîneras sur chaque habileté/contenu afin de t'auto - évaluer.
- Situation d'apprentissage : Tu liras la situation d'apprentissage avant de venir en classe. Si tu ne la comprends pas, tu poseras ensuite des questions à ton professeur le jour de la leçon.
- Découverte des habiletés : Tu exécuteras les consignes que ton professeur te donnera. Mais avant de venir en classe, tu essayeras de lire les consignes qui sont dans ton livre même si tu ne les comprends pas toujours.
- Résumé de la leçon : Tu devras retenir mais surtout comprendre le contenu de ce bloc. Des exemples y sont donnés pour faciliter ta compréhension. Tu utiliseras le contenu de ce bloc pour préparer les séances d'exercices, les contrôles continus et les questions d'évaluation. Tu utiliseras la rubrique «Pour s'entraîner» afin de mieux approfondir une habileté/contenu donnée.
- Des questions d'évaluation : Tu essayeras de comprendre le point méthode proposé dans ce bloc. Tu essayeras de faire toi-même l'exercice corrigé mais sans regarder la correction. Tu compareras ta production à la solution commentée et tu feras immédiatement l'exercice non résolu afin de t'assurer que tu as bien compris le point méthode.
- Mes séances d'exercices : Dans le résumé de cours, tu seras constamment renvoyé à cette rubrique. Tu utiliseras ces renvois pour t'entraîner sur les habiletés/contenus bien précises. Il faut varier les types d'exercices que tu résous. Tu résoudras en particulier toutes les situations d'évaluation de cette rubrique.

Pour l'enseignant

- Commentaire de la leçon : Vous utiliserez ce bloc pour :
  - motiver les apprenants à travers une brève histoire de la notion et l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant;
  - préparer les prérequis nécessaires à la leçon.
- Habiletés et contenus : Vous utiliserez ce bloc pour orienter toute la leçon. Vous découperez ce bloc en séances de 55 minutes de telle sorte que ce découpage corresponde au temps imparti à la leçon. Vous veillerez à ce que la majorité des élèves comprennent les habiletés/contenus de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Vous ferez lire en classe la situation d'apprentissage directement dans le manuel de l'apprenant. Vous pourrez mettre les apprenants en groupe pour aider ceux qui n'ont pas de manuel. Vous ferez dégager les constituants de la situation par les élèves avant d'annoncer le plan de la leçon. En tout état de cause, vous pouvez consulter le guide du professeur de ce manuel.
- Découverte des habiletés : Vous utilisez ce bloc pour mettre les apprenants en activités ; donnez-leur un temps de recherche ponctué par des aides collectives ou individuelles ; la phase de formulation à l'issue de la recherche correspond à la rubrique « récapitulons » : essayez de la faire formuler par les apprenants avant d'aborder la trace écrite et l'exercice de fixation.
- Résumé de la leçon : L'enseignant pourra utiliser ce bloc pour évaluer les niveaux taxonomiques relatifs à la connaissance, à la compréhension et à l'application. Cette utilisation de ce bloc par l'enseignant incitera les apprenants à apprendre et à comprendre l'essentiel à retenir par rapport à une leçon donnée. La rubrique « pour s'entraîner » aidera l'enseignant à opérer des choix d'exercices par rapport à ses objectifs opérationnels.
- Des questions d'évaluation : Les questions d'évaluation ne sont pas à faire uniquement à la fin de la leçon. Elles peuvent être utilisées en classe au cours de la leçon ou lors des séances de travaux dirigés. L'enseignant pourra commenter avec ses élèves le point méthode, l'exercice commenté pour mieux faire comprendre le point méthode et soumettre ensuite ses élèves à l'exercice non corrigé.
- Mes séances d'exercices : Le professeur utilisera ce bloc pour faire travailler les apprenants aussi bien en classe qu'à la maison. Il s'en servira aussi pour animer des séances de travaux dirigés directement avec le manuel, grâce à la sélection d'exercices appropriés. Les situations complexes sont à faire traiter par les élèves.

Pour le parent d'élève

- Commentaire de la leçon : Le parent s'informera sur l'histoire de la notion, discutera avec ses enfants afin de les motiver à aborder la leçon.
- Habiletés et contenus : Le parent suivra les acquis de son enfant en l'amenant à s'exercer sur chaque habileté/contenu de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Le parent fera lire la situation d'apprentissage de la prochaine leçon à son enfant à la maison dès qu'il se rendra compte qu'une leçon est terminée. Il pourra essayer d'expliquer s'il le peut ce dont il est question dans la situation.
- Découverte des habiletés : Le parent vérifiera à la maison si l'enfant a compris l'activité de découverte et qu'il sait faire l'exercice de fixation qui lui est rattaché.
- Résumé de la leçon : Le parent utilisera ce bloc pour s'assurer que l'enfant apprend sa leçon. Sans être un spécialiste de la discipline, il peut utiliser ce bloc pour évaluer les connaissances de son enfant.
- Des questions d'évaluation : Le parent utilisera cette rubrique pour vérifier les acquis de ses enfants par rapport à une habileté précise. Il encouragera ses enfants à traiter cette rubrique et s'assurera avec l'aide du professeur que ses enfants ont bien acquis l'habileté retenue.
- Mes séances d'exercices : Le parent peut faire travailler ses enfants en utilisant ce bloc et en les encourageant à faire des exercices variés.

Sommaire

1 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{R}$

Commentaire de la Leçon

Diophante d'Alexandrie est un mathématicien grec du III[e] siècle après J-C. D'origine syrienne, il passa l'essentiel de sa vie à Alexandrie. Son plus célèbre ouvrage, les Arithmétiques, comprend treize livres (dont certains ont disparu) et de nombreux problèmes. Pour résoudre certains d'entre eux, Diophante invente la notion d'inconnue (nommée Plethos) et développe une formule générale pour les équations du type $ax^2 + bx = c$. Son influence sur les savants arabes sera grande.

En classe de 2[de] C, l'apprenant sait déjà :

- résoudre des équations et inéquations du premier degré ;
- utiliser la forme canonique d'un polynôme du second degré pour résoudre des équations et des inéquations du second degré ;
- exploiter les variations et la courbe représentative de la fonction carrée.

En classe de 1[ère] D, l'élève va apprendre essentiellement à :

- utiliser la notion de discriminant pour déterminer les zéros éventuelles d'un polynôme du second degré ;
- résoudre des équations ou des inéquations du second degré ou se ramenant au second degré à l'aide du discriminant.

Les équations sont utilisées dans des transactions, dans l'industrie, en physique pour modeliser par exemple : le déplacement d'un moblie.

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** le discriminant d'un polynôme du second degré ; le discriminant d'une équation du second degré ; les formules donnant les zéros éventuels d'un polynôme du second degré ; les formules donnant les solutions éventuelles d'une équation du second degré ; l'expression de la somme des solutions éventuelles d'une équation du second degré ; l'expression du produit des solutions éventuelles d'une équation du second degré ; les règles donnant le signe d'un polynôme du second degré ; la forme factorisée d'un polynôme du second degré connaissant ses zéros éventuels.
- **Ecrire** un polynôme du second degré sous forme d'un produit de polynômes du premier degré en utilisant le discriminant.
- **Étudier** le signe d'un polynôme du second degré.
- **Trouver** une solution d'une équation du second degré en utilisant la somme ou le produit des solutions, l'autre étant donné.
- **Déterminer** deux nombres connaissant leur somme et leur produit
- **Résoudre** une équation du second degré en utilisant le discriminant ; une inéquation du second degré en utilisant le discriminant ; graphiquement une équation ou une inéquation du second degré ; une équation du type : $\sqrt{p(x)} = q(x)$; une inéquation du type : $\sqrt{p(x)} \leq q(x)$ où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et q un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 ; des équations du type : $ax^4 + bx^2 + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels.
- **Traiter une situation** faisant appel aux équations et inéquations du second degré.

Situation d'Apprentissage

En vue de faire plaisir à leur camarade Yapi à l'occasion de son anniversaire, Traoré et Konan décident de peindre les murs de sa chambre. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 min pour finir le travail. En travaillant seul, Konan aurait besoin d'une demi-heure de plus que Traoré pour accomplir cette même tâche. Konan voudrait connaître le temps qu'il lui faudrait pour repeindre le mur en travaillant seul. Pour cela, il sollicite ses camarades de classe pour l'aider en se référant aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$.

Activité 1 Discriminant d'un polynôme du second degré

1. Dans chacun des cas ci-dessous, écris la forme canonique du polynôme du second degré P tel que :

a) $P(x)=x^2-4x-21$; b) $P(x)=x^2-14x+53$;

c) $P(x)=-9x^2-18x+7$; d) $P(x)=4x^2-12x+9$.

2. On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et a un nombre non nul.

Justifie que : $p(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

Récapitulons

a , b et c sont des nombres réels et a est un nombre non nul.
Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.
Le nombre réel b^2-4ac est appelé le discriminant de ce polynôme. Il est noté Δ.
Rappelons que l'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelé la forme canonique de $P(x)$.

Exercice de fixation

1 Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie le numéro de la proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

1. Le polynôme du second degré $x \longmapsto mx^2+nx+p$ a pour discriminant : $\Delta = n^2 - 4mp$.
2. Le polynôme $x \mapsto 2\left[(x-1)^2-\frac{3}{16}\right]$ a pour discriminant : $\Delta = -3$.
3. Tout polynôme a un discriminant.
4. Le discriminant d'un polynôme du second degré dépend des coefficients de ses monômes et de son terme constant.

Activité 2 Zéros éventuels d'un polynôme du second degré

On considère les polynômes du second degré donnés ci-dessous :

$P_1(x)=-2x^2-6x+8$; $P_2(x)=9x^2-18x+10$; $P_3(x)=-3x^2-12x-12$;

$P_4(x)=-x^2-4x-7$; $P_5(x)=6x^2-60x+150$; $P_6(x)=x^2+6x-27$.

1. Pour chacun de ces polynômes, calcule le discriminant Δ.

2. Déduis-en la factorisation de chacun de ces polynômes lorsque cela est possible.

3. a) Recopie et complète le tableau à partir des résultats des questions précédentes.

Polynômes	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$
Signes de Δ						
Forme factorisée (si possible)						

b) Fais une conjecture concernant le lien entre le discriminant Δ et la possibilité de factoriser le polynôme P donné.

4. On considère la forme canonique $p(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

a) Détermine les deux cas pour lesquels P(x) est factorisable.

b) Pour chacun des cas, factorise P(x).

Récapitulons

- $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux zéros distincts : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

En désignant par x_1 et x_2 ces zéros, on a : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Donc : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $\Delta = 0$, on obtient : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ admet un seul zéro : $-\frac{b}{2a}$. Si on pose $x_0 = \frac{b}{2a}$, on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

- $\Delta < 0$, le polynôme P(x) n'admet pas de forme factorisée, ni de zéro dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

2 On considère le polynôme du second degré P défini par : $P(x) = 5x^2 - 17x + 6$.

1. Détermine les zéros du polynôme P.
2. Factorise P(x).
3. Dans chacun des cas suivants, donne la forme factorisée du polynôme P.

   a) P a pour zéros −5 et 3, puis prends la valeur 64 en −1.

   b) P a pour zéro double $\frac{2}{3}$ et prend la valeur 1 en 0.

Activité 3 Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Soit le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

On sait que $P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac$) est la forme canonique de P(x).

Résous l'équation $P(x) = 0$ dans chacun des trois cas suivants :

a) $\Delta > 0$; b) $\Delta < 0$; c) $\Delta = 0$.

Récapitulons

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)	Deux solutions : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une solution : $-\frac{b}{2a}$	Pas de solution

Exercice de fixation

3

1. Sans résoudre, détermine le nombre de solutions de chacune des équations du second degré.
   a) $5x^2 - 6x - 1 = 0$; b) $-8x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0$; c) $2x^2 - 4x\sqrt{3} + 6 = 0$.
2. On considère l'équation du second degré $(E) : px^2 + qx + r = 0$ de discriminant $\Delta = q^2 - 4pr$.

Écris les formulas donnant ses solutions en fonction de p, q et r dans chacun des cas suivants :

a) $\Delta = 0$; b) $\Delta > 0$.

3. Résous, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

a) $6x^2 - x - 1 = 0$; b) $9x^2 - x + \frac{1}{36} = 0$; c) $x^2 - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 4 - 2\sqrt{2} = 0$.

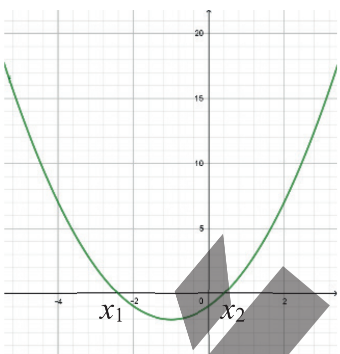
Activité 4 Signe d'un polynôme du second degré

On considère un polynôme de second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

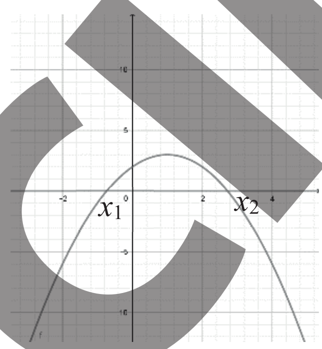
On rappelle que le discriminant Δ est : $b^2 - 4ac$.

Suivant les valeurs de a, b et c, on peut obtenir l'une des six allures de courbe suivantes :

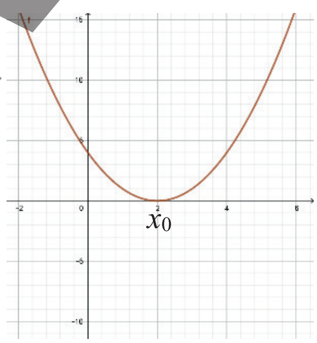
1



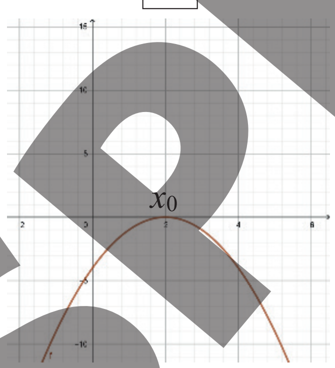
2



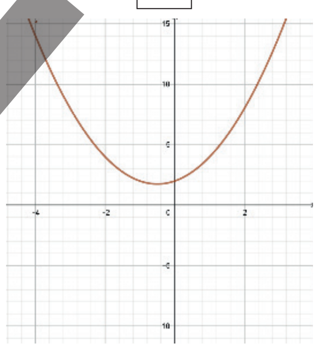
3



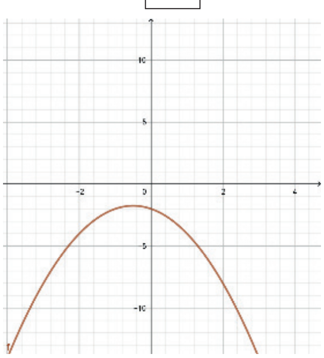
4



5



6



1. Pour chacun des cas ci-dessous, reproduis et complète le tableau ci-dessous.

Courbe	1	2	3	4	5	6
Signe de a						
Signe de Δ						

2. En observant ces situations, conjecture les règles pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré sans tracer sa représentation graphique.

Récapitulons

Signe du polynôme P du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

<table>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>●</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table> $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>signe de (a)</td><td>●</td><td>signe de $(-a)$</td><td>●</td><td>signe de (a)</td><td></td></tr></table> x_1 et x_2 sont les zéros de P, $x_1 < x_2$</td></tr>
</table>

Exercice de fixation

4 Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie le numéro de la proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

1. Le polynôme : $x \mapsto x^2 + 3x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
2. Le polynôme : $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$ est strictement positif sur les intervalles $]-\infty; -3[$ et $]1; +\infty[$.
3. Le polynôme : $x \mapsto -4x^2 + 4x - 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
4. Le polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est positif « entre ses zéros » lorsque son discriminant Δ est strictement positif et a strictement négatif.

Activité 5 Résolution d'une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$

On se propose de déterminer dans $\mathbb{R}$ les nombres réels x tels que : $-\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2} < 0$.

1. Étudie selon les valeurs de x, le signe du polynôme P tel que : $P(x) = -\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2}$.
2. Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles $P(x) \leq 0$.

Récapitulons

- L'inégalité $-\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2} < 0$ est appelée une inéquation du second degré.
- Les valeurs de x pour lesquelles $P(x) < 0$ sont les solutions de cette inéquation. On écrit : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -3[\cup \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
- Pour résoudre une inéquation du type : $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, on étudie le signe du polynôme P tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et on détermine les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation est vérifiée.

Exercice de fixation

5 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations.

a) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$; **b)** $-\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2} > 0$; **c)** $2(1 - x)(3 + 4x) \leq 0$.

Activité 6 Expression de la somme et du produit des solutions éventuelles d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Le polynôme P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux zéros distincts ou non.

1. Donne les formules de ces deux zéros x_1 et x_2.
2. Justifie que : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; b) $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Récapitulons

x_1 et x_2 étant les solutions d'une équation du second degré du type,

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), on a : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exercice de fixation

6

1. Pour chacune des équations du second degré suivantes, écris les formules donnant la somme puis le produit de ses solutions x_1 et x_2 lorsqu'elles existent.
   a) $mx^2 + \pi x + \sqrt{\pi} = 0$; b) $\sqrt{2}x^2 + x\cos\theta - \pi = 0$.
2. Dans chacun des cas suivants, écris une équation du second degré connaissant la somme et le produit de ses solutions x_1 et x_2.
   a) $x_1 + x_2 = -3$ et $x_1 x_2 = -3$; b) $x_1 + x_2 = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ et $x_1 x_2 = -2\sqrt{6}$.
3. Dans chacun des cas ci-dessous, calcule la somme et le produit des solutions éventuelles des équations suivantes :
   a) $-5x^2 + 4x + 3 = 0$;
   b) $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

Activité 7 Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Soit deux nombres réels x et y tels que : $x + y = S$ et $x \times y = P$, S et P étant deux nombres réels donnés.

1. Démontre que x et y sont solutions de l'équation du second degré: $X^2 - SX + P = 0$.
2. Justifie que lorsque ces deux nombres existent, on a : $S^2 - 4P \geq 0$.

Récapitulons

Pour déterminer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P, on peut :

- vérifier que : $S^2 - 4P \geq 0$;
- résoudre l'équation $X^2 - SX + P = 0$ dont les solutions sont ces deux nombres.

Exercices de fixation

8 Un terrain rectangulaire dont le périmètre est 26 m a pour aire 40 m^2.

Détermine ses dimensions.

9 Existe-t-il deux nombres réels ayant pour somme $\dfrac{1}{4}$ et pour produit $-\dfrac{3}{8}$? Si oui, détermine-les.

1. Discriminant d'un polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

On appelle *discriminant* de f, le nombre réel noté Δ , défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple

Soit la fonction polynôme définie par : $f(x) = -2x^2 + 5x - 1$.
On lit : $a = -2$; $b = 5$; $c = -1$, donc $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-1)$, d'où : $\Delta = 17$.

Pour s'entraîner : Exercices 1, 2

2. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, un polynôme du second degré.

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$.
$\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (10)$, d'où $\Delta = 144$.
On a : $\sqrt{\Delta} = 12$; $x_1 = \dfrac{-8+12}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-8-12}{-4} = 5$.
On en déduit que pour tout nombre réel x, $f(x) = -2(x + 1)(x - 5)$.

Pour s'entraîner : Exercices 3, 4, 5

3. Signe d'un polynôme du second degré.

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$ et du signe de $-a$ sur $]x_1\,;x_2[$ où x_1 et x_2 sont les zéros de f $(x_1 < x_2)$.
Si $\Delta = 0$, alors f s'annule en son unique zéro x_0 et est du signe de a sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$.
Si $\Delta < 0$, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Étudions le signe du polynôme P tel que : $P(x) = -x^2 + 3x - 2$. Ici, $a = -1$, $b = 3$ et $c = -2$.
$\Delta = 1$ donc $\Delta > 0$. Le polynôme P admet deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $\forall\, x \in\,]-\infty, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$, $P(x) < 0$;
$\forall\, x \in\,]1, 2[$, $P(x) > 0$.

Pour s'entraîner : Exercices 15, 16

4. Équations du second degré

a) Propriété

On considère la fonction polynôme f définie par ; $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels, $a \neq 0$.
f a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Le nombre de zéros de celle-ci dépend du signe de Δ .

- Si $\Delta > 0$, alors f admet deux zéros distincts : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors f admet une zéro unique : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de zéro.

Pour s'entraîner : Exercices 20, 21, 22, 23

b) Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

Propriété

Si x_1 et x_2 sont les solutions d'une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, alors $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemples d'application

- Le polynôme $x^2 + 0{,}5x - 4{,}5$ admet deux zéros.
  Sans calcul, on connait leur somme :
  S = $-0{,}5$ et leur produit : P = $-4{,}5$.
- L'équation : $-3x^2 - 4x + 1 = 0$ a 1 comme une solution. Il admet donc deux solutions x_1 et x_2 distincts ou confondues.
  Or $x_1 \times x_2 = \dfrac{1}{3}$ et $x_1 = 1$ donc x_2 .

Remarque
Lorsque l'équation (E) $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, telle que a et c sont de signes contraires, le discriminant est positif, l'équation (E) admet deux solutions de signes contraires.

Pour s'entraîner : Exercices 17, 18, 19

5. Inéquation du second degré

Soit f la fonction du second degré telle que : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta > 0$, alors f possède deux zéros distincts x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) tels que :

- $\forall x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$, $f(x)$ a le signe de a.
- $\forall x \in]x_1 ; x_2[$, $f(x)$ a le signe de $(-a)$.
- $\forall x \in \{x_1 ; x_2\}$, $f(x) = 0$.

Si $\Delta \leq 0$, alors f a le signe de a.

Exemple

Résolvons l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 + 4x + 30 < 0$.
$\Delta = 4^2 - 4\times(-2)\times(30) = 256$.

Posons $f(x) = -2x^2 + 4x + 30$.

L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-4-16}{-4} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-4+16}{-4} = -3$.

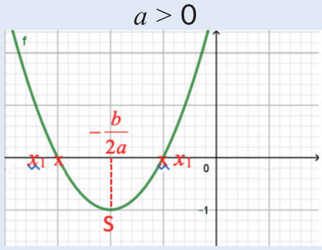
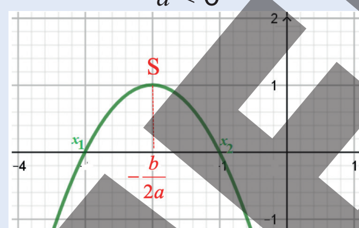
On a : $a = -2$ ($a < 0$), donc le signe de $f(x)$ se présente comme suit :

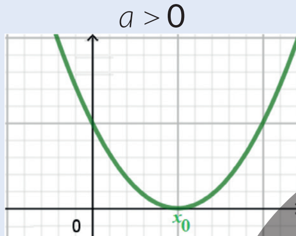
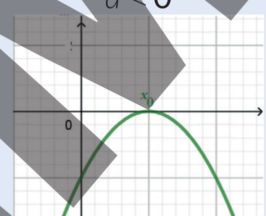
x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

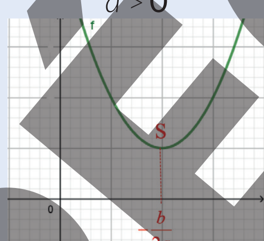
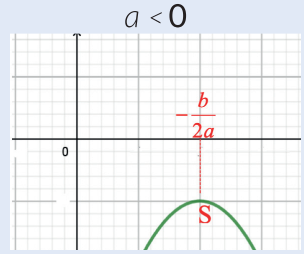
L'inéquation $-2x^2 + 4x + 30 < 0$ a pour ensemble de solutions : $]-\infty ; -3[\cup]5 ; +\infty[$.

6. Interprétation graphique

La représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) est une parabole de sommet $S\left(\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$\Delta > 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	
La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points	

$\Delta = 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	
La parabole coupe l'axe des abscisses en un point	

$\Delta < 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	
La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses	

Pour s'entraîner : Exercice 24

QUESTION 1

Comment résoudre une équation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$?

Méthode

Résoudre une telle équation revient à résoudre le système : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = (Q(x))^2 \end{cases}$

Exercice

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : \sqrt{2x-1} = 2-x$.

Solution commentée

Résolution de l'équation (E).

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 2x-1 = (2-x)^2 \end{cases} \quad ; \quad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 2x-1 = (2-x)^2 \end{cases}.$$

On résout et on obtient comme solution 1.

Conclusion : l'équation a pour solution : 1

Exercice non corrigé

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : \sqrt{x^2+1} = 2x-1$.

QUESTION 2

Comment résoudre l'inéquation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$?

Méthode

Résoudre une telle inéquation revient à résoudre le système : $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0. \\ P(x) \leq (Q(x))^2 \end{cases}$

Exercice

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(I) : 2\sqrt{x(x-3)} \leq 2x-3$

Solution commentée

Résolution de l'inéquation (I).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 4x(x-3) \leq (2x-3)^2 \end{cases} \quad ; \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty ; 0\right] \cup \left[3 ; +\infty\right[\\ x \geq \dfrac{3}{2} \\ 0 \leq 9 \end{cases}$$

Conclusion : l'inéquation (I) a pour ensemble de solution : $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

Exercice non corrigé

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(I) : 2\sqrt{2x+2} \leq 3-x$.

QUESTION 3

Comment résoudre une équation du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$?

Méthode

On pose : $X = x^2$, avec $X \geq 0$.

- On ramène cette équation sous la forme : $aX^2 + bX + c = 0$.
- On résout l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ puis on détermine enfin les nombres réels x tels que : $x^2 = X$.

Exercice résolu

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Solution commentée

Résolution de l'équation (E).

Posons : $X = x^2$.

$(E) \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$; $(E) \Leftrightarrow 2(X-2)\left(X - \frac{1}{2}\right) = 0$; $(E) \Leftrightarrow 2(x^2 - 2)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$; $(E) \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$;

ou $x^2 - \frac{1}{2} = 0$.

Conclusion : $S = \left\{-\sqrt{2} \,;\, \frac{-\sqrt{2}}{2} \,;\, \frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \sqrt{2}\right\}$.

Exercice non corrigé

Résous, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(E) : 4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$.

QUESTION 4

Comment déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit ?

Méthode

Pour déterminer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P :
On calcule $S^2 - 4P$.

- Si $S^2 - 4P > 0$, alors ces deux nombres existent et sont solutions de l'équation $X^2 - 5X + P = 0$.
- Si $S^2 - 4P < 0$, alors ces deux nombres n'existent pas.

Exercice résolu

Détermine s'ils existent deux nombres réels de somme $\frac{7}{6}$ et de produit $\frac{1}{3}$.

Solution commentée

On calcule : $S^2 - 4P$.

$S^2 - 4P = \left(\frac{7}{6}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$.

$S^2 - 4P \geq 0$ d'où l'existence de 2 nombres de somme $\frac{7}{6}$ et de produit $\frac{1}{3}$.

On résout l'équation : $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$.

$\Delta = S^2 - 4P$, donc $\Delta = \frac{1}{36}$.

On a : $x_1 = \frac{\frac{7}{6} + \frac{1}{6}}{2}$ et $x_2 = \frac{\frac{7}{6} - \frac{1}{6}}{2}$.

$x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sont deux nombres de somme $\frac{7}{6}$ et de produit $\frac{1}{3}$.

Exercice non corrigé

Dans chacun des cas suivants, détermine s'ils existent deux nombres réels de somme S et de produit P.

a) $S = P = -\frac{1}{20}$; b) $S = 2$ et $P = 4$.

Exercices de fixation

Discriminant d'un polynôme du second degré

1 Choisis la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$).

1) Son discriminant est :

a) $4ac - b^2$; b) $a^2 - 4bc$; c) $b^2 - 4ac$.

2) Sa forme canonique est :

a) $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$; b) $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$;

c) $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{2a}$.

2 Pour chacune des propositions suivantes, écris le numéro suivi de V lorsque la proposition est vraie ou de F lorsqu'elle est fausse.

1. Le discriminant d'une équation du second degré peut être positif ou négatif ;
2. Le nombre de solutions d'une équation du second degré dépend du signe du discriminant ;
3. Le discriminant de l'équation est -37 ;
4. Le discriminant de l'équation est nul.

Zéros éventuels d'un polynôme du second degré

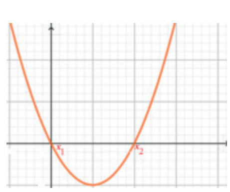
3 On considère le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$,où a est un nombre non nul.

Pour chacune des propositions suivantes, écris le numéro suivi de V lorsque la proposition est vraie ou de F lorsqu'elle est fausse.

1. Si $\Delta > 0$, alors les deux zéros de ce polynôme sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
2. Si $\Delta = 0$, alors le zéro de ce polynôme est : $x_0 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
3. Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'admet pas de zéro.

4 Dans chacun des cas suivants, le graphique est celui d'une fonction polynôme : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) .
Choisis les réponses correctes.

1. Pour le graphique ci-contre :

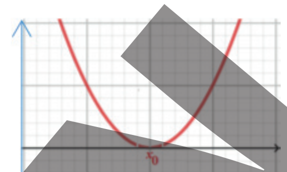


a) $\Delta > 0$;

b) $\Delta = 0$;

c) a et c sont de signes contraires.

2. Pour le graphique ci-dessous :

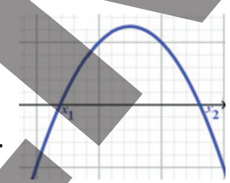


a) $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;

b) $\Delta = 0$;

c) $a < 0$.

3. Pour le graphique ci-dessous :



a) Δ et a sont négatifs ;

b) $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;

c) Δ et a sont de signes contraires .

5 Détermine la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Les solutions de l'équation : $x^2 + 7x + 9 = 0$ sont :

a) $\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-7+\sqrt{13}}{2}$;

b) $\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$;

c) inexistantes.

2. On considère l'équation $ax^2 + 4x - 4 = 0$, où a est un nombre non nul.

Pour chacune des propositions suivantes, écris la lettre suivi de V lorsque la proposition est vraie ou de F lorsqu'elle est fausse.

a) Si a est strictement positif, alors l'équation admet deux solutions distinctes ;

b) Si l'équation admet deux solutions distinctes, alors a est strictement positif ;

c) Il existe une valeur de a pour laquelle l'équation admet une unique solution ;

d) Si a est strictement positif, alors l'équation n'admet aucune solution.

Somme et produit des solutions éventuelles d'une équation du second degré

6 Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a est un nombre non nul tel que son discriminant est positif.

Pour chacune des propositions suivantes, écris le numéro de la proposition suivi de V lorsque la proposition est vraie ou de F lorsqu'elle est fausse.

1. La somme des zéros de cette équation est $-\dfrac{b}{a}$;
2. La somme des zéros de cette équation est $-\dfrac{b}{2a}$;
3. Le produit des zéros de cette équation est $\dfrac{c}{a}$.

7 Les équations du second degré ci-dessous admettent des solutions, sans les résoudre, indique la somme et le produit de leurs solutions.

a) $3x^2+6x-1=0$;

b) $x^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$;

c) $(a^2+1)x^2+ax-1=0$.

Règles donnant le signe d'un polynôme du second degré

8 Pour chacune des propositions ci-dessous, écris dans ton cahier, la lettre de la bonne réponse parmi celles qui sont données.

Soit ax^2+bx+c un polynôme du second degré et Δ son discriminant.

1. Si a et Δ sont strictement négatifs alors :
   a) le polynôme change de signe sur $\mathbb{R}$;
   b) le polynôme est toujours strictement positif ;
   c) le polynôme est toujours strictement négatif.
2. Si a et Δ sont strictement positifs, alors :
   a) le polynôme ne change pas de signe;
   b) le polynôme est toujours strictement positif ;
   c) le polynôme est toujours strictement négatif ;
   d) le polynôme a le signe de l'opposé de a entre les zéros, x_1 et x_2.

9 Soit la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$, où a est un nombre réel non nul. Reproduis et complète les tableaux de signes ci-dessous.

Δ < 0

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

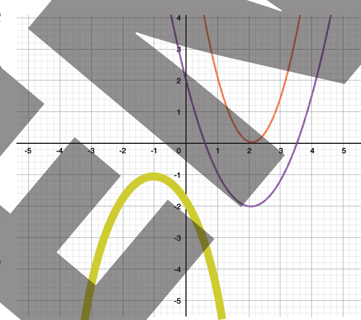
Δ = 0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$		○	

Δ > 0

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$			

10 On donne ci-contre la représentation de trois fonctions polynômes du second degré.



Par lecture graphique, détermine pour chaque fonction :

a) le signe du coefficient de x^2 ;

b) le signe du discriminant ;

c) le tableau de signes de la fonction.

Factorisation d'un polynôme du second degré connaissant ses zéros

11 Soit la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a est un nombre réel non nul. Dans chacun des cas suivants, détermine la forme factorisée de f .

1. f a pour zéros les nombres réels u et v ;
2. f a pour zéro double le nombre réel r.

12 Dans chacun des cas ci-dessous, écris la forme factorisée de la fonction polynôme du second degré.

1. Le coefficient de x^2 est 3 et ses zéros sont −6 et 2 ;
2. Le coefficient de x^2 est −2 et son zéro double est −7 ;
3. Le coefficient de x^2 est 5 et sa représentation graphique coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses : $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{8}{7}$.

Ecriture d'un polynôme du second degré sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré en utilisant le discriminant

13 Écris, si possible, chacun des polynômes suivants sous la forme de produit de deux polynômes du premier degré en utilisant le discriminant.

$f(x)=3x^2+2x-5$; $g(x)=0{,}01x^2+0{,}8x-4{,}25$;

$h(x)=-2x^2+6$; $k(x)=3x^2+2x+5$.

14 Factorise, si possible, chacune des fonctions polynômes suivantes en utilisant le discriminant :

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-x-6$; $g(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$;

$h(x)=-2x^2+x\sqrt{2}+1$; $k(x)=\frac{4}{9}x^2-2x+\frac{9}{4}$.

Étude du signe d'un polynôme du second degré

15 Étudie le signe de chacun des polynômes suivants :

$f_1(x)=2x^2-7x-4$; $f_2(x)=5x^2-10x+6$;

$f_3(x)=-2x^2-3x+5$; $f_4(x)=-x^2+6x-10$;

$f_5(x)=-x^2+2x-1$; $f_6(x)=3x^2-3x-1$.

16 Étudie le signe de chacun des polynômes sur l'intervalle I donné.

1. $f_1(x)=3\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\pi^2$; I=$\mathbb{R}$.
2. $f_2(x)=-4(x-2)(3-2x)$; I=[−1; 1].
3. $f_3(x)=-4x^2-4x-1$; I=$\left[-\frac{3}{10};\frac{3}{10}\right]$.
4. $f_4(x)=2x^2-8x+9$; $I=[2;5]$.
5. $f_5(x)=-5x^2+4x-7$; $I=[0;+\infty[$.
6. $f_6(x)=2x^2+5x-7$; $I=[0;3[$.

Détermination d'une solution d'une équation du second degré en utilisant la somme ou le produit des solutions, l'autre étant donnée

17 Dans chacun des cas suivants, l'équation admet pour solution x_1. Calcule l'autre solution x_2.

1. $6x^2-x-1=0$ et $x_1=-\frac{1}{3}$.
2. $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$ et $x_1=-\sqrt{3}$.
3. $ax^2+a^2x-2a^3=0$ et $x_1=a$, $(a\neq 0)$.

Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

18 Dans chacun des cas suivants, détermine deux nombres u et v tels que :

a) $\begin{cases}u+v=2\\uv=-3\end{cases}$; b) $\begin{cases}u+v=-7\\uv=18\end{cases}$; c) $\begin{cases}u-v=6\\uv=16\end{cases}$.

19 Détermine la longueur et la largeur d'un rectangle de périmètre 60 cm et d'aire 221 cm^2.

Résolution d'une équation du second degré en utilisant le discriminant

20 Résous chacune des équations suivantes en utilisant le discriminant.

a) $x^2+x-132=0$; b) $x^2+x\sqrt{3}+4=0$;

c) $x^2\sqrt{2}-3x+\sqrt{2}=0$; d) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1=0$;

e) $35x^2-26x-48=0$.

21 Résous, dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

a) $x+2x^2+1=0$; b) $x^2-x=1$; c) $x(8-x)+1=0$.

22 Résous, dans $\mathbb{R}$, chacun des inéquations suivantes en utilisant le discriminant:

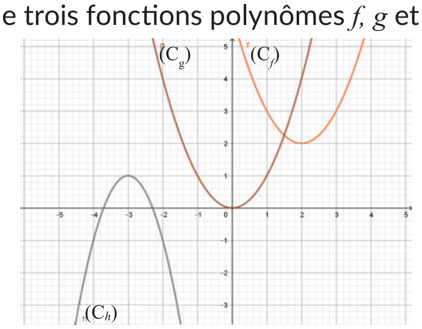
a) $x^2-2x-24>0$; b) $x^2-3x-1\leq 0$; c) $3x^2+12x-8\leq 0$;

d) $5x^2+1<3x$; e) $-x^2\geq x+1$; f) $x^2\sqrt{7}+6x-\sqrt{7}\geq 0$.

23 Détermine tous les nombres réels supérieurs à leur carré.

Résolution graphique d'une équation ou une inéquation du second degré

24 On donne les représentations graphiques ci-dessous de trois fonctions polynômes f, g et h.



Par lecture graphique, résous ;

1. a) $f(x)=0$; b) $g(x)=0$; c) $h(x)=0$.
2. a) $f(x)<0$; b) $g(x)>0$; c) $h(x)\leq g(x)$.

Résolution d'une équation du type $\sqrt{p(x)} = q(x)$, où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et q un polynôme de degré inférieur ou égal à 1

25 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\sqrt{x+1} = x+2$; b) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x$; c) $\sqrt{x^2+9} = 1-x$;

d) $\sqrt{x^2-2x-3} = x+1$; e) $\sqrt{x^2-2x} = 3+x$.

Résolution d'une inéquation du type $\sqrt{p(x)} \leq q(x)$, où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et q un polynôme de degré inférieur ou égal à 1

26 Résous les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x^2-2x} \leq 3+x$; b) $\sqrt{-x^2+3x+4} \leq \frac{1}{2}x+2$;

c) $\sqrt{5x+6} \leq x+2$; d) $\sqrt{9-x} \leq x-3$.

Résolution d'une inéquation (ou d'une équation) du type : $ax^4 + bx^2 + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels.

27 Résous chacune des équations suivantes :

a) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

c) $x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} = 0$;

d) $\frac{1}{5}x + 2\sqrt{x} - 5 = 0$;

e) $4x^4 - 9x^2 + 2 \leq 0$;

f) $x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} > 0$.

Exercices de renforcement /Approfondissement

28

1. Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $3x^2 - 5x - 12 = 14x + 2$.
2. Déduis-en les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe représentative (C_f) de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 5x - 12$ et de la droite d'équation $y = 14x - 2$.

29

1. Résous, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $12x - 3 > 25x^2 - 8x - 142$.
2. Déduis-en la position relative de la courbe représentative (C_f) de la fonction $f : x \mapsto 25x^2 - 8x - 142$ et de la droite d'équation $y = 12x - 3$.

30 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ l'expression d'un polynôme du second degré tel que f (0) = −10 et qui admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↗	-5	↘

1. Détermine sans calcul :
   a) le signe du nombre réel a ;
   b) la valeur du nombre réel c ;
2. Donne la forme canonique de $f(x)$ en fonction de a.
3. Déduis-en la forme développée de $f(x)$ en fonction de a, puis exprime b et c en fonction de a.
4. Déduis-en la valeur de a puis celle de b.

31 Résous chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{5}{2} \\ uv = -\frac{2}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -\frac{26}{5} \\ uv = -1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u^2 + v^2 = 25 \\ uv = 12 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} u^3 + v^3 = 19 \\ uv = -6 \end{cases}$.

32 Résous, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $(3-x)(x^2-5x+6)>0$; b) $(2x^2-7x)(-x^2-1)\geq 0$;

c) $(4-x^2)(3x^2+8x-3)<0$.

33 Résous, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $2x^4-7x^2+6\leq 0$; b) $-x^4-x^2+12>0$;

c) $2x^2-7x^4<0$.

34 On considère le polynôme P tel que :

$P(x)=-3x^4+2x^2+1$.

1. Détermine des nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x, on a : $P(x)=(x^2-1)(ax^2+bx+c)$.
2. Déduis-en les zéros de P.

35 Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=\sqrt{3x^2+2x-8}$; b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)^2+x}}$;

c) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(x-1)^2-x}}$.

36 On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+x+1$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Soit (D) la droite d'équation $y= 3x+m$,

où m est un nombre réel.

Détermine la (ou les) valeur(s) du nombre réel m de telle sorte que (C_f) et (D) :

1. aient exactement un point d'intersection dont on précisera ses coordonnées ;
2. aient exactement deux points d'intersection dont on précisera leurs coordonnées ;
3. n'aient aucun point d'intersection.

37 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^4-6x^2+9}$.

1. Factorise $f(x)$ sous la forme $(P(x))^2$ où P est un polynôme du second degré.
2. Détermine l'ensemble I_1 sur lequel $P(x)\geq 0$ et l'intervalle I_2 sur lequel $P(x)\leq 0$.
3. Déduis-en une expression simplifiée de f sur I_1, puis sur I_2.

38 On considère l'équation (E) : $x^2+x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$.

1. Détermine l'ensemble de validité de (E).
2. On pose : $X=x+\dfrac{1}{x}$. Calcule X^2.
3. Déduis-en que (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X^2+X-6=0 \\ X=x+\dfrac{1}{x} \end{cases}$.
4. Résous l'équation $X^2+X-6=0$ puis déduis les solutions de (E).

39 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2+x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifie que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
2. Détermine le nombre de points d'intersection de (C) et de la droite d'équation y = 1.
3. Démontre que le numérateur de f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ et que son dénominateur est minoré par $\dfrac{3}{4}$.
4. Déduis –en une majoration de f sur $\mathbb{R}$.

40 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x+3}+4$ et A le point de coordonnées (5 ; 8).

On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

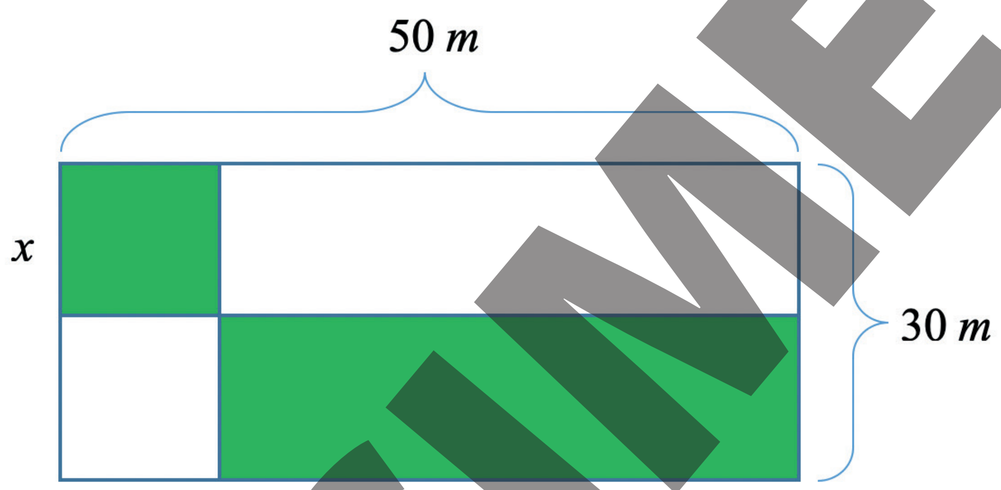
Soit $M(x_M;y_M)$ un point de (C) et N son symétrique par rapport à A.

1. Dis si N est un point de (C) lorsque $x_M=13$.
2. Démontre que dans le cas où N appartient à la courbe (C) les abscisses de M et N vérifient l'équation $x^2-10x-37=0$.
3. Résous cette équation et déduis –en les coordonnées de M et N.

Situations complexes

41 Dans le souci de subvenir à l'insuffisance alimentaire, un cultivateur possède un terrain rectangulaire de dimensions 30 m et 50 m qu'il veut mettre en valeur. Il décide de réaliser une petite rizière (en vert sur la figure ci-dessous) composée de deux parcelles, l'une carrée et l'autre rectangulaire. Mais ne sachant ni lire ni écrire, Il te sollicite pour l'aider à déterminer l'aire minimale de la rizière afin de mieux matérialiser sa production en riz.

Réponds à sa préoccupation.



42 Ton papa possède un terrain rectangulaire ABCD de longueur 40 m et de largeur 25 m.

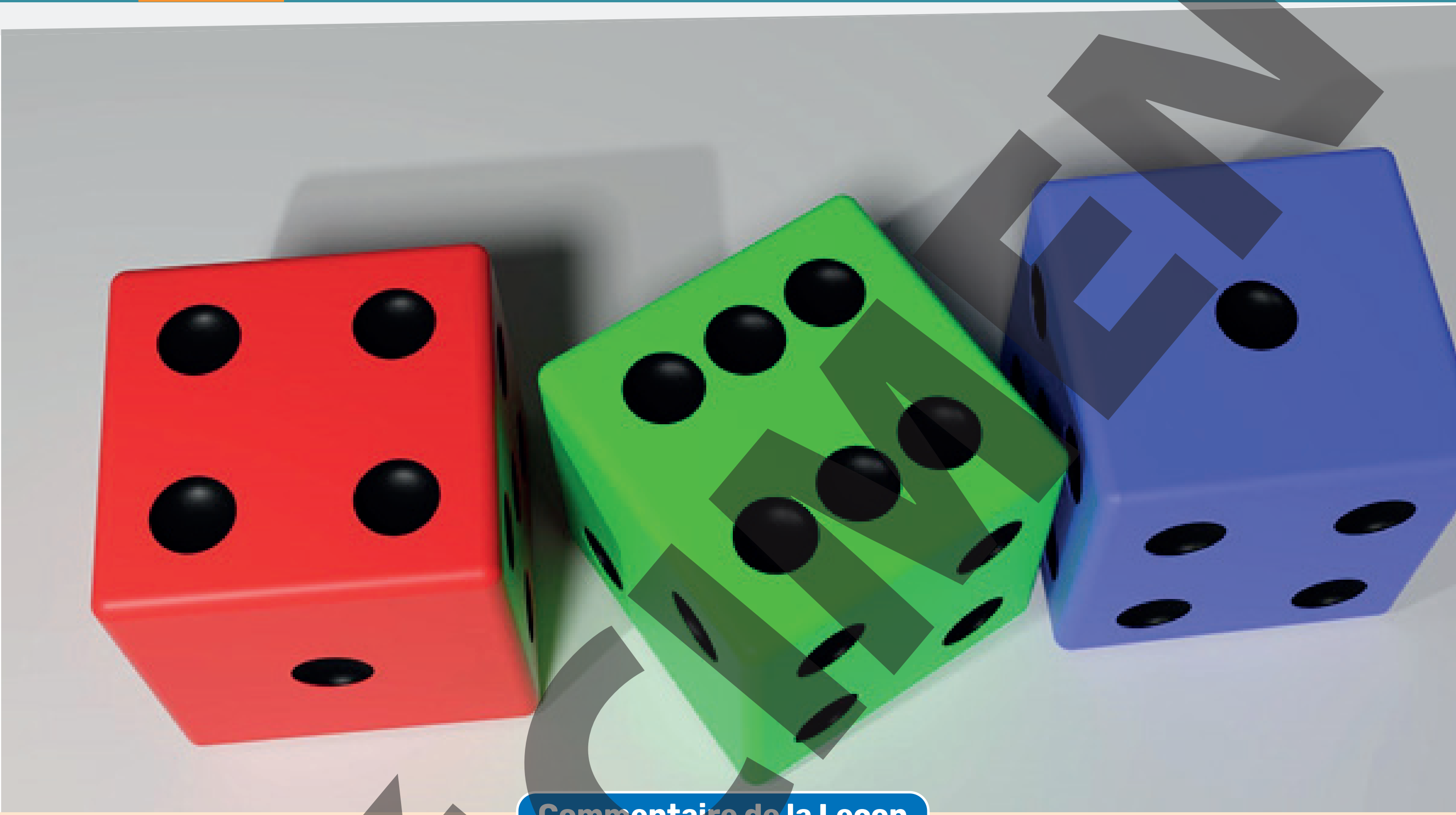
Suite à une opération de déguerpissement dû à des travaux d'intérêt public, les autorités ont décidé de lui accorder un autre terrain de 672,75 m^2 obtenu en diminuant chaque dimension de l'ancien terrain ABCD d'une même quantité. Voulant clôturer son nouveau terrain, papa veut connaître ses dimensions. Il s'adresse à toi.

Réponds à sa préoccupation.

43 Le 10 Octobre 2019, ton oncle a placé dans sa banque un capital de 500 000 F à un certain taux d'intérêt annuel. Depuis cette date, il n'a effectué ni versement, ni retrait. Chaque année, les intérêts sont calculés et ajoutés au capital de l'année précédente. Le nouveau capital sert de base pour le calcul des intérêts de l'année suivante. Le 10 Octobre 2021, il constate que son capital s'élève à 561 800 F .Voulant faire une comparaison avec le taux d'intérêt pratiqué dans une autre banque, il te demande de déterminer le taux d'intérêt à laquelle sont capital est placé dans sa banque.

Réponds à sa préoccupation.

2 DÉNOMBREMENT



Commentaire de la Leçon

Pascal a écrit un Traité du triangle arithmétique, publié après sa mort en 1665. Il y expose toutes les propriétés usuelles de ce que nous appelons aujourd'hui les coefficients binomiaux et explique le dénombrement des combinaisons. Mais, contrairement à Fermat, il répugne à utiliser ces coefficients dans les calculs relatifs aux jeux de hasard (...la peine des combinaisons est excessive...) contrairement aussi à ce que nous faisons aujourd'hui. Il semble préférer les raisonnements, même longs, aux formules. C'est aussi dans ce Traité du triangle arithmétique qu'il invente le raisonnement par récurrence.

Dans la nuit du 23 novembre 1654, Pascal aura une expérience mystique qui changera le cours de sa vie et le conduira entre autres à abandonner les mathématiques. Le traité de la Géométrie du hasard ne sera jamais publié...

Les méthodes inventées par Pascal et Fermat relèvent de ce qu'on appelle aujourd'hui la combinatoire car elles reposent sur des dénombrements. Mais pour passer d'un dénombrement à une probabilité, il suffit de faire un quotient.

La notion de dénombrement est nouvelle pour l'élève qui arrive en 1D. L'enseignant la présentera avec délicatesse en utilisant des arbres de choix, des diagrammes, des tableaux...pour modéliser les situations. On évitera l'utilisation abusive et mécanique des formules. On reformulera soigneusement les énoncés des exercices chaque fois que c'est nécessaire en apprenant aux élèves à justifier le choix de tels outils au détriment de tel autre. Le dénombrement sera investi dans le calcul des probabilités cette année et en terminale l'année prochaine. Le dénombrement est utilisé en statistique et dans le calcul de probabilité.

La détermination de $card\left(A \cup B\right)$ et $card\left(A \times B\right)$ se fera sur des exemples concrets.

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** la définition d'un ensemble fini ; la réunion de deux ensembles finis ; l'intersection de deux ensembles finis ; la définition du complémentaire d'un ensemble fini ; le cardinal d'un ensemble fini ; la propriété relative au cardinal de la réunion de deux ensembles finis ; la propriété relative au cardinal du complémentaire d'un ensemble fini ; la propriété relative au cardinal du produit cartésien d'ensembles finis ; la définition d'un p-uplet (ou p-liste) ; la définition d'un arrangement ; la définition d'une permutation ; la définition d'une combinaison.
- **Dénombrer** en utilisant un arbre de choix, un tableau à double entrée, un diagramme ou un comptage ; en utilisant une des notions ; p-uplet, arrangement, permutation, combinaison.
- **Calculer** le cardinal d'un ensemble fini ; le cardinal du produit cartésien d'ensembles finis $n!$; C_n^p ; A_n^p $(p \leq n)$.
- **Choisir** une des notions ; p-uplet, arrangement, permutation, combinaison pour résoudre un problème de dénombrement.
- **Traiter une situation** faisant appel au dénombrement.

Situation d'Apprentissage

Le cabinet d'avocats « LAW FOR CITIZEN (LFC) » est très réputé pour ses succès dans les affaires traitées.

Ce cabinet compte 20 avocats en son sein. Les avocats parlent couramment au moins une des trois langues suivantes : le français, l'anglais et l'arabe.

On sait que dans ce cabinet, quatorze avocats parlent l'anglais, huit avocats parlent français ; douze avocats parlent l'arabe, quatre avocats parlent l'arabe et le français, cinq avocats parlent l'anglais et le français et enfin deux avocats parlent les trois langues.

Ce cabinet envisage ouvrir et donc redéployer une partie de ses avocats dans un autre pays où on parle l'arabe ou l'anglais.

Activité 1 Ensemble fini.

Soient les ensembles A et B suivants :

- A est l'ensemble des nombres entiers naturels impairs.
- B est l'ensemble des nombres entiers appartenant à l'intervalle [3 ;12].

1. Détermine cinq éléments de A.
2. Écris B en extension (c'est à dire donne la liste complète des éléments de B).

Récapitulons

- L'ensemble B possède dix éléments ; on dit que B est un ensemble fini car le nombre de ses éléments sont déterminé de façon explicite.
- L'ensemble A possède une infinité d'éléments ; on dit A est un ensemble infini.

Exercice de fixation

1

1. Dans une famille, le père s'appelle Kalifa, la mère s'appelle Anoh et il y a trois enfants : Fodé, Yves et Fabienne. Soit F l'ensemble des membres de cette famille.
2. Dis si l'ensemble F est fini ou non. Justifie ta réponse.

Activité 2 Cardinal d'un ensemble fini

Soit F l'ensemble des nombres entiers relatifs appartenant à l'intervalle [-4;4].

Détermine le nombre d'éléments de F.

Récapitulons

- Un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments est appelé un ensemble fini. Son nombre d'éléments est appelé «cardinal» et est noté card. Si l'ensemble M possède n éléments, on a : Card A = n.
- Un ensemble qui ne possède aucun élément est appelé un ensemble vide et noté : Ø
- On a donc : card (Ø) = 0.

Exercice de fixation

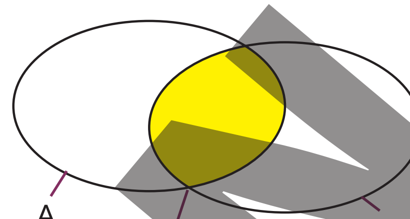
2

On donne les ensembles A et B suivants :

$A=\left\{-0{,}5;1\,;\,\frac{7}{5}\,;4;\,1;\,34;\,\sqrt{2}\right\}$ et B = { } Détermine le cardinal de A puis celui de B.

Activité 3 Intersection de deux ensembles

On considère les ensembles suivants :



- A l'ensemble des nombres multiples de 2 compris entre 111 et 127 ;
- B l'ensemble des multiples de 3 compris entre 111 et 127.

1. Écris en extension les ensembles A et B.
2. Écris en extension l'ensemble C des nombres compris entre 111 et 127 qui sont à la fois multiples de 2 et de 3.

Récapitulons

L'ensemble C est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
On dit que l'ensemble C est l'intersection des ensembles A et B et on écrit :C=A∩B.

Remarques

Un ensemble A est contenu (ou inclus) dans un ensemble B si tout élément de A est un élément de B. On écrit alors A⊂B.

Exercice de fixation

3 On donne les ensembles suivants :

$A=\left\{\theta;-\sqrt{2};P;3,14;2;\dfrac{1}{3};0;\delta\right\}$ et

$B=\left\{\sqrt{2};0,33;\pi;Q;2;\delta;\theta\right\}$

1. Détermine l'ensemble C tel que : C=A∩B.
2. Écris la lettre de chacune de ces affirmations suivi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse.

Soient B et C deux ensembles.

a) B est contenu dans C∩B

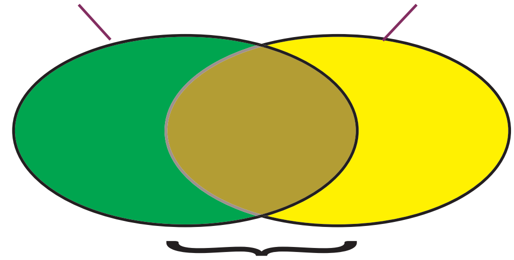
b) C est contenu dans C∩B

c) C∩B est contenu dans B

d) C∩B est contenu dans C

Activité 4 Réunion de deux ensembles

On considère les ensembles suivants :



- A l'ensemble des nombres entiers multiples de 3 compris entre 111 et 127 ;
- B l'ensemble des nombres entiers multiples de 5 compris entre 111 et 127.

1. Écris en extension les ensembles A et B
2. Écris en extension l'ensemble G des nombres entiers compris entre 111 et 127, qui sont multiples de 3 ou de 5.

Récapitulons

- L'ensemble G est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
- On dit que l'ensemble G est la réunion des ensembles A et B et on écrit : G = A∪B.

Exercice de fixation

4 On donne les ensembles suivants : $E=\left\{\theta;-\sqrt{2};P;3{,}14;2;\frac{1}{3};0;\delta\right\}$ et $F=\left\{\sqrt{2};0{,}33;\pi;Q;2;\delta;\theta\right\}$.

1. Détermine l'ensemble C tel que : C = E∪F.
2. Écris la lettre de chacune des propositions suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.
   - **a)** L'élément $-\sqrt{2}$ n'appartient pas à E∪F.
   - **b)** L'élément δ appartient à E∪F.
   - **c)** C∩E est contenu dans C.

Activité 5 Ensembles disjoints

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le nombre apparu sur la face supérieure.

Soit A l'ensemble défini par : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4 ».

Soit B l'ensemble défini par : « le nombre obtenu est un multiple de 6 ».

Justifie que les ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs.

Récapitulons

Les ensembles A et B n'ont aucun élément commun. On dit qu'ils sont disjoints.
On écrit : A∩B = ∅. Deux ensembles qui n'ont aucun élément commun sont dits disjoints.

Exercice de fixation

5 On donne les mots suivants : commun ; disjoints; intersection ; aucun.

Recopie la phrase puis remplace les pointillés par les mots qui conviennent.

Deux ensembles qui n'ont...............élément........ sont dits.......

Soit la propriété suivante : « l'ensemble des nombres premiers et l'ensemble des nombres pairs sont deux ensembles disjoints »

A l'aide d'un contre-exemple, prouve que cette propriété est fausse.

Activité 6 Ensembles complémentaires

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le nombre apparu sur la face supérieure. Soit E l'ensemble de tous les résultats possibles. Soit A l'ensemble défini par : « le nombre obtenu est un multiple de 3 ». Soit B l'ensemble défini par : « le nombre obtenu n'est pas un multiple de 3 ».

1. Écris l'ensemble E en extension.

2. Démontre que A∩B=∅ et E=A∪B.

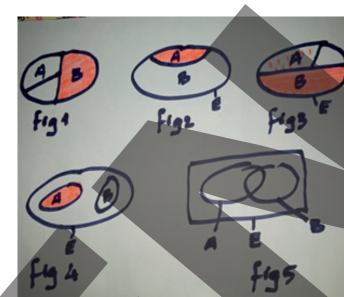
Récapitulons

Les sous-ensembles A et B de E vérifient les deux propriétés suivantes :
- Ils sont disjoints ;
- Leur réunion est égale à l'ensemble E.

Deux sous-ensembles d'un ensemble E qui vérifient les deux conditions ci-dessus sont appelés des sous-ensembles complémentaires de E. On écrit : $A=\overline{B}$ ou $\overline{A}=B$.
On dit donc que $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

Exercice de fixation

6



1. On donne ci-dessous quatre figures. Indique celle dans laquelle les ensembles A et B sont complémentaires

2. On considère l'ensemble suivant : K = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}.

- **a)** Soit P = {0 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6}. Détermine le complémentaire de P dans K.
- **b)** Soit Q = {0}. Détermine le complémentaire de Q dans K.

Activité 7 Propriété du cardinal de deux ensembles finis

Un autobus scolaire transporte des sportifs d'un lycée pour un camp de vacance.

Ces sportifs pratiquent le cyclisme ou la natation.

On sait que 15 sportifs pratiquent le cyclisme, 10 pratiquent la natation et 5 pratiquent les deux sports.

Soit C l'ensemble des sportifs qui pratiquent le cyclisme et N l'ensemble de ceux qui pratiquent la natation.

1. A l'aide de diagrammes, justifie que : card (C∪N) = 20
2. Justifie que : card(C ∪ N) = cardC + cardN - card(C∩N)

Récapitulons

Dans cet exercice : C et N sont des ensembles finis alors on a :
card(C ∪ N)= cardC + cardN - card(C ∩ N)
On admet la propriété suivante : soient A et B sont deux ensembles finis :

card(A∪B) = cardA + cardB - card(A∩B)

Exercice de fixation

7 Dans un établissement secondaire, il y a deux classes de $1^{ère}D$: $1^{ère}D_1$ et $1^{ère}D_2$.

Chaque classe dispose de huit professeurs : ANGLAIS ; FRANÇAIS ; HIST/GEO ; MATHÉMATIQUES ; PHYSIQUE-CHIMIE ; SVT ; EPS ; PHILOSOPHIE.

Les deux classes ont en commun les professeurs suivants :

ANGLAIS ; PHYSIQUE-CHIMIE ; HIST/GEO et EPS.

Détermine le nombre professeurs de ces deux classes.

Activité 8 Produit cartésien, dénombrement de couples

Un dé est cubique et ses faces sont numérotées de 1 à 6. Une pièce de monnaie a deux faces notées Pile (P) et Face (F). Soit les ensembles suivants : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} et B = {F ; P}.

On lance simultanément la pièce et le dé. On appelle résultat du lancer, un couple (a, b) tel que a représente le chiffre lu sur la face supérieure du dé et b représente la lettre lue sur la pièce.

1. a) Écris l'ensemble C de tous les résultats possibles.

b) Déduis-en card(C).

2. Compare le nombre card(C) au produit (cardA) x (cardB).

Récapitulons

L'ensemble C est constitué de tous les couples $(a\ ;\ b)$ tels que définis dans l'énoncé.
L'ensemble C s'appelle le produit cartésien de A par B ; on le note A × B.
On écrit C = A × B.
Les ensembles A et B sont finis et on a : card(C) = (cardA) × (cardB).
On admet la propriété suivante :

Soient A et B sont deux ensembles finis : $\boxed{\text{card}(A \times B) = (\text{card}A) \times (\text{card}B).}$

Exercice de fixation

8 Les ensembles A et B sont finis.

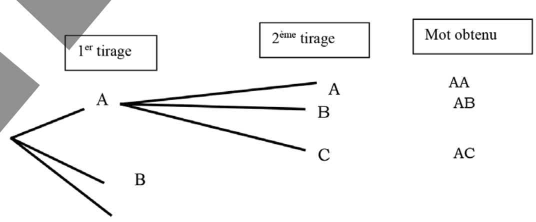
Réponds par Vrai ou Faux à chacune des assertions suivantes :

1. card(A × A) = $(\text{card}A)^2$.
2. Pour tous ensembles A et B, on a : A × B = B × A.
3. Si les ensembles A et B sont disjoints alors : card(A×B) = (cardA) + (cardB).

Activité 9 Dénombrement de p-listes

Un sac contient trois petits cartons sur lesquels sont marquées les lettres A, B, C.

On tire un carton, on note sa lettre, on le remet dans le sac puis on tire un deuxième carton, on note sa lettre. De cette manière, on écrit des mots de deux lettres.



1. Reproduis et complète l'arbre de choix suivant.
2. Déduis-en le nombre de mots possibles
3. a) Soit l'ensemble E suivant : E={A, B, C}.

Justifie que l'ensemble $E x E$ est l'ensemble de tous les mots possibles.

b) Justifie que le nombre de mots possibles est 9.

Récapitulons

Les couples de ExE sont appelés des 2-listes ou encore des 2-uplets d'éléments de E.
Le nombre d'éléments de ExE est égal à : $(\text{card}E)^2$.
Cette formule se généralise au cas de p facteurs E : $E \times E \times \ldots \times E = E^p$.
Un élément de l'ensemble E^p est appelé une p-liste ou un p-uplet.
On admet la propriété suivante :

> Soit E est ensemble fini: $\text{card}(E \times E \times \ldots \times E) = (\text{card}(E))^p$
> Si cardE = n, alors card(E × E ×… × E) = n^p . C'est le nombre de p-listes d'éléments de E.

Exercice de fixation

9 On considère l'ensemble L suivant : L= {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.

Détermine le nombre de numéros de téléphones possibles que l'on peut obtenir avec les chiffres de L.

Remarques

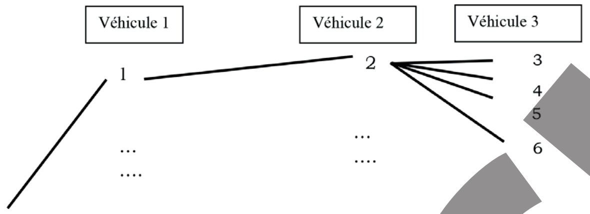
En Côte d'Ivoire, un numéro de téléphone se compose de 10 chiffres.

Activité 10 dénombrement d'arrangements

Dans un quartier de Bouaké, un immeuble abrite un parking pour les résidents. Les places du parking sont numérotées de 1 à 6.

Chaque résident est libre de stationner son véhicule n'importe où sur le parking. A 18 heures, trois résidents rentrent du travail.

1) Reproduis et complète l'arbre de choix suivant.
2) Détermine le nombre de possibilités qu'ils ont pour stationner leurs trois véhicules sur le parking.



Récapitulons

Les triplets (1 ; 6 ; 4) et (6 ; 4 ; 1) représentent des stationnements possibles des trois véhicules.
On les appelle des arrangements de trois éléments (ou des 3-arrangements) des nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
Leur nombre total est : 6 × 5 × 4.
On admet la propriété suivante :

> Soient n et p deux nombres entiers naturels avec $p \leq n$.
> Le nombre de p-arrangements de n éléments est : $n \times (n - 1) \times (n - 2) \ldots \times (n - p + 1)$ (p facteurs).

Exercice de fixation

10 On donne les lettres suivantes : A ; B ; C et D.

On veut déterminer le nombre de mots de 3 lettres distinctes deux à deux ayant un sens ou non, que l'on peut écrire avec ces lettres.

1. Utilise un arbre de choix puis détermine le nombre de mots.
2. Justifie qu'un mot est un 3-arrangement puis détermine le nombre de mots à l'aide de la formule encadrée.

Activité 11 dénombrement de permutations

On reprend l'activité 10. Mais cette fois six résidents rentrent du travail.

Détermine le nombre de possibilités qu'ils ont pour stationner leurs six véhicules sur le parking.

Récapitulons

Les stationnements (1 ; 6 ; 4 ; 2 ; 5 ; 3) et (6 ; 4 ;1 ; 5 ; 2 ; 3) sont des permutations des nombres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
Un stationnement représente ici une permutation des places numérotées du parking.
On a trouvé 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 permutations possibles avec les six chiffres.
On admet la propriété suivante :

Soit n, un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le nombre de permutations de n éléments est égal à :
$n \times (n-1) \times \ldots \times 1$ (n facteurs). Ce nombre se note n ! et se lit factoriel n. On convient que : 0 ! =1 et 1! = 1

Exercice de fixation

11 Un appareil de lecteur CD peut prendre simultanément cinq CD. Un DJ dispose de cinq CD de cinq artistes différents.

Détermine le nombre de façons qu'il a de les ranger tous dans l'appareil.

Activité 12 Dénombrement de combinaisons

Un sac contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire simultanément 3.

1. Justifie que le résultat {1 ; 5 ; 3} est le même que {1 ; 5 ; 3}.
2. Détermine tous les résultats possibles. Déduis-en leur nombre.

Remarque : On note C_5^3 ce nombre obtenu à la question 2). Démontre que $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!}$.

Généralisation : Soient n et p deux nombres entiers naturels tels $p \leq n$.

Notons C_n^p le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments.

3. Démontre que : $p!C_n^p = A_n^p$ Déduis-en que : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Récapitulons

Un ensemble est également appelé une combinaison.
Ici on a des combinaisons à 3 éléments obtenus à partir de 5 éléments. Leur nombre est 10.
Une combinaison à p éléments se note parfois une p-combinaison.
L'activité a permis de démontrer la propriété suivante :

Le nombre total de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{A_n^p}{p!}$.

Remarques

On utilise également la notation $\dbinom{n}{p}$ en lieu et place de C_n^p.

Exercice de fixation

12 Au cours d'une course de gala, 30 participants se présentent pour prendre part à la course.
Les organisateurs les regroupent par petits groupes de cinq personnes qu'ils font partir les uns après les autres.
Détermine le nombre de petits groupes que les organisateurs peuvent ainsi former.

Activité 13 Les nombres : $n!$; A_n^p et C_n^k

Soient n et k deux nombres entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$.

1. a) Donne une signification en termes de dénombrement du nombre n!.

b) On rappelle que $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$. Justifie que $n! = n(n-1)!$.

c) Sans utiliser une calculatrice, calcule les nombres : 6! et 5!.

2. a) Donne une signification en termes de dénombrement du nombre :

$n(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$.

Sans utiliser une calculatrice, calcule les nombres : A_{10}^3 ; A_{20}^2 ; A_8^5.

b) Démontre que : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

3. On donne : E = {1, 2, 3, 4}.

a) Détermine toutes les combinaisons à 3 éléments de E. Déduis-en la valeur de C_4^3.

b) Démontre que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

c) En utilisant l'une des deux formules ci-dessus, calcule les nombres C_{10}^7 ; C_{20}^3 et C_4^4.

Démontre que pour tous nombres entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$,

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$.

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (formule de Pascal)

$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

Récapitulons

$n! = n(n-1)!$

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

$PC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

Exercice de fixation

13 1) Calcule la fraction $\dfrac{20!}{18!}$.

2) Calcule C_{70}^{68}.

I. Ensembles finis

1. Ensemble fini

Définitions

- On appelle ensemble fini, un ensemble dont le nombre d'élément est fini.

Exemple

- L'ensemble des élèves d'une classe est un ensemble fini.
- L'ensemble des taxis d'une ville est un ensemble fini.

2. Cardinal d'un ensemble fini

Définitions

- On appelle cardinal d'un ensemble fini, le nombre d'éléments de cet ensemble.
- Le cardinal d'un ensemble fini se note card E.
- Si l'ensemble E a n éléments, alors Card E = n.

Exemple

- Un lycée de 2 000 élèves est un ensemble fini de cardinal 2 000.

Pour s'entraîner : Exercices 4 ; 5

3. Réunion de deux ensembles finis

Définitions

- Si A et B sont deux ensembles finis, la réunion de A et B est l'ensemble des éléments de A ou de B et est noté A ∪ B.
- $A \cup B = \{ a \,/\, a \in A \text{ ou } a \in B\}$.

Exemples

- L'ensemble des professeurs d'un lycée est la réunion des ensembles des professeurs des différentes classes de ce lycée.
- Soient A et B deux ensembles tels que : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} et B = {4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 7 ; 12}.
  On a : A ∪ B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 12}.

Pour s'entraîner : Exercice 8

4. L'intersection de deux ensembles

Définitions

- Si A et B sont deux ensembles finis, l'intersection de A et B est l'ensemble des éléments de A et B noté A ∩ B.
- $A \cap B = \{ a \,/\, a \in A \text{ et } a \in B\}$.

Exemple

Soient A et B deux ensembles tels que : A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} et B = {4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 7 ; 12}.
On a : A∩B = {4 ; 5 ; 6}.

Remarques

- Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide.
- L'ensemble vide se note ∅.

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7

5. Complémentaire d'un ensemble.

Définitions

Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E.
On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas A.
Le complémentaire de A se note : $\overline{A}$ ou C_E^A.

Remarques

Un ensemble et son complémentaire sont disjoints.

Exemple

Soit l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9} et A = {2 ; 4 ; 6 ; 8}.

Le complémentaire de A dans E est l'ensemble A tel que : $\overline{A}$ = {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9}.

Pour s'entraîner : Exercice 13

6. Propriétés du cardinal

Propriétés

Les ensembles E, A et B sont finis.
(1) card∅ = 0
(2) card(A∪B) = cardA + cardB − card(A∩B).
(3) Si A et B sont disjoints, alors : Card(A∪B) = cardA + cardB.
(4) Si A est un sous-ensemble de E alors : card($\overline{A}$) = cardE − cardA.

Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 16 ; 32

II. Dénombrement d'ensembles finis

1. Le produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient A et B deux ensembles.
On appelle le produit cartésien de A par B, l'ensemble noté A × B tel que :
A×B ={(a ; b) avec a ∈ A et b ∈ B}. Les éléments d'un produit cartésien de deux ensembles sont appelés des couples ou des 2-uplets ou des 2-listes.

Exemple

E= {1 ; 2 ; 3} et A = {a ; b}
E × A = {(1 ; a) ; (1 ; b) ; (2 ; a) ; (2 ; b) ; (3 ; a) ; (3 ; b)}

Remarques

On peut généraliser le produit cartésien de deux ensembles au produit cartésien de p ensembles (p ≥ 3).
Les éléments de cet ensemble sont alors appelés des p-uplets ou des p-listes.

Exemple

A × B × C × D = {(a ; b ; c ; d) avec a ∈ A ; b ∈ B ; c ∈ C ; d ∈ D}. (a ; b ; c ; d) est une 4-liste.

Propriétés

Si A et B sont deux ensembles finis, alors card(A × B) = (cardA) × (cardB).

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 20

2. Dénombrement de p-listes.

Définition

E est un ensemble fini.
On appelle p-liste d'un ensemble E ou (p-uplets de E), les éléments de l'ensemble
E × E × ... × E (p facteurs égaux à E).

Remarques

- $E \times E \times ... \times E$ (p facteurs égaux à E) est aussi noté E^p
- Une p-liste est un ensemble ordonné de p éléments de E.
- La notion de p-liste peut être rattachée au modèle de tirages successifs de p objets d'un ensemble contenant n objets

Exemple

Le code pin d'un téléphone portable est une 4-liste. C'est un élément de l'ensemble E^4 avec :
E = {0 ; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de p-liste d'éléments de E est : n^p.

Exemple

En dehors de toute restriction, un numéro de téléphone en Côte d'Ivoire est un 10-uplets de l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;6 ; 7 ; 8 ; 9}. Ainsi le nombre total de numéros de téléphone possible est égal à : 10^{10}.

3. Dénombrement d'arrangements

Définition

On appelle arrangement de p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$), un p-liste d'éléments de E distincts deux à deux.

Exemple

Un mot de trois lettres deux à deux distinctes est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble des lettres de l'alphabet.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18 ; 19

Propriétés

Soit E un ensemble à n éléments (n non nul) et p un nombre entier naturel inférieur ou égal à n.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à : $\underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}_{(p \text{ facteurs})}$
Le nombre $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ est noté : A_n^p .
On a donc : $A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}_{(p \text{ facteurs})}$

Exemple 1

$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

Pour s'entraîner : Exercices 21 ; 22 ; 25 ; 26

Exemple 2

Le nombre de mots de l'alphabet français formés de trois lettres distinctes deux à deux est égal à :
$A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15\,600$.
c'est-à-dire : 15 600 au total.

4. Dénombrement de permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments. Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple

Le nombre 1526 est une permutation des chiffres 1 ; 2, 5 et 6, mais le nombre 125 n'en est pas un.

Propriété

Le nombre de permutations de n éléments est égal à :$n(n-1)(n-2)...1$. (n facteurs).
Le nombre $n(n-1)(n-2)...1$ se note n! (se lit factoriel n)
On a donc : $A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)...1$
Par convention : $0\,! = 1$ et $1\,! = 1$

Exemple 1

$4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Exemple 2 Tous les matins les écoliers d'une classe de CP1 se mettent en rang avant de regagner leurs places. Ce matin, 30 écoliers de cette classe sont présents. Le nombre de rangs possibles qu'ils peuvent former est égal à 30 !

Remarques

La notion de permutation peut-être rattachée au modèle de tirages successifs sans remise de n objets pris parmi n objets.

Pour s'entraîner : Exercices 23 ; 24

5. Dénombrement de combinaisons

Définition

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments ($p \leq n$), toute partie constituée de p éléments de E.

Exemple

La paire {c,d} est une combinaison de 2 éléments de l'ensemble des lettres de l'alphabet (français).

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments (n non nul) et p un nombre entier naturel inférieur ou égal à n. Le nombre de combinaison de p éléments de E est égal à :

$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$. C'est à dire : $\frac{A_n^p}{p!}$. Le nombre $\frac{A_n^p}{p!}$ se note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ On a donc : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Exemple 1

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

Exemple 2 Soit un ensemble E={1,5,6,2,8}. Les ensembles {1,2,5} ; {1,2,6} ; {6,2,5} sont des combinaisons de trois éléments de E. Il y a au total 10 combinaisons.

Remarques

- La notion de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments peut-être rattachée au modèle de tirage simultané de p objets pris parmi n objets.
- Contrairement aux p-listes, les combinaisons sont des ensembles, on les note avec des accolades.

Pour s'entraîner : Exercices 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; 31

III. Tableau récapitulatif

Définition

p-liste : ensemble ordonné de p éléments avec répétition possible.
p-arrangement : ensemble ordonné de p éléments sans répétition possible.
p-combinaison : ensemble non ordonné de p éléments sans répétition possible

	Avec répétition	Sans répétition
Ordre	n^p Avec n et p deux nombres entiers naturels quelconques	A_n^p Avec n et p deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ $n!$ Avec n et p deux nombres entiers naturels tels que $p = n$
Sans ordre		$\binom{n}{p}$ Avec n et p deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$

QUESTION 1

Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage simultané de p objets pris parmi n $(p \leq n)$?

Méthode

- L'adverbe simultané indique que l'ordre des éléments qui apparaissent au cours de l'expérience n'est pas à prendre en compte, ou n'a aucune importance.
- On identifie dans l'énoncé les deux entiers naturels n et p. On remarquera que p est toujours inférieur ou égal à n. n est le nombre total d'objets et p le cardinal des sous-ensembles ou (parties) dont on cherche le nombre.
- On associe à ce tirage le nombre total N de parties, en utilisant la formule : N = $\frac{A_n^p}{p!}$.
- C_n^p est le nombre de sous ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Exercice

Un groupe de quatre élèves doit présenter en EDHC un exposé sur les méfaits de la cigarette.
Deux élèves exposeront tandis que les deux autres noteront les questions des intervenants.
Détermine le nombre de manières différentes de choisir les exposants.

Solution commentée

Le groupe est formé de quatre élèves, donc n = 4.
On détermine le cardinal des parties à dénombrer. Deux élèves doivent exposer sur les quatre, donc le cardinal des parties à dénombrer est de $C_4^2 = 6$.
L'ordre des élèves qui doivent exposer n'a pas d'importance. En effet il s'agit de désigner deux élèves dans n'importe quel ordre pour présenter l'exposé.
Le nombre de manières différentes de choisir deux élèves parmi les quatre est donné par : $C_4^2 = 6$.
Il y a 6 manières différentes de choisir les deux élèves qui doivent exposer.

Exercice non corrigé

Un sac contient 6 boules numérotées de 1 à 6.
On tire simultanément 3 boules du sac.
Détermine le nombre de résultats :

1. Contenant une seule fois le chiffre 1.
2. Composés de chiffres impairs.

QUESTION 2

Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de p objets avec remise pris parmi n objets

Méthode

L'expression « tirage successif » indique que l'ordre des éléments qui apparaissent au cours de l'expérience est à prendre en compte. Le tirage se faisant avec remise indique que les éléments ordonnés qui apparaissent sont distincts ou non. Pour cela :

- On identifie dans l'énoncé les deux entiers naturels n et p, n est le nombre total d'objets et p le nombre de réalisations de l'expérience ou du tirage.
- On associe à ce tirage ou à cette expérience le nombre total N de p-uplets en utilisant la formule : N = n^p

Exercice

Une urne contient cinq bulletins rouges et 3 bulletins verts. On tire trois bulletins dans cette urne, successivement, en remettant chaque bulletin tiré dans l'urne avant de prendre les suivants.
Détermine le nombre de tirages possibles.

Solution commentée

Ici, les trois tirages se suivent et le bulletin tiré de l'urne est remis avant de faire un nouveau tirage, donc il est possible de tirer plus d'une fois un même bulletin. Ainsi, les 3-listes que l'on peut obtenir après les trois tirages sont constitués de bulletins deux à deux distincts ou non. On tire successivement 3 bulletins et ces tirages se font parmi 8 bulletins, donc on a : $n = 8$ et $p = 3$. D'où le nombre de tirages possibles est : 8^3 soit 512 possibilités.

Exercice non corrigé

Pour déverrouiller son vélo, Konaté possède un antivol à code qui est une succession de 4 chiffres compris entre 0 et 9.

Konaté a oublié son code.

1. Détermine le nombre maximum d'essais que Konaté doit faire pour retrouver son code.
2. Konaté se souvient que son code commence par : 7 et se termine par un chiffre pair.
   Détermine dans ce cas le nombre maximum d'essais que Konaté doit faire pour retrouver son code

QUESTION 3

Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de p objets sans remise pris parmi n objets ($p \leq n$) ?

Méthode 1

L'expression « tirage successif » indique que l'ordre des éléments qui apparaissent au cours de l'expérience est à prendre en compte. Le tirage se faisant sans remise indique que les éléments ordonnés qui apparaissent sont deux à deux distincts. Pour cela :

- On identifie dans l'énoncé les deux entiers naturels n et p, n est le nombre total d'objets et p le nombre d'objets tirés, p est toujours inférieur ou égal à n ;
- On associe à ce tirage ou à cette expérience, le nombre total N de p-uplets d'éléments distincts deux à deux, en utilisant la formule : N = A_n^p .

Exercice

On dispose de quatre encyclopédies que l'on désire ranger toutes dans six tiroirs, mais un tiroir ne peut contenir qu'une seule encyclopédie.
Détermine le nombre de rangements possibles.

Solution commentée

Cet exercice est assimilable à un tirage successif sans remise (un tiroir ne peut contenir qu'une seule encyclopédie) de 4 objets parmi 6.
Ici, un rangement de 4 encyclopédies est un 4-uplets d'éléments distincts deux à deux de l'ensemble des 6 tiroirs. Le nombre N de rangements possibles est donc donné par :
N = A_6^4.
On a : N = 6×5×4×3, soit : 360 rangements possibles.

Exercice non corrigé

Un lecteur MP3 contient 32 morceaux de musique et une de ces fonctions permet d'en écouter trois différents au hasard.

1. Détermine le nombre de possibilités pour cette écoute aléatoire de trois musiques.
2. Détermine le nombre de possibilités si l'on suppose que le premier morceau joué est mon morceau préféré.

QUESTION 4

Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage de p objets pris chacun successivement dans p ensembles : E_1 ; E_2 ; E_3 ; .... E_p de cardinal respectifs non nuls : $n_1 ; n_2 ; n_3 ; ...n_p$

Méthode

L'expression « tirage successif » indique que l'ordre des éléments qui apparaissent au cours de l'expérience est à prendre en compte. Le tirage ou le choix se faisant respectivement dans les ensembles E_1 ; E_2 ; E_3 ; ....E_p, indique que les éléments ordonnées (e_1, e_2, e_3, ..., e_p) qui apparaissent sont tels que $e_1 \in E_1$; $e_2 \in E_2$; etc.

- On identifie dans l'énoncé le cardinal respectif : n_1 ; n_2 ; n_3 ; ...n_p de chacun des ensembles E_2 ; E_3; .... ; E_p .
- On associe à ce tirage ou à cette expérience, le nombre total N de p-uplets en utilisant la formule :
- N = $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$.

Exercice

Dans un restaurant, le menu est composé d'une entrée, d'un plat de résistance et d'un dessert.
Pour l'entrée, le client a le choix entre la salade et le thon au pain. Pour le plat de résistance, il a le choix entre le riz, le foutou et le placali. Quant au dessert, il a le choix entre le yaourt et les oranges.
Détermine le nombre de menus possibles offerts par ce restaurant.

Solution commentée

Il s'agit de faire le choix dans trois ensembles : E, constitué d'entrées ; R, constitué de plats de résistance et D, constitué de dessert.

On identifie le cardinal de chacun de ces ensembles.

card E = 2 ; card R = 3 et card D = 2, donc le nombre N de menus possibles est :

N = card E × card R × card D. N = 2 × 3 × 2 = 12.

Le nombre possible de menus est de 12

Exercice non corrigé

Pour avoir accès à la chambre « forte » d'une banque, une caissière doit taper un code composé d'une consonne suivie de trois chiffres.

Détermine le nombre de codes possibles

Exercices de fixation

1 Écris dans ton cahier le numéro de chacune de ces propositions ci-dessous suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

1. Une permutation est un arrangement.
2. Un arrangement est une permutation.
3. Un arrangement est une p-liste.
4. Une p-liste est un arrangement.
5. Pour tous ensembles A et B, card(A∪B)=cardA+cardB.
6. Si A et B sont deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble E, alors card(E) = cardA + cardB.
7. Si A est un sous-ensemble de B alors, card(A) = cardB − cardA.
8. Si cardA ≤ cardB alors A est un sous-ensemble de B.
9. Si A est un sous-ensemble de B, alors cardA ≤ cardB.

2 Donne la signification en termes de dénombrement de chacun des nombres suivants :

1. n^5
2. C_{12}^3
3. 8!
4. 9 × 8 × 7 × 6

3 Pour chacune des propositions ci-dessous, quatre réponses sont proposées donc une seule est correcte.

Recopie dans ton cahier le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Réponses A	Réponses B	Réponses C	Réponses D
1	Le nombre 3^5 représente le nombre de :	3-lites de 5 éléments	3-combinaisons de 5 éléments	3-arragements de 5 éléments.	5-lites de 3 éléments
2	$\binom{10}{6}$ est égal à :	$\frac{10!}{6!}$	$\frac{A_{10}^6}{10!}$	$\binom{10}{4}$	$\binom{5}{3}$
3	Le complémentaire de E dans lui-même	est lui-même	est l'ensemble vide	n'existe pas	est l'ensemble {1}
4	10 personnes se serrent tous la main. Le nombre de poignées de mains est :	10^2	$\binom{10}{2}$	2^{10}	10!

Ensembles finis, cardinal d'un ensemble

4 Détermine le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50.

5 Détermine le cardinal de l'ensemble des nombres entiers relatifs compris dans l'intervalle [−5,75 ; 6,01]

6 On donne l'ensemble A tel que :
A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}
On donne l'ensemble B tel que : B = {3, 6, 9, 12, 15, 18}
Détermine : A∩B.
Définis à l'aide de phrases, l'ensemble A∩B.

7 On considère l'ensemble G des diviseurs entiers naturels de 18 et l'ensemble H des diviseurs entiers naturels de 35.

Détermine l'ensemble : G∩H.

8 On donne les ensembles suivants : A = {1,5,4,2,8,6,3,7} et B={1; 2; 10; 5; 7; 15; 20}.

Détermine l'ensemble A∪B.

9 Soit E un ensemble quelconque.

Justifie que card(E∪Ø) = cardE.

10 On donne card(A∩B) = 8, card(A) = 18 ; card(B) = 30.

Détermine card(A∪B).

11 On donne les ensembles suivants : E= {0,1,2,3,4,5} et F = {−5,−4,−3,−2,−1}.

Justifie que les ensembles E et F sont disjoints.

12 On donne : card(A) = 13 ; card(B) = 8 et card(A∪B)=21.

Justifie que les ensembles A et B sont disjoints.

13 On donne les deux ensembles suivants

E = {a, b, c, 1, −2, 3, d, 7, 9, 8} et A = {1, a, d, c}.

Justifie que A est une partie de E.

Détermine le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E.

14 Un élève de CE1 possède dans sa poche 6 billes bleues, 5 billes vertes et 3 billes à la fois bleues et vertes. Soit V l'ensemble des billes vertes.

1. Détermine le nombre de billes qu'il possède
2. Détermine le cardinal du complémentaire de l'ensemble V.

15 On considère les ensembles A et B tels que : cardA = 10 et cardB = 32.

Détermine le nombre de couples de l'ensemble A × B.

16 On donne : card(A∪B) = 19, card(A) = 10 ; card(B) = 15.

Calcule card(A∩B).

Dénombrement de p-uplets.

17 Combien de mots de deux lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet français.

18 Le code PIN (Personal Identification Number) d'un téléphone portable comporte quatre chiffres.

Détermine le nombre de codes PIN possibles de ce téléphone portable.

19 On lance une pièce de monnaie dix fois de suite.

Détermine le nombre de résultats possibles.

20 Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.

Détermine le nombre de façons différentes dont elle peut s'habiller.

Dénombrement d'arrangements/Permutations

21 Détermine le nombre d'arrangements de 4 éléments parmi 7.

22 Une famille possède trois enfants.

A l'occasion des fêtes de noël, leur mère achète cinq cadeaux.

Dénombre les différentes manières que la mère a de distribuer ces cadeaux. (Chaque enfant a droit à un unique cadeau).

23 Dénombre les différentes manières de distribuer 10 complets de pagne à dix mères de familles. (Les complets de pagne sont bien distinguables).

24 On organise un jeu de la manière suivante : on dispose les lettres A, B, C, E, F. dans un sac.

Un joueur tire une lettre la pose devant lui, tire une deuxième lettre et ainsi de suite jusqu'à vider le sac. Il obtient ainsi un mot.

Dénombre les mots que l'on peut écrire.

25 Détermine le nombre d'arrangements de 5 éléments parmi 12.

26 On dispose de 5 casiers numérotés de 1 à 5 dans lesquels on veut ranger 10 livres différents. On admet qu'un casier peut contenir tous les livres.

Détermine le nombre de rangements possibles.

Dénombrement de combinaison

27 À un bal de retraités, on compte 8 dames et 12 hommes.

Les retraités dansent par paire formée d'un homme et d'une dame.

Dénombre les paires que l'on peut constituer sur la piste de dance.

28 Un groupe de 3 élèves de Terminale doit aller chercher des livres au CDI. De combien de manières peut-on former ce groupe ? (il y a 24 élèves dans la classe).

29 Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois Combien doit-on organiser de matchs ?

30 Pour jouer au loto, il suffit de cocher 6 numéros : 5 sur une grille de 49 numéros de 1 à 49 et 1 numéro chance sur une grille de 10 numéros de 1 à 10. Vous remportez le jackpot si vous avez 5 numéros gagnants et le numéro chance.

Détermine le nombre choix possible d'un joueur.

31 Détermine le nombre de façons de choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes pour constituer un comité.

EXERCICES DE RENFORCEMENT/APPROFONDISSEMENT

32 Soient A et B deux ensembles finis.

Justifie que si A est inclus dans B, alors $\text{card}A \leq \text{card}B$.

Déduis-en que pour tous ensembles A et B,

$\text{card}A \leq \text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}B \leq \text{card}(A \cup B)$.

33 Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc de 6 places.

1. Détermine le nombre de dispositions possibles.
2. Détermine le nombre de dispositions possibles, si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3. Détermine le nombre de dispositions possibles, si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Détermine le nombre de dispositions possibles, si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre.

34 Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1. Détermine le nombre d'échantillons différents possibles
2. Détermine le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire.
3. Détermine le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire.

35 Dans un pays, les plaques d'immatriculation de véhicules privés sont composées de la manière suivante :

Une lettre (sauf D et C) suivie d'un nombre de quatre chiffres.

Les nombres de la forme 0001 ou 0056 ou 0978 sont considérés comme des nombres de quatre chiffres.

Détermine le nombre de véhicules à immatriculer.

36 À l'heure de la pause déjeuner, des participants à un séminaire, se présentent devant le buffet pour se faire servir à manger.

Le menu se compose de deux d'entrées (salade, macédoine); de trois plats de résistance (riz tchèp, riz sauce, bouillie d'igname) ; de deux desserts (pomme, banane douce).

On sert à chaque participant un plat composé de : une entrée, un plat de résistance et un dessert.

1. Détermine le nombre de types de plats qu'on peut servir à ces participants.
2. Mme Boni fait partie des séminaristes et n'aime pas manger des bananes douces. Détermine le nombre de types de plats qu'il est possible de lui servir.

37 Dans une ville il y a 12 pharmacies. Chaque semaine, trois d'entre elles sont de garde.

Détermine le nombre de façons différentes de programmer trois pharmacies de garde. (On met de côté les critères de choix propres à la profession).

38 Un sac contient 3 boules de couleur orange (numérotées de 1 à 3), 5 boules de couleur blanche (numérotées de 1 à 5) et 2 boules de couleur verte (numérotées de 1 à 2).

On tire simultanément trois boules du sac.

1. Soit E l'ensemble de tous les résultats possibles. Détermine le cardinal de E.
2. Soit l'ensemble A défini par : « on obtient des boules de couleurs différentes». Détermine le cardinal de A.

39 On dispose des chiffres suivants : 1 ; 3 ; 6 ; 5 ; 7 ; 9. On écrit des nombres avec ces chiffres.

Détermine le cardinal de chacun des ensembles suivants :

1. Ensemble des nombres de cinq chiffres distincts ou non.
2. Ensemble des nombres de cinq chiffres distincts deux à deux.
3. Ensemble des nombres de trois chiffres distincts ou non.
4. Ensemble des nombres impaires constitués de trois chiffres distincts ou non.

40 Un médecin d'entreprise a en charge quatre entreprises à visiter par semaine.

Son programme chargé ne lui permet pas de visiter deux fois la même entreprise le même jour mais il a obligation de visiter au moins une entreprise par jour.

Détermine le nombre de façons qu'il a de programmer ces visites du lundi au vendredi.

On précise que l'ordre de passage n'a aucune importance

41 On dispose d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance cinq fois de suite ce dé. Soit E l'ensemble des résultats possibles.

1. Détermine le cardinal de E
2. Soit l'ensemble A défini par : « on obtient le numéro 6 aux 1er , 4ème et 5ème lancer ». Détermine le cardinal de A
3. Soit l'ensemble B défini par : « on obtient le numéro 6 exactement trois fois au cours des cinq lancers » Détermine le cardinal de B.
4. Détermine le nombre de résultats dans lesquels le numéro 6 apparait au moins une fois.

42

Un club privé de sports compte 30 membres.

Dans ce club, 20 personnes pratiquent le Basket-ball, 17 personnes pratiquent Tennis et 2 personnes ne pratiquent aucun des deux sports.

Détermine le nombre de personnes qui pratiquent les deux sports.

43 On dispose de 5 casiers numérotés de 1 à 5 dans lesquels on veut ranger les 4 livres différents : mathématique (M), anglais (A), SVT (S) et physique-chimie (P).

On admet qu'un casier ne peut contenir qu'un seul livre à la fois.

1. Détermine le nombre de rangement possibles.
2. Détermine le nombre de rangements possibles dans chacun des cas suivants :
   a) Le livre M est dans le casier 5 et le livre P dans le casier 2
   b) Les livres S et A ne sont pas dans des casiers consécutifs (ou adjacents)

44 Un sac contient 3 boules de couleur orange (numérotées de 1 à 3), 5 boules de couleur blanche (numérotées de 1 à 5) et 2 boules de couleur verte (numérotées de 1 à 2).

On tire successivement sans remise trois boules du sac.

1. Détermine le nombre de tirages possibles.
2. Soit l'ensemble A défini par : « on obtient dans l'ordre les couleurs: orange, blanc, vert (OBV)».

Détermine le cardinal de A.

3. Soit l'ensemble B défini par : « on obtient trois boules de trois couleurs différentes».

a) Calcule le cardinal de B.

b) Définis à l'aide de phrases l'ensemble $\bar{B}$ le complémentaire de B.

c) Calcule le cardinal de B de deux manières différentes. Soit l'ensemble C défini par : « on obtient trois boules de couleurs différentes». Calcule le cardinal de l'ensemble C.

45 Un clavier de 10 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1. Détermine le nombre de codes différents que l'on peut former.
2. Détermine le nombre de codes sans le chiffre 1
3. Détermine le nombre de codes comportant au moins une fois le chiffre 1
4. Détermine le nombre de codes comportant des chiffres distincts.
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Situations complexes

46 Le cabinet d'avocats « LFC » est très réputé grâce à ses succès dans les affaires qu'il traite.

Ce cabinet compte 20 avocats en son sein. Tous les avocats parlent couramment au moins une des trois langues suivantes : le français, l'anglais et l'arabe.

On sait que dans ce cabinet,

- 14 avocats parlent l'anglais ;
- 8 avocats parlent français;
- 12 avocats parlent l'arabe ;
- 4 avocats parlent l'arabe et le français ;
- 5 avocats parlent l'anglais et le français.
- 2 avocats parlent les trois langues

Ce cabinet envisage ouvrir et donc redéployer une partie de ses avocats dans un autre pays où on parle l'arabe ou l'anglais.

Pour minimiser les coûts, ce cabinet compte n'envoyer que des avocats qui parlent l'arabe et l'anglais mais pas le français.

Sollicité, détermine pour ce cabinet le nombre d'avocats à redéployer.

47 Les 5 meilleurs élèves en mathématique de la promotion 3^{e} d'un collège de proximité participent à un concours de mathématique pour connaitre le meilleur d'entre eux.

Ton petit frère, un des candidats, te sollicite pour connaitre le nombre de podiums possibles (*un podium est constitué des trois premiers*). *On suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo.*

Propose-lui une solution argumentée.

48 Le Conseil d'Enseignement (CE) de mathématiques d'un lycée est composé de 4 dames et de 10 hommes.

A l'occasion de son anniversaire le Proviseur reçoit le CE mathématiques pour la remise d'un cadeau. Une délégation de cinq professeurs doit représenter le CE.

Cette délégation est composée d'au plus trois dames et du porte-parole monsieur Coulibaly doyen des professeurs de mathématiques du lycée.

Occupé, ton professeur animateur du CE te demande de déterminer le nombre de délégations qu'il est possible de peut être constitué.

Propose-lui une solution argumentée.

49 Dans une classe de 20 élèves, il y a 12 filles et 8 garçons. Les élèves doivent élire un comité composé d'un président, un vice-président et d'un secrétaire.

Les élèves ont décidé que le président et son vice-président soient de genres différents.

Le chef de classe te sollicite pour déterminer le nombre de comités possibles.

Propose-lui une solution argumentée.

50 Huit élèves dont cinq filles et trois garçons s'entraînent à un défilé.

Les élèves doivent faire des rangs de huit.

Le coach qui les entraine décide de mettre les cinq filles aux cinq premières places du rang.

Il aimerait donc connaitre le nombre de rangs qu'il peut ainsi constituer.

Il sollicite ton aide.

Propose-lui une solution argumentée.

51 La promotion Terminale de ton établissement organise une kermesse.

Au cours de cette kermesse, une tombola de 50 tickets est mise en vente.

Parmi les 50 tickets,

- 1 ticket rapporte un téléviseur écran 50cm (c'est le super lot)
- 3 tickets rapportent chacun une calculatrice scientifique
- 8 tickets rapportent chacun un tee-shirt.

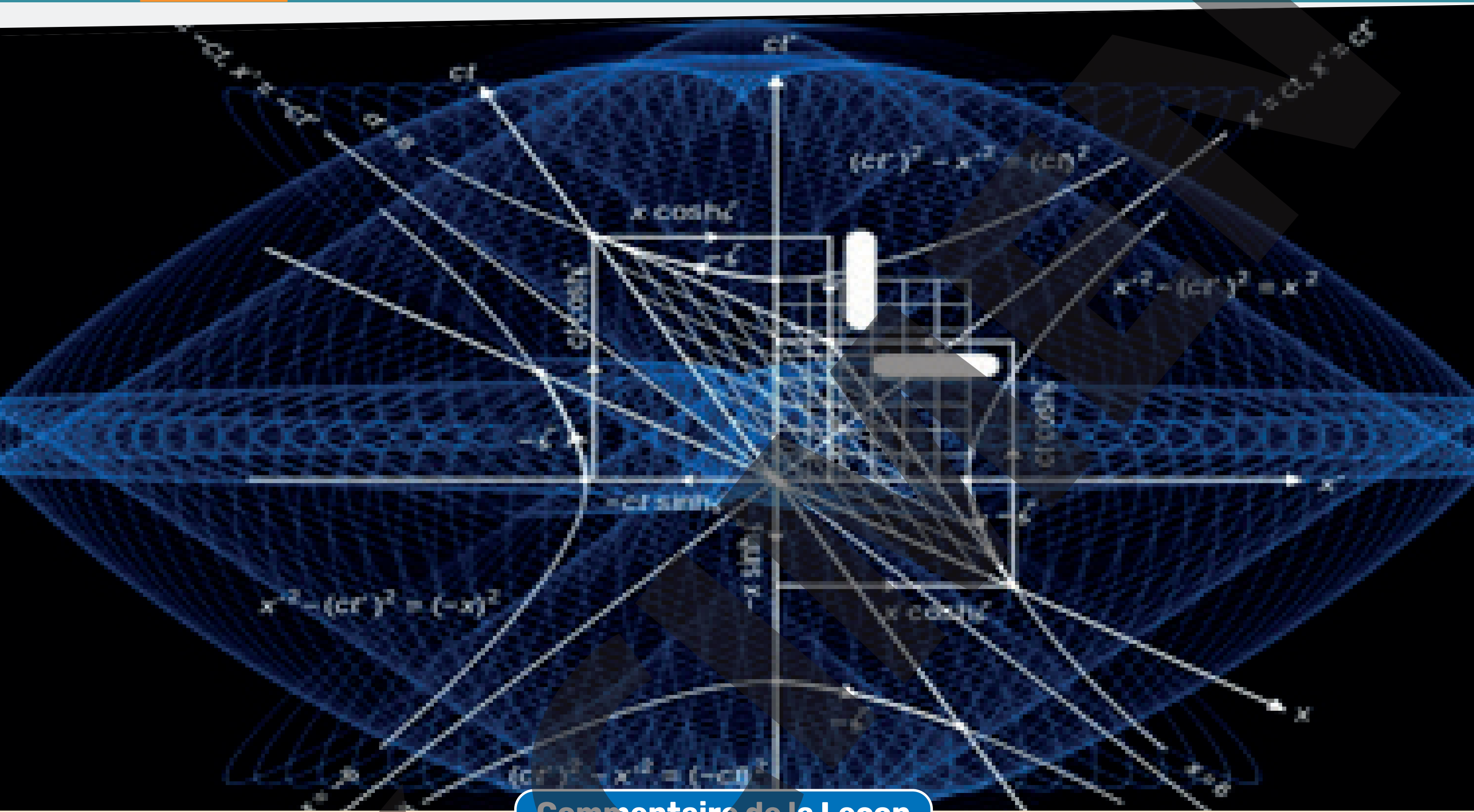
Un de tes amis veut acheter 5 tickets.

Avant l'achat, il aimerait savoir le nombre de possibilités qu'il a de gagner au moins un lot.

Il te sollicite pour trouver ce nombre.

Propose-lui une solution argumentée.

3 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS



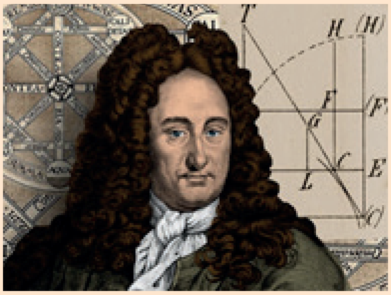
Commentaire de la Leçon

La notion de fonction en tant que correspondance entre deux types d'objet est relativement ancienne. Mais le terme n'apparaît qu'à la fin du XVIIe siècle sous la plume de Leibniz en 1694, il s'agit alors de fonction associée à une courbe géométrique : Leibniz dit ainsi que l'abscisse, l'ordonnée ou le rayon de courbure d'une courbe en un point M est une fonction du point M. Dans la même époque, Newton parle de fluente pour des quantités dépendant d'une variable qu'il appelle le temps (tout en précisant que le rôle joué par le temps, peut l'être par une autre quantité). La notation sous la forme f ne s'est pas mise en place tout de suite. Jean Bernoulli propose en 1698 d'appeler X une fonction de x, puis fx en 1718. Leibniz invente une notation permettant de travailler sur plusieurs fonctions différentes : et sont ainsi deux fonctions dépendant de x. Euler reprend la notation fx en 1734. Les fonctions sont alors toujours à valeurs numériques (réelles ou complexes) et possèdent en outre des propriétés restrictives (liées à une équation algébrique, continuité eulérienne, développable en série entière...).

Gottfried Wilhelm Leibniz, né à Leipzig le 1er juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

Parallèlement se développe, en géométrie, la notion d'application pour des correspondances ponctuelles.

Dans les années 1950, l'école Bourbaki tente de définir précisément les deux notions.



Même si, dans la rédaction finale des Éléments de 1970 la fonction est toujours définie sur son ensemble de départ, cette distinction est reprise dans l'enseignement français du secondaire, premier et second cycle, quand, à la suite de la Commission Lichnerowicz, se mettent en place les nouveaux programmes, à partir de 1968. Ainsi voit-on dès la 6e, illustrées par des diagrammes sagittaux, les définitions suivantes :

- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part au plus une flèche, s'appellent des fonctions ;
- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, s'appellent des applications.

La notion de fonction n'est pas nouvelle en classe de première. Les notions de base relatives aux fonctions ont été étudiées en classe de seconde. Ici, il s'agira de consolider et de compléter ces notions par l'étude des différents types d'application, des fonctions associées, de comparer des fonctions et d'effectuer des opérations sur les fonctions.

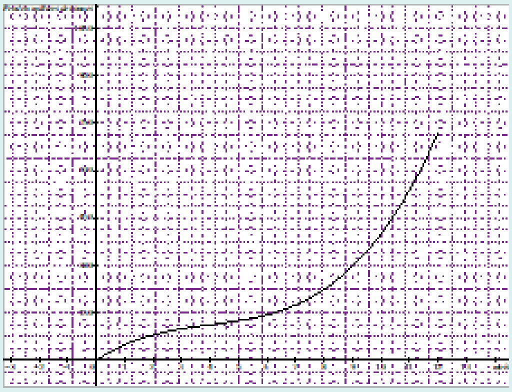
Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de la restriction d'une fonction sur une partie non vide ; la définition d'une fonction supérieure ou inférieure à une autre sur un intervalle donné ; deux fonctions connaissant leurs représentations graphiques ; deux fonctions connaissant leurs formules explicites ; la définition de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions.
- **Déterminer** l'ensemble de définition de la somme, du produit, du quotient ou de la composée de deux fonctions ; la formule explicite de la somme, du produit, du quotient ou de la composée de deux fonctions.
- **Interpréter** graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle donné.
- **Résoudre** graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$ ou une inéquation du type $f(x) \leq g(x)$.
- **Connaitre** les fonctions associées à une fonction f, à savoir : $x \longmapsto f(x-a)$, $x \longmapsto f(x) + b$, $x \longmapsto f(x-a) + b$, $x \longmapsto f(-x)$, $x \longmapsto -f(x)$, $x \longmapsto -f(-x)$, $x \longmapsto |f(x)|$; les propriétés relatives à la représentation graphique de fonctions et translation ; les propriétés relatives à la représentation graphique de fonctions et symétries ; la définition de la composée de deux fonctions.
- **Reconnaître** l'image d'une représentation graphique d'une fonction par une translation ou par une symétrie.
- **Construire** les représentations graphiques de fonctions associées à une fonction f, à savoir : $x \longmapsto f(x-a)$, $x \longmapsto f(x) + b$, $x \longmapsto f(x-a) + b$, $x \longmapsto f(-x)$, $x \longmapsto -f(x)$, $x \longmapsto -f(-x)$, $x \longmapsto |f(x)|$.
- **Connaitre** la définition d'une application ; la définition d'une application injective ; la définition d'une application surjective ; la définition d'une application bijective et de sa réciproque ; la propriété relative à la représentation graphique d'une fonction bijective et celle de sa réciproque.
- **Reconnaitre** la représentation graphique de la bijection réciproque d'une fonction bijective.
- **Construire** la courbe représentative de la bijection réciproque d'une bijection f dans un repère orthonormé connaissant la courbe représentative de f.
- **Traiter une situation** relative aux généralités sur les fonctions.

Situation d'Apprentissage

À l'entame du cours sur « Les généralités sur les fonctions » en classe de Première, un professeur de Mathématiques donne l'exercice suivant à ses élèves :

L'évolution de la production mondiale P (en tonne) d'une matière première est représentée par la courbe donnée ci-contre.



Un pays producteur met 150 000 tonnes de plus de ce même produit sur le marché.

La nouvelle production mondiale P' devient alors :
P' = P + 150 000

Construis sur le même graphique la courbe d'évolution de la production mondiale P'

Le professeur promet de donner un bonus à ceux qui trouverons cet exercice.

Afin de bénéficier de ce bonus, les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice.

Activité 1 Égalité de deux fonctions

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$

1. Justifie que f et g ont le même ensemble de définition.
2. Justifie que pour tout nombre réel x de cet ensemble, $g(x) = f(x)$.

Récapitulons

Les fonctions f et g ont le même ensemble de définition et pour tout nombre réel x de cet ensemble, $g(x) = f(x)$. On dit que les fonctions f et g sont égales.

Exercice de fixation

1 Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\frac{2x^2+5x+1}{x+3}$ et $g(x)=2x-1+\frac{4}{x+3}$.

Justifie que les fonctions f et g sont égales.

Activité 2 Restriction d'une fonction

Soient f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x$, $g(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$, $h(x)=|x|$.

1. Détermine les ensembles de définition des fonctions f, g et h.
2. Détermine le plus grand ensemble sur lequel :
   a) f et g coïncident ;
   b) f et h coïncident ;
   c) g et h coïncident.
3. L'un des trois ensembles de la consigne précédente est l'ensemble de définition de l'une des fonctions. Précise-le.

Récapitulons

$D_g \subset D_f$ et $\forall x \in D_g$, $g(x) = f(x)$. On dit que la fonction g est la restriction sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ de la fonction f.

Exercices de fixation

2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont le même ensemble de définition.
2. Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont la même expression.
3. Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont le même ensemble de définition et la même expression.

3 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |1 - x^2|$.

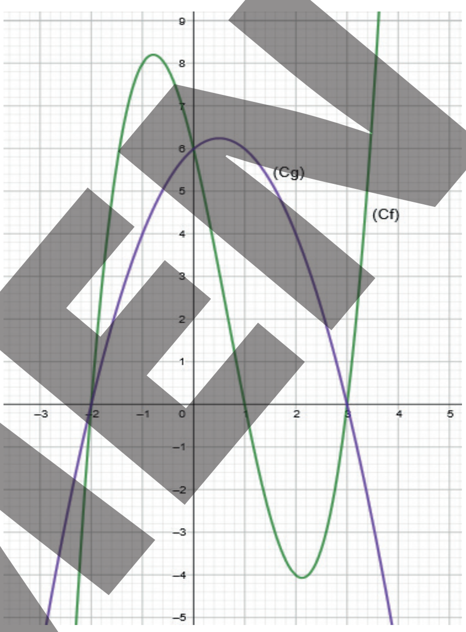
Détermine la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

Activité 3 Comparaison de fonctions

Soient f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ et $g(x) = -x^2 + x + 6$.

1. Justifie que pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = x(x + 2)(x - 3)$.
2. Compare $f(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g.

Détermine la position relative de ces courbes.



Récapitulons

Lorsque $f(x) \leq g(x)$ pour tout x d'un ensemble E, on dit que f est inférieure ou égale à g sur E.

Lorsque $f(x) \geq g(x)$ pour tout x d'un ensemble E, on dit que f est supérieure ou égale à g sur E.

Lorsque f est inférieure à g sur un ensemble E, la courbe représentative de f est au-dessous de celle de g sur E.

Lorsque f est supérieure à g sur un ensemble E, la courbe représentative de f est au-dessus de celle de g sur E.

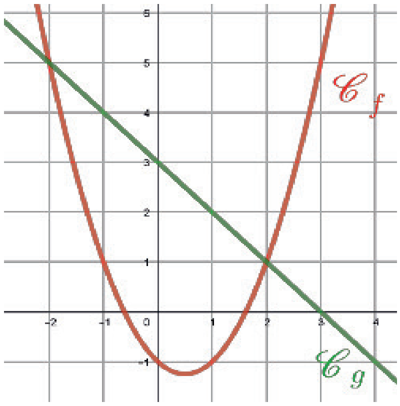
Exercices de fixation

4 Soient f et g les fonctions polynômes définies respectivement par : $f(x) = 2x^2 + 7x - 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 3$.

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (x - 1)(x + 6)$.
2. Compare les fonctions f et g.

5 On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g.

Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre de la réponse qui permet de rendre la proposition vraie.



	Propositions	Réponses		
		A	B	C
1	f est inférieure à g sur	{-2;2}	]-2;2 [	]-∞;-2[et]2;+∞ [
2	f est supérieure à g sur	{-2;2}	]-2;2[	]-∞;-2[et]2;+∞[
3	f est égale à g sur	{-2;2}	]-2;2[	]-∞;-2[et]2;+∞[

Activité 4 Somme, produit et quotient de fonctions

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

1. Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. On note s la fonction définie par : $s(x) = f(x) + g(x)$.
   a) Sans calculer $s(x)$, détermine l'ensemble de définition de s.
   b) Calcule $s(x)$.
3. On note p la fonction définie par : $p(x) = f(x) \times g(x)$.
   a) Sans calculer $p(x)$, détermine l'ensemble de définition de p.
   b) Calcule $p(x)$.
4. On note q la fonction définie par : $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
   a) Sans calculer $q(x)$, détermine l'ensemble de définition de q.
   b) Calcule $q(x)$.

Récapitulons

s est la somme de f et g. Cette somme est définie sur $D_f \cap D_g$ et se note $f + g$.

p est le produit de f et g. Ce produit est défini sur $D_f \cap D_g$ et se note $f.g$.

q est le quotient de f par g. Ce quotient est défini en tout x de $D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$ et se note $\dfrac{f}{g}$

Exercice de fixation

6 Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$ et $g(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}$

1. Détermine la fonction $f + g$.
2. Détermine la fonction $f - g$.
3. Détermine la fonction fg.
4. Détermine la fonction $\dfrac{f}{g}$.

Activité 5 Composition de fonctions

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)= x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. Soit a un nombre réel.
   a) Écris $f(a)$ et détermine la condition d'existence de $g[f(a)]$.
   b) Détermine alors $g[f(a)]$.

Récapitulons

La fonction $x \longmapsto g[f(x)]$ s'appelle la composée de f par g et on la note $g \circ f$. Elle est définie en tout nombre réel x tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exercice de fixation

7 Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Détermine les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Activité 6 Composition de fonctions (2)

Soient A, B, C et D des ensembles, f une fonction de A dans B, g une fonction de B dans C et h une fonction de C dans D.

1. Justifie que les fonctions $ho(gof)$ et $(hog)of$ ont le même ensemble de définition.
2. Justifie que pour tout x de cet ensemble, $(ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$.

Récapitulons

$ho(gof)=(hog)of$

Exercice de fixation

8 Soit f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x - 3$; $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Détermine la fonction $gofoh$.

Activité 7 Fonctions associées

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1. Soit x un élément de D_f et $M(x, f(x))$ un point de (C).
On considère le point $M_1(x, f(x) + b)$ où b est un nombre réel.
   a) Démontre que M_1 est l'image de M par la translation de vecteur $b\left(\overrightarrow{OJ}\right)$.
   b) Déduis-en que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $b\left(\overrightarrow{OJ}\right)$.
2. Soient a est un nombre réel, x un nombre réel tel que $x - a$ appartienne à D_f et M le point de (C) d'abscisse $x - a$.
On considère le point $M_2(x, f(x - a))$.
   a) Démontre que M_2 est l'image de M par la translation de vecteur $a\left(\overrightarrow{OI}\right)$.
   b) Déduis-en que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a)$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\left(\overrightarrow{OI}\right)$.
3. Déduis des deux précédentes que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a) + b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\left(\overrightarrow{OI}\right) + b\left(\overrightarrow{OJ}\right)$.

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ est l'image de celle de f par la translation de vecteur $b\left(\overrightarrow{OJ}\right)$.

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a)$ est l'image de celle de f par la translation de vecteur $a\left(\overrightarrow{OI}\right)$.

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a) + b$ est l'image de celle de f par la translation de vecteur $a\left(\overrightarrow{OI}\right) + b\left(\overrightarrow{OJ}\right)$.

Exercices de fixation

9 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Dans chaque cas, détermine les coordonnées du vecteur de la translation qui permet de tracer la courbe de g à partir de celle de f.

1. $g(x) = f(x) - 7$

2. $g(x) = f(x - 2)$

3. $g(x) = f(x - 3) + 5$

4. $g(x) = f(x + 1) - 4$

10 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Dans chaque cas, détermine les coordonnées du vecteur de la translation qui permet de tracer la courbe de g à partir de celle de f.

1. $g(x) = (x - 1)^2$

2. $g(x) = x^2 + 6$

3. $g(x) = (x + 8)^2 + 3$

Activité 8 Fonctions associées (2)

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soient M un point de (C) et x son abscisse.

1. On considère le point $M_1(x, -f(x))$.
a) Démontre que les points M et M_1 sont symétriques par rapport à la droite (OI).
b) Déduis-en que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

2. On considère le point $M_2(-x, f(x))$.
a) Démontre que les points M et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
b) Déduis-en que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto -f(x)$ est l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(-x)$ est l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Exercices de fixation

11 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Complète par (OI) ou (OJ).

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe ....

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ est l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe ....

12 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$

Dans chaque cas, détermine l'application du plan par laquelle (C_g) s'obtient à partir de (C_f).

$g(x) = -x^3 - 2x^2 - 7x - 5$

$g(x) = -x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

Activité 9 Fonctions associées (3)

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, D_f son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Soient M un point de (C) et x son abscisse. On a alors M(x, $f(x)$). On considère le point $M_1(-x\ ;\ -f(x))$.

1. Démontre que les points M et M_1 sont symétriques par rapport au point O.
2. Déduis-en que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie centrale de centre O.

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ est l'image de celle de f par la symétrie centrale de centre O.

Exercice de fixation

13 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Dans chacun des cas suivants, justifie que (C_g) est le symétrique de (C_f) par rapport au point O.

1. $f(x) = x^2 - 7$ et $g(x) = 7 - x^2$.
2. $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ et $g(x)=\dfrac{2}{x-3}$.

Activité 10 Application

On considère la correspondance qui à chaque élève de ta classe associe sa date de naissance.

1. Existe-t-il des élèves de la classe qui n'ont pas de date de naissance ?
2. Donne le nombre de dates de naissance correspondant à chaque élève.

Récapitulons

À chaque élève de la classe est associée une et une seul date de naissance : on dit que cette correspondance est une application.

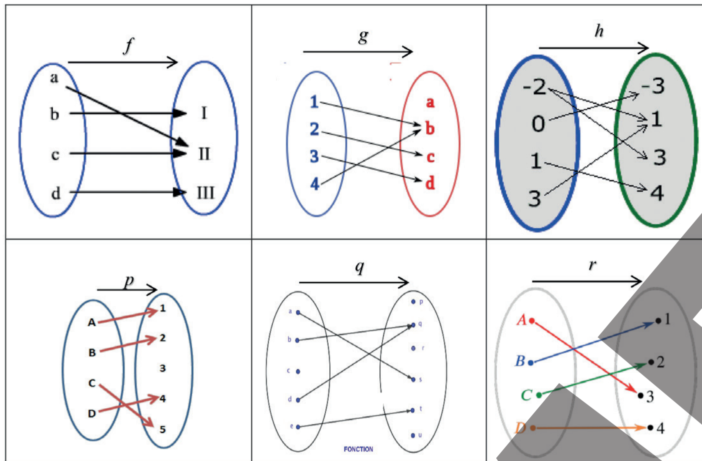
L'ensemble des élèves de la classe s'appelle ensemble de départ et l'ensemble des dates de naissances s'appelle l'ensemble d'arrivée.

Exercices de fixation

14 Réponds par vrai ou par faux à chacun des propositions ci-dessous :

1. Une application est une correspondance par laquelle chaque élément de l'ensemble de départ est associé à plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée.
2. Une application est une correspondance par laquelle chaque élément de l'ensemble de départ est associé à zéro ou un élément de l'ensemble d'arrivée.
3. Une application est une correspondance par laquelle chaque élément de l'ensemble de départ est associé à un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.
4. Une application est une correspondance par laquelle certains éléments de l'ensemble de départ sont associés à un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

15 Parmi les correspondances suivantes, indique celles qui sont des applications.



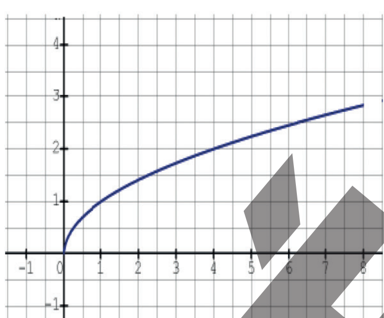
Activité 11 Applications injective, surjective et bijective

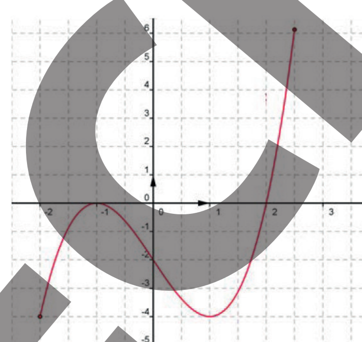
On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois applications.

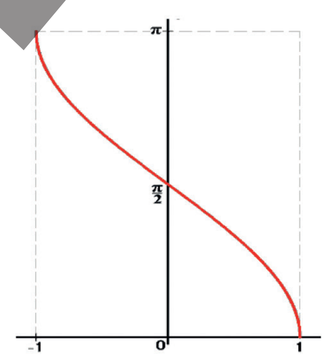
f est une application de $[0 ; 8]$ dans $[0 ; 4]$.

g est une application de $[-2 ; 2{,}5]$ dans $[-4 ; 6]$.

h est une application de $[-1 ; 1]$ dans $[0 ; \pi]$.







1. Soit b un élément quelconque de $[0 ; 4]$. Détermine graphiquement, suivant les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par f.
2. Soit b un élément quelconque de $[-4 ; 6]$. Détermine graphiquement, suivant les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par g.
3. Soit b un élément quelconque de $[0 ; \pi]$. Détermine graphiquement, suivant les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par h.

Récapitulons

- Tout élément de l'ensemble d'arrivée de f admet zéro ou un antécédent dans l'ensemble de départ : c'est une application injective.
- Tout élément de l'ensemble d'arrivée de g admet un ou plusieurs antécédent(s) dans l'ensemble de départ : c'est une application surjective.
- Tout élément de l'ensemble d'arrivée de f admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ : c'est une application bijective.

Exercices de fixation

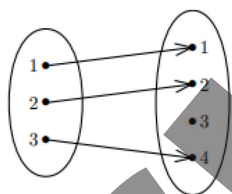
16 Relie chaque début de phrase à la fin de phrase qui lui correspond.

1.	Une application bijective est une correspondance par laquelle
2.	Une application injective est une correspondance par laquelle
3.	Une application surjective est une correspondance par laquelle

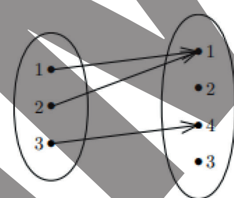
a) tout élément de l'ensemble d'arrivée admet zéro ou un antécédent dans l'ensemble de départ
b) tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un ou plusieurs antécédent(s) dans l'ensemble de départ
c) tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ

17 On considère les quatre applications f, g, h et k dont les graphes sont donnés ci-dessous.

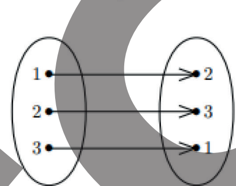
Pour chacune d'elles, précise si elle est injective, surjective, bijective.



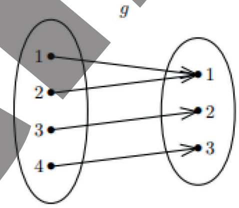
f



g



h



k

Activité 12 Bijection réciproque (1)

Soit f est une application bijective de A dans B.
Justifie que la correspondance de B dans A qui à tout élément de B associe son antécédent par f est une bijection.

Récapitulons

Si f une application bijective de A dans B, alors l'application de B vers A est une bijection et s'appelle la bijection réciproque de f.

Exercice de fixation

18 On considère la bijection f de [0 ; 7] dans [0 ; 49] qui à tout nombre réel de [0 ; 7] associe son carré.

Détermine la bijection réciproque de f.

Activité 13 Bijection réciproque (2)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A sur B.
Soit (C) et (C') les représentations graphiques respectives de f et de f^{-1}.
Soit (D) la droite d'équation : $y = x$.
Démontre que (C) et (C') sont symétriques par rapport à (D).

Récapitulons

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une bijection et celle de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice de fixation

19 Réponds par vrai ou par faux à chacune des propositions suivantes.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative d'une bijection et celle de sa bijection réciproque sont :

a) Confondues.

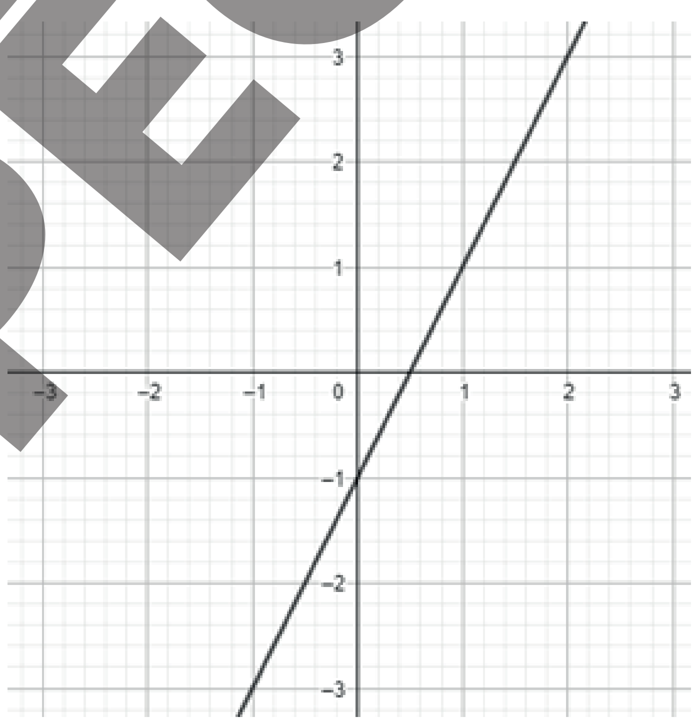
b) symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

c) symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

d) symétriques par rapport à l'origine du repère.

20 Soit f la bijection de représentation graphique ci-dessous.

Reproduis le graphique et représente sur la même figure la courbe représentative de la bijection réciproque de f.



I. GÉNÉRALITÉS

1- Égalité de deux fonctions

Définitions

Soient f et g deux fonctions.

On dit que les deux fonctions f et g sont égales si f et g ont le même ensemble de définition D et pour tout x de D, $f(x) = g(x)$.

Notation

Lorsque deux fonction f et g sont égales, on note $f = g$.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2 ; 3

2-Restriction d'une fonction

Définitions

Soient f une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F et I une partie non vide de l'ensemble de définition de f. On appelle restriction à I de la fonction f, la fonction g définie sur I par : $g(x) = f(x)$.

Exemple

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{|x| - 1}.$$

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

h est définie sur $[0 ; +\infty[\setminus \{1\}$ par : $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Pour s'entraîner : Exercice 4 ; 5

3- Comparaison de fonctions

Définitions

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et E une partie de $D_f \cap D_g$.

On dit que f est égale à g sur E si pour tout x de E, $f(x) = g(x)$. On note : Sur E, $f = g$.

On dit que f est strictement supérieure à g sur E si pour tout x de E, $f(x) > g(x)$. On note : Sur E, $f > g$.

Remarques

On définit de manière analogue f strictement négative sur E, f positive sur E et f négative sur E.

Méthode

- Pour comparer deux fonctions f et g, on peut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

Définitions

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et E une partie de D_f.

On dit que f est nulle sur E si pour tout x de E, $f(x) = 0$.

On dit que f est strictement positive sur E si pour tout x de E, $f(x) > 0$.

Remarques

On définit de manière analogue f strictement négative sur E, f positive sur E et f négative sur E.

4- Interprétation graphique

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, E une partie de $D_f \cap D_g$, (C_f) et (Cg) les représentations graphiques respectives de f et g dans un même repère.
f est inférieure à g sur E si et seulement si (C_f) est au-dessous de (C_g) sur l'ensemble E.
f est supérieure à g sur E si et seulement si (C_f) est au-dessus de (C_g) sur l'ensemble E.

Remarques

- f est positive sur E si et seulement si (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses sur E ;
- f est négative sur E si et seulement si (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses sur E.
- Comparer deux fonctions f et g revient à étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

Exemple

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies par : $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+3}$ et $g(x) = x - 4$.
Justifions que f est inférieure à g sur $[0;+\infty[$

Pour tout x de $[0;+\infty[, f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+3}=x-4+\frac{10}{x+3}$. Soit $(x-4)-f(x)=\frac{-10}{x+3}$.

Or $\frac{-10}{x+3}<0$, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, donc : $g(x) \leq f(x)$.

Pour s'entraîner : Exercice 6 ; 7

II. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

1- Somme, produit, quotient de fonctions

Définitions

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g .
On appelle somme de f et g la fonction notée $f+g$ et définie sur $D_f \cap D_g$ par : $\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
On appelle produit de f et g la fonction notée f g et définie sur $D_f \cap D_g$ par : $\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f g)(x) = f(x) \times g(x)$.

On appelle quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ et définie en tout x de $D_f \cap D_g$ tel que $g(x) \neq 0$ par : $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

CAS PARTICULIERS :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g.

La somme de la fonction f et du nombre réel α est la fonction notée $f+\alpha$ et définie pour tout x de D_f par : $(f+\alpha)(x) = f(x) + \alpha$.

Le produit de la fonction f par le nombre réel α est la fonction notée αf et définie pour tout x de Df par : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

La puissance $n^{\text{ième}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est la fonction notée f^n et définie pour tout x de D_f par : $(f^n)(x) = [f(x)]^n$.

L'inverse de la fonction f est la fonction notée $\left(\frac{1}{f}\right)$ et définie pour tout x de D_f tel que $f(x) \neq 0$, par : $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$.

Exemple

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définies par : $g(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}$ et $f(x) = x^2 - 1$

Déterminons la fonction $\dfrac{f}{g}$.

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; -1; 0\}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ;-1 ; 0\}, \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-1}{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}}$, soit $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+2}$, donc $\dfrac{f}{g}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$;
$x \mapsto a\, \dfrac{x(x-1)}{x+2}$

Attention : $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; -1 ; 0\}$.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9 ; 10

2- Composée de fonctions

Définitions

Soient A, B et C trois ensembles, f une fonction définie de A dans B et g une fonction de B dans C.

On appelle composée de f par g (ou de f suivie de g) la fonction de A dans C, notée gof et définie pour tout x appartenant à D_{gof} par :

$gof(x) = g(f(x))$.

gof est définie en tout x de A tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gof"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Remarques

Étant données deux fonctions f et g, les fonctions gof et fog sont en général différentes.

Propriétés

Soient A, B, C et D des ensembles, f une fonction de A dans B, g une fonction de B dans C et h une fonction de C dans D.

Les fonctions $ho(gof)$ et $(hog)of$, toutes deux de A dans D, sont égales.

On a : $ho(gof) = (hog)of = hogof$.

Exemple

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{x}{|x|-1}.$$

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

h est définie sur $[0 ; +\infty[\setminus\{1\}$ par : $h(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12

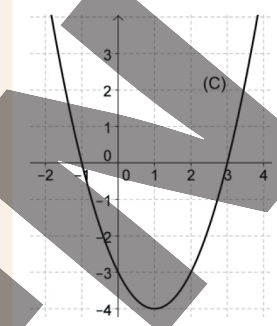
III. FONCTIONS ASSOCIÉES

Deux fonctions sont dites associées lorsque leurs représentations graphiques respectives se déduisent l'une de l'autre par une transformation géométrique classique : translation, symétrie orthogonale, symétrie centrale.

Ce paragraphe a pour but de déterminer la courbe représentative d'une fonction associée à une fonction f à partir de celle de f.

Dans tout ce paragraphe, les exemples donnés sont obtenus à partir de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = (x - 1)^2 - 4$ et dont la représentation graphique est ci-contre.



1- Fonctions $x \longmapsto f(x - a)$; $x \longmapsto f(x) + b$; $x \longmapsto f(x - a) + b$

Propriétés

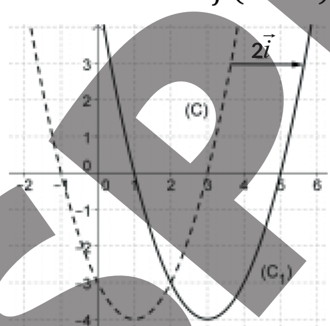
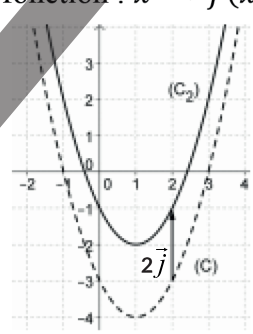
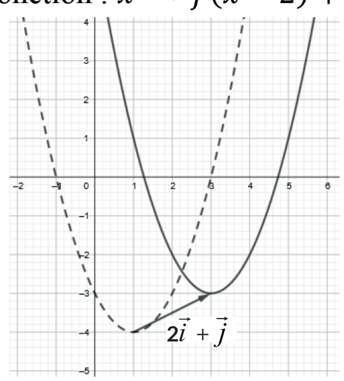
Le plan est muni d'un repère.

La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x - a)$ se déduit de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$.

La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x) + b$ se déduit de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$.

La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x - a) + b$ se déduit de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple

Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x-2)$	Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x)+2$	Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(x-2)+1$
		

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17 ; 18

2- Fonctions $x \longmapsto f(-x)$; $x \longmapsto -f(x)$; $x \longmapsto |f(x)|$

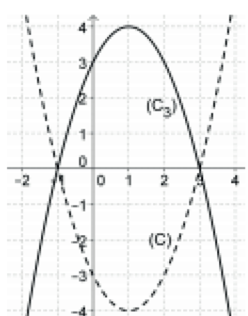
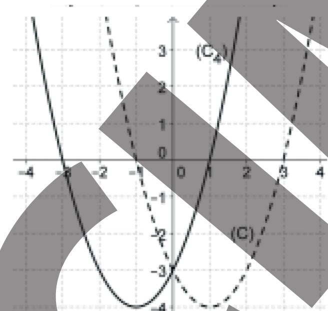
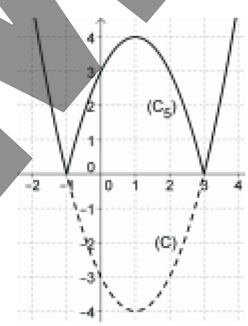
Propriétés

Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OI) ;
- La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale par rapport à la droite (OJ) ;
- La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ est :

  - confondue avec de celle de la fonction f sur tout intervalle où $f(x) \geq 0$;
  - le symétrique de celle de la fonction f par rapport à la droite (OI) sur tout intervalle où $f(x) \leq 0$.

Exemple

Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto -f(x)$	Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto f(-x)$	Courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto \lvert f(x) \rvert$
		

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 15

3- Fonctions $x \longmapsto -f(-x)$

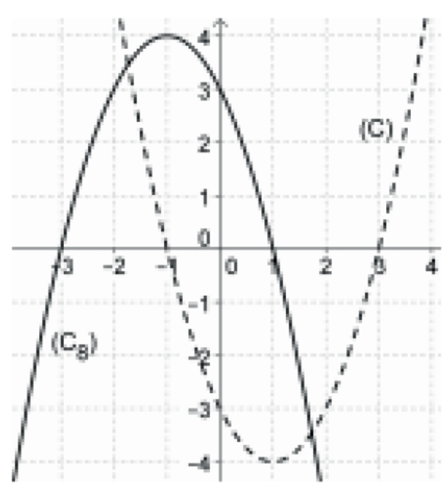
Propriétés

Le plan muni d'un repère (O, I, J).

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie par rapport au point O.

Exemple

Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$.



Pour s'entraîner : Exercice 14

IV. APPLICATIONS

1- Définition d'une application

Définitions

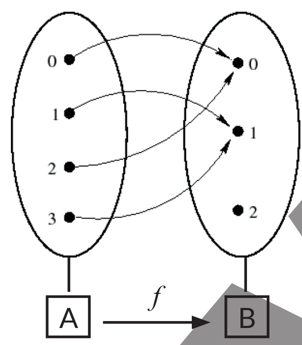
Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle application de A dans B toute correspondance qui, à chaque élément de A associe un et un seul élément de B.

Remarques

Une application est une fonction dont l'ensemble de définition est son ensemble de départ.

Exemple



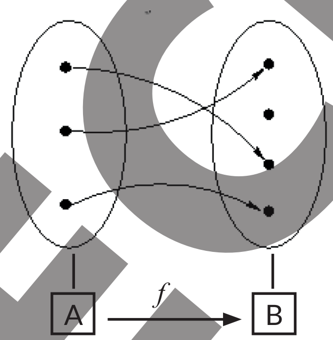
2- Application injective

Définitions

Soit f une application de A dans B.

On dit que f est injective (ou est une injection) si tout élément de B a au plus un antécédent par f dans A.

Exemple



Propriétés

Soit f une application de A dans B.

L'application f est injective si et seulement si pour tous éléments a et b de A,

$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$

Remarques

La propriété ci-dessus, est équivalente à :

L'application est injective si et seulement si pour tous éléments a et b de A, on a :

$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b).$

Contre-exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$f(-3) = f(3)$ et $-3 \neq 3$ donc l'application f n'est pas injective.

Pour s'entraîner : Exercices 19

3-Application surjective

Définitions

Soit f une application de A dans B.

On dit que f est surjective (ou une surjection) si chaque élément de B a au moins un antécédent par f dans A

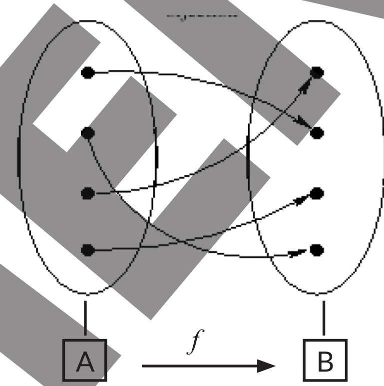
Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x - 1$

f est surjective en effet :

$\forall y \in \mathbb{R}, 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{2}$.

Tous nombre réel y possède un antécédent égal à $\dfrac{y+1}{2}$.



Pour s'entraîner : Exercices 20

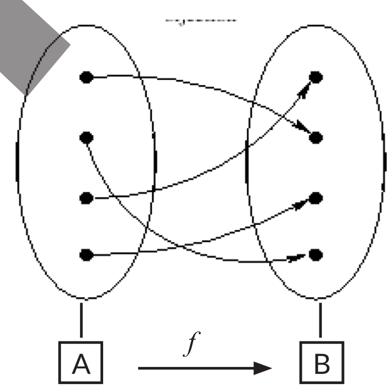
4- Application bijective

Définitions

Soit f une application de A dans B.

On dit que f est bijective (ou est une bijection) si chaque élément de B a un unique antécédent par f dans A

Exemple



Méthode

Pour démontrer qu'une application f de A dans B est injective, et/ou surjective et/ou bijective, on peut procéder comme suit :

- prendre un élément quelconque y dans B un élément quelconque x dans A puis résoudre l'équation : $y = f(x)$ (c'est-à-dire chercher à exprimer x en fonction de y) ;
- si l'équation a au plus une solution, alors f est injective ;
- si l'équation a au moins une solution, alors f est surjective ;
- si l'équation a exactement une solution, alors f est bijective.

Propriétés

Une application est bijective, si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Pour s'entraîner : Exercices 21

5- Bijection réciproque

a) Bijection réciproque

Définitions

Soit f une application bijective de A dans B.

On appelle bijection réciproque de f l'application de B dans A, notée (f^{-1}), qui à tout élément de B associe son unique antécédent par f.

Propriétés

Soit f une application bijective de A dans B.

On a :

- Pour tout x de A : $(f^{-1}of)(x) = x$.
- Pour tout y de B : $(fof^{-1})(y) = y$.
- Pour x de A et y de B : $f(x) = y \Leftrightarrow x = (f^{-1})(y)$.

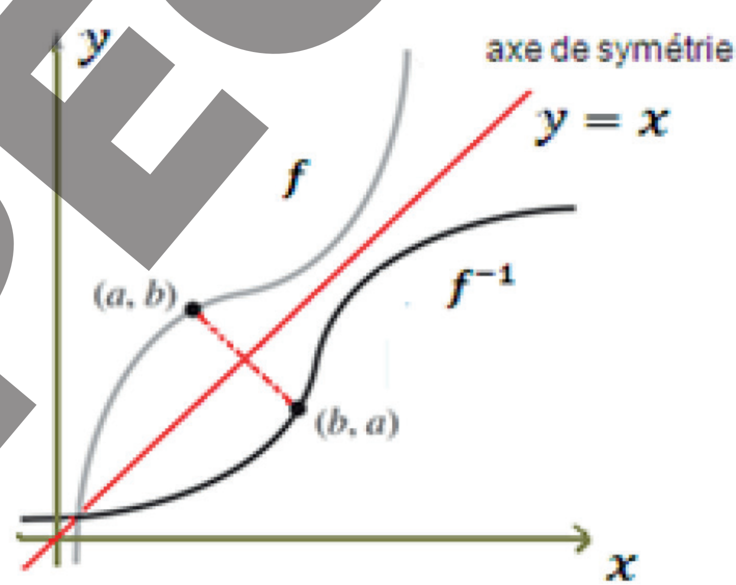
Pour s'entraîner : Exercices 22

b) Représentation graphique d'une bijection réciproque

Propriétés

Soit f une application bijective et f^{-1} sa bijection réciproque.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation (appelée première bissectrice).



Pour s'entraîner : Exercices 23

QUESTION 1

Comment comparer deux fonctions ?

Méthode

Pour comparer deux fonctions f et g définies par leurs expressions $f(x)$ et $g(x)$, on peut procéder comme suit :

- on calcule $f(x) - g(x)$, en simplifiant autant que possible l'expression ;
- on étudie le signe de $f(x) - g(x)$, en réalisant un tableau de signes par exemple :
  - ✓ dans chaque intervalle pour lequel on obtient un « – », $f(x) - g(x)$ est négatif, donc $f(x) \leq g(x)$;
  - ✓ dans chaque intervalle pour lequel on obtient un « + », $f(x) - g(x)$ est positif, donc $f(x) \geq g(x)$.

Exercice

1. Compare les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 5x - 6$.

2. Compare les fonctions u et v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $u(x) = \dfrac{7}{x-1}$ et $v(x) = x + 5$.

Solution commentée

1. $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = x^2 - (5x - 6) = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$; $\Delta = 25 - 24 = 1$; $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

On obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

Conclusion :

$\forall x \in]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$, $f(x) > g(x)$.

$\forall x \in]2 ; 3[$, $f(x) < g(x)$.

$\forall x \in \{2 ; 3\}$, $f(x) = g(x)$

2. $D_u = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $u(x) - v(x) = \dfrac{7}{x-1} - x - 5 = \dfrac{7-(x+5)(x-1)}{x-1} = \dfrac{-x^2-4x+12}{x-1}$

$-x^2 - 4x + 12 = 0$; $\Delta = 16 + 48 = 64$; $x_1 = \dfrac{4-8}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{4+8}{-2} = -6$

On obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$		-6		1		2		$+\infty$
$-x^2 - 4x + 12$		−	0	+		+	0	−	
$x - 1$		−		−	0	+		+	
$u(x) - v(x)$		+	0	−		+	0	−	

Conclusion :

$\forall x \in]-\infty\,;-6[\cup]1\,;2[$, $u(x) > v(x)$.

$\forall x \in]-6\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $u(x) < v(x)$.

$\forall x \in \{-6\,;2\}$, $u(x) = 0$.

Exercice non corrigé

Compare les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x+1}$ et $g(x)=\dfrac{-2x+1}{-4x+1}$.

QUESTION 2

Comment démontrer qu'une application est injective, surjective, bijective ?

Méthode

- Pour démontrer qu'une application f : E → F est injective, on peut démontrer que :
  - pour tout $y \in$ F, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in$ E, admet au plus une solution;
  - ou bien pour tous $x, x' \in$ E, l'équation $f(x) = f(x')$ entraine que $x = x'$;
- Pour démontrer qu'une application f : E→ F est surjective, on démontre que, pour tout $y \in$ F, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in$ E, admet toujours au moins une solution x dans E.
- Pour démontrer qu'une application f : E → F est bijective, on peut démontrer
  - qu'elle est injective et surjective ;
  - ou bien que, pour tout $y \in$ F, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in$ E, admet une unique solution.

Exercice 1

Démontre que l'application f de $[-1\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$ est bijective.

Exercice 2

Soit f l'application f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{x}$.

Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifie.

Que faudrait-il modifier pour qu'elle devienne bijective ?

Exercice 3

Soit f l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Cette application est-elle injective ? Surjective ? Justifie.

Solution commentée

Exercice 1

Soit $y \in [-1\,;+\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [0, +\infty[$ tel que $y = f(x)$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = y + 1 \Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}$ car $y \geq -1$ et $x \geq 0$.

Pour tout $y \in [-1\,;+\infty[$, il existe un unique $x \in [0, +\infty[$ (ici $x=\sqrt{y+1}$) tel que $y = f(x)$, donc f est bijective.

Exercice 2

• Injection :

Soit $a \in [0\,;+\infty[$ et $b \in [0\,;+\infty[$

$f(a) = f(b) \Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$, donc f est injective.

• Surjection :

$-1 \in \mathbb{R}$ mais, -1 n'a pas d'antécédent par f (il n'existe pas $a \in [0, +\infty[$ tel que $\sqrt{a} = -1$), donc f n'est pas surjective.

• Bijection :

L'application f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

Elle serait bijective si $y \geq 0$, c'est-à-dire si l'ensemble d'arrivée de f est $[0\ ;+\infty\ [$.

Exercice 3

• Injection :

$f(2)=\frac{4}{5}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}$

On a $2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc f n'est pas injective.

• Surjection :

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}=2 = 2 \Leftrightarrow 2x = 2(1 + x^2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$

$\Delta = -3$ et $-3 < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution, ce qui veut dire que 2 n'a pas d'antécédent par f. On en déduit que f n'est pas surjective.

Exercice non corrigé

Voici trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elle :

a) détermine l'ensemble de définition ;

b) justifie si elle injective ? surjective ? bijective ?

c) Comment peut-on les rendre bijectives ?

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $g(x)=\frac{1}{x+1}$
3. $h(x)=\sqrt{x^2+3}$

Exercices de fixation

Égalité de deux fonctions

1 Soient f et g les fonctions numériques définies sur $]0\,;+\infty[$ respectivement par : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.
Justifie que ces fonctions sont égales.

2 Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{(x-7)^2}$ et $g(x)=|x-7|$.

Justifie que ces fonctions sont égales.

3

1. Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie respectivement par : $f(x)=\sqrt{x^2}$ et $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$.
Justifie que les fonctions f et g ne sont pas égales.
2. Soient h et k les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie respectivement par : $h(x)=3-\dfrac{3}{(x-1)^2}$ et $k(x)=\dfrac{3x^2-6x}{(x-1)^2}$.

Justifie que les fonctions h et k sont égales.

Restriction d'une fonction

4 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x-2|+x$ une fonction et g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
Détermine l'expression de $g(x)$.

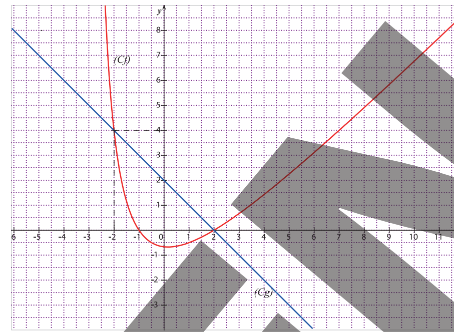
5 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} g(x)=x^2-4, & si\, x\leq 1 \\ g(x)=2x, & si\, x>1 \end{cases}.$$

Détermine la restriction h de g à l'intervalle $[-1\,;0]$.

Comparaison de fonctions

6 Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+3}$ et $g(x)=x-4$.
Démontre que pour tout x de $[0\,;+\infty[$: $g(x)\leq f(x)$.

7 Dans le plan, on a représenté la courbe représentative (Cf) d'une fonction f (en rouge) et celle (Cg) d'une fonction g (en bleu) sur l'intervalle $[-6\,;14]$.
À l'aide du graphique, compare ces deux fonctions.



Somme, produit et quotient de fonctions

8 On considère les fonctions suivantes :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{x^2-1}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction $f+g$.
2. Détermine l'expression de la fonction $f+g$.

9 On considère les fonctions suivantes :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{x^2-1}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction fg.
2. Détermine l'expression de la fonction fg.

10 On considère les fonctions suivantes :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{x^2-1}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{(x+1)(x+2)}{x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.
2. Détermine l'expression de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

Composée de fonctions

11 On donne les deux fonctions suivantes :
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{x+2}{x+1}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{2x}{x-3}$.

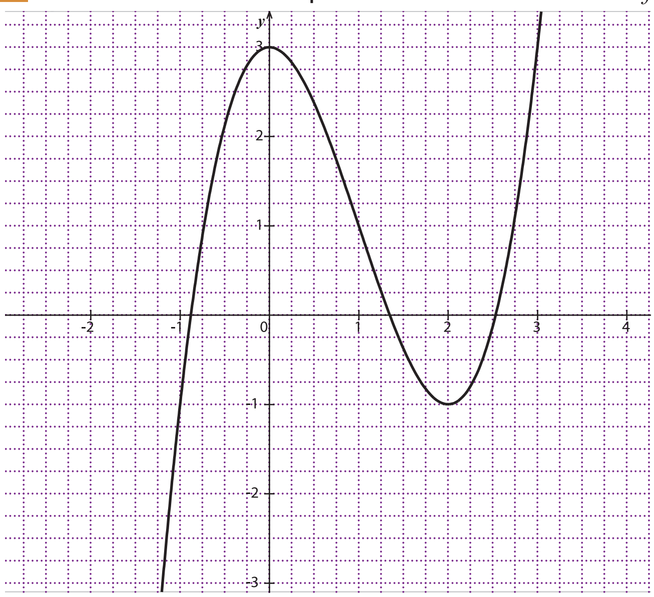
1. Détermine les ensembles de définition de : f ; g ; fog ; gof ; fof.
2. Détermine les expressions : $(fog)(x)$; $(gof)(x)$ et $(fof)(x)$.

12 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x+1$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3$.

Vérifie que : $fo(goh)=(fog)oh$.

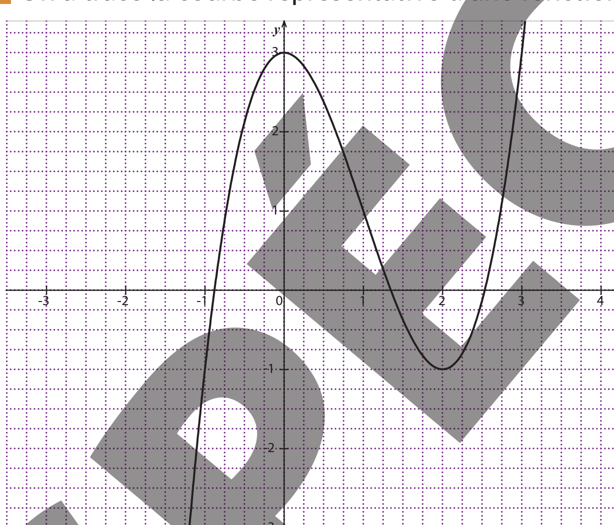
Fonctions associées

13 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f.



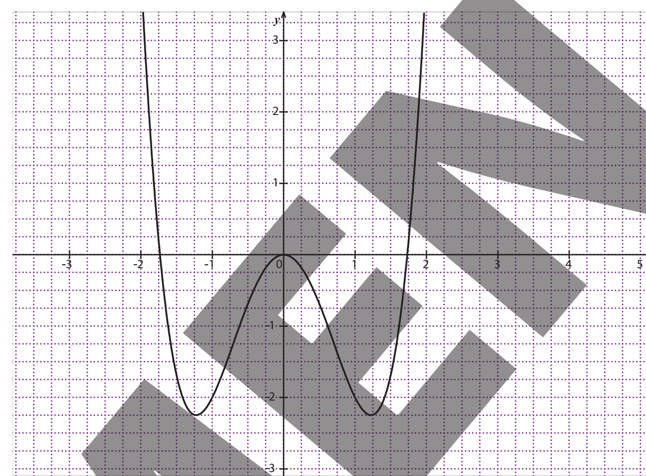
1. Reproduis la figure.
2. En utilisant deux autres couleurs, trace les courbes représentatives des fonctions :
   $x \longmapsto -f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$ sur la figure précédente.

14 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f.



1. Reproduis la figure.
2. En utilisant une autre couleur, trace la courbe de la fonction :
   $x \longmapsto -f(-x)$.

15 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.

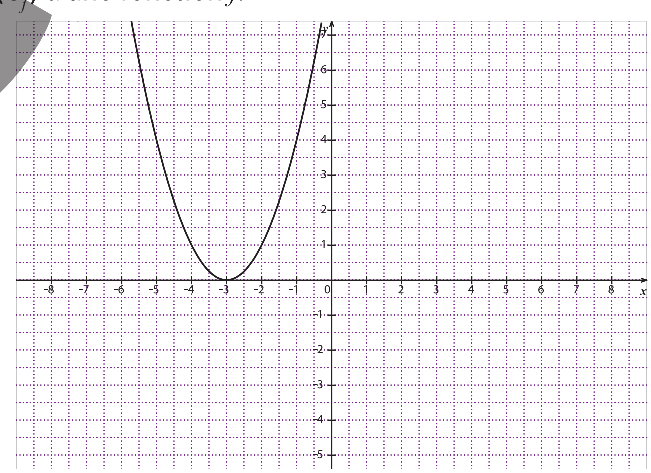


1. Reproduis la figure.
2. Déduis-en le tracé de la courbe représentative de $|f|$.

16 Dans chaque cas, détermine les coordonnées du vecteur de la translation qui permet de tracer la courbe de f à partir de celle de g.

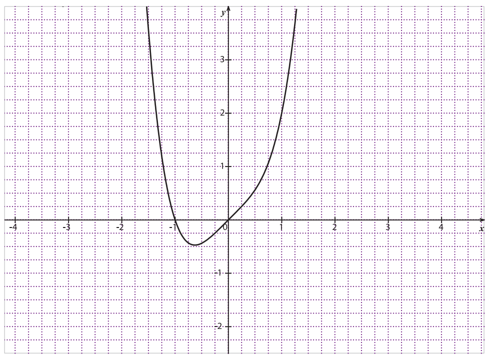
1. $f(x) = g(x + 3)$.
2. $f(x) = g(x) - 1$.
3. $f(x) = g(x + 2) - 3$.

17 On donne ci-dessous la représentation graphique (C_f) d'une fonction f.



1. Reproduis la figure.
2. Déduis-en les tracés des courbes (C_g) et (C_h) des fonctions : $g : x \longmapsto f(x - 4)$ et $h : x \longmapsto f(x) + 2$.

18 On donne ci-dessus la représentation graphique d'une fonction f.



1. Reproduis la figure.
2. Déduis-en le tracé de la courbe de la fonction : $h : x \longmapsto f(x-1) - 1$.

Applications

19 Démontre que l'application : $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est injective.

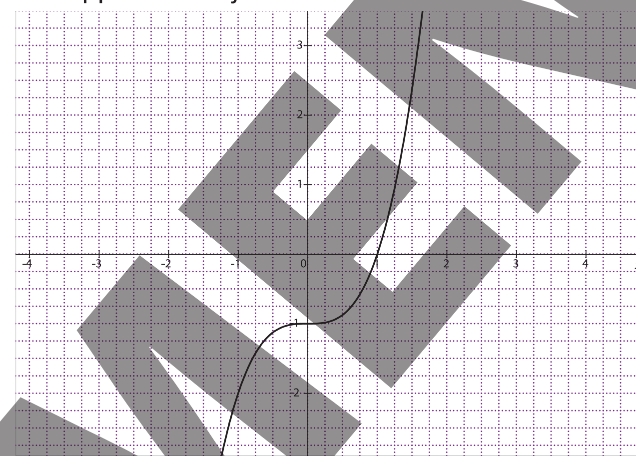
20 Démontre que l'application : $f : \mathbb{R} \to [-1;+\infty[$, $x \mapsto x^2 - 1$ est surjective.

21 Démontre que l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$ est bijective.

22 Soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Démontre que f est une bijection. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.
2. Calcule $f^{-1}(2\sqrt{2})$ et $f^{-1}(5)$
3. Détermine l'application f^{-1}.

23 La courbe représentative (C) ci-dessous est celle d'une application bijective sur $\mathbb{R}$.



1. Reproduis la figure.
2. Trace la courbe représentative de sa bijection réciproque.

Exercices de renforcement/approfondissement

24 Réponds par vrai ou faux, puis justifie ta réponse.

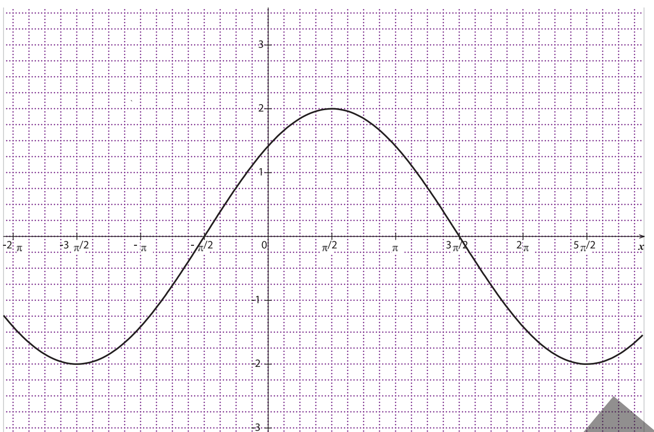
1. Toute application bijective est surjective
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(-1) = f(3) = 9$.
   a) L'application f est injective.
   b) L'application f est bijective.
3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que le nombre réel -3 n'a pas d'antécédent par f. Une telle application est surjective.
4. Si $g(x) = f(x + 3)$ alors $(C_g) = t_{\vec{u}}(C_f)$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.
5. Si f est bijective, alors (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.
6. Si une application n'est pas bijective, alors elle n'est pas injective.
7. Les courbes des fonctions f et $g : x \mapsto -f(x)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
8. Si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$ et si $g(x) = 2x + 5$, alors $fog(x) = \dfrac{(2x+5)^2-1}{x+3}$.
9. Pour toutes fonctions f et g ; on a $fog = gof$.
10. Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sont égales car $f(2) = g(2) = 1$.
11. Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x-1|}$ car elles ont le même ensemble de définition.

25 Démontre que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2}$ ne sont pas égales.

26 Soit l'application f de $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$.

1. Démontre que f est injective.
2. Résous dans $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$, l'équation $f(x) = 2$.
3. L'application f est-elle surjective ? bijective ? justifie tes réponses.

27 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f.



Trace la courbe de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

28 Soit l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $[3 ; +\infty[$ définie par : $g(x) = (x - 2)^2 + 3$.

1. Démontre que l'application g est bijective.
2. Détermine les ensembles de départ et d'arrivée de la bijection réciproque g^{-1} de g puis détermine $g^{-1}(x)$.

29 Soit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2-\left|x^2-1\right| \end{aligned}$.

Détermine la restriction de f à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

30 On donne les fonctions suivantes :

$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \dfrac{x+3}{x} \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \dfrac{x}{x^2-9} \end{aligned}$

1. Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g
2. Déduis-en les ensembles de définitions des fonctions : fg ; $f + g$ et $\dfrac{g}{f}$.
3. Détermine les expressions des fonctions :

   $(fg)(x)$; $(f + g)(x)$; $\dfrac{g}{f}(x)$.

31

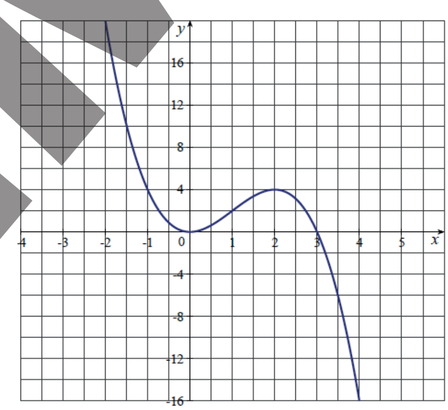
1. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (E_1) : $\dfrac{1}{|x|-1}=1$ et (E_2) : $\dfrac{1}{|x|-1}=-1$.
2. On considère les fonctions suivantes :

   $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \sqrt{x+3} \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \dfrac{1}{|x|-1} \end{aligned}$.

   a) Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.
   b) Déduis-en les ensembles de définition des fonctions : fog et gof.
   c) Détermine les expressions des fonctions : $(fog)(x)$ et $(gof)(x)$.
   d)

32 La courbe tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - x^3$.



1. Reproduis la figure
2. Soit g, h et k les fonctions définies respectivement par : $g(x) = f(x) + 4$, $h(x) = f(x + 1) - 4$ et $k(x) = |f(x)|$.

   a) Construis sur la figure précédente, avec des couleurs différentes, les courbes représentatives de ces fonctions.

   b) Détermine l'expression de chacune de ces fonctions.

33 Dans chaque cas, détermine les coordonnées du vecteur de la translation qui permet de tracer la courbe de f à partir de celle de g.

1. $f(x)=\sqrt{x-2}+1$ et $g(x)=\sqrt{x}$.
2. $f(x)=x^2-6x+4$ et $g(x)=x^2$.
3. $f(x)=\dfrac{2}{x+7}-10$ et $g(x)=\dfrac{2}{x}$.

34 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{-2}{x}$ et (C') la courbe telle que : (C') $= t_{\vec{u}}$(C) avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

1. Détermine une équation de la courbe (C').
2. Construis la courbe (C) puis déduis-en la construction de (C').

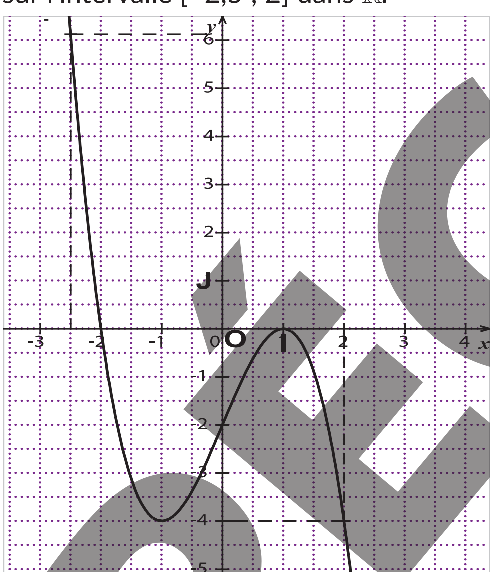
35 Soit f la fonction définie sur [−2 ; 6] dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		0		3		6
$f(x)$	1	↗	5	↘	0	↘	-5

Détermine le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

$g : x \mapsto f(x+1) - 2$; $h : x \mapsto -f(-x)$; $k : x \mapsto |f(x)|$.

36 La courbe ci-dessous est celle d'une application f définie sur l'intervalle [−2,5 ; 2] dans $\mathbb{R}$.



1. À l'aide d'un contre-exemple, prouve que la fonction f n'est pas injective.
2. L'application f est-elle bijective ? Justifie ta réponse.
3. À l'aide d'un raisonnement purement graphique, prouve que l'application f est surjective.

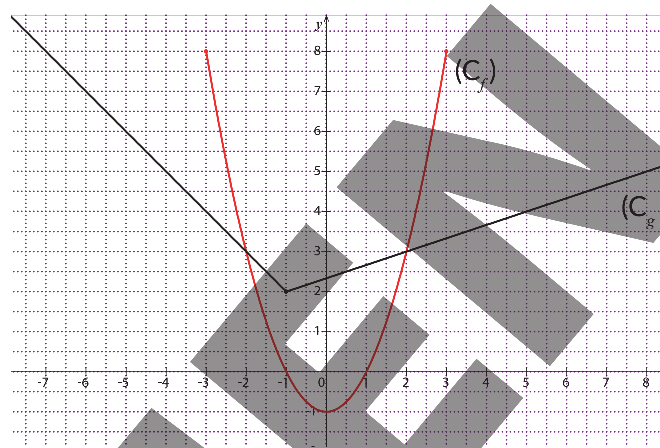
37 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x^2 + 6x + 14$ et $g(x) = x^2$.

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.

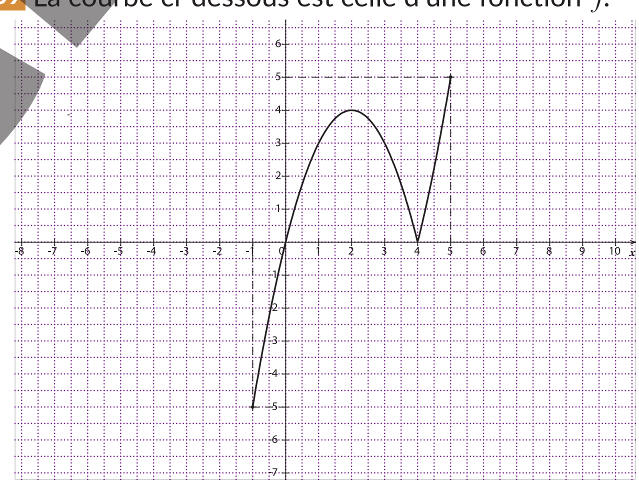
1. Détermine les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ de la translation qui envoie (C_g) sur (C_f).
2. Construis (C_g) puis déduis la construction de (C_f).

38 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe d'une fonction f et celle d'une fonction g.



1. À l'aide de ces deux courbes, résous graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ dans l'intervalle [−3 ; 3].
2. On suppose que $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \begin{cases} -x+1, \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+7}{3}, \text{si } x > -1 \end{cases}$.
   a) Résous par calculs l'inéquation dans l'intervalle [−3 ; 3] : $f(x) \leq g(x)$.
   b) Compare les ensembles de solutions obtenus dans les deux cas.

39 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f.



1. Reproduis la figure.
2. À l'aide de cette courbe, construis les courbes des fonctions : $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto |f(x)|$.

40 On considère la fonction f de [0 ;+∞[vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x+3)^2$ et la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$.

1. Calcule $gof(1)$ et $fog(1)$.
2. a) Détermine les ensembles de définitions des fonctions : gof et fog

b) Détermine les expressions : $gof(x)$ et $fog(x)$.

3. Démontre que l'application f est injective.

4. Démontre que l'application f n'est pas surjective.

5. On considère maintenant h l'application de$[-3 ; +\infty[$ dans $[0 ; +\infty[$ telle que $h(x) = (x + 3)^2$. Démontre que l'application h est bijective.

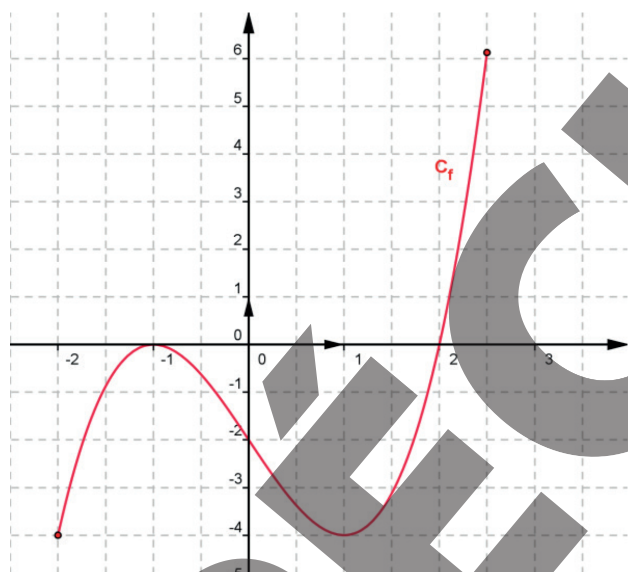
6. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

a) Calcule les nombres $h^{-1}(25)$; $h^{-1}(1)$ et $h^{-1}(9)$.

b) Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), trace les courbes des fonctions h et h^{-1}.

Situations complexes

41 Lors de l'étude de certains appareils en physiques, un professeur de physique-chimie a montré à ses élèves de 1ère D la figure ci-dessous.



Il a indiqué que c'est la représentation graphique de la fonction f dénie sur $[-2 ; 2,5]$ et qui modélise le fonctionnement d'un composant électronique en fonction de la température. Il a ajouté que ce composant cesse de fonctionner lorsque $|f(x)| \geq 2$. Elle peut alors s'endommager.

1. Séduits par ces explications, ces élèves se demandent à quelles températures ce composant s'endommage.

2. À l'aide des outils mathématiques au programme, réponds à la préoccupation de ces élèves

42 Un brillant élève de première D d'un lycée vient d'être recruté dans une chocolaterie d'une ville pour un emploi de vacances.

Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et il doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.

Cet élève sait que le coût de production comme la recette de cette entreprise est fonction de la quantité produite.

Les formules donnant le coût $C(x)$ et la recette $R(x)$ ont été calculées : $C(x) = x^2 + 30x + 1000$ et $R(x) = 100x$, où x désigne la quantité de chocolat produite (en tonnes), avec $0 \leq x \leq 60$.

L'objectif de l'élève est de maximiser le bénéfice de la chocolaterie.

Soucieux de relever le défi, il sollicite un groupe d'élèves de sa promotion dont tu fais partie pour l'aider à répondre à sa préoccupation.

Détermine la quantité de chocolat à produire pour que le bénéfice soit maximum.

4 LIMITES ET CONTINUITÉ

Commentaire de la Leçon

La notion de limite est permanente dans l'histoire des mathématiques. Elle est une préoccupation des mathématiciens grecs, arabes et indiens, alors qu'elle n'est pas encore nommée.

Les mathématiques développées successivement par l'école Pythagoricienne, l'académie de **Platon** et par **Archimède** vont ouvrir des voies de raisonnement qui ne verront un réel aboutissement qu'au cours du

XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec les travaux de **Leibniz** (1646-1716) et **Newton** (1642-1727).

L'apprenant découvre pour la première fois la notion de limite et continuité. Il étudiera donc en classe de première D les limites des fonctions de référence en un point, la limite à gauche et la limite à droite d'une fonction en un point, les propriétés des opérations sur les limites, la définition de la continuité d'une fonction en un point et la continuité en un point des fonctions : somme, produit et quotient des fonctions de référence.

Les notions de limites et continuité interviennent dans divers domaines de la vie dont l'économie, la biologie, la télécommunication …

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une fonction continue en un point, la définition d'une fonction continue sur un intervalle, les propriétés relatives à la continuité d'une fonction en un point, les limites des fonctions de référence, les opérations sur les limites des fonctions en un point, la continuité des fonctions somme, produit, quotient en un point.
- **Noter** la limite d'une fonction en un point, la limite à gauche d'une fonction en un point, la limite à droite d'une fonction en un point.
- **Reconnaître** graphiquement qu'une fonction est continue en un point.
- **Justifier** qu'une fonction est continue en un point.
- **Calculer** les limites éventuelles de certaines fonctions en un point en utilisant les opérations sur les limites des fonctions en un point, la limite à gauche, la limite à droite en un point d'une fonction.
- **Étudier** la continuité d'une fonction en un point en utilisant la limite à gauche, la limite à droite en ce point, la continuité d'une fonction en un point en utilisant les propriétés sur la somme, le produit et le quotient des fonctions continues en ce point.
- **Traiter une situation** faisant appel aux limites et à la continuité d'une fonction en un point.

Situation d'Apprentissage

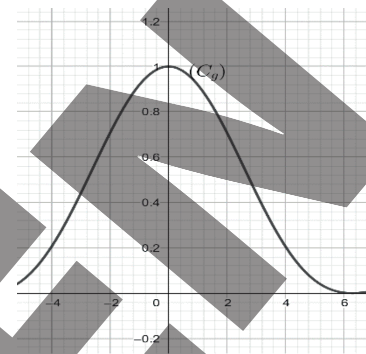
En vue de participer au jeu de « génie en herbe » organisé par le club de mathématiques du lycée moderne, un élève en classe de 1ère D fait des recherches dans une salle multimédia dudit établissement. Il découvre l'exercice suivant : « Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$. Étudie la continuité de f en 0. »

Il présente cet exercice à ses camarades de classe. L'un d'eux affirme que cette fonction est continue en 0.

Surpris, ceux-ci décident de s'informer et de s'organiser pour étudier la leçon relative aux limites et continuité.

Activité 1 Limite finie en un point

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\dfrac{1-cos\,x}{\dfrac{x^2}{2}}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Reproduis et complète le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice.

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	0	$0,001$	$0,1$	1
$g(x)$							

3. Donne le comportement de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

Récapitulons

- $g(x)$ prend des valeurs proches de 1 lorsque x se rapproche de 0.
- On dit que $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.
- On dit aussi que la limite en 0 de g est 1.
- On écrit : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1.$.
- On admet que la limite d'une fonction en un point si elle existe est unique.

Exercice de fixation

1 On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

1. À l'aide de ta calculatrice, complète le tableau suivant :

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	0	$0,00001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$h(x)$										

2. Donne une conjecture de la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers 0.

Activité 2 Continuité en un point

On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2$.

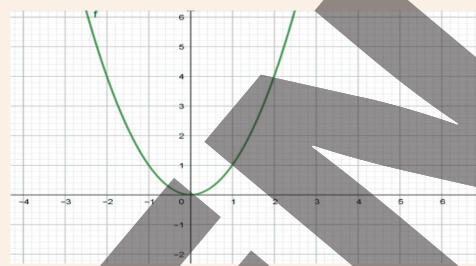
À l'aide de ta calculatrice, complète le tableau suivant

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$	$2,0001$	$2,001$	$2,01$	$2,1$
$h(x)$								

1. Quelle conjecture as-tu envie de faire quant à la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers 2 ?
2. Calcule $h(2)$.
3. Conclue cette activité.

Récapitulons

- $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = h(2)$, autrement dit la limite de la fonction h au point 2 existe et est égale à $h(2)$.
- On dit que la fonction h est continue au point 2.
- La courbe de la fonction h ne présente aucune «interruption» au niveau du point 2 ; d'où l'idée de la continuité de la fonction h au point 2.
- On admet que toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.



- Les fonctions numériques : $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Exercices de fixation

2 Réordonne les groupes de mots ci-dessous pour établir la propriété sur la continuité d'une fonction en un point.

f est définie en a et / est continue en un point a /$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$/ si et seulement si / une fonction numérique f.

3 Pour chacune des affirmations suivantes, recopie dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de (V) si l'affirmation est vraie ou de (F) si elle est fausse.

1. Si une fonction ne possède pas de limite en un point, alors elle est continue en ce point.
2. Toute fonction continue en un point est définie en ce point.
3. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$ et $f(a) \neq k$, alors f est continue en a.

4 Pour chacune des affirmations suivantes, recopie dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de (V) si l'affirmation est vraie ou de (F) si elle est fausse.

1. La fonction polynôme P définie par : $P(x) = 6x^3 - x^2 + x - 1$ est continue sur l'intervalle $[-2 ; 8]$.
2. Toute fonction rationnelle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction rationnelle k définie par : $k(x) = \dfrac{1-2x}{4x-5}$ est continue sur $[0 ; 2]$.

5 Pour chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule des quatre réponses est correcte. Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspond à la bonne réponse.

		Réponses			
		A	B	c	D
1	$\lim\limits_{x \to 0}(2x^2+5)^2$	2	25	7	-1
2	$\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)$	2	-4	5	$\dfrac{5}{2}$
3	$\lim\limits_{x \to -2}(2x+1+x^2)$	1	9	0	8
4	$\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)$	-2	$\dfrac{1}{2}$	0	2

Activité 3 Limite d'une restriction

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{16-x^2}{x-4}$.

1. a) Calcule : $\lim\limits_{x\to 4}(16-x^2)$ et $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)$.

b) Déduis-en que l'on ne peut pas conclure directement quant à la limite de f en 4.

2. a) Justifie que la fonction f est la restriction à $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x-4$.

b) Détermine $\lim\limits_{x\to 4}(-x-4)$.

Récapitulons

- On admet : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} g(x)$ et donc : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -8$.
  Soit I un intervalle ouvert contenant un nombre réel a.
  Soit f la restriction à $I\setminus\{a\}$ d'une fonction numérique g.
  Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- Dans la pratique, on procède à une simplification de l'expression de $f(x)$ sur son ensemble de définition pour calculer sa limite.

Exercice de fixation

6 Recopie et associe chaque limite de la colonne A à sa valeur correspondante dans la colonne B.

Colonne A
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x^2-x}$
$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2-16}$
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$
$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

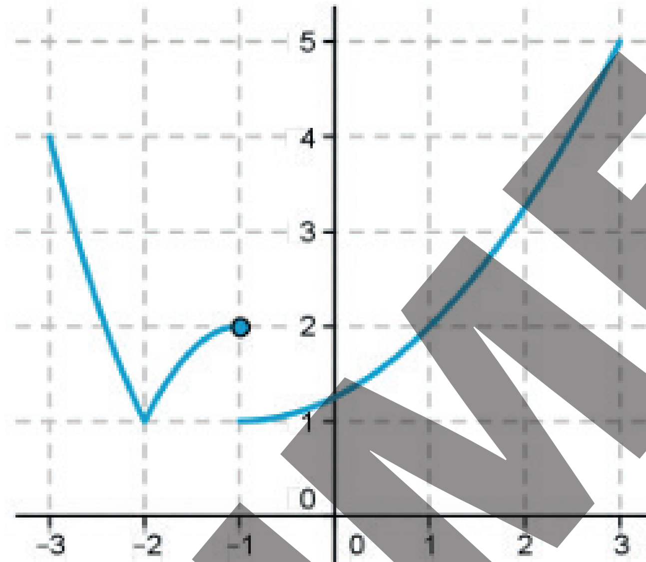
Colonne B
-3
1
$2\sqrt{2}$
-2
3
$\dfrac{1}{8}$

Activité 4 Limite à gauche- Limite à droite

Une approche intuitive

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.

Soit h la restriction de f à $[-1; 3]$ et g la restriction de f à [-2 ; -1[.



1. Détermine graphiquement : $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.
2. Déduis-en que f ne possède pas de limite au point −1.

Récapitulons

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$, la limite de h au point 1 et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$, la limite de g au point -1 .

Ces limites s'appellent respectivement limite à droite et limite à gauche de f au point -1
La limite à droite et la limite à gauche de f au point -1 sont différentes, on dit que f n'admet pas de limite au point -1. La fonction f bien que définie au point -1, n'est donc pas continue en ce point.

Exercices de fixation

7 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

Détermine la limite à gauche et la limite à droite de f au point 0

8 Détermine la limite à gauche et la limite à droite en -1 de la fonction f définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 1 \text{ si } x < -1 \\ f(x) = x^2 + 1 \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$$

I. LIMITES

1- Notion de limite

Une approche intuitive

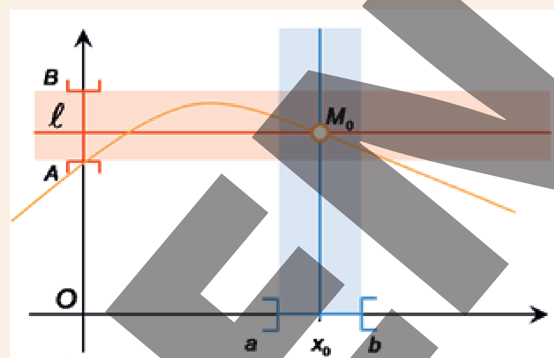
Sur la figure ci-contre, (C*f*) désigne la représentation graphique d'une fonction *f*.

Soit x un élément de l'ensemble de définition de la fonction *f*.

On constate intuitivement que la distance entre *f*(x) et l devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de x_0.

On dit que l est la limite de *f*(x) lorsque x tend vers x_0.

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

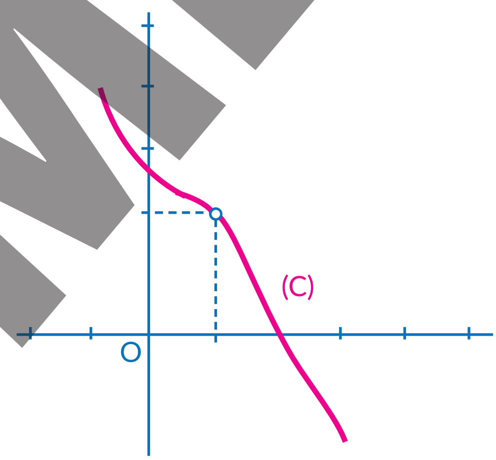


Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité le centimètre. (C) est la courbe représentative d'une fonction *f*.

2 est la limite de *f*(x) lorsque x tend vers 1.

On écrit : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.



Propriété

Soit f une fonction définie en a.

Si f admet une limite en a, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarques

Si une fonction numérique f possède une limite en un point, alors cette limite est unique.

Une fonction définie en un point n'admet pas nécessairement une limite en ce point.

Une fonction non définie en un point peut admettre une limite en ce point.

S'il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel la fonction f n'est pas définie, alors f n'admet pas de limite au point x_0.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2 ; 3 ; 4

2. Opérations sur les limites

a) Limites de quelques fonctions de référence en un point a

Propriété

$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$; $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$; $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$; $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$

Exemple d'application

On a :

$$\lim_{x \to -3} x^2 = (-3)^2 = 9 \; ; \; \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \; ; \; \lim_{x \to 64} \sqrt{x} = \sqrt{64} = 8 \; ; \; \lim_{x \to -\frac{3}{5}} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3} \; ; \; \lim_{x \to -1} |x| = |-1| = 1 .$$

Pour s'entraîner : Exercice 5

b) Opérations et limites en a

Propriété

On admettra les résultats suivants :

Soit c un nombre réel. Quel que soit le nombre réel a, on a : $\lim\limits_{x \to a} c = c$; $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

l et l' sont des nombres réels.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l+l'$
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	$l \times l'$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$ $(l \neq 0)$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$	$\dfrac{l'}{l}$ $(l \neq 0)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l
$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$, $l \geq 0$
n étant un entier naturel non nul, $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n$	l^n

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$	On ne peut pas conclure directement

Exemple d'application

Calculons : $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 + 4x - 1} \right)$

On a : $\lim\limits_{x \to 2} (x^2) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 1) = 7$, d'où, $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 4x - 1) = 4 + 7 = 11$.

Par suite, on obtient : $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 + 4x - 1} \right) = \dfrac{1}{11}$.

Calculons : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x^3 - 3x + 16} \right)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 - 3x + 16) = 0^3 - 3 \times 0 + 16 = 16$.

D'où, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x^3 - 3x + 16} \right) = \sqrt{16} = 4$

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7 ; 8

3. Limite d'une restriction

Propriété

Soit g une fonction numérique, f sa restriction à une partie A de son ensemble définition et a un nombre réel. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \setminus \{a\}$ soit inclus dans A.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exemple d'application

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x-2}$.

On se propose de déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

On a : $\lim\limits_{x\to 2}\left(4-x^2\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0$.

La propriété relative à la limite d'un quotient de deux fonctions ne nous permet pas de conclure.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a : $f(x)=\dfrac{(2+x)(2-x)}{x-2}$.

$$f(x) = -x - 2.$$

f est donc la restriction à $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ de l'application g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x - 2$

On a : $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -4$, donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -4$.

Remarques

Dans la pratique, on procède à une simplification de l'expression de $f(x)$ sur son ensemble de définition pour calculer sa limite.

Pour s'entraîner : Exercice 9

4. Limite à gauche en a – Limite à droite en a

Définitions

Si une fonction f admet pour limite l à gauche lorsque la variable x tend vers a,

on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)=l$.

l est appelé la limite à gauche de f en a.

Si une fonction f admet pour limite l à droite lorsque la variable x tend vers a,

on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)=l$.

l est appelé la limite à droite de f en a.

Conséquences

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Propriétés (Étude de limites en a)

a et l sont des nombres réels, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.

- **Dans le cas où f n'est pas définie en a.**

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite toutes deux égales à l.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ **si et seulement si** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = l$.

- **Dans le cas où f est définie en a.**

La fonction f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite toutes deux égales à f(a).

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = f(a)$.

Exemple d'application

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0], f(x) = -x \\ \forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

Étudions la limite de f en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ et $f(0) = 0$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) = 0$, on conclut que f admet une limite en 0.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Pour s'entraîner : exercices 10 ; 11 ; 12 ; 13

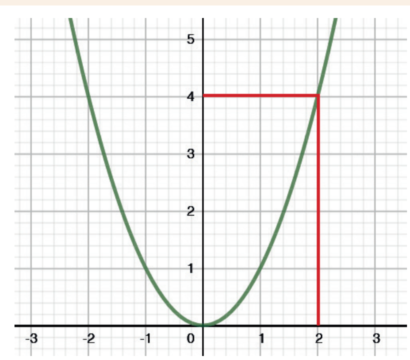
II-Continuité d'une fonction numérique

1- Continuité d'une fonction numérique en un point

Définitions

Une fonction numérique f est continue en a si et seulement si f est définie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple d'application



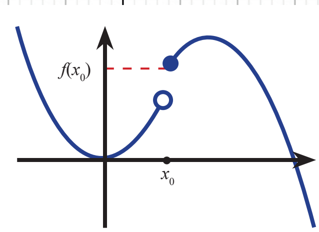
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

f est continue en 2.

En effet, f est définie en 2 ; $f(2) = 4$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

La fonction f est donc continue en 2.

Contre-exemple



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction qui n'est pas continue en x_0.

En effet, la fonction bien que définie en x_0, ne possède pas de limite en x_0.

Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15 ; 16

2- Continuité d'une fonction numérique sur un intervalle

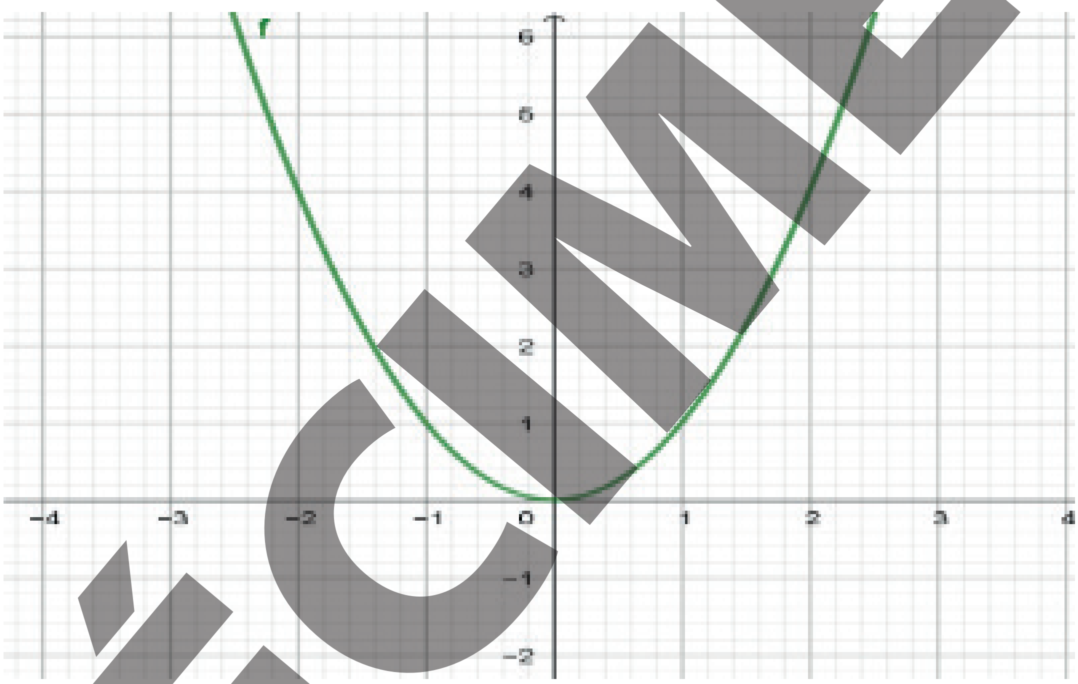
Définitions

Une fonction numérique f est continue sur un intervalle si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Exemple

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

f est continue sur tout intervalle de l'ensemble des nombres réels.



Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues en a.

Les fonctions $f+g, fg, kf\ (k\in\mathbb{R})$ et $|f|$ sont continues en a.

Si $g(a)\neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Si $f(a)\geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Exemple

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18 ; 19

QUESTION 1

Comment calculer la limite en a de certaines fonctions du type $\frac{f}{g}$ telles que $f(a) = g(a) = 0$?

Méthode 1

Pour calculer la limite en a de certaines fonctions du type $\frac{f}{g}$ telles que $f(a)=g(a)=0$, on peut procéder comme suit :

- on met $(x-a)$ en facteur au numérateur et au dénominateur ;
- on simplifie ;
- on calcule la limite de la nouvelle fonction obtenue.

Exercice

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x-3}{x^2-5x+6}$.
Calcule : $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Solution commentée

Posons $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x)=x-3$ et $Q(x)=x^2-5x+6$.
On a : P(3) = 0 et Q(3) = 0.

- Factorisons Q(x) en mettant (x - 3) en facteur.
- $Q(x)=(x-3)(x-2)$, donc $f(x)=\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}$. D'où $f(x)=\frac{1}{x-2}$.
- Calculons la limite lorsque x tend vers 3 de $\frac{1}{x-2}$.

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-2}\right)=1$. Par conséquent, $\lim_{x\to 3} f(x)=1$.

Exercice non corrigé

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{2x^2-9x-5}{2x^2+7x+3}$.

Calcule : $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} g(x)$.

QUESTION 2

Comment justifier qu'une fonction définie sur les intervalles]-∞ ; a[et [a ; +∞[admet une limite en a ?

Méthode

Pour justifier qu'une fonction f définie sur les intervalles]-∞ ; a[et [a ; +∞[admet une limite en a, on peut procéder comme suit :

- on calcule $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$;
- on calcule $f(a)$;
- on vérifie que : $\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = f(a)$.

Exercice

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;2\right], f(x)=3 \\ \forall x \in \left]2;+\infty\right[, f(x)=\dfrac{2}{x}+2 \end{cases}$.

Justifie que f admet une limite en 2.

Solution commentée

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{x}+2\right) = 3$.

De plus, $f(2) = 3$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = f(2)$, on conclut que f admet une limite en 2.

Exercice non corrigé

Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;1\right[, g(x)=\dfrac{2x^2}{x-2} \\ \forall x \in \left[1;+\infty\right[, g(x)=x-3 \end{cases}$ Justifie que g admet une limite en 1.

QUESTION 3

Comment justifier qu'une fonction est continue en un point a ?

Méthode

Pour justifier qu'une fonction f est continue en un point a, on peut procéder comme suit :
on détermine l'ensemble de définition de la fonction f ;
on vérifie que f est définie en a ;
on vérifie que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exercice

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2+5 \text{ si } x<3 \\ f(x)=x+11 \text{ si } x>3 \\ f(3)=14 \end{cases}$

Justifie que f est continue en 3.

Solution commentée

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

$3 \in \mathbb{R}$ donc f est définie en 3.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x^2+5) = 14$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x+11) = 14$ et $f(3) = 14$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} f(x) = f(3)$, on conclut que : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

D'où f est continue en 3.

Exercice non corrigé

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} g(x)=\sqrt{x}+1 \text{ si } x>4 \\ g(x)=x^3-4x^2+2x-5 \text{ si } x<4 \\ g(4)=3 \end{cases}$

Justifie que la fonction g est continue en 4.

Exercices de fixation

Limite d'une fonction en un point

1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

A l'aide de ta calculatrice, conjecture la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

2 Soit a un nombre réel, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur I.

Choisis l'écriture correcte traduisant la limite de la fonction f en a.

1. $\lim\limits_{x\to I} f(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(I)$.

3 Recopie dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

La limite de f lorsque x tend vers −1 est 0 s'écrit :

N°	Affirmations
1	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$
2	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(0)$
3	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

4 Recopie dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse

N°	Affirmations
1	Si une fonction possède une limite en un point, alors cette limite est unique.
2	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = $f(a)$ signifie que quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers a
3	S'il existe un intervalle ouvert centré en 2 sur lequel la fonction f n'est pas définie, alors la fonction f n'admet pas de limite en 2
4	f étant une fonction définie en un point a. Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a existe et est différente de $f(a)$, alors f admet une limite en a

Opérations sur les limites

5 Recopie et relie chaque limite de la colonne A au nombre de la colonne B qui lui correspond.

A	B
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x$	-1
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \cos x$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \sin x$	1
	$\dfrac{1}{2}$

6 Détermine, dans chacun des cas, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$; $\lim\limits_{x\to 2}(fg)(x)$.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\dfrac{3}{x}$.
2. $f(x)=x^2$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$.
3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$; $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$.

7 Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 8}(2x-1)+(x+3)$; $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)-(x+3)$;

$\lim\limits_{x\to -1}(x^3+3x^2-5x-3)$; $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$

8 Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{3}{2}}{x^2-2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(x^3-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{2x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 1} -3(2x-1)$.

Limites d'une restriction

9 Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Limite à gauche – Limite à droite en un point

10 Soit a un nombre réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a.

Parmi les affirmations ci-dessous, choisis celles qui sont vraies.

1. Si f admet une limite finie en a, alors f admet une limite finie à gauche et à droite en a.
2. Si f admet une limite finie en a, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$.
3. La limite à droite de la fonction f en a est notée : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$.
4. Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a, alors f admet une limite en a.

11 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.
Détermine la limite à gauche et la limite à droite de f en 0.

12 Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ si } x \in]-\infty ; -1[\\ g(x) = x^3 \text{ si } x \in [-1 ; +\infty[\end{cases}$$

Détermine la limite à gauche et la limite à droite de g en -1.

13 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \text{ si } x \in]1 ; +\infty[\\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in]0 ; 1[\end{cases}$$

1. Détermine la limite à gauche de f en 1 et la limite à droite de f en 1.
2. Étudie la limite de f en 1.

Continuité d'une fonction en un point

14 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux sinon.

N°	Affirmations
1	Si une fonction ne possède pas de limite en un point, alors elle est continue en ce point.
2	Toute fonction continue en un point est définie en ce point.
3	Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$ et $f(a) \neq k$, alors f est continue en a.
4	On dit qu'une fonction est continue en a si et seulement si la fonction n'est pas définie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

15

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \sqrt{x}$. Justifie que f est continue en 0.
2. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Justifie que g n'est pas continue en 0.

16 f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, \text{ si } x \neq 4 \\ f(4) = 1 \end{cases}$

Étudie la continuité de la fonction f en 4.

Continuité d'une fonction sur un intervalle

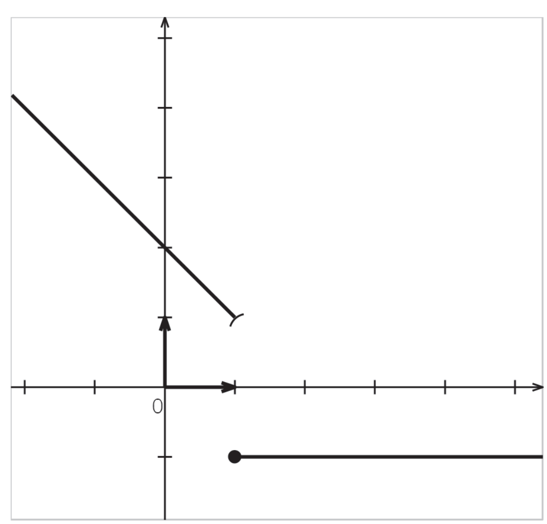
17 Réorganise les groupes de mots suivants pour obtenir une définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle.

si et seulement si / de cet intervalle / une fonction numérique f / elle est continue en tout point / est continue sur un intervalle

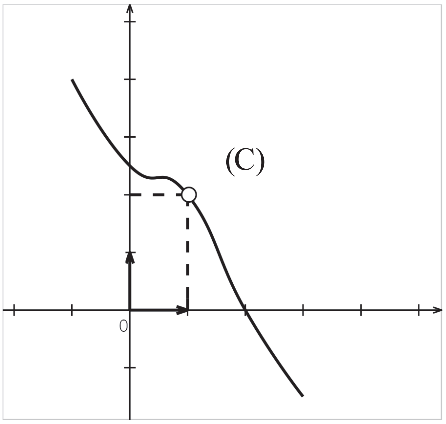
18 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux sinon.

N°	Affirmations
1	Soit une fonction f définie sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 5]$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 0$, alors f est continue sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 5]$.
2	Toute fonction définie en un point est continue sur son ensemble de définition
3	Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

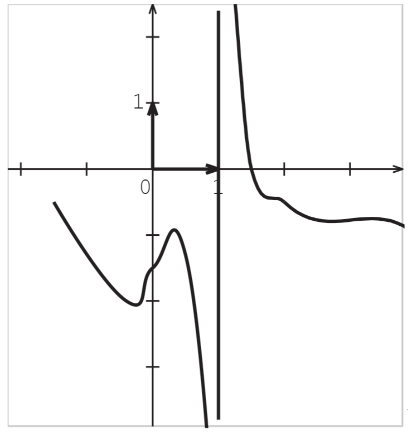
19 Parmi les courbes suivantes, indique celles qui représentent une fonction continue sur un intervalle de son ensemble de définition.



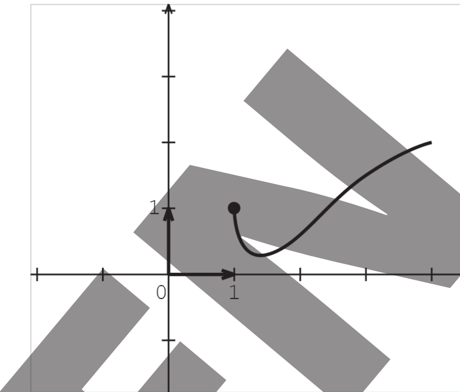
Cas 1



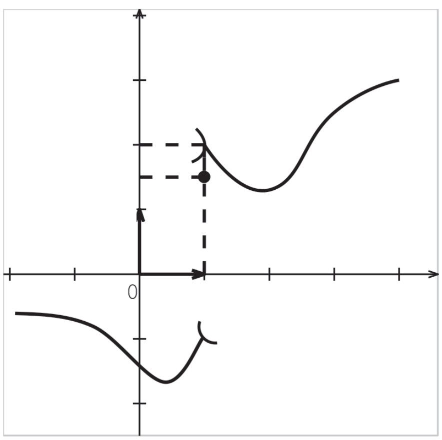
Cas 2



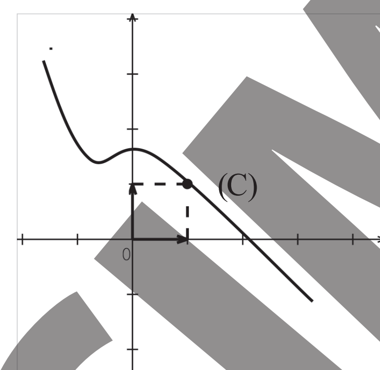
Cas 3



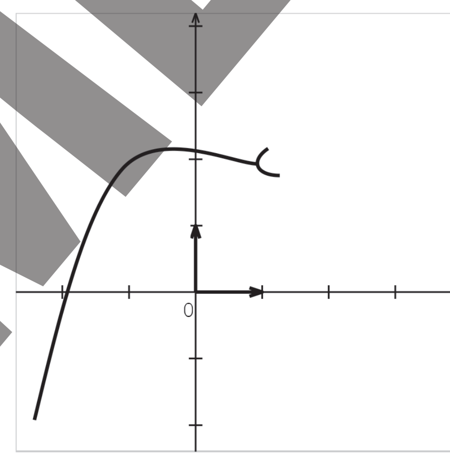
Cas 4



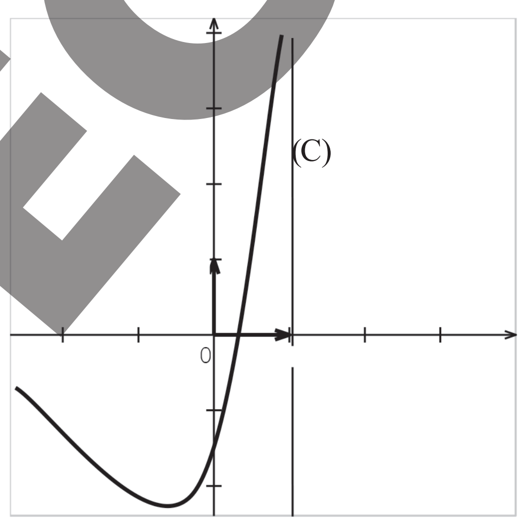
Cas 5



Cas 6



Cas 7



Cas 8

Exercices de renforcement/approfondissement

20 Détermine les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$; $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-8}$; $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$.

21 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Démontre que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Déduis en la limite de f en 1.

22 Détermine les limites suivantes :

$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{x^2-5x+6}{3-x}$; $\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{x^2-5x+6}{3-x}$; $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$;

$\lim_{\substack{x\to 4\\ >}}\dfrac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}$; $\lim_{\substack{x\to 4\\ <}}\dfrac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x}$.

23 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2x^2-x+4, & \text{si } x\le 2\\ f(x)=3x+2, & \text{si } x>2.\end{cases}$$

Dis si la fonction f admet une limite en 2.

Justifie ta réponse.

24 Pour tout nombre réel x, on pose :On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x)=\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$.

Démontre que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

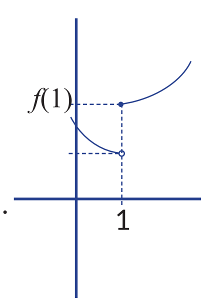
25 On considère la fonction f telle que :

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x\neq 0\\ 2, & \text{si } x=0\end{cases}.$$

Étudie la continuité de f en 0. Justifie ta réponse.

26 (C) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, dis si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

a. f est définie en 1.
b. f est continue en 1.
c. f admet une limite en 1.
d. f admet une limite à gauche en 1.
e. f admet une limite à droite en 1.



27 a et b étant des nombres réels, soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=a+\sqrt{-x}, & \text{si } x<-1\\ f(x)=7, & \text{si } x=-1\\ f(x)=3x-b, & \text{si } x>-1\end{cases}$$

(a et b sont des nombres réels)

Détermine les nombres réels a et b pour lesquels la fonction f est continue en -1.

28 On considère les fonctions h et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ et $g(x)=x-3$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h_g.
2. Détermine la formule explicite de la fonction h_g.
3. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(hg)(x), & si\ x\neq 3\\ f(x)=5, & si\ x=3\end{cases}$$

Étudie la continuité de f en 3.

29 Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x, & \text{si } x\le 1\\ f(x)=x^3, & \text{si } x>1\end{cases}.$$

Étudie la continuité de f en 1.

30 Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+3x-10}, & \text{si } x\neq -5\\ f(-5)=a, & \end{cases}.$$

Détermine la valeur du nombre réel a pour laquelle la fonction f est continue en -5.

31 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+|x|+1 \text{ si } x\le 0\\ (x^2+1)\sqrt{x} \text{ si } x>0\end{cases}.$$

1. Donne l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Détermine la limite à gauche et à droite de f en 0.
3. Étudie la continuité de la fonction f en 0.
4. Déduis-en la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

32 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. On pose : $p(x) = x^3 - 3x + 2$ et $q(x) = x^2 - 4x + 3$.
3. Calcule : $p(1)$ et $q(1)$.
4. Détermine les réels a, b et c tels que : $p(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
5. Justifie que pour $x \neq 1$, $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-3}$.
6. Détermine la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Dis si f est continue en 1. Justifie ta réponse.
8. Déduis-en l'intervalle sur lequel f est continue.

33 Soit h et m deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$h(x)=\frac{2x^2+3x}{x}$ et $m(x)=\frac{3x}{x^2+x}$.

Détermine l'ensemble de définition de h et celui de m.

Calcule : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} m(x)$.

34 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{|x^2-3x|}{x^2-9}.$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule les limites de f à gauche et à droite de f en 3.

35 f est la fonction définie sur [0 ; 2] par :

$f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$ où E désigne la fonction partie entière. Étudie la continuité de f en 1.

36 Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0\\ 1 \text{ si } x = 0\end{cases}.$$

Étudie la continuité de h en 0.

Situations complexes

37 Pour préparer un devoir de niveau, un groupe d'élèves d'une classe de 1ère D se rend à la bibliothèque du lycée pour effectuer des recherches.

L'un des élèves découvre dans un livre en mauvais état un bout d'exercice :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{(x^{20}+100)^2-10000}{x^{20}}$$

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$							

Il présente le bout d'exercice à ces amis et l'un d'entre eux affirme que la limite en 0 obtenu à l'aide du tableau des valeurs sera différente du calcul de la limite de f en 0.

En argumentant, vérifie l'affirmation de cet élève.

38 Deux élèves en classe de 1re D_2 d'un lycée souhaitent communiquer avec leur correspondant résidant en France. Ils se rendent chez un opérateur qui leur propose le contrat suivant :

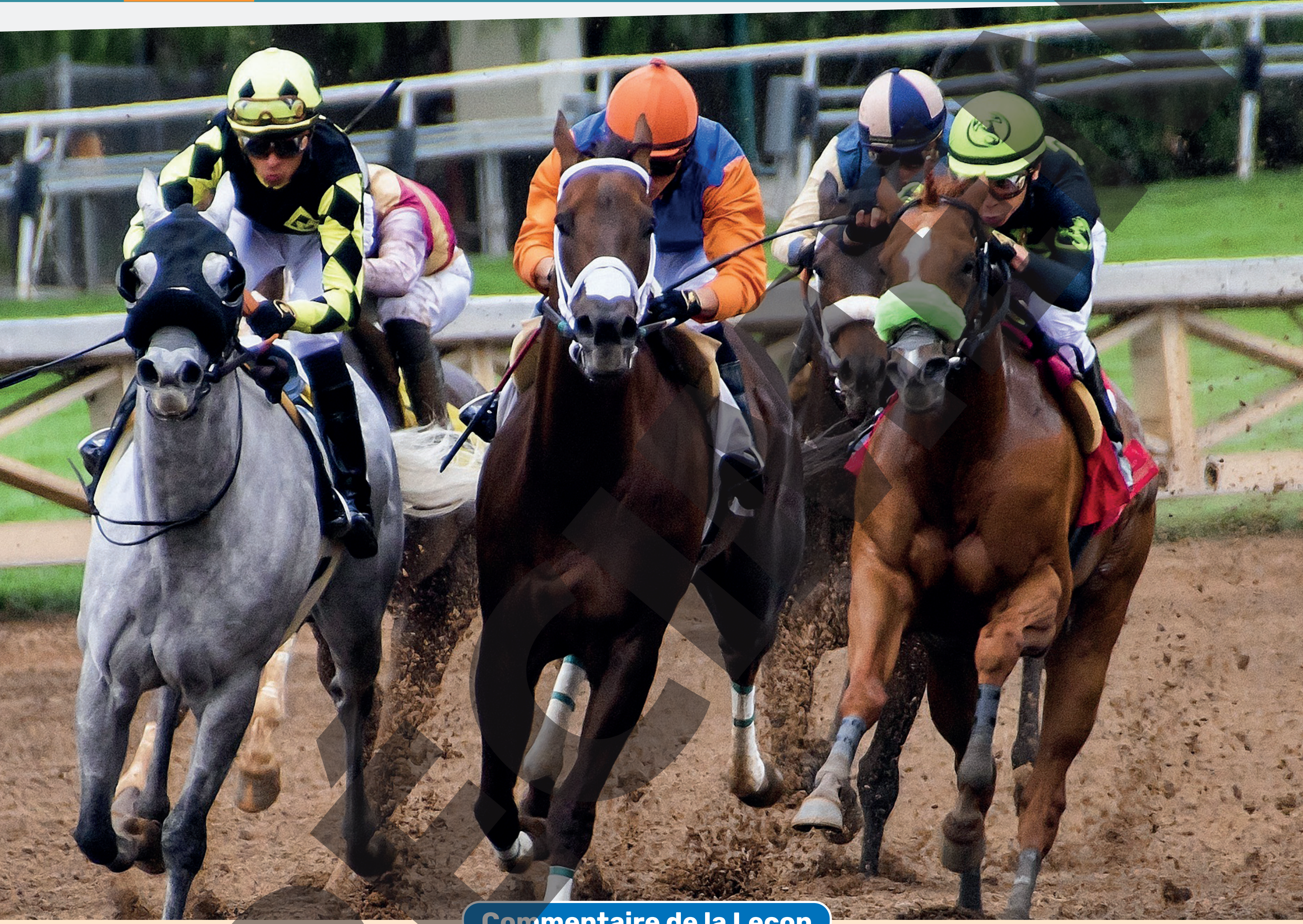
- 150 F la minute de 0 à 5 minutes de communication
- 750 F forfaitaire entre 5 minutes et 10 minutes.
- 100 F la minute de 10 à 30 minutes
- Au-delà de 30 minutes, 3000 F de forfait plus 50 F chaque minute supplémentaire.

Ces deux élèves décident de choisir l'option la plus intéressante. Dans leurs échanges, l'un d'eux affirme que ce contrat traduit une fonction continue en 5 puis discontinue en 30.

Le second ne semble pas être d'accord avec cette affirmation. Ils présentent alors cette situation à leurs camarades de classe afin de les départager.

Dis en argumentant, si le premier élève a raison.

5 PROBABILITÉ



Commentaire de la Leçon

L'histoire des probabilités a commencé avec celle des jeux de hasard bien que quelques calculs de probabilité soient apparus dans des applications précises au Moyen Âge. Ce n'est qu'au XVIIe siècle que la théorie des probabilités est élaborée. Elle évolue sans vrai formalisme pendant deux siècles autour du célèbre problème des partis, de problèmes d'urnes ou d'autres problèmes issus de jeux. Apparaît alors au XXe siècle la théorie classique des probabilités basée sur la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration. Cette théorie s'est depuis lors diversifiée dans de nombreuses applications. Les domaines d'application des probabilités sont variés : en médecine (tests diagnostics) ; en statistique (traitement et interprétation des données) ;

La notion de probabilité intervient pour la première fois en classe de première D. Il s'agit essentiellement d'installer le vocabulaire des probabilités et le calcul de probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité.

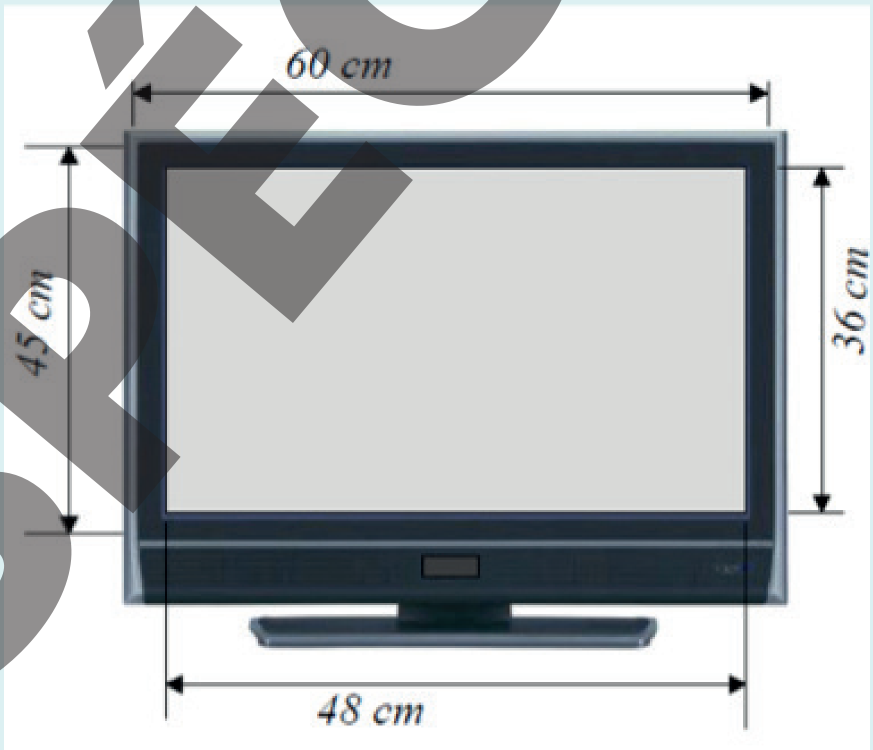
Les notions de probabilités conditionnelles, de variables aléatoires et de la loi binomiale seront vues en classe de terminale D.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition d'une probabilité sur un ensemble fini, le vocabulaire des probabilités (expérience aléatoire, évènement, évènement certain, éventualité, évènement élémentaire, évènement contraire, évènement impossible, probabilité d'un évènement, évènement (A ou B), évènement (A et B), univers, évènements incompatibles, équiprobabilité) , les propriétés $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- ✓ **Dénombrer** les cas possibles d'une expérience dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités, les cas favorables d'un évènement dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
- ✓ **Calculer** la probabilité d'un évènement.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel à la probabilité.

Situation d'Apprentissage

Monsieur OZOUOLOUA dispose dans son salon, d'un écran LCD de forme rectangulaire qui a pour dimensions 60 cm × 45 cm. La partie principale de l'écran est elle-même représentée par un rectangle de dimensions 48 cm × 36 cm.
Un pixel de l'écran est défectueux. Son fils en classe de première D souhaite trouver la fréquence que ce pixel se retrouve sur la partie principale de l'écran. Pour cela il décide de faire des recherches sur les Probabilités afin de mieux s'outiller pour répondre à sa préoccupation.
NB : On suppose qu'un pixel est de dimension 1 cm × 1 cm.



Activité 1 Éventualité

Un jeu consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé. Donne un exemple de résultat possible.

Récapitulons

Un résultat possible est appelé éventualité.

Exercice de fixation

1 Un jeu consiste à lancer une pièce de monnaie non truquée deux fois de suite et à observer la face supérieure de la pièce à chaque lancé. La face Pile est notée P, la face Face est notée F.

Parmi les résultats suivants, cite ceux qui sont des éventualités de cette expérience : P ; F ; (F ; P) ; (F ;F ;P) ; (P;P).

Activité 2 Univers

En considérant le jeu de l'activité 1, donne l'ensemble Ω des résultats de ce jeu.

Récapitulons

L'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} des résultats possibles est appelé univers.
Il est noté Ω.

Exercice de fixation

2 Un jeu consiste à lancer une pièce de monnaie non truquée deux fois de suite et à observer la face supérieure de la pièce à chaque lancé. La face Pile est notée P, la face Face est notée F.

Écris l'univers Ω du jeu.

Activité 3 Expérience aléatoire

En considérant le jeu de l'activité 1, dis si tu peux prévoir d'avance le résultat parmi l'ensemble des éventualités ?

Récapitulons

- L'ensemble Ω des résultats est connu.
- On ne peut pas prévoir d'avance le résultat au cours de chaque lancer.

On dit que cette expérience est une expérience aléatoire

Exercice de fixation

3 On considère deux expériences.

Expérience 1 : tirer une boule dans une urne contenant 6 boules rouges, toutes discernables au toucher.

Expérience 2 : Un expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé.

Une de ces expériences est aléatoire. Détermine la.

Activité 4 Évènement

On considère le jeu de l'activité 1. Soit A la situation : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».
Détermine l'ensemble des résultats de cette situation A.

Récapitulons

- L'ensemble des résultats de la situation A est un sous-ensemble de l'univers Ω .
- La situation A est appelée évènement de l'expérience aléatoire.

Exercice de fixation

4 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire sur la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants :

$A = \{7 ; 8\}$; $B = \{0 ; 1 ; 2\}$ et $C = \{1 ; 5 ; 6\}$.

Détermine l'ensemble qui est un évènement de cette expérience.

Activité 5 Évènement impossible

On considère le jeu de l'activité 1. Soit B évènement « le chiffre obtenu est 7 ».
Donne l'ensemble des résultats possibles réalisant B.

Récapitulons

- Ce résultat n'est pas possible dans cette expérience aléatoire.
- On dit que l'évènement B est un évènement impossible.

Exercice de fixation

5 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire sur la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants : $A = \{7 ; 8\}$; $B = \{0 ; 1 ; 2\}$ et $C = \{1 ; 5 ; 6\}$. Détermine le ou les évènements impossibles de l'expérience.

Activité 6 Évènement certain

On considère le jeu de l'activité 1. Soit C l'évènement « le chiffre obtenu est supérieure ou égal à 1 ».
Donne l'ensemble des résultats possibles de l'évènement C.

Récapitulons

- L'ensemble des résultats possibles de l'évènement C est Ω.
- On dit que l'évènement C est appelé évènement certain.

Exercice de fixation

6 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants :

$A = \{2 ; 5\}$; $C = \{ 1 ; 3\}$ et $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Détermine l'ensemble qui est un évènement certain de l'expérience.

Activité 7 Évènement élémentaire

On considère le jeu de l'activité 1. Soit les évènements suivants :

Soit D l'évènement « le chiffre obtenu est strictement supérieur à 5 »

Soit E l'évènement « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 » Par ces deux évènements, dis lequel donne lieu à une seule éventualité.

Récapitulons

- L'évènement D donne lieu à une seule éventualité.
- On dit que l'évènement D est un évènement élémentaire.

Exercice de fixation

7 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants :

A = {6} ; B = {0} et C = {1 ; 4} .

Détermine l'évènement élémentaire de l'expérience.

Activité 8 Évènements incompatibles

On considère le jeu de l'activité 1. Soit les évènements suivants :

Soit F l'évènement « le chiffre obtenu est pair »

Soit G l'évènement « le chiffre obtenu est impair »

1. a) Détermine l'ensemble F.

b) Détermine l'ensemble G.

2. Détermine l'ensemble F∩G.

Récapitulons

- $F \cap G = \emptyset$.
- les évènements F et G ne peuvent pas se réaliser simultanément.
- On dit que F et G sont incompatibles.

Exercice de fixation

8 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire sur la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants :

A = {1 ; 5} ; B = {3 ; 2} et C = {2 ; 4 ; 6} .

Détermine deux évènements incompatibles de l'expérience.

Activité 9 Évènement contraire d'un évènement

On considère le jeu de l'activité 1.

Soit les évènements suivants :

Soit H l'évènement : « le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 2 ».

Soit I l'évènement : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».

1. a) Détermine l'ensemble H.

b) Détermine l'ensemble I.

2. a) Détermine l'ensemble $H \cap I$.

b) Détermine l'ensemble $H \cup I$.

Récapitulons

- $H \cap I = \varnothing$
- $H \cup I = \Omega$
- L'ensemble H est constitué de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à I.
- L'ensemble I est constitué de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à H
- On dit que H et I sont des évènements contraires.

Exercice de fixation

9 Une expérience consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé. On considère les ensembles suivants :

$A = \{1 ; 5 ; 6\}$; $B = \{3\}$ et $C = \{2 ; 3 ; 4\}$; $D = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Détermine deux évènements contraires de l'expérience.

Activité 10 Évènement : A et B ($A \cap B$)

On considère le jeu de l'activité 1. Soit les évènements suivants :

Soit J l'évènement « le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 2 » ;

Soit K l'évènement « le chiffre obtenu est pair » ;

Soit L l'évènement « le chiffre obtenu est 2 ».

1. a) Détermine l'ensemble J.

b) Détermine l'ensemble K.

c) Détermine l'ensemble L.

2. Compare l'ensemble $J \cap K$ à l'ensemble L.

Récapitulons

- $J \cap K = L$
- L'ensemble L est constitué de tous les éléments de Ω qui appartiennent à J et K
- « J et K » est un évènement qui correspond à l'évènement L.

Exercice de fixation

10 Un jeu consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire sur la face supérieure du dé. Soit A l'évènement : « le chiffre obtenu est paire » et B l'évènement : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 ».

1. Définis l'évènement A et B.
2. Détermine $A \cap B$.

Activité 11 Évènement : A ou B ($A \cup B$)

On considère le jeu de l'activité 1.

Soit les évènements suivants :

Soit M l' évènement « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».

Soit N l'événement « le chiffre obtenu est compris entre 2 et 4 inclus ».

Soit Q l' évènement « le chiffre obtenu n'est pas 1 ».

1. a) Détermine l'ensemble M.

b) Détermine l'ensemble N.

c) Détermine l'ensemble Q.

2. Compare l'ensemble $M \cup N$ à l'ensemble Q.

Récapitulons

- $M \cup N = Q$.
- L'ensemble Q est constitué de tous les éléments de Ω qui appartiennent à M ou N sans répétition des éléments communs.
- « M ou N » est un évènement qui correspond à l'évènement Q.

Exercice de fixation

11 Un jeu consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé. Soit A l'évènement « le chiffre obtenu est paire » et B l'évènement « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 ».

1. Définis l'évènement A ou B.
2. Déterminer $A \cup B$.

Activité 12 Probabilité d'un évènement

On considère le jeu de l'activité 1. Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'univers associé à cette expérience aléatoire.
On donne les évènements suivants :

Soit R l'évènement : « le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 ».

Soit S l'évènement élémentaire : « le chiffre obtenu est 5 ».

Soit Q l'évènement élémentaire : « le chiffre obtenu est 6 ».

Soit V l'évènement élémentaire : « le chiffre obtenu est 7 ».

1. a) Détermine la chance qu'ont les évènements R, S et Q dans l'ensemble Ω de se réaliser.
   b) Compare la chance de l'évènement R dans l'ensemble Ω à la somme des chances des évènements S et Q dans l'ensemble Ω.
2. Détermine la chance qu'ont les évènements V et Ω dans l'ensemble Ω de se réaliser.

Récapitulons

- Chaque chiffre a la même chance d'apparaître car le dé cubique est parfaitement équilibré ;
- La chance qu'à l'évènement R dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{2}{6}$;
- La chance qu'à l'évènement S dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$;
- La chance qu'à l'évènement Q dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$;
- La chance qu'à l'évènement R de se réaliser est appelée la Probabilité de cet évènement ;
- On note $P(R) = \frac{2}{6}$ la probabilité de l'évènement R ;
- On a $P(R) = P(S) + P(Q)$;
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent $P(V) = P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$;
- La probabilité d'un évènement appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Exercice de fixation

12 Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des propositions suivantes :

1. Il y a autant de chances d'avoir une boule verte qu'une boule rouge.
2. Il y a 4 chances sur 10 d'obtenir une boule rouge.
3. Il y a 4 chances sur 6 d'obtenir une boule verte.

Activité 13 Calculer la probabilité d'un évènement

On considère le jeu de l'activité 1.

Soit $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. On donne les évènements suivants :

Soit W l'évènement « le chiffre obtenu est impair »

1. Détermine la probabilité $P(W)$ de l'évènement W.
2. a) Calcule card (W) et card (Ω).

   b) Compare $P(W)$ à $\frac{card(W)}{card(\Omega)}$.

Récapitulons

- $P(W) = \frac{card(W)}{card(\Omega)}$
- $P(W) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } W}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exercice de fixation

13 Un jeu consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire sur la face supérieure du dé. On défini l'évènement A tel que : A = {2 ; 4}.

1. Détermine card(A) et card(Ω) .
2. Calcule la probabilité P(A) de l'évènement A.

Activité 14 Propriétés : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et l'on note son numéro.

On considère les événements :

A : « *la boule tirée a un numéro pair.* »

B : « *la boule tirée a un numéro multiple de 3* »

1. Détermine les ensembles suivants : A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calcule : P(A) ; P(B) ; $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$.
3. Compare $P(A \cup B)$ et $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Récapitulons

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice de fixation

14 On considère des événements A et B tels que : $p(B) = \frac{1}{2}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$; $p(A \cup B) = \frac{7}{10}$.

Calcule p(A) .

Activité 13 Propriétés : p($\bar{A}$) = 1 – p(A)

En utilisant la propriété : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, justifie que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Récapitulons

On sait que : $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{A})$ or $A \cap \bar{A} = \varnothing$

alors $p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$ car $p(A \cap \bar{A}) = 0$

De plus $A \cup \bar{A} = \Omega$ avec $p(\Omega) = 1$

Donc $p(A) + p(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exercice de fixation

15 Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et A un évènement de Ω tel que : $P(A) = \frac{1}{5}$.
Parmi les nombres suivants, désigne celui qui correspond à la probabilité de $\bar{A}$;

a) $\frac{4}{5} - 1$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{2}{5}$.

I. Vocabulaire des probabilités

1. Expérience aléatoire

Définition

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

- On connait tous les résultats possibles.
- On ne peut prévoir aucun résultat.
- On peut reproduire l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemple

Lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 constitue une expérience aléatoire.

Pour s'entraîner : Exercices 2 ; 3 ; 4

2. Éventualité

Définition

Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité, issue ou cas possible.

Exemple

Pile et Face sont les éventualités du lancer d'une pièce de monnaie.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6 ; 7 ; 13

3. Univers

Définition

L'ensemble de toutes les éventualités est l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exemple

On lance une fois un dé parfaitement équilibré et on lit le chiffre inscrit sur la face supérieure du dé. L'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} est l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 8

4. Evènement, évènement élémentaire, évènement impossible, évènement certain

Définition

Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle évènement , toute partie de l'ensemble Ω.

- Lorsque cet évènement est un singleton, on l'appelle évènement élémentaire.
- Lorsque cet évènement est l'ensemble vide, on l'appelle évènement impossible.
- Lorsque cet évènement est l'ensemble Ω, on l'appelle évènement certain.

Exemple

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et l'on note son numéro. On considère les événements

- L'ensemble {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14} est un évènement de cette expérience aléatoire.
- L'ensemble {2} est un évènement élémentaire de cette expérience aléatoire.
- L'ensemble {16 ;33} est un évènement impossible de cette expérience aléatoire.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 17

5. Évènement (A et B), évènement (A ou B)

Définition

Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A et B des évènements de Ω.

- On appelle évènement (A ou B) la partie de Ω.
- On appelle évènement (A et B) la partie de Ω.

Notation : l'événement (A et B) se note $A \cap B$.
l'événement (A ou B) se note $A \cup B$.

Remarques

- L'événement $A \cup B$ est constitué des éléments de Ω qui appartiennent à A ou à B (sans répétition des éléments communs)
- L'événement $A \cap B$ est donc constitué de tous les éléments de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B

Exemple

On considère les évènements A et B de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.
On donne : $A = \{b ; c ; d\}$; $B = \{a ; c ; d ; e\}$ et $\Omega = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$
L'événement (A et B) est {c ; d }
L'événement (A ou B) est $\{a ; b ; c ; d ; e\}$

Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15

6. Évènements incompatibles, évènements contraires

Définition

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A et B des évènements de Ω.

- On appelle évènement contraire de A la partie $\overline{A}$ de Ω, complémentaire de A dans Ω;
- On dit que l'évènement A et l'événement B sont incompatibles lorsque l'événement (A et B) est impossible, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple

- En considérant l'expérience ci-dessus du lancer de dé, l'événement contraire de A : « On obtient un chiffre pair » est l'événement B : « On obtient un chiffre impair ».
- Les évènements A et B sont incompatibles.

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17 ; 18 ; 19

7. Probabilité d'un évènement

Définition

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
On dit que l'on a défini une probabilité de P sur Ω lorsque, à tout évènement A de Ω, on peut associer un nombre réel appelé probabilité de A noté P(A) vérifiant les conditions suivantes :

- la probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1 ;
- la probabilité de l'événement certain est 1, celle de l'événement impossible est 0 ;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Exemple

On considère les évènements A et B de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.

On donne : $A = \{a ; c\}$; $\Omega = \{a ; b ; c\}$; $P(\{a\}) = \frac{1}{8}$ et $P(\{b\}) = \frac{3}{8}$.

Puisque P(Ω) = 1 et que $P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\})$ alors $P(\{c\}) = \frac{1}{2}$.

On obtient : $P(A) = P(\{a\}) + P(\{c\}) = \frac{5}{8}$.

Pour s'entraîner : Exercices 20 ; 22

8. Équiprobabilité

Définition

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité définie sur Ω.
On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des événements élémentaires lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité
Dans ce cas, pour tout événement A de Ω, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Exemple

On considère les évènements A et B de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.

On donne : $A = \{a\,;c\}$; $\Omega = \{a\,;b\,;c\}$; $P(\{a\}) = \frac{1}{3}$; $P(\{b\}) = \frac{1}{3}$ et $P(\{c\}) = \frac{1}{3}$.

Puisque que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\})$ alors cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité.

On a alors : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2}{3}$.

Pour s'entraîner : Exercices 21 ; 23 ; 25 ; 32 ; 33 ; 34 ; 35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 45 ; 46 ; 47 ; 48 ; 49 ; 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 ; 56 ; 57 ; 58

2. Propriétés

1. Probabilité de la réunion de deux évènements

Propriété

Si A et B sont deux évènements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple

On considère les événements A et B de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.

On donne : $P(A) = \frac{3}{10}$; $P(B) = \frac{4}{10}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

On a alors $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

Remarque

Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Pour s'entraîner : Exercices 27 ; 28 ; 29 ; 30 ; 31

2. Probabilité du contraire d'un évènement

Propriété

Si $\overline{A}$ est l'évènement contraire de l'évènement A, alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple

On considère l'évènements A de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire tel que :

$P(A) = \frac{7}{16}$. On a $P(\overline{A}) = \frac{9}{16}$.

Pour s'entraîner : Exercices 21 ; 23 ; 24

QUESTION 1

Comment calculer la probabilité d'un évènement ?

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement :
On calcule le cardinal de l'événement et le cardinal de l'univers et on calcule le quotient du cardinal de l'évènement par le cardinal de l'univers.

Exercice

Un élève de première D écrit au hasard des nombres entiers naturels de deux chiffres uniquement avec les éléments de l'ensemble E = {2 ; 5 ; 6 ; 7}. On note A l'événement : « Les deux chiffres du nombre entier naturel écrit sont distincts » et Ω l'ensemble des nombres entiers naturels de deux chiffres que l'élève peut écrire.

1. Détermine Card Ω.
2. Calcule Card A.
3. Déduis-en que P(A) = $\frac{3}{4}$.

Solution commentée

1. CardΩ= 4^2 =16.

2. CardA= A_4^2= 4 × 3 = 12.

3. P(A) = $\frac{\text{CardA}}{\text{CardΩ}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Exercice non corrigé

Un sac contient dix billes indiscernables au toucher dont 5 rouges, 3 blanches et 2 noires. On tire simultanément 3 billes de ce sac. On considère les événements suivants :
A : « les trois billes tirées sont de la même couleur »
B : « Les trois billes tirées sont deux à deux de couleurs différentes »
On note Ω le nombre de tirages possibles.

1. Calcule Card Ω.
2. a) calcule P(A).
   b) Calcule P(B).

QUESTION 2

Comment calculer la probabilité d'un évènement en utilisant son évènement contraire ?

Méthode

Soit A et $\overline{A}$ deux évènements contraires. Pour calculer la probabilité d'un évènement en utilisant son événement contraire, on utilise l'égalité $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exercice

Un élève de terminal passe un examen de fin d'année. Soit il réussit ou il échoue à son examen.
On appelle G l'événement : « L'élève réussit à son examen »
Sachant que $P(\overline{G})$ = 0,67 Calcule P(G).

Solution commentée

P(G) = 1 − $P(\overline{G})$
= 1 − 0,67
= 0,33.

Exercice non corrigé

Dans une région, les grossesses vont toujours à leurs termes et la probabilité qu'une femme donne naissance à un garçon est de 0,46. On note E l'événement : « Une femme donne naissance à une fille » Calcule p(E).

QUESTION 3

Calculer la probabilité de l'évènement en utilisant les évènements élémentaires qui le composent.

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un évènement, on peut calculer la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Exercice

On considère un dé cubique dont les six faces sont numérotées de la manière suivante :
Deux faces portent le numéro 1 ; deux faces portent le numéro 2 ; une face porte le numéro 3 et une face porte le numéro 5. On lance ce dé et on note le numéro de la face supérieure. On appelle I l'événement : « On obtient un chiffre impair » et on désigne par P_i la probabilité d'obtenir le numéro i.

1. Détermine P_1 ,P_3 ,P_5
2. Déduis-en que $P(I) = \frac{3}{4}$.

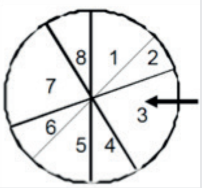
Solution commentée

1. $P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P_3 = \frac{1}{6}$; $P_5 = \frac{1}{6}$

2. $P(I) = P_1 + P_3 + P_5$
$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, $= \frac{4}{6}$, $= \frac{2}{3}$.

Exercice non corrigé

Une roue de loterie est composée de 8 secteurs d'aires différentes.
Les secteurs sont numérotés de 1 à 8.
On fait tourner la roue. Quand la roue s'arrête, l'indicateur désigne alors un secteur.
Le tableau ci-dessous récapitule les probabilités correspondantes aux secteurs.



Secteur	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	0,12	0,06	0,23	0,09	0,12	0,06	0,23	0,09

1. Calcule la probabilité que le secteur 1 ou le secteur 7 soit désigné.
2. Calcule la probabilité qu'un secteur pair soit désigné.
3. Calcule la probabilité qu'un secteur impair soit désigné.

QUESTION 4

Calculer la probabilité de l'évènement en utilisant un tableau

Méthode

Pour calculer la probabilité de l'événement en utilisant un tableau à double entrée, ont peut procéder comme suit :
- placer les sommes des lignes dans la colonne de droite ;
- placer les sommes des colonnes dans la ligne du bas ;
- veillez à ce que la somme des nombres de la colonne de droite et la somme de ceux de la ligne du bas soit égale à 1.

Exercice

Une maladie atteint 3% d'une population de 20000 individus.
On appelle "malade" l'individu atteint de cette maladie et "bien portant" celui qui ne l'est pas.
On dispose d'un test pour la détecter.
Ce test donne les résultats suivants :
- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs.
- Chez les individus bien portants, 2% des tests sont positifs.

On note les évènements suivants :
- M : "être malade"
- T : "avoir un test positif"

On rencontre une personne au hasard de cette population.

1. Recopie puis complète le tableau ci :

	Nombre de personnes malades	Nombre de personnes bien portantes	Total
Nombre de personnes Testés positifs			
Nombre de personnes Testés négatifs			
Total			20 000

2. Calcule les probabilités suivantes : P(T) , P(T ∩ M) et P(T ∪ M) .
3. Sachant que la personne rencontrée est malade, calculer la probabilité que son test soit négatif.
4. Sachant que la personne rencontrée a un test positif, calcule la probabilité qu'elle ne soit pas malade.

Solution commentée

1. Recopie puis complète le tableau ci-dessous :

	Nombre de personnes malades	Nombre de personnes bien portantes	Total
Nombre de personnes Testés positifs	570	388	958
Nombre de personnes Testés négatifs	30	19012	19042
Total	600	19400	20 000

2. Calcule les probabilités suivantes : P(T) , P(T ∩ M) et P(T ∪ M) .

$P(T) = \frac{958}{20000} = \frac{479}{10000}$

$P(T \cap M) = \frac{570}{20000} = \frac{57}{2000}$

$P(T \cup M) = P(T)+P(M)-P(T \cap M)$

$P(T \cup M) = \frac{958}{20000} + \frac{600}{20000} - \frac{570}{20000}$

$P(T \cup M) = \frac{247}{5000}$.

3. Sachant que la personne rencontrée est malade, calculer la probabilité que son test soit négatif.

$P = \frac{30}{20000} = \frac{3}{2000}$.

4. Sachant que la personne rencontrée a un test positif, calcule la probabilité qu'elle ne soit pas malade.

$P = \frac{388}{958} = \frac{194}{479}$.

Exercice non corrigé

À la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de première de 25 élèves :

- 48% des élèves ont 14 ans, $\frac{1}{5}$ ont 16 ans et les autres ont 15 ans.
- Lors de cette enquête, on leur a demandé s'ils utilisaient un sac à dos ou un sac en bandoulière :
- $\frac{1}{6}$ des élèves de 14 ans ont un sac à dos
- $\frac{3}{8}$ des élèves de 15 ans ont un sac en bandoulière
- 60% des élèves de 16 ans ont un sac à dos.

On interroge au hasard un élève de cette classe et on lui demande son âge et le type de sac qu'il utilise.

1) Reproduis et complète le tableau ci-dessous.

	Elèves ayant un sac à dos	Elèves ayant un sac en bandoulière	Total
Elèves ayant 14 ans			
Elèves ayant 15 ans			
Elèves ayant 16 ans			
Total			25

2) Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « l'élève a 14 ans et un sac à dos »
B : « l'élève a 15 ans et n'a pas de sac à dos »
C : « l'élève a 16 ans »
D : « l'élève a un sac en bandoulière »

Exercices de fixation

Expérience aléatoire

1 On lance un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Relie chaque évènement du tableau 1 à sa nature dans le tableau 2 correspondant.

Tableau 1			Tableau 2
Obtenir 5 est un :	•	•	Evènement élémentaire
Obtenir 10 est un :	•	•	Evènement impossible
Obtenir un chiffre est un :	•	•	Evènement certain

2 Parmi les situations suivantes indique celles qui sont des expériences aléatoires.

1) Tirer deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.
2) Suivre une recette de cuisine pour faire un gâteau.
5) tirer au but lors d'un match de football.
3) Obtenir une bonne note dans un devoir.
4) Réaliser une expérience en versant de l'acide sur du calcaire.
6) Lancer une pièce de monnaie et lire la face supérieure.
7) Tirer 4 boules parmi 15 boules indiscernables au toucher.

Univers , éventualité

3 Ordonne les groupes de mots suivants afin d'obtenir une définition d'une éventualité liée à une expérience aléatoire.

est appelé - d'une expérience - éventualité - aléatoire - Le résultat

4 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on regarde la parité du nombre inscrit sur sa face supérieure.

Parmi les issues ci-dessous, indique celle qui est liée à cette expérience aléatoire.

a) $\{1 ; 3 ; 5\}$,
b) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$,
c) {paire ; impaire} ,
d) $\{2 ; 4 ; 6\}$.

5 On écrit sur les faces d'un dé à huit faces chacune des lettres du mot CHOCOLAT.

On lance ce dé et on regarde la lettre inscrite sur sa face supérieure.

Détermine les issues de cette expérience.

6 On lance deux dés à six faces numérotées de 1 à 6 ; et on calcule la somme des nombres inscrits sur leur face supérieure. Détermine les issues de cette expérience.

7 Pour chacune des expériences aléatoires, trois propositions sur le nombre d'éventualités sont données parmi lesquelles une seule est juste. Écris le numéro de l'expérience suivi de la lettre de la proposition correspondant à la bonne réponse.

N°	Expériences aléatoires	Nombre d'issues		
		A	B	C
1	Une roue de loterie est partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8. On tourne cette roue et on lit le chiffre indiqué par la flèche.	0	9	8
2	Une roue de loterie est partagée en huit secteurs identiques numérotés de 1 à 8. On tourne cette roue et on lit le multiple de 2 ou de 3 indiqué par la flèche.	6	5	4
3	Une roue de loterie est partagée en dix-neuf secteurs identiques numérotés de 1 à 19. On tourne cette roue et on lit le multiple de 2 et de 3 indiqué par la flèche	2	4	3
4	Une roue de loterie est partagée en dix-neuf secteurs identiques numérotés de 1 à 19. On tourne cette roue et on lit le nombre premier indiqué par la flèche.	7	8	9

8 Trouve l'univers Ω correspondant à l'expérience suivante :

1) On lance deux dés à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on observe les deux faces supérieures;
2) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 ;
3) On tire une carte d'un jeu de 32 puis on la remet. On mélange, on en tire en seconde.

Evènement, évènement élémentaire, évènement impossible, évènement certain

9 Relie chaque élément du tableau 1 à son correspondant dans le tableau 2

Ω étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle évènement de Ω, toute partie de l'ensemble Ω.

Tableau 1			Tableau 2
Lorsque cet évènement est l'ensemble vide	•	•	on l'appelle évènement certain
Lorsque cet évènement est l'ensemble Ω	•	•	on l'appelle évènement impossible
Lorsque cet évènement est un singleton	•	•	on l'appelle évènement élémentaire

10 Une roue équilibrée de loterie est partagée en sept secteurs identiques sur lesquels sont inscrits les lettres du mot JANVIER. On la fait tourner, elle s'immobilise et on observe la lettre obtenue.

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations ci-dessous

1. Obtenir une consonne est un évènement élémentaire.
2. Obtenir la lettre J est un évènement élémentaire.
3. Obtenir la lettre E est un évènement certain.
4. Obtenir la lettre W est un évènement impossible.
5. Obtenir une lettre du mot JANVIER est un événement certain.

11 On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6. Complète le tableau ci-dessous suivant l'exemple de la première ligne.

	Événement Elémentaire	Evénement Impossible	Evénement Certain
« Obtenir un nombre Supérieur à six »			
« Obtenir six »			
« Obtenir un multiple de 11 »			

12 On place dans un chapeau dix papiers sur lesquels sont écrits les chiffres de 0 à 9. On tire un papier au hasard et on observe le chiffre obtenu. Relie chaque évènement du tableau 1 à sa nature dans le tableau 2 correspondant.

Tableau 1			Tableau 2
Obtenir 5 est un :	•	•	Evénement élémentaire
Obtenir 10 est un :	•	•	Evénement impossible
Obtenir un chiffre est un :	•	•	Evénement certain

13 On lance deux dés à six faces numérotées de 1 à 6 ; et on calcule la somme des nombres inscrits sur leur face supérieure.

1. Détermine les issues de cette expérience.
2. Relie chaque évènement du tableau 1 à l'ensemble qui lui est associé dans le tableau 2 .

Tableau 1			Tableau 2
Obtenir un nombre pair et multiple de 3	•	•	{4 ; 8 ; 12}
Obtenir un nombre impair et multiple de 3	•	•	{8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12}
Obtenir un nombre multiple de 4	•	•	{6 ; 12}
Obtenir un nombre strictement supérieur à 7	•	•	{8 ; 9 ; 10}
Obtenir un nombre strictement supérieur à 7 et strictement inférieur à 11	•	•	{3 ; 9}

Évènement (A et B), évènement (A ou B)

14 Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.

On considère les événements suivants :

A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».

B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

C : « Le numéro du jeton tiré est supérieur ou égal à 8 ».

Relie chaque évènement du tableau 1 à l'ensemble qui lui est associé dans le tableau 2

Tableau 1			Tableau 2
L'événement (A ou B)	•	•	{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12}
L'événement (A et B)	•	•	{8 ; 10 ; 12}
L'événement (A ou C)	•	•	{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12}
L'événement (A et C)	•	•	{3 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12}
L'événement (B ou C)	•	•	{9 ; 12}
L'événement (B et C)	•	•	{6 ; 12}

15 On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.

On s'intéresse aux événements suivants :

E : « Obtenir un multiple de 3 »,

F : « Obtenir un multiple de 5 »

G : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 7 ».

Pour chacune des affirmations trois propositions de réponse sont données, parmi lesquelles une seule est juste. Écris le numéro de l'affirmation et la lettre de la bonne réponse.

N°	Affirmations	Propositions de réponses			
		A	B	C	D
1	L'événement E et F est	Un multiple de 15	Ø	{ 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 }	Un multiple de 15
2	L'événement F ou G est	{10 }	Ø	{ 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 }	Impossible
3	L'événement E et G est	Ø	{9}	{ 7 }	{ 7 ; 9 }
4	L'événement F ou G est	{5 ;7}	{ 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 }	Ø	{ 7 ; 8 ; 9 ; 10 }

Évènements incompatibles, évènements contraires

16 Ordonne les groupes de mots suivants afin d'obtenir une définition de l'événement contraire d'un évènement :

dans Ω - la partie $\overline{A}$ de Ω - On appelle évènement - complémentaire de A - contraire de A.

17 Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.

On considère les événements suivants :

A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».

B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

C : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 5 »

Réponds par VRAI ou par FAUX aux affirmations suivantes

1) les évènements A et B sont incompatibles ;

2) les évènements B et C sont incompatibles ;

3) les évènements A et C sont incompatibles.

18 Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.

On considère les événements suivants :

A : « Le numéro du jeton tiré est impair ».

B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 2 ».

C : « Le numéro du jeton tiré est un nombre plus grand que 5 »

Réponds par VRAI ou par FAUX aux affirmations suivantes

1) l'événement contraire de A est : « Le numéro du jeton tiré est pair ».

2) l'événement contraire de B est : « Le numéro du jeton tiré est multiple de 3 ».

3) L'événement contraire de C est : « Le numéro du jeton tiré est un nombre plus petit que 5 ».

19 On considère les expériences aléatoires ci-dessous. Pour chaque évènement énoncé, 3 propositions sont données pour signifier son contraire. Une seule est juste. Choisis la bonne réponse.

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard.

Soit l'événement A : « Les deux élèves sont des filles ». L'événement contraire de A est :

a) « Les deux élèves sont des garçons ».

b) « au moins un élève est un garçon ».

c) « Les deux élèves sont de sexe opposé ».

2) Dans un groupe de policiers et de gendarmes, on discute avec une personne.

Soit l'événement B : «La personne est un homme policier». L'événement contraire de B est

a) « La personne est un femme policier».
b) « La personne est une femme gendarme».
c) « La personne est une femme ou un homme gendarme ».

4) A une loterie, Élise achète 3 billets.

Soit l'événement D : « L'un des billets au moins est gagnant ». L'événement contraire de D est :

a) « Tous les billets sont perdants ».
b) « Tous les billets sont gagnants ».
c) « Un billet est gagnant ».

4) A une loterie, Élise achète 3 billets.

Soit l'événement E : « Deux billets au plus sont gagnants. L'événement contraire de E est

a) « Aucun billet n'est gagnant ».
b) « Deux billets sont gagnants».
c) « Trois billets sont gagnants ».

Probabilité d'un évènement, Probabilité de l'événement contraire d'un évènement

20 Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et A un évènement de Ω

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations ci-dessous.

1) $P(\overline{A}) > 1$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3) P(A) = P(A) - 1

21 Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et A un évènement de Ω tel que $P(A) = \frac{1}{5}$.

Parmi les nombres suivants, désigne celui qui correspond à la probabilité de $\overline{A}$.

a) $\frac{4}{5} - 1$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{2}{5}$.

22 Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. Réponds par vrai (V) ou faux (F).

1) Il y a autant de chances d'avoir une boule verte qu'une boule rouge.
2) Il y a 4 chances sur 10 d'obtenir une boule rouge.
3) Il y a 4 chances sur 6 d'obtenir une boule verte.
4) La probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{2}{5}$.

23 Dans un jeu de loterie, la probabilité de gagner est 0,25. Calcule la probabilité de perdre à ce jeu.

24 Dans une population, la probabilité de mettre au monde une fille est de $\frac{1}{3}$.

Calcule la probabilité de mettre au monde un garçon .

25 Soit Ω un univers donné. Soient A et B deux évènements de cet univers. Peut-on avoir simultanément les données Mathématiques contenues dans le tableau ci-dessous ? Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F).

Données Mathématiques	Réponse
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et A ∩ B = Ø	
P(A) = 0,9 ; P(B) = −0,5	
P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,4 et P(A ∩ B) = 0,2	
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et P(A ∩ B) = 0,1	
P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et P(A ∩ B) = 0,3	

Équiprobabilité

26 Parmi les situations ci-dessous indique celles qui sont des situations d'équiprobabilité.

1) On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes identiques.
2) On tire deux boules dans une urne contenant 10 boules discernables au toucher.
3) On lance deux fois de suite un dé truqué
4) On tire trois boules dans une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher.
5) On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibré.
6) On fait tourner une roue de loterie composée de 8 secteurs d'aires différentes numérotés de 1 à 8. Puis on considère le nombre de la case sur laquelle elle s'arrête.

Probabilité de la réunion de deux évènements

27 Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements de Ω

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations ci-dessous.

1) Si A et B sont disjoints, alors P(A∪B) = P(A)+P(B);
2) P(A∪B) =P(A)+P(B)+ P(A∩B);
3) P(A) = P(A∪B)−P(B)+ P(A∩B);
4) P(A∩B) = P(A) + P(B)−P(A∪B).

28 Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15 indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et l'on note son numéro. On considère les événements

A :«la boule tirée a un numéro pair. »

B: «la boule tirée a un numéro multiple de 3»

1) Calcule : P(A) ; P(B); P(A∩B).
2) Calcule P(A∪B).

29 On considère des événements A et B tels que :

$P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$.

Calcule P(A)

Exercices de renforcement / approfondissement

30 Soit un univers Ω et deux événements incompatibles A et B tels que P(A) = 0,3 , P(B) = 0,5.

Calcule P(A∪B), P($\bar{A}$) et P($\bar{B}$).

31 On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être choisies.

1) Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « La carte choisie est une figure »

B : « La carte choisie est un dix ou un neuf »

2) a) Définis par une phrase chacun des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et A∪B

b) Calcule les probabilités P($\bar{A}$) ,P($\bar{B}$) et P(A∪B).

32 On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donne la liste de tous les résultats possibles en notant

P pour Pile et F pour Face (exemple : PPF).

2) Donne la probabilité des événements suivants :

A « le tirage ne comporte que des Piles ».

B « le tirage comporte au moins une fois Face ».

33 On lance un dé à 6 faces. On note P_i la probabilité de sortie de la face marquée *i* . Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont :

$P_1 = 0{,}1$; $P_2 = 0{,}2$; $P_3 = 0{,}3$; $P_4 = 0{,}1$; $P_5 = 0{,}15$.

1) Calcule la probabilité de sortie de la face marquée 6.

2) Calcule la probabilité d'obtenir un nombre pair.

34 Une urne contient 4 boules noires numérotées de 1 à 4 et 3 boules blanches numérotés 1,2 et 3.

1) Calcule la probabilité de tirer une boule noire.
2) Calcule la probabilité de tirer une boule blanche.
3) Calcule la probabilité de tirer une boule numérotée 3.
4) Calcule la probabilité de tirer une boule ayant un numéro pair.
5) Calcule la probabilité de tirer une boule ayant un numéro impair.

35 Un collège compte 240 élèves en première, parmi lesquels 130 sont internes.

Ces élèves étudient chacun une langue.

66 élèves étudient l'anglais, 30 % des élèves l'allemand, dont 40 internes.

25 % des élèves sont des internes qui étudient l'espagnol.

1) Reproduis et complète le tableau suivant :

	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Internes				130
Externes				
Total	66			240

2) Un élève est choisi au hasard parmi les 240 élèves de première.

Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « l'élève étudie l'anglais »

B : « l'élève est externe »

C : « l'élève est externe et étudie l'anglais »

D : « l'élève n'étudie pas l'espagnol »

E : « l'élève est internes et n'étudie pas l'espagnol »

36 120 spectateurs assistent à une séance de cinéma. A l'entrée, on a distribué au hasard à chacun un billet de loterie.

- 3 de ces billets donnent droits à quatre places gratuites
- 6 donnent droit à trois places gratuites
- 8 donnent droit à deux places gratuites
- 42 donnent droit à une place gratuite
- les autres billets ne gagnent rien.

On donnera les réponses sous formes de fractions irréductibles.

1) Calcule la probabilité pour un spectateur :

a) de gagner exactement deux places gratuites ?

b) de ne rien gagner ?

2) a) Détermine la probabilité pour un spectateur de gagner trois ou quatre places gratuites ?

b) Calcule de deux façons différentes la probabilité pour un spectateur de gagner au moins deux places gratuites.

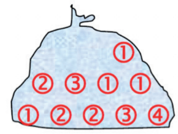
37 Une urne contient dix boules indiscernables. Il y a 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules jaunes. On choisit une boule au hasard. Toutes les boules ont la même probabilité d'être choisies. Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « La boule choisie est jaune »

B : « La boule choisie est noire »

C : « La boule choisie est blanche »

38 Un sac opaque contient les boules représentées ci-contre. Un nombre de points est indiqué sur chacune d'elles. On tire au hasard une boule et on lit le nombre de points.



On considère les évènements suivants :

A : « obtenir au moins 2 points ».

B : « obtenir 1 point ».

1) Calcule la probabilité de l'événement A.

2) a) Quelle est la nature des évènements A et B ?

b) Calcule de deux manières différentes la probabilité de l'événement B.

39 Un sachet contient 2 bonbons à la menthe, 3 à l'orange et 5 au citron. On tire, au hasard, un bonbon du sachet et on définit les événements suivants :

A : « le bonbon est à la menthe » ;

B : « le bonbon est à l'orange » ;

C : « le bonbon est au citron ».

Calcule les probabilités $p(A)$ puis $p(B)$ et $p(C)$.

40 Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et coeur, de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures» : valet, dame, roi.

On tire une carte au hasard dans ce jeu de 32 cartes.

Calcule la probabilité des événements suivants :

A : « La carte tirée est une dame. »

B : « La carte tirée est une figure rouge. »

C : « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

41 Les quatre couleurs d'un jeu de cartes sont : Cœur ; Carreau ; Trèfle ; Pique.
Le joueur A pioche dans un jeu de 32 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As). Le joueur B pioche dans un jeu de 52 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As).
Chaque joueur tire une carte au hasard.

1) Calcule la probabilité qu'a chaque joueur de tirer le 5 de Carreau.

2) Dis si les joueurs ont la même probabilité de tirer un cœur. Justifie ta réponse.

3) Dis, des deux joueurs, lequel a la plus grande probabilité de tirer une dame. Justifie ta réponse.

42 On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un de ces dés est vert et l'autre et rouge.

Dé rouge.

Dé vert	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)				
2						
3				(3;4)		
4			(4;3)			
5						
6						

On lance ces deux dés.
On note d'abord le nombre sorti sur le dé vert, puis sur le dé rouge.
Par exemple, (2 ; 1) désigne la sortie du 2 vert et du 1 rouge.

1) Recopie et complète le tableau ci-contre.

2) Détermine la probabilité de chaque issue.

3) Calcule la probabilité d'obtenir les mêmes numéros sur les deux dés.

4) Calcule la probabilité que la somme des numéros soit strictement supérieure à 7.

43 Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu. Gwladys réussit sa première balle de service dans 65 % des cas. Quand elle échoue, elle réussit la seconde dans 80 % des cas.

1) Calcule la probabilité pour qu'elle commette une double faute (c'est-à-dire qu'elle échoue deux fois de suite) ?

2) Calcule la probabilité pour qu'elle échoue une seule fois au cours des deux lancers.

44 Dans une urne, il y a cinq boules rouges (R), deux boules bleues (B) et une boule verte (V), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules. On veut déterminer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

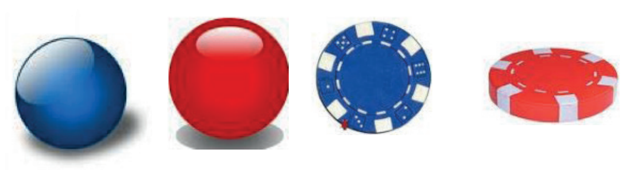
1) Soit l'issue (R, R) : la première boule tirée est rouge et la deuxième boule tirée est rouge. Détermine toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.

2) a) Calcule la probabilité de chaque issue.

b) Déduis-en la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

45 Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux bleues « B » et trois rouges « R ».

On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est bleu et contient un jeton bleu « b » et trois jetons rouges « r », l'autre est rouge et contient deux jetons bleus « b » et deux jetons rouge « r ».



On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

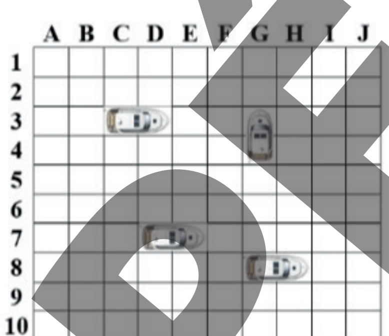
1) Détermine les issues possibles.

2) Calcule la probabilité de chacune de ses issues.

3) Calcule la probabilité de l'événement A :

« la boule et le jeton extraits sont de la même couleur »

46 Sur cette grille de bataille navale, un élève a placé quatre bateaux. Lors du premier tir, son adversaire atteint au hasard l'une des cases de la grille.



Calcule la probabilité :

1) qu'un bateau soit touché.

2) qu'une case voisine (par un côté ou un sommet) d'un bateau soit touchée.

3) que ni un bateau, ni une case voisine ne soit atteinte.

47 Au stand d'une fête foraine, un jeu consiste à tirer au hasard un billet de loterie dans un sac contenant exactement 180 billets.

4 de ces billets permettent de gagner un lecteur MP3.

12 permettent de gagner une grosse peluche.

36 permettent de gagner une petite peluche.

68 permettent de gagner un porte-clés.

Les autres billets sont des billets perdants.

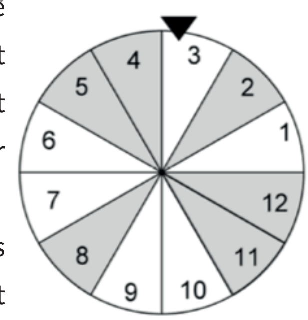
(On donnera les résultats sous la forme d'une fraction la plus simple possible).

1) Calcule la probabilité pour un participant de gagner un lecteur MP3.

2) Calcule la probabilité pour un participant de gagner une peluche (grande ou petite).

3) Calcule la probabilité pour un participant de ne rien gagner.

48 Un jeu suivant consiste à faire tourner la roue et à considérer le nombre et la couleur de la case sur laquelle elle s'arrête.



On suppose que les secteurs angulaires ont même aires.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le nombre obtenu est 6 »

B : « on obtient une case grise »

C : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 8 »

D : « le nombre obtenu est pair sur une case grise »

E : « le nombre obtenu est impair et la case est blanche »

49 On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

Calcule la probabilité d'apparition de chaque face.

Calcule la probabilité d'obtenir un nombre impair.

50 Un sac contient trois jetons bleus, deux jetons jaunes et un rouge.

1) On tire au hasard un jeton et on observe sa couleur. On le remet dans le sac, puis on tire au hasard un jeton du sac et on observe sa couleur.

a) Détermine les issues possibles de cette expérience aléatoire.

b) Calcule la probabilité de tirer deux jetons d'une même couleur.

2) Reprendre les questions précédentes pour l'expérience suivante :

- on tire au hasard un jeton du sac et on observe sa couleur
- on ne le remet pas dans le sac, puis on tire au hasard un autre jeton du sac et on observe sa couleur.

51 Un dé cubique a été truqué. En lançant un grand nombre de fois, on estime la probabilité d'obtenir chaque face. Voici les estimations.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,05	0,1		0,2	0,25	0,3

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir 3 »

B : « obtenir 4 ou plus »

2) Que pensez-vous de l'affirmation d'une élève :

« il y a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair »

52 Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué. La probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{2}{5}$ tandis que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le dé tombe sur le 3 ou le 6 »

F : « le dé tombe sur un numéro pair »

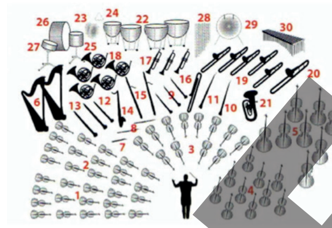
G : « le dé tombe sur un numéro impair »

E : « le dé tombe sur un numéro supérieur ou égal à 3 »

F : « le dé tombe sur le numéro 7 »

3) Calculer la probabilité des événements (E ou F) et (E et F)

53 Les documents ci-dessous donnent la composition d'un orchestre symphonique.



Les cordes
1. Les premiers violons
2. Les seconds violons
3. Les altos
4. Les violoncelles
5. Les contrebasses
6. Les harpes

Les bois
7. La flûte « piccolo »
8. Les flûtes traversières
9. Les hautbois
10. Le hautbois d'amour
11. Le cor anglais
12. La clarinette
13. Les clarinettes en *si* ou en *la*
14. La clarinette basse
15. Les bassons
16. Le contrebasson

Les cuivres
17. Les trompettes
18. Les cors
19. Les trombones
20. Le trombone basse
21. Le tuba

Les percussions
22. Les timbales
23. Les cymbales
24. Le triangle
25. Le tambour
26. La grosse caisse
27. La caisse claire
28. Les cloches tubulaires
29. Le gong
30. Le xylophone

On croise un musicien de cet orchestre.

1) Calcule la probabilité qu'il joue du xylophone.

2) Calcule la probabilité qu'il joue de la flûte traversière.

3) Calcule la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes.

54 A bord d'un bateau de croisière de passage à Tahiti, il y avait 4000 personnes.

Chaque personne à bord du bateau est soit un touriste soit un membre de l'équipage.

32,5 % des personnes sont des touristes hommes. Aucun des 320 enfants n'est un membre de l'équipage.

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Hommes	Femmes	Enfants	Total
Touristes				3100
Membres de l'équipage				
Total	1740			

2) On choisit une personne au hasard.

a) Dis si l'on a plus d'une chance sur deux que ce soit un homme. Justifie ta réponse.

b) Calcule la probabilité que cette personne fasse partie des membres de l'équipage.

c) Calcule la probabilité que cette personne ne soit pas une femme touriste.

55 Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises.

On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur. Une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :

C l'événement « l'article est conforme aux normes » ;

T l'événement « l'article est accepté par le test ».

$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.

1) Complète le tableau à double entrée ci-dessous :

	C	$\overline{C}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			1000

2) a) Traduis par une phrase, l'évènement « T et C »

b) Calcule P (T ∩ C).

c) Calcule P (T ∪ C).

56 En France, les courses de chevaux étant populaires, des paris sont organisés sur les résultats. Il est habituel de parier sur les trois premiers chevaux arrivés dans l'ordre (tiercé dans l'ordre) ou dans le désordre (tiercé dans le désordre).

Une course est organisée à laquelle participent 12 chevaux. Tous les chevaux ont la même chance d'arriver. Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible. On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo.

1) Justifie que le nombre d'arrivées possibles des 12 chevaux est 1320

2) Gabriel a joué un seul ticket et a parié sur trois chevaux dans l'ordre.

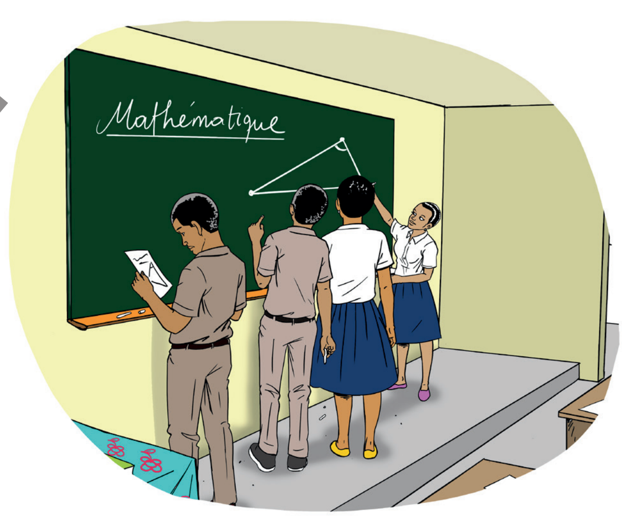
Calcule la probabilité que le ticket de Gabriel soit gagnant.

3. Justifie que la probabilité que le ticket de Gabriel soit gagnant dans le désordre est : $\frac{5}{1320}$

6. 4) Le cheval préféré de Gabriel s'appelle "rapide".

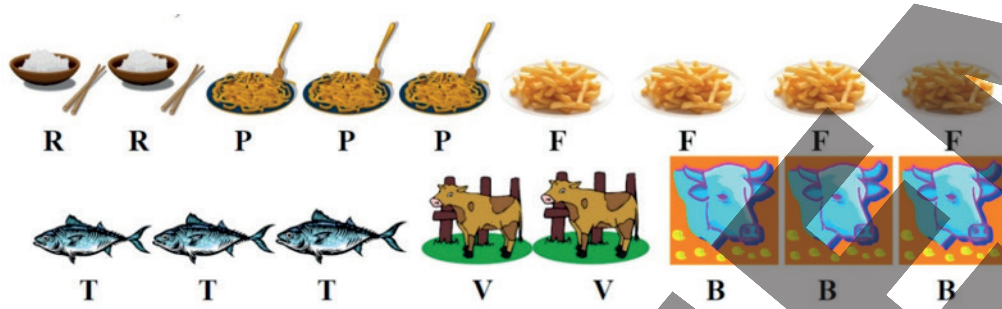
7. Calcule la probabilité qu'il arrive dans le tiercé de tête.

8. 5) Pour célébrer la fête de la liberté, Gabriel est certain que " rapide " sera premier (et il arrive premier). Calcule la probabilité qu'il joue le tiercé gagnant (dans l'ordre).



Situations complexe

57 A bord d'un bateau, le tiroir des féculents contient deux sachets de riz, trois sachets de pâtes et quatre sachets de frites, et le tiroir des protéines contient trois boites de thon, deux boites de veau et une boîte de viande de bœuf



Pour composer son repas, un matelot prend d'abord un sachet au hasard dans le tiroir des féculents puis, toujours au hasard, une boîte dans le tiroir des protéines.
Un menu est composé d'un plat de féculent et d'un plat de protéines. Un marin à bord du bateau exprime son désir ne pas avoir au menu, ni du riz, ni du veau. Pour lui, il aura dans ce cas, au moins une chance sur deux d'avoir un menu souhaité.
A l'aide de tes connaissances relatives aux Probabilités, dis si le marin a eu raison dans son affirmation en justifiant ta réponse.

58 Une usine de la place fabrique des ordinateurs portables de marque à un coût de 200 000 F CFA l'unité.
Un mauvais réglage du technicien sur la machine de fabrication a occasionné deux types de défauts noté A et B.
Un contrôle effectué, sur demande du chef d'entreprise a donné les informations suivantes :

- 8% des ordinateurs portables possèdent uniquement le défaut A
- 5% des ordinateurs portables possèdent uniquement le défaut B
- 2% des ordinateurs portables possèdent les deux défauts.

Avant la commercialisation des ordinateurs portables, au prix unitaire de 200 000 F CFA, ceux-ci sont testés. Ceux qui présentent des défauts sont réparés. Corriger le défaut A coûte à l'entreprise 50 000 F CFA et corriger le défaut B coûte 100 000 F CFA. Avant de constater la panne, 350 ordinateurs portables avaient été déjà produit. Le chef d'entreprise est tout de même optimiste est se dit avoir un bénéfice de plus de 100 millions de Franc CFA sur la vente de ces 10 millions ordinateurs portables.
À l'aide de tes connaissances relatives aux Probabilités, calcule le bénéfice que chef d'entreprise peut espérer de la vente d'un d'ordinateur portable pris au hasard et dis s'il a raison d'afficher son optimisme.

6 DÉRIVATION

Si la vitesse instantanée d'un véhicule est exprimée en fonction du temps alors l'accélération instantanée est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Commentaire de la Leçon

C'est Jean le Rond d'Alembert qui introduisit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Mais à cette époque, la notion de limite pose problème.

Ainsi, la notion de dérivée est une application de la notion de continuité et de limite. Elle est un outil fondamental dans l'étude et la représentation graphique des fonctions. La dérivation est nouvelle en classe de première, l'enseignant devra l'aborder avec délicatesse en ayant à l'esprit que :

La justification de la dérivabilité sur un intervalle, le calcul des dérivées de la puissance d'une fonction dérivable sont hors programme. Pour la résolution des problèmes d'optimisation, des indications seront données pour obtenir la fonction à étudier.

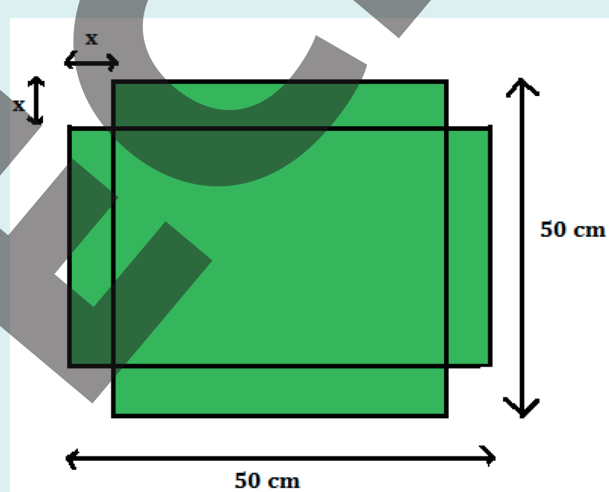
Jean le Rond d'Alembert
1717- 1783

La dérivation intervient dans plusieurs disciplines et dans la vie courante : physique, économie, médecine, science et pour résoudre de nombreux problèmes d'optimisation.

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** la définition du nombre dérive en un point d'une fonction ; la définition de la fonction dérivée sur un intervalle ouvert ; les fonctions dérivées des fonctions de référence ; la propriété de la fonction dérivable sur un intervalle ouvert ; la propriété de la dérivabilité et continuité en un point ; les propriétés sur les opérations des fonctions dérivables (somme, produit, inverse, quotient) ; la propriété de la fonction dérivée des fonctions du type $g(x) = f(a\,x + b)$ où f est une fonction de référence ; les propriétés sur la dérivée et sens de variation ; la propriété sur l'extremum relatif d'une fonction.
- **Noter** le nombre dérivé d'une fonction en un point ; la dérivée d'une fonction sur un intervalle ouvert.
- **Déterminer** une équation de la tangente à une courbe en un point donné ; le sens de variation d'une fonction sur un intervalle donné en utilisant le signe de sa dérivée ; un extremum d'une fonction en utilisant sa dérivée ; la fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle ouvert donné ; des fonctions dérivées en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées des fonctions : $x \to a\,x + b$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to x^n$ (n∈ N*) ; $x \to \frac{1}{x}$; $x \to \cos x$; $x \to \sin x$; $x \to \tan x$; $x \to \frac{1}{x^n}$ (n∈ N*).
- **Calculer** le nombre dérivé d'une fonction en un point.
- **Construire** la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction sans utiliser une équation de cette tangente.
- **Interpréter** graphiquement le nombre dérivé en un point.
- **Traiter une situation** faisant appel à la dérivation.

Situation d'Apprentissage



Les élèves de la classe veulent confectionner des poubelles pour le lycée, un donateur leur fait un don de dix plaques de métal de 50 cm de côté.

Pour fabriquer ces poubelles sans couvercle, le ferronnier enlève à chaque coin de la plaque un carré de côté x (cm) et il relève les bords par pliage.

La boîte obtenue est un pavé droit (sans toit).Un élève d'une classe de terminale leur dit qu'en utilisant les fonctions dérivées on peut choisir x de façon adéquate pour que le volume de la poubelle soit maximal.

Avec l'aide du professeur de mathématiques, ils décident de s'informer pour déterminer la valeur de x qui convient.

Activité 1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 + 1$.

1. Justifie que la fonction f est continue en 2 et en 5.
2. Exprime en fonction de x les quotients suivants : $t_2 = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $t_5 = \dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$.
3. Déduis de 1) les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$

Récapitulons

- Les quotients $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$ sont appelés taux de variation de f respectivement en 2 et en 5.
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ existe et est finie, cette limite est le nombre dérivé de f en 2 et on écrit :

  $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$ existe et est finie, cette limite est le nombre dérivé de f en 5 et on écrit :

  $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$

Exercice de fixation

1 On admet que toutes les limites de cet exercice existent et sont finies.

Associe chaque lettre au chiffre correspondant si possible, on présentera le résultat sous forme de couple, exemple : (F, 7)

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x+a}$ est égale à	A
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ est égale à	B
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ est égale à	C
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est égale à	D
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(a)+h(x)}{x-a}$ est égale à	E

1	$g'(a)$
2	$f'(a)$
3	$h'(a)$

Activité 2 Interprétation graphique du nombre dérivé

On considère le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

1. Représente la courbe représentative (C) de f dans le repère orthogonal (O, I, J)
2. Place le point A(2, $f(2)$)
3. Soit M(x, $f(x)$) un point quelconque de (C) distinct de A

a) Place M et trace la droite (AM)

b) Justifie que $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ est le coefficient directeur de la droite (AM)

c) Trace la droite (AM) dans les cas suivants : $x = 3$; $x = 2{,}5$; $x = 2{,}3$; $x = 2{,}2$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}7$; $x = 1{,}9$

d) Détermine le coefficient directeur de la droite (AM) dans les cas suivants : $x = 3$; $x = 2{,}5$; $x = 2{,}3$; $x = 2{,}2$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}7$; $x = 1{,}9$

Récapitulons

- Lorsque x tend vers 2, les droites (AM) tendent vers une « droite limite » : cette droite est la tangente en A à la courbe (C) ou la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
- La tangente (T) en A à la courbe (C) a pour coefficient directeur $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
- $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) en A à la courbe (C) ou le coefficient directeur de la tangente (T) en A à la courbe (C).
- Donc (T) a pour équation : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

Exercice de fixation

2 Soient (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal (O, I, J) et (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse a, dans chaque cas, note $f'(a)$ dans ton cahier.

Exemple : T_8 – B.

Équation de la tangente au point d'abscisse a	$f'(a)$		
	A	B	C
$(T_1) : y = 4x - 5$	1	4	–5
$(T_2) : y = -8x - 14$	14	–14	–8
$(T_3) : y = x - 1$	1	–1	0
$(T_4) : y = \dfrac{17}{8}x - 5$	17	$\dfrac{17}{8}$	–5

Activité 3 Fonctions dérivées de fonctions élémentaires

1. Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 + 1$ et a un réel quelconque. On suppose que f est dérivable en a.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$;

b) Déduis $f'(a)$ en fonction de a ;

c) Donne l'expression de $f'(x)$ en fonction de x pour tout réel x en lequel f est dérivable.

2. Soient f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 + 1$ et a un réel quelconque.
On suppose que f est dérivable en a.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$;

b) Déduis $f'(a)$ en fonction de a ;

c) Donne l'expression de $f'(x)$ en fonction de x pour tout réel x en lequel f est dérivable.

3. Soient g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x}$ et a un réel quelconque.
On suppose que g est dérivable en a.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$;

b) Déduis $g'(a)$ en fonction de a ;

c)Donne l'expression de $g'(x)$ en fonction de x pour tout réel x en lequel g est dérivable.

4. Soient h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$ et a un réel quelconque.
On suppose que h est dérivable en a.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$;

b) Déduis $h'(a)$ en fonction de a ;

c) Donne l'expression de $h'(x)$ en fonction de x pour tout réel x en lequel h est dérivable.

Récapitulons

- La fonction qui à tout x associe $f'(x)$ est la fonction dérivée de f, on la note f'.
- La fonction qui à tout x associe $g'(x)$ est la fonction dérivée de g, on la note g'.
- La fonction qui à tout x associe $h'(x)$ est la fonction dérivée de h, on la note h'.

Exercice de fixation

3 On propose les groupes de mots suivants : la fonction dérivée de f ; le nombre dérivé de f ; l'image de f.
Recopie la définition suivante en remplaçant les pointillés par le groupe de mots qui convient.
Si f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on dit que f est dérivable sur I et
la fonction qui à tout élément x de I associe .... en x est appelée........................ sur I et est notée f'.

Activité 4 Dérivabilité et continuité d'une fonction en un point

Soit a un nombre réel et f une fonction dérivable en a.
Justifie que pour tout x élément de l'ensemble de définition de f et différent de a, on a :

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a).$$

1. Justifie que : $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a) = 0$.

2. Déduis $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et tire une conclusion.

Récapitulons

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Exercice de fixation

4 On propose les mots suivants : définie ; continue ; dérivable.
Recopie la propriété suivante en remplaçant les pointillés par le mot qui convient.
Si f est …….. en a alors elle est ……….. en a.

Activité 5 Opération sur les fonctions dérivées.

Soit a un nombre réel, soit f et g deux fonctions dérivables en a et soit x un réel différent de a en lequel f et g sont définies

1.

a) Justifie que : $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}+\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$.

b) Déduis que : $(f+g)'(a)=f\ (a)+g\ (a)$.

2.

a) Justifie que : $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\times g(x)+\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\times f(a)$.

b) Déduis que : $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

3. On suppose que $g(a) \neq 0$.

a)Justifie que : $\dfrac{\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)-\left(\dfrac{1}{g}\right)(a)}{x-a}=-\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\dfrac{1}{g(x)g(a)}$.

b) Déduis que : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=\dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.

4. n est un entier naturel strictement supérieur à 1

a) Sachant que pour tous réels x et a et pour tout entier naturel n, on a :
$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + ax^{n-2}\ x + a^{n-1})$, Justifie que :

$$\frac{f^n(x)-f^n(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\left[f^{n-1}(x)+f(a)+f^{n-2}(x)+\ldots+f^{n-2}(a)f(x)+f^{n-1}(a)\right].$$

b) Déduis que : $(f^n)'(x)(a) = nf'(a)f^{n-1}(a)$.

Récapitulons

- Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.
- Les fonctions $f+g$ et fg et sont dérivables sur I et on a : $(f+g)'=f'+g'$ et $(fg)'=f'g+fg'$.
- Si de plus g ne s'annule en aucun point de I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{g}\right)=\dfrac{-g'}{g^2}$.
- Si n est un entier naturel strictement supérieur à 1 alors f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)'=nf'f^{n-1}$.

Exercice de fixation

5 Associe chaque lettre au chiffre correspondant, on présentera le résultat sous forme de couple, exemple : (M, 8).

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$.

$(f+g)' =$	A
$(fg)' =$	B
$(\lambda f)' =$	C
$(f^n)' =$	D
$\left(\frac{f}{g}\right)' =$	E
$\left(\frac{1}{g}\right)' =$	F

1	$nf' f^{n-1}$
2	$f' + g'$
3	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
4	$\frac{-g'}{g^2}$
5	$\lambda f'$
6	$f'g + fg'$

Activité 6 Dérivée et sens de variation

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

1. Détermine la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et étudie son signe suivant les valeurs de x.

2.

a) Justifie que pour x et y éléments de $]-\infty ; 0[$, si $x \leq y$, alors $x^2 \geq y^2$.

b) Déduis le sens de variation de f sur $]-\infty ; 0[$.

3.

a) Justifie que pour x et y éléments de $]0 ; +\infty[$, si $x \leq y$, alors $x^2 \leq y^2$.

b) Déduis le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Récapitulons

- La dérivée de f est négative sur $]-\infty ; 0[$ et f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
- La dérivée de f est positive sur $]0 ; +\infty[$ et f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

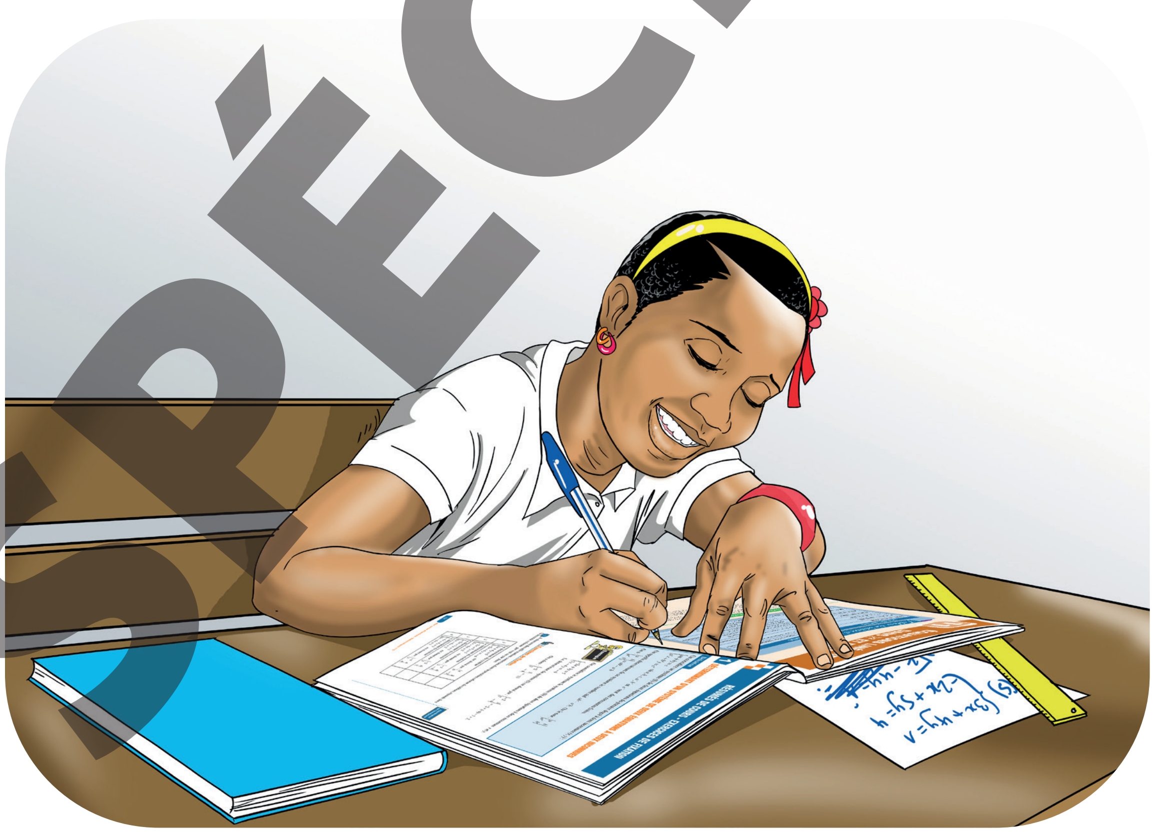
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on démontre que :

- f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I ;
- f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I ;
- si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
- si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exercice de fixation

6 Pour chacune des affirmations ci-dessous, écris le numéro suivi de V, si l'affirmation est vraie ou de F si elle est fausse.

1	si f' est strictement positive sur K, alors f est strictement décroissante sur K.
2	si la fonction f est décroissante sur K, alors f' est négative sur K.
3	si f' est nulle sur K, alors f est constante sur K.
4	si f' est strictement négative sur K, alors f est croissante sur K.
5	si f' est strictement positive sur K, alors f est décroissante sur K.
6	si f est constante sur K, alors f' est strictement positive sur K.
7	la fonction f est croissante sur K si et seulement si f'est positive sur K.
8	si la fonction f est croissante sur K, alors f'est positive sur K.



1. NOMBRE DÉRIVÉ

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.

- Pour tout élément x de K distinct de a, le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé taux de variation (ou d'accroissement) de f en a.
- On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a.
- Cette limite finie est appelée le nombre dérivé de f en a, on la note $f'(a)$ et on a : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Remarques

Le taux d'accroissement de f en a s'écrit aussi $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ donc, $f'(a)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple d'application

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\times\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

donc $f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 3

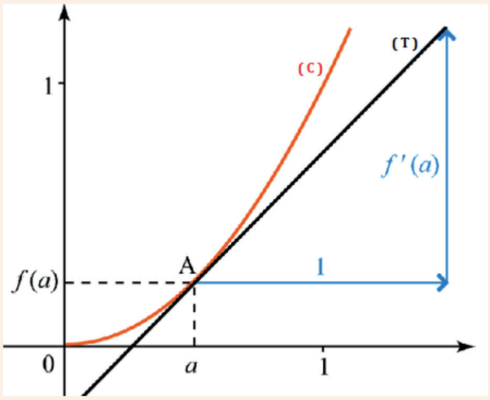
2. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable en a.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère.

- La droite (T) passant par le point A(a, $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente en a à la représentation graphique de f.
- La tangente à la représentation graphique de f au point A(a, $f(a)$), a pour équation : $y = f'(a)(x- a) + f(a)$.



Exemple d'application

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)= \sqrt{x}$ de représentation graphique (C).

Soit (T), la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
On a :

- $f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
- $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)+\sqrt{2}$.
- (T) : $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$.

Pour s'entraîner : Exercice 4

3. FONCTIONS DÉRIVÉES

Définitions

- Une fonction est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout élément de I.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction de I vers $\mathbb{R}$, qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est la fonction dérivée de f sur I, on la note f'.

Pour s'entraîner : Exercice 2

FONCTIONS DÉRIVÉES DE FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Tableau de fonctions dérivées de fonctions élémentaires

Fonction f	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}(x\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$cosx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-sinx$
$sinx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$cosx$

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6

4. DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété

Soit a un nombre réel.
Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Remarques

- la réciproque de cette proposition est fausse.
- En effet la fonction racine carrée est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 7 ; 8 ; 9

5. OPÉRATION SUR LES DÉRIVÉES

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Alors :

1. La fonction $(f+g)$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Si λ est un réel, la fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
4. La fonction f^n, $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.
5. Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{f}{g}$ et $\frac{1}{g}$ sont dérivables sur I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.

Propriété 2

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$;
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle ouvert contenu dans son ensemble de définition ;
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
- La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour s'entraîner : Exercice 10 ; 11 ; 12

6. DÉRIVÉE DE FONCTION DU TYPE : $x \mapsto u(ax+b)$

Propriété

Soit $x \mapsto ax + b$ une fonction affine (a et b sont des nombres réels), soit u une fonction et f la fonction définie par : $f(x) = u(ax + b)$.
Soit x_0 un nombre réel, si u est dérivable en ax_0+b alors f est dérivable en x_0 et on a :
$f'(x_0) = au'(ax_0 + b)$.

Exemple

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
Posons $u(x) = \sqrt{x}$, on a : $f(x) = u(2x + 3)$ et $2 \times 5 + 3 = 13$
u est dérivable en 13 donc f est dérivable en 5

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(5) = 2u'(13) = 2\frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Pour s'entraîner : Exercice 13 ;14

7. FONCTIONS DÉRIVÉES ET SENS DE VARIATION

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I
- f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I
- f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple d'application

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Étude du signe de la fonction dérivée.
  On a : pour tout nombre réel, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ donc :
  - ✓ sur $]-\infty\,;0[$ f' est positive
  - ✓ sur $]\,0\,;2[$ f'est négative
  - ✓ sur $]2, +\infty\,[$ f'est positive
- Ainsi :
  - ✓ f est croissante sur $]-\infty\,;0[$
  - ✓ f est décroissante sur $]0\,;2[$
  - ✓ f est croissante sur $]2\,;+\infty[$
- On résume les résultats dans un tableau, appelé tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

Pour s'entraîner : Exercice 16 ; 17 ; 18 ; 19

8. EXTREMUMS RELATIFS D'UNE FONCTION

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.
On dit que $f(a)$ est un minimum relatif (respectivement un maximum relatif) de la fonction f sur I si $f(a)$ est la plus petite valeur de f (respectivement la plus grande valeur de f) sur un intervalle ouvert contenu dans I et contenant a.

Remarques

Un maximum relatif ou un minimum relatif est appelé extremum relatif.

Propriété

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.
- Si f' s'annule en a en changeant de signe alors $f(a)$ est un extremum relatif de la fonction f.

Remarques

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I
Si f est dérivable et admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

Exemple d'application

Considérons la fonction de l'exemple précédent

- *2 est un maximum relatif de f sur $\mathbb{R}$*
- *-2 est un minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

Pour s'entraîner : Exercices 20 ; 21 ; 22

QUESTION 1

Comment étudier les variations d'une fonction ?

Méthode

- On précise l'ensemble de dérivabilité et on calcule la dérivée f' de la fonction f.
- On étudie le signe de la fonction dérivée f'.
- On déduit les variations de f à partir de l'étude du signe de f'.

Exercice

Étudie les variations de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+1$

Solution commentée

- f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 1$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
- Signe de la fonction dérivée :
- $\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]-1 ; 1[$, $f'(x) < 0$
- Donc :

f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

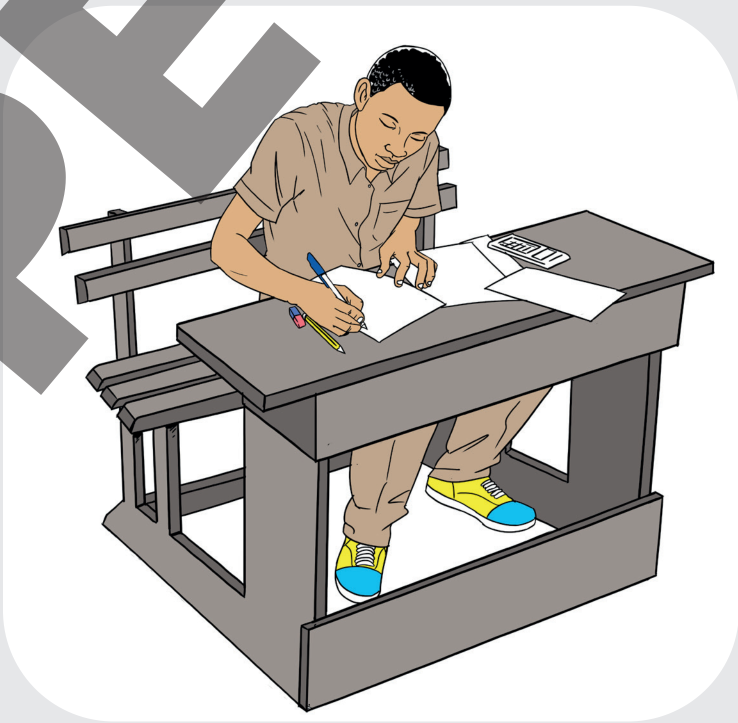
f est strictement décroissante sur $]-1 ; 1[$

Remarques

I et J étant des intervalles, si f' a un signe constant sur $I \cup J$, alors f est monotone sur I puis sur J et non sur $I \cup J$.

Exercice non corrigé

Étudie les variations de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.



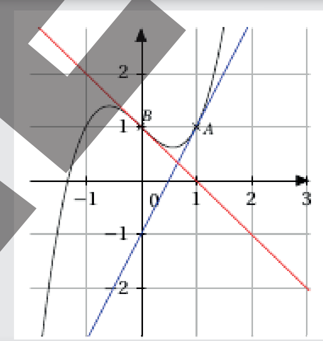
2 QUESTION Comment déterminer graphiquement le nombre dérivé d'une fonction en un point a ?

Méthode

- On repère sur le graphique la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
- On choisit deux points distincts particuliers A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) de cette tangente.
- On calcule le coefficient directeur de cette tangente donné par la formule : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ le nombre dérivé de la fonction en a est le coefficient directeur de la tangent donc $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exercice

Le graphique ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f, détermine $f'(0)$ et $f'(1)$.



Solution commentée

La tangente au point d'abscisse 0 passe par les points de coordonnées (1 ; 0) et (0 ; 1) donc

$f'(0) = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$.

La tangente au point d'abscisse 1 passe par les points de coordonnées (1 ; 1) et (0 ; −1) donc

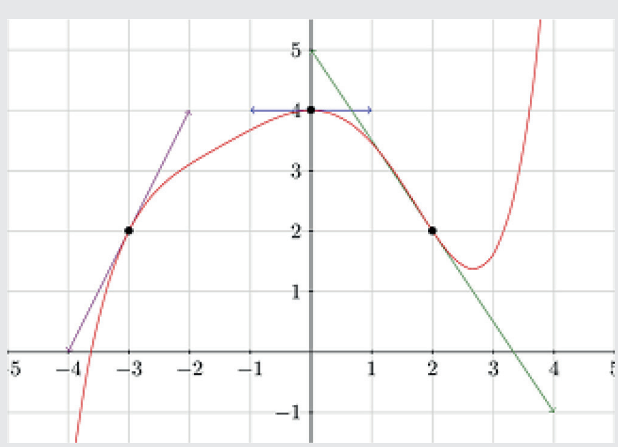
$f'(1) = \frac{1-(-1)}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$.

Remarque

On choisit des points pour lesquels la lecture graphique des coordonnées est facile et évidente.

Exercice non corrigé

Le graphique ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g, détermine $g'(-3)$, $g'(0)$ et $g'(2)$.



Exercices de fixation

Nombre dérivé- fonction dérivée

1 Soit f une fonction définie et dérivable en a et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse a.

Dans chaque cas, donne $f'(a)$.

1. (T) : $y = x + 3$
2. (T) : $y = -5x + 3$
3. (T) : $y = 3$
4. (T) : $y = 8x + 3$

2 Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de l'affirmation suivi de V si elle est vraie ou de F si elle est fausse.

1	Une fonction est dite dérivable sur I si elle est continue en tout élément de I.
2	La fonction dérivée de f sur I, est la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x
3	Une fonction est dite dérivable sur I si elle est définie en tout élément de I.
4	Une fonction est dite dérivable sur I si elle dérivable en tout élément de I.
5	Une fonction est dérivable en un réel si elle est continue en ce réel.

3

1. A l'aide de la définition, étudie la dérivabilité en −1 de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{3}{x}$.
2. Interprète graphiquement le résultat.

4 Dans chaque cas, calcule $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, déduis le nombre dérivé de g en a s'il existe et détermine une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse a.

1. $g(x)=2\sqrt{x}$ et $a = 2$
2. $g(x)=5x^2+2$ et $a = 1$
3. $g(x)=\frac{3}{x}$ et $a = -3$
4. $g(x)=2x+10$ et $a = 0$

Fonctions dérivées des fonctions de référence

5 Associe chaque lettre au chiffre correspondant, on présentera le résultat sous forme de couple, exemple : (M, 14)

fonctions	
a	A
x	B
$ax+b$	C
x^2	D
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	E
$\frac{1}{x}$	F
$\frac{1}{x^n}(x\in\mathbb{N})$	G
$\sqrt{x}$	H
$\cos x$	I
$\sin x$	J

fonctions dérivées	
1	$2x$
2	$\cos x$
3	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
4	0
5	$-\sin x$
6	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
7	a
8	$-\frac{1}{x^2}$
9	1
10	nx^{n-1}

6 Pour chacun des cas ci-dessous, g est dérivable en 2, détermine le nombre dérivé de g en 2 et une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2

1. $g(x)= 5x + 3$ **2.** $g(x)= x^{12}$ **3.** $g(x)= \cos x$

4. $g(x)= \sqrt{x}$ **5.** $g(x)= 6$

Dérivabilité et continuité en un point

7 Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de l'affirmation suivi de V si elle est vraie ou de F si elle est fausse.

1	Toute fonction continue en un réel est dérivable en ce réel
2	Toute fonction définie en un réel est dérivable en ce réel
3	Toute fonction dérivable en un réel est continue en ce réel
4	Toute fonction dérivable en un réel est définie en ce réel
5	Toute fonction continue en un réel n'est pas forcement dérivable en ce réel
06	Une fonction est dérivable en un réel si et seulement si elle est continue en ce réel

8 Soient f et g deux fonctions dérivables en 2 et en 3 telles que :

$$f(2) = -6 \text{ et } f(3) = 5$$
$$g(2) = 1 \text{ et } g(3) = 4$$

Recopie et complète les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$.......................................

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) =$ ....

9 Soit x_0 un nombre réel , recopie et complète la phrase suivante à l'aide des groupes de mots suivants pour obtenir une propriété sur les fonctions dérivées : continue en x_0 ; dérivable en x_0.

Si une fonction est .... alors elle est ....

Opérations sur les fonctions dérivables

10 Dans chaque cas, détermine l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \sin x + \cos x$
2. $f : x \mapsto \sin x \cos x$
3. $f : x \mapsto \sin x - \cos x$
4. $f : x \to \dfrac{\sin x}{\cos x}$

11 Dans chaque cas, détermine l'expression de la dérivée f' de la fonction f

1. $f : x \to \dfrac{2}{x}$
2. $f : x \to -3x^{17} \sin x$
3. $f : x \to 2\sqrt{x} + 4x$
4. $f : x \to \dfrac{2x-1}{5x+4}$

12 Dans chaque cas, détermine l'expression de la dérivée f' de la fonction f

1. $f : x \to 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$
2. $f : x \to 3x^6 + \cos x$
3. $f : x \to 5x^2 + x - 3$

13 Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction f définie par : $f(x) = g(ax + b)$ où g est une fonction.

Dans chaque cas , précise la fonction g et détermine l'expression de la fonction dérivée de f.

1. $f(x) = \sqrt{2x-9}$.
2. $f(x) = \cos(-5x+2)$.
3. $f(x) = \sin\left(-x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. $f(x) = (-3x+5)^3$.

14 Dans chacun des cas suivants, détermine l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \sin(2x+3)\cos(5x-6)$.
2. $f : x \mapsto \cos(5x-6) + \sin(5x-6)$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$.
4. $f : x \mapsto \sqrt{7x+2}$.

Dérivée et sens de variation

15 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]-1 ; 3[$ vérifiant : $\forall x \in]-1 ; 1[\cup]2 ; 3[, f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in]1 ; 2[$, $f'(x) \geq 0$.

Donne le sens de variation de f sur chacun des intervalles suivants : $]-1 ; 1[$; $]2 ; 3[$ et $]1 ; 2[$.

16 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$.

1. Détermine l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calcule la fonction dérivée f' de f.
3. Étudie le signe de f' suivant les valeurs de x
4. Déduis en le sens de variation de f sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty ; -1[$, $]-1 ; 3[$ et $]3 ; +\infty[$.

17 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5}$, on admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine la fonction dérivé f' de f.
2. Étudie le signe de f' et déduis les variations de f.

18 Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^4 - x^3$.

1. Détermine la fonction dérivé f' de f.
2. Étudie le signe de f' et déduis les variations de f.

19 Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x^2 - x + 1$$

1. Détermine la fonction dérivé f' de f.
2. Étudie le signe de f' et déduis les variations de f.

Extremums relatifs d'une fonction

20 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K de $\mathbb{R}$ et a un élément de K

Pour chaque affirmation, écris le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si non.

1	Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum relatif.
2	si $f(a)$ est la plus petite valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans K et contenant a, alors $f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f sur K.
3	$f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f sur K, si $f(a)$ est nulle.
4	$f(a)$ est un maximum relatif de la fonction f sur K, si $f(a)$ est la plus grande valeur de f sur un intervalle ouvert contenu dans K et contenant a.
5	si $f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f sur K alors $f(a)$ est un extremum relatif.

21 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

Justifie que la fonction f admet un extremum relatif en 1,5 puis détermine la nature et la valeur de cet extremum.

x	$-\infty$		-3		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	−2	↗	$+\infty$

22 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

Justifie que la fonction f n'admet pas d'extremum relatif en −5.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		↗		4	↘	$+\infty$

Exercices de renforcement / approfondissement

23 Dans chaque cas, f est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermine l'expression de la dérivée $f'(x)$ après avoir précisé l'ensemble sur lequel f est dérivable dans chaque cas.

1. $f(x) = 5x + (2x + 3)^3$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{-x+1}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{(6x+7)}$.
4. $f(x) = (3x + 4)(x + 5)^2$.
5. $f(x) = (-x + 10)^{20}$.

24 Dans chaque cas, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermine l'expression de la dérivée $f'(x)$ après avoir précisé l'ensemble sur lequel f est dérivable.

1. $f(x) = 2sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. $f(x) = 2\cos x + 1$.
3. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 1$.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

25 Dans chaque cas, on admet que la fonction f est dérivable en a. Calcule $f'(a)$.

1. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x^2+1}$; $a = -1$.
2. $f(x) = \sqrt{2x+7}$; $a = 0$.
3. $f(x) = \sin(2x) - cosx$; $a = -\dfrac{\pi}{6}$.

26 A l'aide de la définition, démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ est dérivable en 0.

27 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

1. Étudie les variations de f.
2. Dresse le tableau de variation de f.
3. Déduis que f admet un maximum relatif et un minimum relatif sur $\mathbb{R}$ que tu préciseras.

28 Étudie le sens de variation de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x - 1)^3$.

29 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dans chaque cas :

1. Dresse le tableau de variation de f.
2. Détermine si cela existe chaque extremum en précisant sa nature et en précisant le nombre où il est atteint.

$f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$

30 Calcule les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tanx}{x}$
3. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos\left(h + \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}}{h}$.

31 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 2 une tangente d'équation : $y = 17x - 18$.

1. Détermine $f'(2)$.
2. Détermine $f(2)$.

32 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

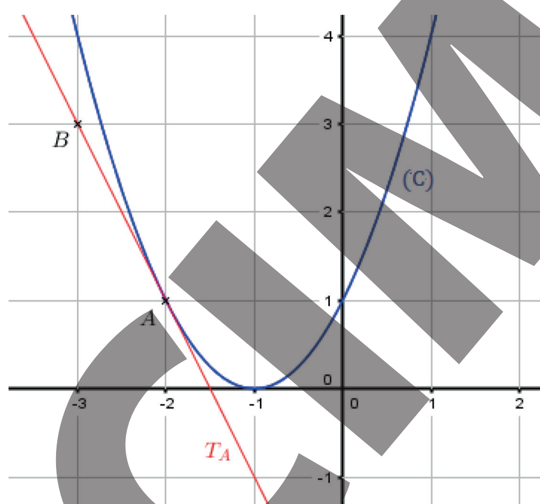
$f(x) = x^3 - 3x + 1$ et de représentation graphique (C), soit (D) la droite d'équation : $-9x + y + 7 = 0$

Détermine les points en lesquels la tangente à la courbe (C) est parallèle à la droite (D).

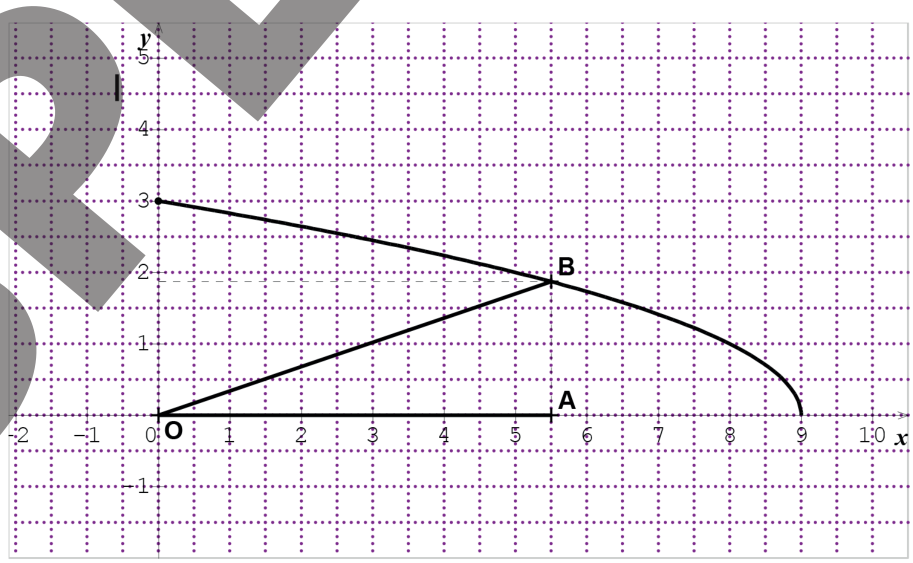
33 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = ax^2 + bx + 1$, a et b sont des nombres réels.
Détermine les réels a et b pour que la courbe représentative de f admette au point A(1 ; 0) une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

34 (C) est la représentation graphique d'une fonction.
La droite (T_A) est la tangente à la courbe (C) au point A. L'axe des abscisses est la tangente à la courbe (C) au d'abscisse -1. (Voir figure).

1. Détermine le nombre dérivé de f en −1.
2. Détermine une équation de la droite (T_A).
3. Déduis le nombre dérivé de f en −2.

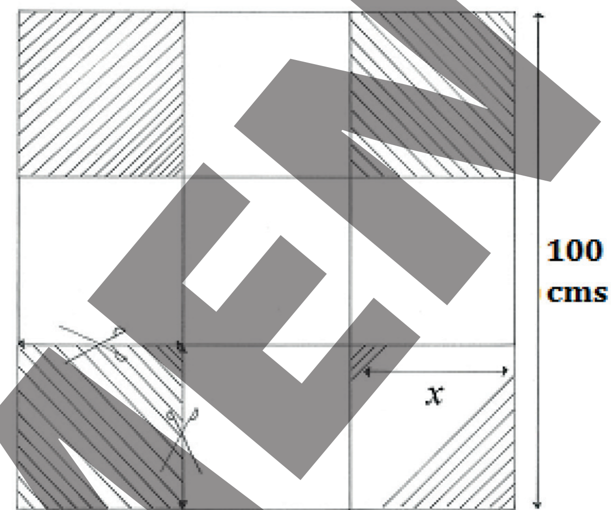


35 On considère le triangle OAB situé dans le demi-plan des x positifs.
Le point B est sur la courbe d'équation $y = \sqrt{9 - x}$.
Détermine les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle OAB soit maximale.



Situations complexes

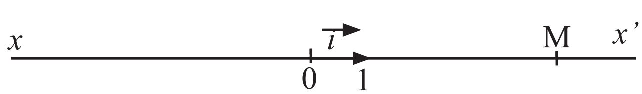
36 Un groupe d'élèves de ta classe de première D veut confectionner une poubelle pour le lycée. Pour cela, un donateur leur fait un don d'une plaque de métal de 100 cm de côté afin de fabriquer cette poubelle sans couvercle. Pour des raisons esthétiques, le ferronnier doit retirer un carré de côté x cm dans chacun des quatre coins de la plaque et ensuite relever les bords.
Les élèves veulent déterminer la valeur de x de telle sorte que la boîte obtenue soit un pavé droit (sans couvercle) de volume maximum. Ayant des difficultés, le groupe te sollicite en tant que meilleur élève de cette classe.
Réponds à leur préoccupation en déterminant la valeur de x et le volume de la boite qui sera ainsi confectionné.



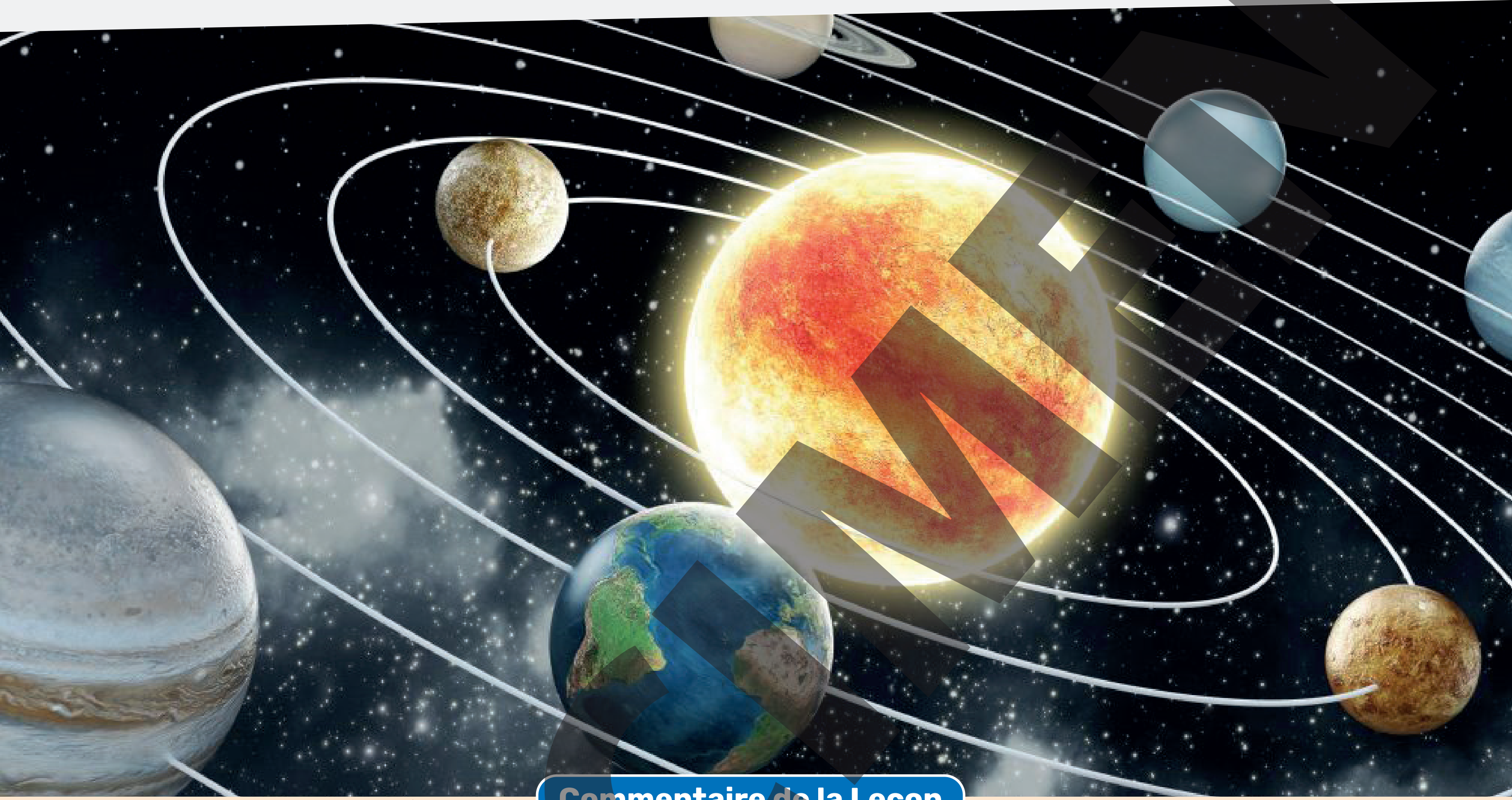
37 Un camion doit effectuer un trajet de 100 km sur une autoroute reliant deux villes. D'après la fiche technique du camion, sa consommation de gasoil est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litre par heure où v est la vitesse moyenne

du camion en km/h.
Le prix du gasoil est de 615 francs CFA le litre et le chauffeur est payé à 5000 francs CFA pour le trajet. L'organisateur du voyage te sollicite afin de déterminer la vitesse moyenne à laquelle, le chauffeur doit rouler afin de minimiser le coût P(v) de la course.
Réponds à sa préoccupation.

38 Lors d'une expérience, un groupe d'élèves étudient le déplacement d'un mobile M sur un axe (xx'). Sa position à tout instant t par rapport à O est donnée par son abscisse P(t) tel que :
$P(t) = -2t^2 + 8t$ où $t \in [0 ; 4]$.
Un membre du groupe affirme que la vitesse de ce mobile sera nulle à un instant donné.
D'autres élèves contestent cette affirmation, membre de ce groupe, donne ton avis en argumentant.



7 BARYCENTRE



Commentaire de la Leçon

Le barycentre est initialement le centre des poids. C'est donc une notion physique et mécanique. Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours, le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane :

"Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré. "

Son principe des moments et des leviers lui permet de construire assez simplement le barycentre O de deux points de masses m_1 et m_2 différentes.

Pour que la balance soit en équilibre, il faut que les moments $m_1.OA$ et $m_2.OB$ soient égaux.

Si par exemple la masse m_1 est 4 fois plus importante que la masse m_2, il faudra que la longueur OA soit 4 fois plus petite que la longueur OB. Cette condition se traduit de nos jours par l'égalité vectorielle $m_1.\overrightarrow{OA} + m_2.\overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

En classe de 2[de] C, l'élève connait déjà :

- la multiplication d'un vecteur par un nombre réel ;
- la traduction de l'alignement de trois points par une égalité vectorielle ;
- le calcul des coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère.

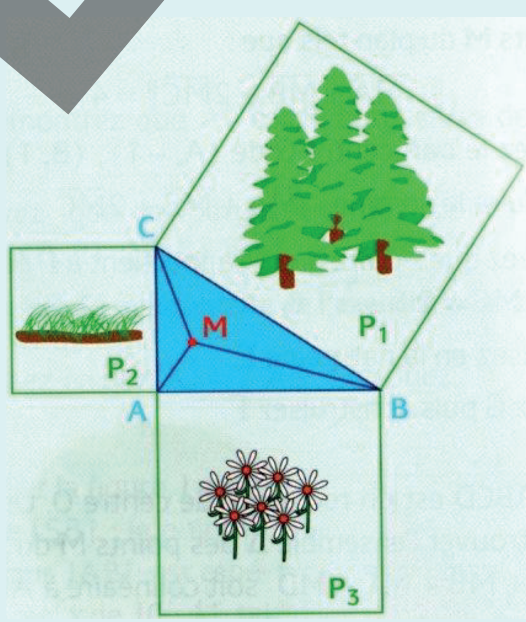
L'enseignant s'appuiera sur ce pré acquis pour aborder la notion de barycentre qui est nouvelle en classe de première D. La notion de barycentre permet en statistique le calcul et la représentation des moyennes pondérées, en probabilité, on le retrouve dans le calcul de l'espérance mathématique etc.

Habiletés et Contenus

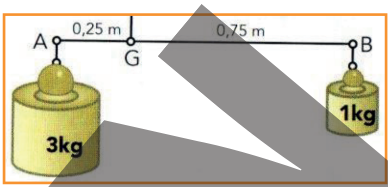
- **Connaître** la définition du barycentre de deux points pondérés ou de trois points pondérés ; de l'isobarycentre de deux points pondérés ou de trois points pondérés ; les propriétés relatives au barycentre de deux points pondérés ou trois points pondérés ; la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment ; la caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.
- **Reconnaitre** le barycentre deux ou trois points pondérés, à partir d'une égalité vectorielle ; l'isobarycentre de deux ou trois points pondérés à partir d'une égalité vectorielle.
- **Traduire** qu'un point est barycentre de deux ou trois points pondérés à partir d'une égalité vectorielle ; qu'un point est isobarycentre de deux ou trois points pondérés à partir d'une égalité vectorielle.
- **Construire** le barycentre de deux ou trois points pondérés.
- **Déterminer** le barycentre de deux ou trois points pondérés ; l'isobarycentre de deux ou trois points pondérés ; un ensemble de points en utilisant la formule de réduction ; des nombres réels α et β pour que G soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), A, B et G étant trois points alignés donnés ; les coordonnées du barycentre de points pondérés donnés dans un repère.
- **Justifier** qu'un point donné est le barycentre de deux ou trois points pondérés en utilisant une égalité vectorielle ; qu'un point donné est le barycentre de trois points pondérés en utilisant les barycentres partiels.
- **Traiter une situation** faisant appel au barycentre.

Situation d'Apprentissage

Trois propriétaires P_1, P_2, P_3 possèdent chacun une parcelle de terrain carrée, jouxtant un lac triangulaire ABC rectangle en A.
Ils décident de délimiter « leurs eaux territoriales » en plaçant une bouée M de telle sorte que les aires des surfaces MAB, MBC, MCA soient proportionnelles aux aires des parcelles adjacentes.
Le propriétaire P_1 sollicite son fils en classe de 1ère D pour l'aider à déterminer la position de la bouée dans le lac. Celui-ci informe son professeur de Mathématiques au téléphone qui lui demande d'utiliser les propriétés du barycentre.



Activité 1 Notion de barycentre



Deux masses m_A et m_B sont suspendues en A et B aux extrémités d'une tige de masse négligeable. La tige est elle-même suspendue en un point G dont la position sur cette tige est réglable. Les physiciens ont montré que l'équilibre de la tige horizontale est réalisé lorsque l'égalité $m_A.GA = m_B.GB$ est vérifiée. (Unité de masse : 1kg, Unité de longueur : 1 m.)

1. a) En remarquant que GA + GB = AB, démontre à l'équilibre : $GA = \frac{m_B}{m_A + m_B} \times AB$.

b) Exprime GB par une formule analogue.

2. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et on modifie les données physiques de la situation, mais en conservant l'équilibre.

a) Recopie et complète le tableau ci-dessous :

m_A	m_B	GA	GB	$\overrightarrow{GA}$	$\overrightarrow{GB}$	$m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB}$
10	10	0.5	0.5	$0.5\vec{i}$		
5	10					
15	5					
10		0.5				

Récapitulons

- Le point G tel que $m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé le barycentre des points A et B pondérés par les masses m_A et m_B.
- On dit que G est le barycentre des points pondérés (A,m_A) et (B,m_B).
- Soit A un point et α un nombre réel. Le couple (A,α) est appelé point pondéré. On dit aussi que A est affecté du coefficient α, ou encore que A est pondéré par α.

Exercice de fixation

1 Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si elle est fausse.

1. Si $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, alors G est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, −2).
2. Si $m\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, alors G est le barycentre des points pondérés (A, m) et (B, −3).
3. Si $GA = 3GB$, alors G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 3).
4. Si $2\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$, alors G est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, −3).
5. Si G est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 5), alors $2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{O}$.

Activité 2 Barycentre de deux points pondérés ou de trois points pondérés

Soit A et B deux points du plan tels que AB = 5 (On pourra choisir 1 cm pour unité de longueur).

1. a) Démontre qu'il existe un unique point G tel que : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

(Indication : On pourra exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$).

a) Construis le point G.

b) Justifie que le vecteur $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ est constant (indépendant du point M).

2. On considère le triangle RST et on se propose de démontrer par deux méthodes qu'il existe un unique point G tel que : $\overrightarrow{GR} + 2\overrightarrow{GS} + 5\overrightarrow{GT} = \vec{0}$.

   a) Exprime $\overrightarrow{RG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$.

   b) Construis le point G.

   c) Démontre qu'il existe un unique point K tel que : $2\overrightarrow{KS} + 5\overrightarrow{KT} = \vec{0}$

   d) Justifie que $\overrightarrow{KG}$ peut s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{KR}$.

Récapitulons

- Pour déterminer l'existence et l'unicité du point G, on exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad (\text{avec } \alpha+\beta \neq 0)$$

Cette égalité prouve que le point G existe et est unique. Elle permet aussi de placer G.

- Le point G ainsi défini est appelé le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) avec α + β ≠ 0.

Exercice de fixation

2 On donne deux points pondérés (A,α) et (B,β).

Pour chacune des valeurs de α et β ci-après :

- Dis si les points pondérés (A,α) et (B,β) admettent un barycentre.
- Si oui, exprime les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) α = 1 et β = − 2 ; b) $\alpha = 3$ et β = 5 ; c) $\alpha = \sqrt{4}$ et β = − 2 ; d) α = 0 et β = − 3 .

Activité 3 Propriété relative au barycentre de deux points pondérés (Propriété fondamentale)

Soit A et B deux points distincts.

1. Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β) avec α + β ≠ 0. Démontre que le point G appartient à la droite (AB).

2. a) Soit M un point de la droite (AB). Justifie qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Déduis-en que M est le barycentre de A et B affectés de coefficients que tu détermineras.

■ **Récapitulons**

- Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$, alors : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
  Donc A, B et G sont alignés.
- $M \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Donc M est barycentre des points (A, 1 − k) et (B, k).

Exercice de fixation

3

1. Démontre que le barycentre G des points pondérés (A, 1− m) et (B, m) appartient à la droite (AB) quand m est un nombre réel.
2. Construis le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B,β) dans chacun des cas suivants :

a) (A, 2) et (B, -3) ;   b) (A, 1) et (B, 4).

Activité 4 Homogénéité du barycentre

Soit A et B deux points distincts. α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Soit G le barycentre de (A,α) et (B,β). Soit k un nombre réel non nul.

a) Démontre que G est le barycentre de (A,$\alpha \times k$) et (B, $\beta \times k$).

b) Énonce la propriété obtenue de la question a).

■ **Récapitulons**

- Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$, alors pour tout nombre réel k non nul, G est barycentre de (A, $k\alpha$) et (B, $k\beta$).
- De même si G est barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors pour tout nombre réel k non nul, G est barycentre de (A, $k\alpha$), (B, $k\beta$) et (C, $k\gamma$).

Exercice de fixation

4 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux sinon.

a) Si G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 3), alors G est le barycentre de (A, 3) et (B, 5).

b) Si G est le barycentre des points pondérés (A, $\frac{2}{5}$) et (B, $-\frac{3}{8}$), alors G est le barycentre de (A, -16) et (B, 15).

c) Si G est le barycentre des points pondérés (A, $\sqrt{a}$) et (B, $\sqrt{b}$), alors G est le barycentre de (A, a) et (B, b).

d) Le barycentre des points pondérés (A, 5555), (B, 3333) et (C, 2222) est le même que le barycentre de (A, 5), (B, 3) et (C, 2).

Activité 5 Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

Soit A et B deux points distincts et k un nombre réel non nul.

Justifie que le barycentre de (A, k) et (B, k) est le même que le barycentre de (A,1) et (B,1).

Récapitulons

Soit G le barycentre de (A,k) et (B,k) et k un nombre réel non nul.

$k\overrightarrow{GA}+k\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow k(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

- G ainsi défini est l'isobarycentre de (A, 1) et (B, 1).
- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ est la caractérisation vectorielle du milieu du segment [AB] .
- De même $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ est la caractérisation vectorielle du centre de gravité du triangle ABC.

Exercice de fixation

5 Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux si elle fausse.

a) Si le point G est isobarycentre des points A, B et C, alors G est le point commun de deux médianes du triangle ABC

b) Si G est isobarycentre des points E et F, alors $\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EG}=\vec{0}$.

c) Si L est le symétrique de K par rapport à J, alors J est le barycentre des points pondérés (L, a) et (K, a), où a est un nombre réel non nul.

d) L'orthocentre d'un triangle ABC est isobarycentre de A, B et C.

Activité 6 Barycentre de deux ou trois points pondérés à partir d'une égalité vectorielle

1. A et B sont deux points donnés ; le point G est défini par l'égalité : $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
   Trouve deux réels α et β tels que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).
2. Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI] .
   a) Justifie que : $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.
   b) Déduis en que J est le barycentre de trois points pondérés à préciser.

Récapitulons

A et B sont deux points, α et β deux réels donnés tels que $\alpha+\beta \neq 0$.

- Le point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B, β).
- À partir d'une égalité vectorielle, on peut déterminer le barycentre de deux ou trois points pondérés.
- Lorsque tous les coefficients des points pondérés sont égaux, ce barycentre est un isobarycentre.

Exercice de fixation

6

1. A et B sont deux points distincts du plan. Pour chacune des relations suivantes, détermine les valeurs de α et β telles que : $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

a) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$; c) $17\overrightarrow{GA} + 17\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; d) $6\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; e) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$; f) $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

2. A, B et C sont trois points non alignés. Pour chacune des relations vectorielles suivantes, détermine, si possible, les valeurs de α , β et γ telles que : $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

a) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; d) $-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Activité 7 Déterminer les nombres réels α et β pour que G soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) A, B et G étant trois points alignés donnés

On donne les points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$.

a) Justifie que les points A, B et C sont alignés.

b) Détermine le nombre réel β tel que le point C soit le barycentre des points (A, 1) et (B, β).

Récapitulons

Les points A, B et G étant alignés :
à partir d'une égalité vectorielle, on peut déterminer des nombres réels α et β tels que G soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).

Exercice de fixation

7 On donne les points A, B et C tels que : $5\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.
Détermine deux nombres réels α et β tels que C soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).

Activité 8 Coordonnées du barycentre de points pondérés dans un repère

Dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points P(-1 ; 3) et Q(2 ; -5). On suppose que le point R est le barycentre de (P, 5) et (Q, -2).

a) Écris l'égalité vectorielle traduisant que R est le barycentre de (P, 5) et (Q, -2).

b) Déduis de cette égalité vectorielle les coordonnées de R.

Récapitulons

- Dans le plan rapporté au repère, $(O,\vec{i},\ \vec{j})$,

Les coordonnées du barycentre G de (A, α) et (B, β), (α + β ≠ 0) sont données par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}.$$

- De même, si G est barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) et α + β + γ ≠ 0, alors dans le plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\ \vec{j})$, les coordonnées de G sont données

par : $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Exercice de fixation

8

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A (-2 ; 3) et B (4 ;4).

a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, 3) et (B,-1).

b) Détermine les coordonnées du point C tel que O soit le barycentre de (A,3), (B, -1) et (C,2).

Activité 9 Associativité du barycentre (barycentre partiel)

1. On considère un triangle ABC. Soit G le barycentre des points pondérés (A, 5) , (B, 3) et (C, 2).

   Soit H le barycentre de A et B affectés des coefficients 5 et 3.

   a) Exprime $5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$.

   b) Déduis-en une relation entre $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$ et justifie que G est barycentre de H et C affectés des coefficients que l'on déterminera.

2. Soit K le barycentre de B et C affectés respectivement des coefficients 3 et 2.

   a) Démontre que G est barycentre de A et K affectés des coefficients que l'on déterminera.

   b) Dis ce que tu peux déduire de G.

Récapitulons

Soit G le barycentre de (A, α) ; (B, β) et (C , γ), (α + β + γ ≠0) avec α = 5, β = 3 et γ = 2.

Si α + β ≠ 0 , soit G_0 le barycentre de (A, α) et (B, β) alors G est barycentre de (G_0, $\alpha+\beta$) et (C, γ) .

Exercice de fixation

9 ABC est un triangle de centre de gravité G. Soit L le milieu du segment [AC] .
Démontre que le point G est le barycentre des points pondérés (B, 1) et (L, 2).

Activité 10 Ensemble de points en utilisant la formule de réduction.

On considère dans le plan, quatre points A, B, C et D.

1. Soit G_1 l'isobarycentre de A, B et C et G_2 le barycentre de (C, 2) et (D, 1).

a) Justifie que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG_1}$ et $2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG_2}$.

b) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

2-a) Justifie que : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

b) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

Récapitulons

Réduction de l'écriture : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ (somme des vecteurs ayant la même origine).

- Si la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est nulle, alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M, donc pour simplifier son écriture, on remplace le point M par un point judicieusement choisi. Par exemple, en remplaçant M par A on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$.
- Si la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est non nulle, alors le système de points (A, α), (B, β) et (C, γ) admet un barycentre noté G, et on a l'égalité vectorielle : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Exercice de fixation

10 ABC est un triangle, G son centre de gravité et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 2) et (C, -1).
Détermine, puis construis l'ensemble des points M du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Barycentre de deux points

Propriété

A et B sont deux points du plan. α et β sont deux nombres réels donnés tels que : $\alpha + \beta \neq 0$. Alors il existe un point G et un seul, tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Ce point G est appelé le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).

Remarques

Ainsi, dire que G est barycentre des points pondérés (A,α), (B,β), signifie deux choses :

- $\alpha + \beta \neq 0$.
- $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3

Notation
Au lieu de parler de points pondérés, on dit aussi que A et B sont affectés de coefficients α et β.

Conséquence

Le barycentre G de (A,α) et (B,β) est aussi le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Cette égalité prouve que, lorsque A et B sont des points distincts, le barycentre G est sur la droite (AB) .

Exemple

- Sur la figure ci-contre :
$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, donc G est le barycentre des deux points pondérés (A, 1) et (B, 2).
- Le point G, milieu de [AB], vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 1).

Alignement de trois points

Propriété

G est un point de la droite (AB) si et seulement si il existe deux réels α et β tel que : $\alpha + \beta \neq 0$ et G soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7 ; 8

Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un réel non nul et G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β), alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A, k \times \alpha)$ et $(B, k \times \beta)$.

Pour s'entraîner : Exercice 11

Cas particulier : Le milieu d'un segment [AB] est l'isobarycentre de A et B.

Réduction de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Propriété fondamentale du barycentre

Soit (A,α) et (B,β) deux points pondérés tels que α+β≠0 et G leur barycentre. Pour tout point M du plan, on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

› Remarque

Lorsque le barycentre G est le milieu de [AB], (A≠B), c'est-à-dire l'isobarycentre de A et B, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$.

Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13 ; 14

2. Barycentre de trois points

Propriété

A, B et C sont trois points, α+β+γ sont trois nombres réels donnés tels que : α+β+γ ≠ 0.

1. Il existe un point G et un seul tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ).

2. Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Conséquence

- G est aussi le barycentre de (A,kα), (B,kβ), (C,kγ) lorsque k est un réel non nul.
- Lorsque les points A, B et C sont affectés du même coefficient non nul α, G est l'isobarycentre de A, B et C et on a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- Lorsque α + β + γ ≠ 0, le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ est constant.

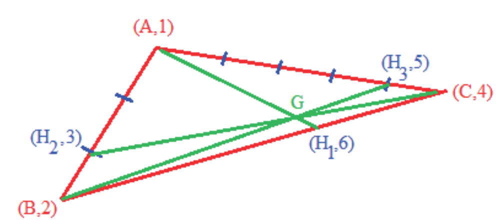
Règle d'associativité du barycentre (barycentre partiel)

Propriété

G est le barycentre de trois points pondérés (A,α), (B,β), (C,γ). Supposons que α + β ≠ 0 et notons H le barycentre de (A,α), (B,β). Alors G est le barycentre de (H , α + β) et (C,γ).

Exemple d'application

Construisons le barycentre G de (A, 1), (B, 2) et (C, 4).



- On note H_1 le barycentre de (B, 2), (C, 4). Donc $\overrightarrow{BH_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
- On affecte H_1 du coefficient 6 et G est le barycentre de (H_1 ; 6) et (A, 1) donc G est tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AH_1}$..
- Mais on peut faire de même avec H_2, barycentre de (A, 1) et (B, 2) ou H_3, barycentre de (A, 1) et (C, 4). Alors G est sur (CH_2) et sur (BH_3) donc les trois droites (AH_1), (CH_2) et (BH_3) sont concourantes en G.
- Plus généralement, ABC est un triangle. G le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ). Si (A, α), (B, β) ainsi que (A, α), (C, γ) et (B, β), (C, γ) ont un barycentre, alors les droites qui joignent un sommet au barycentre des deux autres sont concourantes.

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20

Isobarycentre de trois points

Propriété

Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre des sommets de ce triangle.

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16 ; 17 ; 18

3. Coordonnées du barycentre

Propriété

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, le barycentre G de n points pondérés ($n \geq 2$) a pour abscisse la moyenne pondérée des abscisses de ces points, et pour ordonnée la moyenne pondérée des ordonnées de ces points. Ainsi lorsque G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ), les coordonnées (x_G, y_G) de G sont :

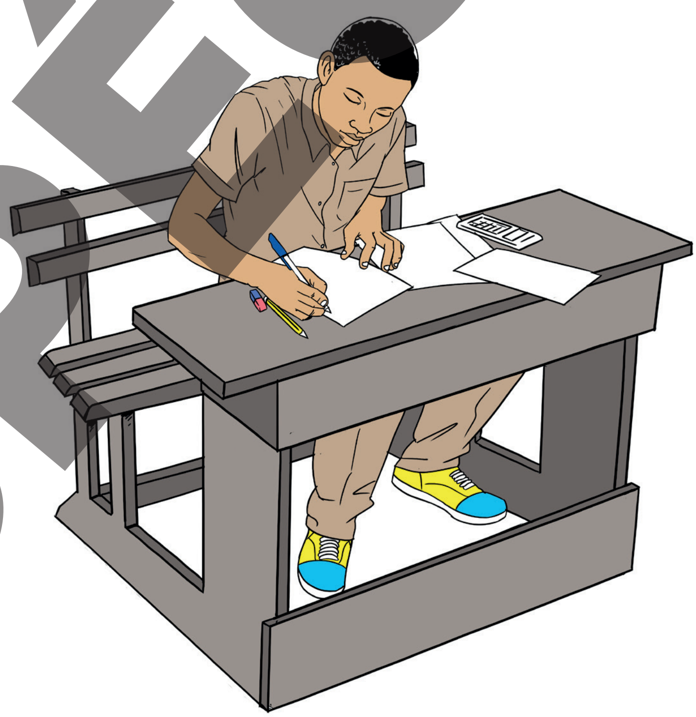
$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Exemple d'application

Le plan est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. A, B et C sont des points du plan tels que : A(-1 ; 3), B(2 ; 4) et C(1 ; -2). Le barycentre G de (A, 1), (B, 2), (C, 3) a pour coordonnées le couple (x_G, y_G) tels que :

$$X_G = \frac{1}{1+2+3}(-1) + \frac{2}{1+2+3}(2) + \frac{3}{1+2+3} = \frac{-1+4+3}{6}, \text{ donc } X_G = 1.$$

$$Y_G = \frac{1}{1+2+3}(3) + \frac{2}{1+2+3}(4) + \frac{3}{1+2+3}(-2) = \frac{3+8-6}{6}, \text{ donc } Y_G = \frac{5}{6}.$$



QUESTION 1

Comment construire le barycentre G de deux points pondérés (A, α) , (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$?

Méthode

- On peut situer le point G à l'aide des relations $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$,
- Ou on peut calculer les coordonnées de G dans un repère.

Exercice

A et B sont deux points distincts du plan. Construis les points G_1 et G_2 définis par :

$G_1 = bar\{(A, 1) ; (B, 2)\}$ et $G_2 = bar\left\{\left(A, \dfrac{1}{2}\right) ; \left(B, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Solution commentée

- On a : $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On utilise la propriété de Thalès dans le triangle pour placer le point G_1 sur la droite (AB).
- En appliquant l'homogénéité du barycentre, on a : $G_2 = bar\{(A,3);(B,-2)\}$. Donc, on a : $\overrightarrow{AG_2} = -2\overrightarrow{AB}$. On place le point G_2 sur la droite (AB).

Exercice non corrigé

A et B sont deux points distincts du plan. Construis les points H et G définis par :

$H = bar\{(A,-3);(B,-2)\}$ et $G_2 = bar\{(A,3\sqrt{2});(B,-\sqrt{2})\}$.

QUESTION 2

Comment construire le barycentre G de trois points pondérés (A, α) , (B, β), (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$?

Méthode

- On peut construire le barycentre H de deux points (A,α) et (B,β) par exemple si $\alpha+\beta \neq 0$, puis on situe le point G, barycentre de (H,$\alpha + \beta$) et (C, γ).
- Ou on peut situer G à l'aide d'une relation telle que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.
- Ou on peut calculer les coordonnées de G dans un repère.

Exercice

A, B et C sont trois points du plan deux à deux distincts. Construis les barycentres suivants, en utilisant l'associativité du barycentre :

a) $I = bar\{(A,1);(B,2),(C,1)\}$; b) $J = bar\{(A,-1);(B,-1),(C,1)\}$.

Solution commentée

a) Soit $K = bar\{(A,1);(C,1)\}$, donc K est le milieu du segment [AC].
D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $I = bar\{(B,2),(K,2)\}$.
Ainsi le point I est le milieu du segment . On réalise une figure pour placer le point I.

b) Soit $L = bar\{(A,-1);(B,-1)\}$, donc L est le milieu du segment [AB].
D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $J = bar\{(L,-2),(C,1)\}$.
Ainsi : $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CL}$. On réalise une figure pour placer le point J.

■ **Exercice non corrigé**

Construis les points M et N, en utilisant l'associativité du barycentre :

a) M = $bar\{(A,1);(B,2),(C,1)\}$; b) N = $bar\{(A,-1);(B,-1),(C,1)\}$.

QUESTION 3

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Méthode

On peut établir que l'un des points est barycentre des deux autres.

■ **Exercice**

ABC est un triangle, on pose : $G = bar\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$.

I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

1. Fais une figure.
2. Démontre que les points I, J et G sont alignés.

■ **Solution commentée**

1. On réalise une figure.
2. On a :

$I = bar\{(A,1);(B,1)\}$ et $J = bar\{(A,1);(C,1)\}$, donc d'après l'homogénéité du barycentre, on a :

$I = bar\{(A,-2);(B,-2)\}$ et $J = bar\{(A,3);(C,3)\}$

D'où : $bar\{(I,-4);(J,6)\} = bar\{(I,-2);(J,3)\}$ or, $G = bar\ (A,-2)\ ;\ (B,-2)\ ;\ (A,3)\ ;\ (C,3)\}$

Donc G : $bar\{(I,-4);(J,6)\} = bar\{(I,-2);(J,3)\}$

D'après l'associativité du barycentre. Ainsi $G \in (IJ)$: ***Conclusion*** : les points I, J et G sont alignés.

■ **Exercice non corrigé**

Soit [AB] un segment de milieu I. α et β deux nombres réels tels que : $\alpha + \beta \neq 0$.

On pose : $G_1 = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G_2 = bar\{(A,\beta);(B,\alpha)\}$.

Démontre que les points G_1 et G_2 sont symétriques par rapport au point I.

QUESTION 4

Comment démontrer que des droites sont concourantes ?

Méthode

À partir d'un point G, barycentre de plusieurs points, on applique la propriété d'associativité pour le définir de plusieurs façons comme barycentre de deux points. On établit ainsi que G appartient à certaines droites qui sont concourantes.

■ **Exercice**

- ABC est un triangle.
- I est le symétrique du milieu du segment [AB] par rapport au point B.
- J est le point tel que : $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
- K est le point tel que : $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Fais une figure.
2. Démontre que les droites (CI), (BJ) et (AK) sont concourantes.

Solution commentée

1. On réalise une figure.
2. On a :

- $I = bar\{(A, 1) ; (B, -3)\} = bar\{(A, 2);(B, -6)\}$
- $J = bar\{(A,2);(C,-3)\}$
- $K = bar\{(B,2);(C,1)\} = bar\{(B, -6) ; (C, -3)\}$

Posons : $G = bar\{(A,2);(B,-6);(C,-3)\}$

En appliquant l'associativité du barycentre partiel, on a successivement :

- $G = bar\{(I,-4);(C,-3)\}$, donc : $G \in (CI)$.
- $G = bar\{(B,-6);(J,-1)\}$, donc : $G \in (BJ)$.
- $G = bar\{(A,2);(K,-9)\}$, donc : $G \in (AK)$.

Ainsi : $G \in (CI) \cap (BJ)(AK)$.

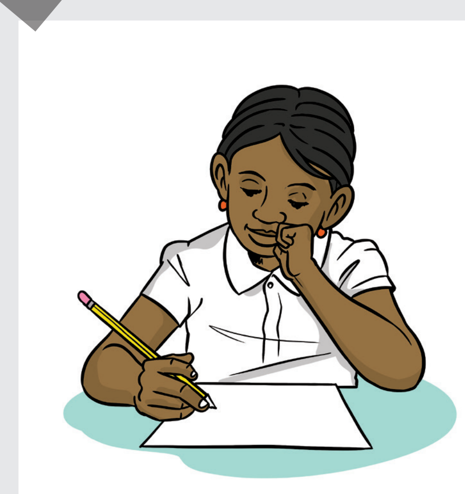
Conclusion : les droites (CI), (BJ) et (AK) sont concourantes.

Exercice non corrigé

- ABC est un triangle.
- I est le milieu du segment [AB].
- J est le point tel que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- K est le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, 1).

1. Fais une figure.

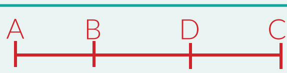
2. Démontre que les droites (CI), (BJ) et (AK) sont concourantes.



Exercices de fixation

Barycentre de deux points

1 Pour chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est exacte.

N°	*Affirmations*	*Réponses*		
		A	**B**	**C**
1	*m* désigne un réel. Le barycentre de (A, 3*m*) et (B, 5*m* -2) est défini lorsque ...	$m \neq 1$	$m \neq 0$	$m \neq \frac{1}{4}$
2	Le barycentre de (A, 2) et (B, 3) est le point G tel que…	$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GB}$	$5\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$
3	G est le barycentre de (A,1) et (B,3). Alors A est le barycentre de…	(B,4) et (G,3)	(B,3) et (G,-4)	(B,3) et (G,4)
4	 Sur cette figure, B est le barycentre de…	(A,1) et (C,2)	(A,1) et (D,1)	(A,2) et (C,1)

Écris le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la bonne réponse.

2 Soit A et B deux points distincts.

1. Justifie qu'il existe un point G qui est barycentre des points (A ; 3) et (B ; 2).
2. Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis construis G.

3 Soit A et B deux points distincts.

a) Justifie qu'il existe un et un seul point G tel que : $-3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

b) Construis le point G.

4 Soit A et B deux points tels que : AB = 6 cm.
Construis (s'il existe), le barycentre de (A, α) et (B, β) dans chacun des cas suivants :
1) $\alpha = 4$ et $\beta = -1$; 2) $\alpha = 2$ et $\beta = 1$; 3) $\alpha = 2$ et $\beta = -2$;
4) $\alpha = \frac{1}{10}$ et $\beta = \frac{1}{5}$.

5 C est le barycentre des points (A,-2) et (B,4).
Définis géométriquement :

a) Le barycentre G des points pondérés (A,-2) et (C,-5).

b) Le barycentre G' des points pondérés (B,4) et (C,-3).

Déterminer des coefficients de points pondérés

6 Les points A et B sont donnés et G est défini par la condition indiquée. Détermine deux nombres réels α et β tels que G soit le barycentre de (A, α) et (B, β) dans chacun des cas suivants.

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{GB}$, 2) $2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, 3) $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

7 Dans chacun des cas suivants, les points A, B et C sont indiqués sur la figure. Dans les deux cas suivants, trouve deux réels α et β tels que :

a) A soit le barycentre de (B, α) et (C, β).

b) B soit le barycentre de (A, α) et (C, β).

c) C soit le barycentre de (A, α) et (B, β).

1.


2.


8 Détermine deux réels α et β tels que, dans la figure suivante, G soit le barycentre des points (A, α) et (B, β).

9 Soit G le barycentre des points pondérés (A,-3) et (B, -2).
Détermine le réel α tel que B soit le barycentre des points pondérés (G, α) et (A, -3).

10 A et B sont deux points donnés ; le point G est défini par l'égalité $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
Trouve deux réels α et β tels que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

Homogénéité du barycentre

11 Soit G le barycentre des points (A,3) et (B,4) et soit G' le barycentre des points (A,24) et (B,32).
Justifie que : G = G'.

Transformer des expressions vectorielles

12

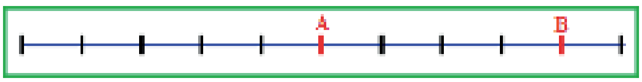
1. Dis s'il existe un nombre réel k et un point G tels que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MG}$.

Détermine le nombre réel k et le point G. Examine le nombre de possibilités.

2. Reprends la consigne 1) dans chacun des cas suivants:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$; b) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$; c) $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$.

13 On donne les segments suivants :



Pour chaque égalité, place le point G qui permet de simplifier les sommes vectorielles :

a) $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\dots\ \overrightarrow{\dots}$

b) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\dots\ \overrightarrow{\dots}$

c) $\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\dots\ \overrightarrow{\dots}$

14 Soit ABC un triangle.

1. En utilisant le milieu I de [AB], démontre qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}$. Place ce point M.

2.
   a) Place G, le barycentre de (A,3) et (B,1).
   b) En utilisant le point G, démontre qu'il existe un unique point N tel que : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$.
   c) Place le point N.

Déterminer des coefficients de points pondérés

15 Pour chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est exacte. Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	si $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, alors G est le barycentre de ...	(A,1) ; (B,-1/3) et (C, 2/3)	(A,6); (B,-3) et (C,2)	(A,5) ; (B,-3) et (C,2)
2	ABCD est un carré de centre O. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ est égal à...	$4\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$	$4\overrightarrow{OM}$

16 Réponds par vrai si la proposition vraie ou par faux sinon.

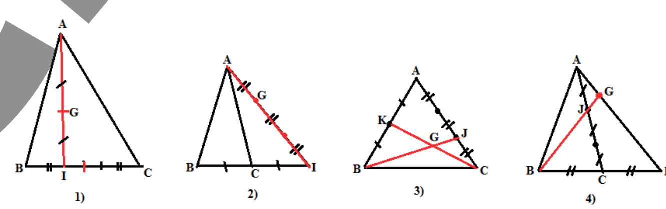
N°	Propositions
1	L'isobarycentre d'un parallélogramme est le point d'intersection de ses diagonales.
2	ABCD est un rectangle. Le barycentre de (A,1) ; (B,-6) ; (C,1) ; (D,1) est à l'extérieur de ce rectangle.
3	Dans l'espace, le barycentre de trois points non alignés appartient toujours au plan défini par ces trois points.
4	ABCD est un rectangle de centre O. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

17 ABC est un triangle et G le point défini par la condition indiquée. Trouve trois réels α, β,γ tels que G soit le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ). (Tu peux utiliser la relation de Chasles pour obtenir une égalité du type : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.)

a) $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GC}$; b) $2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$; d) $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

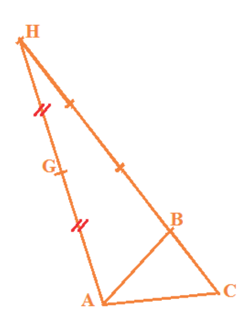
18 Dans chacun des cas suivants, trouve trois réels α, β et γ tel que G soit le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ).



Règle d'associativité du barycentre (barycentre partiel)

19 ABC est un triangle, et G est le barycentre des points pondérés : (A, 1), (B, 4), (C,- 3).

1. Construis le barycentre H de (B,4) et (C,-3).
2. a) Énonce la propriété qui permet d'affirmer que G est l'isobarycentre des points A et H ?
   b) Construis le point G.



20 ABC est un triangle.

Dans chacun des cas suivants, construis (s'il existe) le barycentre G de (A, α), (B, β) et (C, γ). Pour cela, construis d'abord un barycentre de deux points, puis utilise la règle d'associativité.

a) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = -\frac{1}{6}$; b) $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$;

c) $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -3$.

Coordonnées du barycentre

21 Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit deux points A(-2 ; 2) et B(3 ; 2).

Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A, -2) et (B, 3).

22 Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère les points A(-2 ;3), B(-4 ;1) et C(3 ;2).

Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Exprime $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2. Déduis-en les coordonnées du point G.
3. Vérifie le résultat de la question 2 à l'aide d'une figure.

Ensemble des lieux de points

23 A, B et C sont trois points distincts du plan tels que : ABC soit un triangle rectangle isocèle en A.

a) Réduis la somme vectorielle $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en utilisant l'isobarycentre G de A, B, C.

b) Réduis la somme vectorielle $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ en utilisant le barycentre H des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, -1).

c) Soit (Δ), l'ensemble des points M vérifiant : MG = MH. Détermine la nature de (Δ).

d) Représente (Δ) après avoir construit les points G et H.

24 Soit ABC un triangle. Pour tout point M du plan.

Détermine l'ensemble des points M tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

Exercices de renforcement / approfondissement

25 Lors d'un devoir en classe (coefficient 2), Annah obtient 9. À l'interrogation suivante (coefficient 1), elle a 15.

1. Calcule la moyenne pondérée de Annah.
2. Place sur un axe les points D, I et M associés respectivement à la note du devoir, de l'interrogation et de la moyenne.
3. Trouve une relation telle que : $\alpha\overrightarrow{MD} + \beta\overrightarrow{MI} = \vec{0}$.

Dis ce que signifie cette relation.

26 A et B sont deux points distincts.

1. Place les barycentres C de (A, 1), (B, 2) et D de (A, 2), (B, -1).
2. Exprime $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
3. Détermine la position du point M tel que : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

27 ABC est un triangle.

1. Construis les points I et J tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Exprime I, puis J, comme barycentre de A, B et C munis de coefficients que tu préciseras.

28 ABC est un triangle de centre de gravité G. G' est le symétrique de G par rapport au milieu I de [BC].

1. Démontre que G est le milieu de [G'A].
2. Justifie que : $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$.
3. Exprime $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$ puis déduis-en que G' est un barycentre de A, B, C affectés de coefficients que tu préciseras.

29 ABC est un triangle de centre de gravité G. A' est le milieu de [BC] et I est le barycentre de (A, -1), (B, 2) et (C, 2).

1. Justifie que I est le barycentre de (A, -1) et (A', 4).
   a) Exprime $\overrightarrow{A'I}$ en fonction de $\overrightarrow{A'A}$
   b) Construis le point I.
2. Démontre que I est le symétrique du point G par rapport à A'

30 Soit A et B deux points distincts et G le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).

1. Détermine $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis place le point G sur la figure.
2. Danielle prétend qu'elle a découvert une « hyper-méthode » pour placer le barycentre quand les deux coefficients sont positifs : « par exemple, pour placer le barycentre G de (A, 2), (B,3), je fais la somme des coefficients, puis je partage le segment en 5 et je place le point G, de façon à équilibrer les deux poids du côté du point le plus lourd ».

a) Vérifie sur la figure obtenue à la question 1).

b) En utilisant la méthode de Danielle, place le barycentre de (A, 3) et (B, 1).

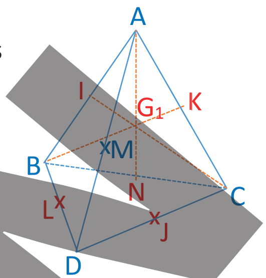
31 Les points A, B et C vérifient : $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}$.

1. Détermine le réel α tel que C soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, 1).
2. Détermine le réel β tel que C soit le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, β).

32 Soit ABC un triangle.

1. Place l'isobarycentre M de A et B, le barycentre N des points pondérés (A, 3), (C, 1) et le barycentre P des points pondérés (B, -3), (C, 1).
2.
   a) Exprime C comme barycentre des points N et A.
   b) Justifie que P est le barycentre des points (B,-3), (N, 4) et (A, -3).
3. Déduis-en que les points P, M et N sont alignés.

33 Soit ABCD un tétraèdre. Soit I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [DC], [AC], [BD], [AD] et [BC].



Soit G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des triangles ABC, BCD, CDA et ABD.

Démontre que les sept droites (IJ), (LK), (MN), (DG_1),(AG_2), (BG_3) et (CG_4) sont concourantes en un point qui est l'isobarycentre de A, B, C et D.

34 ABC est un triangle. On note G, le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2), (C, -1) et D un point du plan tel que ACBD soit un parallélogramme.

1. Construis le point G.
2. Soit A' le barycentre des points pondérés (B, 2) ; et (C, −1).
   a) Démontre que G est le milieu de [AA'].
   b) Justifie que B est le milieu de [A'C].
   c) Justifie que DABA' est un parallélogramme.
   d) Déduis-en que G est le milieu de [BD].

35 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Place les points A(1 ; 3) et B(2 ; 1).
2. Calcule les coordonnées des points M, barycentre de (A, -2), (B, 4) et N, barycentre de (A, 3), (B, -2).
3.
   a) Calcule les coordonnées du milieu I de [AB].
   b) Trouve le réel k tel que $\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MN}$.
   c) Déduis – en deux réels α et β tels que I soit barycentre de (M, α) et (N, β).

36 ABC est un triangle rectangle en A, I est le milieu de [BC], (Γ) est le cercle de centre A passant par I. G est le point diamétralement opposé à I.

1. Justifie que le point G est le barycentre de (A ; 4), (B ; −1) et (C ; −1).
2. Trouve deux réels b et c tels que A est le barycentre de (G ; 2), (B ; b) et (C ; c).
3. Détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

37 [AB] est un segment de longueur 5 cm. On se propose de trouver l'ensemble (Γ) des points M tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$.

1. On pose G, barycentre de (A, 2) et (B, 3).
   Réduis la somme $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$.
2. Déduis-en la nature de (Γ).
3. Construis alors (Γ).

38 ABC est un triangle de centre de gravité G. G' est le symétrique de G par rapport au milieu de [BC].

1. Justifie que G est le milieu de [G'A].
2. Prouve que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$.
3. Exprime $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$ puis déduis-en que G' est un barycentre de A, B, C affectés de coefficients que l'on précisera.

39 ABC est un triangle, I est le barycentre de (A, 2), (B, 1). J celui de (B, 1) et (C, -2) et G le barycentre de (A, 2), (B, 1) , (C, -2). Le but de l'exercice est de localiser G à l'intersection de deux droites.

1. Énonce la propriété qui permet de justifier l'alignement de A, J et G, puis celui de C, I et G.
2. Déduis-en que G est à l'intersection de (AJ) et (CI). Place alors G.
3. Démontre que (BG) et (AC) sont parallèles.

40 PQR est un triangle. A, B et C sont des points tels que : $\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QC}=\frac{6}{7}\overrightarrow{QR}$

Le point K est le barycentre de (P, 2) ; (Q, 1) ; (R, 6).

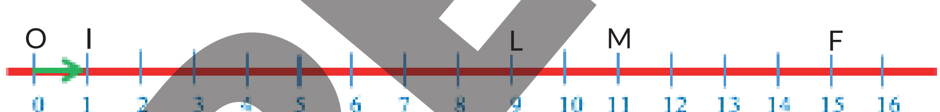
Démontre que les droites (PC), (QB) et (AR) sont concourantes en K.

41 ABC est un triangle. E est le milieu de [AB]. F est le symétrique de A par rapport à C et G le point vérifiant : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Exprime E et F comme barycentre de deux points à préciser.
2. Vérifie que G est barycentre de (B, 1) et (C, 2).
3. Déduis-en que E, F et G sont alignés.

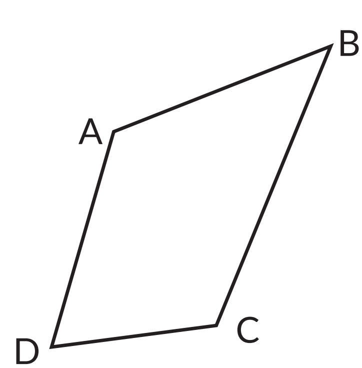
Situations complexes

42 Pour le test de recrutement dans une société de la place, trois matières prévues ont pour coefficients : Langue vivante (coef : 1), Mathématiques (coef : 3) et Français (coef : 2). Mathieu, candidat à ce test, a obtenu 9 en langue vivante, 11 en Mathématiques et 15 en Français.
Flavien, un camarade de quartier de Mathieu en classe de 1ère D, affirme :« si on représente les résultats obtenus par Mathieu sur la droite graduée ci-dessous,



la moyenne des notes obtenues est le barycentre G des points pondérés (L ; 1), (M ; 3) et (F ; 2) »
Mathieu, surpris par cette affirmation de Flavien, veut connaître la moyenne qu'il a obtenue au cours de ce test afin de vérifier l'exactitude de l'affirmation de son camarade Flavien. Pour cela, il sollicite ton aide.

43 Ton papa, propriétaire d'un atelier de fabrication a reçu d'un client la commande d'une plaque métallique homogène ABCD schématisée comme l'indique la figure ci-contre.
Afin d'assurer l'équilibre de la plaque lors de son utilisation, le client exige qu'il y soit marqué le point G, isobarycentre des points A, B, C et D.
Papa, ayant des difficultés pour placer le point G te fait appel.
À l'aide de tes connaissances mathématiques, détermine la position du point G. (Tu justifieras les étapes de ton raisonnement)



8 EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

Commentaire de la Leçon

Depuis l'antiquité, la notion de limite joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, que les mathématiciens parvinrent à en donner une définition rigoureuse. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass a grandement contribué à asseoir cette notion.

En analyse mathématique, la notion de limite décrit l'approximation des valeurs d'une suite lorsque l'indice tend vers l'infini, ou d'une fonction lorsque la variable se rapproche d'un point (éventuellement infini) aux bornes de l'ensemble de définition.

Si une telle limite existe dans l'ensemble d'arrivée, on dit la suite ou la fonction est convergente (au point étudié).

Sous condition d'existence, le calcul des limites est simplifié par la compatibilité avec les opérations arithmétiques élémentaires, mais plusieurs formes indéterminées font obstacle à cette technique calculatoire..... (Extrait de Wikipédia).

La continuité d'une fonction, de limite finie en un point, de limites finies à droite ou à gauche en un point sont connues. Ici, il s'agit de procéder à une extension de ces notions par l'étude de la limite infinie d'une fonction en un point ou à l'infini et rattacher cette étude à la notion d'asymptote à une courbe. On se limitera aux asymptotes verticales et horizontales. La notion d'asymptote oblique sera abordée dans la leçon « **Étude et représentation graphique d'une fonction** ».

Habiletés et Contenus

I. LIMITES

- Connaitre la limite infinie d'une fonction en un point.
- Connaitre la notion d'asymptote verticale.
- Connaitre la limite à l'infini d'une fonction.
- Connaitre la notion d'asymptote horizontale.
- Connaitre la limite à l'infini des fonctions de référence : $x \to$ c, $x \to x$, $x \to x^2$, $x \to x^3$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to \frac{1}{x}$.
- Connaître la limite à l'infini des fonctions : $x \to x^n$, $x \to \frac{1}{x^n}$; $n \in$IN*.
- Connaître la limite à gauche ou à droite en un point a de la fonction : $x \to \frac{1}{x-a}$.
- Connaître la limite à gauche ou à droite en un point a de la fonction : $x \to$ 1 $\frac{1}{(x-a)^n}$.
- Connaitre les propriétés relatives aux opérations sur les limites à l'infini.
- Connaitre la propriété relative à la limite à l'infini d'une fonction polynôme.
- Connaitre la propriété relative à la limite à l'infini d'une fonction rationnelle.

II. NOTIONS D'ASYMPTOTES

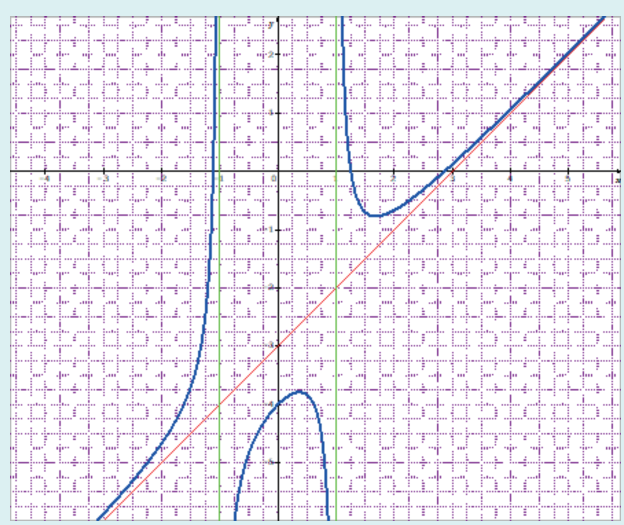
- Interpréter graphiquement une limite infinie d'une fonction en un point (asymptote verticale).
- Interpréter graphiquement une limite finie d'une fonction à l'infini (asymptote horizontale).

Situation d'Apprentissage

Dans la perspective d'aborder le cours sur « l'extension de la notion de limite », un professeur de mathématiques présente les deux courbes ci-dessous à ses élèves. Il se garde d'en donner une quelconque information.

Ces deux courbes représentent la même fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 4}{x^2 - 1}$$



Les élèves constatent une différence entre ces deux représentations graphiques : l'une présente des droites (deux droites parallèles à l'axe des ordonnées et une droite oblique) et l'autre non.

Il demande à ses élèves de se mettre par groupe de trois pour effectuer des recherches sur ces droites : noms, équations, définition, exemples, etc

Activité 1 Limite infinie d'une fonction en un point

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ et $f(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

1) Recopie et complète les tableaux suivants :

x	0,9999	0,99999	1,0001	1,00001
$g(x)$				

x	−0,0001	−0,00001	0,0001	0,00001
$f(x)$				

2) On constate que les valeurs de $g(x)$ sont positives et deviennent de plus en plus grandes lorsque « x est suffisamment proche de 1 ». Donne sans justifications la limite de $g(x)$.

3) On constate que les valeurs de $f(x)$ sont négatives et deviennent de plus en plus petites lorsque « x est suffisamment proche de 0 ». Donne sans justifications la limite de $f(x)$.

Récapitulons

On dit que les limites des fonctions g et f en 1 et 0 respectivement sont infinies.

On écrit : $\lim\limits_{x\to1} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

Exercice de fixation

1 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

L'ensemble de définition de f est l'intervalle : $]-2;+\infty[$.

1) Reproduis et complète le tableau suivant :

x	−1,99999	−1,999999	−1,99999999	−1,999999999
$f(x)$				

2) En remarquant que les valeurs de $f(x)$ sont positives et deviennent de plus en plus grandes, donne sans justifications la limite de $f(x)$ pour « x suffisamment proche de -2 et plus grand que -2 ».

Activité 2 Limites à gauche en a et à droite en a d'une fonction du type : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

1) a) Reproduis puis complète le tableau suivant :

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
$f(x)$					

b) Procède comme dans l'activité précédente pour donner sans justifications la limite de $f(x)$ pour « x suffisamment proche de 3 et plus petit que 3».

2) a) Reproduis puis complète le tableau suivant :

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001
$f(x)$					

b) Procède comme dans l'activité précédente pour donner sans justifications la limite de $f(x)$ pour « x suffisamment proche de 3 et plus grand que 3 ».

Récapitulons

Pour tout nombre réel a, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$

Exercice de fixation

2 Détermine les limites suivantes :

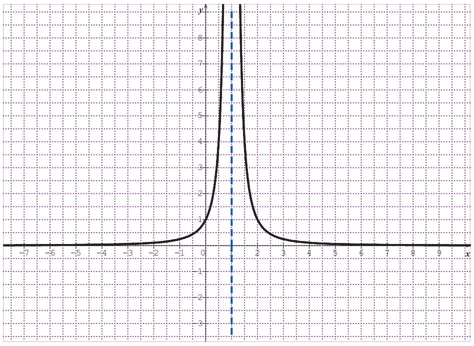
1) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} \dfrac{1}{x-5}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \dfrac{1}{x+1}$

Activité 3 Limite à gauche ou à droite en un point a d'une fonction du type : $x \to \dfrac{1}{(x-a)^n}$

1^{er} Cas : n est pair

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

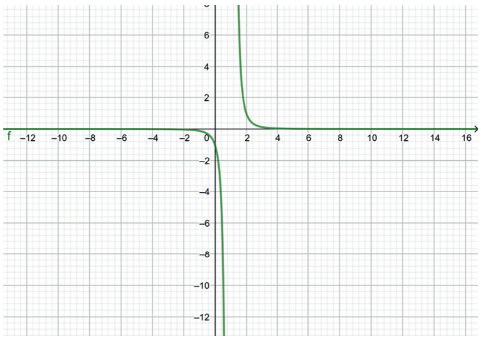


a) A l'aide de cette représentation graphique, donne sans justification (notion intuitive) : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

b) Déduis-en $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2^{de} cas : n est impair

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



a) A l'aide de cette représentation graphique, donne sans justification (notion intuitive) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$.

b) Indique si les deux limites sont égales ou pas.

Récapitulons

On remarque :

- Si l'exposant de $(x-1)$ est pair, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

- Si l'exposant de $(x-1)$ est impair, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{(x-1)^3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{1}{(x-1)^3} = +\infty$.

On admet que ces résultats subsistent dans le cas général.

Pour tout nombre réel a :

- Si n est pair, alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-\mathrm{a})^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-\mathrm{a})^n} = +\infty$.

- Si n est impair, alors : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-\mathrm{a})^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-\mathrm{a})^n} = +\infty$.

Exercices de fixation

3 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \dfrac{1}{(x-4)^7}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to -6 \\ <}} \dfrac{1}{(x+6)^{12}}$

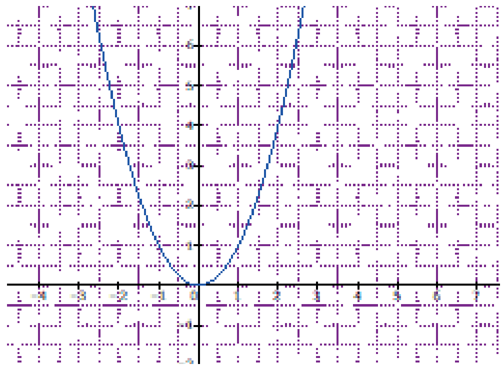
Remarques

Si n est pair, alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Si n est impair, alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

4 Détermine les limites suivantes : a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^9}$; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^{10}}$.

Activité 4 limite à l'infini d'une fonction puissance d'exposant entier : $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$)



1er cas : n est pair

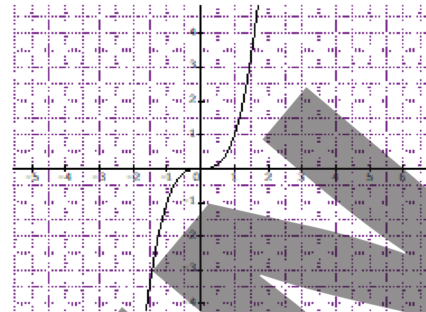
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Détermine sans justification (notion intuitive) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers vers $-\infty$.

2ème cas : n est impair

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Donne sans justification la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.



Récapitulons

De façon générale, on admet la propriété suivante :

Soit n un nombre entier naturel non nul.

- Si n est pair, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- Si n est impair, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
- Quel que soit la parité de n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Exercice de fixation

5 Détermine les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^6\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4\right)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{25}\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^{11}\right)$.

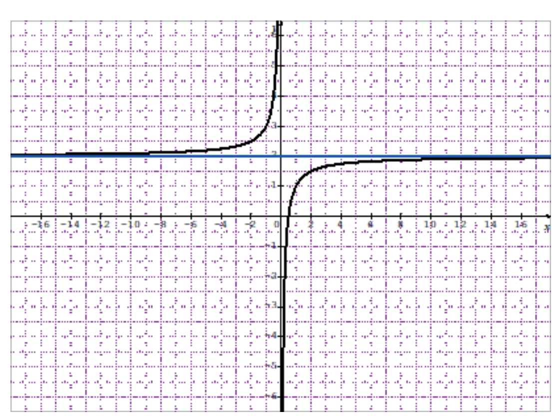
Remarques

Quel que soit le nombre entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Exercice de fixation

6 Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^9}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{20}}$.

Activité 5 limite finie d'une fonction à l'infini



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ dont la représentation graphique de f est donnée ci-contre.

À l'aide de cette représentation graphique, conjecture la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque vers $+\infty$.

Récapitulons

On obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$

On démontre que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax+b}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax+b}{x} = a$.

Exercice de fixation

7 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-x-1}{x}$.

Détermine : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Activité 6 Limite à l'infini de la fonction racine carrée

On considère la fonction t de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $t(x) = \sqrt{x}$.

1) Reproduis et complète le tableau :

x	10	10^2	10^3	10^{12}	10^{20}
$t(x)$					

2) En remarquant que les valeurs de $t(x)$ sont positives et de plus en plus grandes, détermine sans justifications la limite de $t(x)$ lorsque « x est suffisamment grand».

Récapitulons

On admet la propriété suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exercice de fixation

8 Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ (on pourra multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x}$.

Activité 7 Limite à l'infini d'une fonction polynôme.

On considère la fonction polynôme P telle que : $P(x) = -3x^4 + x^3 + 5x^2 + 12x - 7$.

1) Détermine le monôme de plus haut degré de P.

2) Justifie que pour tout nombre réel x non nul, $P(x) = -3x^4\left(1 - \dfrac{1}{3x} - \dfrac{5}{3x^2} - \dfrac{12}{3x^3} + \dfrac{7}{3x^4}\right)$.

3) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^4\right)$ puis déduis en la limite de P en +∞.

4) Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x^4$ puis déduis en la limite de P en -∞.

Récapitulons

- $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^4$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x^4$

Ces résultats se généralisent et on démontre que :

Si f est une fonction polynôme de degré n et de monôme de plus haut degré ax^n alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^n$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n$

Exercice de fixation

9 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(12x^4 - x^3 + 2x\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-4x^3 + 2x^2 - 5\right)$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-5x^7 - x^2 - 3\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^6 + x^5 - x^2\right)$.

Activité 8 Limite à l'infini d'une fonction rationnelle.

On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \dfrac{-12x^4 + x^2 - 7}{-2x^6 + x^3 + 5x^2}$.

1) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$.

2) Justifie que pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = \dfrac{-12x^4\left(1 - \dfrac{1}{12x^2} + \dfrac{7}{12x^4}\right)}{-2x^6\left(1 - \dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{5}{2x^4}\right)}$.

3) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$ puis déduis la limite de f en $+\infty$.

4) Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$ puis déduis la limite de f en -∞.

Récapitulons

On a démontré que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12x^4 + x^2 - 7}{-2x^6 + x^3 + 5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^4 + x^2 - 7}{-2x^6 + x^3 + 5x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-12x^4}{-2x^6}$

Ces résultats se généralisent dans le cas d'une fonction rationnelle quelconque.
On peut donc énoncer la propriété suivante :

Soit f est une fonction rationnelle.
Si ax^n est le monôme de plus haut degré du numérateur de f et si bx^m est le monôme de plus haut degré du dénominateur de f alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^n}{bx^m}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^n}{bx^m}$.

Exercice de fixation

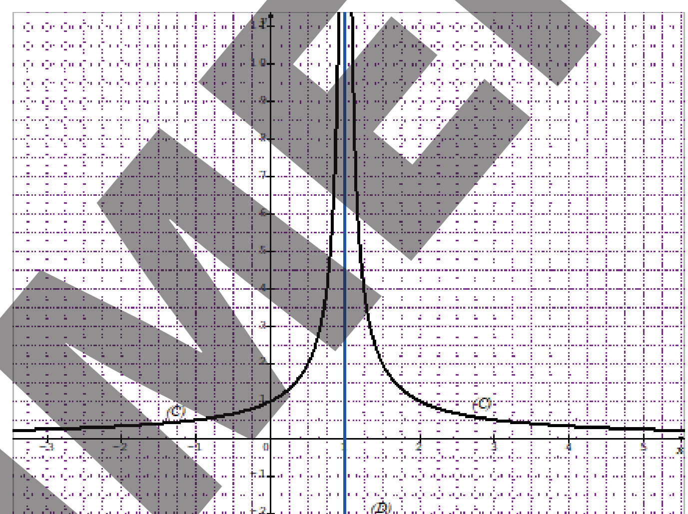
10 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 - 14}{-x^{26} + 4x^2 - 3}$. 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 8x^6}{2x}$.

Activité 9 Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$g(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on a tracé ci-contre la représentation graphique (C) de la fonction g et la droite (D) d'équation $x = 1$.



Soit M un point d'abscisse x (x différent de 1) de la courbe (C) et soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

1) Détermine les coordonnées du point H.
2) Justifie que la distance du point M à la droite (D) est $|x-1|$.

3) Reproduis et complète le tableau suivant :

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\lvert x-1 \rvert$								

4) En remarquant que lorsque x tend vers 1, la distance MH est « très proche de zéro », détermine $\lim\limits_{x \to 1} MH$.

Récapitulons

On a obtenu : $\lim\limits_{x \to 1} MH = 0$

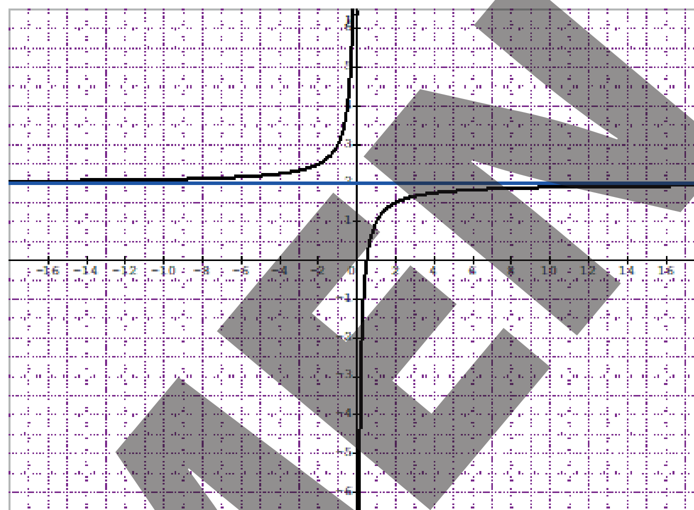
Intuitivement, cela signifie que la courbe (C) se « rapproche » de la droite (D) autant que possible dès que x est suffisamment « proche » de 1.
On dit alors que la droite (D) est une asymptote verticale à la courbe (C).
De plus le tableau de valeurs ci-dessus suggère que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.
On peut alors donner la définition suivante :
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f et (D) la droite d'équation $x = a$.
On dit que la droite (D) est une asymptote à la courbe (C) lorsque $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers a.

Exercice de fixation

11 Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de représentation graphique (C) et (D) la droite d'équation $x = 0$.
Parmi les propositions suivantes, coche celle pour laquelle (D) est une asymptote verticale à (C).

P_1 : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ☐ ; P_2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ☐ ; P_3 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ☐ ; P_4 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ☐.

Activité 10 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses



Reprenons la fonction étudiée dans l'activité 5.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(C) est la représentation graphique de f et (D) la droite d'équation y = 2 (droite en bleu).

1) Soit M un point quelconque de (C) et H son projeté orthogonal sur la droite (D).
Démontre que : $\mathrm{MH} = \left|\frac{2x-1}{x} - 2\right|$
2) Déduis-en la limite de MH lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Déduis de ce qui précède, la limite de la fonction : $x \to f(x) - 2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Récapitulons

Le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{MH} = 0$ suggère que la courbe (C) se rapproche de la droite (D) pour x suffisamment grand. On dit que la droite (D) est une asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

En effet $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=0$

Le graphique suggère également que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Ces deux limites vont permettre de donner la définition suivante :

Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f et (D) la droite d'équation y = b.
On dit que la droite (D) est une asymptote à la courbe (C) lorsque $f(x)$ tend vers b quand x tend vers l'infini.

Remarques

Une droite peut-être asymptote horizontale à une courbe en -∞ (c'est-à-dire quand x tend vers -∞) sans l'être pour cette même courbe en +∞ et vice versa.

Exercice de fixation

12 Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de représentation graphique (C) et (D) la droite d'équation y =-1.
Parmi les propositions suivantes, recopie et coche celle pour laquelle la droite (D) est une asymptote horizontale à la courbe (C).

P_1 : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -5$ ☐ ; P_2 : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = -5$ ☐ ; P_3 : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = -\infty$ ☐ ; P_4 : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ☐.

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1. Limite infinie

Définition 1

Soit f une fonction et a un nombre réel.

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que la fonction f admet une limite infinie en a.

2. Limite de fonctions $x \to \dfrac{1}{(x-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

Propriété 1

Pour tout nombre réel a et pour tout nombre entier naturel n non nul,

- Si n est pair, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.
- Si n est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.

En particulier on a les résultats importants suivants : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = +\infty$.

Exemple

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{1}{(x-2)^4} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ <}} \dfrac{1}{(x-7)^5} = -\infty$.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{1}{x+3} = -\infty$.

Propriété 2

Soit n un nombre entier naturel non nul.

- Si n est pair, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.
- Si n est impair, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.
- Quelle que soit la parité de n : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4 ; 5

3. Asymptote d'équation $x = a$ (asymptote « verticale »)

Définition 2

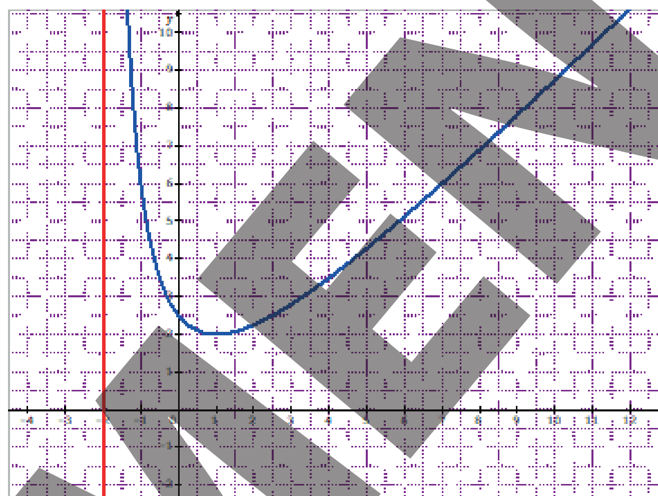
Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, on dit que la représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation x = a.

Remarques

La définition ci-dessus reste valable même si on a l'un des résultats suivants :

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = +\infty$.



Exemple

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$

Illustration graphique de la notion
La droite d'équation x = -2 est une asymptote verticale.

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8 ; 16

II. LIMITE A L'INFINIE D'UNE FONCTION SELON LE TABLEAU DES HABILETÉS ET CONTENUS

1. Limite finie à l'infini

Définition 3

Soit f une fonction et b un nombre réel.
Lorsque $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$, on dit que la fonction f admet une limite finie à l'infini.

2. Limites de quelques fonctions élémentaires

On admet la propriété suivante

Propriétés

Pour tout nombre réel k, $\lim\limits_{x\to -\infty} k = k$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} k = k$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
- Pour tout nombre entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- Pour tout nombre entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$.

Exemple

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^6} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 4

4. Asymptote d'équation $y = b$ (asymptote « horizontale »)

Définition 4

Soit f une fonction et b un nombre réel.

Lorsque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en -∞ ou en +∞.

Remarques

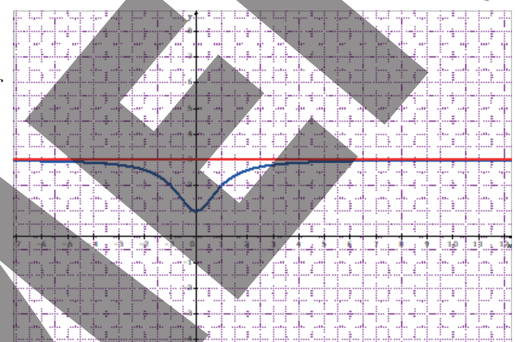
La définition ci-dessus est équivalente à : lorsque $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - b) = 0$ ou $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - b) = 0$, on dit que la représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en -∞ ou en +∞.

Exemple

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

Illustration graphique

La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale.



Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8 ; 9; 16

III. LIMITE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES A L'INFINI

1. Limite d'une fonction polynôme

On admet la propriété suivante

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

Autrement dit si f est une fonction polynôme dont le monôme de plus haut degré est ax^n, alors

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ax^n$.

Exemple

$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 3x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$.

Pour s'entraîner : Exercice 1

2. Limite d'une fonction rationnelle

On admet la propriété suivante

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Autrement dit si f est une fonction rationnelle et si ax^n est le monôme de plus haut degré du numérateur et bx^m le monôme de haut degré du dénominateur de f, alors : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$.

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 13x^2 + x}{-2x^3 - 7x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{-2x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Pour s'entraîner : Exercice 13

IV- LIMITES ET OPÉRATIONS

1. Limite de la somme de deux fonctions

Propriété

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	l'	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$l+l'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

FI = Forme Indéterminée

Pour s'entraîner : Exercice 11 ; 12

Exemple

Étudions la limite en +∞ de $f : x \mapsto x^2 + x$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *. Donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\right) = +\infty$.

Par contre $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ *. A partir de ces deux limites, on ne peut pas déterminer* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + x\right)$.

On dit qu'on a une forme indéterminée.

Remarques

on peut utiliser la propriété 3 pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + x\right)$.

2. Limite d'un produit de deux fonctions

Propriété

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ *ou* $+\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$l' \neq 0$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	ll'	$\begin{cases} -\infty \ si \ l' > 0 \\ +\infty \ si \ l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \ si \ l' > 0 \\ -\infty \ si \ l' < 0 \end{cases}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

FI=Forme Indéterminée

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3x^2\right) = -\infty$ *Car* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3) = -3$.

Pour s'entraîner : Exercice 10 ; 12

3. Limite de l'inverse d'une fonction

Propriété

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$l \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et si $f(x) > 0$ dans un intervalle ouvert d'une extrémité a	0 et si $f(x) < 0$ dans un intervalle ouvert d'une extrémité a
alors $\lim\limits_{x\to a}(\frac{1}{f})(x) =$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exemple

Étudions la limite à gauche en -1 de la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \sqrt{x^2-1} = 0$ *la fonction* $x \to \sqrt{x^2-1}$ *étant positive, il en résulte que :* $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} u(x) = +\infty$.

Pour s'entraîner : Exercices 2 ; 3 ; 4 ; 20

4. Limite de la valeur absolue d'une fonction

Propriété

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x) \rvert$	$\lvert l \rvert$	$+\infty$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty} \left| \frac{3x+5}{-x+1} \right|$.

On sait que $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+5}{-x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x}{-x} = -3$.

Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \left| \frac{3x+5}{-x+1} \right| = +3$.

Pour s'entraîner : Exercice 27

5. Limite de la racine carrée d'une fonction

Propriété

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\ (l \geq 0)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x+3}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+3) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x+3} = +\infty$.

Pour s'entraîner : Exercice 14 ; 23

QUESTION 1

Comment déterminer la limite à gauche ou à droite en a d'une fonction du type : $x \to \dfrac{b}{(x-a)^n}$ où $b \neq 0$.

Méthode

- On détermine d'abord : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} \dfrac{1}{(x-a)^n}$ puis en tenant compte du signe de b , on applique le résultat sur la limite d'un produit.<
- On fait de même pour $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} \dfrac{b}{(x-a)^n}$.

Exercice

Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} \dfrac{-2}{(x+3)^3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} \dfrac{-2}{(x+3)^3}$.

Solution commentée

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} \dfrac{1}{(x+3)^3} = -\infty$, or $-2 < 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} \dfrac{-2}{(x+3)^3} = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} \dfrac{1}{(x+3)^3} = +\infty$, or $-2 < 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} \dfrac{-2}{(x+3)^3} = -\infty$.

Exercice non corrigé

Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \dfrac{4}{(x-1)^6}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \dfrac{-12}{(x-1)^6}$.

QUESTION 2

Comment déterminer la limite à gauche ou à droite en a d'une fonction du type : $x \to \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$ où P est un polynôme tel que $P(a) \neq 0$.

On veut déterminer : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$.

Méthode

On détermine : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} \dfrac{1}{(x-a)^n}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} P(x)$ puis on applique un résultat sur la limite d'un produit de fonctions.

On fait de même pour : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$.

Exercice

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\<}} \dfrac{-2x+3}{(x-4)^3}$.

■ **Solution commentée**

D'une part : $\lim\limits_{\substack{x \to 4\\ <}} (-2x+3) = -5$ cette limite est strictement négative.

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to 4\\ <}} \dfrac{1}{(x-4)^3} = -\infty$.

En conclusion, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-2x+3}{(x-4)^3} + \infty$.

■ **Exercice non corrigé**

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ >}} \dfrac{-2x^2+3}{(x-1)^3}$.

QUESTION 3

Comment déterminer la limite à l'infini d'une fonction du type : $x \to \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$ où P est une fonction polynôme.

On veut déterminer : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$.

Méthode

Pour déterminer : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$ on peut procéder comme suit :

on suppose que bx^m est le monôme de plus haut degré de P.

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{bx^m}{x^n}.$$

■ **Exercice**

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^3+2x^2-1}{(x+6)^7}$.

■ **Solution commentée**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^3+2x^2-1}{(x+6)^7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^3}{x^7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{x^4} = 0 \text{, donc : } \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^3+2x^2-1}{(x+6)^7} = 0.$$

Remarque

On pourrait développer le dénominateur et appliquer la propriété relative à la limite à l'infini d'une fonction rationnelle; mais dans certains cas comme celui de ci-dessus se serait très fastidieux !

Exercice non corrigé

Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}}$.

QUESTION 4

Comment étudier la position d'une courbe par rapport à son asymptote horizontale ?

Méthode

Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

Soit f une fonction de représentation graphique (C) et (D) la droite d'équation $y = b$.

Pour étudier la position de (C) par rapport à (D), on étudie le signe de la fonction : $x \to f(x)-b$.

Exercice

Soit f une fonction telle que $f(x)=1+\dfrac{2}{x^2-1}$ de représentation graphique (C) et (D) la droite d'équation y=1.

1) Justifie que (D) est une asymptote en -∞ et en +∞ à la courbe (C).

2) Étudie la position de (C) par rapport à (D).

Solution commentée

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=0$; de même $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=0$; d'où le résultat.

2) On a : $f(x)-1=\dfrac{2}{x^2-1}$. Étudions le signe cette fonction sur les intervalles]−∞ ; −1[;]1 ; +∞[et]−1 ; 1[.

- Pour tout x de]−∞ ; −1[; $\dfrac{2}{x^2-1}>0$; pour tout x de]−1 ; +∞[, $\dfrac{2}{x^2-1}>0$.

  Donc (C) est au-dessus de (D) sur]−∞ ; −1[et sur]1 ; +∞[.

- Pour tout x de]−1 ; 1[; $\dfrac{2}{x^2-1}$ < 0, d'où (C) est au-dessus de (D) sur]−1 ; 1[.

Exercice non corrigé

Soit f une fonction telle que $f(x)=x-3+\dfrac{2}{x-1}$ de représentation graphique (C) et (D) la droite d'équation y = x - 3.

1) Justifie que (D) est une asymptote en -∞ et en +∞ à la courbe (C).

2) Étudie la position de (C) par rapport à (D).

Exercices de fixation

Limite infinie d'une fonction en un nombre

1 Réordonne les groupes de mots suivants pour obtenir une propriété.
De plus haut degré. /Polynôme est égale/ La limite à /de son monôme/l'infini d'une fonction/à la limite à l'infini.

2 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{1}{(x-3)}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{1}{(x-1)}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -6\\ >}} \dfrac{1}{(x+6)}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to -8\\ <}} \dfrac{1}{(x+8)}$.

3 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -5\\ <}} \dfrac{1}{(x+5)^7}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{1}{(x-4)^9}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \dfrac{1}{(x+1)^4}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \dfrac{1}{(x+2)^6}$.

4 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(x+1)^5}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(x+12)^{63}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(x+1)^5}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(x-7)^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(x-6)^9}$.

5 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-10)$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^{20}}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^{11}} =$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{101}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{121}$.

Limite d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

6 Réponds par vrai ou par faux à chacune des assertions suivantes :

1. On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^4 - \sqrt{x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^4$ car la fonction f telle que $f(x) = x^4 - \sqrt{x} + 2$ est une fonction polynôme.

2. On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x^2 + \sqrt{x+3}}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ car la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x^2 + \sqrt{x+3}}$ est une fonction rationnelle.

3. Si l'ensemble de définition d'une fonction f est $Df = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à la représentation graphique de f.

4. La limite de x^n en $+\infty$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dépend de la parité de n.

5. La limite de x^n en $-\infty$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dépend de la parité de n.

6. La limite de $\dfrac{1}{x^n}$ en $+\infty$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dépend de la parité de n.

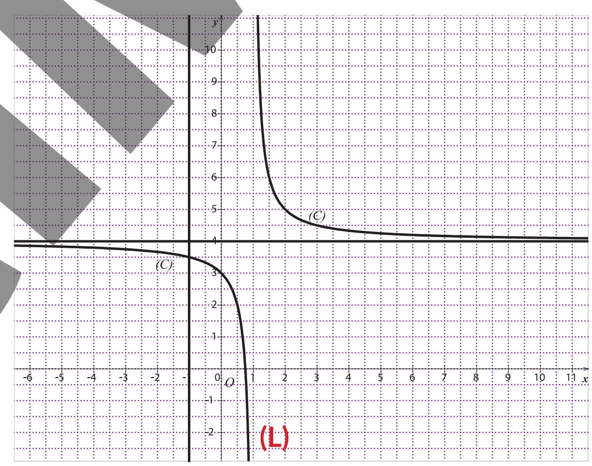
7. Une représentation graphique peut admettre deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

Asymptote horizontale- Asymptote verticale

7 On donne ci-dessous la représentation graphique (C) d'une fonction f.

La courbe (C) admet une asymptote horizontale (D) et une asymptote verticale (L).

Détermine les équations de (D) et (L).



8 Donne une interprétation graphique en termes d'asymptotes de chacune des limites suivantes.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} g(x) = +\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$; 4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x)+2\right) = 0$.

9 Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{-2x+3}$ puis interprète graphiquement le résultat en termes d'asymptote.

Limites et opérations

10 En utilisant les résultats sur la limite d'un produit de deux fonctions, calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x\sqrt{x})$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\left(\dfrac{4x^2+5}{3x-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)(1-3x)\right]$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{-5x^2+3x-1}{x^2-1}\right)\left(\dfrac{x^3+41}{x^4-x^3-1}\right)\right]$.

11 En utilisant les résultats sur la limite d'une somme de deux fonctions, calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x^7}+x+9\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{-10x^2+7}{x-1}\right)+\left(-2+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\left[\dfrac{x+4}{x+1}+1-x^2\right]$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\dfrac{-3x+2}{x-2}+\dfrac{4}{2-x}\right]$.

12

1) Démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x+5}=0$.

2 a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4+\dfrac{1}{x^5}\right]$;

b) Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4+\dfrac{1}{x^5}}{2x+5}\right]$.

13 Détermine les limites en +∞ et en -∞ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{-\sqrt{2}x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{5x^3-4x+2}{x+1}$;

3) $f(x)=2x-3+\dfrac{1}{x+2}$; 4) $f(x)=\dfrac{18x^3-7}{9x^2+1}$.

14 Détermine les limites en +∞ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sqrt{x+2}+2x$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-5x$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{6x+5}{24x+1}}$

15 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\ <}}\dfrac{x-2}{36-x^2}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\ <}}\dfrac{x-2}{36-x^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ <}}\dfrac{x-2}{36-x^2}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ >}}\dfrac{x-2}{36-x^2}$.

16 Soit $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^2-25}$.

1) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}f(x)$.

2) Interprète graphiquement les résultats obtenus à la question 1).

3) Détermine la limite de f en -∞.

4) Dis si la courbe de la fonction f admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses ou non. Justifie ta réponse.

Exercices de renforcement / approfondissement

17 La représentation graphique ci-contre est celle d'une fonction f ; cette représentation admet trois asymptotes.

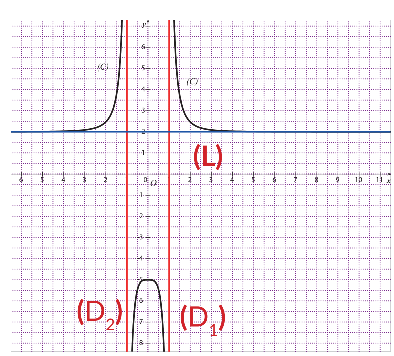
1) D'après ce graphique, détermine :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}f(x)$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) Déduis-en une équation de chacune des trois asymptotes.



18 Calcule la limite en +∞ de la fonction : $x\to\sqrt{x}-2x^2$

19 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}}\dfrac{x-3}{x^2-25}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}\dfrac{x-3}{x^2-25}$.

2) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{3-x}{4-x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{3-x}{4-x^2}$.

20 Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-\dfrac{12}{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3+\dfrac{1}{x})^3$.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{25x^2+2}{x^2-1}}$; 5) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{25x^2+2}{(x-1)^2}}$.

21

1) Détermine que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\dfrac{-1}{\sqrt{x-2}}\right]$.

2) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right]$.

22

1) Démontre que l'axe (OJ) est une asymptote à la courbe de la fonction : $x \mapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$.

2) Démontre que la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote en +∞ à la courbe de la fonction

$x \to \dfrac{-2x^2+x}{x^2+1}$.

23 Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$.

1) Démontre que pour tout x non nul,

$\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

2) Déduis-en que pour tout x non nul, $f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}$.

3) A l'aide de la question précédente, démontre que

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

24 Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{5x-1}}$. Calcule la limite de f en +∞

25 Dans chacun des cas suivants, calcule les limites de la fonction f en -∞ et en +∞ quand c'est possible.

1) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2+2}}$;

2) $f(x) = \dfrac{2x^3+5}{x+3} + (-x+1)$;

3) $f(x) = \dfrac{-2}{1-10x^7}$;

4) $f(x) = \dfrac{x^3-\sqrt{x}}{2x^3+1}$.

26 Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par $f(x) = \dfrac{-3x^2-1}{2x^2+1}$.

Démontre que la représentation graphique de f admet en -∞ une asymptote parallèle à la droite des abscisses, puis détermine une équation de cette asymptote.

27 Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par

$f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{2x}}$.

Calcule la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers +∞.

28 Détermine la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 4} \left|\dfrac{x+5}{x^2-16}\right|$.

29 (n'est pas exigible dans cette leçon)

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+x-5}{x+4}$.

1) À l'aide d'une division euclidienne des polynômes, démontre que pour tout x différent de -4

$f(x) = 2x-7+\dfrac{23}{x+4}$.

2) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(2x-7)]$

On dit que la droite d'équation $y=x-2$ est une asymptote « oblique » à la courbe de f en +∞.

30 On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

$f(x) = x+\sqrt{x^2-2x}$.

1) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.

2) a) Démontre que pour tout $x < 0$, $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$;

puis $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1}$.

b) Déduis de ce qui précède, la limite de f en -∞.

c) Interprète graphiquement la limite obtenue à la question b).

3) Soit (D) la droite d'équation : $y = 2x - 1$.

a) Démontre que pour tout $x>0$,

$$\left[f(x)-(2x-1)\right]=\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}.$$

b) Déduis de ce qui précède la limite de $\left[f(x)-(2x-1)\right]$ en $+\infty$.

c) Interprète graphiquement le résultat de la limite obtenue à la question b).

31 (Questions : 5, 6, 7 non exigibles dans cette leçon)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2-2x+4}{x^2-1}$ et (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O ; I, J)

1) Détermine l'ensemble Df de définition de f.

2) Calcule les limites de f aux bornes de Df.

3) Déduis de 2) que la courbe (C) admet deux asymptotes parallèles à (OJ).

Détermine les équations de ces asymptotes

4) Démontre que pour tout x de Df, $f(x)=2x-5+\dfrac{-1}{x^2-1}$.

5) Démontre que la droite (D) d'équation $y=2x$-5 est une asymptote à (C) en -∞ et en +∞

6) Étudie la position de (C) par rapport à la droite (D)

7) On donne ci-dessous la courbe (C). Trace ci-dessous toutes les asymptotes.

32 Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

33 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g(x)=\dfrac{ax^2+3x+1}{x-1}$ où a est nombre réel.

On note (C) la représentation graphique de g dans un repère (O, I, J).

1) Détermine a pour que la courbe (C) admette une asymptote oblique et précise une équation de cette asymptote.

2) Détermine a pour que la courbe (C) admette une asymptote parallèle à (OJ) et précise une équation de cette asymptote.

3) On suppose que a = -4.

Dis si la courbe (C) admet la droite d'équation x = 1 comme asymptote ou pas. Justifie ta réponse.

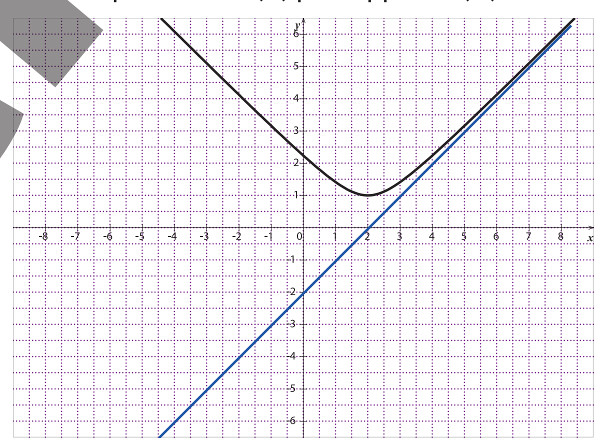
34 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$.

On note (C) la représentation graphique de f dans un repère (O, I, J).

1) Démontre que la droite (D) d'équation y = x - 2 est une asymptote à (C) en +∞.

2) Étudie la position de (C) par rapport à (D).



Situations complexes

35 Au cours d'une expérience portant sur le réchauffement d'un corps, des chercheurs ont modélisé ce phénomène par la formule : $f(t)=\dfrac{100t^2+99}{t^2+1}$ où $f(t)$ désigne la température du corps en degré Celsius à l'instant t, (exprimé en minutes).

Monsieur Coulibaly, un membre de l'équipe de recherche affirme que la température de l'objet ne pourra jamais être au delà de 100 degrés.

Son collaborateur, Yapi conteste cette affirmation et dit que la température de l'objet atteindra 101 degrés au bout d'un temps suffisamment long.

Ayant écouté ces deux chercheurs, tu es invité à te prononcer sur chacune de ces affirmations.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, donne ton avis sur l'affirmation de chacun de ces chercheurs.

9 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

Commentaire de la Leçon

La notion de fonction en tant que correspondance entre deux types d'objet est relativement ancienne. Mais le terme n'apparaît qu'à la fin du XVII[e] siècle sous la plume de Leibniz en 1694, il s'agit alors de fonction associée à une courbe géométrique : Leibniz dit ainsi que l'abscisse, l'ordonnée ou le rayon de courbure d'une courbe en un point M est une fonction du point M. Dans la même époque, Newton parle de fluente pour des quantités dépendant d'une variable qu'il appelle le temps (tout en précisant que le rôle joué par le temps, peut l'être par une autre quantité). La notation sous la forme f ne s'est pas mise en place tout de suite. Jean Bernoulli propose en 1698 d'appeler X une fonction de x, puis fx en 1718. Leibniz invente une notation permettant de travailler sur plusieurs fonctions différentes : et sont ainsi deux fonctions dépendant de x. Euler reprend la notation fx en 1734. Les fonctions sont alors toujours à valeurs numériques (réelles ou complexes) et possèdent en outre des propriétés restrictives (liées à une équation algébrique, continuité eulérienne, développable en série entière...).

Parallèlement se développe, en géométrie, la notion d'application pour des correspondances ponctuelles. Dans les années 1950, l'école Bourbaki tente de définir précisément les deux notions. Même si, dans la rédaction finale des Éléments de 1970 la fonction est toujours définie sur son ensemble de départ, cette distinction est reprise dans l'enseignement français du secondaire, premier et second cycle, quand, à la suite de la Commission Lichnerowicz, se mettent en place les nouveaux programmes, à partir de 1968. Ainsi voit-on dès la classe de sixième, illustrées par des diagrammes sagittaux, les définitions suivantes :

- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part au plus une flèche, s'appellent des fonctions ;
- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, s'appellent des applications.

Les fonctions de référence ont été étudiées en classe de seconde, en classe de première, il s'agira d'étudier la parité d'une fonction et d'affiner la représentation graphique de la courbe représentative d'une fonction grâce à la notion d'asymptote.

- ✓ Les fonctions faisant intervenir des paramètres sont hors programme.
- ✓ Les fonctions définies par raccordement sont hors programme.
- ✓ Lors des évaluations, les équations des asymptotes obliques seront données aux élèves. (pas d'exercices de recherche d'asymptote)
- ✓ Il sera intéressant de demander aux élèves de faire des esquisses de courbe à partir du tableau de variation de la fonction.

Daniel Bernoulli est un médecin, physicien et mathématicien suisse, né à Groningue le 8 février 1700, et mort à Bâle, le 17 mars 1782.

Il est le fils de Jean Bernoulli, le neveu de Jacques Bernoulli et le frère de Nicolas Bernoulli.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une asymptote oblique à la représentation graphique d'une fonction rationnelle ; la définition d'une fonction paire ; la définition d'une fonction impaire ; la propriété relative à la représentation graphique d'une fonction paire, d'une fonction impaire.
- **Reconnaître** une asymptote oblique ; la représentation graphique d'une fonction paire ; la représentation graphique d'une fonction impaire ; le centre de symétrie d'une fonction à partir de sa représentation graphique ; l'axe de symétrie d'une fonction à partir de sa représentation graphique
- **Déterminer** les extremums éventuels d'une fonction définie par sa formule explicite sur son ensemble de définition ; les asymptotes verticales, horizontales ou obliques à la courbe représentative d'une fonction définie par sa formule explicite sur son ensemble de définition ; le tableau de variation d'une fonction définie par sa formule explicite sur son ensemble de définition
- **Interpréter** graphiquement la parité d'une fonction ; graphiquement la limite nulle à l'infini de la fonction : $x \mapsto f(x) - (ax + b)$
- **Construire** la représentation graphique d'une fonction rationnelle ou une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; la représentation graphique d'une fonction homographique; la représentation graphique d'une fonction de type $x \mapsto ax+b+\dfrac{c}{dx+e}$; la représentation graphique d'une fonction paire ou impaire sur son ensemble de définition, connaissant sa représentation sur son ensemble d'étude.
- **Justifier** qu'une droite donnée par une équation cartésienne est asymptote à la représentation graphique d'une fonction.
- **Démontrer** qu'une fonction est paire ou impaire ; qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction ; qu'un point donné est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction ; qu'une droite donnée est asymptote oblique à la représentation graphique d''une fonction
- **Résoudre** graphiquement des équations du type $f(x) = g(x)$ ou des inéquations du type $f(x) \leq g(x)$
- **Traiter** une situation faisant appel à la représentation graphique d'une fonction.

Situation d'Apprentissage

Le bénéfice réalisé par une boulangerie située près d'un lycée est modélisé par la relation :
B(q) = −28 000 + 350q - 0,7q^2 où q représente le nombre de baguettes de pain vendues par jour.

Le gérant de cette boulangerie voudrait connaitre le nombre de baguettes à vendre par semaine pour réaliser un bénéficie maximal. On sait que cette boulangerie vend en moyenne entre 100 et 400 baguettes par jour.

Informés, des élèves en classe de première se proposent d'étudier la fonction bénéfice afin de répondre à la préoccupation du gérant.

Activité 1 Fonction paire

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{|x| + 3}{x^2}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

a) Justifie que : $\forall x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$.

b) Justifie alors que : $f(-x) = f(x)$.

Récapitulons

$\forall x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$: on dit qu'une telle fonction est une fonction paire.

Exercice de fixation

1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4}$.

Justifie que la fonction f est paire.

Activité 2 Fonction paire

Soit f une fonction paire, D_f son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soient x un élément de D_f et M le point de (C) d'abscisse x.

1. Détermine les coordonnées du symétrique N de M par rapport à la droite (OJ).

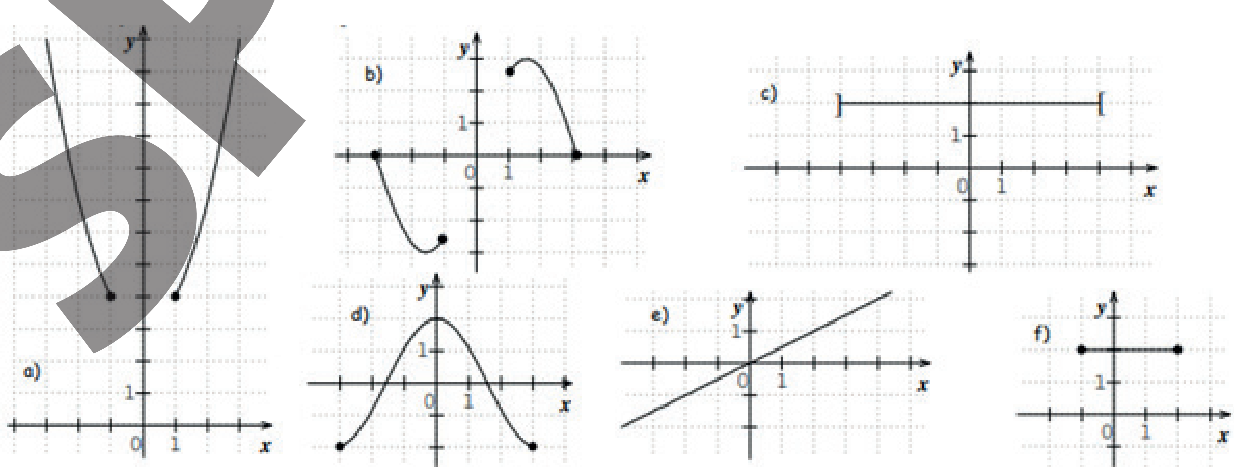
2. Démontre que N appartient à (C).

Récapitulons

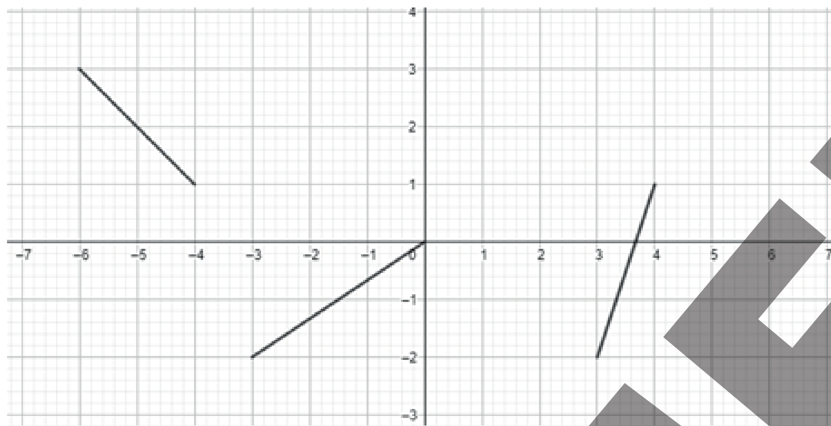
La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Exercice de fixation

2 À partir de la courbe de la fonction représentée, précise, dans chaque cas, si la fonction semble paire.



3 La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-6\ ;\ 6]$ est partiellement représentée ci-dessous.
Sachant que f est paire, complète le tracé de cette courbe.



Activité 3 Fonction impaire

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2. **a)** Justifie que : $\forall\, x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$.

   b) Justifie alors que : $f(-x) = -f(x)$.

> **Récapitulons**
>
> $\forall\, x \in D_f$, on a $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$: on dit qu'une telle fonction est une fonction impaire.

Exercice de fixation

4 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$.
Justifie que la fonction f est impaire.

Activité 4 Fonction impaire (2)

Soit f une fonction impaire, Df son ensemble de définition et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

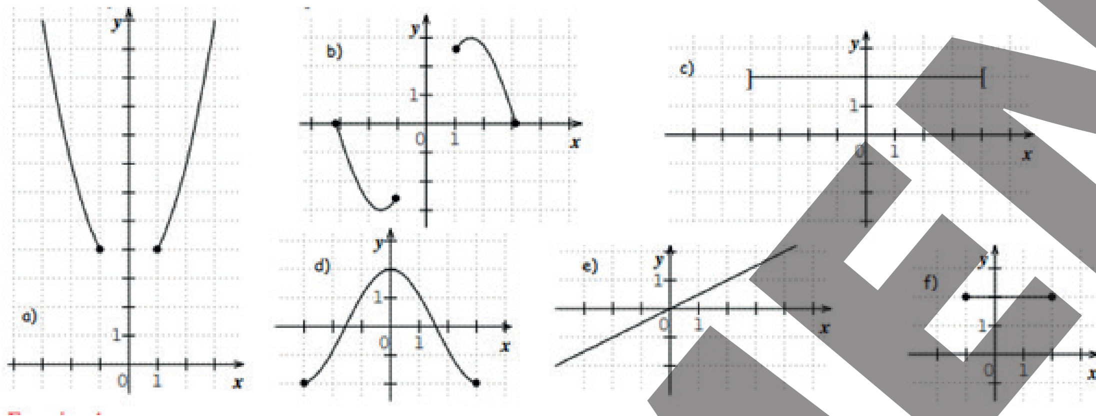
Soient x un élément de D_f et M le point de (C) d'abscisse x.

1. Détermine les coordonnées du symétrique N de M par rapport au point O.
2. Démontre que N appartient à (C).

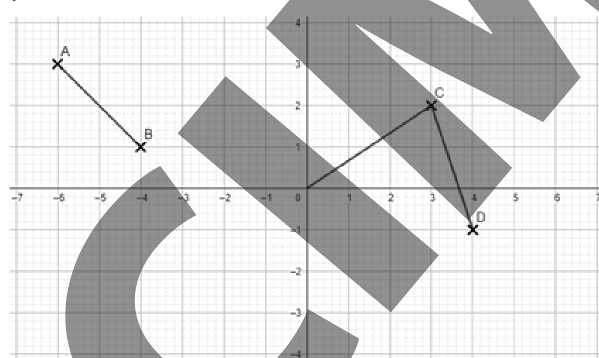
> **Récapitulons**
>
> La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice de fixation

5 À partir de la courbe de la fonction représentée, précise, dans chaque cas, si la fonction semble impaire.



6 La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-6 ; 6]$ est partiellement représentée ci-dessous. Sachant que f est impaire, complète le tracé de cette courbe.



Activité 5 Centre de symétrie

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-3}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x + 3) - 5$.
   Démontre que g est une fonction impaire.
3. Soit $x \in D_f$ tel que $(6 - x) \in D_f$. Démontre que : $f(6 - x) + f(x) = 10$.
4. Soit $x \in D_f$ tel que $(3 + x) \in D_f$.
   Démontre que : $(3 - x) \in D_f$ et $f(3 - x) + f(3 + x) = 10$.

Récapitulons

On a les résultats suivants :

- La fonction : $x \mapsto f(x + 3) - 5$ est impaire.
- Pour tout x de D_f tel que $(2 \times 3 - x) \in D_f$ on a : $f(2 \times 3 - x) + f(x) = 2 \times 5$.
- Pour tout x de D_f tel que $(3 + x) \in D_f$, on a $(3 - x) \in D_f$ et $f(3 - x) + f(3 + x) = 2 \times 5$.

Chacun de ces trois résultats permet de dire que le point A(3 ; 5) est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Exercice de fixation

7 Le plan est muni d'un repère.

Démontre que le point A(1 ; −1) est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Activité 6 Axe de symétrie

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 14x + 3$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x + 7)$.
   Démontre que g est une fonction paire.
3. Soit $x \in D_f$ tel que $(14 - x) \in D_f$. Démontre que : $f(14 - x) = f(x)$.
4. Soit $x \in D_f$ tel que $(7 + x) \in D_f$. Démontre que : $(7 - x) \in D_f$ et $f(7 - x) = f(7 + x)$.

Récapitulons

On a les résultats suivants :

- La fonction : $x \mapsto f(x + 7)$ est paire.
- Pour tout x de D_f tel que $(2 \times 7 - x) \in D_f$ on a : $f(2 \times 7 - x) = f(x)$.
- Pour tout x de D_f tel que $(7 + x) \in D_f$, on a $(7 - x) \in D_f$ et $f(7 - x) = f(7 + x)$.

Chacun de ces trois résultats permet de dire que la droite d'équation $x = 7$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Exercice de fixation

8 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Démontre que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$.

Activité 7 Extremum relatif

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Détermine la dérivée f' de f.
2. **a)** Détermine les zéros de f'.
   b) Étudie le signe de f' sur chacun des intervalles $[-2 ; -1]$, $[-1 ; 0]$, $[0 ; 1]$ et $[1 ; 2]$.

Récapitulons

- D'une part f' s'annule en −1, d'autre part f' est positif sur $[-2 ; -1]$ et négatif sur $[-1 ; 0]$. On dit que $f(-1)$ est un maximum relatif de f.
- D'une part f' s'annule en 1, d'autre part f' est négatif sur $[0 ; 1]$ et positif sur $[1 ; 2]$. On dit que $f(1)$ est un minimum relatif de f.
- Un extremum est soit un maximum, soit un minimum

Exercice de fixation

9 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{13}{4}$.

1. Justifie que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x + 3)(x^2 - 1)$.
2. Détermine les extremums relatifs de f.

Activité 8 Asymptote verticale

Le plan est muni d'un repère.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-2}$.
   a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Calcule la limite de f à gauche en 2 et la limite de f à droite en 2.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.
   Calcule la limite de g en 3.

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère.
La limite de f à gauche en 2 est infinie : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
La limite de f à droite en 2 est infinie : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
La limite de g en 3 est infinie : la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

Exercice de fixation

10 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan est muni d'un repère.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Démontre que la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à (C).

Activité 9 Asymptote horizontale

Le plan est muni d'un repère.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$ par : $f(x)=\frac{-5x+11}{2x-7}$.

Détermine la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère.

La limite de f en $-\infty$ est $-\frac{5}{2}$: la droite d'équation $y = -\frac{5}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

La limite de f en $+\infty$ est $-\frac{5}{2}$: la droite d'équation $y = -\frac{5}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exercice de fixation

11 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{6x-1}{3x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Démontre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Activité 10 Asymptote oblique

Le plan est muni d'un repère.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+4}$.

a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Détermine la limite de $f(x) - (2x - 1)$, lorsque x tend vers $-\infty$ et la limite de $f(x) - (2x - 1)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Récapitulons

Le plan est muni d'un repère.

La limite de $f(x) - (2x - 1)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est 0 : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$.

La limite de $f(x) - (2x - 1)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est 0 : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exercice de fixation

12 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Démontre que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

I. Parité

1. Fonction paire

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f.
On dit que la fonction f est paire si et seulement si : $\forall x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Remarque

Lorsqu'un ensemble E vérifie la propriété suivante : $\forall x \in$ E, $(-x) \in$ E , on dit que cet ensemble E est symétrique par rapport au nombre réel 0.

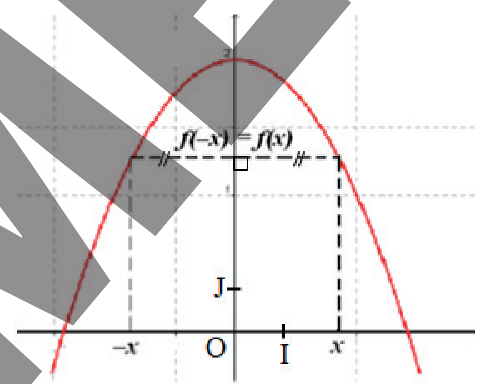
Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -2x^2$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -2(-x)^2 = -2x^2 = f(x)$.

Donc la fonction f est paire.



Propriété

Une fonction est paire si et seulement si sa représentation graphique, dans un repère orthogonal du plan, admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3

2. Fonction impaire

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f.
On dit que la fonction f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

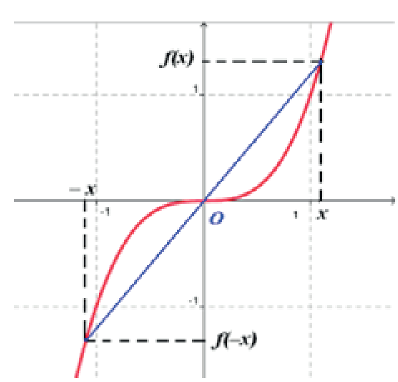
Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - 2x^3$.

On a : $D_f = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{1}{-x} - 2(-x)^3 = -\frac{1}{x} + 2x^3 = -f(x)$.

Donc la fonction f est impaire.



Propriété

Une fonction est impaire si et seulement si sa représentation graphique, dans le plan muni d'un repère, admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Pour s'entraîner : Exercices 4 ; 5 ; 6.

II. AXE ET CENTRE DE SYMÉTRIE

1. Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
La courbe (C) admet le point A (a, b) comme centre de symétrie si :
la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x + a) - b$ est impaire.

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
Justifions que le point A(−3 ; 2) est centre de symétrie de (C).
On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x - 3) - 2$.

On a : $g(x) = f(x-3) - 2 = \dfrac{2(x-3)-1}{(x-3)+3} - 2 = \dfrac{2x-7}{x} - 2 = \dfrac{-7}{x}$

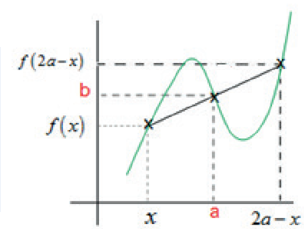
$D_g = \mathbb{R}^*$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = \dfrac{-7}{-x} = -\dfrac{-7}{x} - g(x)$.

Par conséquent la fonction g est impaire.
On en déduit que le point A(-3 ; 2) est centre de symétrie de (C).

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
La courbe (C) admet le point A$(a\,,\ b)$ comme centre de symétrie si pour tout x de Df, on a : $(2a - x) \in Df$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.



Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
Justifions que le point A(−3 ; 2) est centre de symétrie de (C).
$Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
$\forall\, x \in D_f$ on a :

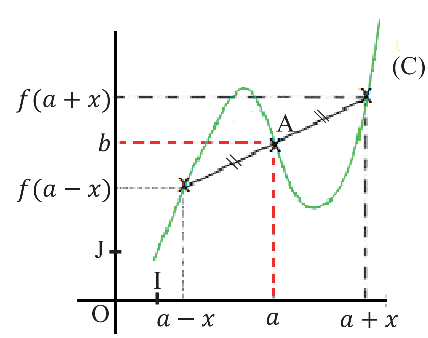
- $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -3 \Leftrightarrow -x \neq 3 \Leftrightarrow -6 - x \neq -3$, donc $(-6 - x) \in D_f$
- $f(-6-x) + f(x) = \dfrac{2(-6-1)-1}{-6-x+3} + \dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{-2x-13}{-x-3} + \dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{2x+13}{x+3} + \dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{4x+12}{x+3}$

$f(-6-x) + f(x) = \dfrac{4(x+3)}{x+3} = 4 = 2 \times 2$

On en déduit que le point A(−3 ; 2) est centre de symétrie de (C).

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
La courbe (C) admet le point A(a, b) comme centre de symétrie si pour tout x de D_f tel que $(a + x) \in D_f$, on a : $(a - x) \in D_f$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.



Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Justifions que le point A(−3 ; 2) est centre de symétrie de (C).

Df = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$\forall\, x \in D_f$ tel que $(-3 + x) \in$ Df on a :

- $(-3 + x) \in D_f \Leftrightarrow -3 + x \neq -3 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -3 - x \neq -3$, donc $-3 - x \in D_f$
- $f(-3+x) + f(-3+x) = \dfrac{2(-3+x)-1}{-3+x+3} + \dfrac{2(-3+x)-1}{-3-x+3} = \dfrac{2x-7}{x} + \dfrac{-2x-7}{-x} = \dfrac{4x}{x} = 4 = 2 \times 2$

On en déduit que le point A(−3 ; 2) est centre de symétrie de (C).

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8 ; 9

2. Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe (C) admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si :

La fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x + a)$ est paire.

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Justifions que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x - 1)$.

On a : $g(x) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) - 3 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 - 3 = x^2 - 4$

$D_g = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = g(x)$.

Par conséquent la fonction g est paire.

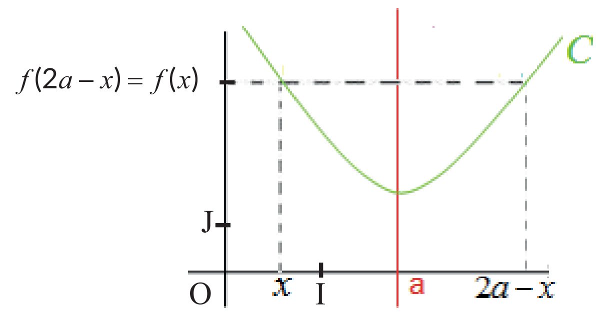
On en déduit que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe (C) admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si pour tout x de D_f, on a :

$(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.



Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Justifions que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a :

- $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (-x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (-2 - x) \in \mathbb{R}$
- $f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) - 3 = 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$

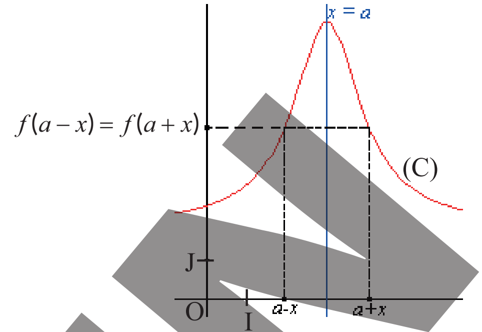
  $f(-2 - x) = f(x)$

On en déduit que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

Propriété

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

La courbe (C) admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si pour tout x de D_f tel que $(a + x) \in D_f$, on a $(a - x) \in D_f$ et $f(a - x) = f(a + x)$.



Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Justifions que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

On a : $Df = \mathbb{R}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$ on a : $-1 + x \in \mathbb{R}$

- $1 + x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 + x - 2x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 - x \in \mathbb{R}$
- $f(-1 + x) = (-1 + x)^2 + 2(-1 + x) - 3 = 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x - 3 = x^2 - 4$

$f(-1 - x) = (-1 - x)^2 + 2(-1 - x) - 3 = 1 + 2x + x^2 - 2 - 2x - 3 = x^2 - 4$

$f(-1 + x) = f(-1 - x)$

On en déduit que la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (C).

Pour s'entraîner : exercices 10 ; 11 ; 12

III. EXTREMUMS RELATIFS

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;b[$ et x_0 un élément de $]a\,;b[$.

Si $f'(x_0) = 0$ et si $\begin{cases} \forall x \in \left]a\,; x_0\right[, f'(x) < 0 \\ \text{et} \\ \forall x \in \left]x_0\,; b\right[, f'(x) > 0 \end{cases}$, alors f admet sur $]a\,;b[$ un minimum relatif en x_0 qui est $f(x_0)$.

(On dit que ce minimum $f(x_0)$ est atteint en x_0).

Si $f'(x_0) = 0$ et si $\begin{cases} \forall x \in \left]a\,; x_0\right[, f'(x) > 0 \\ \text{et} \\ \forall x \in \left]x_0\,; b\right[, f'(x) < 0 \end{cases}$, alors f admet sur $]a\,;b[$ un maximum relatif en x_0 qui est $f(x_0)$.

(On dit que ce maximum $f(x_0)$ est atteint en x_0).

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x^3 - 3x - 2$.

f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $f'(-1) = 0$; $\forall\ x \in]-2\,;-1[$, $f'(x) > 0$ et $\forall\ x \in]-1\,;1[$, $f'(x) < 0$.

Donc f admet sur $]-2\,;1[$ un maximum relatif en -1 qui est $f(-1)$, c'est-à-dire 0.

- $f'(1) = 0$; $\forall\ x \in]-1\,;1[$, $f'(x) < 0$ et $\forall\ x \in]1\,;2[$, $f'(x) > 0$.

Donc f admet sur $]-1\,;2[$ un minimum relatif en 1 qui est $f(1)$, c'est-à-dire -4.

Remarques

Un maximum relatif ou un minimum relatif est appelé un extremum relatif.

Pour s'entraîner : Exercices 13 et 14

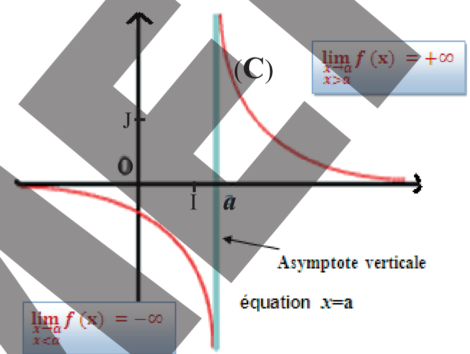
IV. Asymptotes

1. Asymptotes parallèles aux axes de cordonnées

a) Asymptote verticale

Définition

La droite d'équation $x = a$, a étant un nombre réel, est une asymptote verticale à la courbe représentative d'une fonction f si et seulement si $f(x)$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers a, éventuellement seulement à droite ou à gauche en a.

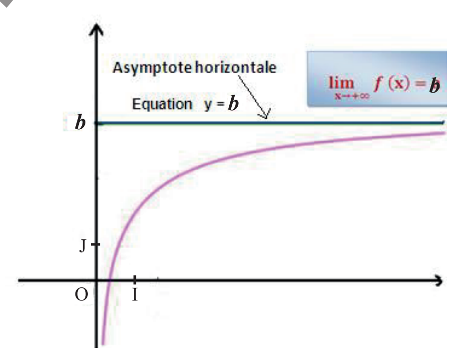


Pour s'entraîner : Exercices 15 et 16

b) Asymptote horizontale

Définition

La droite d'équation $y = b$ où b est un nombre réel est une asymptote horizontale à la courbe représentative d'une fonction f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si et seulement si $f(x)$ a pour limite b lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).



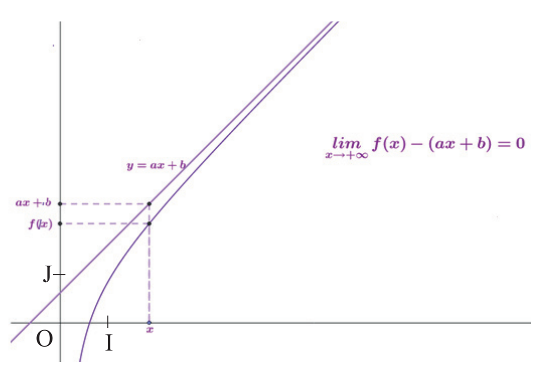
Pour s'entraîner : Exercices 17 et 18

2. Asymptote oblique

Définition

Le plan est muni d'un repère.
Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f et (D) la droite d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$.
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Lorsque $(f(x) - (ax + b))$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

NB : Pour qu'il y ait asymptote oblique, il faut au préalable que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).



Pour s'entraîner : exercices 19 et 20

QUESTION 1

Comment étudier la parité d'une fonction ?

Méthode

Pour étudier la parité d'une fonction f, on peut procéder comme suit :

Étape 1 : on vérifie que : $\forall\, x \in D_f$, on a : $(-x) \in D_f$

Étape 2 : on calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ dans l'expression de $f(x)$

- si $f(-x) = f(x)$, alors la fonction f est paire
- si $f(-x) = -f(x)$, alors la fonction f est impaire
- si $f(-x) \notin \{f(x)\,;\,-f(x)\}$, alors la fonction f n'est ni paire ni impaire

Remarque : *Si l'étape 1 n'est pas vérifiée, la fonction n'est ni paire ni impaire.*

Exercice

Étudie la parité de chacune des fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-après par :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2+1}}$ **2.** $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ **3.** $h(x) = x^3 - 2x$

Solution commentée

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 \neq 0$ et $\dfrac{1-x^2}{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$; $D_f = [-1\,;\,1]$

$\forall\, x \in D_f$, $x \in [-1\,;\,1] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Leftrightarrow -x \in [-1\,;\,1] \Leftrightarrow -x \in D_f$

$$f(-x) = \sqrt{\frac{1-(-x)^2}{(-x)^2+1}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2+1}} = f(x)$$

$\forall\, x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$, donc la fonction f est paire.

2. On a : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $-1 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $1 \notin \mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc la fonction g n'est ni paire ni impaire.

3. On a : $D_h = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = (-x^3) - 2(-x) = -x^3 + 2x = -h(x)$.

Donc la fonction h est impaire.

Exercice non corrigé

Étudie la parité de chacune des fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ **2.** $g(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ **3.** $h(x) = (x-3)^4 - (x+3)^4$

QUESTION 2

Comment déterminer une asymptote à la courbe représentative d'une fonction ?

Méthode

- **Asymptote verticale**

Les asymptotes verticales sont à chercher à partir des valeurs interdites.

On calcule $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ pour tout point a n'appartenant pas à D_f.

Si cette limite vaut $-\infty$ ou $+\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (Cf).

On pourrait être amené à calculer $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$ et / ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$.

QUESTION 2

- Asymptote horizontale

Les asymptotes horizontales s'obtiennent avec les limites en l'infini.

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b,\ b \notin \mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b,\ b \notin \mathbb{R}$), alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ (resp. $+\infty$)

- Asymptote oblique

Selon le programme, une équation de l'asymptote est donnée.

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ (resp. $+\infty$)

Exercice

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Détermine les équations des asymptotes à (C_f).

2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Démontre que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$.

Solution commentée

1. Déterminons l'ensemble de définition de f :

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \neq 0$.

$x^2 + x - 6 = 0$; $\Delta = 1 + 24 = 25$; $x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3 ; 2\}$

- Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{(x+3)(x-2)} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{1}{x+3} \times \dfrac{3x^2 - 1}{x-2} = +\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{1}{x+3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{x-2} = -\dfrac{26}{5}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{(x+3)(x-2)} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{1}{x+3} \times \dfrac{3x^2 - 1}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{1}{x+3} = +\infty$ et

  $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{x-2} = -\dfrac{26}{5}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{(x+3)(x-2)} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{1}{x-2} \times \dfrac{3x^2 - 1}{x+3} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ et

  $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{3x^2 - 1}{x+3} = \dfrac{11}{5}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{(x+3)(x-2)} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{1}{x-2} \times \dfrac{3x^2 - 1}{x+3} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{3x^2 - 1}{x+3} = \dfrac{11}{5}$.

✓ Déduisons les asymptotes à (C_f).

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à (C_f).
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C_f).

2. Déterminons l'ensemble de définition de g :

$\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_g \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 0$.

$x^2 + 4x + 3 = 0$; $\Delta = 16 - 12 = 4$; $x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$

$D_f =]-\infty \,;\, -3] \cup [-1 \,;\, +\infty[$

- Calculons la limite de $g(x) - (x + 2)$ lorsque x tends vers $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - (x+2)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2)\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2)\right)\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)\right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 4x + 3 - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2 = +\infty$.

✓ Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - (x+2)\right) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$.

Exercice non corrigé

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-4x^2 + 3x}{x^2 - 3x - 10}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Détermine les équations des asymptotes à (C_f).

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ et (C_g) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Démontre que la droite d'équation $y = -2x + 5$ est asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercices de fixation

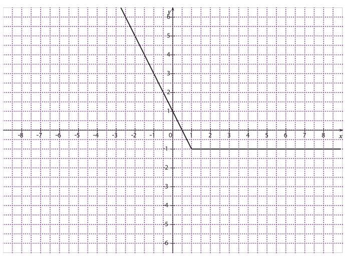
Fonction paire

1 Démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ est paire.

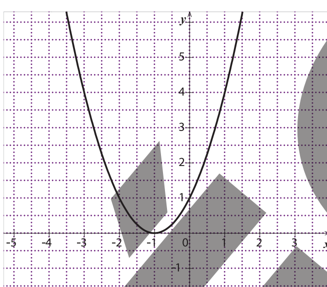
2 Démontre que la fonction f de $]1\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ n'est pas paire.

3 Parmi les courbes ci-dessous, identifie celle d'une fonction paire.

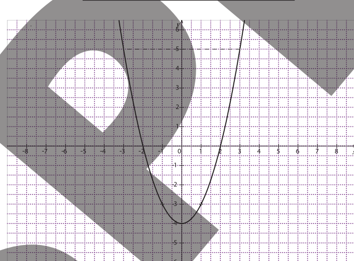
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



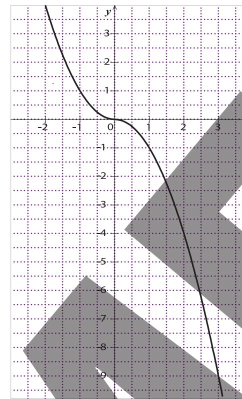
Fonction impaire

4 Démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$ est impaire.

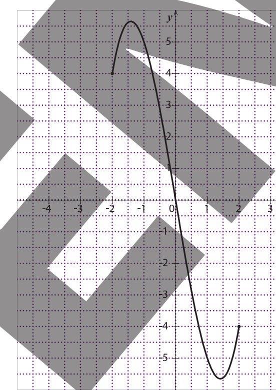
5 Démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-x + 5}{x^2 + 1}$ n'est pas impaire

6 Parmi les courbes ci-dessous, identifie celle d'une fonction impaire.

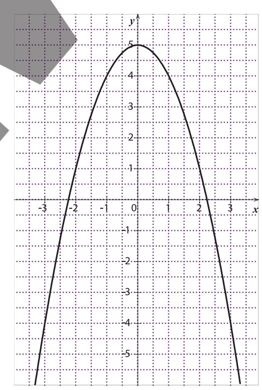
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Centre de symétrie

7 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
Démontre que le point A(−1 ; −2) est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

8 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.
Démontre que le point A(1 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

9 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$.
Démontre que le point A(0 ; 0) est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Axe de symétrie

10 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 - x + 1}.$$

Démontre que la droite (D) d'équation : $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.

11 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = (x - 3)^2 + 1$.
Démontre que la droite (D) d'équation : $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.

12 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos x$.

Démontre que la droite (D) d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f.

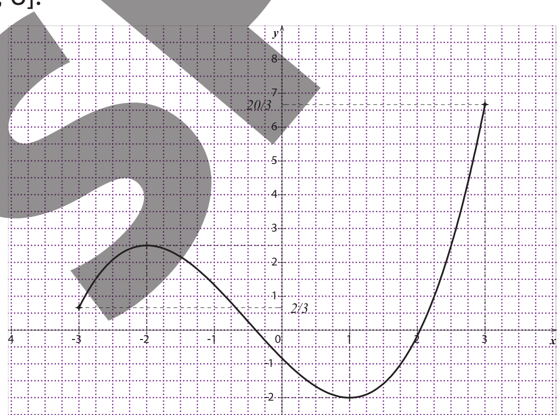
Extremum relatif

13 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition $[-3 ; 5]$ et dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

$f'(x)$	-3		0		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
	2	↘	-4	↗	0	↘	-2

Détermine les extremums relatifs de f et précise les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

14 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
Détermine les extremums relatifs de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.



Asymptote verticale

15 Démontre que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{7}{(x-1)^2}.$$

16 Démontre que la droite d'équation $x = -3$ est asymptote à la courbe (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 3}$.

Asymptote horizontale

17 Démontre que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x^2 + 3}$.

18 Démontre que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1 - x}{x + 8}$.

Asymptote oblique

19 Démontre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^3 + 3}.$$

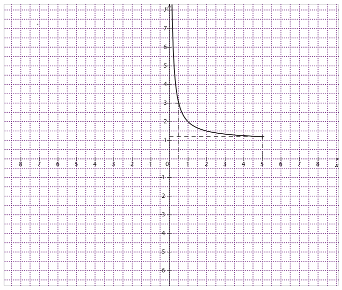
20 Démontre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 2}.$$

Exercices de renforcement / approfondissement

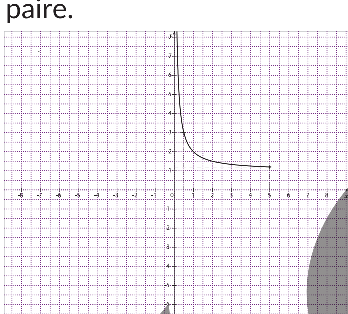
21 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

Complète le tracé de la courbe de f de sorte que f soit une fonction impaire.



22 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

Complète le tracé de la courbe de f de sorte que f soit une fonction paire.

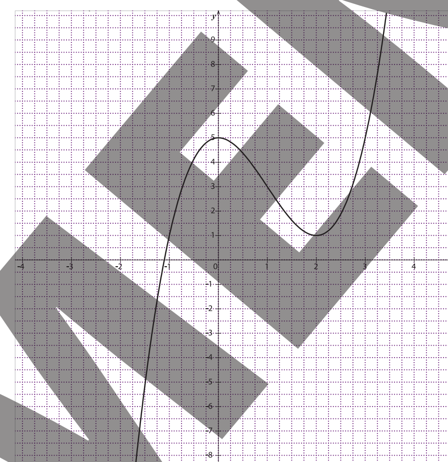


23 Dans chaque cas, coche la case correspondant à la bonne réponse, f étant une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

n°	La fonction f définie sur	Paire	Impaire	Ni paire ni impaire
1	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x$ est			
2	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ est			
3	$\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ est			
4	$\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ est			
5	$\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{7x}{x^2+1}$ est			
6	$[-4 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ est			
7	$[-3 ; 3]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ est			

24 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Détermine les extremums relatifs de f et les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.
2. Établis le tableau de variation de f.



25 À l'aide d'un contre-exemple, démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{x} - x^2 + 1$ n'est ni paire ni impaire.

26 Démontre que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x) = \dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{3+x}$ est impaire.

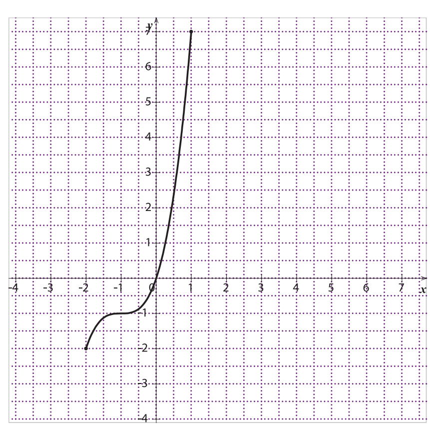
27 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{|x| - 1} - x^2 .$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Démontre que la fonction f est paire.

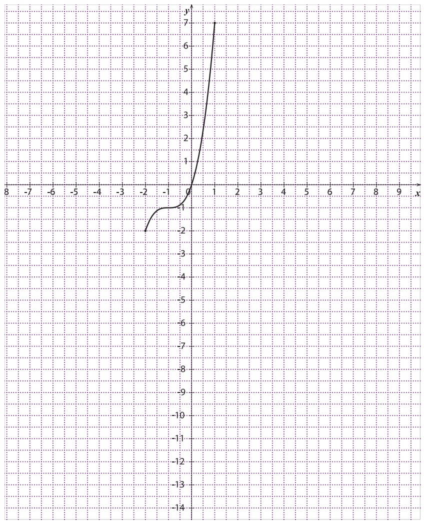
28 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$. Cette courbe admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.

Complète le tracé.



29 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 1]$. Cette courbe admet le point $A(-1 ; -1)$ comme centre de symétrie.

Complète le tracé.



30 Soit la fonction f de $[-3 ; 1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$.

1. Justifie que pour tout x de $[-3 ; 1]$, $f'(x) = (3x - 1)(x + 2)$.
2. Détermine le sens de variation de f.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Détermine les extremums relatifs de f et les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

31 Démontre que le point $S(2 ; 3)$ est un centre de symétrie des courbes d'équations :

1. $y = 3 + \frac{-5}{x-2}$.
2. $y = (x - 2)^3 + 3$.

32 Démontre que la droite d'équation $x = -4$ est un axe de symétrie des courbes d'équations :

1. $y = (4 + x)^2 - 15$
2. $y = |x + 4| + 1$

33 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine les nombres réels a et b sachant que :
   - le point $K(-1 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) ;
   - $f'(0) = -3$.

On admet que $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$ et on étudie f sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$

2. Démontre que pour tout x de $]-1; +\infty[$,
   $$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}$$
3. Déduis-en le sens de variation de f.
4. a) Calcule la limite de f en -1.
   b) Interprète graphiquement le résultat.
5. a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat.
6. Dresse le tableau de variation de f.
7. Trace les droites d'équations $x = -1$ et $y = -2$ ainsi que la courbe (C).

34 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{1 - x}$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 1cm.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f
2. Démontre que pour tout x de D_f, $f(x) = -x + 1 + \frac{4}{1-x}$
3. a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$.
   b) Interprète graphiquement les résultats des limites.
4. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
5. On admet que f est dérivable sur D_f.
   a) Démontre que $f'(x) = \frac{(1+x)(3-x)}{(1-x)^2}$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.
6. Soit (T) la tangente à (C) en O. Écris une équation de la droite (T).
7. Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$
   a) Démontre que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Étudie la position de (C) par rapport à (D).
8. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x + 1)$
   a) Démontre que la fonction g est impaire.
   b) Donne une interprétation du résultat.
9. Trace les droites (T) et (D) ainsi que la courbe (C).

35 Une ménagère produit x galettes par jour. Sa fille, en classe de 1ère, a modélisé en fonction du nombre x de galettes, le coût de production $C(x)$ journalier estimé en francs (F) par : $C(x) = 0{,}004x^2 + 30x + 1000$.

Elle vend ces galettes à 40 F l'unité. Chaque jour, elle réussit à écouler toute sa production. Mais elle constate qu'elle fait souvent des pertes selon le nombre de galettes produites.

La fille explique la situation que vit sa mère à ses camarades de classe.

Les élèves décident d'étudier et de représenter la fonction Bénéfice $B(x) = 40x - C(x)$.

1. Détermine le nombre de galettes à produire pour que le bénéfice soit nul. Tu donneras un arrondi d'ordre zéro du résultat.
2. a) Démontre que pour tout x ; $B'(x) = -0{,}008x + 10$.

   b) Déduis les sens de variations de la fonction bénéfice.

   c) Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif.
3. Combien de galettes doit-elle produire pour avoir un bénéfice maximal ; calcul ce bénéfice maximal.
4. Représente dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) la fonction bénéfice. *Unités graphiques : sur (OI), 150 unités de galettes pour 1 cm ; sur (OJ), 500FCFA pour 1 cm.*

36 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudie la parité de f.
2. Calcule la limite de f en $+\infty$.
3. Étudie les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
5. Construis (C) sur $\mathbb{R}$.

37 On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition. On note (C) sa courbe représentative.

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	1	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	7	↘	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0

À partir de ce tableau de variation :

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Détermine le signe de la dérivée $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Donne les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Donne une interprétation graphique de chacun de ces résultats.
4. Donne la limite de f en -3 ainsi qu'une interprétation graphique de ce résultat.
5. Donne la limite de f à droite et la limite de f à gauche en 2. Donne une interprétation graphique de ces résultats.
6. Construis une courbe susceptible de représenter la fonction f.

38

1. Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2};10\right]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

   a) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

   b) Déduis-en que f possède sur I un extremum puis précise-le.
2. On a représenté ci-dessous une sphère de rayon 1 et un cône de hauteur h, $h \in \left[\frac{5}{2};10\right]$, et de rayon r circonscrit à ce cône.

   Les points A, O, I, H et J sont coplanaires.

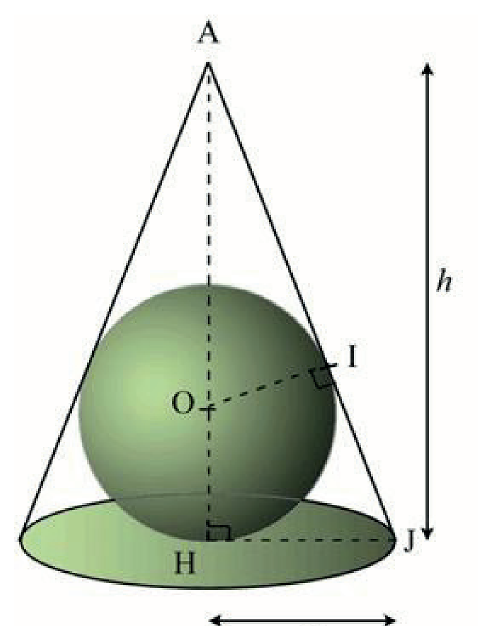
   Les droites (OI) et (AJ) sont perpendiculaires, de même que les droites (HJ) et (AH).

   On cherche à déterminer pour quelle valeur de h le volume du cône est minimal et quel est ce volume.

   a) Démontre que : $r^2 = \dfrac{h}{h-2}$.

   b) Soit $V(h)$ le volume du cône. Exprime $V(h)$ en fonction de h. On rappelle que le volume d'un cône est $\dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur.

   c) Conclus en utilisant la première question.



Situations complexes

39 Lors d'une visite dans une entreprise de fabrique d'emballages industriels, des élèves ont été informés d'un projet qu'elle veut réaliser. Il s'agit de construire un conteneur ayant la forme d'un parallélépipède rectangle pour un transport maritime à l'exportation.

Pour des raisons techniques, les dimensions intérieures de ce conteneur sont liées par les relations : $l + L = 11$ m, $l + h = 5{,}4$ m et $1 \leq l \leq 4$, où l, L et h sont respectivement la largeur, la longueur et la hauteur.

L'entreprise souhaite que le volume du conteneur soit maximal.

De retour en classe, des élèves d'une classe de $1^{\text{ère}}$ D cherchent à calculer les dimensions intérieures du conteneur pour lesquelles il a un volume maximum ainsi que ce volume maximum.

Faisant partie des élèves de cette classe, propose-leur une solution argumentée.

40 Une ménagère produit x galettes par jour. Sa fille, en classe de $1^{\text{ère}}$, a modélisé en fonction du nombre x de galettes, le coût de production $C(x)$ journalier estimé en F CFA par : $C(x) = 0{,}004x^2 + 30x + 1000$.

Elle vend ses galettes à 40 F CFA l'unité. Chaque jour, elle réussit à écouler toute sa production. Mais elle constate qu'elle fait souvent des pertes selon le nombre de galettes produites.

La fille explique la situation que vit sa mère à ses camarades de classe.

Les élèves décident d'étudier et de représenter la fonction bénéfice $B(x) = 40x - C(x)$.

1. Détermine le nombre de galettes à produire pour que le bénéfice soit nul. Tu donneras un arrondi d'ordre zéro du résultat.
2. Détermine le nombre de galettes à produire pour avoir un bénéfice maximal, puis calcule ce bénéfice maximal.

41 Lors du partage d'un héritage, ton ami Kouadio a droit à un terrain rectangulaire de 400 m² à extraire d'un vaste domaine familial.

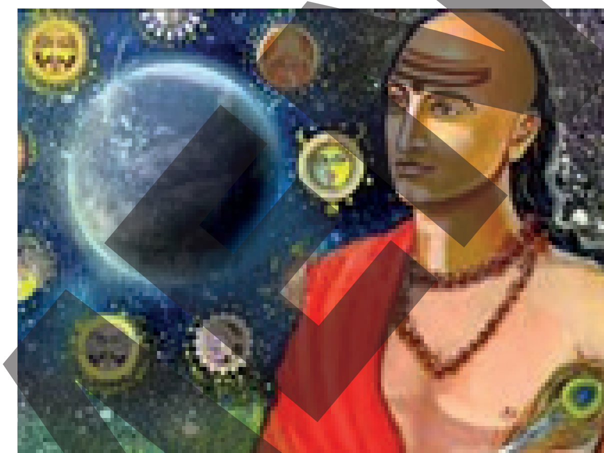
Afin de minimiser le coût de la clôture de ce terrain, Kouadio veut choisir les dimensions du terrain de telle sorte que son périmètre soit le plus petit possible.

Le chef de famille lui demande de choisir un terrain de 25 m de longueur et de 16 m de largeur. N'étant pas convaincu par cette proposition, il te sollicite.

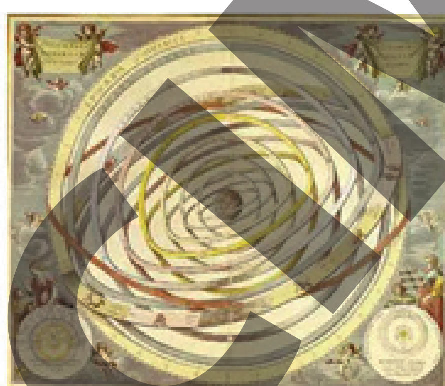
À l'aide d'un argumentaire basé sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de M Kouadio.

10 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

Claudius Ptolémée



Varahamihira



Commentaire de la Leçon

L'angle orienté remonte à la plus haute antiquité. L'utilisation la plus ancienne du sinus apparaît dans les Shulba Sutras écrits en indien ancien entre le VIII[e] siècle av. J.-C. et le VIe siècle, dans lesquels la valeur du sinus de $\frac{\pi}{4}$ (45°) est correctement calculée comme égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ avec une procédure pour cercler un carré (l'inverse de quarrer un cercle), bien que les indiens n'eussent pas encore développé la notion de sinus dans un sens général.

Plus tard, au IIe siècle, Ptolémée d'Alexandrie établissait des égalités de rapport équivalentes aux formules d'addition et de soustraction donnant sin(A + B) et cos (A + B). Notre sinus moderne est dérivé du mot latin sinus qui signifie « compartiment » ou « pli », venant d'une traduction erronée (par l'intermédiaire de l'arabe), du mot sanskrit jiva, aussi écrit jya. D'autres mathématiciens indiens poursuivirent les travaux d'Aryabhata en trigonométrie.

Varahamihira établit les formules : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) = \sin^2 x$. L'apprenant a déjà étudié les angles orientés et la trigonométrie en classe de seconde C.

En classe de première D, il renforcera ces acquis en abordant la somme et la différence des angles orientés, les formules d'addition, de duplication, de linéarisation et la résolution d'équations et inéquations trigonométriques. En classe de terminale scientifique, ces notions seront réinvesties à travers les nombres complexes et les transformations du plan. L'enseignant présentera les notions d'angles orientés à partir d'exemples accompagnés de figures et non de façon abstraite. Il habituera ses élèves à l'utilisation du cercle trigonométrique pour retrouver des formules ou résoudre des équations ou inéquations trigonométriques. Les angles orientés interviennent dans divers domaines dont l'astronomie, l'architecture...

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de la mesure principale d'un angle orienté, la définition de la somme ou de la différence de deux angles, la définition du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un nombre réel, la relation de Chasles, la définition d'une fonction périodique, les propriétés relatives à l'angle orienté nul, à l'angle orienté plat ou à l'angle orienté droit, les formules d'addition, de duplication et de linéarisation, les propriétés du sinus , du cosinus, de la tangente d'angles associés.
- **Reconnaître** la représentation graphique d'une fonction périodique.
- **Représenter** graphiquement les fonctions de types : $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \tan x$; $x \mapsto \cos(ax + b)$; $x \mapsto \sin \mapsto (ax + b)$.
- **Placer** sur le cercle trigonométrique, le point image d'un angle orienté dont on connaît une mesure.
- **Déterminer** la mesure principale d'un angle orienté, une mesure de la somme de deux angles en utilisant la relation de Chasles, à l'aide du cercle trigonométrique, le cosinus, le sinus et la tangente d'un nombre réel, des lignes trigonométriques de $-x$; $x+\pi$; $\pi - x$; $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$ à partir de celle de x en utilisant les angles associés, des lignes trigonométriques en utilisant les formules d'addition ou de duplication.
- **Transformer** des expressions trigonométriques en utilisant les formules d'addition ou de duplication, des expressions trigonométriques en utilisant les angles associés.
- **Réduire** l'expression $a \cos x + b \sin x$.
- **Justifier** que deux réels donnés sont des mesures d'un même angle orienté.
- **Résoudre** dans $\mathbb{R}$, les équations de type : $\cos x = \alpha$; $\sin x = \alpha$; $\tan x = \alpha$ (α étant un nombre réel donné) , dans $\mathbb{R}$, les équations de type : $\cos x = \cos\alpha$; $\sin x = \sin\alpha$; $\tan x = \tan\alpha$ (α étant un nombre réel donné), dans $\mathbb{R}$, les équations de type : $a \cos x + b \sin x + c = 0$ (a et b sont deux nombres réels non nuls donnés), graphiquement les inéquations de type : $\cos x \leq \alpha$; $\sin x \leq \alpha$; $\tan x \leq \alpha$ (α est un nombre réel donné).
- **Traiter une situation** faisant appel à la trigonométrie.

Situation d'Apprentissage

En vue de sélectionner, au début d'une année scolaire, les meilleurs élèves des classes de première D d'un lycée afin de participer au concours d'excellence régional de Mathématiques, trois des consignes données par le club Mathématiques sont les suivantes :

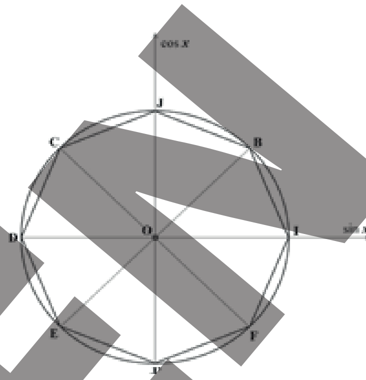
ABC étant un triangle équilatéral :

1. Détermine $Mes\left(\widehat{-2\overrightarrow{AB}, -3\overrightarrow{CA}}\right)$.
2. Résous (E): $x \in \mathbb{R}$, $\cos x - \sqrt{3}\ \sin x = 1$.
3. Résous (I): $x \in]-\pi ; \pi]$, $\sin x \leq -\frac{1}{2}$.

Les élèves utilisent les prés acquis, mais en vain.

Après leur échec sur ces consignes, ils sollicitent leurs professeurs de Mathématiques. Ces derniers les invitent à renforcer leurs connaissances sur les angles orientés, les formules de trigonométrie, les équations et inéquations trigonométriques.

Activité 1 Mesure principale d'un angle orienté et point image



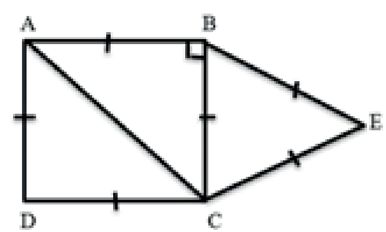
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère la figure ci-contre qui représente un octogone régulier IBJCDEJ'F direct de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique (C) de centre O.

1. Donne la mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}})$.
2. Indique les mesures de ces angles qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
3. Détermine le point image M sur (C) tel que : $mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Détermine le point image N sur (C) tel que : $mes(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{5\pi}{3}$.

Récapitulons

- Soit $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}})$ un angle orienté tel que : mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $-\pi < \alpha \leq \pi$, alors α est appelé la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ et on note Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$.
- Le point M tel que mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$ est appelé le point image de α sur le cercle trigonométrique.
- Soit l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$.
- Tout nombre réel de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec $-\pi < \alpha \leq \pi$, est appelé une mesure de l'angle orienté α.

Exercices de fixation



1 Observe la figure codée ci-contre.
Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}}\right)$.

2 Place sur le cercle trigonométrique les points M, N, P, Q, R et S, images respectives des angles orientés : $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{63\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $\frac{38\pi}{4}$ et $-\frac{7\pi}{3}$.

Activité 2 Angle orienté nul, angle orienté droit et angle orienté plat

On considère la figure de l'activité 1. Soit K le milieu de [OI] et P celui de [OJ'].

1. Donne la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}})$.
2. Déduis-en la mesure de l'angle orienté nul, l'angle orienté droit et l'angle orienté plat.

Récapitulons

- L'angle orienté nul $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}})$ a pour mesure principale 0.
- L'angle orienté droit direct $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$.
- L'angle orienté droit indirect $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{2}$.
- L'angle orienté plat direct $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$ a pour mesure principale π.

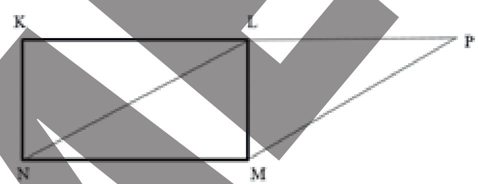
Exercice de fixation

3 Sur la figure ci-contre, KLMN est un rectangle et LPMN est un parallélogramme.

a) Nomme un angle orienté nul sur cette figure.

b) Nomme un angle orienté droit sur cette figure.

c) Nomme un angle orienté plat sur cette figure.



Activité 3 Opposé, somme, différence d'angles orientés - Égalité de Chasles

On considère la figure de l'activité 1.

1. a) Compare Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}})$.

b) Que peux- tu dire de ces deux angles ? Justifie ta réponse.

2. a) Détermine Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$ et calcule : Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$.

b) Compare ces deux résultats obtenus.

3. Détermine : Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}})$ - Mes $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$.

Récapitulons

On admet :

- Soit l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ tel que : mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$.
- L'opposé de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ a pour mesure $-\alpha$.
- La somme des mesures des deux angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$ est l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$ dont une mesure est : mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ + mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ = mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$.
C'est l'égalité de Chasles sur les angles orientés.
- La différence des mesures des deux angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$ est un angle orienté dont une mesure est : mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$ - mes $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$.

Exercice de fixation

4 K, S, P et D sont des points du plan tels que : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{KS}, \overrightarrow{KP}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KD}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

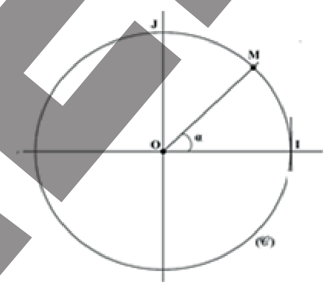
1. Détermine : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{KS}, \overrightarrow{KD}}\right)$.

2. Justifie que les droites (KS) et (KD) sont perpendiculaires.

5 Complète le tableau suivant :

Mes $(\hat{\alpha})$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$	
Mes $(\hat{\beta})$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$		
Mes $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$
Mes $(\hat{\alpha} - \hat{\beta})$			$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

Activité 4 Cosinus, Sinus, Tangente



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle trigonométrique et α est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

1. a) Détermine les coordonnées du point M.

b) Dis à quoi correspondent l'ordonnée de M et l'abscisse de M.

2. a) Trace la tangente (D) à (C) au point I puis, place le point T, intersection de (OM) et (D).

b) Détermine les coordonnées de T dans le repère (O, I, J) en considérant le triangle OTI.

c) Précise la condition d'existence de tan α.

Récapitulons

On admet :

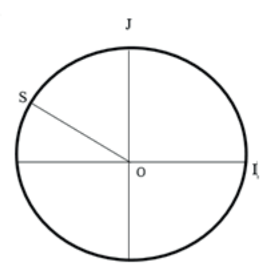
- Le cosinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou de α est l'abscisse du point M.
- Le sinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou de α est l'ordonnée du point M.
- Si l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est un angle orienté non droit, la tangente de $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}})$ est l'ordonnée du point T.
- On note : IT = tan α.

Exercices de fixation

6 Complète le tableau ci-dessous :

Mes $(\hat{\alpha})$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
Cos $(\hat{\alpha})$				
Sin $(\hat{\alpha})$				
Tan $(\hat{\alpha})$				

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).



Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle trigonométrique.

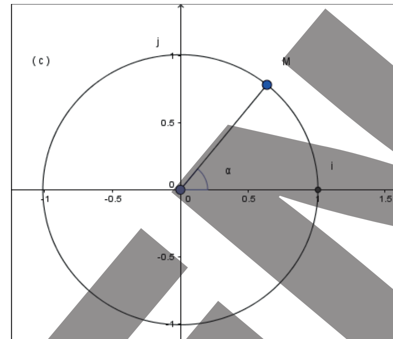
a) Détermine le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}})$.

b) Détermine le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}})$.

c) Détermine la tangente de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}})$.

Activité 5 Angles associés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère le cercle trigonométrique (C) et l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$ de mesure α.
On ne cherche pas à déterminer la valeur de α.
Pour chaque partie, tu reproduis la figure et tu réponds aux consignes indiquées.



1. Angles associés α et $-\alpha$.

a) Construis le point N sur (C) tel que :
mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}) = -\alpha$.
b) Compare : $\cos \alpha$ et $\cos(-\alpha)$.
c) Compare : $\sin \alpha$ et $\sin(-\alpha)$.
d) Compare : $\tan \alpha$ et $\tan(-\alpha)$.

2. Angles associés α et $\alpha + \pi$.

a) Construis le point P sur (C) tel que :
mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}}) = \alpha + \pi$.
b) Compare : $\cos \alpha$ et $\cos(\pi + \alpha)$.
c) Compare : $\sin \alpha$ et $\sin(\pi + \alpha)$.
d) Compare : $\tan \alpha$ et $\tan(\pi + \alpha)$.

3. Angles associés α et $\pi - \alpha$.

a) Construis le point K sur (C) tel que :
mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}}) = \pi - \alpha$.
b) Compare : $\cos \alpha$ et $\cos(\pi - \alpha)$.
c) Compare : $\sin \alpha$ et $\sin(\pi - \alpha)$.
d) Compare : $\tan \alpha$ et $\tan(\pi - \alpha)$.

4. Angles associés α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

a) Construis le point G sur (C) tel que :
mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$.
b) Compare : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ et $\sin \alpha$.
c) Compare : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ et $\cos \alpha$.
d) Compare : $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ et $\tan \alpha$.

5. Angles associés α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

a) Construis le point R sur (C) tel que :
Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OR}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. .
b) Compare : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\sin \alpha$.
c) Compare : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\cos \alpha$.
d) Compare : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\tan \alpha$.

Récapitulons

On admet :

- Pour tout nombre réel α :
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$;
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$;
$\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

- Pour tout nombre réel α :
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$;
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$;
$\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

- Pour tout nombre réel α :
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$;
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;
$\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.

- Pour tout nombre réel α :
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$;
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$;
$\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$.

- Pour tout nombre réel α :
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$;
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;
$\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$.

Exercices de fixation

8 Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous, une seule des trois réponses est exacte.
Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspond à la réponse exacte.

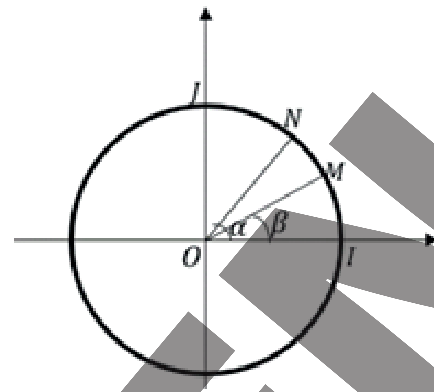
N°	Affirmations	A	B	C	D
1	Pour tout nombre réel α, $\cos(-\alpha)$ =	$\sin(-\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
2	Pour tout nombre réel α, $\sin(-\alpha)$ =	$\cos(-\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
3	Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(-\alpha)$=	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
4	Pour tout nombre réel α, $\cos(\pi + \alpha)$ =	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
5	Pour tout nombre réel α, $\sin(\pi + \alpha)$ =	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
6	Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $\tan(\pi + \alpha)$ =	$\tan(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha)$	$\sin(\alpha)$
7	Pour tout nombre réel α, $\cos(\pi - \alpha)$ =	$-\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
8	Pour tout nombre réel α, $\sin(\pi - \alpha)$ =	$\sin(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
9	Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\pi - \alpha)$ =	$\cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
10	Pour tout nombre réel α, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ =	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
11	Pour tout nombre réel α, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ =	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
12	Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ =	$-\tan(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
13	Pour tout nombre réel α, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ =	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
14	Pour tout nombre réel α, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ =	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
15	Pour tout nombre réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ =	$\tan(\alpha)$	$-\tan(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

9 On donne : $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Déduis les valeurs exactes de :

1. $\cos(-\frac{\pi}{3})$; $\sin(-\frac{\pi}{3})$; $\tan(-\frac{\pi}{3})$;
2. $\cos(\frac{4\pi}{3})$; $\sin(\frac{4\pi}{3})$; $\tan(\frac{4\pi}{3})$;
3. $\cos(\frac{2\pi}{3})$; $\sin(\frac{2\pi}{3})$; $\tan(\frac{2\pi}{3})$;
4. $\cos(\frac{5\pi}{6})$; $\sin(\frac{5\pi}{6})$ et $\tan(\frac{5\pi}{6})$.

Activité 6 Formules d'addition



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère le cercle trigonométrique (C) de centre O.

On considère les points M et N tels que : $mes\,(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}) = \alpha$ et $mes\,(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = \beta$, comme l'indique la figure ci-contre.

On rappelle que :

- OI = OM = ON = 1 ;
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ (1)
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb'$ (2)

1. Exprime $mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$ en fonction de α et de β. (On s'aidera de la relation de Chasles).

2. En utilisant la relation (1), démontre que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha - \beta)$.

3. **a)** Donne les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$.

b) En t'aidant de la relation (2), démontre que : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

4. Déduis- en une égalité à l'aide des questions 2 et 3.b).

5. En posant $\beta = -c$ dans le résultat de la question (4), déduis l'expression de cos($\alpha + c$) en fonction de cos$a$, cos$c$, sin$a$ et sin$c$.

6. **a)** On rappelle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sin$x$ = cos($\frac{\pi}{2} - x$).

En posant $x = \alpha + \beta$, déduis l'expression de sin($\alpha + \beta$) en fonction de cosα, cosβ, sinα et sinβ.

b) En posant $\beta = -c$, déduis l'expression de sin($\alpha - c$) en fonction de cosα, cos$c$, sinα et sin$c$.

Récapitulons

Pour tous nombres réels α et β,

- cos($\alpha - \beta$) = cosα cosβ + sinα sinβ ;
- cos($\alpha + \beta$) = cosα cosβ − sinα sinβ ;
- sin($\alpha - \beta$) = sinα cosβ − sinβ cosα ;
- sin($\alpha + \beta$) = sinα cosβ + sinβ cosα.

Exercices de fixation

10 Associie chaque élément de la colonne A à un élément de la colonne B pour avoir une formule correcte.

A		B
cos($a - b$)	•	• cos$a$ cos$b$ − sin$a$ sin$b$
cos($a + b$)	•	• sin$a$ cos$b$ − sin$b$ cos$a$
sin($a - b$)	•	• sin$a$ cos$b$ + sin$b$ cos$a$
sin($a + b$)	•	• cos$a$ cos$b$ + sin$a$ sin$b$

11 On donne : $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Détermine les valeurs exactes de : $\cos(\frac{7\pi}{12})$; $\sin(\frac{7\pi}{12})$; $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Activité 7 Formules de duplication

On pose : $\alpha = \beta$.

1. Exprime $\alpha + \beta$ en fonction de α.
2. En te servant des formules $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta$ et $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \ \cos\beta + \sin\beta \ \cos\alpha$:
   - **a)** Exprime $\cos(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
   - **b)** Exprime $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

Récapitulons

Pour tout nombre réel α, on a :
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ et $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \ \cos\alpha$.

Exercice de fixation

12 Sachant que $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{5\pi}{6} = 2 \times \frac{5\pi}{12}$, détermine les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(\frac{5\pi}{6})$.

Activité 8 Formules de linéarisation

Sachant que : $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ et $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$,

1. Exprime $\cos^2 \alpha$ en fonction de $\cos(2\alpha)$.
2. Exprime $\sin^2 \alpha$ en fonction de $\cos(2\alpha)$.

Récapitulons

- Pour tout nombre réel α, on a : $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ et $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.
- Linéariser une expression trigonométrique, c'est exprimer cette expression trigonométrique sous la forme de somme d'expressions ne contenant pas de puissance.

Exercice de fixation

13 Sachant que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, détermine les valeurs exactes de $\sin^2(\frac{\pi}{8})$ et $\cos^2(\frac{\pi}{8})$.

Activité 9 Transformation de somme en produit

1. **a)** Exprime la somme $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\cos\beta$.

   b) En posant : $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$, exprime α en fonction de p et q et exprime β en fonction de p et q.

   c) Déduis-en l'expression de $\sin p + \sin q$ en fonction d'un produit en cosinus de p et de q et sinus de p et de q.

2. **a)** Exprime la somme $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ en fonction de $\cos\alpha$ et de $\cos\beta$.

   b) En posant : $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$, exprime α et β en fonction de p et q.

   c) Déduis-en l'expression de $\cos p + \cos q$ en fonction d'un produit en cosinus de p et de q.

3. **a)** Exprime la différence $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\sin\beta$.

   b) En posant $\alpha + \beta = p$ et $\alpha - \beta = q$, exprime α et β en fonction de p et q.

   c) Déduis-en l'expression de $\cos p - \cos q$ en fonction d'un produit en sinus de p et de q.

4. **a)** Exprime la différence $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\cos\beta$.

   b) En posant $\alpha + \beta = p$ et $\alpha - \beta = q$, exprime α et β en fonction de p et q.

   c) Déduis-en l'expression de $\sin p - \sin q$ en fonction d'un produit des expressions en sinus de p et de q et en cosinus de p et de q.

Récapitulons

Pour tous nombres réels p et q, on a :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$;
- $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$;
- $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$.

Exercice de fixation

14 Transforme en produits les sommes ci-dessous :

a) $\cos(7x) + \cos(3x)$; **b)** $\cos(10x) - \cos(5x)$;

c) $\sin(x) + \sin(13x)$; **d)** $\sin(9x) - \sin(6x)$.

Activité 10 Transformation de produit en somme

1. a) Réduis la somme $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

   b) Exprime le produit $\cos\alpha\ \cos\beta$ en fonction de $\cos(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha - \beta)$.

2. a) Réduis la différence $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$.

   b) Exprime le produit $\sin\alpha\ \sin\beta$ en fonction de $\cos(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha - \beta)$.

3. a) Réduis la somme $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

   b) Exprime le produit $\sin\alpha\ \cos\beta$ en fonction de $\sin(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha - \beta)$.

4. a) Réduis la différence $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$.

   b) Exprime le produit $\sin\beta\ \cos\alpha$ en fonction de $\sin(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha - \beta)$.

Récapitulons

Pour tous nombres réels α et β, on a :

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$;
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$;
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$;
- $\sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$.

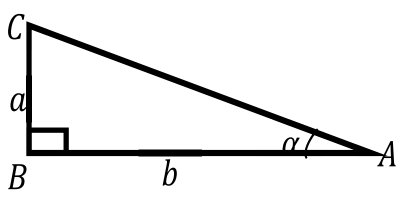
Exercice de fixation

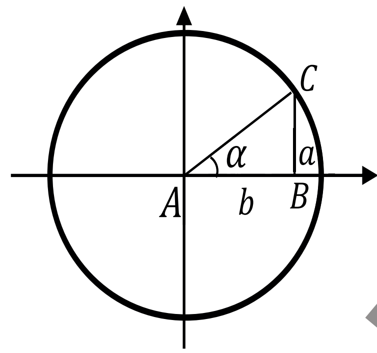
15 Transforme les produits suivants en somme :

a) $\sin(x)\ \cos(3x)$; **b)** $\sin(2x)\ \sin(5x)$; **c)** $\cos(7x)\ \cos(3x)$.

Activité 11 Réduction de l'expression $a\cos x + b\sin x$, $(a\,;b) \neq (0\,;0)$

Soit un triangle rectangle de côtés a et b.





Partie A

1. Exprime AC en fonction de a et b.
2. Soit l'expression : A = $a\cos x + b\sin x$.

   a) Justifie que, pour tous nombres réels a et b non nuls, $A = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$.

   b) Réécris $a\cos x + b\sin x$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$.
3. En utilisant une formule d'addition, réduis en fonction du cosinus, la somme : A = $a\cos x + b\sin x$.

Partie B

1. Exprime AC en fonction de a et b puis déduis-en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ en fonction de a et b.
2. On considère l'expression A telle que : A = $a\cos x + b\sin x$.
   Exprime $a\cos x + b\sin x$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$.
3. En utilisant une formule d'addition, réduis en fonction du sinus, la somme A = $a\cos x + b\sin x$.

Récapitulons

Pour tous nombres réels a et b non nuls, la somme $a\cos x + b\sin x$ peut se réduire sous l'une des formes suivantes :

- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-a)$.
- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\beta + x)$.

Exercice de fixation

16 Associe chaque expression de la colonne A à la réduction qui lui correspond dans la colonne B.

A	B
$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ •	• $2\sqrt{3}\cos(x - \frac{\pi}{6})$
$3\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ •	• $\cos(-\frac{\pi}{3} - x)$
$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ •	• $2\cos(x - \frac{\pi}{6})$
$\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$ •	• $2\cos(x + \frac{\pi}{3})$

Activité 12 Étude et représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Justifie que la fonction f est périodique de période 2π.

   b) Étudie la parité de la fonction f.
3. a) Étudie le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

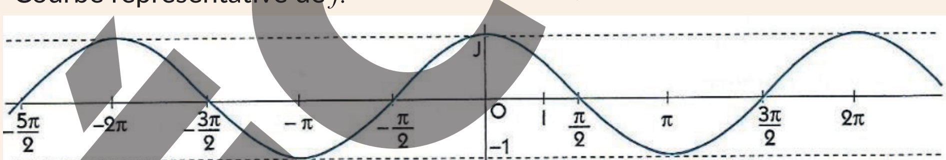
   b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. a) Complète le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$									

   b) Construis la courbe (C_f) sur $[0\ ;\ \pi]$, sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ puis sur $[-\frac{5\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{2}]$, dans le plan muni du repère (O, I, J).

Récapitulons

- La fonction cosinus est définie par : $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$.
- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus est périodique de période 2π.
- La fonction cosinus a une courbe sinusoïdale (décrit un mouvement d'oscillation d'amplitude 1).
- Courbe représentative de f.



Exercice de fixation

17 Pour chacune des affirmations ci-dessous, écris le numéro suivi de (V) si l'affirmation est vraie ou de (F) si elle est fausse.

1. La fonction cosinus a pour ensemble de définition $]0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction cosinus est impaire.
3. La fonction cosinus est périodique de période π.
4. La fonction cosinus est périodique de période 2π.

Activité 13 Étude et représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

Soit (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Justifie que la fonction f est périodique de période 2π.

   b) Étudie la parité de la fonction f.

3. a) Étudie les sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

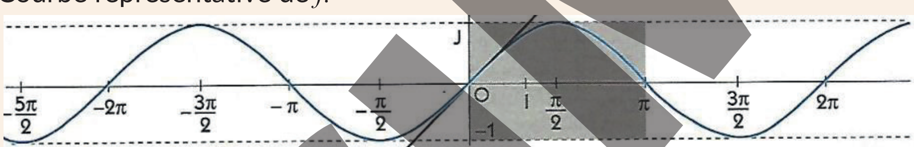
4. a) Complète le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x									

b) Construis la courbe (C_f) sur $[0 ; \pi]$, sur $[-\pi ; \pi]$ puis sur $[-\frac{5\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}]$, dans le plan du muni repère (O, I, J).

Récapitulons

- La fonction sinus est définie par : $\sin \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \sin x$
- La fonction sinus est impaire.
- La fonction sinus est périodique de période 2π.
- La fonction sinus a une courbe sinusoïdale (décrit un mouvement d'oscillation d'amplitude 1).
- Courbe représentative de f.



Exercice de fixation

18 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\sin x$.
Étudie puis représente f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Activité 14 Étude et représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Détermine l'ensemble de définition de f.

2. a) Justifie que la fonction f est périodique de période π.

b) Étudie la parité de la fonction f.

3. a) Étudie le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

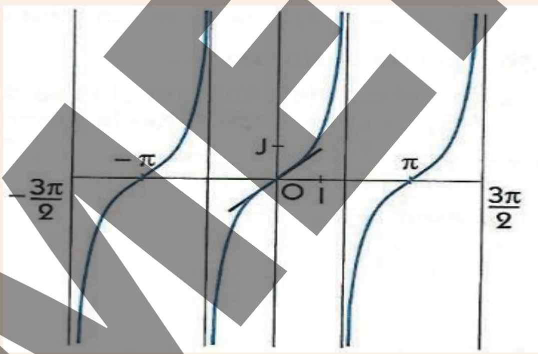
4. a) Complète le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tan x									

b) Construis la courbe (Cf) sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, sur $[-\pi ; \pi]$ puis sur$[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$,dans le repère (O, I, J).

Récapitulons

- La fonction tangente est définie par : $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \tan x$
- La fonction tangente est définie pour tout nombre réel x tel que : $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction tangente est impaire.
- La fonction tangente est périodique de période π.
- La fonction tangente n'a pas une courbe sinusoïdale et n'oscille pas entre −1 et 1.
- Elle est discontinue sur $[-\pi ; \pi]$.
- Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les asymptotes de la courbe.
- Les points de coordonnées $(k\frac{\pi}{2} ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les centres de symétries de la courbe.

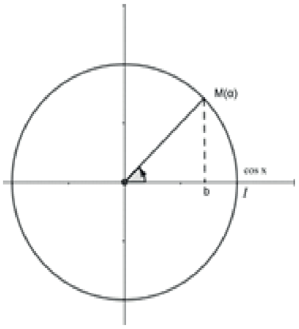


Exercice de fixation

19 Réponds par vrai(V) si l'affirmation est vraie ou par faux(F) sinon.

1. La fonction tangente est définie par : $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   $x \mapsto \tan x$
2. La fonction tangente est paire.
3. La fonction tangente est périodique de période π.
4. La fonction tangente est continue sur $[-\pi ; \pi]$.

Activité 15 Équation trigonométrique du type $\cos x = b$



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et on note (C) le cercle trigonométrique.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = b$ où x désigne l'inconnue et b un nombre réel quelconque.

1. Justifie que si $b > 1$ ou $b < -1$, cette équation n'admet pas de solution.
2. Supposons que : $b \in [-1 ; 1]$. On sait qu'il existe un nombre réel α tel que : $\cos \alpha = b$. En utilisant le cercle trigonométrique, justifie que : $\cos x = b \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Récapitulons

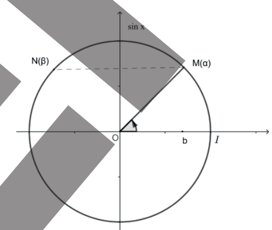
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $|b| > 1$ ($b > 1$ ou $b < -1$), alors l'équation $\cos x = b$ n'admet pas de solution.
- Si $|b| \leq 1$ ($-1 \leq b \leq 1$), alors on recherche une solution particulière α tel que : $\cos \alpha = b$ puis on écrit : $\cos x = b \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha$.
- Les solutions de cette équation sont de la forme : $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

20 Résous chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\cos x = \dfrac{1}{2}$; (E_2) : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (E_3) : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = \dfrac{4}{3}$.

Activité 16 Équation du type sin $u = b$



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et on note (C) le cercle trigonométrique.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = b$ où x désigne l'inconnue et b un nombre réel quelconque.

1. Justifie que si $b > 1$ ou $b < -1$, cette équation n'admet pas de solution.
2. Supposons que : $b \in [-1\ ;\ 1]$. On sait qu'il existe un nombre réel α tel que : $\sin x = b$. En utilisant le cercle trigonométrique, justifie que : $\sin x = b \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Récapitulons

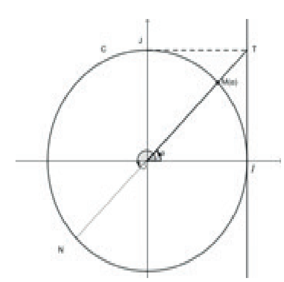
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Si $|b| > 1$ ($b > 1$ ou $b < -1$), alors l'équation $\sin u = b$ n'admet pas de solution.
- Si $|b| \leq 1$ ($-1 \leq b \leq 1$), alors on recherche une solution particulière α tel que : $\sin\alpha = b$ puis on écrit : $\sin u = b \Leftrightarrow \sin u = \sin \alpha$. Les solutions de cette équation sont de la forme : $\alpha + 2k\pi$ ou $\pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

21 Résous chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\sin x = \dfrac{1}{2}$; (E_2) : $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (E_3) : $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\dfrac{5}{2}$

Activité 17 Équation du type tan $u = b$



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et on note (C) le cercle trigonométrique.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = c$ où x désigne l'inconnue et c un nombre réel quelconque.

On sait qu'il existe un nombre réel α tel que : $\tan \alpha = c$.

En utilisant le cercle trigonométrique, justifie que : $\tan x = c \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Récapitulons

- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Pour résoudre une équation du type : $\tan u = c$, on recherche une solution particulière α telle que : $\tan \alpha = c$ puis on écrit : $\tan u = c \Leftrightarrow \tan u = \tan \alpha$
- Les solutions de cette équation sont de la forme : $\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

22 Résous chacune des équations ci-dessous :

(E_1) : $\tan x = \sqrt{3}$; (E_2) : $\tan(x - \frac{\pi}{3}) = 1$.

Activité 18 : Équation du type $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soit (E) : $x \in \mathbb{R}$, $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

1. Réduis la somme $a \cos x + b \sin x$ sous forme d'une expression en cosinus ou en sinus.
2. a) Justifie que l'équation (E) peut prendre la forme : $\cos(x - \alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ou $\sin(\beta + x) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

   b) Détermine la condition sur $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ pour que l'équation (E) ait au moins une solution.
3. Déduis- en la résolution de (E) en t'appuyant sur les activités précédentes.

Récapitulons

Pour résoudre une équation du type $a \cos x + b \sin x + c = 0$, on peut procéder de la façon suivante :

- lorsque $a = 0$ ou $b = 0$, on résout une équation du type $\sin x = B$ ou $\cos x = A$.
- lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on réduit l'expression $a \cos x + b \sin x$, puis on résout ensuite une équation du type : CosX = P ou Sin X = Q.

Exercice de fixation

23 Résous chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$; (E_2) : $3\cos x + \sqrt{2} \sin x = 3$.

Activité 18 Inéquations trigonométriques

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $x \in [-2\pi ; 2\pi]$, $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

   a) Construis sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$, $(C_{\cos})$, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \cos x$.

   b) Trace la droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{2}$.

   c) Détermine, sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$, les abscisses des points de la courbe qui sont situés en dessous de la droite (D).

   d) Déduis-en l'ensemble solution de l'inéquation (I).

2. On se propose de résoudre chacune des inéquations ci-dessous.

$(I_1) : x \in]-\pi ; \pi]$, $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $(I_2) : x \in [0 ; 2\pi[$, $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; (I_3) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq -\frac{1}{2}$.

- **a)** Construis le cercle trigonométrique.
- **b)** Place sur le cercle trigonométrique les points M et M' qui ont pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.
- **c)** Déduis par lecture graphique, sur ce cercle, les solutions de chacune des inéquations (I_1), (I_2) et (I_3).

3. On se propose de résoudre l'inéquation (I) : $x \in]-\pi ; \pi]$, $\tan x \leq -1$.

- **a)** Détermine les contraintes sur l'inconnue.
- **b)** Résous l'équation (E) : $x \in]-\pi ; \pi]$, $\tan x = -1$.
- **c)** Place sur le cercle trigonométrique les points images $M(-\frac{\pi}{4})$ et $M'(\frac{3\pi}{4})$.
- **d)** Trace l'axe des tangentes (T) puis marque en couleur les arcs de cercle dont les points images ont une tangente inférieure ou égale à -1.
- **e)** Déduis par lecture graphique, sur ce cercle, les solutions de l'inéquation (I).

Récapitulons

- On peut utiliser le cercle trigonométrique ou la représentation graphique d'une fonction trigonométrique pour résoudre des inéquations trigonométriques.
- Il est judicieux d'utiliser le cercle trigonométrique pour la résolution des inéquations du type : $\cos u \leq a$; $\sin u \leq a$ et $\tan u \leq a$.

Exercice de fixation

24 Résous dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ chacune des inéquations ci-dessous.

$(I_1) : \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(I_2) : \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(I_3) : \tan x \leq 1$.

I. MESURES ET PROPRIÉTÉS D'ANGLES ORIENTÉS

1. Mesure principale d'un angle orienté et point image d'un angle orienté

Propriétés–définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- On appelle cercle trigonométrique, le cercle orienté de centre O et de rayon 1.
- Soit $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ un angle orienté.

Il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}})$.

Le point M est appelé le point image de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ sur le cercle trigonométrique.

- La mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
- Soit $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale α.

On appelle mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ tout nombre de la forme : $\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Remarques

- Si M est le point image de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et si α est une mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, alors on dit aussi que M est le point image de α.
- Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}})$, on écrit : Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}}) = \alpha$ ou MES $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}}) = \alpha$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4

2. Angle orienté nul, angle orienté droit et angle orienté plat

Propriétés

- L'angle orienté nul a pour mesure principale 0.
- L'angle droit direct a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$.
- L'angle droit indirect a pour mesure principale $-\frac{\pi}{2}$.
- L'angle plat direct a pour mesure principale π.

Remarques

L'angle orienté plat est noté $\hat{\pi}$; l'angle droit positif est noté $\left(\widehat{\frac{\pi}{2}}\right)$ et l'angle droit négatif est noté $\left(\widehat{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

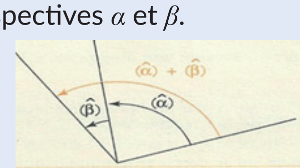
Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6

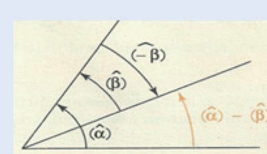
3. Opposé, somme et différence de deux angles orientés

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β.

- L'angle orienté $-\hat{\alpha}$ a pour mesure $-\alpha$.
- L'angle orienté $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ a pour mesure $\alpha + \beta$.
- L'angle orienté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ a pour mesure $\alpha - \beta$.





Remarques

- Une mesure de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$ est la somme d'une mesure de $\hat{\alpha}$ et d'une mesure de $\hat{\beta}$.
- Une mesure de $(\hat{\alpha}) - (\hat{\beta})$ est la différence d'une mesure de $\hat{\alpha}$ et d'une mesure de $\hat{\beta}$.
- La somme ou la différence de deux mesures principales n'est pas automatiquement une mesure principale.

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8 ; 9

4. Propriétés des angles orientés

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

Pour s'entraîner : Exercice 10

Propriété

Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ des vecteurs non nuls. On a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{u}'})=(\widehat{\vec{v},\vec{v}'})$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et tous nombres réels k et k' non nuls.

$(\widehat{\vec{v},\vec{u}})=-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Si $k>0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Si $k<0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\pi$

Si $k\,k'>0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},k'\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

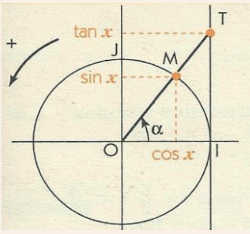
Si $k\,k'<0$, alors $(\widehat{k\vec{u},k'\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\pi$

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12 ; 13

II. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES D'ANGLES ORIENTÉS

1. Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Définitions



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On note (C) le cercle trigonométrique.

Soit x un nombre réel et α la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$ dont x est une mesure.

- Le cosinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$ ou de α est l'abscisse du point M dans le repère (O, I, J).
- Le sinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$ ou de α est l'ordonnée du point M dans le repère (O, I, J).
- Si l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$ est un angle orienté non droit, la tangente de $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$ est l'ordonnée du point T dans le repère (O, I, J).
- On note : IT = tan α.
- La tangente de α noté tan α est le nombre réel $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Conséquences

Pour tout nombre réel α ,
(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

(2) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.

(3) Pour tout nombre entier relatif k : $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$; $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$.

(4) Pour tout nombre entier relatif k et pour tout x différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ et $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

Exemples

- $\cos\left(\frac{\pi}{6}-10\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2(5\pi)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2022\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2(1011\pi)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\tan(-\pi+503\pi)=\tan(-\pi)=0$.

Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15 ; 16

2. Lignes trigonométriques de : $-\alpha$, $+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ à partir de celle de α (angles associés)

Propriétés

Pour tout nombre réel α :

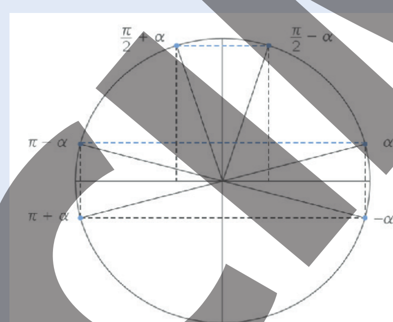
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$;

$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{1}{\tan\alpha}$;

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\frac{1}{\tan\alpha}$.



$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$;

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

Exemple d'application

Calculons A tel que : $A=\cos x+5\sin(\frac{\pi}{2}+x)+3\cos(\pi+x)-2\cos(\frac{\pi}{2}-x)+3\cos(-x+\pi)-2\sin(-x)$.

On a : $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$; $\cos(\pi+x)=-\cos x$; $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$;

$\cos(-x+\pi)=\cos(\pi-x)=-\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$.

Par conséquent, $A=\cos x+5\cos x-3\cos x-2\sin x-3\cos x+2\sin x$;

$A=3\cos x-2\sin x-3\cos x+2\sin x$

On conclut que : A = 0.

Pour s'entraîner : Exercice 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21

3. Formules d'addition, de duplication et de linéarisation

a) Formules d'addition

Propriétés

Quels que soient les nombres réels a et b :

(1) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$;
(2) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
(3) $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$;
(4) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Exemples

- $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
- $\cos\frac{5\pi}{12} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$,donc : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$
- $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
- $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- $\sin\frac{11\pi}{12} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
- $\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$,donc : $\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Pour s'entraîner : exercices 22 ; 23 ; 24

b) Formules de duplication

Propriétés

Quel que soit le nombre réel a :

(1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$;

(2) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

(3) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

Exemple d'application

On donne : $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos\alpha < 0$. Calculons $\cos2\alpha$ et $\sin2\alpha$.

- On a : $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

  $\cos2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25}$.

  On conclut que : $\cos2\alpha = \frac{7}{25}$.

- On a : $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

  Puisque $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, on obtient $\cos^2\alpha = \cos2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{7}{25} + \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

  Or $\cos\alpha < 0$, donc : $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

  On a donc : $\sin2\alpha = 2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)$; soit $\sin2\alpha = -\frac{24}{25}$.

Pour s'entraîner : exercices 25 ; 26 ; 27

c) Formules de linéarisation

Propriétés

Quel que soit le nombre réel a :

(1) $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; **(2)** $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Exemples d'application

$\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$; or $\dfrac{\pi}{8}\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin\dfrac{\pi}{8}>0$.

Par suite, on conclut que : $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

$\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$; or $\dfrac{\pi}{8}\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$.

Par suite, on conclut que : $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Pour s'entraîner : Exercice 28 ; 29 ; 30

4. Transformation d'une somme en produit et d'un produit en une somme

a) Transformation d'une somme en produit

Propriétés

Pour tous nombres réels p et q, on a :

- $\cos p+\cos p=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Exemples d'application

Transformons en produit, chacune des sommes suivantes :
$\cos(5x)-\cos(x)$; $\sin(x)+\sin(2x)$; $\cos(5x)+\cos(2x)$ et $\sin(x)-\sin(3x)$.

- $\cos(5x)-\cos(x)=-2\sin\left(\dfrac{5x-x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5x-x}{2}\right)=-2\sin(3x)\sin(2x)$.
- $\sin(x)+\sin(2x)=2\sin\left(\dfrac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-2x}{2}\right)=2\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\cos\left(-\dfrac{x}{2}\right)=2\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
- $\cos(5x)+\cos(2x)=2\cos\left(\dfrac{5x+2x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{5x-2x}{2}\right)=2\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$.
- $\sin(x)-\sin(3x)=2\sin\left(\dfrac{x-3x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+3x}{2}\right)=2\sin(-x)\cos(2x)=-2\sin(x)\cos(2x)$.

Pour s'entraîner : Exercices 31 ; 32

b) Transformation d'un produit en une somme

Propriétés

Pour tous nombres réels p et q, on a :

- $\cos q \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)]$
- $\sin q \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) - \cos(p+q)]$
- $\sin q \cos q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) + \sin(p-q)]$

Exemple d'application

Transformons en une somme, chacun des produits suivants : sin($2x$) sin(x) ; sin(x) cos(x) et cos(x) ; cos($3x$).

- $\sin(2x)\sin(x) = \frac{1}{2}[\cos(2x-x) - \cos(2x+x)] = \frac{1}{2}[\cos(x) - \cos(3x)]$.
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}[\sin(x+x) + \sin(x-x)] = \frac{1}{2}[\sin(2x) + \sin(0)] = \frac{1}{2}\sin(2x)$.
- $\cos(x)\cos(3x) = \frac{1}{2}[\cos(x+3x) + \cos(x-3x)] = \frac{1}{2}[\cos(4x) + \cos(2x)]$.

Pour s'entraîner : exercices 33 ; 34

5. Réduction de l'expression $a \cos x + b \sin x$ avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$

Quels que soient les nombres réels a et b tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, on a :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ où α est un nombre réel tel que : $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

ou encore

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\beta + x)$ où β est un nombre réel tel que : $\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

Exemple d'application

- $\sqrt{3}\cos x + \sin x = r\cos(x - \alpha)$.

On a : $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$ tel que : $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc : $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On conclut que : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$.

- On a aussi : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = r\sin(\beta + x)$.

On a : $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $\beta \in]-\pi ; \pi]$ tel que : $\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc : $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

On conclut que : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin(\frac{\pi}{3} + x)$.

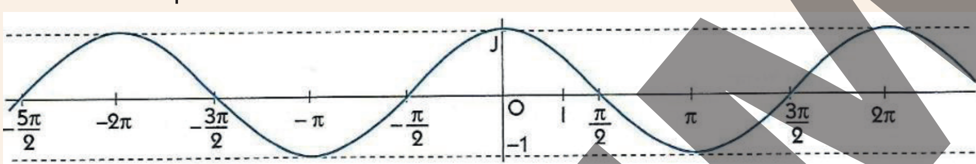
III. ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1. Étude de la fonction cosinus

- La fonction cosinus est définie par : $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$
- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus est périodique de période 2π.
- On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est l'opposée de la fonction sinus.
- Le tableau de variation sur $[0\ ;\ \pi]$ est :

x	0	π
$\cos'x = -\sin x$	0	0
$\cos x$	1 ↘	-1

- Courbe représentative de la fonction cosinus



- La fonction cosinus a une courbe sinusoïdale qui oscille entre -1 et 1.

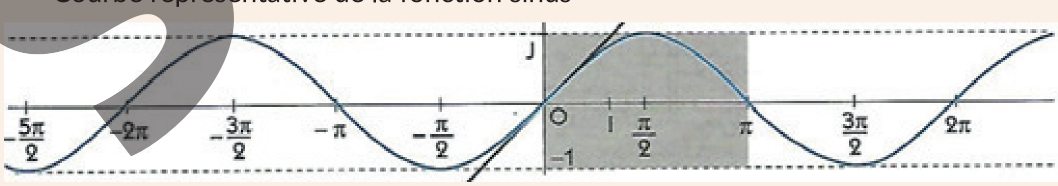
Pour s'entraîner : Exercice 36 ; 37

2. Étude de la fonction sinus

- La fonction sinus est définie par : $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$
- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction sinus est impaire.
- La fonction sinus est périodique de période 2π .
- On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.
- Le tableau de variation sur $[0\ ;\ \pi]$ est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'x = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

- Courbe représentative de la fonction sinus



- La fonction sinus a une courbe sinusoïdale qui oscille entre -1 et 1.

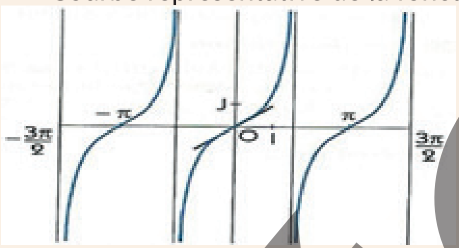
Pour s'entraîner : Exercices 38 ; 39

3. Étude de la fonction tangente

- La fonction tangente est définie par : $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \tan x$
- La fonction tangente est définie pour tout nombre réel x tel que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- La fonction tangente est impaire.
- La fonction tangente est périodique de période π.
- On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction tangente est dérivable sur : $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$.
- Le tableau de variation sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ est :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$1 + \tan^2 x$	$+$	||
$\tan x$	$0 \nearrow +\infty$	||

- Courbe représentative de la fonction tangente



- La fonction tangente n'a pas une courbe sinusoïdale et n'oscille pas entre -1 et 1.
- Elle est discontinue sur $[-\pi ; \pi]$.
- Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les asymptotes de la courbe.
- Les points de coordonnées $(k\frac{\pi}{2} ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont les centres de symétries de la courbe.

Pour s'entraîner : exercices 40 ; 41

IV. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1. Équations du type : $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\tan x = c$

Propriété

Pour tous nombres réels α et β ;

$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = -\beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exemple d'application

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$S = \left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Pour s'entraîner : exercices 42 ; 43

Propriété 2

Pour tous nombres réels α et β ;

$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemples d'application

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pour s'entraîner : Exercices 44 ; 45

Propriété 3

Pour tous nombres réels α et β différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$\tan\alpha = \tan\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemples d'application

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

$\tan(x - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(x - \frac{\pi}{6}) = \tan(-\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour s'entraîner : Exercices 46 ; 47

Remarques

Les équations du type $\cos x = a$, $\sin x = b$ et $\tan x = c$ ont une infinité de solutions, c'est pourquoi leur résolution est restreinte à un intervalle afin de trouver les réels k et écrire toutes les solutions recherchées.

Pour une solution de la forme $v + 2k\pi$ de $]a\,;b[$, On a :

$a < v + 2k\pi < b$

$a - v < 2k\pi < b - v$

$\frac{a-v}{2\pi} < k < \frac{b-v}{2\pi}$

k prendra toutes les valeurs entières comprises entre $\frac{a-v}{2\pi}$ et $\frac{b-v}{2\pi}$, puis on déterminera les solutions u_k pour chaque valeur de k.

2. Équation du type a cos$x$ + b sin$x$ + c = 0

- Lorsque $a = 0$ ou $b = 0$, on résout une équation du type sin$x$ = B ou cos$x$ = A.
- Lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on réduit l'expression a cos$x$ + b sin x, puis on résout ensuite une équation du type: Cos $X = P$ ou Sin $X = Q$.

Exemple d'application

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}$ cos$x$ + sin$x$ − 1 = 0.

La forme réduite de $\sqrt{3}$ cos$x$ + sin$x$ est : $2\cos(x - \frac{\pi}{6})$.

(E) $\Leftrightarrow 2\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 1 = 0$.

$\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

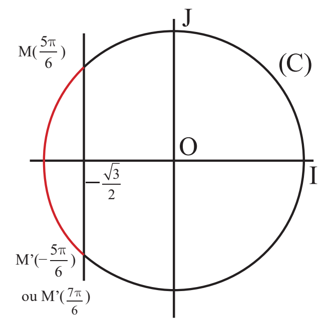
$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Pour s'entraîner : exercices

V. INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exemple

Résolvons l'inéquation : $x \in]-\pi\,;\pi]$, $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



On trace le cercle trigonométrique (C) et la droite d'équation : $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les réels x solutions de l'inéquation sont ceux dont les abscisses des points images sur (C) sont strictement inférieures à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Voir la partie rouge du cercle).

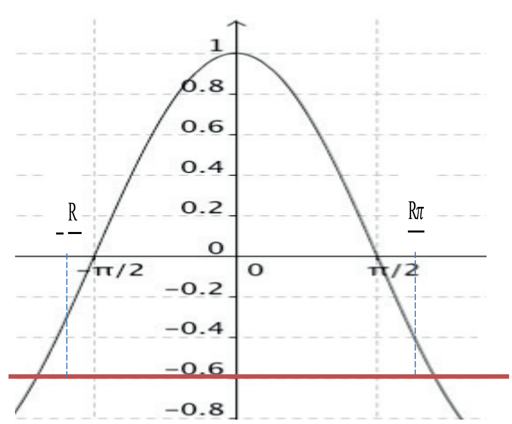
Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\left]\frac{5\pi}{6};\pi\right] \cup \left]-\pi;\frac{-5\pi}{6}\right[$.

Remarques

On peut aussi utiliser la représentation graphique de la fonction cosinus sur $]-\pi\,;\pi]$ pour résoudre cette inéquation.

- On construit sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \cos x$;
- On trace la droite (D) d'équation : $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- On cherche par lecture graphique, sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, les abscisses des points de la courbe qui sont situés en dessous de la droite (D).
- L'ensemble solution de l'inéquation (I) est :

$$S = \left]-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};\pi\right[.$$



Pour s'entraîner : exercices 49 ; 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54

QUESTION 1

Comment déterminer la mesure principale d'un angle orienté à partir d'une de ses mesures ?

Méthode 1

Pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure $\frac{a\pi}{b}$ où $(a ; b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^*_+$ et $a > b$, on peut procéder comme suit :

- on effectue la division de a par b (à l'aide de la calculatrice) ;
- on cherche le nombre pair k le plus proche de ce résultat ;
- on retranche $k\pi$ de $\frac{a\pi}{b}$.

Exercice

Détermine la mesure principale de $\frac{77\pi}{3}$.

Solution commentée

- On effectue la division de 77 par 3 (à l'aide de la calculatrice) ; on obtient : $\frac{77\pi}{3} = 25{,}666$.
- On cherche le nombre pair k le plus proche de 25, 666 : c'est-à-dire, $k = 26$.
- On retranche 26π de $\frac{77\pi}{3}$: $\frac{77\pi}{3} - 26\pi = \frac{77\pi - 78\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$. La mesure principale de $\frac{77\pi}{3}$ est donc : $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice non corrigé

Détermine la mesure principale de $\frac{75\pi}{4}$.

Méthode 2

Pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure $-\frac{a\pi}{b}$ où $(a ; b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^*_+$ et $a > b$, on peut procéder comme suit :

- on effectue la division de a par b (à l'aide de la calculatrice) ;
- on cherche le nombre pair k le plus proche de ce résultat ;
- on ajoute $k\pi$ à $-\frac{a\pi}{b}$.

Exercice

Détermine la mesure principale de $-\frac{95\pi}{6}$.

Solution commentée

- On effectue la division de 95 par 6 (à l'aide de la calculatrice) ; on obtient : $\frac{95}{6} = 15{,}833$.
- On cherche le nombre pair k le plus proche de 15,833 : c'est-à-dire, $k = 16$.
- On ajoute 16π à $-\frac{95\pi}{6}$: $16\pi - \frac{95\pi}{6} = \frac{96\pi - 95\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$. La mesure principale de $\frac{95\pi}{6}$ est donc $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice non corrigé

Détermine la mesure principale de $-\frac{125\pi}{7}$.

QUESTION 2

Comment résoudre des équations du type : cos $u = a$, $a \in \mathbb{R}$ et sin $u = b$, $b \in \mathbb{R}$?

Méthode

- Pour résoudre une équation du type : cos $u = b$, on peut procéder de la façon suivante :
  Si $|b| > 1$ ($b > 1$ ou $b < -1$), alors cette équation n'admet pas de solution.
  Si $|b| \leq 1$ ($-1 \leq b \leq 1$), alors :
  ✓ on recherche une solution particulière α telle que : cos $\alpha = b$;
  ✓ on écrit : cos $u = b \Leftrightarrow$ cos u = cos α

Les solutions de cette équation sont de la forme : $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Pour résoudre une équation du type : sin $u = b$, on peut procéder de la façon suivante :
  Si $|b| > 1$ ($b > 1$ ou $b < -1$), alors cette équation n'admet pas de solution.
  Si $|b| \leq 1$ ($-1 \leq b \leq 1$), alors :
  ✓ on recherche une solution particulière α telle que : sin $\alpha = b$;
  ✓ on écrit : sin $u = b \Leftrightarrow$ sin u = sin α

Les solutions de cette équation sont de la forme : $\alpha + 2k\pi$ ou $\pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : (E_1) : cos $x = \sqrt{3}$ et (E_2) : sin $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution commentée

- Résolution de l'équation (E_1)

On a $\sqrt{3} \notin [-1 ; 1]$ donc l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

- Résolution de l'équation (E_2)

On a $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1 ; 1]$ donc l'équation (E_2) admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

De plus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = sin $\frac{\pi}{4}$,

sin$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

sin$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $S_{(E_1)} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : (E_1) : sin $x = \frac{3}{2}$ et (E_2) : cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

QUESTION 3

Comment résoudre une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ où a, b et c étant des réels ?

Méthode 1

Pour résoudre une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$, on peut procéder comme suit :

- Lorsque $a = 0$ ou $b = 0$, on résout une équation du type $\sin x = B$ ou $\cos x = A$.
- Lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$:

✓ soit on transforme l'expression $a \cos x + b \sin x$ en une expression de la forme $r \cos(x - \alpha)$ où

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et α]− π ; π] tels que : $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

puis on résout une équation du type : cos X = P.

✓ soit on transforme l'expression $a \cos x + b \sin x$ en une expression de la forme $r \sin(\beta + x)$ où

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et α]− π ; π] tels que : $\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

puis on résout une équation du type : sin X = Q.

Exercice

Résous dans ℝ l'équation (E) : $\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1 = 0$.

Solution commentée

1ère méthode

- On a : $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ donc $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)$.

  On a : $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $-\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

  Donc $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\cos x \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \sin x \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

  D'où : $\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1 = 0$ équivaut à : $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

- $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ équivaut à : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

  $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ équivaut à : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ équivaut à:$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. .

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ équivaut à:$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, $S_{(E)}=\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ ;-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2ème méthode

On peut aussi procéder de la façon suivante :

On a : $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$ donc $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)$.

On a : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $-\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

Donc $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\cos x+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

D'où : $\sqrt{3}\cos x-\sin x-1=0$ équivaut à : $2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$.

$2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$ équivaut à : $\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ équivaut à : $\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ équivaut à : $x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x+\dfrac{2\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ équivaut à:$x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, $S_{(E)}=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E) : $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=1$.

QUESTION 4

Comment résoudre une équation du type tan $x = b$?

Méthode 1

Pour résoudre une équation du type tan $x = b$, on peut procéder comme suit :

- On détermine un angle α tel que b = tan α ;
- On utilise la propriété : tan$x$ = tan $\alpha x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : tan $x = \sqrt{3}$.

Solution commentée

On a : $\sqrt{3}$ = tan $\frac{\pi}{3}$.

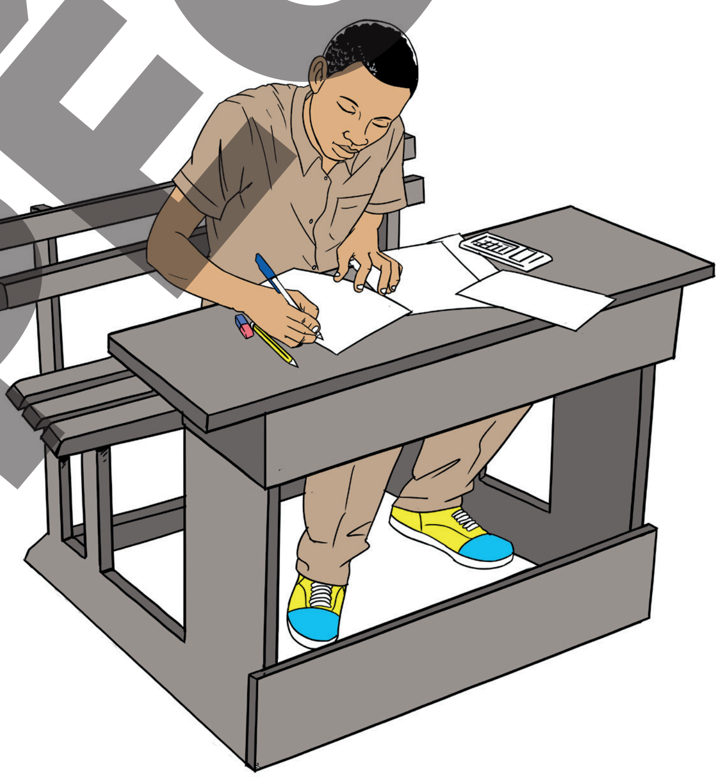
tan $x = \sqrt{3}$ équivaut à : tan x = tan $\frac{\pi}{3}$.

tan $x = \sqrt{3}$ équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$S_{(E)} = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.



Exercices de fixation

Mesures d'angles orientés et point image d'un angle orienté

1 Parmi les mesures suivantes, indique celles qui sont des mesures principales :

83π ; -2π : $-\pi$; $\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{19\pi}{17}$; $\frac{15\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{7}$; 0.

2 Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux sinon.

1. La mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
2. Toute mesure d'un angle orienté est de la forme : $\alpha + k \times \pi$.
3. On considère le cercle trigonométrique et on munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) direct. Le point M tel que mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right) = \alpha$ est appelé point image.

3 On considère l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tel que :
mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{5\pi}{6}$.
Détermine cinq autres mesures de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Soit (C) le cercle trigonométrique de rayon OI.
Construis les points images M, N, R et V des angles orientés respectifs : $\hat{m} = \frac{\pi}{6}$, $\hat{n} = -\frac{2\pi}{3}$, $\hat{r} = \frac{11\pi}{4}$ et $\hat{v} = \frac{3\pi}{5}$.

Angle orienté nul, angle orienté droit, angle orienté plat

5 Relie chaque type d'angle orienté de la colonne A à sa mesure principale de la colonne B.

A
Angle orienté
Angle orienté nul
Angle orienté droit direct
Angle orienté droit indirect
Angle orienté plat direct

B
Mesure principale
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
0
π

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et (C) est le cercle de centre O et de rayon OI.
On donne les angles orientés ci-dessous tels que :

mes $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{-\pi}{2}$; mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = 0$; mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right) = \pi$.

Fais une représentation de chacun des angles orientés ci-dessus.

Opposé d'un angle orienté, somme et différence d'angles orientés

7 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Si α est la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ alors $-\alpha$ est aussi la mesure principale de l'opposé de l'angle $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
2. L'opposé de l'angle orienté $-\frac{\pi}{8}$ est $\frac{\pi}{8}$.
3. Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures principales respectives α et β. Si α et β sont de même signe, alors $\alpha - \beta$ est la mesure principale de l'angle orienté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$.
4. Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures principales respectives α et β. La somme $\alpha + \beta$ appartient nécessairement à $[-\pi\ ;\ \pi]$.

8 $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont deux angles orientés.
Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	
Une mesure de $\hat{\beta}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$		
Une mesure de ($\hat{\alpha} + \hat{\beta}$)		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$
Une mesure de ($\hat{\alpha} - \hat{\beta}$)			$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

9 On donne les angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de mesures indiquées dans le tableau ci-dessous.
Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Mes ($\hat{\alpha}$)	0	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{3}$
mes ($\hat{\beta}$)	π	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{21\pi}{4}$	$-\pi$
Mes ($\hat{\alpha} + \hat{\beta}$)				$-\pi$	
Mes ($\hat{\alpha} - \hat{\beta}$)			$-\frac{5\pi}{12}$		
Mes ($-\hat{\alpha}$)					
Mes ($-\hat{\beta}$)					

Propriétés des angles orientés

10 On donne les mesures des angles orientés ci-dessous.

mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{3}$; mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et

mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{-\pi}{6}$.

En utilisant la relation de Chasles, calcule mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$ puis mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)$.

11 Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre de la proposition permettant d'avoir une affirmation correcte.

		Proposition A	Proposition B	Proposition C
1	$(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ est égal à	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$
2	$(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}})$ est égal à	$(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$	$\hat{\pi} - (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
3	Si $k < 0$ alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})$ est égal à	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$	$\hat{\pi} - (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
4	Si $kk' < 0$ alors $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}})$ est égal à	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$

12 Recopie et complète le tableau ci-dessous :

mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	0	$-\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\pi$
2 mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$				
Mes $(\widehat{-3\vec{u},\vec{v}})$				
Mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$				
Mes $(\widehat{\frac{-1}{2}\vec{u},\frac{-1}{3}\vec{v}})$				

13 Soit ABC un triangle quelconque.

Démontre que :

$$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \pi$$

Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

14 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Il existe un nombre réel α tel que : sin $\alpha = 2$.
2. Soit $\hat{a}$ un angle orienté de mesure principale α et M le point image de α situé sur le cercle trigonométrique. M a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.
3. Sur le cercle trigonométrique, le cosinus d'un angle correspond à la grandeur algébrique lue sur l'axe des ordonnées.
4. La tangente d'un nombre réel α est telle que : $\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
5. La tangente d'un nombre réel α existe si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z}$.
6. tan 0 n'existe pas.
7. Pour tout nombre réel α, $-1 \leq \tan\alpha \leq 1$.
8. Pour tout nombre réel α et tout entier relatif k, $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$.
9. Pour tout nombre réel α, $|\cos\alpha| \leq 1$.
10. Pour tout nombre réel α, $\sin^2\alpha \cos^2\alpha = -1$.

15 Sans utiliser la calculatrice, recopie et complète le tableau suivant :

Angles de mesure α	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{2\pi}{3}$
sin α						
cos α						
tan α						

16

1. On donne : sin $\alpha = \frac{1}{5}$.
   Détermine les valeurs possibles de cosα et de tanα.
2. On donne : cos $\alpha = \frac{1}{4}$.
   Détermine les valeurs possibles de sin α et de tanα.

Angles associés $-\alpha$; $\alpha + \pi$; $\pi - \alpha$; $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$

17 Soit α la mesure d'un angle orienté.

Recopie et exprime chacune des expressions suivantes en fonction de cos α ou sin α.

a) $\cos(-\alpha) =$ **b)** $\sin(\pi - \alpha) =$ **c)** $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$

d) $\sin(\pi + \alpha) =$ **e)** $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$

18 Soit β une mesure d'un angle orienté.

Recopie et exprime chacune des expressions suivantes en fonction de cos α ou sin α.

a) $\sin(-\alpha) =$ **b)** $\cos(\pi - \alpha) =$ **d)** $\cos(\pi + \alpha) =$

c) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ **e)** $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$

19 Soit α une mesure d'un angle orienté.
Recopie et exprime chacune des expressions suivantes en fonction de tan α.

a) $\tan(-\alpha) =$ **b)** $\tan(\pi - \alpha) =$ **c)** $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$

d) $\tan(\pi + \alpha) =$ **e)** $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$

20 On donne :

$A = 5\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos\alpha + 3\cos(\pi + \alpha) + 3\cos(\pi - \alpha)$.
Démontre que : A = 0.

21 On donne : $B = \cos x - \sin(-x - \frac{3\pi}{2})$
Démontre que : B = 0.

Formules d'addition

22 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

$\cos(a - b) = \cos a.\sin b + \sin a.\cos b$

3. $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
4. $\sin(a + b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
5. $\sin(a - b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

23

1. Calcule $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.
2. Déduis-en les valeurs exactes de : $\sin\frac{\pi}{12}$ puis $\cos\frac{5\pi}{12}$.

24 Pour tout nombre réel x, on pose :

$$A = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \textit{ et } B = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right).$$

Démontre que : A = B.

Formules de duplication

25 Pour chacune des informations ci-dessous, réponds par vrai si elle est vraie ou par faux sinon.

1. $\cos 2\alpha = \sin^2\alpha.\cos^2\alpha$.
2. $\sin 2\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha$.
3. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
4. $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha$.
5. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

26 On donne : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calcule $\cos 2\alpha$ puis $\sin 2\alpha$.
2. Déduis-en $\tan 2\alpha$. (*Plusieurs cas sont possibles*).

27 On donne : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1. Calcule $\cos 2\alpha$ puis $\sin 2\alpha$.
2. Déduis-en $\tan 2\alpha$ (*plusieurs cas sont possibles*).

Formules de linéarisation

28 Fais correspondre chaque expression du tableau A à sa forme linéarisée dans le tableau B.

Tableau A
$\cos^2\alpha$
$\sin^2\alpha$

Tableau B
$\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

29

1. À partir d'une formule de linéarisation, calcule $\cos^2\frac{5\pi}{12}$.
2. Déduis-en la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{2})$.

30 On donne : $A = \sin^3 x$ et $B = \cos^3 x$.

1. Linéarise A en fonction de $\cos x$.
2. Linéarise B en fonction de $\sin x$.

Transformation d'une somme en produit

31 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
3. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
4. $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

32 Transforme en produit chacune des sommes A, B, C et D telles que :

$A = \sin 2x - \sin 5x$ $B = \cos x + \cos 3x$

$C = \sin 4x + \sin\frac{\pi}{2}$ $D = \cos(2x) - \cos(\frac{\pi}{3})$

Transformation d'un produit en somme

33 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $\cos p \cos q = \frac{1}{2}\cos(p+q) + \frac{1}{2}\cos(p-q)$
2. $\sin p \sin q = \frac{1}{2}\cos(p+q) - \frac{1}{2}\cos(p-q)$
3. $\sin p \cos q = \frac{1}{2}\sin(p+q) + \frac{1}{2}\sin(p-q)$

34 Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on donne les expressions A, B et C telles que :

$A = \cos 2x \cos 3x$; $B = \sin x \cos 2x$ et $C = \sin 4x \sin 5x$.

Transforme chacune des expressions A, B et C en somme.

Réduction de l'expression : $a \cos x + b \sin x$

35 On considère les expressions D, E et F telles que :

$D = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$; $E = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$ et

$F = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

1. Réduis D sous forme d'expression en $\cos x$.
2. Réduis E sous forme d'expression en $\sin x$.
3. Réduis F selon ton choix.

Étude et représentations graphiques de fonctions trigonométriques

36 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto \cos x$ est paire.
2	La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
3	La fonction $x \longmapsto \cos x$ n'est pas périodique.
4	La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \cos x$, oscille entre −1 et 1.

37 Construis sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \cos x$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

38 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2	La fonction $x \longmapsto \sin x$ est paire.
3	La fonction $x \longmapsto \sin x$ est périodique de période π.
4	La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \sin x$, oscille entre −1 et 1.

39 Construis sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ la courbe représentative de la fonction $\longmapsto \sin x$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

40 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto \tan x$ est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
2	La fonction tangente est périodique de période π.
3	La fonction tangente a une courbe oscillante entre −1 et 1.
4	La fonction tangente est continue en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.
5	La fonction tangente est une fonction paire.

41 Construis sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ la courbe représentative de la fonction $\longmapsto \tan x$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Équation du type : $\cos x = \cos a$ ou $\cos x = b$

42 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$; $(E_2) : \cos x = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

$(E_3) : \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(E_4) : \cos x = -\frac{1}{2}$; $(E_5) : \cos x = -3$.

43 Résous graphiquement chacune des équations ci-dessous.

$(E_1) : \cos x = 0$; $(E_2) : \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$(E_3) : \cos x = -\frac{1}{2}$; $(E_4) : \cos x = 5$.

Équation du type : sin x = sin α ou sin $x = b$

44 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$; (E_2) : $\sin x = \text{Sin}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

(E_3) : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; (E_4) : $\sin x = 6$; (E_5) : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

45 Résous graphiquement chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\sin x = -2$; (E_2) : $\sin x = 0$;

(E_3) : $\sin x = -1$; (E_4) : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; (E_5) : $\sin x = \frac{1}{2}$.

Équation du type : tan x = tan α ou tan $x = b$

46 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\tan x = 0$; (E_2) : $\tan x = -1$;

(E_3) : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; (E_4) : $\tan x = \sqrt{3}$.

47 Résous graphiquement chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\tan x = 1$; (E_2) : $\tan x = -1$;

(E_3) : $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; (E_4) : $\tan x = 0$.

Équation du type : $a \cos x + b \sin x = 0$

48 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$;

(E_2) : $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$;

(E_3) : $-\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$;

(E_4) : $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + 1 = 1$;

(E_5) : $\sqrt{3}\cos x - \sin x + \sqrt{3} = 0$.

Inéquation du type : cos $x \le b$ ou cos $x \ge b$

49 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $\cos x \le 2$; (I_2) : $\cos x \le \frac{1}{2}$;

(I_3) : $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$; (I_4) : $\cos x \le 0$; (I_5) : $\cos x \le -1$.

50 Résous dans $\mathbb{R}$, à partir du cercle trigonométrique, chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; (I_2) : $\cos x \ge -\frac{1}{2}$;

(I_3) : $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; (I_4) : $\cos x > 1$.

Inéquation du type : sin $x \le b$ ou sin $x \le b$

51 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $\sin x \le -\frac{1}{2}$; (I_2) : $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(I_3) : $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; (I_4) : $\sin x \le 3$; (I_5) : $\sin x \ge -\frac{3}{2}$.

52 Résous à partir du cercle trigonométrique, chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $\sin x \le -\frac{1}{2}$; (I_2) : $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(I_3) : $\sin x > 2$; (I_4) : $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Inéquation du type : tan $x \le b$ ou tan $x \le b$

53 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

(I_1) : $\tan x < \sqrt{3}$; (I_2) : $\tan x \le 0$;

(I_3) : $\tan x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$; (I_4) : $\tan x \ge -1$.

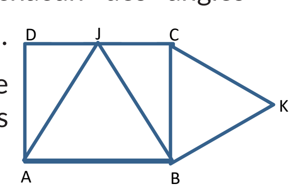
Exercices de renforcement / approfondissement

54 Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. On note I, J et K les milieux respectifs des cotés [BC], [CA] et [AB]. Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CO}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IJ}})$.

55 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de sens direct. J et K sont deux points tels que les triangles ABJ et BKC sont équilatéraux.

1. Détermine la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ}})$.
2. Déduis-en une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ}})$.



3. Détermine une mesure de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CK}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CK}})$.
4. Déduis-en la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK}})$.
5. Détermine une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BJ}})$; $(\widehat{\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JK}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{JA}})$.

56 EFG est un triangle équilatéral direct. D est le symétrique de E par rapport à F.

1. Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BJ})$; $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JK})$ et $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GD})$.
2. Démontre que le triangle EGD est rectangle.

57 ABCD est un losange tel que :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

1. Exprime en fonction de α, une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$
2. Détermine une mesure de l'angle : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.

58 Soit A et B deux points du plan tels que B est un point du cercle trigonométrique de centre A.

1. Construis les points images M, P, Q et R du cercle (C) tels que :

a) mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{4}$; b) mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}}) = \frac{2\pi}{3}$;

c) mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}}) = -\frac{5\pi}{6}$; d) mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}}) = -\frac{\pi}{3}$.

2. Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}})$; b) $(\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AM}})$; c) $(\widehat{\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AP}})$; d) $(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}})$.

59 x est un nombre réel .On donne A et B tels que :

$$A = sin(x - \pi) + sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cos(x + \pi) - 2cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ et}$$

$$B = sin\, x\, sin\, 3x + cos\, x\, cos\, 3x.$$

1) Exprime A en fonction de sin x.
2) Exprime B en fonction de cos $2x$.

60 On donne les nombres réels E et F tels que pour tout nombre réel x ,

$$E = \cos(x + \pi) + \cos(x - 5\pi) + \sin(x - \pi) - \sin(x + 2\pi)$$

$$F = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$$

Exprime respectivement E et F sous la forme a sin x + b cos x avec a et b deux nombres réels.

61 On donne deux nombres réels I et J tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, I = cos $(x + \frac{2\pi}{3})$ + cos x + cos $(x + \frac{4\pi}{3})$ et

J = sin $(x + \frac{2\pi}{3})$ + sin $(x + \frac{4\pi}{3})$ + sin x.

Démontre que I et J sont nuls.

62 On donne deux nombres réels P et Q tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, P = $\cos^4 x - \sin^4 x$ et Q = $\cos^4 x + \sin^4 x$.

Linéarise P et Q en fonction de cos $2x$ et sin $2x$.

63 On donne les expressions C et D telles que :

C = $\cos^3 x$ et D = $\sin^4 x$.

1. Démontre que : C = $\frac{1}{4}$ cos $3x$ + $\frac{3}{4}$ cos x
2. Démontre que : D = $\frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ cos $4x$ − $\frac{1}{2}$ cos $2x$.

64

1. Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, cos $3x$ = 4 cos3x − 3 cos x.
2. On pose : B = $\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$.

a) Détermine la condition d'existence de B.

b) Démontre que, lorsque B existe, B = −2.

65

1. Démontre que : $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Calcule cos x puis sin x dans chacun des cas suivants :

a) tan $x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ b) tan $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

66 On considère les expressions A et B telles que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $A = cos\, x - \sqrt{3}\, sin\, x$ et $B = -\sqrt{3}\, cos\, x + sin\, x$.

1. Réduis chacune des expressions A et B.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) A = −1 ; b) B = $\sqrt{3}$.

67 On considère le nombre réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

1. Détermine la valeur exacte de $\cos x$.

2. On suppose que $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{12}; -\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{12}\right\}$.

Détermine la valeur exacte de x en justifiant ta réponse.

68

1. En utilisant $\sin\dfrac{\pi}{4}$ et $\cos\dfrac{\pi}{4}$, détermine la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et celle de $\cos\dfrac{\pi}{8}$

2. Déduis-en la valeur exacte de $\sin\dfrac{3\pi}{8}$ et celle de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$.

69 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(E_2) : \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$(E_3) : 2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ $(E_4) : \cos(3x) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

70 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \sin\left(4x-\dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin(x-\pi)$;

$(E_2) : \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $(E_3) : 3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$;

$(E_4) : \sin\left(5x+\dfrac{3\pi}{8}\right) = -\sin(2x)$.

71 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$(E_2) : \tan\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \tan\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$(E_3) : \tan\left(2x+\dfrac{\pi}{7}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$;

$(E_4) : \tan\left(x+\dfrac{11\pi}{3}\right) = -\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

72 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$(I) : \cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) \le -\dfrac{1}{2}$; $(J) : \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{11}\right) \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$(K) : 2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{9}\right) < 1$.

73 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : \cos\left(x+\dfrac{7\pi}{6}\right) \le -\dfrac{1}{2}$ $(I_2) : -\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(I_3) : \sin\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right) \ge -2$.

74 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : \tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right) \le 1$ $(I_2) : \tan(3x-\pi) \le -\dfrac{1}{2}$

$(I_3) : \tan\left(x-\dfrac{\pi}{9}\right) > \sqrt{3}$.

75 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : x + \sin x \le \sqrt{2}$ $(I_2) : \cos x - \sqrt{3}\sin x - 1 \le 0$

$(I_3) : -\sqrt{3}\cos x + \sin x > \sqrt{3}$.

76 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$(E_1) : \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$(E_2) : \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

77 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{8}\right) \le \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

$(I_2) : -\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right) \ge \cos\left(x+\dfrac{\pi}{9}\right)$.

78 On considère deux points distincts A et B du plan. p et q sont des nombres entiers relatifs.

M est un point du plan tel que :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) = \frac{p\pi}{12} + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) et

mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BM}}) = \frac{q\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

1. **a)** Détermine une valeur du couple $(p\,;q)$ pour que le triangle MAB soit isocèle en M et de sens direct.

   b) Place le point M recherché.

2. **a)** Démontre que le triangle MAB est isocèle en M si et seulement si : $2p = 3q$.

   b) Place sur la figure tous les points M tels que MAB est isocèle.

79

1. Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes : $(E_1) : 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$;

$(E_2) : \cos^2 - 2\cos x + 1 = 0$; $(E_3) : 4\cos^2 x + \cos x + 3 = 0$

2. Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes : $(F_1) : \sin^2 x - \sin x - 6 = 0$;

$(F_2) : \sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0$; $(F_3) : 3\sin^2 x - 2\sin x + 5 = 0$.

3. Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes : $(T_1) : -\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$;

$(T_2) : \tan^2 x + \frac{3}{2}\tan - 1 = 0$; $(T_3) : -\tan^2 x + 3\tan x + 10 = 0$.

80

1. Calcule : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation
$(E) : -4x^2 + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$
3. Déduis-en la solution de (E_1) tel que :
$\forall\, x \in [0\,;2\pi[$, $-4\cos^2 x + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cos x - \sqrt{6} = 0$
4. Résous de façon analogue l'équation :
$\forall\, x \in [0\,;2\pi[$, $-4\sin^2 x + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sin x - \sqrt{6} + 4 = 0$

81 Résous chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : x \in [0\,;2\pi[$, $2\cos^2 x + 7\cos x - 5 < 0$;

$(I_2) : x \in \mathbb{R}$, $-\cos^2 x + 2\cos x + 8 > 0$;

$(I_2) : x \in \mathbb{R}$, $5\cos^2 x - 7\cos x - 6 \geq 0$.

82 Détermine deux nombres a et b tels que :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(10) \\ \cos(ab) = \cos(22) \end{cases}$$

83 Résous chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : x \in [0\,;\pi]$, $3\sin x - 4\sin x - 4 \leq 0$.

$(I_2) : x \in [-\pi\,;\pi]$, $2\sin^2 x - 6\sin x + 1 \geq 0$.

$(I_3) : x \in [0\,;2]$, $4\sin^2 x + 3\sin x + 3 > 0$.

84 Résous chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : x \in [-\pi\,;\pi]$, $-\tan^2 x + 4\tan x - 5 > 0$;

$(I_2) : x \in [0\,;2\pi]$, $\tan^2 x + \tan x - 6 \leq 0$.

85 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$.

1. Détermine l'ensemble de définition, D_f, de f.
2. Démontre que : $\forall x \in D_f, f(x) = \tan x$.
3. Justifie que la fonction f est impaire.

86

1. Résous dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,
l'inéquation $(I_1) : \frac{2\cos(3x)+1}{1-\cos(3x)} \geq 0$
2. Résous dans $]-\pi;\pi[$, l'inéquation $(I_2) : \sin(2x) \geq \sin(x)$.

87 Soit les expressions A et B telles que :

A = $\cos^2 x - \cos^4 x$ et B = $\dfrac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$.

1. Factorise A.
2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles A = 0.
3. Détermine la condition d'existence de B puis simplifie B.

88 ABC est un triangle équilatéral direct inscrit dans le cercle (C) de centre O et de rayon r.
D est le symétrique de A par rapport à O. M est un point de (C) et α est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)$ avec $0 < \alpha < \pi$.

1. Démontre que : AM $= 2r\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
2. Exprime $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}}\right)$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}}\right)$ en fonction de α.
3. Exprime MB et MC en fonction de γ et de $\dfrac{\alpha}{2}$
4. **a)** En utilisant les formules d'addition, démontre que la somme

   $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ est indépendante de α.

   b) La relation $MA^2 + MB^2 + MC^2$ dépend-elle de M ? Justifie ta réponse.
5. Exprime l'aire, A_{MBC}, du triangle MBC en fonction de r et de α.
6. On pose : $A_{MBC} = r^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; calcule la valeur de α.

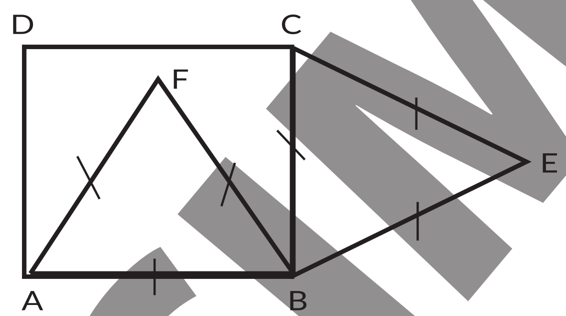
Situations Complexes

89 Le plan d'une sous-préfecture est représenté comme l'indique la figure codée ci-dessous.
Sur cette figure, les points A, B, C et D représentent quatre villages dont le positionnement forme un carré. L'hôpital en F et l'école en E sont tels que les triangles ABF et BEC sont équilatéraux de sens direct.

Les habitants du village D souhaiteraient que le gouvernement construise une voie bitumée leur permettant de rallier facilement l'hôpital et l'école.

En guise de réponse, le représentant du gouvernement leur dit que la route sera construite si les experts affirment que les villages D, F et E sont alignés.

Etant fils de la région et voulant participer au développement de ces villages, tu cherches à vérifier les positions des points D, F et E et donner une réponse aux habitants qui sont impatients.
Dis si la route sera construite ou pas en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.



90 Une société de gardiennage veut tester un nouvel armement, un canon $X\alpha$.

Le tireur doit viser une cible située au point C.
Pour atteindre la cible, le tir doit avoir une portée P = OC telle que P est fonction de l'inclinaison α avec l'horizontale et P vérifie la relation :

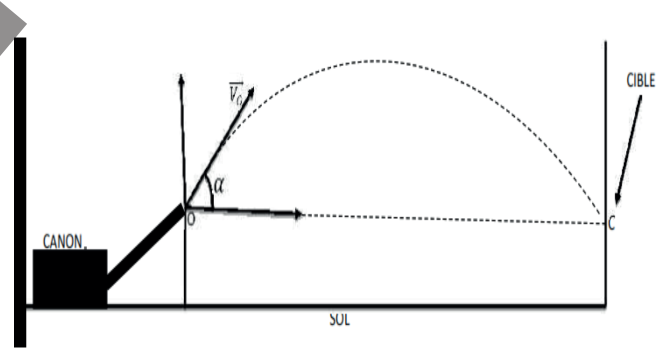
$P = \frac{V_O \sin 2\alpha}{g}$ (Voir la figure ci-dessous).

On donne : V_O = 1000 m/s, g =10m/s et
OC = 50m.

Ton grand frère, agent de cette société se demande quelle inclinaison α sera parfaite afin que le tireur réussisse son tir.

Il te présente la situation et sollicite ton aide.

En argumentant, réponds à sa préoccupation.



11 ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

Commentaire de la Leçon

Trouver différentes façons d'améliorer le fonctionnement d'un processus, ce qui se traduira par une efficacité, une productivité, un rendement plus élevé au final est la modélisation. Cette modélisation consiste à mettre au point un ensemble d'équations ou de règles pour décrire le phénomène de façon reproductible et simulable. Ainsi, la résolution de systèmes d'équations se trouve être un outil indispensable pour la prise de décision dans divers domaines de la vie, notamment en Physique et Chimie, en S.V.T, en statistique, en économie...etc.

La résolution d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a été vue en classe de troisième. Ici, il s'agit de renforcer cet acquis par la définition formelle du déterminant d'un système d'équations, donner la notation du déterminant et déterminer les conditions pour lesquelles un système d'équations admet ou non une solution. La notion de résolution d'un système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par la méthode de substitution ou de Gauss n'a jamais été abordée dans les classes antérieures. Il faudra faire fonctionner cette notion par des exercices de vie courante pour en dégager son intérêt.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Identifier :** le déterminant d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$
- ✓ **Connaitre :** la propriété sur l'unicité de la solution d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$
- ✓ **Calculer :** le déterminant d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$
- ✓ **Traduire :** diverses situations concrètes en équations dans $\mathbb{R}^2$, diverses situations concrètes en équations dans $\mathbb{R}^3$
- ✓ **Justifier :** l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant le déterminant
- ✓ **Résoudre :** un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, ayant une unique solution par substitution ou par la méthode du pivot de Gauss
- ✓ **Traiter une situation :** faisant appel aux équations dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$

Situation d'Apprentissage

Un bijoutier possède dans son coffre, trois lingots contenant chacun de l'or, de l'argent et du cuivre.

- Le premier contient 20 g d'or, 30 g d'argent et 40 g de cuivre.
- Le deuxième contient 30 g d'or, 40 g d'argent et 50 g de cuivre.
- Le troisième contient 40 g d'or, 50 g d'argent et 90 g de cuivre.

Il désire fabriquer pour le compte d'un mariage, un bijou renfermant à la fois 34 g d'or, 46 g d'argent et 67 g de cuivre. Cependant, désireux d'initier son fils en classe de première D au métier de bijoutier, il lui demande de proposer la quantité en gramme de chaque lingot en vue du respect scrupuleux de la demande.

Pour cela, son fils décide de faire des recherches sur la leçon intitulée équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ afin de mieux s'outiller pour répondre à la requête de son père.

Activité 1 Déterminant d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$

Soit le système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant : $(1)\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

On considère le nombre réel $a \times b' - a' \times b$ issu de système (1).

On donne le système $(2)\begin{cases} 2x+6y-7=0 \\ 3x+5y+8=0 \end{cases}$.

Écris le nombre réel équivalent issu du système (2).

Récapitulons

- Le nombre réel issue du système (2) est : 2 × 5 − 3 × 6
- Le nombre réel $a \times b' - a' \times b$ est appelé déterminant du système .

Exercice de fixation

1 Soit le système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant : $\begin{cases} -2x+3y+1=0 \\ 4x+y-2=0 \end{cases}$.

Calcule le déterminant du système.

Activité 2 Le déterminant d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$

Soit le système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant : $(1)\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

On considère la notation suivante : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ issue du système (1).

On donne le système $(2)\begin{cases} 2x+6y-7=0 \\ 3x+5y+8=0 \end{cases}$.

Détermine la notation issue du système (2).

Récapitulons

- La notation issue du système (2) est $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est la notation du déterminant du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.
- On a $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Exercice de fixation

2 Soit le système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant : $\begin{cases} -x+2y+3=0 \\ 3x-y+7=0 \end{cases}$.

Écrire la notation du déterminant issue du système.

Activité 3 La propriété sur l'unicité de la solution d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$

Soit dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système d'équations linéaires : $(\Sigma):\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

On considère les droites $(D_1) : ax + by + c = 0$ et $(D_2) : a'x + b'y + c' = 0$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$, deux vecteurs directeurs respectifs des droites (D_1) et (D_2).

1. Calcule $\det(\vec{u};\vec{v})$.
2. Détermine la condition sur la valeur de $\det(\vec{u};\vec{v})$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires.
3. Déduis-en la condition sur le déterminant du système (Σ) pour que les droites (D_1) et (D_2) soient sécantes.
4. Détermine la condition sur le déterminant du système (Σ) pour qu'il admette une solution unique.

Récapitulons

- $\det(\vec{u};\vec{v}) = -a'b + ab'$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires si et seulement si $-a'b + ab' \neq 0$ ou $ab' - a'b \neq 0$.
- Les droites (D_1) et (D_2) soient sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$.
- Le système (Σ) admet une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exercice de fixation

3 Soient les systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivants.

$(1)\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$; $(2)\begin{cases} 0,6x+4,2=10 \\ 0,1x-0,7y=0 \end{cases}$; $(3)\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+10y=-8 \\ -\dfrac{3}{4}x-5y=4 \end{cases}$.

Dans chacun des cas, justifie que le système linéaire dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ admet une solution, aucune, ou une infinité de solutions.

Activité 4 Système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode de substitution

On considère le système d'équations $(\Sigma) : \begin{cases} x+y+z=2 \;\; (1) \\ 2x+y+3z=7 \;\; (2) \\ x+3y+2z=2 \;\; (3) \end{cases}$.

1. a) Dans l'équation (1), exprime x en fonction de y et z.
   b) Dans les équations (2) et (3), remplace x par l'expression trouvée en 1.a).
   On obtient ainsi les équations (2') et (3').
2. a) Dans l'équation (2'), exprime y en fonction de z.
   b) Dans l'équation (3'), remplace y par l'expression trouvée en 2.a). On obtient ainsi l'équation (3'').
3. a) En utilisant l'équation (3''), détermine la valeur de z.
   b) En remplaçant la valeur de z dans l'équation (2'), détermine la valeur de y.
   c) En remplaçant les valeurs de y et z dans l'équation (1), détermine la valeur de x.
4. Vérifie que le triplet obtenu en 3) est solution du système (Σ).

Récapitulons

- Le triplet (1 ; −1 ; 2) est l'unique solution de système (∑).
- Cette méthode de résolution de système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ est la méthode par substitution.
- On pourrait exprimer y en fonction x et z ou z en fonction de x et y dans l'une des équations (1), (2) ou (3). Le résultat serait le même.

Exercice de fixation

4 On considère le système d'équation $(\Sigma) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$.

Résous le système (∑) par la méthode de substitution.

Activité 5 Système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss

On considère le système d'équations :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x+y+z=2 \quad (E_1) \\ 2x+y+z=7 \quad (E_2) \\ x+4y+3z=3 \quad (E_3) \end{cases}.$$

1. Élimine x dans les équations (E_2) et (E_3) en posant :

- (E_2) − 2(E_1) ; on obtient ainsi l'équation (E'_2) : $-y-z=3$.
- (E_3) − (E_1) ; on obtient ainsi l'équation (E'_3) : $3y+2z=1$.

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-z=3 \\ 3y+2z=1 \end{cases}.$$

2. Élimine y dans l'équation (E'_3) en posant :

- (E'_3) + 3(E'_2) ; on obtient ainsi l'équation (E''_3) : $-z=10$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=3 \\ -z=10 \end{cases}.$$

3. **a)** En utilisant l'équation (E''_3), détermine la valeur de z.

b) En remplaçant la valeur de z dans l'équation (E'_2), calcule la valeur de y.

c) En remplaçant les valeurs de y et z dans l'équation (E_1), calcule la valeur de x.

4. Vérifie que le triplet obtenu en 3) est solution du système (∑).

Récapitulons

- Le triplet (5 ; 7 ; -10) est l'unique solution de système (∑).
- Cette méthode de résolution de système linéaire dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est la méthode du pivot de Gauss.
- On aurait par éliminer y dans les équations (2) et (3) ou éliminer z dans les équations (2) et (3). Le résultat serait le même.

Exercice de fixation

5 On considère le système d'équation $(\Sigma) : \begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 2x-5y+3z=1 \end{cases}$.

Résous le système (∑) par la méthode de Gauss.

1. Présentation

Soit dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système d'équations linéaires $(\Sigma) : \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ avec a, b, c, a', b' et c' des nombres réels.

Le nombre réel $ab' - a'b$ issu de système (Σ) est appelé le déterminant du système (Σ).

On le note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Remarques

On a det (Σ) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Exemple

Soit le système $(\Sigma) : \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ -4x-5y+2=0 \end{cases}$;

$\det(\Sigma) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 2\times(-5)-(-4)\times 3 = 2$

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2 ; 11

2. Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Propriétés

Un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ admet un seul couple solution si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

Exemple

Soit le système $(\Sigma) : \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ -4x-5y+2=0 \end{cases}$; det (Σ) = 2.

- det $(\Sigma) \neq 0$;
- Donc le système (Σ) admet un unique couple solution.

Pour s'entraîner : Exercice 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16

Remarques

Si le déterminant du système $(\Sigma) : \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x-b'y+c'=0 \end{cases}$ est égal à zéro, alors le système (Σ) :

- admet soit une infinité de solutions et l'ensemble de solutions est une droite ;
- ou n'admet pas de solution et l'ensemble de solutions est l'ensemble vide, noté $\emptyset$.

3. Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$

- Un système de la forme $(\Sigma) : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$ formé de trois équations d'inconnues x, y et z où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' sont des nombres réels est appelé un système linéaire de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$;
- Résoudre un système dans $\mathbb{R}^3$, c'est trouver tous les triplets de nombres réels qui vérifient simultanément les trois équations.

a) Résolution d'un système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$, par substitution

Méthode

Pour résoudre un système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$ par substitution, on peut procéder comme suit :

- exprimer x en fonction y et z dans l'une des trois équations; on choisit de le faire dans la première équation par exemple ;
- remplacer dans les deux autres équations x par son expression en fonction de y et z ;
- exprimer y en fonction z dans l'une des deux dernières équations. On choisit de le faire dans la deuxième équation ;
- remplacer dans la troisième équation y par son expression en fonction de z ;
- résoudre l'équation d'inconnue z obtenue dans la troisième équation ;
- remplacer la valeur z (si elle existe) dans la deuxième équation ;
- résoudre l'équation d'inconnue y obtenue ;
- remplacer les valeurs de y et de z (si elles existent) dans l'expression de x, de la première équation ;
- résoudre l'équation d'inconnue x obtenue;
- le triplet solution du système linéaire est $(x ; y ; z)$.

Exemple

On considère le système d'équations $(\Sigma):\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+3z=7 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$.

Pour résoudre le système (Σ), on peut procéder comme suit :

$$(\Sigma):\begin{cases} x=2-y-z \\ 2x+y+3z=7 \\ x+3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ 2(2-y-z)+y+3z=7 \\ (2-y-z)+3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ -y+z=3 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2-y-z \\ y=-3+z \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ y=-3+z \\ 2(-3+z)+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ y=-3+z \\ 3z=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2-y-z \\ y=-3+z \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y-z \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Le triplet $(1 ; -1 ; 2)$ est la solution du système (Σ).

Pour s'entraîner : Exercice 17 ; 19 ; 21

1) Résolution d'un système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$, par pivot de GAUSS

Méthode

Considérons le système suivant $(\Sigma):\begin{cases} ax+by+cz+d=0 & (E_1) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & (E_2) \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 & (E_3) \end{cases}$.

Pour résoudre ce système linéaire de trois équations dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de GAUSS, on peut procéder comme suit :

- choisir l'inconnue que l'on veut éliminer dans deux des trois équations. On choisit d'éliminer par exemple x dans les équations (E_2) et (E_3) ;

- multiplier les deux membres des équations (E_1) et (E_2) par des nombres de sorte que la variable x ait des coefficients opposés ;
- additionner membre à membre la première équation et la deuxième équation obtenue. On obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue en y et z qu'on appelle (E'_2) ;
- multiplier les deux membres des équations (E_1) et (E_3) par des nombres de sorte que la variable x ait des coefficients opposés ;
- additionner membre à membre la première équation et la troisième équation obtenue. On obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue en y et z qu'on appelle (E'_3) ;
- on obtient le système d'équations $\begin{cases} (E_1) \\ (E'_2) \\ (E'_3) \end{cases}$;
- choisir l'inconnue que l'on veut éliminer dans les deux équations (E'_2) et (E'_3). On choisit d'éliminer par exemple y dans les équations (E'_2) et (E'_3) ;
- multiplier les deux membres des équations (E'_2) et (E'_3) par des nombres de sorte que la variable y par exemple ait des coefficients opposés ;
- additionner membre à membre les équations (E'_2) et (E'_3) obtenue. On obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue en z qu'on appelle (E''_3) ;
- on obtient le système d'équations $\begin{cases} (E_1) \\ (E'_2) \\ (E''_3) \end{cases}$;
- résoudre l'équation (E''_3) d'inconnue z obtenue ;
- remplacer la valeur de z (si elle existe) dans (E'_2) ;
- résoudre l'équation d'inconnue y obtenue ;
- remplacer les valeurs de y et z (si elles existent) dans (E_1) ;
- résoudre l'équation d'inconnue x obtenue ;
- le triplet solution du système linéaire est $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Exemple

On considère le système d'équations (∑) : $\begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ 2x+y+3z=7 & (E_2) \\ x+4y+3z=3 & (E_3) \end{cases}$.

Pour résoudre (∑) par la méthode du pivot de Gauss, on peut procéder comme suit :

$$(\Sigma):\begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ 2x+y+3z=7 & (E_2) \\ x+4y+3z=3 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ -y+z=3 & (E'_2)=(E_2)-2(E_1) \\ 3y+2z=1 & (E'_3)=(E_3)-(E_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ -y+z=3 & (E'_2) \\ 3y+2z=1 & (E'_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ -y+z=3 & (E'_2) \\ 5z=10 & (E''_3)=(E'_3)+3(E'_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ -y+z=3 & (E'_2) \\ 5z=10 & (E''_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=3 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow :\begin{cases} x+y+z=2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Le triplet $(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ est la solution du système (∑).

Pour s'entraîner : Exercice 18 ; 20 ; 21

QUESTION 1

Comment justifier qu'un système dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ admet une solution unique ?

Méthode

- Calculer le déterminant du système.
- Si le déterminant est différent de 0 , alors le système admet une solution unique.

Exercice

Soit dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, un système d'équations

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 10 = 0 \end{cases}.$$

Justifie que (Σ) admet une solution unique.

Solution commentée

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 4x + 4y + 10 = 0 \end{cases}.$$

$\text{dét}(\Sigma) = 2 \times 4 - (-1) \times (4) = 12.$

$\text{dét}(\Sigma) \neq 0$, donc (Σ) admet une solution unique.

Exercice non corrigé

Soit le système $(\Sigma_1) : \begin{cases} -3x - 4 = -y \\ y = 2x + 7 \end{cases}.$

Justifie que le système admet une solution unique.

Comment justifier qu'un système d'équation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions

Méthode

- Calculer le déterminant du système.
- Si le déterminant est égal à zéro, alors il y a deux cas :

✓ si det (Σ) = 0 et les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes, alors (Σ) n'admet pas de solution.

✓ si det (Σ) = 0 et les équations (1) et (2) sont équivalentes, alors (Σ) admet une infinité de solutions.

Exercice 1

Soit le système $(\Sigma_1) : \begin{cases} -2x - y = 7 \\ 16x + 8y = 3 \end{cases}.$

Justifie que (Σ_1) n'admet pas de solution.

Exercice 2

Soit le système $(\Sigma_2) : \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = -20 \end{cases}.$

Justifie que (Σ_2) admet une infinité de solutions.

Solution commentée 1

Soit le système $(\Sigma_1) : \begin{cases} -2x - y = 7 \\ 16x + 8y = 3 \end{cases}$

$\text{dét}(\Sigma_1) = 0$

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \quad (1) \\ 2x + y = \dfrac{3}{8} \quad (2) \end{cases} \qquad -7 \neq \frac{3}{8}, \text{ d'où les équations}$$

(1) et (2) ne pas équivalentes. Donc, (Σ_1) n'admet pas de solution.

Solution commentée 2

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = -20 \end{cases}$$

$\text{dét}(\Sigma_2) = 0$

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} -x + 2y = 5 & (1) \\ -4(-x + 2y) = -4 \times 5 & (2) \end{cases}$$

Donc les équations (1) et (2) sont équivalentes. (Σ_2) admet une infinité de solutions.

Exercice non corrigé 1

Soit le système $(\Sigma): \begin{cases} -x+4y=3 \\ 3x-12y=2 \end{cases}$.

Justifie que (Σ) n'a pas de solution.

Exercice non corrigé 2

Soit le système $(\Sigma): \begin{cases} 2x+7y=-8 \\ -6x-21y=24 \end{cases}$.

Justifie que (Σ) admet une infinité de solutions.

QUESTION 3

Comment résoudre une situation de vie courante

Méthode

- Faire une mise en équations du problème en choisissant des inconnues.
- Résoudre le système d'équations
- Vérifier que les solutions trouvées répondent au problème posé.

Exercice

Dans un musée, il y a trois tarifs pour les tickets d'entrée :

- le tarif adulte ;
- le tarif enfant ;
- le tarif groupe.

De plus, le dimanche le tarif adulte et le tarif enfant sont réduits de 50%.

Pendant trois jours consécutifs, on note le nombre de tickets délivrés de chaque tarif ainsi que la recette de la journée.

- Le premier jour on délivre 70 tickets adulte, 28 tickets enfant et 60 tickets tarif groupe. La recette est de 348 000 F CFA.
- Le deuxième jour on délivre 120 tickets adulte, 240 tickets enfant et 140 tickets tarif groupe. La recette est de 900 000 F CFA.
- Le troisième jour est un dimanche ; on délivre 150 tickets adulte, 320 tickets enfant et 75 tickets tarif groupe. La recette est de 535 000 F CFA.

Détermine les tarifs des entrées à ce musée.

Solution commentée

x désigne le tarif adultes

y désigne le tarif enfant

z désigne le tarif groupe

La situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$(S): \begin{cases} 70x+28y+60z=348000 \\ 120x+240y+140z=900000 \\ 75x+160y+75z=535000 \end{cases}.$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{(2000 ; 1000 ; 3000)\}$

Le tarif adulte : 2000 ;

Le tarif enfant : 1000 ;

Le tarif groupe : 3000.

Exercice non corrigé

Il est recommandé de consommer 110 mg de vitamine C par jour. Julien achète du jus d'orange qui contient 52 mg de vitamine C pour 100 ml et du jus de pomme qui en contient 12 mg pour 100 ml.

Pour suivre les recommandations tout en variant sa consommation de fruits, Julien souhaite boire un peu des deux dans un verre de 250 ml le matin au petit déjeuner.

Son petit frère élève en classe de 1ère D souhaite connaitre le mélange de quantité de chaque jus dans un seul verre afin que julien puisse respecter l'apport quotidien en vitamine C.

À l'aide de tes connaissances relatives aux équations dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$, détermine la quantité de chaque jus suffisante pour consommer 110 mg de vitamine C par jour.

Exercices de fixation

Déterminant d'un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}^2$

1 Pour chaque ligne du tableau, trois propositions de réponse sont données, une seule est juste.

Entoure la bonne réponse.

	Affirmations	Réponses A	Réponses B	Réponses C
1	La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+fy+g=0 \end{cases}$ est	$\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}$
2	La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ est	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$
3	La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x+by=0 \\ cx-3y=0 \end{cases}$ est	$\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} c & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b & 2 \\ -3 & c \end{vmatrix}$
4	La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ 5x+4y+10=0 \end{cases}$ est	$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2 Pour chaque ligne du tableau, trois propositions de réponse sont données, une seule est juste.

Entoure la bonne réponse.

Affirmations	Réponses		
$\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$ est égal à	$ac-eg$	$ec-ag$	$-ec+ag$
Le déterminant du système $\begin{cases} 2x+by+7=0 \\ cx-3y-2=0 \end{cases}$ est	$14-bc$	$-bc-6$	$-4-7c$
Le déterminant du système $\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ 5x-\frac{1}{2}y+10=0 \end{cases}$ est	-16	$\frac{7}{2}$	28

3 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Un système de deux équations à deux inconnues admet une solution unique si et seulement si son déterminant est supérieur à zéro.
2	Un système de deux équations à deux inconnues admet une infinité de solution si son déterminant est égal à zéro.
3	Si le déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues est égal à zéro, alors ce système admet soit une infinité de solutions ou n'admet pas de solution

4 On considère le système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant :

$$(S):\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=c' \end{cases}.$$

Soit det(S), le déterminant de (S).

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. (S) admet une solution unique si det(S) = 1.
2. (S) admet deux solutions si det(S) = 2.
3. (S) admet une solution unique si det(S) est différent de zéro.
4. (S) n'admet pas de solutions si det(S) est inférieur à zéro.

5 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Le système $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ -x-2y+2=0 \end{cases}$ admet une unique solution.
2	Le système $\begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$ admet une unique solution.
3	Le système $\begin{cases} 2x+4y-8=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ admet une infinité de solutions.
4	Le système $\begin{cases} 4x+8y-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

6 On considère dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système linéaire de deux équations suivant : $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Soient (D) et (L) deux droites du plan, telles que (D) : $ax + by + c = 0$ et (L) : $a'x + b'y + c' = 0$.

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Si le déterminant de (S) est différent de zéro, alors les droites (D) et (L) sont parallèles.
2. Si le déterminant de (S) est égal à zéro, alors les droites (D) et (L) sont perpendiculaires.
3. Si le déterminant de (S) est différent de zéro, alors les droites (D) et (L) sont sécantes.
4. Si le déterminant de (S) est différent de zéro, alors les droites (D) et (L) sont confondues.

7 Parmi les systèmes linéaires de deux équations dans $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, indique ceux qui admettent une solution unique.

$(S_1):\begin{cases} 3x-y=2 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$ det(S_1) = 14 ;

$(S_2):\begin{cases} -x+11y=15 \\ 2x+4y=20 \end{cases}$ det(S_2) = −26 ;

$(S_3):\begin{cases} 10x-4y=-1 \\ 5x-2y=15 \end{cases}$ det(S_3) = 0 ;

$(S_4):\begin{cases} 7x+9y=23 \\ 3x+4y=17 \end{cases}$ det(S_4)=1.

Traduire diverses situations concrètes en équations dans $\mathbb{R}^2$

8 Un producteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent des carottes et des choux. Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de carotte nécessite 400 heures de travail. Si l'on dispose de 45000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'œuvre doivent être utilisés, trouve le nombre d'hectares de chaque légume qu'il faudrait planter. On désigne par x le nombre d'hectares de carottes et par y le nombre d'hectares de choux.

Parmi les systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, indique celui qui traduit le problème.

$(S_1):\begin{cases} x+y=100 \\ 6x+4y=4500 \end{cases}$; $(S_2):\begin{cases} x+y=45000 \\ 600x+400y=100 \end{cases}$;

$(S_3):\begin{cases} x+y=100 \\ 600x+400y=45000 \end{cases}$.

9 Une troupe théâtrale fait un spectacle à l'auditorium d'un lycée. Chaque élève de ce lycée paie 500 francs et chaque membre du personnel paie 40% de plus que le prix du ticket d'un élève. L'auditorium a une capacité de 500 places.

À la fin du spectacle on constate que 62 tickets non pas été vendus et la recette s'élève à 96000 francs.

On désigne par x le nombre d'élèves et par y le nombre d'enseignants présents au spectacle.

Parmi les systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ ci-dessous indique celui qui permet de déterminer le nombre d'élèves et le nombre d'enseignants présents au spectacle.

$(S_1):\begin{cases} x+y=500 \\ 5x+7y=960 \end{cases}$; $(S_2):\begin{cases} x+y=438 \\ 5x+7y=960 \end{cases}$;

$(S_3):\begin{cases} x+y=438 \\ 500x+7y=96000 \end{cases}$.

Traduire diverses situations concrètes en équations dans $\mathbb{R}^3$

10 Martine, Yolande et Chantal passent chacune une commande en ligne dans une même épicerie.

Martine paie 2 kg d'arachide, 3 kg d'haricot et 4 kg de soja à 2650 francs.

Yolande paie 1 kg d'arachide, 5 kg d'haricot et 2 kg de soja à 1900 francs.

Chantal paie 5kg d'arachide, 1 kg d'haricot et 6kg de soja à 4550 francs.

On désigne par x le prix d'un kilogramme d'arachide, par y le prix d'un kilogramme d'haricot et z le prix d'un kilogramme de soja dans cette épicerie.

Parmi les systèmes linéaire dans $\mathbb{R}^3$ ci-dessous indique celui qui permet de déterminer les valeurs de x, y et z.

$(S_1):\begin{cases} 2x+y+5=2650 \\ 3x+5y+z=1900 \\ 4x+2y+6z=4550 \end{cases}$; $(S_2):\begin{cases} 2x+5y+6z=2650 \\ x+5y+2z=1900 \\ 5x+y+6z=4550 \end{cases}$;

$(S_3):\begin{cases} 2x+3y+4z=2650 \\ x+5y+2z=1900 \\ 5x+y+6z=4550 \end{cases}$.

Exercices de renforcement/approfondissement

11 Calcule le déterminant de chacun des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivants :

$$(\Sigma_1):\begin{cases}2x+2y-1=0\\3x+4y-6=0\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}-x+9y=0\\2x+y=0\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=1\\\dfrac{4}{2}x+3y=0\end{cases}.$$

12 On donne le système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$(S):\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=1+5x\\x-\dfrac{2}{3}y=-1\end{cases}.$$

1. Calcule le déterminant de (S).
2. Justifie que (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

13 Dans chacun des cas ci-dessous justifie que le système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ admet ou non une unique solution.

$$(S_1):\begin{cases}x-y+1=0\\x+2y-4=0\end{cases};\quad(S_2):\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+10y=16\\-\dfrac{1}{3}x-5y=4\end{cases};$$

$$(S_3):\begin{cases}\sqrt{2}y=\sqrt{3}x\\2\sqrt{3}x=2\sqrt{2}y-1\end{cases};\quad(S_4):\begin{cases}0,6x+4,2y=10\\0,1+0,7y=-5\end{cases}.$$

14 Dans chacun cas ci-dessous, détermine les valeurs de a pour lesquelles le système linéaire admet une solution unique.

$$(S_1):\begin{cases}4ax+5y-11=0\\6x-y-13=-0\end{cases};\quad(S_2):\begin{cases}\dfrac{2}{a}x+\dfrac{14}{9}y=43\\\dfrac{1}{3}x+5y=-44\end{cases};$$

$$(S_3):\begin{cases}9y=2x\\8x=a^2y+7\end{cases}.$$

15 On donne le système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$(S):\begin{cases}4x-6y=14\\-2x+3y=-7\end{cases}.$$

1. Calcule le déterminant de (S).
2. Justifie que (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

16 On donne le système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$(S):\begin{cases}4x-6y=14x\\5x+y=-7\end{cases}.$$

1. Calcule le déterminant de (S).
2. Justifie que (S) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

17 En utilisant la méthode de substitution, résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$(\Sigma_1):\begin{cases}2x-y-3=0\\x+3y+2=0\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}4x-5y-6=0\\x+2y-3=0\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}x-y-\dfrac{1}{4}=0\\-4x+4y+1=0\end{cases}.$$

18 En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$(\Sigma_1):\begin{cases}x+3y-11=0\\2x+y-7=0\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}2x+y+3=0\\3x+4y+2=0\end{cases}.$$

19 En utilisant la méthode de substitution, résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(\Sigma_1):\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y+z=-1\\x-y+2z=0\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}2x+3y-z=-7\\x-2y+2z=11\\5x+y+4z=15\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}x+z=8\\y+z=10\\x+y=5\end{cases}.$$

20 En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(\Sigma_1):\begin{cases}7x=14\\3x+5y=1\\7x-17y+3z=1\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}5x+2y-z=-1\\8x-4y+3z=-5\\2x-5y+4z=-6\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}2x-3y+5z=0\\3x-5y+2z=1\\2x-5y+3z=2\end{cases}.$$

21 Résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(\Sigma_1):\begin{cases}4x+2y+z=5\\9x+3y+z=1\\x+y+z=1\end{cases};\quad(\Sigma_2):\begin{cases}x+2y+3z=2\\4y+3z=-1\\3x-6y+5z=4\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}x+y+z=2\\4x+5y-20z=-2\\-3x+5y+5z=4\end{cases}.$$

22 Résous chacun des systèmes linéaires suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1):\begin{cases}\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{x-y}{2}=1\\[2mm]\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y+1}{2}=0\end{cases};\ (S_2):\begin{cases}\dfrac{x-1}{8}+\dfrac{y-2}{5}=2\\[2mm]2x-21=\dfrac{5-2y}{3}\end{cases};$$

$$(S_3):\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y+1}{2}=0\\[2mm]\dfrac{2x+1}{4}-\dfrac{3y-1}{8}=\dfrac{5}{4}\end{cases};$$

$$(S_4):\begin{cases}\dfrac{x-4}{5}+\dfrac{3y+4}{10}=x-y\\[2mm]\dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{2y-4}{4}=x-12\end{cases}.$$

23 Résous dans $\mathbb{R}^2$, suivants les valeurs du paramètre m, les systèmes linéaires suivants :

$$(\Sigma_1):\begin{cases}mx+y=1\\x-y=3\end{cases};\ (\Sigma_2):\begin{cases}x+my=2\\mx-y=3\end{cases};$$

$$(\Sigma_3):\begin{cases}mx-y=5\\mx+(m-3)y=3\end{cases};\ (\Sigma_4):\begin{cases}2x-my=m-1\\(5-m)x-3y=11-5m\end{cases}.$$

$$(\Sigma_5):\begin{cases}3(2m-1)x+(3m+2)y=m+4\\(m-1)x+2my=2\end{cases}.$$

24 Résous dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes linéaires suivants :

$$(\Sigma_1):\begin{cases}3(2x+3y)-5(3x+4y)=-1\\5(2x+3y)-8(3x+4y)=-1\end{cases};$$

$$(\Sigma_2):\begin{cases}7xy-5(x+y)=15\\11xy-8(x+y)=22\end{cases};\ (\Sigma_3):\begin{cases}3x^2-2y=23\\-2x^2+5y=-8\end{cases}.$$

25 Le responsable d'un groupe d'adultes et d'enfants désire organiser un voyage et demande les tarifs à deux compagnies de transport A et B qui proposent les conditions suivantes :

	adulte	enfant	total
Compagnie A	1000	700	46000
Compagnie B	1200	600	48000

1. Traduis l'énoncé à l'aide d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$.
2. Détermine le nombre d'adultes et d'enfants qui participent au voyage.

26 Un fermier prépare un mélange d'avoine et de blé pour le bétail. 30 g d'avoine apportent 4 g de protéines et 18 g d'hydrates de carbone, et 30 g de blé fournissent 3 g de protéines et 24 g d'hydrates de carbone.

Détermine la quantité (en grammes) de chaque céréale qu'il faudrait employer pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines et 1320 g d'hydrates de carbone pour chaque ration.

27 Le kcal (kilocalorie) est la mesure de l'énergie d'un aliment. La valeur énergétique de 300 g de bananes et de 250 g de clémentines est de 320 kcal. La valeur énergétique de 150 g de bananes et de 400 g de clémentines est de 215 kcal.

Détermine la valeur énergétique de 80 g de bananes et de 140 g de clémentines.

28 Un champ de maïs a un périmètre de 590 mètres et une aire de 80 625 mètres carrés.

Détermine la longueur et la largeur de ce champ.

29 Un bijoutier fabrique 12 bracelets en or, en trois modèles M_1, M_2 et M_3. Il dispose de 75 g d'or pour la fabrication de ces bracelets d'un coût total de 118500 francs.

De plus, la masse et coût de fabrication d'un bracelet de chacun des trois modèles sont donnés dans le tableau suivant :

Modèle de bracelet	M_1	M_2	M_3
Le cout de production d'un bracelet en francs	7500	9000	15000
Masse d'un bracelet en gramme	5	5	10

1. Justifie que la situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans $\mathbb{R}^3$ suivant :

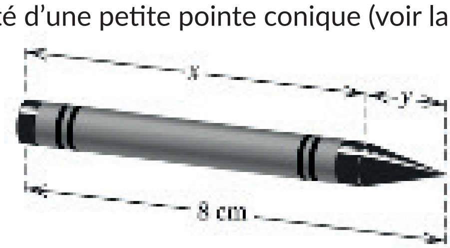
$$(S):\begin{cases}75x+90y+150z=1185\\5x+5y+10z=75\\x+y+z=12\end{cases}.$$

2. Détermine le nombre de bracelets fabriqués dans chacun des modèles .

30 Pour assister à un spectacle, une famille, composée de deux adultes et trois enfants a payé 9500 F CFA. Une dame, accompagnée de ses quatre enfants a payé 8500 F CFA.

Détermine le prix du billet d'entrée pour un adulte et celui du billet d'entrée pour un enfant.

31 Un crayon de 8 centimètres de long et 1 centimètre de diamètre doit être fabriqué à partir de 5 cm3 de cire colorée. Le crayon doit avoir la forme d'un cylindre surmonté d'une petite pointe conique (voir la figure).



Détermine la longueur x du cylindre et la hauteur y du cône.

Mes séances d'exercices

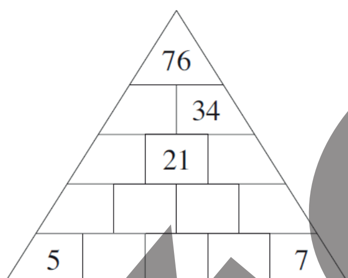
32 Un fondeur d'argent a deux alliages, l'un contenant 35 % d'argent et l'autre 60 % d'argent.

Détermine la quantité de chaque alliage qu'il faudrait fondre et mélanger pour obtenir 100 grammes d'un alliage qui contienne 50 % d'argent.

33 Une femme a 15000 F à investir dans deux fonds qui paient un intérêt simple à des taux de 6% et 8%. Les intérêts sur le fond à 6% sont exemptés d'impôt ; par contre, il faut payer un impôt sur les intérêts du fond à 8%. Comme la femme est dans une tranche d'imposition élevée, elle ne veut pas investir tout son argent dans le compte à 8%.

Détermine le moyen d'investir l'argent afin qu'elle reçoive 1000 F. d'intérêts à la fin d'une année.

34 Complète ce triangle de manière à ce que le nombre inscrit dans chaque case soit égal à la somme des deux nombres inscrits dans les cases juste en dessous de celle-ci.



35 Détermine les coefficients du polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ sachant que $P(2) = 1$; $P(-1) = -1$; $P(2) = 3$.

36 On considère un objet projeté verticalement vers le haut d'une hauteur de S_0 mètres avec une vitesse initiale de v_0 (en m/s) et une accélération a (en m/s^2).
Sa position $S(t)$ par rapport au sol après t secondes est

$$S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + S_0.$$

Pour $S(2) = 110$; $S(4) = 220$ et $S(10) = 670$, détermine les valeurs de a, v_0 et S_0 .

37 Trois frères ont acheté une propriété pour 3 000 000 F. Pour payer à lui seul cette acquisition, il manque au premier la moitié de ce que possède le deuxième. Celui-ci payerait tout à lui seul s'il avait en plus le tiers de ce que possède le premier. Enfin le troisième pour faire le paiement entier aurait besoin, en plus de ce qu'il a, du quart de ce que possède le premier.

Détermine la somme possédée par chacun des frères.

38 Un torréfacteur propose deux paquets de café.

- ✓ L'extra , composé de 120g de robusta et 130g d'arabica au prix de 13,30€.
- ✓ Le suprême, composé de 50g de robusta et de 200g d'arabica au prix de 15,75€.

Combien devrait-il vendre un paquet de 250g de robusta et un paquet de 250g d'arabica ?

(On ne tient pas compte du prix de l'emballage.)

39 Dans un cinéma de province, la recette du 19 décembre s'élève à 4.290€ pour 90 entrées d'adultes et 42 entrées d'enfants. Le 20 décembre, la direction décide de pratiquer des prix à tarif réduit : les billets adultes et enfants sont respectivement réduits de 25% et 20%. La recette est alors de 4.880€ pour 140 entrées d'adultes et 54 entrées d'enfants.

Détermine les prix d'entrée à tarif normal.

40 Un cycliste met 2h pour effectuer le parcours de la ville A vers la ville B ; puis 2 h 14 min pour effectuer le retour de B vers A. En montée, sa vitesse moyenne est de 8km/h, sur terrain plat sa vitesse est de 12km/h et en descente sa vitesse est de 15km/h.
Sachant que les villes A et B sont distants de 23 km,

détermine la longueur des montées, des terrains plats et des descentes pour le trajet de A vers B.

41 75 bœufs ont brouté en 12 jours l'herbe d'un jardin de 60 ares ; 81 bœufs ont brouté en 15 jours celle d'un jardin de 72 ares.

Combien de bœufs un jardin de 96 ares pourra t-il nourrir en 18 jours ?

On suppose constantes, la ration quotidienne de chaque animal, la quantité de l'herbe existant initialement par are et la quantité d'herbe qui pousse quotidiennement par are (on prendra comme inconnues le nombre de rations existants initialement par are et le nombre rations produites par are chaque jour, la ration étant ration quotidienne de chaque animal).

Situations complexes

42 Un tapissier fabrique des canapés, des chaises et des fauteuils. Il utilise dans la fabrication de ses meubles trois types de matériels : des pièces de bois, de tapis et de mousses.

- La production d'un canapé nécessite 3 pièces de bois, 5 pièces de tapis et 4 pièces de mousse.
- La production d'une chaise nécessite 1 pièce de bois, 1 pièces de tapis et 1 pièces de mousse.
- La production d'un fauteuil nécessite 2 pièces de bois, 4 pièces de tapis et 3 pièces de mousse.

La consommation journalière en matériel est 130 pièces de bois, de 210 pièces de tapis et 170 pièces de mousses.

En vue d'une présentation de son nouveau produit, une entreprise désire meubler ses locaux en achetant la production journalière du tapissier. Cependant, elle dispose d'un budget de 480 000 francs. On souhaite savoir si l'entreprise pourra acquérir ses meubles.

On désigne par x, y et z respectivement le nombre de canapés, de chaises et de fauteuils que fabrique le tapissier par jour.

A l'aide de tes connaissances relatives aux équations dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$, dis si l'entreprise peut acheter les meubles . Justifie ta réponse.

43 Le tableau ci-dessous indique les frais de fabrication en matière première, main d'œuvre et frais divers pour chaque unité des différents types de produits A, B et C dans une usine.

Type de produit Frais de fabrication	Unité de type A	Unité de type B	Unité de type C
Matière première en franc	50	70	90
Main d'œuvre en franc	10	20	30
Frais divers en franc	20	20	30

Les frais de tous les produits fabriqués en une journée sont les suivants :

- Matière première : 2350 francs ;
- Main d'œuvre : 650 francs ;
- Frais divers : 800 francs.

Deux groupes d'élèves en classe de 1ère visitent cette usine. Le groupe 1 affirme que l'unité A produit plus de produits que les autres unités par jour tandis que le groupe 2 affirme que les unités produisent le même nombre de produits par jour. Le chef de maintenance de l'usine décide de récompenser le groupe dont l'affirmation est correcte.

x désigne le nombre de produits fabriqués par jour par unité A.

y désigne le nombre de produits fabriqués par jour par unité B.

z désigne le nombre de produits fabriqués par jour par unité C.

A l'aide de tes connaissances relatives aux équations dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$, détermine le groupe qui aura la récompense. Justifie ta réponse.

12 SUITES NUMÉRIQUES

Dans le cadre de l’étude de l’évolution des populations, il est important de prédire leur effectif futur mais aussi la manière dont vont évoluer les ressources qui leur sont nécessaires. Pour prédire l’évolution d’un système quelconque, les scientifiques utilisent des modèles mathématiques dont les suites numériques.

Commentaire de la Leçon

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéressent aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L’étude des suites numériques est nouvelle en classe de 1D. En tant que fonction particulière, elle peut être abordée à partir de la notion de fonction connue depuis la classe de seconde. Les suites seront étudiées de nouveau en classe de terminale avec la notion de limite et de convergence d’une suite numérique.

Les suites numériques interviennent dans plusieurs domaines (économie, démographie, médecine .....)

Dans la suite du programme, elles se combinent aisément avec d’autres leçons.

Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

Habiletés et Contenus

- **Connaitre,** la définition d'une suite numérique, la définition d'une suite arithmétique, la définition d'une suite géométrique, l'expression du terme général d'une suite arithmétique en fonction d'un terme quelconque de cette suite, l'expression du terme général d'une suite géométrique en fonction d'un terme quelconque de cette suite, la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique
- **Reconnaitre,** une suite définie par une formule explicite, une suite définie par une formule de récurrence
- **Calculer,** des termes d'une suite, une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, un terme de rang quelconque d'une suite arithmétique connaissant un terme et la raison, un terme de rang quelconque d'une suite géométrique connaissant un terme et la raison
- **Représenter,** graphiquement des termes d'une suite définie par une formule de récurrence
- **Déterminer,** la raison d'une suite arithmétique, la raison d'une suite géométrique
- **Justifier,** qu'une suite est arithmétique, qu'une suite est géométrique
- **Traiter une situation,** faisant appel aux suites numériques

Situation d'Apprentissage

Une étude démographique est demandée dans un village en vue de programmer de façon efficiente son développement (écoles, centres de santé, marchés……).

Cette étude révèle que la population de ce village augmente de 2,6% par an en tenant compte des naissances, des décès et des déplacements de populations. Sachant qu'au premier janvier de l'année d'étude le village compte 1652 habitants après un recensement.

Ressortissant de ce village, tu es sollicité afin de prévoir le nombre d'habitants dans ce village année par année sans recours à de nouveaux recensements dans les trente années à venir. Tu décides alors d'effectuer des recherches pour répondre à la préoccupation de la communauté villageoise.

Activité 1 Définition d'une suite numérique

Une voiture est en mouvement à une vitesse constante de 10 m/s. Elle roule sur une route rectiligne. A l'instant $t = 0$ seconde, le conducteur accélère avec une accélération constante de 0,8 m/s^2. On montre que sa nouvelle vitesse (en m/s) à chaque instant t (en s) est :

$v(t) = 0{,}8\,t + 10.$

Détermine la vitesse de ce véhicule aux instants suivants :

$t = 0s,\ t = 1s,\ t = 2s,\ t = 3s\ ,\ t = 4s\ ,\ t = 5s\ ,\ t = 6s\ ,\ t = 7s\ ,\ t = 8s\ ,\ t = 9s\ ,\ t = 10s$ ...

Récapitulons

- On a défini ainsi une fonction f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- On ne calcule que les images de nombres entiers naturels.
- Une telle fonction est appelée suite numérique.
- L'image $f(n)$ d'un entier naturel n est notée f_n.

Exercice de fixation

1 Parmi les fonctions suivantes, relève celles qui sont des suites numériques.

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{x+5}{2x}$	$h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{5}{x+1}$	$g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{4x+5}{x}$	$u:\{-2;3;4;5\}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto x+5$
$v:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{4x+5}{x}$	$w:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{4x+5}{x+2}$	$k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto 3x^2-x+5$	$l:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\dfrac{4}{x}$

Activité 2 Suite définie par une formule explicite

Soit f la fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^3 - x^2 + 1$.

1. Justifie que f est une suite numérique.
2. Détermine f_2 ; f_{20} ; f_{100} et f_{50}.
3. Pour tout entier naturel n, donne l'expression de f_n en fonction de n.

Récapitulons

- Pour tout entier naturel n, on a une expression qui permet de calculer directement f_n.
- On dit que la suite est définie par une formule explicite.

Exercice de fixation

2 Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = -5\,n^3 + 2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

Calcule u_0 ; u_5 ; u_{15} ; v_{50} et v_{60}.

Activité 3 Suite définie par une formule de récurrence

Dans un laboratoire, on place dans un bocal 5 bactéries d'une même espèce de telle sorte que sa population augmente de 30% toutes les heures. Soit p_n, la quantité de bactéries au bout de n heures (n étant un entier naturel).

a) Justifie que l'application p qui à chaque durée de n en heures associe la quantité p_n de bactéries est une suite numérique.

b) Détermine p_0 ; p_1 ; p_2 ; p_3 et p_4 .

c) Exprime p_{n+1} en fonction de p_n.

Récapitulons

- Pour calculer p_{n+1}, il faut déterminer p_n.
- L'expression de p_{n+1} en fonction de p_n est appelée formule de récurrence
- On dit que la suite p est définie par une formule de récurrence.

Exercice de fixation

3 Parmi les suites numériques suivantes, relève le numéro de celles qui sont définies par une formule explicite, puis le numéro de celles qui sont définies par une formule de récurrence.

	3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{2n+1} + 1$
1. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sqrt{2n+1} + n$	
2. $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = \dfrac{1}{f_n} + 1$	**4.** $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1} = \dfrac{1}{g_n + 1} + \sqrt{2n}$

Activité 4 Représentation d'une suite définie par une formule de récurrence

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , soit v une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

$v_0 = 1$ *et* $v_{n+1} = 2v_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1. Représente la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1$.
2. Trace la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Place v_0 sur l'axe des abscisses.
4. Détermine graphiquement sur l'axe des ordonnées v_1, image de v_0.
5. Trace la parallèle à la droite (OI) passant par le point de coordonnée $(0, v_1)$.
6. Justifie que cette droite coupe la droite (D) au point de coordonnées (v_1, v_1).
7. Place graphiquement v_1 sur l'axe des abscisses.
8. Reprends la même opération à partir de v_1 pour placer v_2, puis de v_2 pour placer v_3...

Récapitulons

On représente ainsi les termes de la suite sur l'axe des ordonnées mais aussi sur l'axe des abscisses.

Exercice de fixation

4 Soit la suite numérique (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n + 2 , n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), représente sur l'axe (OI), les termes d'indice 0 ; 1 ; 2 et 3.

Activité 5 Suite arithmétique

Soit (u_n), la suite numérique définie par $u_n = 3n + 4$

1. Détermine u_0.
2. Justifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$.

Récapitulons

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$, est une constante.
- La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 4.

Exercice de fixation

5 Écris la lettre de chaque affirmation suivie de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

a) La suite numérique définie par : $\begin{cases} g_0 = \sqrt{5} \\ g_{n+1} = \dfrac{1}{g_n}, \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$, est une suite arithmétique.

b) La suite numérique définie par : $u_n = 4n + 3$,$\forall\, n \in \mathbb{N}$, n'est pas une suite arithmétique.

c) La suite numérique définie par : $\begin{cases} w_0 = \sqrt{5} \\ w_{n+1} = w_n + 4 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$, est une suite arithmétique.

d) La suite numérique définie par : $\begin{cases} h_0 = 2 \\ h_{n+1} = h_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$, est une suite arithmétique.

Activité 6 Définition d'une suite arithmétique par une formule explicite

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1. Recopie et complète les égalités suivantes :

$u_1 = u_0 + r$ $\quad u_2 = u_1 + r$ $\quad u_3 = ... + r$ $\quad u_4 = ... + r$

$u_{n-2} = ... + r$ $\quad u_{n-1} = ... + r$ $\quad u_n = ... + r$

2. Justifie que :

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + nr.$

3. Déduis-en l'égalité : $u_n = u_0 + nr$.

Récapitulons

$u_n = u_0 + nr$ est une formule explicite de la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Exercice de fixation

6 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3, et de premier terme 2, exprime u_n en fonction de n.

Activité 7 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La suite u_n est une suite arithmétique de raison r ; soient k et p deux entiers naturels, p étant non nul.

On pose S = $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+p-2} + u_{k+p-1}$, la somme de p termes consécutifs

1. Justifie que S = $u_{k+p-1} + u_{k+p-2} + ... + u_{k+2} + u_{k+1}$ u_k.
2. Exprime u_{k+1}, u_{k+2} , ... , u_{k+p-2} *et* u_{k+p-1} en fonction de u_k et r.
3. Exprime u_{k+p-2}, u_{k+p-3} ... , u_{k+2}, u_{k+1} et u_k en fonction de u_{k+p-1} et r.
4. Exprime l'égalité (1) : S = $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+p-2} + u_{k+p-1}$ en remplaçant u_{k+1} ,u_{k+2} , ... , u_{k+p-2} et u_{k+p-1} par leur expression en fonction de u_k et r.

Exprime l'égalité (2) : S = $u_{k+p-1} + u_{k+p-2} + u_{k+p-3} + ... + u_{k+2} + u_{k+1} + u_k$ en remplaçant u_{k+p-2} ,u_{k+p-3}, ...,u_{k+2}, u_{k+1} et u_k par leur expression en fonction de u_{k+p-1} et r.

En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2) à partir de leurs nouvelles expressions, justifie que :

S = $\dfrac{1}{2}\, p\, (u_k + u_{k+p-1})$.

■ **Récapitulons**

$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+p-2} + u_{k+p-1} = \frac{1}{2}\, p\,(u_k + u_{k+p-1})$.

- p est le nombre de termes dans la somme.
- u_k le premier terme de la somme.
- u_{k+p-1} le dernier terme de la somme.

Exercices de fixation

7 Soit (u_n) une suite arithmétique telles que : $u_5 = 8$ et $u_{50} = -10$.

Calcule : $u_5 + ... + u_{50}$.

Activité 8 Suite géométrique

Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = 3 \times 2^n$.

1. Détermine v_0.
2. Justifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$.

■ **Récapitulons**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est une constante.
- La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 3.

Exercices de fixation

8 Écris la lettre de chaque affirmation suivie de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

a) La suite numérique définie par : $\begin{cases} k_0 = \sqrt{5} \\ k_{n+1} = -5k_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique.

b) La suite numérique définie par : $u_n = 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, n'est pas une suite géométrique.

c) La suite numérique définie par : $\begin{cases} w_0 = \sqrt{5} \\ w_{n+1} = (n+1)\,w_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique.

d) La suite numérique définie par : $\begin{cases} h_0 = 2 \\ h_{n+1} = h_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique.

Activité 9 Définition d'une suite géométrique par une formule explicite

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

1. Exprime les termes suivants en fonction de q et v_0 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6.
2. Déduis-en une expression de v_n en fonction de q et v_0.

■ **Récapitulons**

Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\, q^n$.

- v_0 est le premier terme de la suite.
- q est la raison de la suite.

Exercice de fixation

9 Soit (v_n) une suite géométrique de raison −5 et premier terme 2. Exprime v_n en fonction de n.

Activité 10 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$; soient k et p deux entiers naturels, p étant non nul.

On pose $S = v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + ... + v_{k+p-2} + v_{k+p-1}$, la somme de p termes consécutifs.

1. Exprime S en fonction de v_k et q.
2. En admettant que : pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{p-1} = \frac{1-q^p}{1-q}$,

Justifie que : $S = v_k \frac{1-q^p}{1-q}$.

■ **Récapitulons**

$v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + ... + v_{k+p-2} + v_{k+p-1} = v_k \times \frac{1-q^p}{1-q}$

- p est le nombre de termes dans la somme, q est la raison de la suite.
- v_k est le premier terme de la somme.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Définition

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Exemples : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4x+5}{2}\end{array}$; $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto -9x+1\end{array}$; $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4x}{x+1}\end{array}$ f et h sont des suites numériques.

Remarques

- Si n_0 est le plus petit entier naturel tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n existe alors la suite u se note aussi $(u_n)_{n \geq n_0}$.
- Si $n_0 = 0$ alors la suite u peut se noter : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$.
- Si $n_0 = 1$ alors la suite u peut se noter : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exemple

Soit la suite $\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ n\mapsto \dfrac{4n+5}{n}\end{array}$

La suite u se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$.

$u_n \mapsto \dfrac{4n+5}{n}$ est le terme général de cette suite

$u_1 = 9$; $u_5 = 5$; $u_{10} = \dfrac{9}{2}$ et $u_{13} = \dfrac{57}{13}$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2

Notation et vocabulaire

- L'image d'un entier naturel n par une suite u est notée u_n et est appelée le terme d'indice n.
- u_n est aussi appelé le terme général de la suite u.
- La suite u peut se noter : (u_n).

II. DÉFINITION D'UNE SUITE PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Définition d'une suite par une formule explicite

Une suite (u_n) est dite définie par une formule explicite si son terme général u_n est exprimé en fonction de n.

Exemple

Soit (u_n), la suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{3}{n+1}$.

- Le terme général de cette suite est $u_n = \dfrac{3}{n+1}$ et est exprimé en fonction de n.
- On a une formule qui permet de calculer directement l'image de tout entier naturel.
- $u_5 = \dfrac{3}{5+1}$; $u_0 = \dfrac{3}{0+1}$; $u_{2019} = \dfrac{3}{2019+1}$; $u_2 = \dfrac{3}{2+1}$.

Définition d'une suite par une formule de récurrence

Une suite (u_n) est dite définie par une formule de récurrence si elle est définie par : la donnée de son premier terme et d'une formule permettant de calculer chaque terme à partir du terme qui le précède ou par la donnée des premiers termes et d'une formule permettant de calculer chaque terme à partir des termes qui le précèdent.

Exemple

1. On donne la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + 4, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Ainsi : $u_1 = 5u_0 + 4 = 5 \times 2 + 4 = 14$;

$u_2 = 5u_1 + 4 = 5 \times 14 + 4 = 74$;

$u_3 = 5u_2 + 4 = 5 \times 74 + 4 = 374$.

2. On donne la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \ et \ \ v_1 = 2 \\ v_{n+2} = 5v_{n+1} + 4v_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ainsi : $v_2 = 5v_1 + 4v_0 = 5 \times 2 + 4 \times 2 = 18$;

$v_3 = 5v_2 + 4v_1 = 5 \times 18 + 4 \times 2 = 98$;

$v_4 = 5v_3 + 4v_2 = 5 \times 98 + 4 \times 18 = 562$.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4 ; 5

III. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES TERMES D'UNE SUITE NUMÉRIQUE DÉFINIE PAR UNE FORMULE DE RÉCURRENCE

Méthode

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J),

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence du type $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On peut construire des termes de la suite (u_n) sur la droite (OI), en observant les étapes suivantes :

- **Etape 1 :** construis la courbe (C_f) représentant la fonction f ;
- **Etape 2 :** trace la droite (D) d'équation $y = x$. Chaque point de cette droite possède une abscisse égale à son ordonnée ;
- **Etape 3 :** place le point de coordonnées $(u_0 ; 0)$;
- **Etape 4 :** cherche le point d'ordonnée $f(u_0)$, en traçant une droite parallèle à (OJ) et passant par le point de coordonnées $(u_0 ; 0)$. C'est le point d'intersection de cette droite avec la courbe (C_f).

Ce point a comme ordonnée $f(u_0)$, ce qui correspond à u_1 (puisque $u = f(u_0)$,

- **Etape 5:** trace la parallèle à la droite (OI) passant par le point de coordonnée $(0, u_1)$. Cette droite coupe la droite (D) au point de coordonnées $(u_1 ; u_1)$.

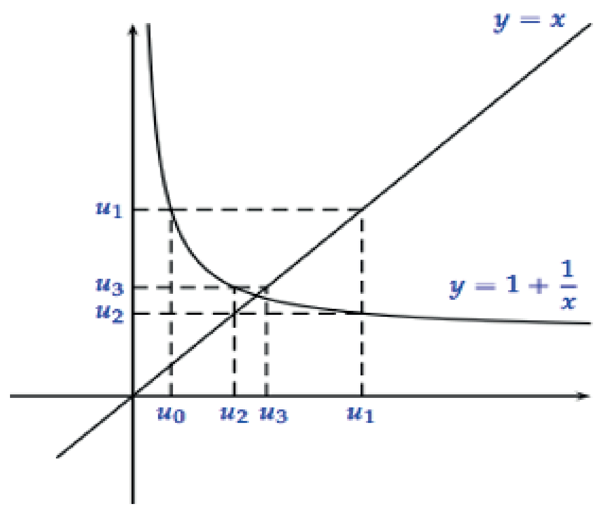
La parallèle à la droite (OJ) passant par le point de coordonnées $(u_1 ; u_1)$ coupe la droite (OI) au point de coordonnées $(u_1 ; 0)$.

Réalise ensuite pour u_1 les même opérations que pour u_0 afin d'obtenir u_2 et ainsi de suite pour les termes de rangs suivants.

Exemple

Représentation graphique des quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ pour tout entier naturel n, u_0 étant un réel non nul donné



Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7

IV SUITES ARITHMÉTIQUES

Définition

Une suite numérique (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{(n+1)} = u_n + r$.

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Remarques

Une suite numérique (u_n) est une suite arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs quelconque est constante.
Cette constante est la raison de cette suite arithmétique.

Exemple

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = 4n + 7$.
On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{(n+1)} - u_n = 4(n + 1) + 7 - (4n + 7) = 4$;
- $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 7$.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9

a) Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n - p)\, r$.

Exemple

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de deuxième terme $u_2 = -3$.

- $u_7 = u_2 + (7 - 2) \times 5$
  $= -3 + 25$
  $= 22$
- $u_{10} = u_2 + (10 - 2) \times 5$
  $= -3 + 40$
  $= 37$
- $u_{10} = u_7 + (10 - 7) \times 5$
  $= 22 + 15$
  $= 37$

Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11

b) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique de raison r ; soient k et p deux entiers naturels, p étant non nul, on a :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+p-2} + u_{k+p-1} = p\,\frac{u_k + u_{k+p-1}}{2}.$$

- p est le nombre de termes dans la somme ;
- u_k le premier terme de la somme ;
- u_{k+p-1} le dernier terme de la somme.

Remarques

- La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes dans la somme par la démi-somme des termes extrêmes.
- Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}.$$

Exemple

Soit (u_n), une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$.
Calcul : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

- $u_0 = 2$, $u_{100} = 502$ et nombre de termes : 101.
- $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 101 \times \dfrac{u_0 + u_{100}}{2}$
- $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 101 \times \dfrac{2+502}{2} = 25452.$

Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13

V- SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition

- Une suite numérique (v_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$.
- Le nombre réel q est appelé la raison de la suite (v_n).

Remarques

- Une suite numérique (v_n) dont les termes sont non nuls, est une suite géométrique, si le quotient de deux termes consécutifs quelconques est constant.
- Cette constante est la raison de cette suite géométrique.

Exemple

Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = 7 \times 5^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{7 \times 5^{n+1}}{v_n} = 5$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 7.

Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15

a) Expression du terme général d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

- Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Exemple

Soit la suite géométrique (v_n) de raison $q = -8$ et de premier terme $v_0 = 3$.

$v_2 = 3 \times (-8)^2 = 192$

$v_5 = v_2 \times (-8)^5 = 192 \times (-512) = -98304.$

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17 ; 18

b) Somme de termes consécutif d'une suite géométrique

Soit la suite géométrique (v_n) de raison $q \neq 1$, si k et p sont deux entiers naturels

$$v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + \ldots + v_{k+p-2} + v_{k+p-1} \quad v_k = \frac{1-q^p}{1-q}.$$

- p est le nombre de termes dans la somme ;
- q est la raison de la suite ;
- v_k le premier terme de la somme.

Remarques

- Somme des n premiers termes d'une suite géométrique ;
- $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-2} = v_0 = \dfrac{1-q^n}{1-q}$;
- Si $q = 1$, alors $v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + \ldots + v_{k+p-2} + v_{k+p-1} = p \times v_0$.

Exemple

Soit (v_n), la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -5$.

$S = v_4 + v_5 + \ldots + v_{20}$

$v_4 = (-5) \times 24 = -80$

nombre de termes : 17

$S = v_4 + v_5 + \ldots + v_{20}$

$= (-80) \times \dfrac{1-(2)^{17}}{1-2} = (-80) \times (-1 + (2)^{17}) = 10.485.680.$

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20

QUESTION 1

Comment résoudre un problème pratique à l'aide des suites numériques ?

Méthode

- vérifier que le problème est un phénomène répétitif
- choisir une suite numérique qui décrit le phénomène
- trouver le lien entre deux phénomènes consécutifs
- traduire ce lien à l'aide de la suite numérique
- identifier la nature de la suite numérique
- utiliser les propriétés de la suite numérique pour répondre à la question posée.

Exercice

Un village compte 16205 habitants après un recensement. Une étude montre que cette population augmente de 6% chaque année. Détermine le nombre d'habitants que comptera ce village 50 ans après ce recensement.

Solution commentée

✓ Le nombre d'habitants après un certain nombre d'années correspond à un phénomène répétitif, donc désignons par v_n le nombre d'habitants au bout de n années.

✓ Trouvons le lien entre le nombre d'habitants de deux années consécutifs, c'est-à-dire une relation entre v_n et v_{n+1}. On a d'après l'hypothèse : $v_{n+1} = v_n + 0{,}06v_n = 1{,}06v_n$.

✓ On constate que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 16205.

✓ Le nombre d'habitants au bout de 50 ans sera donc le terme v_{50}.

✓ Or $v_{50} = 16205 \times (1{,}06)^{50}$.

✓ Donc, dans 50 ans ce village comptera 248498 habitants.

Exercice non corrigé

On constate une fréquentation de 350 voitures le premier jour d'exploitation d'un parking. On prévoit une augmentation du passage dans ce parking, de 10 voitures supplémentaires chaque jour.
Quelle est le nombre total de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

QUESTION 2

Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite arithmétique ?

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1. Je fais la différence entre u_{n+1} et u_n.

Si $u_{n+1} - u_n$ est une constante r, c'est-à-dire qui ne dépend pas de n, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

2. Si je réussis à écrire u_n sous la forme $a + r \times n$, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r.

■ Exercice

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = \frac{2-5n}{3}$.

Justifie que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

■ Solution commentée

✓ En utilisant la méthode 1, je fais la différence entre u_{n+1} et u_n.

$u_{n+1} - u_n = \frac{2-5(n+1)}{3} - \frac{2-5n}{3}$ soit $u_{n+1} - u_n = \frac{-5}{3}$ et $u_0 = \frac{2}{3}$. On conclut donc que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{-5}{3}$.

✓ En utilisant la méthode 2, $u_n = \frac{2-5n}{3}$ soit $u_n = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}n$. Ici, $a = \frac{2}{3}$ et $r = \frac{-5}{3}$, donc (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{-5}{3}$.

■ Exercice non corrigé

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n\sqrt{2} + \frac{1}{5}}{3}$.

Justifie que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

QUESTION 3

Comment démontrer qu'une suite donnée est une suite géométrique ?

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1. Je fais le quotient de v_{n+1} par v_n.

Si $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est une constante q, c'est-à-dire qui ne dépend pas de n, alors la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q.

2. Si je réussis à écrire v_n sous la forme aq^n, alors la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme a et de raison q.

■ Exercice

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $v_n = 5 \times \frac{1}{3^n}$.

Justifions que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

■ **Solution commentée**

✓ En utilisant la méthode 1, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{5\times\dfrac{1}{3^{n+1}}}{5\times\dfrac{1}{3^n}}$, soit $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$; v_0 = 5, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme 5.

✓ En utilisant la méthode 2, $v_n = 5\times\dfrac{1}{3^n}$ soit $v_n = 5\times(\dfrac{1}{3})^n$.

✓ a = 5 et $q = \dfrac{1}{3}$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme 5.

■ **Exercice non corrigé**

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{-2^n}{3^n\times 7}$.

Justifie que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

QUESTION 4 Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Méthode

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on :
- détermine le premier terme u_p de la somme ;
- détermine le dernier terme u_k de la somme :
- détermine le nombre de termes de la somme : ($k - p$ + 1) ;
- on calcule la moyenne arithmétique du premier et du dernier terme de la somme : $\dfrac{u_p + u_k}{2}$
- on multiplie cette moyenne arithmétique par le nombre de termes de cette somme : $(k-p+1)\times\dfrac{u_p+u_k}{2}$.
.

■ **Exercice**

Calcul de la valeur de S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 216 + 217.

■ **Solution commentée**

On identifie ici la somme des 217 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.
Le dernier terme est : 217, le premier terme est 1.

La moyenne de ces deux termes est $\dfrac{218}{2}$ soit 109.

On a donc S = 217 × 109 soit S = 23653.

■ **Exercice non corrigé**

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 3 et de raison −2.
   Détermine la valeur de la somme : S = $u_0 + u_1 + ... + u_{34}$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : v_n = 2−3n
   Détermine la valeur de la somme : S = $v_4 + v_5 + ... + v_{15}$.

QUESTION 5

Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Méthode

Pour calculer la somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique, telle que :
S = $v_p + v_p + 1 + ...+ v_k$, on :

- détermine le premier terme v_p de cette suite ;
- détermine le nombre de termes de la somme ;
- détermine la raison q de cette suite :
- utilise la formule : S = $v_p \times \frac{1-q^{k-p+1}}{1-q}$.

Exercice

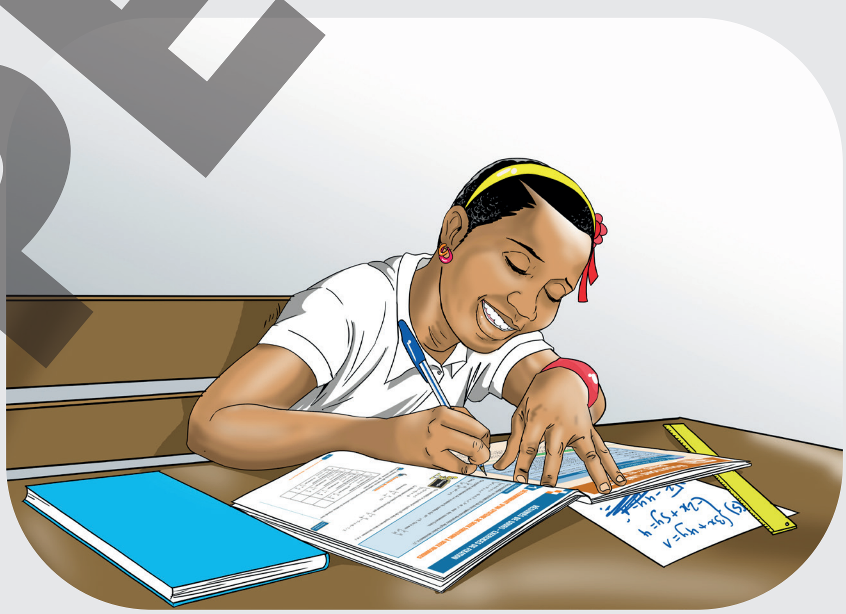
Calculons S = 10 + 30 + 90 + ... + 21.870

Solution commentée

On peut écrire S = 10 × 1 + 10 × 3 + 10 × 9 + ... + 10 × 2187
= 10 × 3^0 + 10 × 3^1 + 10 × 3^2 + ... + 10 × 3^7
On identifie S comme étant la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 10 et raison 3 donc $S = 10 \times \frac{1-3^8}{1-3}$.
S = 10 × 3 280 = 32 800.

Exercice non corrigé

Calcule nombre réel S tel que S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128



Exercices de fixation

Définition d'une suite numérique

1 Parmi les fonctions suivantes, relève celles qui sont des suites numériques.

$\begin{array}{l} f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x+5}{2x} \end{array}$; $\begin{array}{l} h:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{5}{x+1} \end{array}$; $\begin{array}{l} g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4x+5}{x} \end{array}$; $\begin{array}{l} u:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x+5 \end{array}$;

$\begin{array}{l} v:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4x+5}{x} \end{array}$; $\begin{array}{l} w:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4x+5}{x+2} \end{array}$; $\begin{array}{l} k:\{-2;3;4;5\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3x^2-x+5 \end{array}$; $\begin{array}{l} l:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{4}{x} \end{array}$.

2 Complète la phrase ci-dessous à l'aide d'ensembles choisis dans la liste suivante pour obtenir la définition d'une suite numérique : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

On appelle suite numérique, toute fonction de … vers …

Détermination d'une suite numérique

3 Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n = 2^n - 3^n$ et $v_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Calcule les trois premiers termes de chaque suite.

4 Soit la suite numérique (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 4},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Calcule u_1 ; u_2 et u_3.

5 Soit la suite numérique (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 = 5 \text{ et } u_1 = -2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - 4u_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Calcule u_2 ; u_3 et u_4.

Représentation graphique d'une suite numérique

6 Soit la suite numérique (v_n) définie par :

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n},\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) représente sur l'axe (OI) les termes d'indice 0 ; 1 ; 2 et 3.

7 Soit la suite numérique (v_n) définie par :

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) représente sur l'axe (OI) les termes d'indice 0 ; 1 et 2.

Définition d'une suite arithmétique

8 Soit (w_n) une suite arithmétique de raison 3. Exprime w_{n+1} en fonction de w_n.

9 Justifie que la suite (w_n) de terme général $w_n = -n + \sqrt{5}$ est une suite arithmétique, précise le premier terme et la raison.

Expression du terme général d'une suite arithmétique

10 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que : $u_0 = -3$ et $r = 2$.

Calcule u_5, u_{10} et u_{100}.

11 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que : $u_3 = 5$ et $u_{10} = 8$.

Détermine la raison de cette suite.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

12 Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_0 = 2$ et $w_{19} = 60$.

Calcul $w_0 + … + w_{19}$.

13 Soit (v_n) une suite arithmétique de raison −4 et de premier terme 9.

Calcul la somme des cent premiers termes de cette suite.

Définition d'une suite géométrique

14 Justifie que la suite (u_n) de terme général $u_n = 3 \times 5^n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

15 Soit (v_n) une suite géométrique de raison 3, exprime v_{n+1} en fonction de v_n.

Expression du terme général d'une suite géométrique

16 Soit (w_n) une suite géométrique de raison −2 , et de premier terme 5, exprime w_n en fonction de n.

17 Soit (v_n) une suite géométrique de raison q telle que : $v_0 = -3$ et $q = 2$.

Calcule v_5, v_{10} et v_{100}.

18 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que : $q = 7$ et $u_{10} = 14$.

Détermine le premier terme de cette suite.

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

19 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que : $q = 2$ et $u_5 = -10$.

Calcule : $u_{51} + ... + u_{100}$.

20 Soit (v_n) une suite géométrique de raison −4 et de premier terme 9.

Calcul la somme des trente premiers termes de cette suite.

Exercices de renforcement/approfondissement

21 Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_4 = 8$ et $w_{12} = 5$.

1. Détermine la raison et le premier terme de cette suite.
2. Exprime w_n en fonction de n.
3. Calcule $w_4 + ... + w_{12}$.

22 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 10.

1. Détermine u_{14} sachant que $u_{12} = 5$.
2. Détermine la somme des cent premiers termes de cette suite.

23 Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = -3n + 5$.

1. Montre que (u_n) est une suite arithmétique.
2. On pose $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

   Exprime s_n en fonction de n.

24 Soit (v_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme − 2.

Calcul la somme des dix premiers termes de cette suite.

25 Soit (v_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

Calcule la somme des dix premiers termes de cette suite.

26 Soit (w_n) une suite géométrique telle que $w_{12} = 36$ et $w_{10} = 6$.

1. Détermine la raison et le premier terme de cette suite sachant que la raison est positive.
2. Exprime w_n en fonction de n.
3. Calcul $w_0 + ... + w_{12}$.

27 Soit (u_n), une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1. Exprime u_5 en fonction de u_2.
2. Détermine u_5 et u_0 sachant que : $u_2 = 5$.

28 Soit (u_n) la suite de terme général, $u_n = n^2$.

1. Justifie que : $u_{2n} = 4\,u_n$
2. Exprime u_{3n} en fonction de u_n.

29 Justifie que :

$2 + 5 + 8 + 11 + ... + (3n + 2) = \dfrac{(3n+4)(n+1)}{2}$.

30 Détermine la somme des 1000 premiers entiers naturels non nuls.

31 Calcule la valeur exacte de la somme S telle que :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{39}}.$$

32 Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_5 = 2 \\ 7u_{n+1} = 7u_n - 2 \end{cases}$.

1. Démontre que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprime u_n en fonction de n.
3. Détermine la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

33 Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$.

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 1$.

1. Justifie que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprime v_n en fonction de n.
3. Déduis-en u_n en fonction de n.
4. Détermine la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n).

34 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3^n + 5n - 6$.

1. Calcule : u_0 ; u_1 ; u_3 ; u_4 ; u_5 et u_6.
2. Calcule : $S = u_0 + u_1 ... + u_{100}$.

35 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}.$$

1. Calcule u_1 ; u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = (u_n - 1)^2$.

a) Montre que (v_n) est une suite arithmétique, précise la raison et le premier terme.

b) Exprime v_n en fonction de n.

c) Calcule u_{33}.

d) Calcul $v_6 + v_7 + ... + v_{50}$.

36 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = -175$.

Soit un entier naturel p tel que :

$u_p = 35$ et $u_0 + u_1 + ... + u_p = -2170$.

Détermine p et r.

37 À partir de deux points O et A_1 du plan tel que $OA_1 = 1$, on construit le triangle OA_1A_2 rectangle et isocèle en A_1.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on construit les points A_n tels que le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle et isocèle en A_n.

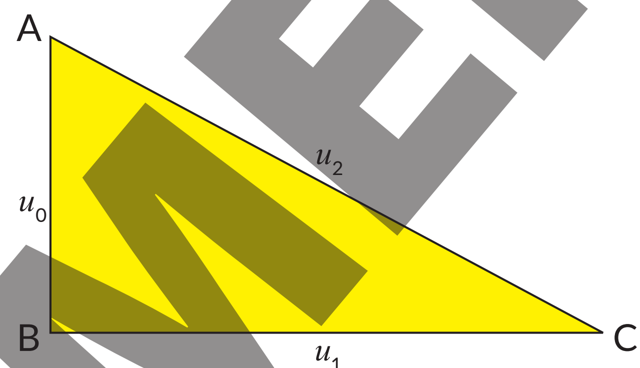
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = A_nA_{n+1}$.

1. Place O et A_1 (unité : 1 cm), puis construis A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
2. Détermine u_1, u_2, u_3 et u_4.
3. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n et déduis-en la nature de la suite (u_n).
4. Calcule la longueur de la spirale $A_1A_2......A_{100}$.

38 A, B et C sont trois points distincts du plan.

ABC est un triangle rectangle en B tel que les longueurs des côtés [AB], [BC] et [CA] sont respectivement les trois premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison r (voir figure).

1. Détermine la raison de la suite (u_n).
2. Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (u_n).



Situations complexes

39 Un foyer de jeunes propose aux élèves de seconde des chambres à louer pour trois ans.

La direction du foyer leur deux types de contrat :

Premier contrat :

Un loyer de 2.000 F le premier mois, puis une augmentation du loyer de 100 F par mois jusqu'à la fin du bail.

Deuxième contrat :

Un loyer de 2 000 F pour le premier mois, puis une augmentation de 5% par mois jusqu'à la fin du bail.

Détermine le contrat le plus avantageux pour les élèves.

40 Ton papa veut acheter un appartement, pour cela il s'adresse à une société immobilière qui met des appartements en location-vente, le loyer mensuel d'un appartement est de 250.000 F CFA par mois, le loyer augmente chaque année de 5% et la location-vente est de dix ans. Papa ne sait pas le montant total à payer pour acquérir cette maison. Pour cela, il s'adresse à toi.

Réponds à sa préoccupation.

13 ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Pour s'assurer que ces bâtiments se dressent les uns parallèles aux autres, l'architecte a besoin des théories de la géométrie dans l'espace, notamment les théories sur l'orthogonalité dans l'espace.

Commentaire de la Leçon

René DESCARTES
1596 – 1650

Le mathématicien français, René DESCARTES va faire évoluer l'idée de géométrie dans l'espace. En 1637, il fait un lien entre les figures de l'espace et les nombres. Il invente l'idée de repère en géométrie. Toutes ces nouvelles pensées et découvertes se développeront dans toute l'Europe au XVIIIe siècle et jusqu'à nos jours. Dans le programme scolaire, la géométrie de l'espace est présente à tous les niveaux dans les séries scientifiques. En classe de seconde C, l'apprenant connait les définitions et propriétés relatives aux droites et plans de l'espace, Il convient de consolider et compléter ces acquis par l'étude de l'orthogonalité dans l'espace.

L'enseignant fera remarquer aux élèves que les propriétés du plan ne s'étendent toujours à l'espace notamment en ce qui concerne l'orthogonalité de deux droites ou l'orthogonalité d'une droite et d 'un plan par exemple. Du point de vue méthodologique, il est conseillé de faire raisonner les apprenants sur des solides « simples » comme par exemple les cubes, pavés droits, puis passer progressivement à des solides plus complexes (prismes, tétraèdres, pyramides). Au cours des évaluations, l'enseignant se limitera à des solides classiques (cube, pavé droit, prisme, pavé droit, tétraèdre, pyramide). La géométrie dans l'espace est utilisée dans divers domaines de la vie courante, notamment en architecture.

Habiletés et Contenus

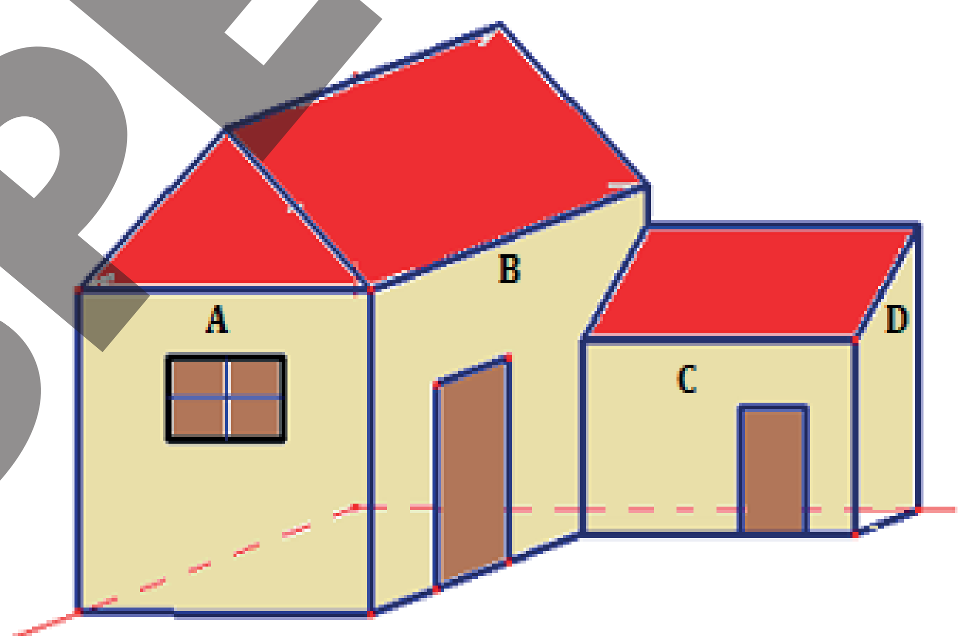
- **Connaitre** la définition de deux droites orthogonales, la définition d'une droite perpendiculaire à un plan, la définition de deux plans perpendiculaires, la définition de la projection orthogonale sur un plan, les propriétés relatives à l'orthogonalité et au parallélisme dans l'espace, la propriété relative au projeté orthogonal du milieu d'un segment.
- **Reconnaitre** sur les solides usuels (pavé droit, prisme, tétraèdre, pyramide) : deux droites orthogonales ; deux plans perpendiculaires ; deux plans parallèles ou une droite perpendiculaire à un plan ; le projeté orthogonal d'un point ; d'une droite ou d'un segment ; l'image du milieu d'un segment par la projection orthogonale sur un plan.
- **Déterminer** l'image d'un point ; d'une droite ou d'un segment par une projection orthogonale sur un plan.
- **Démontrer** que deux droites sont orthogonales ; que deux plans sont perpendiculaires ; qu'une droite est perpendiculaire à un plan ; que deux plans parallèles ; que deux droites sont parallèles ; qu'un point est milieu d'un segment.
- **Traiter une situation** faisant appel à l'orthogonalité dans l'espace.

Situation d'Apprentissage

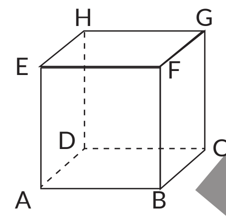
Cette maquette de maison est le modèle de bureaux que veut construire la coopérative d'un village, la maison sera construite sur un terrain plat et horizontal.

Les propriétaires se demandent comment faire pour s'assurer que le plan contenant la face A soit perpendiculaire au plan contenant la face D.

Pour les aider, tu t'adresses à ton professeur de Mathématiques qui profite de ta préoccupation pour étudier avec les élèves de ta classe, les notions relatives à l'orthogonalité dans l'espace.



Activité 1 Droites orthogonales



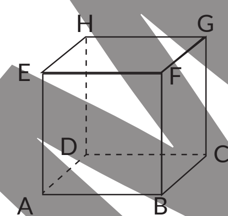
ABCDEFGH est un cube

1. Justifie que les droites (AE) et (FB) sont parallèles.
2. Justifie que les droites (GH) et (FE) sont parallèles.
3. Justifie que les droites (FB) et (FE) sont perpendiculaires.

Récapitulons

- Les droites (BF) et (EF) sont perpendiculaires, donc les droites (AE) et (GH) sont orthogonales.
- Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles issues d'un point commun quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

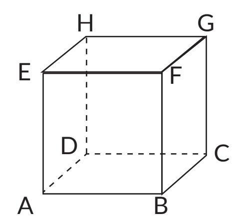
Exercice de fixation



1 ABCDEFGH est un cube.

Justifie que les droites (AB) et (DH) sont orthogonales.

Activité 2 Droites et plans orthogonaux



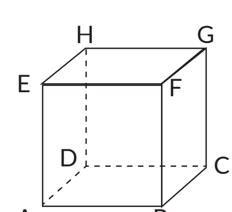
ABCDEFGH est un cube, considérons le plan (ABC).

1. Justifie que les droites (BF) et (CG) sont deux droites parallèles du plan (BCF).
2. Justifie que la droite (AC) est orthogonale aux droites (BF) et (CG).
3. Justifie que la droite (AC) n'est pas orthogonale à la droite (BC) du plan (BCF).
4. Justifie que les droites (DC) et (BC) sont deux droites sécantes du plan (BCD)
5. Justifie que la droite (AE) est orthogonale aux droites (DC) et (BC).

Récapitulons

- On admet qu'une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- La droite (AC) est orthogonale aux droites (BF) et (CG) qui sont parallèles, mais la droite (AC) n'est pas orthogonale au plan (BCF) car il existe une droite de ce plan, la droite (BC) qui n'est pas orthogonale à la droite (AC).
- On vérifie que la droite (AE) qui est orthogonale aux deux droites (DC) et (BC) sécantes du plan (BCD), est orthogonale à toute autre droite de ce plan.
- Ainsi, on admet que si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

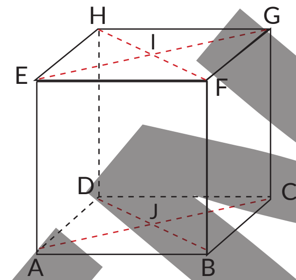
Exercice de fixation



2 ABCDEFGH est un cube,

1. Justifie que la droite (BF) est orthogonale au plan (EFG).
2. Justifie que la droite (DC) est orthogonale au plan (BCG).

Activité 3 Projection orthogonale sur un plan



ABCDEFGH est un cube. considèrons le plan (ABC).

Soit le point I, intersection des droites (EG) et (HF) et le point J, intersection des droites (AC) et (DB).

1. Justifie que le point I n'appartient pas au plan (ABC).
2. Justifie que le point J appartient au plan (ABC).
3. Justifie que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ABC).

Récapitulons

- On a : $I \notin (ABC)$; $J \in (ABC)$;$(IJ) \perp (ABC)$, dans ce cas, on dit que le point J est le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC).
- On n'admet que, tout point M du plan (ABC), a pour projeté orthogonal lui-même ; ainsi les points A, B, C et D ont respectivement les points A, B, C et D pour projeté orthogonal sur le plan (ABC).
- L'application qui, a tout point M de l'espace, associe son projeté orthogonal sur le plan (ABC), s'appelle projection orthogonale sur (ABC).

Exercice de fixation

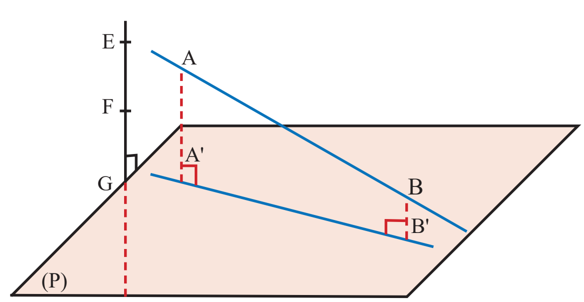
3 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Le projeté orthogonal d'un point A de l'espace sur un plan (P) est l'intersection de (P) et d'une droite passant par A.
2	M et M' étant deux points distincts de l'espace, si la droite (MM') est perpendiculaire au plan (P), alors M' est toujours le projeté de M sur le plan (P).
3	Le projeté orthogonal d'un point B de l'espace sur un plan (P) est l'intersection de (P) et de la droite passant par B et orthogonale à (P).
4	Si F' est le projeté orthogonal de F sur un plan (P), alors la droite (FF') est parallèle au plan (P).
5	Si N' est le projeté orthogonal de N sur un plan (P), alors la droite (NN') est orthogonale au plan (P).

Activité 4 Image d'une droite et d'un segment par une projection orthogonale

Soit le plan (P), on considère :

- A et B deux points distincts de l'espace, tels que la droite (AB) n'est pas orthogonale au plan (P), on note A' le projeté orthogonal de A sur (P) et B' le projeté orthogonal de B sur (P).
- E et F sont deux points distincts de l'espace tels que la droite (EF) est orthogonale au plan (P), on note G le point d'intersection de la droite (EF) et le plan (P).



1. **a)** Justifie que tout point de la droite (EF) a pour projeté orthogonal sur le plan (P) le point G.
   b) Déduis-en le projeté orthogonal de la droite (EF) sur le plan (P).
2. **a)** Justifie que le projeté orthogonal de tout point de la droite (AB) appartient à la droite (A'B').
   b) Justifie que tout point de la droite (A'B') est le projeté orthogonal d'un point de la droite (AB).
   c) Déduis-en le projeté orthogonal de la droite (AB) sur le plan (P).

Récapitulons

- L'image d'une droite (D) par la projection orthogonale sur un plan (P) est :
  - un singleton si la droite (D) est orthogonale au plan (P) ;
  - une droite si la droite (D) n'est pas orthogonale au plan (P).
- On admet que l'image d'un segment par la projection orthogonale sur un plan (P) est :
  - un singleton si le support de ce segment est orthogonale au plan (P) ;
  - un segment si le support de ce segment n'est pas orthogonale au plan (P).

Exercice de fixation

4 Indique la bonne réponse : exemple 7- C.

Dans l'espace,

		A	B	C
1	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'une droite parallèle au plan (P) est	une droite	un segment	un point
2	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'une droite non orthogonale au plan (P) est	une droite	un segment	un point
3	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'un segment dont le support est orthogonal au plan (P) est	une droite	un segment	un point
4	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'une droite orthogonale au plan (P) est	une droite	un segment	un point
5	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'un segment dont le support est parallèle au plan (P) est	une droite	un segment	un point
6	le projeté orthogonal sur le plan (P) d'un segment dont le support n'est ni parallèle ni orthogonale au plan (P) est	une droite	un segment	un point

Activité 5 Projeté orthogonal du milieu d'un segment

ABCDEFGH est un cube. Considèront le plan (ABC),

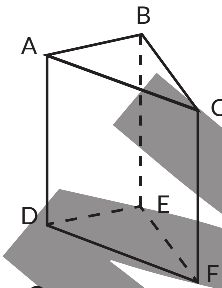
Soit le point I, intersection des droites (EG) et (HF) et le point J, intersection des droites (AC) et (DB).

1. Justifie que le segment [DB] est le projeté orthogonal du segment [HF] sur le plan (ABC)
2. Justifie que le point J est le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC)
3. Justifie que I est le milieu du segment [HF].
4. Justifie que J est le milieu du segment [DB].

Récapitulons

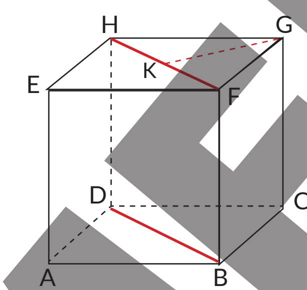
Si le support d'un segment est non orthogonal à un plan (P), alors le projeté orthogonal sur (P) du milieu de ce segment est le milieu du projeté de ce segment.

Exercice de fixation



5 Soit ABCDEF un prisme droit dont la base DEF est un triangle rectangle en E.
Soit H le milieu du segment [AD] et G son projeté orthogonal sur le plan (BCF) .
Justifie que G est le milieu du segment [BE].

Activité 6 Distance d'un point à un plan



ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur a.

Soit K le milieu de [HF].

1. Justifie que (GK) est orthogonale au plan (BDH).
2. Compare GK et GF ; GK et GH ; GK et GB ; GK et GD .

Récapitulons

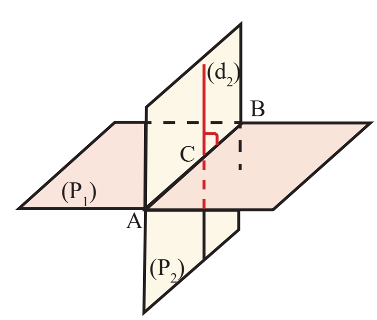
- (GK) est perpendiculaire au plan (HFB) ;
- On admet que, quel que soit le point M pris dans le plan (HFB), GK est plus petite que GM ;
- GK est la distance de G au plan (HFB).

Exercice de fixation

6 Soit un plan (P) et un point M de l'espace.
Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La distance du point M au plan (P), est la plus grande distance entre M et un point quelconque de (P).
2	La distance de M au plan (P), est la distance MM', M' étant un point quelconque de (P).
3	La distance du point M au plan (P), est la plus petite distance entre M et un point quelconque de (P).
4	La distance de M au plan (P), est la distance MM' telle que M' est le projeté orthogonal de M sur (P).
5	Si un point M appartient au plan (P), alors la distance de M au plan (P) est nulle.

Activité 7 Plans perpendiculaires



Soient deux plans (P_1) et (P_2) sécants suivant la droite (AB).

On suppose que (P_2) contient une droite (d_2) orthogonale au plan (P_1) et on désigne par C, le point intersection de la droite (d_2) et du plan (P_1).

1. Justifie que le point C appartient à la droite (AB).
2. Justifie que la droite (d_1) du plan (P_1) perpendiculaire à la droite (AB) en C, est orthogonale au plan (P_2).

Récapitulons

- On dit que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
- On admet que : lorsque deux plans (P_1) et (P_2) sont sécants, si (P_1) contient une droite orthogonale à (P_2) alors (P_2), contient aussi une droite orthogonale à (P_1).

Exercice de fixation

7 Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient au moins une droite orthogonale à l'autre.
2	Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite sécante à l'autre.
3	Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.
4	Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.

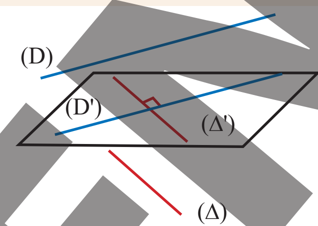
I. DROITES ORTHOGONALES

Définition

Deux droites de l'espace sont orthogonales signifie qu'un point de l'espace étant choisi, les parallèles à ces droites passant par ce point sont perpendiculaires.

Exemple et notation

La parallèle (D') à (D) et la parallèle (Δ') à (Δ) sont perpendiculaires.
Les droites (D) et (Δ) sont donc orthogonales.
On note : (D) ⊥ (Δ).



Remarques

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément perpendiculaires.
- Deux droites de l'espace sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.

Conséquences

Propriété 1

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Traduction

Soient (D), (E) et (L) trois droites de l'espace.
Si (D) ⊥ (E) et (D) // (L) alors (E) ⊥ (L).

Propriété 2

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

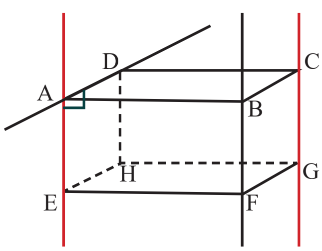
Traduction

Soient (D), (E) et (L) trois droites de l'espace.
Si (D) // (E) et (D) ⊥ (L), alors (E) ⊥ (L).

Exemple

ABCDEFGH est un pavé droit.

- (AE) ⊥ (AD) et (AE) // (CG) alors (AD) ⊥ (CG)
- (AE) // (BF) et (AD) ⊥ (AE) donc (AD) ⊥ (BF).



Pour s'entraîner : Exercice 1

II. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

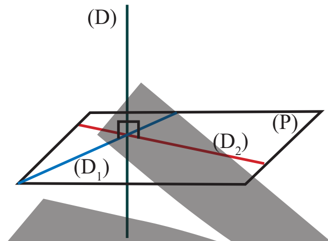
Définition

Une droite (D) est dite orthogonale à un plan (P) lorsque la droite (D) est orthogonale à toutes les droites du plan (P).

Propriété fondamentale

Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) lorsque la droite (D) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).

Exemple et notation



(D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes du plan (P).

- (D) est orthogonale à (D_1) ;
- (D) est orthogonale à (D_2).

Donc (D) est orthogonale au plan (P).

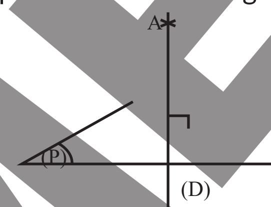
On note (D) $\perp$(P) ou (P) $\perp$(D).

Remarques

- On dit également que (P) est orthogonal à la droite (D).
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est sécante à ce plan en un point ; on dit qu'elle est orthogonale au plan en ce point.
- Une droite peut être orthogonale à deux droites parallèles d'un plan sans être orthogonale à ce plan.

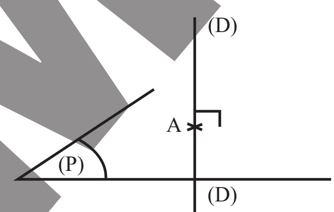
Propriété

Etant donné un point A et un plan (P), il existe une unique droite (D) passant par A et orthogonale à (P).



Propriété

Etant donné un point A et une droite (D), il existe un unique plan (P) passant par A et orthogonal à (D).



Remarques

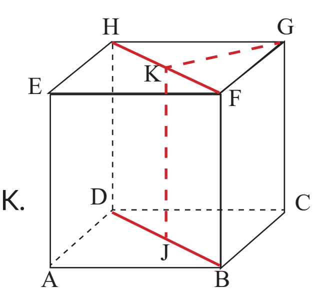
Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l'une d'elles est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur a.

Soit K le milieu de [HF] et J le milieu de [BD].

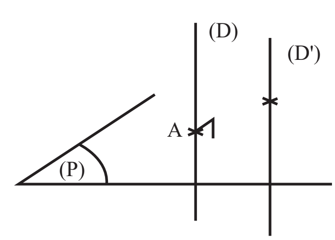
- (GK) est perpendiculaire à (HF) et (JK) qui sont sécantes en K.
- Donc (GK) est orthogonale au plan (BDF).



Orthogonalité et parallélisme

Propriété 1

Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors tout plan (P) orthogonal à (D) est orthogonal à (D').

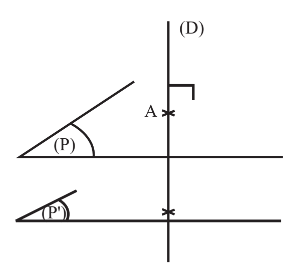


Traduction

Si (D) // (D') et (P) $\perp$ (D), alors (P) $\perp$ (D').

Propriété 2

Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) orthogonale à (P) est orthogonale à (P').

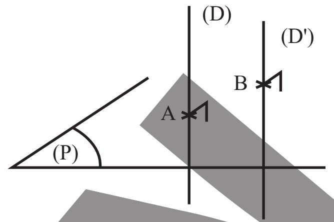


Traduction

Si (P) // (P') et (D) $\perp$ (P), alors (D) $\perp$ (P').

■ **Propriété 3**

Si deux droites (D) et (D’) sont orthogonales à un même plan (P), alors elles sont parallèles.

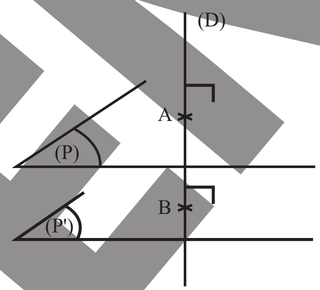


Traduction

Si (D) ⊥ (P) et (D')⊥ (P), alors (D) // (D').

■ **Propriété 4**

Si deux plans (P) et (P’) sont orthogonaux à une même droite (D), alors ils sont parallèles.

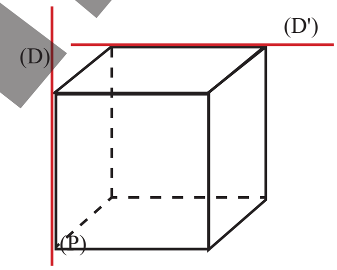


Traduction

Si (D) ⊥ (P) et (D) ⊥ (P’), alors (P) // (P’).

■ **Propriété 5**

Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P), alors toute droite (D’) orthogonale à (D) est parallèle à (P).



Traduction

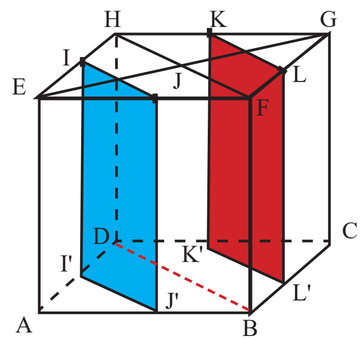
Si (D) ⊥ (P) et (D) ⊥ (D’), alors (D’) // (P).

Exemple

ABCDEFGH est un cube, I, J, K, L milieux respectifs des cotés [EH], [EF], [HG] et [FG].

I’, J’, K’, L’ milieux respectifs des cotés [AD], [AB], [CD] et [BC]

On montre que la droite (EG) est orthogonale aux plans (IJJ’) et (KLL’) donc les plans (IJJ’) et (KLL’) sont parallèles.



› *Méthode*

1. Pour démontrer que deux droites sont parallèles, il suffit de démontrer qu’elles sont orthogonales à un même plan.
2. Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de démontrer qu’ils sont orthogonaux à une même droite.
3. Pour démonter qu’une droite est parallèle à un plan, il suffit de démontrer qu’elle est orthogonale à une droite orthogonale à ce plan.
4. Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de démontrer que l’une d’elles est orthogonale à un plan contenant l’autre.
5. Pour justifier qu’une droite est parallèle à un plan, il suffit de montrer que cette droite est parallèle à une droite de ce plan.

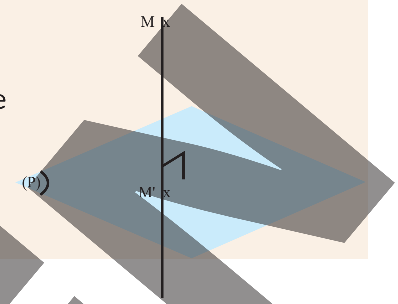
Pour s’entraîner : Exercice 2 ; 3

III. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN

Définition

Étant donné un plan (P),

on appelle projection orthogonale sur (P), l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' de (P) tel que : $\begin{cases} si \ M \in (P), alors \ M' = M \\ si \ M \notin (P), \ alors \ M' \in (P) \ et \ (MM') \perp (P) \end{cases}$



M' est appelé projeté orthogonal de M sur le plan (P).

Remarques

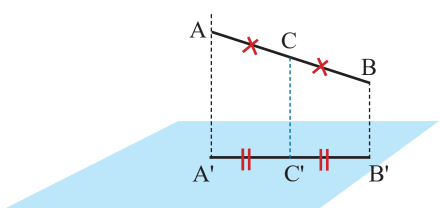
Si M $\in$ (P), alors M' = M. On dit que M est un point invariant par la projection orthogonale sur (P).

Images de figures géométriques simples

- L'ensemble des points invariants par la projection orthogonale sur un plan (P) est le plan (P).
- L'image d'une droite (D) par la projection orthogonale sur le plan (P) est :
  - ✓ un singleton, si la droite (D) est orthogonale à (P).
  - ✓ une droite, si la droite (D) n'est pas orthogonale à (P).
- L'image par une projection orthogonale p sur un plan (P) d'un segment [AB] dont le support n'est pas orthogonal à (P), est le segment [A' B'] avec p(A) = A' et p(B) = B' :
  - ✓ si (AB) et (P) sont parallèles, alors A'B' = AB.
  - ✓ si (AB) et (P) ne sont pas parallèles, alors A'B'< AB.

Projeté du milieu d'un segment

On considère un plan (P).
Le projeté orthogonal sur (P) du milieu d'un segment de support non orthogonal au plan (P) est le milieu du projeté de ce segment.

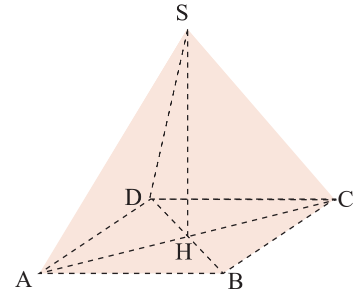


Exemple

Soit SABCD une pyramide régulière à base carré, de hauteur [AH]. Soit p la projection orthogonale sur le plan (ABC), le projeté orthogonal de :

- *S est H*
- *A est A*
- *D est D*

donc le projeté orthogonal du triangle SAD sur le plan (ABC) est le triangle ADH.

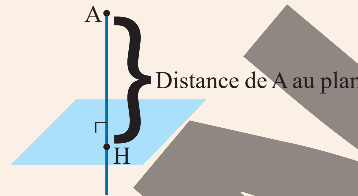


Pour s'entraîner : exercices 4 ; 5 ; 6

IV. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

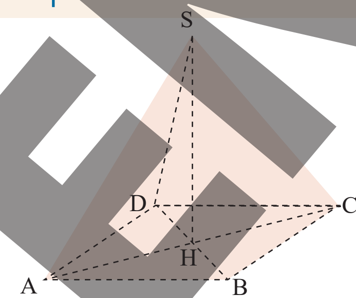
Définition

Soit un plan (P) et un point A de l'espace.
On appelle distance de A au plan (P), la distance de AH, telle que :
H est le projeté orthogonal de A sur (P).
On note : d (M, (P)).



Exemple

Soit SABCD une pyramide régulière à base carré, de hauteur [SH].
SH est la distance du point S au plan (ABC).



Pour s'entraîner : 7 ; 8 ; 9

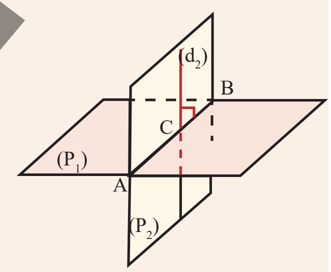
V. PLANS PERPENDICULAIRES

Définition

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.
(P_1) est perpendiculaire à (P_2) se note : $(P_1) \perp (P_2)$.

Remarques :

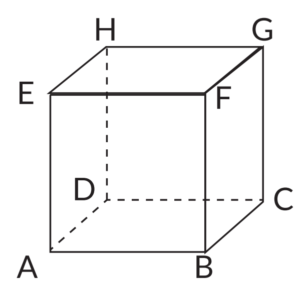
- Deux plans perpendiculaires sont sécants.
- Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un n'est pas nécessairement orthogonale à toute droite de l'autre.



Exemple

Soit ABCDEFGH un cube.

- Le plan (ABE) contient la droite (AE) qui est orthogonale au plan (ABC) ; les plans (ABE) et (ABC) sont donc perpendiculaires.
- Le plan (ABG) contient la droite (AB) qui est orthogonale au plan (ADE) ; les plans (ABG) et (ADE) sont donc perpendiculaires.



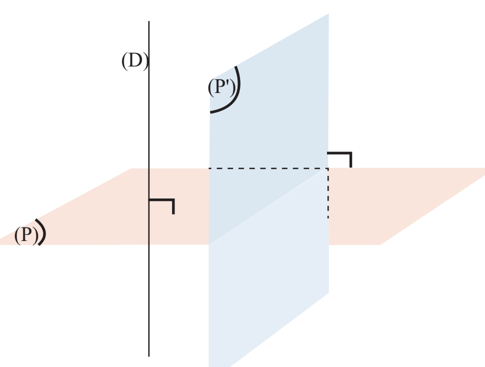
Conséquences

- Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P), alors tout plan (P') parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).

  Traduction
  Si (D) $\perp$ (P) et (P') // (D), alors (P') $\perp$ (P).

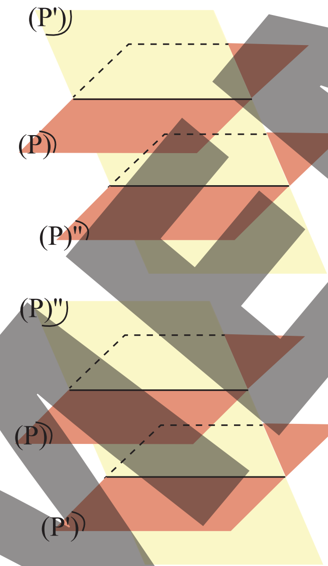
- Si deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires, alors toute droite (D) orthogonale à (P) est parallèle à (P').

  Traduction
  Si (P) $\perp$ (P') et (D) $\perp$ (P), alors (D) // (P').



Remarques

Si deux plans sont perpendiculaires, une droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre. (Il suffit de considérer par exemple leur droite d'intersection.)



Propriété 1

Si deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires, alors tout plan (P'') parallèle à (P) est perpendiculaire (P').

Traduction

Si (P) ⊥ (P') et (P) // (P''), alors (P') ⊥ (P'').

Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (P'') perpendiculaire à (P) est perpendiculaire à (P').

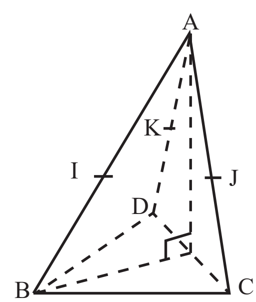
Traduction

(P) // (P') et (P) ⊥ (P''), alors (P') ⊥ (P'').

Remarques

- Deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas forcément parallèles entre eux.
- Pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires, on peut :
  - trouver une droite de l'un qui est orthogonale à l'autre ;
  - trouver une droite parallèle à l'un et orthogonale à l'autre ;
  - trouver un plan parallèle à l'un et perpendiculaire à l'autre.

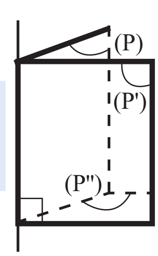
Exemple



Soit ABCD un tétraèdre tel que le plan (ADC) et le plan (CBD) sont perpendiculaires, soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

- (JK) // (CD) et (IK) // (BD), donc (IJK) // (BCD).
- Par hypothèse, (ADC) ⊥ (BCD).

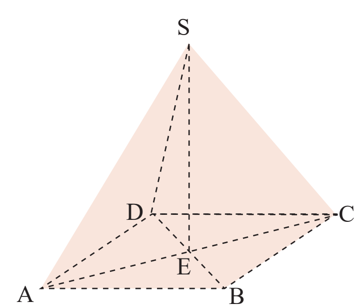
Conclusion : (IJK) ⊥ (ADC).



Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est orthogonal à leur droite d'intersection.

Exemple



Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée et de sommet S, E est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

- La droite (SE) est l'intersection des plans (ASC) et (BSD)
- (SE) ⊥ (ABC)

Conclusion :
(ABC) ⊥ (ASC) et (ABC) ⊥ (BSD)

Pour s'entraîner : exercices 10 ; 11

QUESTION 1

Comment démontrer que deux droites sont orthogonales ?

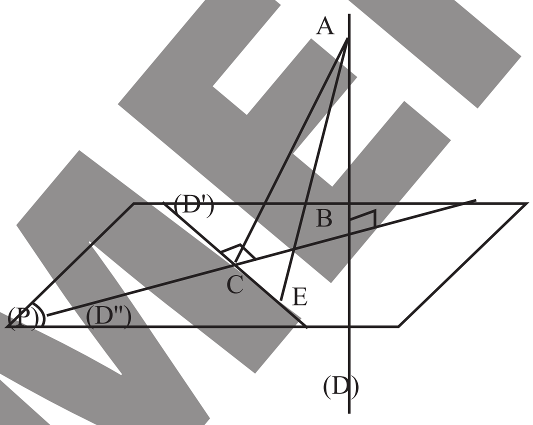
Méthode

- Identifier un plan contenant une des deux droites
- Démontrer que l'autre droite est orthogonale à ce plan
- Conclure

Exercice

(P) est un plan,
- les droites (D') et (D'') sont deux droites du plan (P), perpendiculaires en C.
- (D) est la droite orthogonale au plan (P) en B, B étant un point de la droite (D'') distinct du point C.
- A est un point de la droite (D) n'appartenant pas au plan (P).
- E est un point de la droite (D') distinct du point C.

Justifie que (CE) et (CA) sont orthogonales.



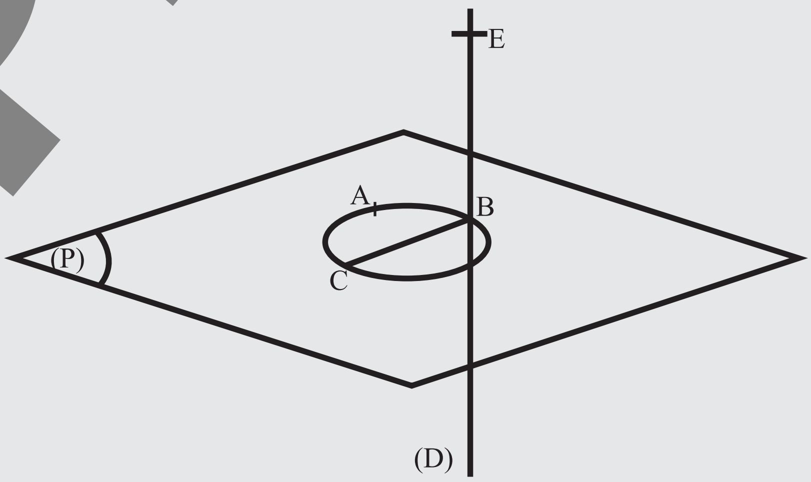
Solution commentée

- (CA) est inclus dans le plan (ACB) ;
- (AB) ⊥ (P), donc (CE) ⊥ (AB). De plus, (D') ⊥ (D'') donc (CE) ⊥ (BC). Ainsi (CE) est orthogonale à (BC) et à (AB), deux droites sécantes en B.
- On en déduit que (CE) est orthogonal au plan (ACB). En conclusion (CE) ⊥ (CA).

Exercice non corrigé

Soit (P) un plan, B et C deux points distincts du plan (P). On considère le cercle contenu dans (P) et de diamètre le segment [BC]. Soit un point A de ce cercle distinct de B et C. Soient la droite (D) orthogonale au plan (P) en B et E un point de la droite (D) n'appartenant pas à (P).

Démontre que les droites (AC) et (AE) sont orthogonales.



QUESTION 2

Comment démontrer que deux plans sont perpendiculaires ?

Méthode

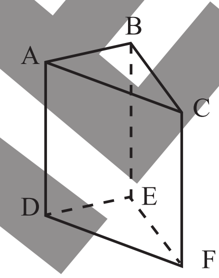
Pour démontrer que deux plans sont perpendiculaires, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Méthode 1 : Trouver une droite de l'un qui est orthogonale à l'autre.
- Méthode 2 : Trouver une droite parallèle à l'un et orthogonale à l'autre.
- Méthode 3 : Trouver un plan parallèle à l'un et perpendiculaire à l'autre.

Exercice

EFDBCA est un prisme droit.

1. Justifie que le plan (ECB) est perpendiculaire au plan (EDF).
2. Justifie que les plans (ECB) est perpendiculaire au plan (ABC).



Solution commentée

1. Le plan (ECB) contient la droite (BE). Or la droite (BE) est orthogonale au plan (DEF) (car elle est orthogonale aux droites sécantes (EF) et (DE). Donc, les plans (ECB) et (EDF) sont perpendiculaires.
2. La droite (AD) est parallèle au plan (ECF), car elle est parallèle à la droite (CF).

La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC), car elle est orthogonale aux droites sécantes (AB) et (AC) de ce plan.

On a donc : (AD) parallèle à (ECF) et (AD) orthogonale à (ABC). Donc les plans (ABC) et (ECF) sont perpendiculaires. Or (ECF) = (ECB). Donc : (ECD) $\perp$ (ABC).

Exercice non corrigé

Justifie que le plan (ECB) est perpendiculaire au plan (ABC) en utilisant la méthode 3.

Exercices de fixation

Droites orthogonaux

1 Parmi ces affirmations, relève les numéros de celles qui sont justes :

1	Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
2	Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors elles sont coplanaires.
3	Deux droites de l'espace sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites passant par un point quelconque de l'espace sont orthogonales.
4	Si une droite de l'espace est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.
5	Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors elles sont sécantes.
6	Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est parallèle à l'autre.
7	Si une droite de l'espace est orthogonale à une droite d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.
8	Deux droites de l'espace orthogonales à une même droite sont parallèles.

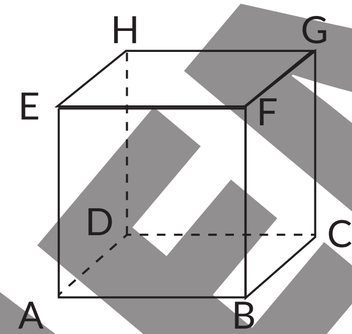
Droites et plans orthogonaux

2 (P) et (P') sont des plans, (Δ) et (Δ') sont deux droites de l'espace, indique la bonne réponse. Exemple : 9 - C.

		A	B	C
1	Si $\begin{cases}(P)\parallel(P')\\(\Delta')\perp(P)\end{cases}$, alors	(Δ')⊥(P')	(Δ')//(P')	(P)⊥(P')
2	Si $\begin{cases}(P)\perp(\Delta)\\(P')\perp(\Delta)\end{cases}$, alors	(P)//(P')	(Δ)//(P')	(Δ)//(P)
3	Si $\begin{cases}(\Delta)\parallel(\Delta')\\(P)\perp(\Delta')\end{cases}$, alors	(Δ)⊥(Δ')	(P)//(Δ')	(P)⊥(Δ)
4	Si $\begin{cases}(\Delta)\perp(P)\\(\Delta')\perp(P)\end{cases}$, alors	(Δ)//(Δ')	(Δ)⊥(Δ')	(P)//(Δ')

3 ABCDEFGH est un cube.

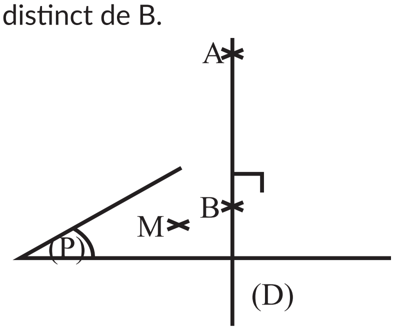
Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.



N°	Affirmations
1	La droite (DC) est orthogonale au plan (ABD).
2	Les droites (AE) et (HC) sont orthogonales.
3	La droite (AC) est orthogonale au plan (FGC).
4	Les droites (AF) et (HC) sont orthogonales.
5	La droite (DC) est orthogonale au plan (HBD).

Projection orthogonale

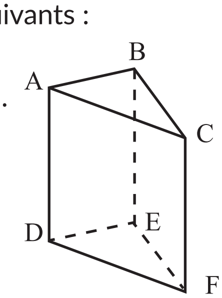
4 On considère un plan (P) et une droite (D) orthogonale à ce plan (P) en un point B.
Soit A un point de (D) n'appartenant pas au plan (P).
Détermine la nature du triangle ABM pour tout point M du plan (P) distinct de B.



Projection orthogonale sur un plan

5 Soit ABCDEF un prisme droit dont la base est DEF.
Soit p la projection orthogonale sur le plan (DEF), détermine le projeté des éléments suivants :

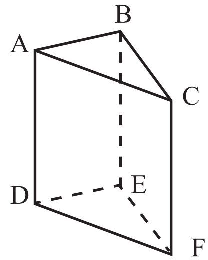
1. Les points : D, C et B.
2. Les segments : [DC], [AD] et [BF].
3. Les rectangles : ABED et BCFE.
4. Les triangles : BCD, DEF et ABC.



6 Soit ABCDEF un prisme droit dont la base est DEF.

Soit p la projection orthogonale sur le plan (DEF) et G le centre de gravité du triangle ABC.

Justifie que le projeté de G par p est le centre de gravité du triangle DEF.

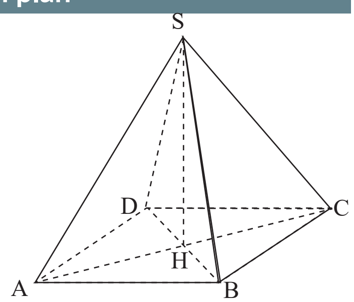


Distance d'un point à un plan

7 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée, de hauteur [SH], telles que :

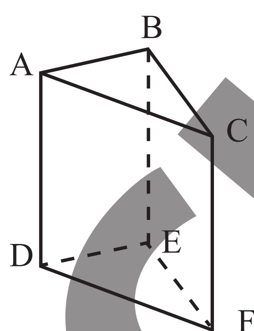
SA= 10 cm et AB = 4 cm.

Détermine la distance du point S au plan (ABC).



8 Soit ABCDEF un prisme droit dont la base DEF est un triangle rectangle en E.

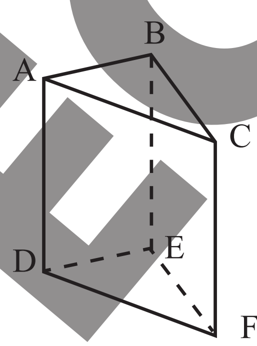
Justifie que la distance du point C au plan (ABE) est la distance BC.



9 EFDBCA est un prisme droit.

ABC est un triangle rectangle en B, tel que AB = 7 cm et BC = 9 cm.

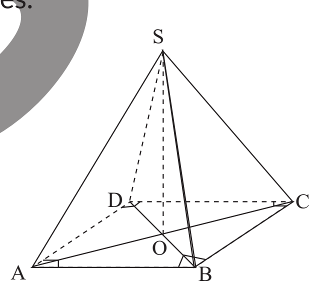
Détermine la distance de B au plan (ACF).



Plans perpendiculaires

10 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée, de sommet S et de hauteur [SO].

Justifie que les plans (DBS) et (ABC) sont perpendiculaires.

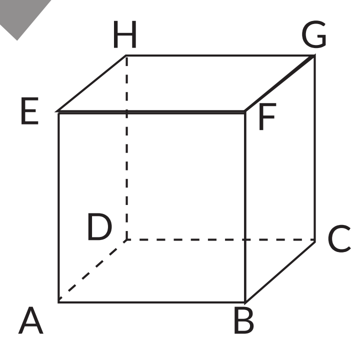


11 (P), (P') et (P'') sont des plans, (Δ) est une droite de l'espace, indique la bonne réponse : Exemple : 8 – C.

1	Si $\begin{cases}(\Delta)\perp(P)\\(\Delta)\parallel(P')\end{cases}$, alors	A) (Δ)⊥(P')	B) (Δ)//(P)	C) (P)⊥(P')
2	Si $\begin{cases}(P)\perp(P')\\(P)\perp(\Delta)\end{cases}$, alors	A) (Δ)//(P')	B) (Δ)⊥(P')	C) (Δ)⊥(P)
3	Si $\begin{cases}(P)\perp(P')\\(P)\parallel(P'')\end{cases}$, alors	A) (P)⊥(P'')	B) (P)//(P')	C) (P')⊥(P'')
4	Si $\begin{cases}(P)\parallel(P')\\(P)\perp(P'')\end{cases}$, alors	A) (P')⊥(P'')	B) (P)⊥(Δ')	C) (P')//(P'')

12 ABCDEFGH est un cube.

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

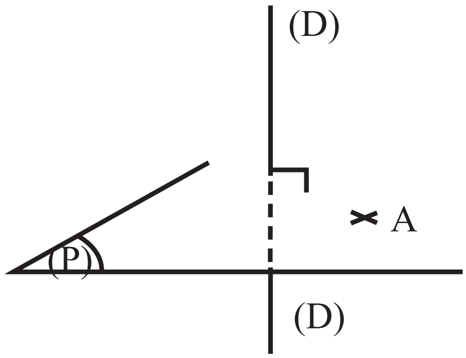


N°	Affirmations
1	Les plans (ABC) et (EFG) sont perpendiculaires.
2	Les plans (AED) et (ABC) sont perpendiculaires.
3	Les plans (ADH) et (ABD) sont perpendiculaires.
4	Les plans (BCG) et (ADH) sont perpendiculaires.
5	Les plans (ADH) et (CDH) sont perpendiculaires.

Exercices de renforcement/approfondissement

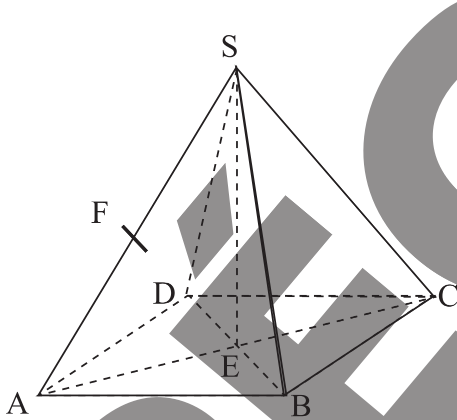
13 Soit (P) un plan, A est un point de (P), (D) est une droite orthogonale au plan (P).

Démontre que toute droite orthogonale à la droite (D) et passant par le point A est contenue dans le plan (P).



14 Soit SABCD une pyramide à base carrée, de sommet S et de hauteur [SE]. Soit F un point appartenant au support de l'arête [AS]. Soient les points G et H les projetés orthogonaux du point F respectivement sur les plans (SDC) et SBC).

Démontre que la droite (CS) est orthogonale au plan (FGH).



15 Soit (P) un plan et (D) une droite de ce plan. Soit A un point de la droite (D) et B un point du plan (P) n'appartenant pas à la droite (D). Soit C un point n'appartenant pas au plan (P) telle que la droite (CB) est orthogonale au plan (P).

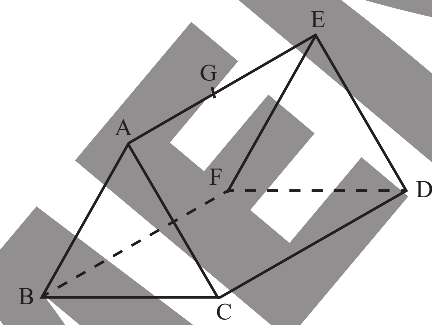
Démontre que si les droites (CA) et (D) sont orthogonales, alors la droite (D) est orthogonale au plan (ACB).

16 ABC est un triangle équilatéral. G est le point d'intersection de ses médianes. (Δ) est la droite passant par G et orthogonale au plan (ABC). La pyramide ABCD est telle que D est un point de la droite (Δ).

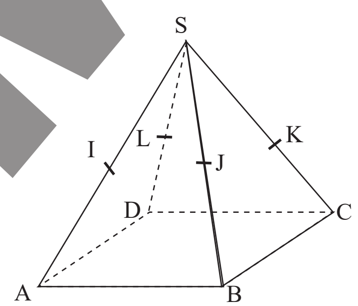
Démontre que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

17 ABCDEF est un prisme droit dont les bases ABC et DEF sont des triangles équilatéraux de côté 4 cm. Soit G un point de l'arête [AE].

1. Détermine la distance de G au plan (CDE).
2. Détermine la distance de G au plan (BCD).



18 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée et de sommet S.

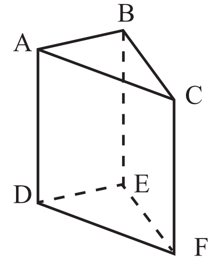


I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [SA], [SB], [SC] et [SD].

1. Démontre que le quadrilatère IJKL est un losange.
2. Démontre que le plan (IJK) est perpendiculaire au plan (SBD).
3. Déduis-en que le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC).

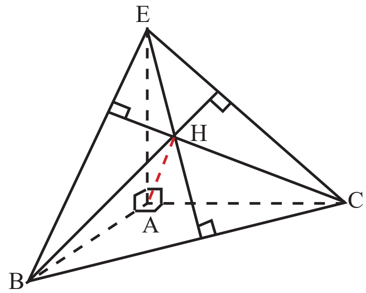
19 Soit ABCDEF un prisme droit de bases DEF et ABC.

Soit p la projection orthogonale sur le plan (DEF) et H l'orthocentre du triangle ABC.



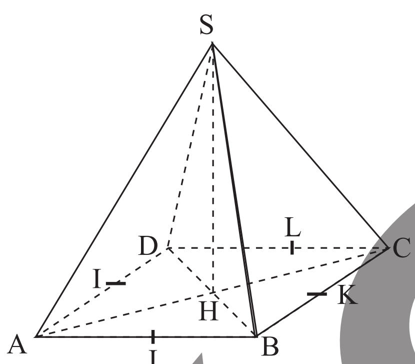
Détermine le projeté de H par p.

20 ABCE est un tétraèdre. Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales, la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC), le point H est l'orthocentre du triangle BCE.



1. Démontre que (AH) est orthogonale à (BC).
2. Démontre que (AH) est orthogonale à (BE).
3. Déduis-en que (AH) est orthogonale au plan (BCE).

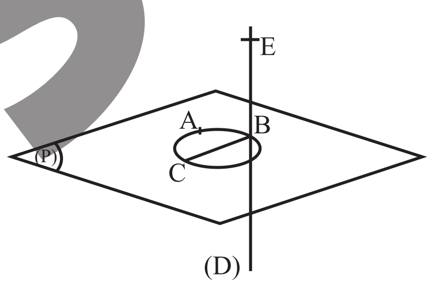
21 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée, de sommet S et de hauteur [SH].



I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD].

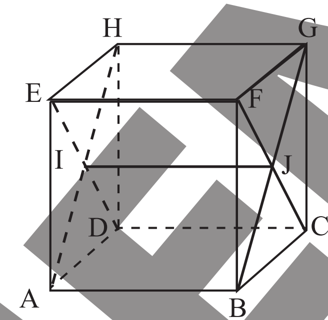
1. Démontre que les plans (SIK) et (SJL) sont perpendiculaires.
2. Démontre que les plans (SAC) et (SBD) sont perpendiculaires (SIK) et (SAD) sont perpendiculaires.

22 Soit (P) un plan, B et C deux points distincts du plan (P). On considère le cercle contenu dans (P) et de diamètre le segment [BC], soit un point A de ce cercle distinct de B et C. Soient la droite (D) orthogonale au plan (P) en B et E un point de la droite (D) n'appartenant pas à (P).



3. Démontre que les droites (AC) et (AE) sont orthogonales.
4. Justifie que les plans (ABE) et (ACE) sont perpendiculaires.

23 ABCDEFGH est un cube.



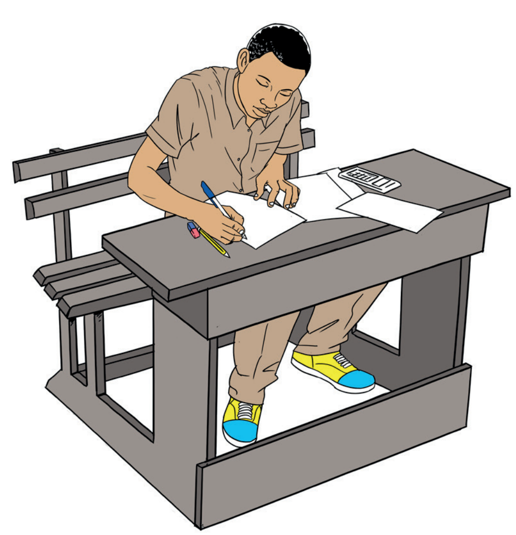
Soit I le point d'intersection des segments [AH] et [ED], J le point d'intersection des segments [BG] et [CF].

1. Justifie que les quadrilatères ABGH et CDEF sont des rectangles.
2. Démontre que la droite (IJ) est orthogonale aux plans (ADH) et (CBF).
3. Démontre que la droite (ED) est orthogonale au plan (ABG).
4. Démontre que les plans (ABG) et (CDE) sont perpendiculaires.
5. Détermine le projeté orthogonal de chacun des points suivants sur le plan (ABG) : A, B, C, D, E, F, G, H, I et J.

24 ABC est un triangle. On désigne par H son orthocentre et par (D) la droite orthogonale au plan (ABC) en H.

Soient E un point de (D), distinct de H et G le point d'intersection des droites (AH) et (BC).

Démontre que le point G est le projeté orthogonal du point B sur le plan (AHE).

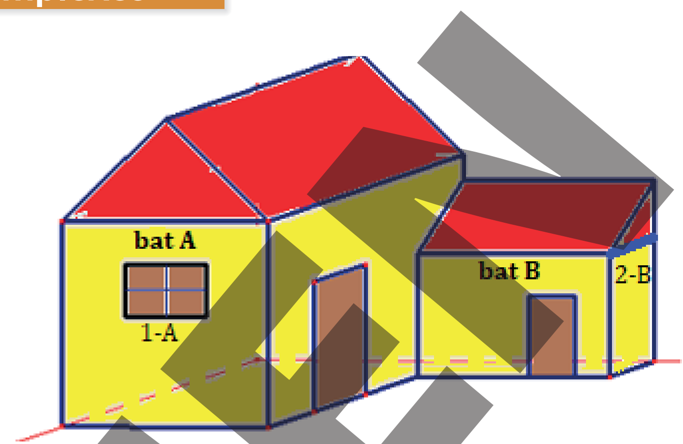


Situations complexes

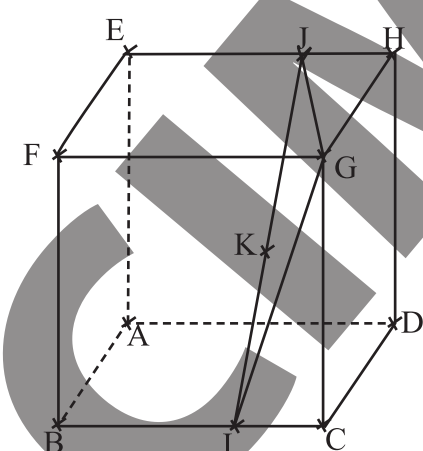
25 Cette maison est construite sur un terrain plat et horizontal, les bâtiments A et B sont des pavés droits (parties peintes en jaune) surmontés d'un toit en forme de prisme droit (partie peinte en rouge). Le propriétaire qui est un professeur de Mathématiques demande à son fils de montrer que le plan contenant la face 1-A du bâtiment A et le plan contenant la face 2-B du bâtiment B sont perpendiculaires.

Celui-ci te sollicite.

Apporte-lui ton aide.



26 La figure ci-dessous représente la maquette d'un objet cubique qu'un groupe d'élèves veut offrir en guise de cadeau à leur proviseur.



Les caractéristiques principales de cet objet données par le fabriquant se présentent comme suit :

- ABCDEFGH représente un cube d'arête 1 m ;
- $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$;
- K est le milieu de [IJ] ;
- La droite (GK) est orthogonale à la droite (IJ).

A la suite de cette description, les élèves exigent du fabriquant les nouvelles caractéristiques suivantes :

1. le triangle FIJ doit être isocèle en F ;
2. les droites (FK) et (IJ) doivent être orthogonales ;
3. la droite (IJ) doit être orthogonale au plan (FGK).

Surpris par ces nouvelles exigences, le fabriquant affirme que l'objet ainsi représenté respecte chacune de ces nouvelles conditions.
Vérifie chacune de ces nouvelles exigences et dis si l'objet fabriqué répond à toutes les préoccupations de tes camarades de classe.

14 COMPOSÉES DE TRANSFORMATION DU PLAN

Commentaire de la Leçon

Depuis l'antiquité, les Mathématiques sont un partenaire indissociable de l'architecture. Ces liens reposent aujourd'hui sur des considérations pratiques et scientifiques. Ainsi, la géométrie (homothéties et rotations) en architecture joue une fonction essentielle de transcrire en figures les intuitions des espaces dans lesquels organiser la vie, planifier des activités, incarner en symboles les significations des actions humaines. Les Architectes utilisent par exemple les rotations et homothéties pour : concevoir des formes considérées comme belles et harmonieuses ; définir la forme spatiale du bâtiment ; faire tenir debout la structure et apporter du beau.

Les notions de rotations et d'homothéties ont été déjà installées en classe de seconde C. Il s'agit essentiellement d'approfondir ses notions en abordant la composée de deux rotations de même centre et la composée de deux homothéties de même centre. La composée de deux homothéties de centres différents et la composée de deux rotations de centres différents ne sont pas inscrites au programme de la classe de première D.

Habiletés et Contenus

- ***Connaître*** : la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux rotations de même centre , la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties de même centre

- ***Construire*** : l'image d'un point par la composée de deux rotations de même centre, l'image d'un point par la composée de deux homothéties de même centre

- ***Déterminer*** : la nature et les caractéristiques de la composée deux rotations de même centre, la nature et les caractéristiques de la composée de deux homothéties de même centre, des lieux géométriques en utilisant une rotation ou la composée de deux rotations de même centre, des lieux géométriques en utilisant une homothétie ou la composée de deux homothéties de même centre

  Démontrer : des propriétés en utilisant une rotation ou la composée de deux rotations de même centre, des propriétés en utilisant une homothétie ou la composée de deux homothéties de même centre

  Résoudre : un problème de construction en utilisant une rotation, la composée de deux rotations de même centre, un problème de construction en utilisant une homothétie ou la composée de deux homothéties de même centre

- ***Traiter une situation*** faisant appel aux composées de transformations du plan

Situation d'Apprentissage

Monsieur OZOUOLOUA avait effectué pour sa nouvelle maison, un plan de maison pour une construction tel que présenté sur la figure 1. Cinq ans après l'acquisition de son nouveau terrain, il décide de réactualiser ce plan en tenant compte des conditions actuelles de vie. Il décide alors de faire appel à un spécialiste afin de lui concevoir ce même plan tout en conservant la position du point P et un agrandissement au double des dimensions de la maison (voir figure 2). En observant les demandes de M OZOUOLOUA, l'expert conclu que le fils de celui-ci, inscrit en classe de 1ère D peut aisément réaliser le travail demandé en utilisant ses connaissances sur la leçon des composées de transformation.

Pour cela, le fils de M OZOUOLOUA décide de faire des recherches sur la leçon intitulée « composées de transformation du plan » afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de son père.

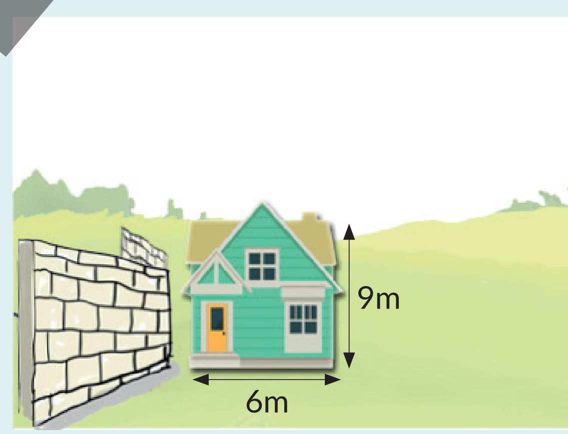


figure 1

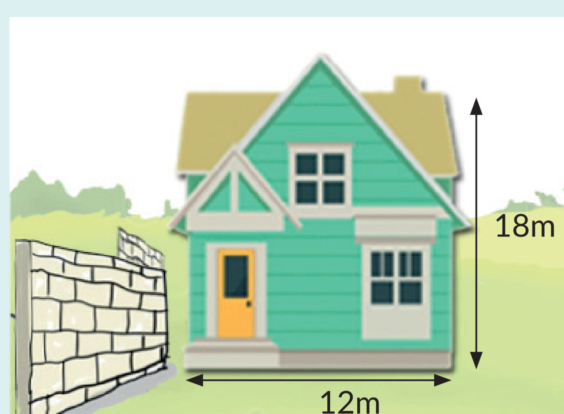


figure 2

Activité 1 Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux rotations de même centre

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure α_1; r_2 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure α_2.

Soit M, M_1 et M_2 des points du plan tels que M_1 est l'image de M par la rotation r_1 et M_2 est l'image de M_1 par la rotation r_2.

1) En utilisant le fait que : $M_1 = r_1(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = OM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}\right) = \alpha_1 \end{cases}$ et $M_2 = r_2(M_1) \Leftrightarrow \begin{cases} OM_2 = OM_1 \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}\right) = \alpha_2 \end{cases}$,

justifie que :

OM_2= OM et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}}\right) = \alpha_1 + \alpha_2$.

2) a) Déduis-en que $r_2 \circ r_1(M) = M_2$.

b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

3) Justifie que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$.

Récapitulons

- $r_{(O;\alpha_1)} \circ r_{(O;\alpha_2)} = r_{(O;\alpha_1+\alpha_2)}$
- $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$

Exercice de fixation

1 Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $r_1 \circ r_2$.

Activité 2 Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties de même centre

Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport k_1 ; h_2 l'homothétie de centre O et de rapport k_2 .

Soit M, M_1 et M_2 des points du plan tels que M_1 est l'image de M par l'homothétie h_1 et M_2 est l'image de M_1 par l'homothétie h_2.

1) En utilisant le fait que :

$M_1 = h_1(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k_1\overrightarrow{OM}$ et $M_2 = h_2(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_2} = k_2\overrightarrow{OM_1}$, justifie que $\overrightarrow{OM_2} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$.

2) a) Déduis-en que $h_2 \circ h_1(M) = M_2$.

b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

3) Justifie que $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

Récapitulons

- $h_{(O;k_1)} \circ h_{(O;k_2)} = h_{(O\,;k_1k_2)}$
- $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$

Exercice de fixation

2 Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre A et de rapport -2.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de $h_1 o h_2$.

Activité 3 Image d'un point par la composée de deux rotations de même centre

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$; r_2 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{6}$. Soit M un point du plan.

Construis l'image M' de M par la composée $r_2 \circ r_1$.

Récapitulons

- *Méthode 1 :* On construit M_1, image de M par r_2 puis M', image de M_1 par r_2.
- *Méthode 2 :* $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

On construit M', image de M par $r_{\left(O;\frac{\pi}{6}\right)}$.

Exercice de fixation

3 Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

Soit A un point du plan.

Construis A' tel que A'= $r_1 \circ r_2$ (A).

Activité 4 Image d'un point par la composée de deux homothéties de même centre

Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 2 ;

h_2 l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

Soit M un point du plan.

Construis l'image M' de M par la composée $h_2 \circ h_1$.

Récapitulons

- *Méthode 1 :* On construit M_1, image de M par h_1 puis M', image de M_1 par h_2.
- *Méthode 2 :* $h_2 \circ h_1$ est la rotation de centre O et d'angle $4 \times \frac{1}{2} = 2$.

On construit M', image de M par $h_{(0,2)}$.

Exercice de fixation

4 Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2 et h_2 l'homothétie de centre A et de rapport -3.

Soit B un point du plan.

Construis B' tel que B'=$h_1 \circ h_2$(B).

Activité 5 Lieux géométriques en utilisant une rotation ou la composée de deux rotations de même centre

On donne un cercle (C) de centre O et un point B n'appartenant pas à (C) et extérieur à (C). A chaque point M de (C), on associe le point M' tel que le triangle BMM' soit équilatéral direct.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui applique M sur M'.

2) Détermine l'ensemble décrit par M' lorsque M décrit (C).

■ **Récapitulons**

- $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = M'$
- Lorsque M décrit le cercle (C), M' décrit l'image de (C) par $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$.
- L'image de (C) par $r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$ est le lieu géométrique des points M'.

Exercice de fixation

5 ABCD est un carré direct. M parcourt le périmètre du carré.
Soit O un point du plan extérieur au carré. A chaque point M parcourant le périmètre du carré ABCD. On associe M' tel que OMM' soit un triangle rectangle isocèle direct en O.
Détermine le lieu géométrique de M'.

Activité 6 Lieux géométriques en utilisant une homothétie ou la composée de deux homothéties de même centre

On donne un cercle (C) et un point A de (C). Pour tout point M de (C) privé du point A, on détermine le point I, milieu du segment [AM].
1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui applique M sur I.
2) Détermine l'ensemble décrit par I lorsque M décrit (C).

■ **Récapitulons**

- $h_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}(M) = I$.
- Lorsque M décrit le cercle (C), I décrit l'image de (C) par $h_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$.
- L'image de (C) par $h_{\left(A;\frac{1}{2}\right)}$ est le lieu géométrique des points I.

Exercice de fixation

6 Soit A et B deux point d'un cercle (C) de centre O de rayon 6 cm, I milieu du segment [AB].
M est un point de (C) différent de A et B et G le centre de gravité du triangle du triangle AMB.
Détermine et construis le lieu géométrique du point du point G lorsque M décrit le cercle (C), privé des points A et B.

1. Composée de rotations de même centre

1)Définition

Définition

Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure α_1 et r_2 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure α_2.

L'application $r_2 \circ r_1$ est la composée de la rotation $r_1 = r_{(O;\alpha_1)}$ par la rotation $r_2 = r_{(O;\,\alpha_2)}$.

Exemple

Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{-\pi}{3}$.

L'application $r_2 \circ r_1$ est la composée de la rotation $r_1 = r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ par la rotation $r_2 = r_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}$.

2) Propriété

Propriété

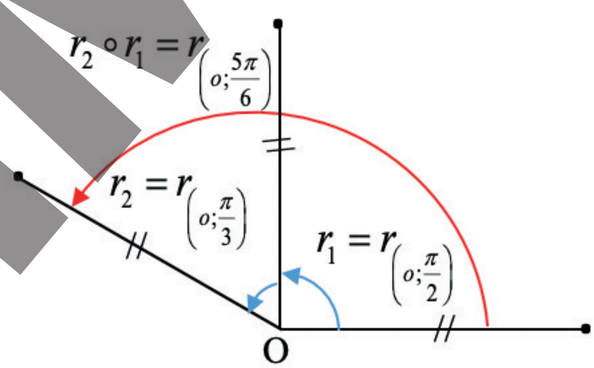
La composée de deux rotations de même centre O et d'angles orientés de mesures α_1 et α_2 est une rotation de même centre O et d'angle orienté de mesure $\alpha_1 + \alpha_2$.

Remarque

Si r_1 et r_2 sont deux rotations de même centre alors $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$.

Exemple

Si r_1 est la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$, alors $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.



Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

3) Point Méthode

Pour construire l'image M' du point M par la composée $r_2 \circ r_1$ où $r_1 = r_{(O;\alpha_1)}$ et $r_2 = r_{(O;\,\alpha_2)}$, on peut procéder comme suit :

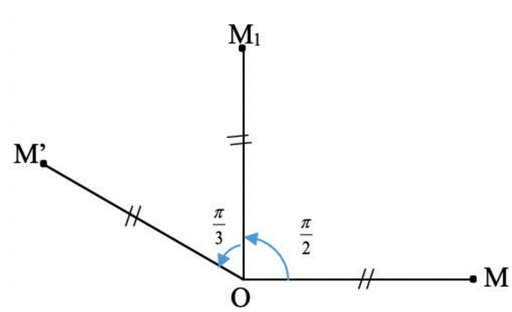
- Méthode 1 : On construit M_1, image de M par r_1 puis M', image de M_1 par r_2.
- Méthode 2 : $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

On construit M', image de M par $r_{(O;\,\alpha_1+\alpha_2)}$.

Exemple

Pour construire M', l'image du point M par la composée $r_2 \circ r_1$ telle que $r_1 = r_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}$ et $r_2 = r_{\left(0;\frac{\pi}{3}\right)}$.

On construit l'image M_1 de M par r_1 puis M', image de M_1 par r_2. On a ainsi construit M'image de M par $r_2 \circ r_1$.



Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 15

2. Composée d'homothéties de même centre

1)Définition

Définition

Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport k_2.
L'application $h_2 \circ h_1$ est la composée de l'homothétie $h_1 = h_{(O\,;\,k_1)}$ par l'homothétie $h_2 = h_{(O\,;\,k_2)}$.

Exemple

Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2 et h_2 l'homothétie de centre A et de rapport 3. L'application $h_2 \circ h_1$ est la composée de l'homothétie $h_1 = h_{(A\,;\,2)}$ par l'homothétie $h_2 = h_{(A\,;\,3)}$.

2) Propriété

Propriété

La composée de deux homothéties de même centre O et de rapports k_1 et k_2 est une homothétie de même centre O et de rapport $k_1 \times k_2$.

Remarque

Si h_1 et h_2 sont deux homothéties de même centre, alors $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

Exemple

Si h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport −2 alors $h_2 \circ h_1$ est la rotation de centre O et de rapport −6.

Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13

3) Point Méthode

Pour construire l'image M' du point M par la composée $h_2 \circ h_1$ où $h_1 = h_{(O\,;\,k_1)}$ et $h_2 = h_{(O\,;\,k_2)}$, on peut procéder comme suit :

- Méthode 1 : On construit M_1, image de M par h_1 puis M', image de M_1 par h_2.
- Méthode 2 : $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k_1 \times k_2$.

On construit M', image de M par $h_{(O\,;\,k_1 \times k_2)}$.

Exemple

Pour construire M', l'image du point M par la composée $h_2 \circ h_1$ telle que $h_1 = h_{(O\,;\,2)}$ et $h_2 = h_{(O\,;\,-3)}$, on construit l'image M_1 de M par h_1 puis M', image de M_1 par h_2. On a ainsi construit M' image de M par $h_2 \circ h_1$.

Pour s'entraîner : Exercices 16 ; 17

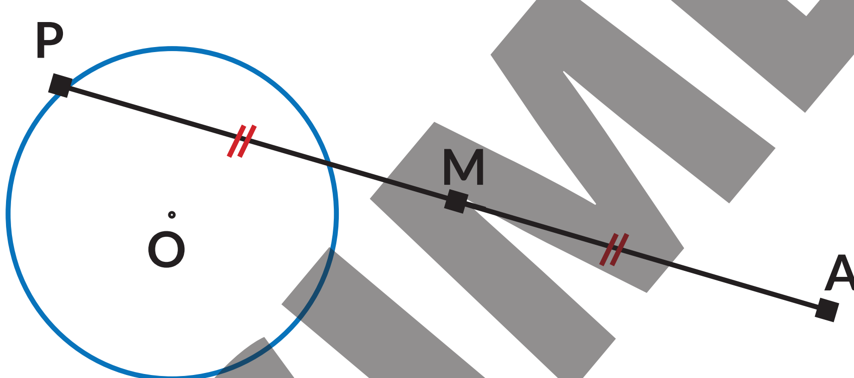
3. Lieu géométrique

Pour construire des points M' lorsque les points M décrivent une figure, il suffit de déterminer une transformation du plan qui applique M sur M'. Le lieu géométrique des points M' est l'image de la figure décrite par les points M.

Exemple

On donne le point A et le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon r. P étant un point de $(\mathscr{C})$, on désigne par M le milieu du segment [AP]. Considérons l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Désignons par $(\mathscr{C}')$, l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par cette homothétie, lorsque P décrit le cercle $(\mathscr{C})$, son image M décrit $(\mathscr{C}')$.



Pour s'entraîner : Exercices 18 ; 19

QUESTION 1

Comment déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui applique un point donné sur un autre point donné ?

Méthode

- Écrire une égalité vectorielle reliant les deux points.
- À partir de l'égalité vectorielle identifier le centre et le rapport de l'homothétie par analogie avec la définition d'un point et son image par une homothétie.

Exercice

On donne trois points O, A , B et C alignés tels que : $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OC}$.

1) Détermine les rapports des homothéties h_1 et h_2 de même centre O qui appliquent respectivement A sur B et B sur C.
2) Détermine le rapport de l'homothétie h qui applique A sur C.

Solution commentée

L'homothétie h_1 a pour centre O et pour rapport 2.

l'homothétie h_2 a pour centre O et pour rapport $\frac{1}{3}$ car $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

L'homothétie h qui applique A sur C a pour centre O et pour rapport $\frac{2}{3}$.

Exercice non corrigé

On donne quatre points O, A , B et P alignés tels que : $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{PO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$.

1) Détermine les rapports des homothéties h_1 et h_2 de même centre O qui appliquent respectivement A sur P et P sur B.
2) Détermine le rapport de l'homothétie h qui applique A sur B.

QUESTION 2

Comment justifier que trois points sont alignés ?

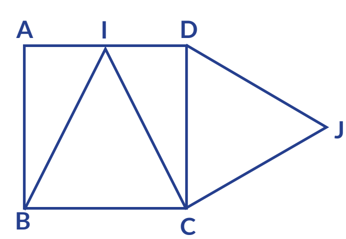
Méthode

Pour justifier que trois points sont alignés :
- on peut justifier que ces trois points sont les images de trois points alignés par une transformation du plan (ici on fera appel aux homothéties et aux rotations).
- on peut justifier que l'un des points est le centre d'une homothétie et qui applique le deuxième point sur le troisième.

Exercice

Soit la figure ci-contre.
- ABCD est un carré.
- IBC et DCJ sont des triangles équilatéraux.

1. Construis le point K, image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Démontre que les points K, B et D sont alignés.
3. Déduis-en que les points A , I et J sont alignés.



Solution commentée

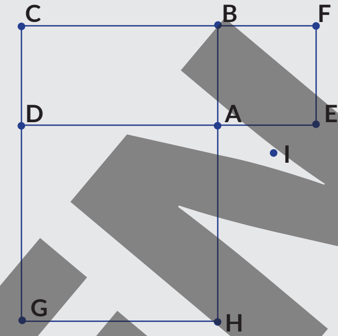
2.

- Considérons le triangle AKC. K appartient à la médiatrice de (AC).
- Considérons le carré ABCD. [BD] est la médiatrice de [AC].

Donc K ∈ [BD]. Les points K , B et D sont alignés.

3. Considérons la rotation r_1 de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$. r_1 (K) = A ; r_1 (B) = I ; r_1 (D) = J . Puisque K , B et D sont alignés, alors A , I et J sont alignés.

Exercice non corrigé



Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle, AEFB et ADGH sont des carrés.

. I point d'intersection des droites (EG) et (FH)

. h_1 l'homothétie de centre I transformant G en E.

. h_2 l'homothétie de centre I transformant F en H.

1. Détermine l'image de la droite (CG) par h_1 et par $h_2 \circ h_1$.
2. Détermine l'image de la droite (CF) par $h_1 \circ h_2$.
3. Déduis-en que I appartient à (AC).

QUESTION 3

Comment justifier que deux droites sont parallèles ?

Méthode

Pour justifier que deux droites sont parallèles, il suffit de justifier que l'une est l'image de l'autre par une homothétie.

Pour justifier que deux droites sont perpendiculaires , il suffit de justifier que l'une est l'image de l'autre par une rotation de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$.

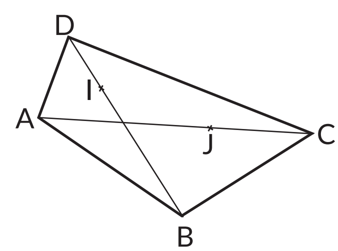
Exercice

- Considérons le quadrilatère ABCD. Le point O, est le point d'intersection des diagonales (AC) et (DB).

I est un point de (DB) et J un point de (AC) tels que (AI) // (BC) et (BJ) // (AD).

Soit h_1 l'homothétie de centre O transformant A en C et h_2 l'homothétie de centre O transformant B en D.

1. Determine $h_2 \circ h_1$(I) et détermine $h_2 \circ h_1$ (J).
2. Déduis-en que (IJ) est parallèle à (DC).



Solution commentée

$h_2 \circ h_1$ (I) = D ; $h_1 \circ h_2$ (J) = C .

Puisque les homothéties h_1 et h_2 ont le même centre O , alors $h_1 o\, h_2 = h_2 o\, h_1$.

D'où $h_1 o\, h_2$ (IJ) = (DC). Donc les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

Exercice non corrigé

ABCD est un carré direct. Soit M un point de [AD], M distinct de D. La droite (CM) coupe (AB) en Q. La perpendiculaire à (CM) en C coupe respectivement (AB) en P et (AD) en N. Soit r le quart de tour direct de centre C.

1) Détermine l'image de la droite (AD) par r.

2) a) Démontre que r(M) = P, puis détermine r(N).

b) Détermine la nature des triangles CMP et CNQ.

c) Démontre que les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.

QUESTION 4

comment déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit un ensemble donné.

Méthode

- Déterminer une transformation f du plan qui transforme M en M'.
- L'ensemble (φ) décrit par M' est l'image de l'ensemble (C) décrit par M par la transformation f.

Exercice

On considère un point A et un cercle ($\mathscr{C}$). Soit B un point du cercle ($\mathscr{C}$) différent de A.
Le point C est tel que ABC soit un triangle équilatéral direct.
Détermine le lieu géométrique des points C lorsque B décrit le cercle ($\mathscr{C}$) ?

Solution commentée

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

r(B) = C. Lorsque B décrit le cercle ($\mathscr{C}$), C va décrire le cercle ($\mathscr{C}$'), image du cercle ($\mathscr{C}$) par la rotation r.

Exercice non corrigé

Soit (D) une droite fixe, A un point fixe n'appartenant pas à la droite (D). M un point variable de (D).

1) Construis le point N tel que le triangle MAN soit isocèle rectangle de sens direct de sommet A.

2) Détermine le lieu géométrique du point N, lorsque M décrit la droite (D).

QUESTION 5

Comment résoudre un problème de construction

Méthode

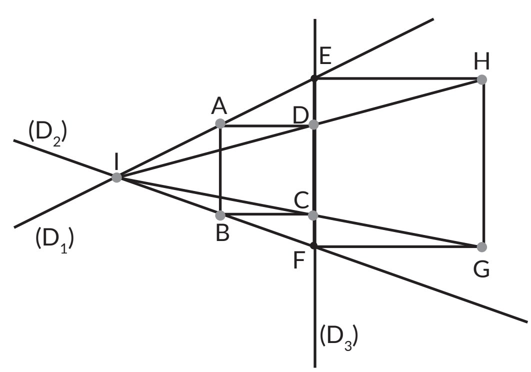
- Réaliser une esquisse de la figure qui ne remplit pas toutes les conditions.
- Déterminer une transformation qui transforme l'esquisse en la construction demandée.
- Résoudre le problème posé.

Exercice

(D_1), (D_2) et (D_3) sont trois droites sécantes deux à deux. Construis un carré ABCD tel que : A ∈ (D_1), B ∈ (D_2), C ∈ (D_3) et D ∈ (D_3).

Solution commentée

- On construit un carré EFGH dont deux des points E et F sont sur la droite (D_3).
- Soit {I} = $(D_1) \cap (D_2)$. On définit une homothétie h de centre I qui transforme G en C et H en D.
- Les points C et D appartiennent à la droite (D_3).
- On construit les points B = h(F) et A = h(E). B ∈ (D_2) et A ∈ (D_1).
- Le quadrilatère ABCD est l'image du carré EFGH par l'homothétie h. Donc ABCD est un carré.
- Le carré ABCD ainsi construit est la solution du problème posé.



Exercice non corrigé

Soit (C) un demi-cercle de centre O et de diamètre [AB]. Construis un carré PQRS tel que : P ∈ [AB], Q ∈ [AB], R ∈ (C) et S ∈ (C).

Exercices de fixation

Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux rotations de même centre

1 r_1 et r_2 sont deux rotations de centre A et d'angles de mesures respectives α et -2α .
Donne la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.

2 r_1 est la rotation de centre O et d'angle de mesure β.
r_2 est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\pi - \beta$
Donne la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$.

3 On considère les rotations suivantes : $r_1 = r_{\left(0\,;\,\frac{\pi}{4}\right)}$; $r_2 = r_{\left(0\,;\,-\frac{\pi}{6}\right)}$; $r_3 = r_{\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$.

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Si B est l'image de A par la rotation r_1, alors $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2	Si la rotation $r_2 \circ r_1$ transforme E en F alors $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et OE = OF.
3	C et D sont les images respectives de A et B par la rotation $r_1 \circ r_2$, donc (AB) //(CD).

4 r_1, r_2 et r_3 sont trois rotations de centre O et d'angles de mesures respectives $-\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$ et -2α .

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$r_1 \circ r_2$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{1}{2}\alpha$.
2	$r_2 \circ r_3$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{5}{2}\alpha$.
3	$r_2 \circ r_3$ est la rotation de centre O et d'angle α.
4	$(r_1 \circ r_2) \circ r_3$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{3}{2}\alpha$.

5 Pour chaque composée de rotations du tableau, trois propositions de réponse A, B et C sur la nature et les éléments caractéristiques sont données dont une seule est juste. Écris le numéro de chaque composée suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Composée	Nature et éléments caractéristiques		
		A	B	C
1	$r_{\left(O;-\frac{\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$	$r_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)}$	$r_{\left(0;-\frac{\pi}{6}\right)}$	$r_{\left(O;\frac{\pi}{6}\right)}$
2	$r_{\left(A;\frac{\pi}{6}\right)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}$	$r_{\left(O;\frac{5\pi}{12}\right)}$	$r_{\left(A;\frac{5\pi}{12}\right)}$	$r_{\left(A;\frac{3\pi}{24}\right)}$
3	$r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)} \circ r_{\left(A;-\frac{\pi}{4}\right)}$	$r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}$	$r_{\left(A;\frac{\pi}{4}\right)}$	$r_{(A;0)}$

6 Dans chacun des cas, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $r_1 \circ r_2$.

1) $r_1 = r_{\left(I\,;\,-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_2 = r_{\left(I\,;\,\frac{\pi}{2}\right)}$.

2) $r_1 = r_{\left(I\,;\,\frac{\pi}{12}\right)}$ et $r_2 = r_{\left(I\,;\,\frac{7\pi}{12}\right)}$.

3) $r_1 = r_{(I\,;\,\beta_1)}$ et $r_2 = r_{(I\,;\,\beta_2)}$.

7 Dans chacun des cas, détermine l'angle de la rotation r_2.

1) $r_1 = r_{\left(I\,;\,-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_1 \circ r_2 = r_{\left(I\,;\,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

2) $r_1 = r_{\left(I\,;\,-\frac{3\pi}{4}\right)}$ et $r_1 \circ r_2 = r_{\left(I\,;\,-\frac{\pi}{12}\right)}$.

3) $r_1 = r_{\left(I\,;\,\frac{\pi}{5}\right)}$ et $r_1 \circ r_2 = r_{\left(I\,;\,\frac{\pi}{6}\right)}$.

Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties de même centre

8 h_1 et h_2 sont deux homothéties de centre A et de rapports respectifs $3k$ et $\frac{1}{2}$.
Donne la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.

9 h_1 est l'homothétie de centre O et rapport de -2.

h_2 est l'homothétie de centre O et de rapport de $\frac{1}{2}k$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

10 h_1, h_2 et h_3 sont trois homothéties de centre O et de rapports respectifs 3 ; $\frac{1}{3}k$ et 2.

Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	$h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre O et de rapport k.
2	$h_2 \circ h_3$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{3}k$.
3	$h_1 \circ h_3$ est l'homothétie de centre O et de rapport $6k$.
4	$(h_3 \circ h_2) \circ h_1$ est l'homothétie de centre O et de rapport $2k$.

11 Pour chaque composée d'homothéties du tableau ci-dessous, trois propositions de réponse A, B et C sur la nature et les éléments caractéristiques sont données dont une seule est juste.
Écris le numéro de chaque composée suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Composée	Nature et éléments caractéristiques		
		A	B	C
1	$h_{(O;2)} \circ h_{(O;-3)}$	$h_{(O;6)}$	$h_{(O;-6)}$	$h_{(A;\,-6)}$
2	$h_{\left(O;\frac{1}{2}\right)} \circ h_{(O;6)}$	$h_{(O;3)}$	$h_{(O;-3)}$	$h_{(A;\,3)}$
3	$h_{\left(O;-\frac{3}{4}\right)} \circ h_{\left(O;-\frac{8}{3}\right)}$	$h_{(O;-2)}$	$h_{(A;\,2)}$	$h_{(O;\,2)}$

12 Dans chacun des cas, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $h_1 \circ h_2$.

1) $h_1 = h_{\left(\Omega\,;\,\frac{3}{4}\right)}$ et $h_2 = h_{\left(\Omega\,;\,\frac{8}{4}\right)}$.

2) $h_1 = h_{\left(\Omega\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ et $h_2 = h_{(\Omega\,;\,2)}$.

3) $h_1 = h_{(\Omega\,;\,k_1)}$ et $h_2 = h_{(\Omega\,;\,2k_1)}$.

13 Dans chacun des cas, détermine la nature et le rapport de l'homothétie h_2.

1) $h_1 = h_{(\Omega\,;\,5)}$ et $h_1 \circ h_2 = h_{(\Omega\,;\,15)}$

2) $h_1 = h_{(\Omega\,;\,2)}$ et $h_1 \circ h_2 = h_{(\Omega\,;\,7)}$

3) $h_1 = h_{\left(\Omega\,;\,\frac{1}{3}\right)}$ et $h_1 \circ h_2 = h_{\left(\Omega\,;\,\frac{9}{4}\right)}$

Image d'un point par la composée de deux rotations de même centre

14 E et F sont deux points du plan. On considère les rotations r_1 et r_2 de centre E et d'angles de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{4}$. Construis l'image F' de F par la composée $r_1 \circ r_2$.

E x　　　　x F

15 I et J sont deux points du plan. On considère les rotations r_1 et r_2 de centre I et d'angles de mesures respectives $\frac{5\pi}{12}$ et $-\frac{7\pi}{12}$. Construis l'image J' de J par la composée $r_1 \circ r_2$.

x I

J x

Image d'un point par la composée de deux homothéties de même centre

16 E et F sont deux points du plan. On considère les homothéties de centre E et de rapports respectifs -2 et -3. Reproduis et construis l'image F' de F par la composée $h_1 \circ h_2$.

x E

x F

17 I et J sont deux points du plan ; On considère les homothéties et de centre I et de rapports respectifs -2 et $\frac{1}{2}$. Reproduis et construis l'image J' de J par la composée $h_1 \circ h_2$.

J x　　　　x I

Lieux géométriques en utilisant une rotation ou la composée de deux rotations de même centre

18 On considère un point A et une droite (D) tels que A n'appartient pas à (D). Soit B un point de la droite (D). C est un point tel que ABC est un triangle équilatéral direct.
Pour l'affirmation ci-dessous, quatre éléments de réponse sont données. Une seule est correcte. Choisis la bonne réponse.

Le lieu géométrique des points C lorsque B décrit la droite (D) est :

a) l'image de la droite (D) par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$;

b) l'image de la droite (D) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

c) la droite perpendiculaire à (D) passant par A ;

d) le cercle de centre A et de rayon AB.

Lieux géométriques en utilisant une homothétie ou la composée de deux homothéties de même centre

19 On considère un point A et une droite (D) tels que A n'appartient pas à (D). Soit C un point du plan tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$, pour tout M appartenant à (D).

Pour l'affirmation ci-dessous, quatre éléments de réponse sont données. Une seule est correcte.

Choisis la bonne réponse.

Le lieu géométrique des points C lorsque M décrit la droite (D) est :

a) l'image de la droite (D) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

b) l'image de la droite (D) par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{3}$;

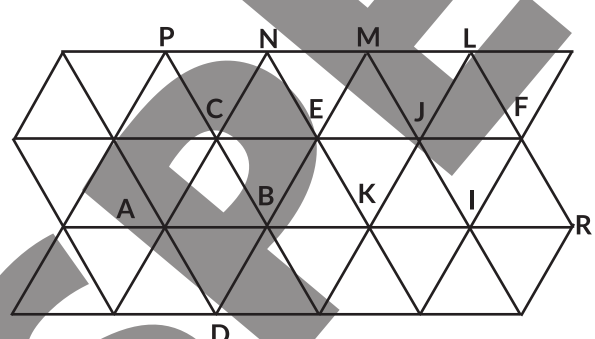
c) l'image de la droite (D) par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$;

d) la droite perpendiculaire à (D) passant par A.

Exercices de renforcement /Approfondissement

20 La figure ci-dessous est composée de triangles équilatéraux. On considère les rotations suivantes :

$r_1 = r_{\left(E\,;\frac{\pi}{3}\right)}$; $r_2 = r_{\left(E\,;\frac{\pi}{3}\right)}$; $r_3 = r_{(E\,;\pi)}$.



Relie chaque élément du tableau 1 à un élément du tableau 2 correspondant.

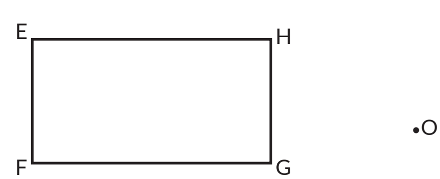
Tableau 1

L'image de K par la rotation r_1 est	•
L'image de J par la rotation r_3 est	•
L'image de B par la rotation $r_2 \circ r_1$ est	•
L'image de C par la rotation $r_2 \circ r_3$ est	•
L'image de J par la rotation $r_1 \circ r_3$ est	•
L'image de E par la rotation $r_3 \circ r_2$ est	•

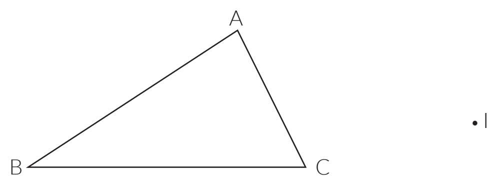
Tableau 2

•	E
•	N
•	B
•	M
•	J
•	C

21 Sur la figure ci-dessous, EFGH est un rectangle et O un point du plan. On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre O et de rapports respectifs $\frac{1}{3}$ et -6.
Construis l'image E'F'G'H' de EFGH par la composée $h_1 \circ h_2$.

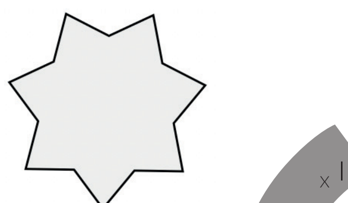


22 Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle et I un point du plan. On considère les rotations r_1 et r_2 de centre I et d'angles de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
Construis l'image A'B'C de ABC par la composée $r_1 \circ r_2$.



23 Soit la figure ci-dessous. I un point du plan.

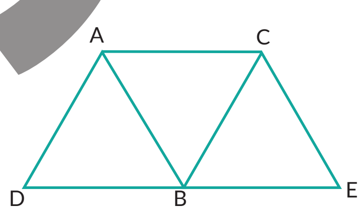
On considère les rotations r_1 et r_2 de centre I et d'angles de mesures respectives $\frac{\pi}{12}$ et $-\frac{7\pi}{12}$. Construis l'image de cette figure par la composée $r_1 \circ r_2$.



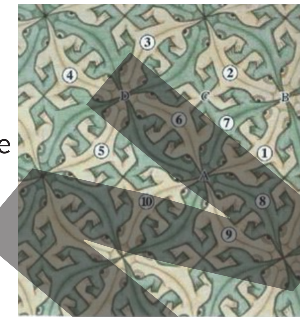
24 Soit la figure ci-dessous. I un point du plan.
On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre I et de rapports respectifs $-\frac{\pi}{80}$ et $\frac{160}{\pi}$. Construis l'image de cette figure par la composée $h_1 \circ h_2$.

25 Sur la figure ci-dessous, ADB, ABC et CBE sont des triangles équilatéraux de sens direct.

Détermine une composée de deux rotations qui applique le triangle ADB en le triangle CBE.



26 On considère la figure ci-contre.
Soit la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le lézard 6 en le lézard 1.



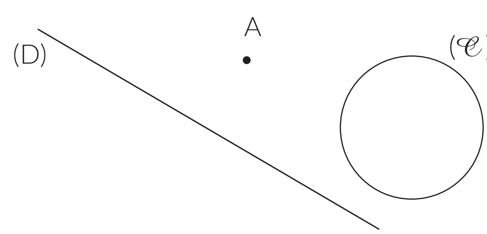
1) Par cette rotation,
Détermine l'image du lézard 9.

2) Détermine les éléments caractéristiques de la rotation qui :
   a) transforme 6 en 3.
   b) transforme 6 en 2.

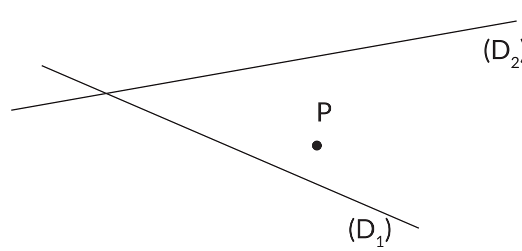
27 Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point I. A un point n'appartenant à aucune de ces droites. Construis deux points M et N appartenant respectivement à (Δ) et (Δ') tels que : $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = \vec{0}$.

28 Soient $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants, A un de leurs points d'intersection. Construis une droite (Δ) passant par A, coupant les cercle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ respectivement aux points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = \vec{0}$.

29 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ est un cercle, A un point et (D) une droite.
Construis un triangle équilatéral ABC tel que : B ϵ (D) et C ϵ $(\mathscr{C})$.

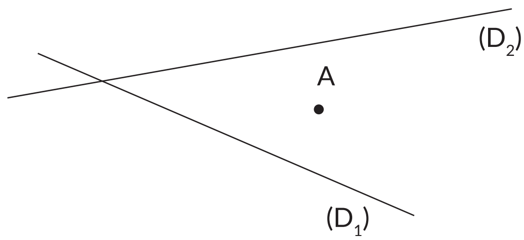


30 Sur la figure ci-dessous, (D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes et P un point n'appartenant ni à (D_1), ni à (D_2).
Construis les points B et C tels que B ϵ (D_1), C ϵ (D_2) et P soit le milieu de [BC].



31 Sur la figure ci-dessous, (D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes et A un point n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2).

Construis un cercle (C) tangent à (D_1), tangent à (D_2) et passant par A.

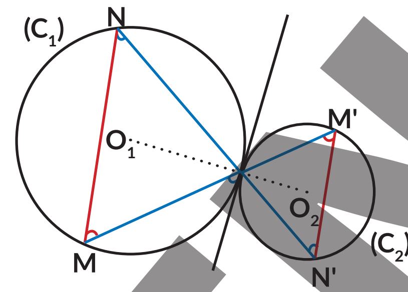


32 On considère un point A et un cercle (C).
Soit B un point du cercle (C).
Le point C est tel que ABC soit un triangle équilatéral direct.
Détermine le lieu géométrique des points C lorsque B décrit le cercle (C) ?

33 ABCD est un carré direct de centre O.
Soit M un point de [AB] et N le point de [BC] tels que AM = BN. Les droites (CM) et (AN) se coupent en I.
On appelle r la rotation de centre O qui transforme A en B, B en C, C en D, D en A.
1) Détermine l'angle de r.
2) Détermine l'image de M par r.
3) Démonte que (DN) est perpendiculaire à (CM).
4) Démontre que (DM) est perpendiculaire à (AN).
5) Déduis-en que (MN) est perpendiculaire à (DI).

34 ABCD est un carré direct.
À l'intérieur, place le point E tel que ABE soit un triangle équilatéral et à l'extérieur, place le point F tel que BCF soit un autre triangle équilatéral.
Place le point I tel que BFIE soit un carré.
Démontre que :
1) le triangle BDI est équilatéral ;
2) les points A, C et I sont alignés ;
3) les points D, E et F sont alignés.

35 Sur la figure ci-dessous, (C_1) est un cercle de centre O_1 et (C_2) un cercle de centre O_2 tels que (C_1) et (C_2) sont tangents en T.
Deux droites, passant par T, coupent le cercle (C_1) en M et N, et le cercle (C_2) en M' et N'.
Démontre que les droites (MN) et (M'N') sont parallèles.



36 Soit un carré ABCD de centre O. E est un point de [AB], F est un point de [BC], G est un point de [CD] et H est un point de [DA] tels que AE = BF = CG = DH.
En utilisant une rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, démontre que EFGH est un carré.

37 Soit ABI un triangle équilatéral direct, Ω le symétrique de B par rapport à (AI).
r est la rotation direct de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1) Démontre que r(A) = I et construit C le symétrique de A par rapport à I.
2) À tout point M du segment [AB] distinct de A et B, on associe le point M' du segment [IC] tel que AM = IM'.
Démontre que le triangle ΩMM' est équilatéral.

38 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B.
O est le milieu de [AC] et r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{-\pi}{2}$.
1) Construis D = r (B) et démontre que ABCD est un carré.
2) Détermine r((AB)) et démontre que r((BC)) = (CD).
3) Construis E = r(C) et démontre que D est le milieu de [CE].
4) Soit ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au carré ABCD.
a) Détermine le centre I du cercle $\mathscr{C}$ ' image de $\mathscr{C}$ par r.
b) Détermine ($\mathscr{C}$) ∩ ($\mathscr{C}$ ') (explique).
5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et G' le barycentre des points pondérés (D , 1) et (I , 2).
a) Démontre que r(G) = G'.
b) La droite (AG) recoupe ($\mathscr{C}$) en H et la droite (AG') recoupe ($\mathscr{C}$') en H ' démontre que le triangle AHH' est rectangle et isocèle.

39 ABCD est un carré direct. Soit M un point de [AD] distinct de D. La droite (CM) coupe (AB) en Q. La perpendiculaire à (CM) en C coupe respectivement (AB) en P et (AD) en N. Soit r le quart de tour direct de centre C.

1) Détermine l'image de la droite (AD) par r.
2) a) Démontre que r (M) = P, puis détermine r(N).
   b) Détermine la nature des triangles CMP et CNQ.
   c) Démontre que les droites (MP) et (NQ) sont perpendiculaires.

40 On donne un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1) a) Détermine r (A) et r(B).
   b) Détermine l'image de (OA) et l'image de ($\mathscr{C}$) par r.

2) Les droites (OA) et (OB) recoupent ($\mathscr{C}$) respectivement en H et H'. Démontre que le triangle OHH' est équilatéral.

3) Soit M un point de ($\mathscr{C}$) \ {A} et N le point tel que AMN est un triangle équilatéral direct.
Détermine le lieu géométrique des points N lorsque M décrit ($\mathscr{C}$) \ {A}.

41 Soit (Δ) une droite , ($\mathscr{C}$) un cercle , A un point de ($\mathscr{C}$).
Construis un cercle (Γ) tangent à ($\mathscr{C}$) en A et tangent à (Δ) .

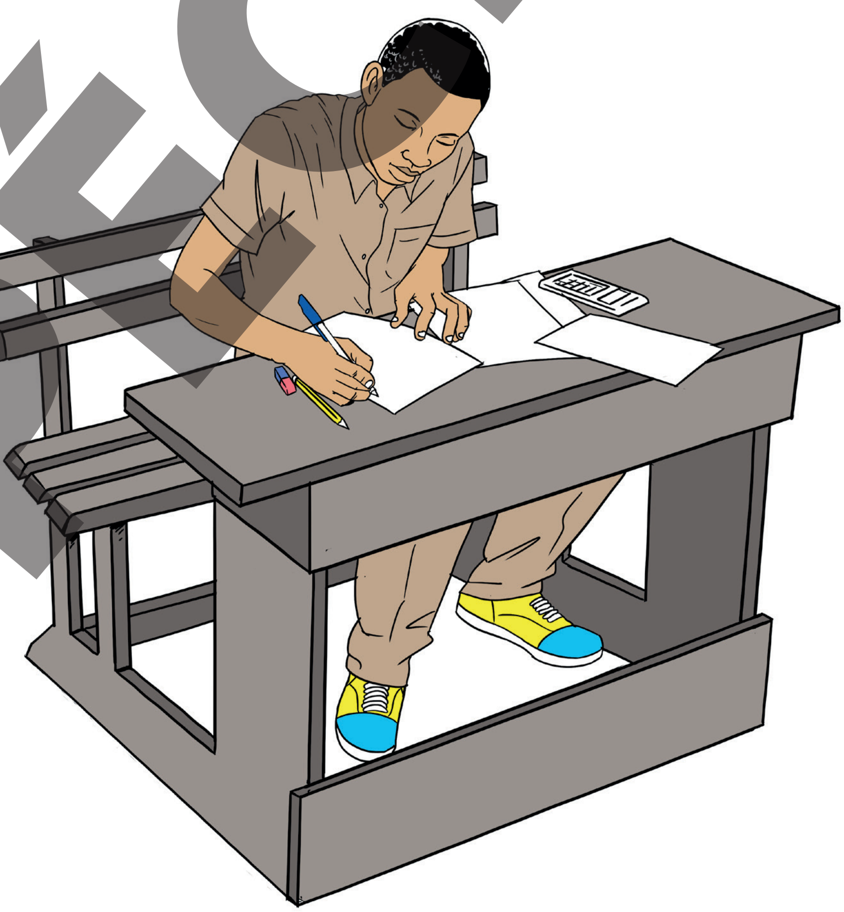
42 Soit ($\mathscr{C}$) un cercle , (Δ) une droite et I un point de (Δ).
Construis un cercle tangent au cercle ($\mathscr{C}$) et tangent à la droite (Δ) en I.
Discute le nombre de solutions suivant les positions relatives de ($\mathscr{C}$), (Δ) et I .

43 ABC est un triangle. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC] , [CA] et [AB] , G le centre de gravité de ABC. On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC et par O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

1) Trouve une homothétie qui transforme les droites (OA') , (OB') et (OC') respectivement en (AH) , (BH) et (CH).

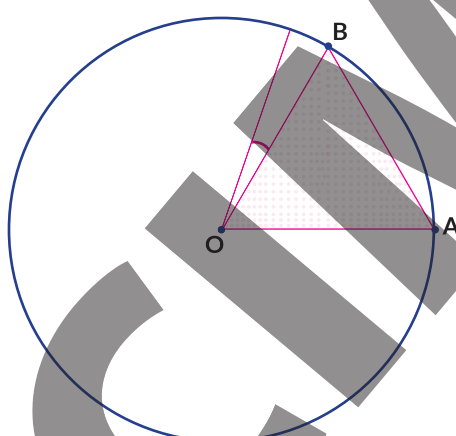
2) Déduis-en que les points O , G et H appartiennent à une même droite (Δ).

(Δ) est appelée la droite d'Euler du triangle ABC.



Situation complexe

44 Un concepteur de motif de pagne propose ses services pour une société de la place. A l'occasion des fêtes de noël, il désire concevoir un motif de pagne respectant une rigueur de conformité et d'homogénéité. La conception de ce motif débute par la construction d'un triangle OAB isocèle en O dont l'angle en O fait $\frac{\pi}{3}$ (voir figure). Pour la construction de ce motif, il propose reproduire le triangle OAB en le faisant tourner plusieurs fois autour du point O tout en respectant un angle de mesure β entre les différentes reproductions. Il pense atteindre ses objectifs s'il arrive à construire 5 triangles identiques autour du point O (le triangle OAB inclus).
A l'aide de tes connaissances relatives aux transformations du plan, propose une construction de ce motif et explique la condition à laquelle le constructeur atteindra son objectif.



15 STATISTIQUE À UNE VARIABLE

Commentaire de la Leçon

La statistique est la discipline qui étudie des phénomènes à travers la collecte de données, leur traitement, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre ces données compréhensibles par tous. C'est à la fois une branche des Mathématiques appliquées, une méthode et un ensemble de techniques. Karl Pearson est un mathématicien anglais né le 27 Mars 1857 à Londres et mort le 27 Avril 1936 à Coldharbour. Il fut l'une des figures de proue de l'émergence de la statistique au début du XX^{e} siècle. L'apprenant a déjà étudié la statistique dans les classes antérieures. En classe de seconde C, les notions d'effectifs cumulés croissants et décroissants, de classe de même amplitude, de classe modale, de médiane, de variance, d'écart moyen, d'écart-type, de polygones des effectifs cumulés croissants et de polygones des effectifs cumulés décroissants ont été abordées. En classe de première D, il s'agira d'étudier les notions de densité d'une classe, de classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes, de quartiles, d'écart interquartile et d'histogramme des effectifs et des fréquences. Le professeur fera remarquer que dans les histogrammes, ce sont les aires (et non les hauteurs) des rectangles figuratifs qui représentent les effectifs ou les fréquences par classe.

Les élèves ayant calculer en 2^{de} C, moyenne, écart-type dans le cas des séries à variables discrètes, on fera remarquer qu'il suffit, ici, de remplacer dans les calculs les modalités par les centres des classes

La détermination graphique de la médiane est un savoir-faire nouveau. On peut la déterminer de deux manières :

-abscisse de l'intersection des courbes cumulatives croissante et décroissante ;

-image réciproque de N/2 par une des courbes cumulatives.(N est l'effectif total).

En classe de terminale, cette étude de la statistique sera approfondie par l'étude d'une série statistique à deux variables.

La statistique est utilisée dans plusieurs domaines de la vie humaine. On peut citer entre autre l'économie, la géographie, le commerce ...

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de la densité d'une classe, la définition d'une classe modale dans le cas d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différents, la définition de quartiles d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non, la définition de l'écart interquartile d'une série statistique regroupée en classes.
- **Regrouper** les modalités en classes de même amplitude ou non.
- **Déterminer** la classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes.
- **Calculer** les paramètres de position d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non : la moyenne, la médiane, les quartiles ; les paramètres de dispersion d'une série statistique regroupée en classe de même amplitude ou non : la variance, l'écart-type, l'écart interquartile.
- **Construire** l'histogramme des effectifs et des fréquences d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non, les polygones des effectifs et des fréquences d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non, les polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non, des courbes cumulatives des effectifs et des fréquences d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude ou non.
- **Interpréter** les caractéristiques de position, les caractéristiques de dispersion.
- **Traiter une situation** faisant appel à la statistique.

Situation d'Apprentissage

Au cours de la dernière campagne agricole, une centrale d'achat de café-cacao a acheté plusieurs quantités de fèves de cacao auprès des coopératives qui lui sont affiliées.

Les données sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Quantité achetée en tonnes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[
Nombre de coopératives	16	12	8	7	5	2

Le gérant de cette centrale négocie un crédit bancaire pour augmenter son capital afin d'attirer plusieurs coopératives agricoles.

La banque fixe deux conditions à la centrale pour l'obtention du crédit :

Condition 1 : le tonnage moyen acheté par cette centrale doit valoir au moins 6 tonnes à la fin de cette campagne.

Condition 2 : le tonnage médian doit être supérieur à 13 tonnes.

Ton papa, membre de cette centrale d'achat, t'explique les conditions de la banque.

Tu décides alors de porter à la connaissance des élèves de ta classe les conditions posées par la banque pour l'octroi du crédit.

Vous décidez, avec l'aide du professeur, d'étudier les paramètres de position et de dispersion d'une série statistique regroupée en classes afin de mieux appréhender les conditions posées par la banque.

Activité 1 Séries statistiques regroupées en classes

Au cours d'une séance de Travaux Pratiques, des élèves d'une classe de première ont mesuré chacun expérimentalement la constante d'accélération de la pesanteur g.
Ils ont obtenu la liste des valeurs suivantes :

9, 789	9,888	9,825	9, 779	9,850	9, 725	9,815	9,835	9,858	9, 799
9,831	9, 775	9,820	9,840	9,800	9,896	9,829	9, 795	9,820	9,849

1. Recopie et complète le tableau suivant :

Classes	[9,725;9,775[	[9,775;9,800[	[9,800;9,825[	[9,825;9,850[	[9,850;9,900[
Effectifs					

2. Détermine l'amplitude (ou l'étendue) de chaque classe.
3. Calcule le quotient de l'effectif de chaque classe par l'amplitude de cette classe.
4. Détermine le centre de chaque classe.
5.
   a) Calcule la fréquence de chaque classe.
   b) Exprime la fréquence de chaque classe en pourcentage.

Récapitulons

- Lorsque le caractère étudié prend un très grand nombre de valeurs différentes, il est judicieux de regrouper ces valeurs dans un intervalle du type $[a\ ;\ b[$.
- L'amplitude (ou l'étendue) de la classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel : $b - a$.
- La densité d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe.
- Le centre de la classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel c tel que : $c = \dfrac{a+b}{2}$.
- La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total. $f = \dfrac{effectif\ de\ la\ classe}{effetif\ total}$

La fréquence en pourcentage est la fréquence multipliée par 100.

Exercice de fixation

1 Associe chaque groupe de mots de la colonne A au groupe de mots de la colonne B qui lui convient.

A
L'amplitude de la classe $[a\ ;\ b[$ est
La densité d'une classe est
Le centre de la classe $[a\ ;\ b[$ est
La fréquence d'une classe est

B
le nombre réel c tel que : $c = \dfrac{a+b}{2}$.
le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total.
le nombre réel $b - a$.
le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe.

2 On considère la série statistique regroupée en classes suivante :

Classes	[0 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10]
Effectifs	2	3	7	3

1. Détermine l'amplitude de la classe [5 ; 8[.
2. Détermine la densité de la classe [3 ; 5[.
3. Détermine le centre de la classe [8 ; 10].
4. Détermine, en pourcentage, la fréquence de la classe [0 ; 3[.

Activité 2 Histogrammes

A. Séries statistiques regroupées en classes de même amplitude

Le tableau ci-dessous donne les durées en minutes du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école.

Durée du trajet en minutes	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[
Effectifs	10	15	8	5	12

Représente chaque classe par un rectangle dont la base est proportionnelle à son amplitude et de hauteur telle que l'aire du rectangle soit proportionnelle à son effectif.

On prendra pour échelle :

- ✓ Largeur des bandes : 1 cm pour 5 minutes
- ✓ Aire des bandes : 1 cm^2 pour 2 individus

On obtient un histogramme.

B. Séries statistiques regroupées en classes d'amplitudes différentes

Le tableau ci-dessous donne les tarifs, en francs CFA, exigés par une société pour le transport de paquets contenant des objets fragiles en fonction de leur masse en gramme (g).

Masse en g	[0 ; 100[	[100 ; 250[	[250 ; 500[	[500 ; 1000[	[1000 ; 2000[	[2000 ; 3000[
Tarif en milliers de francs CFA	3,50	7,10	10,3	14,60	21	26,50

1. Pour chaque classe, calcule le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.
2. Déduis-en la construction de l'histogramme de cette série.

Récapitulons

- Un histogramme est un graphique permettant de représenter les séries dont les valeurs du caractère étudié ont été regroupées en « classes ».
- Chaque classe est alors représentée par un rectangle dont la base est proportionnelle à son amplitude et de hauteur telle que l'aire du rectangle soit proportionnelle à son effectif.
- L'échelle doit être indiquée par une surface (carré ou rectangle) et l'axe des ordonnées ne représente aucune grandeur concrète : écrire « effectif » sur cet axe et le graduer est donc une faute grave, bien que courante et entretenue par la confusion avec un diagramme en bandes. (Les hauteurs des rectangles sont donc proportionnelles aux densités des classes).
- Dans le cas de classes de même amplitude, il suffit que la hauteur des rectangles soit proportionnelle à l'effectif.

Exercice de fixation

3 Pour chacune des affirmations suivantes, réponds par « V » si l'affirmation est vraie ou par « F » si l'affirmation est fausse.

1. Un histogramme est un graphique qui permet de représenter les séries statistiques dont les valeurs du caractère étudié ne sont pas regroupées en classes.
2. Dans un histogramme dont les classes ont la même amplitude, la hauteur des rectangles est proportionnelle aux effectifs.
3. Dans un histogramme dont les classes n'ont pas les mêmes amplitudes, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux densités des classes.
4. Dans un histogramme, chaque classe est représentée par un carré dont la base est proportionnelle à son amplitude et de hauteur telle que l'aire du rectangle soit proportionnelle à son effectif.

4 Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues par des élèves de 1ère D au cours d'une interrogation écrite de mathématiques.

Notes	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 14[	[14 ; 20[
Nombre d'élèves	4	10	6	15	5

Construis l'histogramme de cette série statistique.

Activité 3 Polygone des effectifs

Reprends les histogrammes construits de l'activité 2.
Joins par des segments les milieux des bases supérieures des rectangles.

Récapitulons

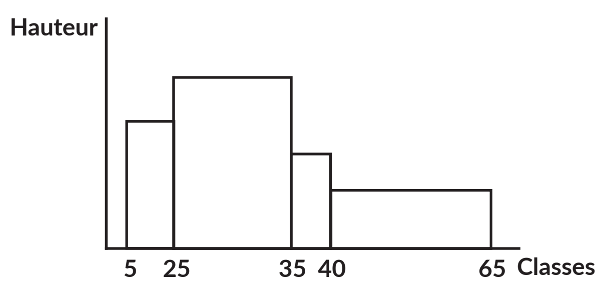
Le polygone des effectifs est obtenu en joignant par des segments les milieux des bases supérieures des rectangles.

Exercice de fixation

5 Réordonne les groupes de mots suivants pour obtenir une définition correcte du polygone des effectifs.

des rectangles / le polygone des effectifs / par des segments / est obtenu en joignant / des bases supérieures / les milieux.

6 On considère l'histogramme suivant :



Construis le polygone des effectifs de cette série statistique.

Activité 4 Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

On considère la série statistique ci-dessous qui résume la taille des membres d'un club de karaté.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

Classes	[1,50 ; 1,65[	[1,65 ; 1,800[	[1,800 ; 1,825[	[1,825 ; 1,850[	[1,850 ; 1,900[
Effectifs	1	5	4	6	4
Effectifs cumulés croissants (ECC)					
Effectifs cumulés décroissants (ECD)					
Fréquences cumulées croissantes (FCC)					
Fréquences cumulées décroissantes FCD)					

2. a) Dans le plan muni d'un repère orthogonal, place les points de coordonnées $(x_i ; y_i)$, où x_i est la valeur supérieure de la classe i et y_i l'effectif cumulé croissant correspondant à cette classe i.

b) Relie ces points par des segments. *La courbe obtenue est appelée polygone des effectifs cumulés croissants.*

3. a) Dans le plan muni du même repère orthogonal, place les points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ où x_i est la valeur inférieure de la classe i et y_i l'effectif cumulé décroissant correspondant à cette classe i.

b) Relie ces points par des segments. *La courbe obtenue est appelée polygone des effectifs cumulés décroissants.*

4. En s'inspirant des méthodes de constructions précédentes, construis sur un autre graphique le polygone des fréquences cumulées croissantes et le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.

Récapitulons

- L'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) de la modalité x est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (respectivement supérieures ou égales) à x.
- La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) de la modalité x est le quotient de son effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) par l'effectif total de la série.
- Chaque point du polygone des effectifs cumulés croissants (ECC) (resp. des fréquences cumulées croissantes (FCC)) a pour abscisse la valeur supérieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé croissant correspondant (resp. de la fréquence cumulée croissante).
- Chaque point du polygone des effectifs cumulés décroissants (ECD) (resp. des fréquences cumulées décroissantes (FCC)) a pour abscisse la valeur inférieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant correspondant (resp. de la fréquence cumulée décroissante).

Exercice de fixation

7 On considère la série statistique regroupée en classes ci-dessous.

Âges	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 19[	[19 ; 21[	[21 ; 23[
Nombre d'élèves	13	17	10	5	5

1. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.

Activité 5 Courbes cumulatives

On considère la série statistique ci-dessous qui résume l'inventaire du stock de chaussures vendues, en milliers de francs CFA, dans un magasin.
Cette série statistique indique l'effectif, la fréquence et l'effectif cumulé croissant.

Prix en milliers de francs CFA	10	15	30	40	50
Effectif	60	50	40	30	20
Fréquence	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1
ECC	60	110	150	180	200

1. On définit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle [0 ; 200] telle que :

Si $x \in]-\infty ; 10[$, F(x) = 0 ;
Si $x \in [10 ; 15[$, F(x) = 60 ;
Si $x \in$ 15 ; 30[, F(x) = 110 ;
Si $x \in [30 ; 40[$, F(x) = 150 ;
Si $x \in [40 ; 50[$, F(x) = 180 ;
Si $x \in [50 ; +\infty[$, F(x) = 200.

a) Représente la fonction F dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) La courbe représentative de la fonction F est appelée courbe cumulative des effectifs.

Explique comment on définit F et comment on construit F.

2. On définit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle [0 ; 1] telle que :

Si $x \in]-\infty ; 10[$, G(x) = 0 ;
Si $x \in [10 ; 15[$, G(x) = 0,3 ;
Si $x \in [15 ; 30[$, G(x) = 0,55 ;
Si $x \in [30 ; 40[$, G(x) = 0,75 ;
Si $x \in [40 ; 50[$, G(x) = 0,9 ;
Si $x \in [50 ; +\infty[$, G(x) = 1.

a) Représente la fonction G dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) La courbe représentative de la fonction G est appelée courbe cumulative des fréquences.

Explique comment on définit G et comment on construit G.

Récapitulons

- La courbe cumulative des effectifs dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est la représentation graphique de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ à partir des effectifs cumulés croissants (ECC). F est une fonction en escalier et croissante.
- La courbe cumulative des fréquences dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est la représentation graphique de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ à partir des fréquences cumulées croissantes (FCC). G est une fonction en escalier et croissante.

Exercice de fixation

8 On donne la série statistique suivante :

Classes	[0 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 50[
Effectifs	5	7	10	18	10

Construis la courbe cumulative des effectifs de cette série statistique.

Activité 6 Classe modale - Moyenne

1. Définis la classe modale d'une série statistique regroupée en classes de même étendue.
2. On considère la série statistique de l'activité 1.

Classes	[9,725 ; 9,775[	[9,775 ; 9,800[	[9,800 ; 9,825[	[9,825 ; 9,850[	[9,850 ; 9,900[
Effectifs (n_i)	1	5	4	6	4
Fréquences (f_i) (%)	5	25	20	30	20

1. Détermine la classe de plus grande densité.
2. a) Calcule le quotient de la densité de chaque classe par l'effectif total.
   On l'appelle densité de fréquence de cette classe.
   b) Détermine la classe de plus grande densité de fréquence.
3. Détermine la moyenne de la constante d'accélération de la pesanteur g en utilisant :
   a) les effectifs.
   b) les fréquences.

Récapitulons

- La densité de fréquence d'une classe est le quotient de la densité de cette classe par l'effectif total.
- La classe modale se définit comme la classe de plus grande densité (resp densité de fréquence).
- Dans le cas où toutes les classes ont la même étendue, la classe modale correspond à la classe de plus grand effectif.
- La moyenne d'une série statistique regroupée en classes, notée $\overline{x}$, est définie par : $\overline{x} = \frac{1}{N}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_pc_p\right)$ ou $\overline{x} = \frac{1}{N}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_pc_p\right)$ avec (n_i) l'effectif, (f_i) la fréquence, (c_i) le centre de la classe i ; $1 \leq i \leq p$ et N l'effectif total.

Exercice de fixation

9 Réponds par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) si elle est fausse.

1. La classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est la classe de plus grande densité.
2. La classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est la classe de plus grand effectif.

3. La moyenne d'une série statistique regroupée en classes est le nombre réel noté $\bar{x}$ tel que :

$\bar{x} = n_1 c_1 + n_2 c_2 + \cdots + n_p c_p$ où n_i est l'effectif, (c_i) le centre de la classe i ; $1 \le i \le p$ et N l'effectif total.

4. La moyenne d'une série statistique regroupée en classes est le nombre réel noté $\bar{x}$ tel que :

$\bar{x} = n_1 f_1 + n_2 f_2 + \cdots + n_p f_p$ où n_i est l'effectif, f_i la fréquence de la classe i ; $1 \le i \le p$ et N l'effectif total.

5. La densité de fréquence d'une classe est le quotient de la densité de cette classe par l'effectif de cette classe.

6. Toute série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes a une unique classe modale.

10

Après avoir effectué une enquête sur les tailles des nouveau-nés dans une maternité d'une ville, le responsable d'une ONG a dressé le tableau suivant :

Taille (en cm)	[45;47[	[47;48[	[48;51[	[51;53[	[53;55[
Nombre de nouveau-nés	10	15	5	25	35

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. Détermine la taille moyenne des nouveau-nés.

Activité 7 Médiane - Quartiles d'une série statistique regroupée en classes

On a relevé le temps mis par chacun des 45 élèves d'une classe de première pour faire le trajet de leurs domiciles au lycée. On a obtenu le tableau ci-dessous :

Durée en minutes	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif	7	13	12	8	2	3
ECC	7	20	32	40	42	45

1. On souhaite partager la classe en deux groupes égaux : d'un côté ceux qui mettent le moins de temps pour venir au lycée, d'un autre côté ceux qui mettent le plus de temps pour venir au lycée. Comment appelle-t-on cette durée ?

Détermine la durée à laquelle il faudra faire le partage.

- **Détermination graphique**

a) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.

b) Détermine l'abscisse du point d'ordonnée

$\frac{45}{2} = 22{,}5$.

c) Déduis-en la durée à laquelle il faudra faire le partage.

- **Détermination algébrique d'une médiane**

a) Justifie que la classe [20 ; 30[est celle qui contient la médiane.

b) Soit m l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{45}{2} = 22{,}5$.

Recopie et complète le tableau ci-dessous, puis détermine une médiane m par interpolation linéaire.

20	22,5	32
...	m	...

2. En utilisant une démarche analogue à celle de la question 1, détermine graphiquement et par le calcul :

a) le plus petit nombre Q_1 tel qu'au moins un quart des données lui soient inférieur ou égales.

b) le plus petit nombre Q_3 tel qu'au moins trois quarts des données lui soient inférieures ou égales.

Récapitulons

Dans une série statistique ordonnée :

- Une médiane partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.
- Autrement dit, c'est un nombre m tel qu'au moins 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le premier quartile noté Q_1 d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le troisième quartile noté Q_3 d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Pour une série regroupée en classes, il est possible d'obtenir une approximation d'une médiane et des quartiles par lecture graphique sur le polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées ou par calcul.

Exercice de fixation

11 On considère la série statistique suivante :

Modalité	[0 ; 20[	[20 ; 50[	[50 ; 65[	[65 ; 100[	[100 ; 120[
Effectif	25	30	29	16	35

1. Détermine la médiane de cette série statistique.
2. Détermine le premier quartile et le troisième quartile de cette série statistique.

Activité 8 Détermination par construction de la médiane - Quartiles d'une série statistique regroupée en classes

La répartition du temps de travail des étudiants en Informatique d'un pays, selon l'heure de la journée est donnée par le tableau suivant :

Tranche horaire (en heure)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	[18 ; 21[	[21 ; 24[
Fréquence (en %)	5	3,9	10,8	13,6	17,1	21,4	19,8	8,4
FCC (en %)								
FCD (en %)								

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
2. a) Construis la courbe des fréquences cumulées croissantes.

   b) Construis la courbe des fréquences cumulées décroissantes sur le même graphique.

   c) Détermine l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes.
3. a) Détermine l'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 50 %.

   b) Détermine l'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 25 %.

   c) Détermine l'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 75 %.

- L'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée 0,5 (ou 50%) est la médiane.
- L'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée 0,25 (ou 25%) est le premier quartile noté Q_1.
- L'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée 0,75 (ou 75%) est le troisième quartile noté Q_3.

4. a) En utilisant le tableau des fréquences cumulées croissantes, détermine l'intervalle qui contient la médiane.

b) Détermine par calcul la médiane.

5. a) En utilisant le tableau des fréquences cumulées croissantes, détermine l'intervalle qui contient le premier quartile Q_1.

b) Détermine par calcul Q_1.

6. a) En utilisant le tableau des fréquences cumulées croissantes, détermine l'intervalle qui contient le troisième quartile Q_3.

b) Détermine par calcul Q_3.

Récapitulons

Dans une série statistique ordonnée :

- L'abscisse du point d'intersection des polygones des fréquences cumulées est la médiane de cette série statistique.
- Pour une série regroupée en classes, il est possible d'obtenir une approximation d'une médiane et des quartiles par lecture graphique sur le polygone des fréquences cumulées croissantes ou par calcul.

Exercice de fixation

12 Lors d'une visite médicale, l'infirmier a relevé la taille en centimètre de trente élèves d'un lycée.

Il a noté les résultats comme l'indique le tableau ci-dessous :

Taille (en centimètres)	[152 ; 157[	[157 ; 162[	[162 ; 172[	[172 ; 177[	[177 ; 185[
Nombre d'élèves	6	3	15	6	5

1. Dans un même repère, construis les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes de cette série statistique.
2. Détermine la médiane de cette série statistique.
3. Détermine graphiquement le premier quartile et le troisième quartile.

Activité 9 Écart interquartile – Écart absolu moyen

On a relevé le temps mis par chacun des 45 élèves d'une classe de première D pour faire le trajet de leurs domiciles au lycée. On a obtenu le tableau ci-dessous :

Durée en minutes	[0;10[	[10;20[	[20;30[	[30;40[	[40;50[	[50;60[
Effectif	7	13	12	8	2	3

1. a) En utilisant les résultats de l'activité 7, calcule la différence entre le troisième et le premier quartile.

b) Donne une interprétation de ce résultat.

2. a) Calcule le nombre réel positif e_m défini par :

$$e_m = \frac{1}{N}\left(n_1|c_1-\bar{x}| + n_2|c_2-\bar{x}| + n_3|c_3-\bar{x}| + n_4|c_4-\bar{x}| + n_5|c_5-\bar{x}| + n_6|c_6-\bar{x}|\right)$$ où N est l'effectif total, n_i est l'effectif de la classe i $(1 \leq i \leq 6)$, c_i est le centre de la classe i $(1 \leq i \leq 6)$ et $\bar{x}$ la moyenne de la série statistique. On prendra : $\bar{x} = 23{,}6$.

Le réel e_m est appelé écart absolu moyen de la série statistique regroupée en classes.

b) Donne une interprétation de e_m.

c) Une autre classe de première A de 45 élèves a :
- le même temps moyen que celui de la série statistique précédente.
- un écart moyen e_m' tel que : $e_m' = 0{,}35$.
Détermine la classe qui est la plus régulière.

Récapitulons

On considère la série statistique définie comme suit :

Classes	$[a_1\,;\,b_1[$	$[a_2\,;\,b_2[$	...	$[a_p\,;\,b_p[$
Effectifs n_i des classes	n_1	n_2	...	n_p
Centre c_i des classes	c_1	c_2	...	c_p

$\overline{x} = \dfrac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_pc_p\right)$ est la moyenne de cette série statistique.

Les caractéristiques de dispersion permettent d'apprécier la dispersion des valeurs d'une variable autour de la moyenne.

- L'écart interquartile $(Q_3 - Q_1)$ est un paramètre de dispersion absolue qui correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus fortes.
  50% des observations sont donc concentrées entre Q_1 et Q_3.
- L'écart absolue moyen est le paramètre de dispersion le plus simple qui mesure les fluctuations de la série par rapport à la moyenne.

L'écart absolu moyen est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1\left|c_1 - \overline{x}\right| + n_2\left|c_2 - \overline{x}\right| + \ldots + n_p\left|c_p - \overline{x}\right|\right) = \frac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left|c_i - \overline{x}\right|$$

L'interprétation de e_m est simple. Ce paramètre nous indique que les observations se situent, en moyenne, à e_m unités de leur valeur centrale $\overline{x}$.

L'écart moyen permet d'apprécier l'éloignement des valeurs du caractère par rapport à la moyenne de la série statistique étudiée.

Exercice de fixation

13 On a relevé la masse en kilogrammes de 50 élèves d'un établissement. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Masse (Kg)	[40 ; 50[	[50 ; 70[	[70 ; 80[
Nombre d'élèves	20	8	22

1. a) Détermine le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3.
   b) Déduis-en l'écart interquartile. Interprète ce résultat.
2. Calcule l'écart absolu moyen. Interprète ce résultat.

Activité 10 Variance – Écart type

Le tableau ci-dessous résume l'inventaire du stock de chaussures vendues, en milliers de francs CFA, dans un magasin.

Prix en milliers de francs CFA	[10 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 70[
Effectif	60	50	40	30	20

1. **a)** Rappelle la formule de la variance d'une série statistique (x_i ; n_i), où N désigne l'effectif total.
   b) Déduis-en formule de la variance de la série (c_i ; n_i) des centres des classes associées.
   c) Calcule la variance de la série (c_i ; n_i) des centres des classes associées.
2. On admet que la variance V de la série est : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i\left(\overline{x} - c_i\right)^2}{N}$.
   a) Démontre que : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2}{N} - \left(\overline{x}\right)^2$.
   b) Utilise la formule du **2.a)** pour calculer la variance.
3. **a)** Calcule la racine carrée de la variance.
   b) Interprète le résultat obtenu.

Récapitulons

On considère la série statistique définie comme suit :

Classes	[a_1 ; b_1[	[a_2 ; b_2[	...	[a_p ; b_p[
Effectifs n_i des classes	n_1	n_2	...	n_p
Centre c_i des classes	c_1	c_2	...	c_p

$\overline{x} = \dfrac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_pc_p\right)$ est la moyenne de cette série statistique.

- La variance d'une série statistique, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle est notée V ou σ^2. Sa formule mathématique est : $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i-1}^{p} n_i\left(c_i - \overline{x}\right)^2$. La variance

d'une série statistique regroupée en classes est calculée à l'aide de la série statistique des centres qui lui est associée.

- Dans la pratique, le calcul de la variance se fait avec la formule de Koenig : $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i-1}^{p} n_i\left(c_i - \overline{x}\right)^2$.
- L'écart-type est la racine carrée de la variance. Elle est notée σ. Sa formule mathématique est : $\sigma = \sqrt{V}$.
- L'écart-type permet d'estimer la concentration des valeurs du caractère étudié autour de la moyenne.
  - ✓ Par rapport à la moyenne, un écart – type faible signifie que les valeurs du caractère ne s'écartent pas beaucoup de la moyenne.
  - ✓ Par rapport à la moyenne, un écart-type important signifie que les valeurs du caractère sont largement étalées de part et d'autre de la moyenne.

Exercice de fixation

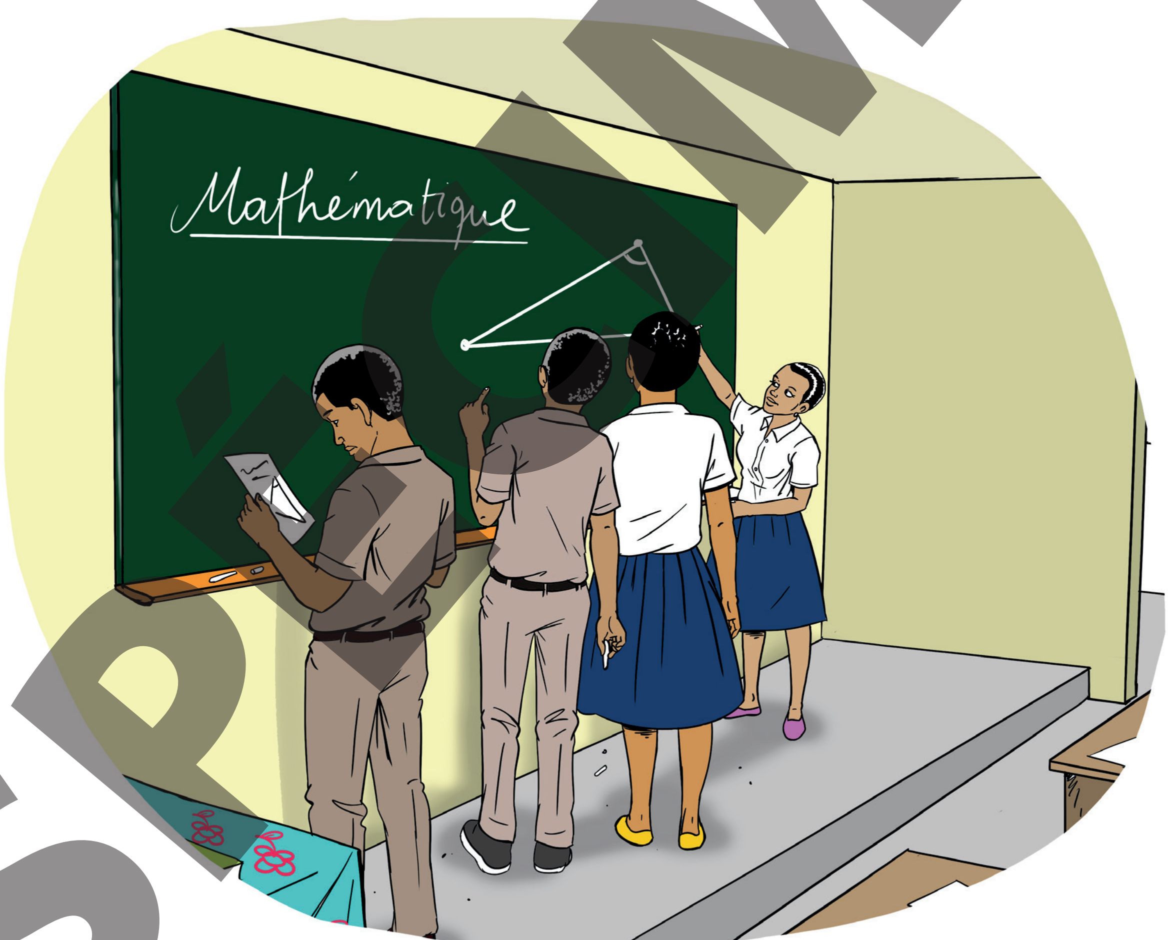
14 Le tableau suivant indique le temps mis à pied par chacun des 70 élèves d'une classe pour se rendre au lycée.

Temps mis à pieds (en min)	[15;23[	[23;27[	[27;45[	[45;56[
Nombre d'élèves	5	13	22	30

1. Détermine la variance de cette série statistique.

2. **a)** Déduis-en l'écart type de cette série statistique.

b) Interprète le résultat de la question **2.a)**.



I. Séries statistiques regroupées en classes

Définition

- Lorsque le caractère étudié prend un très grand nombre de valeurs différentes, il est judicieux de regrouper ces valeurs dans un intervalle du type $[a\ ;\ b\ [$ pour faciliter leur lecture.
- L'amplitude (ou l'étendue) de la classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel : $b - a$.
- La densité d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe.
- Le centre de la classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel c tel que : $c = \frac{a+b}{2}$.
- La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total.

$$f = \frac{effectif\ de\ la\ classe}{effetif\ total}$$

- La fréquence en pourcentage est la fréquence multipliée par 100.

Exemple

Les notes à un devoir de Mathématiques des élèves d'une classe de première D sont regroupées en classes selon le tableau ci-dessous.

Classes des notes	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15[
Effectifs	7	13	12	8	2	3

L'amplitude de la classe [9 ; 11[est 11-9 = 3.

✓ Le centre de la classe [5 ; 7[est $\frac{5+7}{2} = 6$

✓ La densité de la classe [13 ; 15[est $\frac{3}{15-13} = 1{,}5$.

✓ La fréquence de la classe [3 ; 5[est $\frac{7}{45}$, soit environ 0,16 ou 16%.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2 ; 3

II. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

1. Histogramme

Présentation

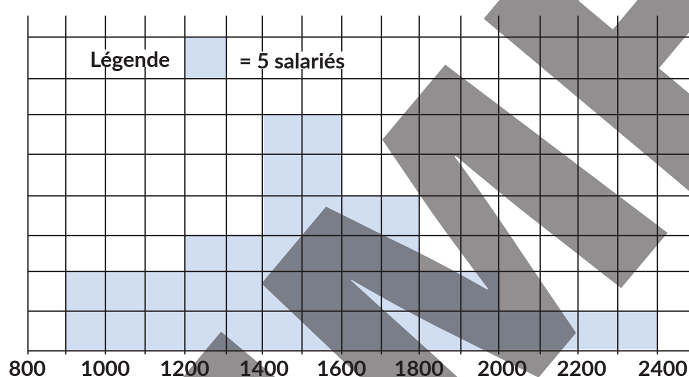
Un histogramme est un graphique permettant de représenter les séries dont les valeurs du caractère étudié ont été regroupées en « classes ».
Chaque classe est alors représentée par un rectangle dont la base est proportionnelle à son amplitude et de hauteur telle que l'aire du rectangle soit proportionnelle à son effectif (ou à sa fréquence).
Les hauteurs des rectangles sont donc proportionnelles aux densités des classes.
Dans le cas de classes de même amplitude, il suffit que la hauteur des rectangles soit proportionnelle à l'effectif.
L'échelle doit être indiquée par une surface (carré ou rectangle) et l'axe des ordonnées ne représente aucune grandeur concrète : écrire « effectif » sur cet axe et le graduer est donc une faute grave, bien que courante et entretenue par la confusion avec un diagramme en bandes.

Exemple

Le tableau ci-dessous représente la répartition des salaires horaires en F CFA dans une entreprise.

Salaires horaires en FCFA	[900 ; 1200[	[1200 ; 1400[	[1400 ; 1600[	[1600 ; 1800[	[1800 ; 2000[	[2000 ; 2400[
Effectifs	30	30	60	40	20	20

- En prenant 1cm^2 pour cinq employés, le premier rectangle aura une aire en cm^2 égale à : $\frac{30}{5}$ soit 6 cm^2.
- La base du rectangle étant de 3 cm, sa hauteur en cm est égale à : $\frac{6}{3}$ soit 2 cm.
- On construit ainsi les autres rectangles de l'histogramme comme présentés dans la figure ci-dessous :



Pour s'entraîner : exercices 4 ; 5 ; 6

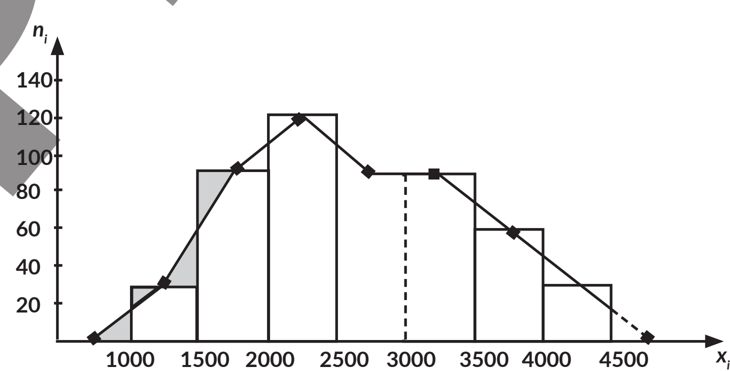
2. Polygone des effectifs et des fréquences

Présentation

Le polygone des effectifs (resp. des fréquences) est obtenu en joignant par des segments les milieux des bases supérieures des rectangles de l'histogramme.

Exemple

Le polygone des effectifs de la série statistique dont l'histogramme est donné est :



Pour s'entraîner : exercices 7 ; 8

3. Courbes cumulatives : cas d'une variable à caractère quantitatif continu

(Polygone des effectifs cumulés et des fréquences cumulées)

- L'effectif cumulé croissant de la modalité x est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à x.
- L'effectif cumulé croissant décroissant de la modalité x est la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à x.
- La fréquence cumulée croissante de la modalité x est le quotient de son effectif cumulé croissant par l'effectif total de la série.
- La fréquence cumulée décroissante de la modalité x est le quotient de son effectif cumulé décroissant par l'effectif total de la série.

Méthode

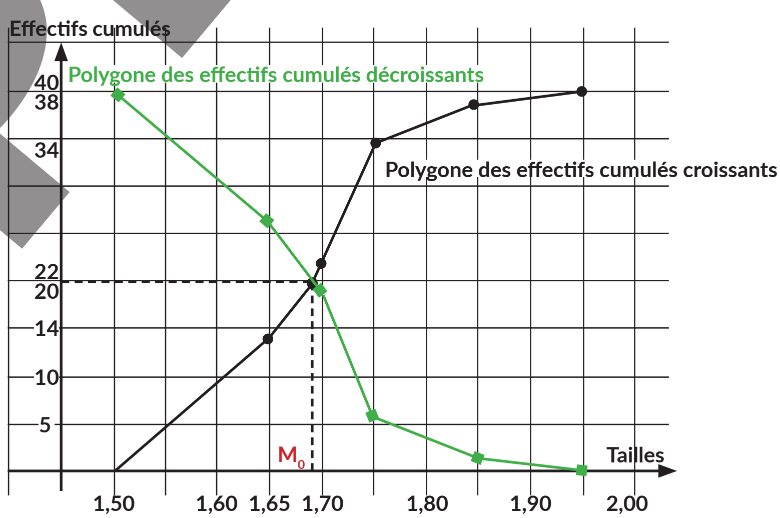
- Chaque point du polygone des effectifs cumulés croissants (ECC) (resp. des fréquences cumulées croissantes (FCC)) a pour abscisse la valeur supérieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé croissant correspondant (resp. de la fréquence cumulée croissante).
- Chaque point du polygone des effectifs cumulés décroissants (ECD) (resp. des fréquences cumulées décroissantes (FCD)) a pour abscisse la valeur inférieure de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant correspondant (resp. de la fréquence cumulée décroissante).

Exemple

Une enquête a permis de dresser la taille, en mètre, des élèves d'une classe de première D.

Taille, en mètre, des élèves	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
[1,50 ; 1,65[	14	14	40
[1,65 ; 1,70[	8	22	26
[1,70 ; 1,75[	12	34	18
[1,75 ; 1,85[	4	38	6
[1,85 ; 1,95[	2	40	2

Les deux courbes se présentent comme suit :

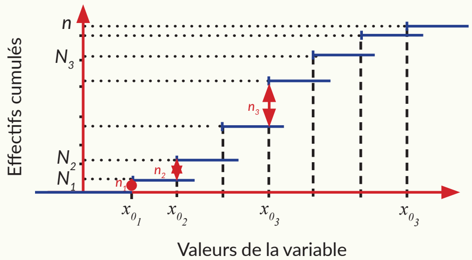


Pour s'entraîner : exercices 9 ; 10

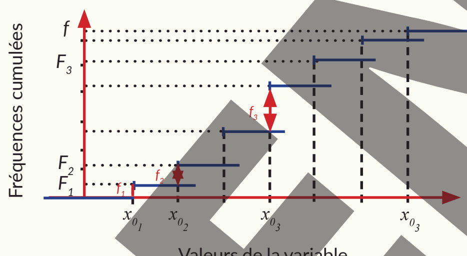
4. Courbes cumulatives : cas d'une variable à caractère quantitatif discret

Méthode de construction

- Lorsque la variable étudiée est quantitative et à caractère discret, les courbes cumulatives des effectifs et des fréquences se présentent comme suit :



Courbe cumulative des effectifs



Courbe cumulative des fréquences

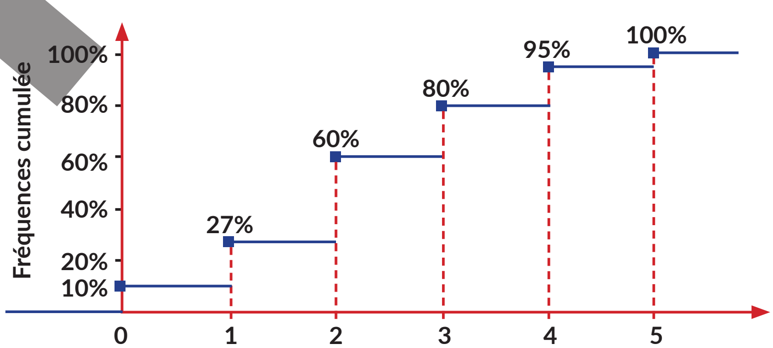
- La courbe cumulative des effectifs dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est la représentation graphique d'une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ à partir des effectifs cumulés croissants (ECC). F est une fonction en escalier et croissante.
- La courbe cumulative des fréquences dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est la représentation graphique d'une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ à partir des fréquences cumulées croissantes (FCC). G est une fonction en escalier et croissante.

Exemple

Le tableau ci-dessous indique la distribution du nombre de personnes à charge observées dans les dossiers étudiés par une organisation non gouvernementale (ONG).

Nombre de personnes à charge	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Fréquences en %	Fréquences cumulées croissants en %
0	10	10	10	10
1	17	27	17	27
2	33	60	33	60
3	20	80	20	80
4	15	95	15	95
5	5	100	5	100

La courbe cumulative des fréquences associée à cette série statistique est présentée ci-dessous.



Pour s'entraîner : exercices 11 ; 12

III. PARAMÈTRES DE POSITION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE REGROUPÉE EN CLASSES

1. Densité d'une classe - Classe modale

Définition

- La densité de fréquence d'une classe est le quotient de la densité de cette classe par l'effectif total.
- On appelle classe modale toute classe de plus grande densité (resp. densité de fréquence).
- Dans le cas où toutes les classes ont la même étendue, la classe modale correspond à la classe de plus grand effectif.

Exemple

Une enquête a permis de dresser la taille, en mètre, des élèves d'une classe de première D.

Taille, en mètre, des élèves	Effectifs	Amplitude des classes	Densité des classes
[1,50 ; 1,65[	14	0,15	93,33
[1,65 ; 1,70[	8	0 ,05	160
[1,70 ; 1,75[	12	0,05	240
[1,75 ; 1,85[	4	0,10	40
[1,85 ; 1,95[	2	0,10	20

La classe modale est [1,70 ; 1,75[, car c'est la classe de densité maximale.

Pour s'entraîner : exercices 13 ; 14 ; 15

2. Moyenne

Définition

On considère la série statistique définie comme suit :

Classes	$[a_1 ; b_1[$	$[a_2 ; b_2[$	...	$[a_p ; b_p[$
Effectifs n_i des classes	n_1	n_2	...	n_p
Centre c_i des classes	c_1	c_2	...	c_p

La moyenne de la série statistique regroupée en classes ci-dessus, notée $\bar{x}$, est définie par : $\bar{x} = \dfrac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_pc_p\right)$, où $\bar{x} = f_1c_1 + f_2c_2 + \ldots + f_pc_p$.

Exemple

Une enquête a permis de dresser la taille, en mètre, des élèves d'une classe de première D.

Taille, en mètre, des élèves	Centre des classes c_i	Effectifs n_i	Produits $n_i \times c_i$
[1,50 ; 1,65[	1,575	14	22,05
[1,65 ; 1,70[	1,675	8	13,40
[1,70 ; 1,75[	1,725	12	20,70
[1,75 ; 1,85[	1,80	4	7,20
[1,85 ; 1,95[	1,90	2	3,80
Total		40	67,15

$\bar{x} = \dfrac{67{,}15}{40} = 1{,}67875$

La taille moyenne des élèves de cette classe de première D est égale à 1,67875 m ; soit, 1,68 m.

Pour s'entraîner : exercices 16 ; 17

3. Médiane

Définition

Dans une série statistique ordonnée, une médiane partage les valeurs prises par le caractère en deux groupes de même effectif.
Autrement dit, c'est un nombre m tel qu'au moins 50% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Remarques

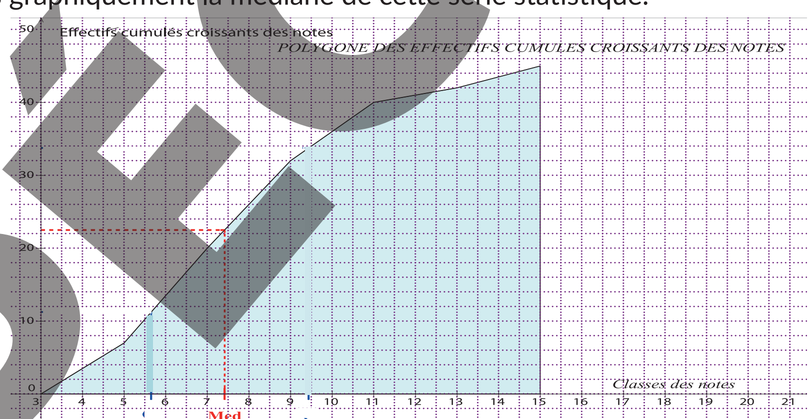
- Pour une série regroupée en classes, il est possible d'obtenir une approximation d'une médiane par lecture graphique sur le polygone des effectifs ou des fréquences cumulées.
- C'est l'abscisse du polygone des effectifs cumulés (resp. du polygone des fréquences cumulées) dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total (resp. 0,5).
- L'abscisse du point d'intersection des polygones des fréquences cumulées est la médiane de cette série statistique.
- La médiane d'une série regroupée en classes peut être déterminée par interpolation linéaire.

Exemple

On reprend ci-dessous, la série statistique des notes obtenues par les élèves d'une classe de première D.

Classes des notes	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15[
Effectifs	7	13	12	8	2	3
Effectif cumulé croissant	7	20	32	40	42	45

- Déterminons graphiquement la médiane de cette série statistique.



La médiane est l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{45}{2}$; elle vaut environ 7,4.

- Déterminons algébriquement une estimation de la médiane de cette série statistique.

La moitié de l'effectif total est : $\frac{45}{2} = 22{,}5$.
La classe médiane est celle qui contient la médiane c'est-à-dire la classe [7 ; 9[.
Soit m l'abscisse du point d'ordonnée 22,5 du polygone. On a :

7	m	9
20	22,5	32

Soit : $\frac{32-22{,}5}{9-m} = \frac{32-20}{9-7}$, ou encore 6 × (9 - m) = 9,5 . On a donc : m ≈ 7,41.

Pour s'entraîner : exercices 18 ; 19

4. Quartiles

Définition

Dans une série statistique ordonnée :

- Le premier quartile noté Q_1 d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le troisième quartile noté Q_3 d'une série statistique numérique est la plus petite valeur prise par le caractère telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

Remarques

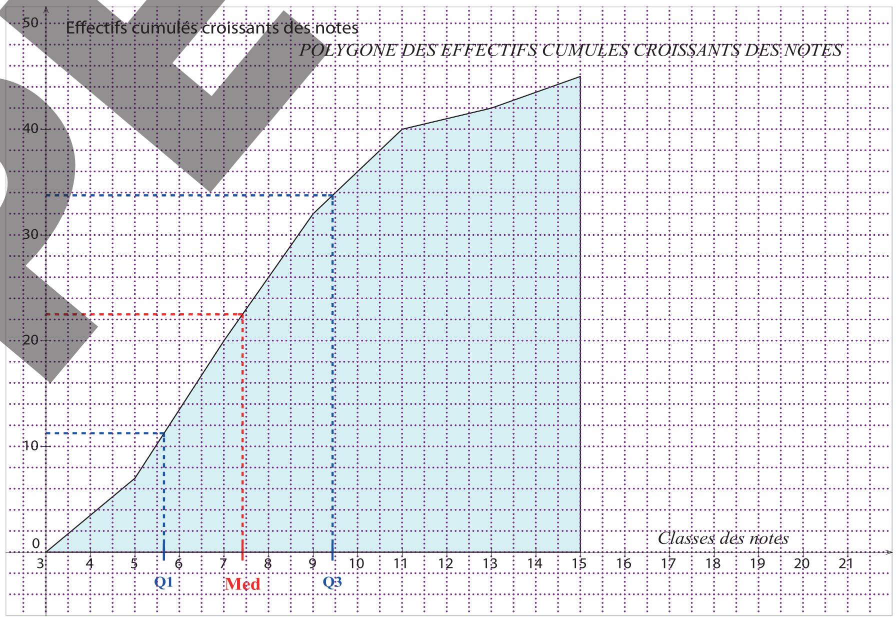
- Pour une série regroupée en classes, les valeurs brutes prises par le caractère ne sont pas accessibles. Il est possible d'obtenir une approximation des quartiles par lecture graphique sur le polygone des effectifs ou des fréquences cumulées.
  - ✓ Graphiquement, le premier quartile est l'abscisse du polygone des effectifs cumulés (resp. du polygone des fréquences cumulées) dont l'ordonnée est le quart de l'effectif total (resp. 0,25).
  - ✓ Graphiquement, le troisième quartile est l'abscisse du polygone des effectifs cumulés (resp. du polygone des fréquences cumulées) dont l'ordonnée est les trois- quarts de l'effectif total (resp. 0,75).
- Le deuxième quartile est la médiane.

Exemple

On reprend ci-dessous, la série statistique des notes obtenues par les élèves d'une classe de première D.

Classes des notes	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15[
Effectifs	7	13	12	8	2	3
Effectif cumulé croissant	7	20	32	40	42	45

- Déterminons graphiquement le premier quartile et le troisième quartile de cette série statistique.



✓ Le premier quartile Q_1 est l'abscisse du point d'ordonnée $\frac{45}{4}$. Q_1 vaut environ 5,6.

✓ Le troisième quartile Q_3 est l'abscisse du point d'ordonnée $45\times\frac{3}{4}$; Q_3 vaut environ 9,4.

- Déterminons algébriquement une estimation du premier quartile et du troisième quartile de cette série statistique.

Une estimation du premier quartile

Le quart de l'effectif total est : 11,25.

La classe qui contient le premier quartile est donc la classe [5;7[.

Soit q_1 l'abscisse du point d'ordonnée 11,25 du polygone. On a :

5	q_1	7
7	11,25	20

Soit : $\frac{20-11{,}25}{7-q_1}=\frac{20-7}{7-5}$, ou encore $q_1 = 7 - \frac{17{,}5}{13}$. On a donc $q_1 \approx 5{,}65$.

Une estimation du troisième quartile

Les trois- quarts de l'effectif total est : 33,75.

La classe qui contient le troisième quartile est donc la classe [9;11[.

Soit q_3 l'abscisse du point d'ordonnée 33,75 du polygone. On a :

9	q_3	11
32	33,75	40

Soit : $\frac{q_3-9}{33{,}75-32}=\frac{11-9}{40-32}$, ou encore $q_3 = 9 + \frac{3{,}5}{8}$. On a donc $q_3 \approx 9{,}44$.

Pour s'entraîner : exercices 20 ; 21 ; 22

IV. PARAMÈTRES DE DISPERSION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE REGROUPÉE EN CLASSES

On considère la série statistique définie comme suit :

Classes	$[a_1 ; b_1[$	$[a_2 ; b_2[$	...	$[a_p ; b_p[$
Effectifs n_i des classes	n_1	n_2	...	n_p
Centre c_i des classes	c_1	c_2	...	c_p

$\bar{x} = \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_p}\left(n_1c_1+n_2c_2+\ldots+n_pc_p\right)$ est la moyenne de la série statistique.

Les caractéristiques de dispersion permettent d'apprécier la dispersion des valeurs d'une variable autour de la moyenne.

1. Écart interquartile

Définition

- L'écart interquartile est la distance entre le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3.
- L'écart interquartile (Q_3 - Q_1) est un paramètre de dispersion absolue qui correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus fortes. 50% des observations sont donc concentrées entre Q_1 et Q_3.

Remarques

Plus l'écart interquartile est petit, plus les valeurs centrales de la série se concentrent autour de la médiane.

Exemple

En reprenant la série statistique des notes obtenues par les élèves de la classe de première D, on a obtenu : $Q_1 = 5{,}65$ et $Q_3 = 9{,}44$.

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 9{,}44 - 5{,}65 = 3{,}79$.

Interprétation

50% des notes obtenues par les élèves de cette classe de première D sont concentrées entre 5,65 et 9,44. C'est-à-dire, 50% des notes obtenues par les élèves de cette classe sont concentrées sur un intervalle de 3,79 points.

Pour s'entraîner : exercices 20 ; 21 ; 22

2. Ecart-moyen

Définition

L'écart absolu moyen est le paramètre de dispersion le plus simple qui mesure les fluctuations de la série par rapport à la moyenne.

L'écart absolu moyen est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1\left|c_1 - \bar{x}\right| + n_2\left|c_2 - \bar{x}\right| + \ldots + n_p\left|c_p - \bar{x}\right|\right) = \frac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left|c_i - \bar{x}\right|.$$

Exemple

En reprenant la série statistique des notes obtenues par les élèves de la classe de première D,

on a : $e_m = \dfrac{7|4-7{,}7| + 13|6-7{,}7| + 12|8-7{,}7| + 8|10-7{,}7| + 2|12-7{,}7| + 3|14-7{,}7|}{45} = \dfrac{83{,}1}{45}$.

$e_m \approx 1{,}84$.

Interprétation

- L'écart moyen nous indique que les observations se situent, en moyenne, à e_m unités de leur valeur centrale $\bar{x}$. Il permet d'apprécier l'éloignement des valeurs du caractère par rapport à la moyenne de la série statistique étudiée.
- $e_m \approx 1{,}84$; ce qui signifie que les notes obtenues par les élèves de cette classe s'écartent en moyenne de 1,84 points de la moyenne.

Remarques

Soit deux séries statistiques A et B d'écarts moyens respectifs e_{mA} et e_{mB} telles que : $e_{mA} < e_{mB}$.

On peut conclure que les valeurs de la série B sont plus dispersées que celles de la série A autour de leurs moyennes.

Pour s'entraîner : exercices 23

3. Variance et écart-type

On considère la série statistique définie comme suit :

Classes	$[a_1\,;b_1[$	$[a_2\,;b_2[$	...	$[a_p\,;b_p[$
Effectifs n_i des classes	n_1	n_2	...	n_p
Centre c_i des classes	c_1	c_2	...	c_p

$\bar{x} = \dfrac{1}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_pc_p\right)$ est la moyenne de la série statistique.

Définition

- La variance d'une série statistique, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
- Elle est notée V ou σ^2.
- Sa formule mathématique est : $V = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(c_i - \bar{x}\right)^2$
- Dans la pratique, le calcul de la variance se fait avec la formule de Koenig : $V = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2\right) - \bar{x}^2$
- L'écart-type est la racine carrée de la variance.
- Elle est notée σ. Sa formule mathématique est : $\sigma = \sqrt{V}$.

Exemple

En reprenant la série statistique des notes obtenues par les élèves de la classe de première D, on a :

$$V = \frac{7(4-7,7)^2 + 13(6-7,7)^2 + 12(8-7,7)^2 + 8(10-7,7)^2 + 2(12-7,7)^2 + 3(14-7,7)^2}{45} = \frac{348,45}{45}.$$

V ≈ 7,74.

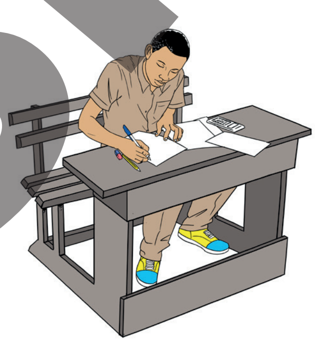
(La formule de Koenig donne : $V = \dfrac{7(4)^2 + 13(6)^2 + 12(8)^2 + 8(10)^2 + 2(12)^2 + 3(14)^2}{45} - (7,7)^2 \cong 7,74$).

$\sigma = \sqrt{\dfrac{348,45}{45}}$. σ ≈ 2,78.

Interprétation

L'écart type permet d'estimer la concentration des valeurs du caractère étudié autour de la moyenne.

- Par rapport à la moyenne, un écart-type faible signifie que les valeurs du caractère ne s'écartent pas beaucoup de la moyenne.
- Par rapport à la moyenne, un écart-type important signifie que les valeurs du caractère sont largement étalées de part et d'autre de la moyenne.



Pour s'entraîner : exercices 24

QUESTION 1

Comment déterminer la classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes ?

Méthode

Pour déterminer la classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes, on peut procéder comme suit :

- on détermine les amplitudes de toutes les classes ;
- on détermine les densités de toutes les classes (la densité d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe) ;
- on identifie la classe ayant la plus grande densité.

Exercice

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes sur 20 obtenues en mathématiques par un élève de première D au cours d'un trimestre.

Note	[0 ; 5[	[5 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectif	1	0	3	4	2

Détermine la classe modale de cette série statistique.

Solution commentée

Dressons le tableau des calculs ci-dessous.

Note	[0 ; 5[	[5 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectif	1	0	3	4	2
Amplitude	5	4	2	3	5
Densité	0,2	0	1 ,5	1,33	0,4

La plus grande densité est 1,5.
Par conséquent la classe modale de cette série statistique est : [9 ; 12[.

Exercice non corrigé

Le tableau ci-dessous donne la répartition du temps mis en seconde par des athlètes pendant une compétition de vitesse de 100 m.

Temps en seconde	[9,7 ; 9,8[	[9,8 ; 9,9[	[9,9 ; 10,2[	[10,2 ; 10,3[	[10,3 ; 10,7]
Nombre d'athlètes	3	7	9	5	6

Détermine la classe modale de cette série statistique.

QUESTION 2

Comment déterminer graphiquement les quartiles d'une série statistique regroupée en classes ?

Méthode

Pour déterminer graphiquement les quartiles d'une série statistique regroupée en classes, on peut procéder comme suit :

on construit le polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement le polygone des fréquences cumulées croissantes).

Premier quartile

- on place le point N_1 d'ordonnée $\frac{N}{4}$, où N est l'effectif total (respectivement 0,25) sur l'axe des ordonnées;
- on détermine l'antécédent de N_1 ;
- l'antécédent de N_1 noté Q_1, est le premier quartile de cette série statistique.

Deuxième quartile

- on place le point N_2 d'ordonnée $\frac{N}{2}$, où N est l'effectif total (respectivement 0,5) sur l'axe des ordonnées;
- on détermine l'antécédent de N_2 ;
- l'antécédent de N_2 noté Me (ou Q_2), est le deuxième quartile de cette série statistique.

Troisième quartile

- on place le point N_3 d'ordonnée $\frac{3N}{4}$, où N est l'effectif total (respectivement 0,75) sur l'axe des ordonnées;
- on détermine l'antécédent de N_3 ;
- l'antécédent de N_3 noté Q_3, est le troisième quartile de cette série statistique.

Exercice

Le tableau suivant donne la répartition du nombre de coquillages observés en fonction de leur masse lors d'une excursion.

Masse (en g)	[0 ; 2[	[2 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 10[
Nombre de coquillages	3	5	4	8

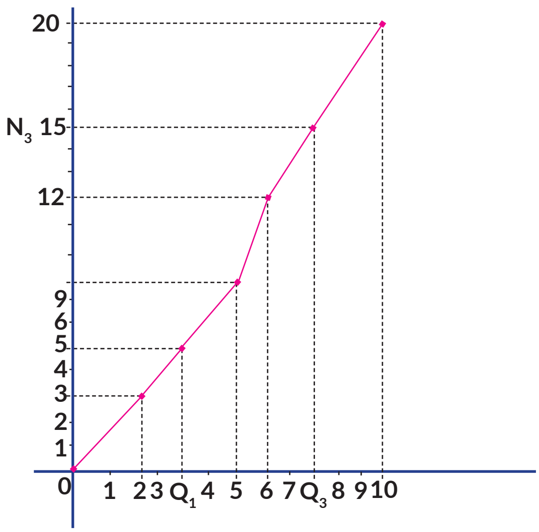
Détermine graphiquement les quartiles de cette série statistique.

Solution commentée

- Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

Masse (en g)	[0 ; 2[	[2 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 10[
Nombre de coquillages	3	5	4	8
Effectifs cumulés croissants	3	8	12	20

- Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants.



On a : $\frac{N}{4} = \frac{20}{4} = 5$, donc plaçons le point N_1 d'ordonnée 5 sur l'axe des ordonnées. On détermine l'antécédent de N_1. D'où, $Q_1 \approx 3{,}2$.

- On a : $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$, donc plaçons le point N_2 d'ordonnée 10 sur l'axe des ordonnées. On détermine l'antécédent de N_2. D'où, $Q_2 \approx 5{,}4$. Q_2 est la médiane.

- On a : $\frac{3N}{4} = \frac{3}{4} \times 20 = 15$, donc plaçons le point N_3 d'ordonnée 15 sur l'axe des ordonnées. On détermine l'antécédent de N_3. D'où, $Q_3 \approx 7{,}5$.

Exercice non corrigé

Une sage-femme a relevé les tailles, en centimètre, des bébés nés dans une maternité durant un trimestre. Elle a obtenu le tableau suivant :

Taille en cm	[45 ; 48[	[48 ; 53[	[53 ; 60[	[60 ; 62[
Nombre de bébés	12	14	18	6

Détermine graphiquement les quartiles de cette série statistique.

QUESTION 3

Comment calculer l'écart type d'une série statistique regroupée en classes ?

Méthode

Pour déterminer l'écart-type σ d'une série statistique regroupée en classes, on peut procéder comme suit :

- on détermine la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique ;
- on utilise la formule suivante : $V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2\right) - \overline{x}^2$ pour déterminer la variance;

✓ Pour cela, on peut compléter le tableau suivant :

Classes	$[a_1 ; b_1[$	$[a_2 ; b_2[$	...	$[a_p ; b_p[$
Effectifs des classes (n_i)	n_1	n_2	...	n_p
Centre des classes (c_i)	c_1	c_2	...	c_p
$n_i c_i^2$	$n_1 c_1^2$	$n_2 c_2^2$	...	$n_p c_p^2$

✓ on fait la somme de tous les résultats obtenus dans la dernière ligne ;
✓ on effectue le quotient de cette somme par l'effectif total ;
✓ on effectue ensuite la différence du résultat précédent par le carré de la moyenne pour déterminer la variance V ;
✓ on prend la racine carrée de V. On a : $\sigma = \sqrt{V}$.

Exercice

Un pompiste a relevé les achats en carburant durant une journée. Il a consigné les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Volume en litre	[0 ; 3[	[3 ; 7[	[7 ; 8[	[8 ; 10[
Nombre de clients	27	13	16	4

Calcule l'écart-type de cette série statistique.

Solution commentée

- On calcule la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.

$\overline{x} = \frac{1}{60}(1,5 \times 27 + 5 \times 13 + 7,5 \times 16 + 9 \times 4)$

$\overline{x} = \frac{1}{60}(40,5 + 65 + 120 + 36)$

$\overline{x}$ = 4,36 Litres.

- On complète le tableau suivant :

Volume en litre	[0;3[	[3;7[	[7;8[	[8;10[
Nombre de clients (n_i)	27	13	16	4
Centre de la classe (c_i)	1,5	5	7,5	9
$n_i c_i^2$	27×1,52 = 60,75	$13\times5^2 = 325$	$16\times7{,}5^2 = 900$	$4\times9^2 = 324$

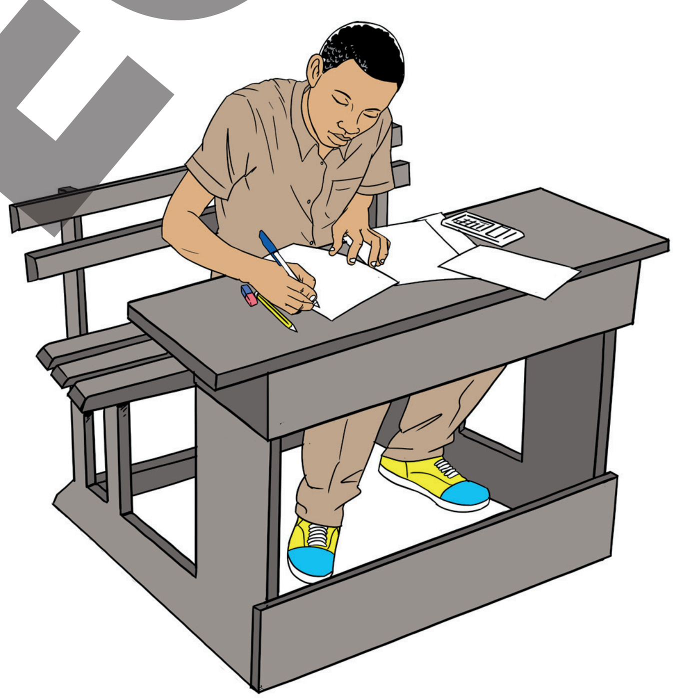
- On effectue la somme: 60,75 + 325 + 900 + 324 =1609,75.
- On effectue le quotient : $\frac{1609{,}75}{60}$ =26,829.
- On effectue ensuite la différence : $26{,}829 - (4{,}36)^2 = 7{,}8194$.
- Ainsi la variance est : V = 7,8194.
- L'écart-type est : $\sigma = \sqrt{7{,}8194}$.
- $\sigma \approx 2{,}79$.

Exercice non corrigé

Une enquête a été menée auprès des employés d'une entreprise pour connaitre leur salaire.
Les résultats de cette enquête sont donnés dans le tableau suivant :

Salaire en millier de francs	[80 ; 100[	[100 ; 150[	[150 ; 220[	[220 ; 300[	[300 ; 400[
Nombre d'employés	52	70	38	25	5

Calcule l'écart-type de cette série statistique.



Exercices de fixation

Séries statistiques regroupées en classes

1 Pour chacune des affirmations suivantes, recopie le numéro et écris V lorsque l'affirmation est vraie et F lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Le centre d'une classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel c tel que : $c = \frac{b+a}{2}$.
2	L'amplitude d'une classe $[a\ ;\ b[$ est le nombre réel $a - b$.
3	La densité d'une classe est le produit de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe.
4	La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par 2.
5	La fréquence en pourcentage est la fréquence multipliée par 100.

2 On donne la série statistique suivante :

Classes	[2 ; 5[	[5 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 15[	[15 ; 18[
Effectifs	7	13	12	8	2

Calcule le centre, l'amplitude et la densité de chaque classe.

3 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètres, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Effectifs	12	30	48	61

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Effectifs	50	26	17	6

1. Calcule la fréquence de chaque classe.
2. Calcule la fréquence en pourcentage de chaque classe.

Histogrammes

4 Pour chacune des affirmations, une seule des trois réponses est exacte.

Note le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse.

		A	B	C
1	Un histogramme est un graphique qui permet de représenter une série à caractère	qualitatif	quantitatif continu	quantitatif discret
2	Chaque classe de l'histogramme est représentée par un rectangle dont la base est proportionnelle à	son amplitude	son centre	son effectif total
3	Les hauteurs des rectangles de l'histogramme sont proportionnelles aux	effectifs des classes	centres des classes	densités des classes
4	L'aire de chaque rectangle de l'histogramme est proportionnelle	à la fréquence de la classe correspondante	au centre de la classe correspondante	à la borne supérieure de la classe correspondante

5 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

Construis l'histogramme des fréquences de cette série statistique.

6 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

Construis l'histogramme de cette série statistique.

Polygones des effectifs et des fréquences

7 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

Construis le polygone des effectifs de cette série statistique.

(On utilisera l'histogramme construit précédemment).

8 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

Construis le polygone des fréquences de cette série statistique.

(On utilisera l'histogramme construit précédemment).

Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

9 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

Construis sur un même graphique le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.

10 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

Construis sur un même graphique le polygone des fréquences cumulées croissantes et le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.

Courbes cumulatives d'une variable à caractère quantitatif discret

11 Pour chacune des affirmations ci-dessous, écris le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est force.

N°	Affirmations
1	La courbe cumulative des effectifs dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est la représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à partir des effectifs cumulés croissants.
2	La fonction qui définit la courbe cumulative des effectifs dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est une fonction décroissante.
3	La fonction qui définit la courbe cumulative des fréquences dans le cas d'une variable à caractère quantitatif discret est une fonction en escalier.
4	La courbe cumulative des fréquences associée à une variable à caractère quantitatif discret est continue sur $\mathbb{R}$.

12 Le tableau ci-dessous indique les distances, arrondies au km, entre la mairie et les domiciles de cent jeunes d'une commune.

Il a été complété par les effectifs cumulés croissants et les fréquences cumulées croissantes.

Distances	0	1	2	3	4	5	8
Effectifs	5	20	24	15	20	10	6
Effectifs cumulés croissants	5	25	49	64	84	94	100
Fréquences cumulées croissants	0 ,05	0,25	0,49	0,64	0,84	0,94	1

1. Représente la courbe cumulative des effectifs de cette série statistique.
2. Représente, sur un autre graphique, la courbe cumulative des fréquences de cette série statistique.

Densité d'une classe -Classe modale

13 Pour chaque affirmation, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste.

Recopie le numérop de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses		
N°	Affirmations	A	B	C
1	Soit une classe [a;b[d'effectif n, de centre c et d'amplitude b - a. La densité de la classe [a ; b[est :	$n(b-a)$	$\frac{b-a}{n}$	$\frac{n}{b-a}$
2	Soit une classe [a ; b[d'effectif n, de centre c et d'amplitude b - a. Soit N l'effectif total d'une série statistique. La densité de fréquence de la classe [a;b[est :	$\frac{n(b-a)}{N}$	$\frac{n}{N(b-a)}$	$\frac{b-a}{nN}$
3	Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes de même amplitude est une classe ayant	le plus grand effectif.	le plus petit effectif.	la plus petite densité.
4	Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est une classe ayant	le plus grand effectif.	la plus grande densité.	la plus petite densité.
5	Une classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes est une classe ayant	la plus grande fréquence.	la plus grande densité de fréquence.	la plus petite densité de fréquence.
6	Toute série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes	n'admet aucune classe modale.	a une unique classe modale.	peut avoir plusieurs classes modales.

14 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

Détermine la classe modale de cette série statistique.

15 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

1. Recopie le tableau ci-dessous et complète-le.

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8
Amplitude de la classe			
Centre de la classe			
Densité de la classe			

2. Détermine la classe modale de cette série statistique.

Moyenne

16 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

Détermine la durée moyenne du trajet de ces élèves.

17 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

Détermine la taille moyenne de ces élèves.

Médiane d'une série statistique regroupée en classes

18 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

1. Utilise le polygone des effectifs cumulés (construit dans l'un des exercices précédents) pour déterminer la médiane.
2. Détermine, par calcul, une estimation de la médiane de cette série statistique.
3. Donne une interprétation du résultat précédent.

19 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

1. Utilise le polygone des fréquences cumulées (construit dans l'un des exercices précédents) pour déterminer la médiane.
2. Détermine, par calcul, une estimation de la taille médiane de cette série statistique.
3. Donne une interprétation du résultat précédent.

Quartiles d'une série statistique regroupée en classes - Ecart interquartile

20 Recopie le numéro de chacune des affirmations suivantes suivi de V si l'affirmation est vraie ou F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Le premier quartile Q_1 est tel qu'au moins 25% des modalités (rangées dans l'ordre croissant) sont inférieures ou égales à Q_1.
2	Il existe trois quartiles, le deuxième quartile correspond à la moyenne.
3	L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile.
4	Le troisième quartile est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées dont l'ordonnée est 0,7.

21 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

1. Utilise le polygone des effectifs cumulés (construit dans l'un des exercices précédents) pour déterminer le premier quartile et le troisième quartile.
2. Détermine, par calcul, une estimation du premier quartile et du troisième quartile de cette série statistique.
3. Donne une interprétation des résultats précédents.
4. Calcule l'écart interquartile et interprète-le.

22 Le tableau ci-dessous indique la répartition des tailles, en centimètre, de 250 élèves de la promotion première d'un lycée.

Tailles	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Fréquences en %	4,8	12	19,2	24,4

Tailles	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Fréquences en %	20	10,4	6,8	2,4

1. Utilise le polygone des fréquences cumulées (construit dans l'un des exercices précédents) pour déterminer le premier quartile et le troisième quartile.
2. Détermine, par calcul, une estimation du premier quartile et du troisième quartile de cette série statistique.
3. Donne une interprétation des résultats précédents.
4. Calcule l'écart interquartile et interprète-le.

Écart absolu moyen

23 Les tableaux ci-dessous résument les notes sur 20 en anglais de Massé et d'Amine, deux élèves d'une classe de première.

Massé

Notes	[5 ; 9[	[9 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[
Effectifs	5	6	15	6	1

Amine

Notes	[5 ; 9[	[9 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 19[
Effectifs	9	5	7	7	4	1

La moyenne de Massé est de 10,60 et celle d'Amine est de 10,7.

Ils ont donc à peu près la même moyenne.

1. a) Calcule l'écart moyen e_m de la série correspondant aux notes de Massé.

   b) Calcule l'écart moyen e_A de la série correspondant aux notes d'Amine.
2. Interprète ces résultats.

Variance – Écart type

24 Une enquête a permis de dresser la durée du trajet des élèves d'une classe de première pour se rendre à l'école. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Durée du trajet en minutes	[0 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	10	15	8

1. Calcule la variance de cette série statistique.
2. a) Calcule l'écart type de cette série statistique.

   b) Interprète ce résultat.

Exercices de renforcement/ approfondissement

25 Recopie le numéro de chacune des affirmations suivantes suivi de V si l'affirmation est vraie ou F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La médiane est une caractéristique de dispersion d'une série statistique.
2	La moyenne est une caractéristique de position d'une série statistique.
3	On ne peut pas calculer la moyenne dans le cas d'une série regroupée en classes.
4	Les modalités et la variance sont exprimées dans la même unité.
5	La variance est la racine carrée de l'écart-type
6	Dans une série statistique regroupée en classes, toute classe qui a un effectif maximal est appelée classe modale.
7	Le deuxième quartile est un nombre plus grand que la médiane.
8	Une variance ou un écart-type nul signifient que toutes les valeurs de la série sont égales à sa moyenne.
9	Plus la variance d'une série statistique est grande, moins cette série est dispersée autour de la moyenne.
10	Si on ajoute b ($b \in \mathbb{R}$) à chaque valeur de la série, alors la moyenne de la série augmente de b.

26 On considère la série statistique ci-dessous composée des notes obtenues à un devoir de niveau de Mathématiques des élèves d'une classe de première.

Notes	[2 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 20[
Effectifs	12	6	8	16

1. Détermine la classe modale de cette série.
2. Calcule la moyenne de cette série.
3. Construis les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes de cette série.
4. a) Détermine graphiquement la note médiane de ce devoir.
   b) Vérifie le résultat précédent par interpolation linéaire.
   c) Interprète cette note médiane.
5. Calcule le premier et le troisième quartile de cette série.
6. a) Construis l'histogramme de cette série avec les unités suivantes : 1 cm représente 2 unités en abscisse et 1cm^2 représente un individu.
   b) Construis le polygone des effectifs de cette série.

27 151 stations météo ont relevé au mois de septembre 2021, les températures minimales d'un pays européen. Pour améliorer la lisibilité de ces résultats, on les a regroupés dans les tableaux suivants :

Température	[-2;-1[	[-1;0[	[0;1[	[1;2[	[2;3[	]3;4[
Effectif	1	4	6	6	19	14

Température	[4;5[	[5;6[	[6;7[	[7;8[	[8;9[	[9;10[
Effectif	24	13	9	7	7	7

Température	[10;11[	[11;12[	[12;13[	[13;14[	[14;15[	[15;16[
Effectif	7	2	2	2	3	1

1. a) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
   b) Déduis-en une estimation de la température médiane et des autres quartiles.
   c) Donne la valeur de l'écart interquartile. Interprète le résultat.
2. Détermine la moyenne de cette série.
3. Détermine l'écart-type de cette série. Interprète le résultat.

28 Le médecin chef du médico- scolaire d'une commune cherche à tester l'efficacité d'un nouveau traitement oral pour des patients atteint de diabète de type 2.

Pour cela, il étudie le taux de sucre dans le sang (glycémie en g/L) à jeun d'un groupe de 50 patients.

Les résultats sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

Glycémie	Effectifs
[1,3 ; 1,4[	2
[1,4 ; 1,5[	6
[1,5 ; 1,6[	5
[1,6 ; 1,7[	13
[1,7 ; 1,8[	7
[1,8 ; 1,9[	5
[1,9 ; 2[	7
[2 ; 2,1[	5

1. Justifie que la moyenne de cette série statistique est égale à 1,72.
2. Construis l'histogramme correspondant à cette série.
3. a) Dresse le tableau des fréquences (en %) et des fréquences cumulées croissantes (en %).
   b) Détermine la classe médiane.
   c) Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
   d) Détermine graphiquement la médiane de cette série.

29 Moussa est un réparateur de téléphones cellulaires. Il a enregistré ses durées d'intervention sur les téléphones. Les résultats sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Durée (en min)	[0; 20[	[20; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 140[
Effectif	2	18	32	40	29	12	7

1. a) Calcule la durée moyenne $\overline{x}$.

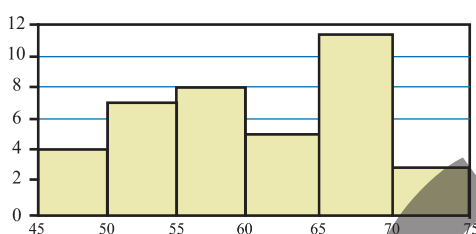
   b) Calcule l'écart-type s.

   c) Interprète les résultats précédents.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes de cette série.
3. Estime, en utilisant le graphique précédent, le nombre d'interventions dont la durée est dans l'intervalle:

   a) $[\overline{x} - s ; \overline{x} + s]$.

   b) $[\overline{x} - 2s ; \overline{x} + 2s]$.

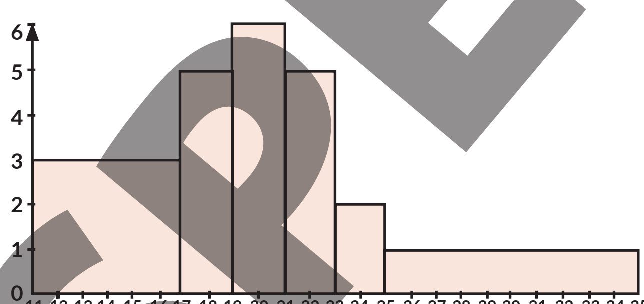
30 L'histogramme ci-dessous donne les durées en minutes d'un trajet de 59 km relevés par des automobilistes sur une journée.



Temps mis (en min)

1. Détermine la classe médiane et les classes de chacun des quartiles.
2. Détermine les quatre quartiles.

31 Dans l'histogramme ci-dessous, l'effectif correspondant à l'intervalle [23;25[est égal à 10.



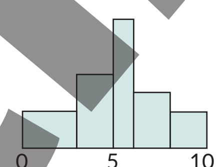
1. Construis le polygone des effectifs de la série dont l'histogramme des effectifs est donné ci-dessus.
2. Dresse le tableau des effectifs correspondant à cette série statistique.
3. a) Dans quelles classes sont la médiane et les quartiles ? Justifie ta réponse.

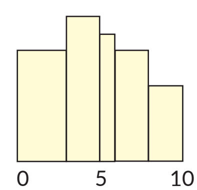
   b) Détermine l'écart interquartile et interprète-le.

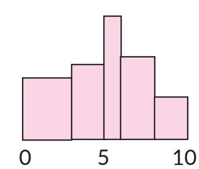
32 Lors d'une séance de Travaux Dirigés, un professeur a donné la série statistique ci-dessous à ses élèves et il leur a demandé de la représenter.

Classe	[0; 3[	[3; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectif	6	8	7	6	4

Voici les productions respectives de Soutcho (1), Adjoua (2) et Ozoua (3).







1. Laquelle de ces filles à fait une représentation correcte ? Justifie ta réponse.
2. Détermine la classe modale de cette série statistique.
3. a) Détermine la classe médiane de cette série statistique.

   b) Déduis-en la médiane de cette série statistique.
4. a) Calcule la moyenne de cette série statistique.

   b) Calcule l'écart-type de cette série statistique. Interprète le résultat.

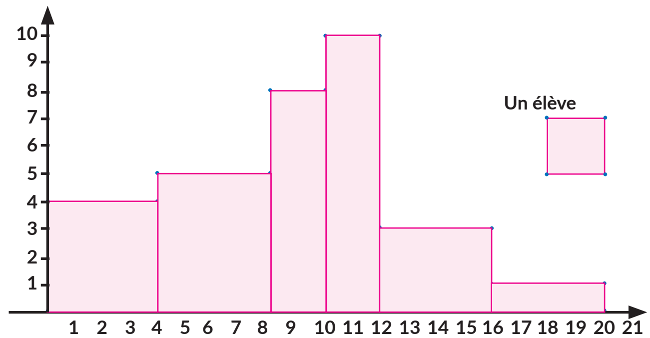
33 On a relevé le taux de cholestérol, en gramme par litre de sang, dans un échantillon de 220 personnes. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Taux	[1,6 ;1,8[	[1,8 ;2,0[	[2,0 ;2,2[	[2,2 ;2,4[	[2,4 ;2,6[
Effectif	68	59	45	30	18

1. Trace le polygone des fréquences cumulées croissantes de cette série.
2. On considère qu'un taux supérieur à 2,1 grammes par litre de sang est anormal.

3. Détermine graphiquement le pourcentage de personnes ayant un taux anormal.

34 L'histogramme ci-dessous représente les notes obtenues à un devoir par les élèves d'une classe de première.



1. Détermine la population étudiée par cette série statistique. Donne le caractère étudié et précise sa nature.
2. Reproduis et complète le tableau suivant :

Valeurs						
Effectifs						
Fréquences						
F.C.C						

3. Détermine la classe modale de cette série.
4. Détermine la moyenne de cette série.
5. Calcule l'écart moyen.
6. a) Construis le polynôme des fréquences cumulées croissantes associé à cette série.

   b) Déduis-en la médiane et les quartiles de cette série.

   c) Calcule l'écart interquartile. Interprète ce résultat.

   d) Estime, en utilisant le graphique précédent, le pourcentage des élèves dont les notes du devoir sont comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - s\ ;\ \bar{x} + s]$ où s désigne l'écart-type de cette série statistique.

35

1. Établis la liste des nombres premiers inférieurs à 200.
2. Le tableau ci-dessous donne les effectifs des nombres premiers contenus dans les intervalles indiqués.

Intervalle	1 à 200	201 à 400	401 à 600	601 à 800	801 à 1000	1001 à 1200
Effectif	46	32	31	30	29	28

Intervalle	1201 à 1400	1401 à 1600	1601 à 1800	1801 à 2000	801 à 1000	1001 à 1200
Effectif	26	29	27	25	29	28

a) Construis l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

b) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes en pourcentage.

c) Dis si au moins 50 % des nombres premiers répertoriés ici sont inférieurs à 1000. Justifie la réponse.

36 Un professeur de Mathématiques a demandé à trente élèves de chacune de ses quatre classes (de séries A, B, C et D), le nombre de livres qu'ils ont lus au cours de l'année 2021.

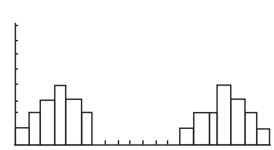
Le nombre de livres lus va de 0 à 20.

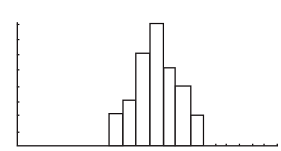
Les données lui ont permis de :

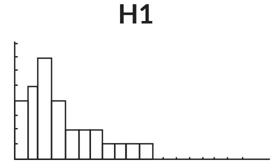
- réaliser quatre histogrammes pour lesquels le repère est identique ;
- calculer les paramètres de position et de dispersion regroupés dans le tableau suivant :

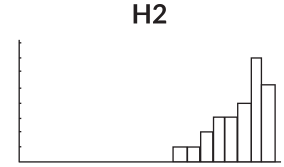
	Série A	Série B	Série C	Série D
Valeur minimale	12	0	0	7
Valeur maximale	20	10	19	13
Premier quartile	16	1	3	9
Médiane	18	2	9	10
Troisième quartile	20	5	16	11

Il désire vérifier si ses élèves de première D ont maîtrisé les habiletés et contenus de la leçon sur les statistiques.


H1


H2


H3


H4

1. Associe chaque histogramme à la série correspondante.
2. Parmi ces quatre classes, l'une est une classe littéraire L1 aimant beaucoup la lecture, la deuxième est également une classe littéraire L2, mais dans laquelle une moitié est peu intéressée par la lecture, la troisième est une classe scientifique S1 homogène composée d'élèves sérieux mais pas particulièrement grands lecteurs, et la quatrième est une classe scientifique S2 d'élèves dont plus de la moitié lit au plus deux livres par an. Associe les graphiques à chaque classe.
3. Détermine les classes auxquelles, les commentaires suivants s'appliquent.

   a) 50% des élèves lisent moins de 6 livres par an.

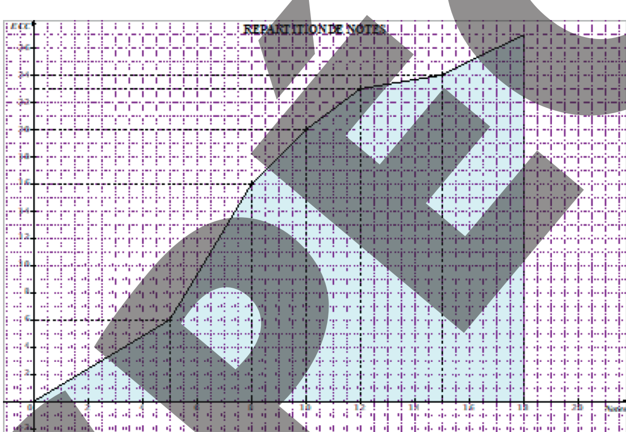
   b) 90% des élèves lisent au plus 7 livres par an.

   c) Au moins 50% des élèves lisent entre 3 et 16 livres par an.

   d) Au moins 50% des élèves lisent plus de 18 livres par an.
4. **a)** Sans calcul, précise, pour chaque classe, si la moyenne est supérieure, inférieure ou à peu près égale à la médiane.

   b) Vérifie les résultats précédents par le calcul.

37 Le graphique suivant représente le polygone des fréquences cumulées croissantes d'une série de 70 notes à un devoir surveillé.



1. A l'aide du graphique, donne les classes et effectifs correspondants ; présente les résultats dans un tableau.
2. Construis l'histogramme de la série statistique obtenue.
3. Détermine le nombre d'élèves qui ont eu :

   a) plus de 10 sur 20 ;

   b) moins de 08 sur 20.
4. Le devoir est considéré comme réussi si la note moyenne de la classe est d'au moins 10 sur 20. Ce devoir est-il réussi ? Justifie ta réponse.
5. Détermine l'écart interquartile et interprète-le.
6. Calcule l'écart-type des notes et interprète-le.

38 Dans un magasin, le prix des chaussures vendues en une journée est reparti de la façon suivante :

Prix en milliers de francs CFA	[0 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[
Nombre de paires	35	60	38	33	20	14

1. Construis l'histogramme de cette série statistique.
2. Calcule les effectifs cumulés décroissants puis, fais-en la représentation graphique.
3. En utilisant la courbe des effectifs cumulés, calcule le pourcentage de chaussures vendues dont le prix est :

   a) inférieur à 14.000 francs CFA ;

   b) supérieur à 28.000 francs CFA ;

   c) compris entre 14.000 francs CFA et 28.000 francs CFA.
4. On désigne par x le prix d'une paire de chaussures et on considère la nouvelle série statistique de modalités $y = \dfrac{x - 17{,}5}{5}$.

   a) Trouve une relation entre les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$, puis entre les écarts –types $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$ des séries statistiques x et y.

   b) Calcule $\bar{x}$ et $\sigma(x)$.

   c) Déduis-en les valeurs de $\bar{y}$ et $\sigma(y)$.

Situations complexes

39 Le club Mathématiques d'un établissement a organisé un concours à l'intention des 200 élèves des

4 classes de première D. À l'issue de ce concours, la classe de 1ère D est déclarée vainqueur. Les notes des 50 élèves de cette classe sont réparties de la manière suivante :

Notes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Nombre d'élèves	12	8	20	10

Le proviseur décide de récompenser chacun des élèves de cette classe ayant obtenu au moins la note 10 si :

- la moyenne de cette classe à ce concours est supérieure ou égale à 10 ;
- la note médiane est supérieure ou égale à 11 ;
- 50 % des élèves ont des notes comprises entre 5 et 14.

Impatients, les élèves ayant obtenu au moins la note 10 décident de faire des calculs pour voir s'ils seront récompensés.

En utilisant tes connaissances mathématiques, justifie s'ils seront récompensés ou non.

(On prendra l'arrondi d'ordre 0 des résultats).

40 Le directeur de la bibliothèque municipale d'une commune cherche un slogan publicitaire mettant en avant le faible temps d'attente avant d'être reçu à la bibliothèque municipale.

Les propositions suivantes ont été retenues :

Slogan 1 : « Le temps d'attente est en moyenne inférieure à 5 minutes »

Slogan 2 : « Dans plus de 50% des cas, vous attendrez moins de 5 minutes ! »

Pour choisir le slogan le plus proche de la réalité, une enquête sur le temps d'attente a été réalisée.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Temps d'attente (en minutes)	[0 ; 2[	[2 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[
Effectif	19	45	8	17	11

Embarrassé, le directeur de la bibliothèque saisit le proviseur de ton établissement qui, à son tour sollicite ta classe pour faire un choix correct.

Indique, en argumentant, le slogan que le directeur doit choisir.

41 Une machine fabrique des pièces cylindriques de diamètre théorique 25 millimètres. Pour contrôler la qualité des produits, le service qualité a prélevé un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Diamètre	Effectif
[24,2 ; 24,4[	5
[24,4 ; 24,6[	13
[24,6 ; 24,8[	24
[24,8 ; 25[	19
[25 ; 25,2[	14
[25,2 ; 25,4[	10
[25,4 ; 25,6[	8
[25,6 ; 25,8[	5
[25,8 ; 26[	2

Le chef de ce service estime que la production de la machine est bonne si la série des mesures vérifie simultanément les trois conditions ci-dessous :

- le diamètre moyen $\overline{X}$ est compris entre 24,9 mm et 25,1 mm ;
- l'écart-type σ de la série est strictement inférieur à 0,4 mm ;
- 90% au moins de l'effectif appartient à l'intervalle

$[\overline{X} - 2\sigma ; \overline{X} + 2\sigma]$.

Sollicité par un agent de l'entreprise, tu décides de répondre à la préoccupation du chef du service qualité.

En utilisant tes connaissances mathématiques au programme, détermine la qualité de la production de cette machine.

42 Au cours de la dernière campagne agricole, une centrale d'achat de café-cacao a acheté plusieurs quantités de fèves de cacao auprès des coopératives qui lui sont affiliées.

Les données sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Quantité achetée en tonnes	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[
Nombre de coopératives	16	12	8	7	5	2

Le gérant de cette centrale négocie un crédit bancaire pour augmenter son capital afin d'attirer plusieurs coopératives agricoles.

La banque fixe deux conditions à la centrale pour l'obtention du crédit.

Condition 1 : le tonnage moyen acheté par cette centrale doit être d'au moins 6 tonnes au cours de cette campagne.

Condition 2 : le tonnage médian doit être supérieur à 13 tonnes.

Membre de cette centrale d'achat, ton papa t'explique les conditions de la banque.

À l'aide des outils mathématiques au programme, dis à ton papa si cette centrale peut bénéficier ou non du crédit.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
pour le compte de JD éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
2e trimestre 2022
Dépôt légal N° 18747 du 15 juin 2022

Mon livre de MATHÉMATIQUES

Découvrez nos manuels
de la même collection

COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

Lavez-vous les mains fréquemment

Respectez la distanciation physique

Portez un masque

Toussez ou éternuez dans votre coude

Ouvrez les fenêtres

Faites-vous vacciner

ISBN : 978-2-493344-46-5