2010 / 2011

# MATHEMATIQUES

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) = \mathrm{Mes}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$$

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

# L'ASTUCE

# TERMINALE SE

# COURS

**DOCUMENT DU PROFESSEUR**

Nom et Prénom(s) :...........................................................

Etablissement :...........................................................

# SOMMAIRE

# CHAPITRE I : COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS

## A- LIMITES ET CONTINUITES

### I- LIMITES ET CONTINUITE EN UN POINT a

1- Limites d'une fonction en a
2- Limite d'une fonction composée
3- Limites et formes indéterminées
4- Continuité d'une fonction en a

### II- CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

1- Définition – Propriétés
2- Fonctions continues strictement monotones

## B- DERIVEES

### I- DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE

1- Dérivabilité en un point a
2- Dérivabilité sur un intervalle

### II- DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

1- Propriétés
2- Dérivée de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone
3- Fonctions puissances d'exposants rationnels

### III- TABLEAU RECAPITULATIF

## C- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

### I- PROPRIETES GEOMETRIQUES D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

1- Parité d'une fonction
2- Eléments de symétrie

### II- BRANCHES INFINIES D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

1- Asymptotes
2- Branches paraboliques

## III- ETUDE DE FONCTION

1- Plan d'étude d'une fonction
2- Exemples d'études de fonctions

# COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS

# A- LIMITES ET CONTINUITE

## I. LIMITES ET CONTINUITE EN UN POINT a

### 1- Limites d'une fonction en a

#### a) Limites de référence

- $\lim\limits_{x\to a} c = \lim\limits_{x\to+\infty} c = \lim\limits_{x\to-\infty} c = c \quad (a\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}).$
- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n;\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty\ \left(a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si n est impair.} \\ +\infty \text{ si n est pair.}\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n\in\mathbb{N}^*)$
- Si n est pair $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ Si n est impair $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est pair $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ Si n est impair $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

#### b) Limites et opérations

l et l' sont des nombres réels; a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$; f et g deux fonctions.

- Limite d'une somme de fonctions

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | l | l | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$ | l + l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

- Limite d'un produit de fonctions

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | l | l (l ≠ 0) | l (l ≠ 0) | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$ | ll' | $+\infty$ si $l > 0$<br>$-\infty$ si $l < 0$ | $+\infty$ si $l < 0$<br>$-\infty$ si $l > 0$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

- Limite d'un inverse

| $\lim_{x\to a} g(x)$ | l' (l' ≠ 0) | 0 ( g(x) > 0 ) | 0 ( g(x) < 0 ) | $-\infty$ ou $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ | $\frac{1}{l'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |

***NB*** : *le point d'interrogation (?) signifie que l'on ne peut conclure.*

- Limite d'un quotient (on remarquera que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$)

c) Limites de fonctions polynômes et rationnelles à l'infini

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est égale à la limite à l'infini du monôme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré.

☑ Exemples : Calculer les limites suivantes:

**1.** $\lim_{x\to -3} 4$ $\quad \lim_{x\to +\infty} 139$ $\quad \lim_{x\to -10} k$

**2.** $\lim_{x\to -1} x^8$ $\quad \lim_{x\to -\infty} x^6$ $\quad \lim_{x\to -\infty} x^3$ $\quad \lim_{x\to +\infty} x^{19}$

**3.** $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{26}}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{14}}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{1}{x^5}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x^5}$

**4.** $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{(x-3)^7}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{1}{(1-x)^5}$

**5.** $\lim_{x\to +\infty} (x^3+5)$ $\quad \lim_{x\to -\infty} (-2x^7)$ $\quad \lim_{x\to 5}(x^2-2x+6)$ $\quad \lim_{x\to 1}(-7x+1)(-x+2)$

$\lim_{x\to 2} \frac{-5}{(2x-4)^4}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{6}{(x-1)^9}$ $\quad \lim_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{2}{(3-x)^5}$

**6.** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{5x}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{-3\tan x}{2x}$

**7.** $\lim_{x\to -\infty} (5x^3-x+1)$ $\quad \lim_{x\to +\infty} (-3x^4+x-2)$ $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x+2}{x^4-5x-3}$ $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{5x^5+2x+3}{2x^5-3x-1}$

d) Limites à gauche, limites à droite

Soit a et l deux nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition $D_f$ .

Définition:

- f admet une limite à gauche en a égale à l si $\forall x \in D_f \cap \left]-\infty;a\right[$ ; $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = l$
- f admet une limite à droite en a égale à l si $\forall x \in D_f \cap \left]a;+\infty\right[$ ; $\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = l$

Propriétés

Soit a et l deux nombres réels et f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$ .

- Si $a \in K$, alors f admet une limite en a si et seulement si $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = f(a)$
- Si a est une borne de K, alors f admet une limite en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x).$$

☑ Exemple :

Etudier la limite de f en a dans chacun des cas suivants :

**1.** $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;2\right], & f(x) = x^3+1 \\ \forall x \in \left]2;+\infty\right[, & f(x) = 5x-1 \end{cases}$ (a = 2)

**2.** $\begin{cases} \text{Pour } x \neq 0; \quad f(x) = \dfrac{\tan x}{x} \\ f(0) = -1 \end{cases}$ (a = 0)

**3.** $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;-3[; \quad f(x) = x+2 \\ \forall x \in ]-3;+\infty[; \quad f(x) = x^3 - 4 \end{cases}$ (a = - 3)

**4.** $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;3[; \quad f(x) = x-1 \\ \forall x \in ]3;+\infty[; \quad f(x) = -\dfrac{1}{3}x+3 \end{cases}$ (a = 3)

## 2- Limite de fonctions composées

Propriété

✍ f et g sont deux fonctions. a, b et c sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$.

☑ Exemple :

Calculer les limites suivantes :

**1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^4+4x-3}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1}{2+3x^2}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3+x-1}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\dfrac{1}{x^2+1}}$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left|-5x^2+1\right|$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} \left|-x^3-2x+1\right|$

**3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(6x)}{6x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{2x}$

## 3- Limites et formes indéterminées

On a quatre types de formes indéterminées : $\dfrac{0}{0}; \quad \dfrac{\infty}{\infty}; \quad 0\times\infty; \quad (+\infty)+(-\infty)$

☑ Exemple :

Calculer les limites suivantes :

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+1}-x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+3x-1}\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$

**4.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$ $\quad \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x+1}{x-\pi}$ $\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{\pi-3x}$

**5.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(bx)}{ax} \left(a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}^*\right)$

## 4- Continuité d'une fonction en a

**a)** ***critère de continuité en a***

Propriété

✍ f est une fonction définie en a $(a\in\mathbb{R})$ ; f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

**Remarque** : Si f n'est pas définie en a alors f ne peut pas être continue

***b) prolongement par continuité***

Définition

✍ f est une fonction d'ensemble de définition $D_f$ et a un nombre réel n'appartenant pas à $D_f$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)= l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors f est prolongeable par continuité en a. Son prolongement par continuité en a est la fonction h définie par $\begin{cases} \forall x \in D_f ;\ h(x)=f(x) \\ h(a)=l \end{cases}$

Propriété

✍ Si une fonction f admet un prolongement par continuité h en a alors cette fonction h est continue en a.

☑ Exemple

Dire si les fonctions suivantes, sont prolongeables par continuité au point a indiqué. Si oui préciser son prolongement.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $a=2$
2. $g(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+2)^2}$, $a=-2$
3. $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$, $a=0$

# II. CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

## 1- Définition – Propriétés

### a- Définition

✍ Une fonction f est continue sur un intervalle K lorsque f est continuité en tout point de K.

☑ Exemples

Les fonctions élémentaires :

$x \mapsto c(c\in\mathbb{R})$; $x \mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$ sont continues sur leur ensemble de définition.

### b) Propriétés 1

✍ La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle K sont continues sur K.

✍ Le quotient d'une fonction continue par une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle K est continue sur K.

☑ Exemple

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

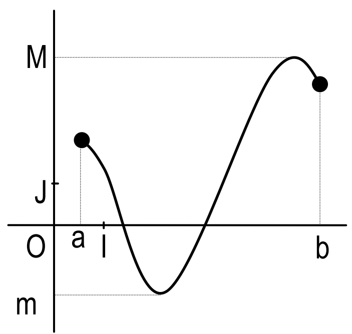
### c) Propriété 2

✍ Soit f une fonction continue sur un intervalle K et g une fonction continue sur un intervalle contenant f(K) alors $g \circ f$ est une fonction continue sur K.

### d) Propriété 3

✍ par une fonction continue,

- l'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton



- l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton

f est continue sur [a; b]
f ([a ; b]) = [m;M]
m est le minimum de f sur [a; b] et M est le maximum de f sur [a; b]

☑ Exemple

f est la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$.
Déterminer l'image de [-1;2] par f. on utilisera deux méthodes (algébrique et graphique).

## 2- Fonctions continues strictement monotones

### a) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Dans le tableau suivant, a et b sont des réels tels que a < b et f une fonction continue et strictement monotone.

| Intervalle K | Si f est continue et strictement croissante sur K alors f (K) =…………… | Si f est continue et strictement décroissante sur K alors f (K) =…………….. |
|---|---|---|
| $[a;b]$ | $[f(a);f(b)]$ | $[f(b)\,;f(a)]$ |
| $[a;b[$ | $\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);f(a)\right]$ |
| $]a;b]$ | $\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\;;f(b)\right]$ | $\left[f(b)\;;\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\right[$ |
| $[a;+\infty[$ | $\left[f(a)\;;\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$ |
| $]-\infty;b]$ | $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\;;f(b)\right]$ | $\left[f(b);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ |
| $]a;b[$ | $\left]\lim\limits_{x\to a} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)\right[$ | $\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)\right[$ |

### b) **Propriétés**

- Propriété 1

  ✍ Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K alors f réalise une bijection de K sur f(K). La bijection réciproque notée $f^{-1}$, est continue sur f(K) et a même sens de variation que f.

- Propriété 2

  ✍ Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K alors pour tout élément m de $f(K)$, l'équation f(x) = m admet une solution unique dans K.

- Conséquence

  ✍ Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et que f(a) x f(b)< 0 alors l'équation f(x)=0 admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]a;b[$

*NB: Une fonction continue et strictement monotone sur K est une fonction continue et strictement croissante sur K ou bien continue et strictement décroissante sur K.*

## 3- Fonctions puissances d'exposants rationnels

a. Fonctions racines n^ième^

Définition

✍ n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle fonction racine n^ième^, la bijection réciproque de la bijection $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^n$$

Notation

Soit x un nombre réel positif et n est un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.

La racine n^ième^ de x est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$. $x^{\frac{1}{n}}$ se lit " x exposant $\frac{1}{n}$ "

Cas particuliers

- Pour n = 2, on écrit simplement $\sqrt{x}$ et on lit " *racine carrée de x* ". On note $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- Pour n = 3, on écrit $\sqrt[3]{x}$ et on lit " *racine cubique de* x "

b. Propriétés

x et y sont des nombres réels positifs et n est un nombre entier naturel strictement supérieur à 1.

- $\sqrt[n]{x} \geq 0$
- $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

c. Fonction puissance d'exposants rationnels

Définition

r étant un nombre rationnel non nul, on appelle fonction puissance d'exposant r, la fonction : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^r$$

Propriété

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs.

$x^r y^r = (xy)^r$ $\quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$ $\quad \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$ $\quad x^r x^{r'} = x^{r+r'}$

☑ Exemples

*Exemple 1*

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;-2[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.
   b) Justifier que $-4 < \alpha < -3$
4. Donner un encadrement de $\alpha$
   a) d'amplitude 0,01
   b) d'amplitude 0,25.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions a, b et c tels que $a < b < c$

*Exemple 2*

On considère la fonction $g : [1;+\infty[ \to [2;+\infty[$

$$x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

1- Montrer que g est bijection.

2- Expliciter la bijection réciproque $g^{-1}$ de la bijection g.

# B- DERIVEES

## I. DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE

### 1- Dérivabilité en un point a

#### a) Définition

f est une fonction d'ensemble de définition $D_f$, a est un nombre réel appartenant à un intervalle ouvert contenu dans $D_f$.

Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \ (l \in \mathbb{R})$ alors f est dérivable en a, l est appelé le nombre dérivé de f en a et on note $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = l$.

Interprétation graphique

(Cf) est la représentation graphique de la fonction f dans un repère (O;I;J). Si f est dérivable en un point a, alors une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T).

☑ Exemple

Le plan est muni d'un repère (O;I;J). On note (C) la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de f en 2 puis en – 1.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

Propriété

✍ Si une fonction est dérivable en a alors elle est continue en a.

Remarques

- *La réciproque de cette propriété est fausse.*
- *Lorsqu'une fonction n'est pas continue en un point a alors elle ne peut être dérivable en ce point.*

### 2- Dérivabilité sur un intervalle

#### a) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

Définition

✍ f est une fonction définie sur un intervalle K contenant a. On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) au point a lorsque $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (respectivement $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) existe et est finie. Cette limite est appelé nombre dérivé à gauche (respectivement à droite) en a de f et notée $f_g'(a)$ (respectivement $f_d'(a)$).

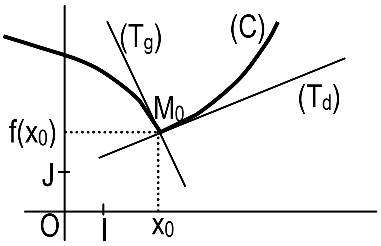
Propriété

✍ f est une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant a. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a, dérivable à droite en a et $f_g'(a) = f_d'(a)$.

Remarque

*Le plan est muni d'un repère (O; I; J). (C) la courbe représentative d'une fonction f, de nombre dérivé à gauche en a $f_g'(a)$ et à droite en a $f_d'(a)$.*

*La droite passant par le point d'abscisse a et de coefficient $f_g'(a)$ (respectivement $f_d'(a)$) est appelé tangente à gauche (respectivement tangente à droite) à (Cf).*




☑ Exemple

g est la fonction définie par $g(x)=x\left|x^2-4\right|$ et (Cg) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O; I;J).

1- Etudier la dérivabilité de g en – 2 et en 2.
2- Interpréter graphiquement les résultats précédents.

b) Tangente verticale

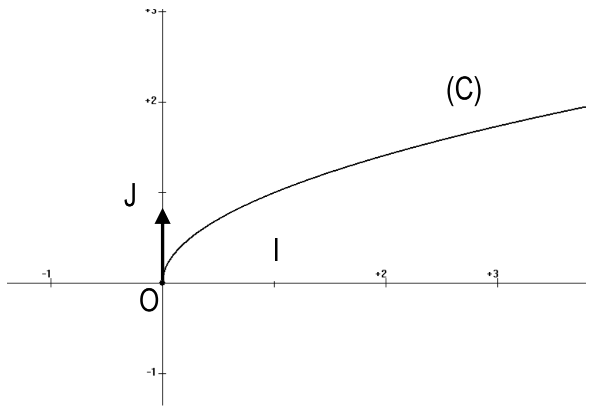
Propriété

✍ f est une fonction définie sur un intervalle K contenant a.

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie alors la représentation graphique (C) de la fonction f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

☑ Exemple : *on donne la fonction f définie par :* $f(x)=\sqrt{x}$ *de représentation graphique (C) ci-dessous.*

**Illustration graphique**




On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative (C) admet une demi – tangente verticale au point d'abscisse 0.

c) Dérivabilité sur un intervalle

Définition

✍ f est une fonction définie sur un intervalle ]a;b[; on dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert ]a;b[ lorsque f est dérivable en tout élément de ]a;b[.

✍ f est une fonction définie sur un intervalle [a;b]; on dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé [a;b] lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert ]a;b[, est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Propriété

✍ Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

# II. DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

## 1- Définition

Si une fonction f est dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
L'application qui a tout élément x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée fonction dérivée de f. La fonction dérivée de f est notée f '.

## 2- Dérivée de fonctions élémentaires

a, c sont des nombres réels ; n est nombre entier naturel non nul et k est un nombre entier relatif.

| Fonction f | $x \mapsto c$ | $x \mapsto ax$ | $x \mapsto x^n$ | $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Fonction f ' | $x \mapsto 0$ | $x \mapsto a$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| f est dérivable sur | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ | $]0;+\infty[$ |

| Fonction f | $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto \mathrm{cotan}\, x$ |
|---|---|---|---|---|
| Fonction f ' | $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \mapsto \frac{-1}{\sin^2 x}$ |
| f est dérivable sur | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ | $]k\pi;\pi+k\pi[$ |

## 3- Opérations et compositions

### a) Opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle K. On a :

| Fonction | $u+v$ | $au$ | $u\times v$ | $\frac{1}{v}$ | $\frac{u}{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Dérivée sur K | $u'+v'$ | $au'$ | $u'\times v+u\times v'$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| Conditions | | $a\in\mathbb{R}$ | | $v(x)\neq 0$ | $v(x)\neq 0$ |

### b) Composition

- Propriété

✍ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant u(K). La fonction $v\circ u$ est dérivable sur K et $\forall x\in K$ , $(v\circ u)'(x)=u'(x)\cdot v'(u(x))$.

- Conséquences

| Fonction | $u^n$ | $\sqrt{u}$ | $\cos u$ | $\sin u$ |
|---|---|---|---|---|
| Dérivée sur K | $nu'u^{n-1}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $-u'\sin u$ | $u'\cos u$ |
| Conditions | $n\in\mathbb{N}^*$ | $u(x)>0$ | | |

☑ Exemples

1. Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité K de la fonction f et calculer sa dérivée.

1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ c) $f(x)=\dfrac{2x-5}{3-4x}$

2) $f(x)=(x-3)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ d) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-4}$

2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous, sur l'intervalle I.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $]0;+\infty[$ c) $h(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ I=□

b) $g(x)=\left(x^3-x-5\right)^8$ $I=$□ d) $t(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x^2-1\right)$ $I=$□

## 4- Dérivées et sens de variation

*a) Variations d'une fonction*

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle K.

- Si f' est strictement positive sur K (sauf en des éléments isolés où elle s'annule) alors f est strictement croissante sur K.
- Si f' est strictement négative sur K (sauf en des éléments isolés où elle s'annule) alors f strictement décroissante sur K.
- Si f' est nulle sur K, alors f est constante sur K.

*b) Extremums relatifs*

Propriété

Soit f une dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et $x_0$ un élément de $]a;b[$.

Si $f'$ s'annule et change de signe en $x_0$, alors f admet un extremum relatif en $x_0$

☑ Exemple

On considère la fonction numérique f définie par f(x) = $x^3$. Etudier le sens de variation de f.

## 5- Dérivée de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Propriété

✍ Si f est une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K, telle que f' ne s'annule pas sur K, alors f réalise une bijection et sa bijection réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur f(K) et on a : pour tout élément a de f(K), $\left(f^{-1}\right)'(a)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]}$

**En pratique**, pour calculer le nombre dérivé de la bijection réciproque de f au point a on peut procéder ainsi :

- Déterminer $f^{-1}(a)$ (pour cela on peut être amené à résoudre l'équation f(x) = a).
- Calculer $f'(b)\left(avec\ b=f^{-1}(a)\right)$ et vérifier que $f'(b)\neq 0$
- Alors on peut conclure que $\left(f^{-1}\right)'(a)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]}$

Remarque

- *Si la dérivée d'une fonction bijective f s'annule en b alors sa bijection réciproque $f^{-1}$ n'est pas dérivable en f(b).*

- *Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de deux bijections réciproques, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation y = x).*

☑ Exemples

*Exemple 1*

On considère la fonction $f : \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[ \to \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

$$x \mapsto \frac{x-2}{2x+1}$$

1- Montrer que f est une bijection.
2- a) Calculer $f(0)$

   b) Sans expliciter la bijection réciproque $f^{-1}$ de la fonction f, calculer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

3- Expliciter $f^{-1}$ et vérifier le résultat de la question 2.b).

*Exemple 2*

On considère la fonction $f : \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to [1;+\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

1- Démontrer que f est une bijection.
2- Calculer le nombre dérivé en 2 de la bijection réciproque $f^{-1}$ de f.
3- Peut-on calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$ ?

### 6- Dérivées successives

Définition

✍ f est une fonction dérivable sur un intervalle K. si f' est dérivable sur K, sa dérivée est appelée dérivée seconde de f, notée f'' ou $f^{(2)}$.
f' est aussi appelée dérivée première de f, on la note $f^{(1)}$.

$f^{(1)} = f'$ ; $f^{(2)} = f''$ on note $f^{(1)} = \frac{df}{dx}$ ; $f^{(2)} = \frac{d^2f}{dx^2}$ …

# C- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

## I. PROPRIETES GEOMETRIQUES D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

### 1- Parité d'une fonction

Définitions

✍ Soit f une fonction d'ensemble de définition $D_f$.

- f est paire si et seulement si, pour tout *x* élément de $D_f$, $-x$ élément de $D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si et seulement si, pour tout *x* élément de $D_f$, $-x$ élément de $D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Propriétés

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
- La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

☑ Exemples

Etudier la parité de chacune des fonctions numériques ci-dessous.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{3x}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2-3}{|x|}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

## 2- Eléments de symétrie

### a- Axe de symétrie

Méthode

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O; I; J), (C) la représentation graphique d'une fonction f. Pour montrer que la droite (D) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de (C) on peut utiliser l'une des méthodes suivantes:

- Méthode 1

On détermine la fonction g définie par $g(x)=f(x+a)$ puis on démontre que la fonction g est paire.

- Méthode 2

- On vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a, c'est-à-dire, pour tout x élément de $\mathbb{R}$ , $a-x\in D_f \Leftrightarrow a+x\in D_f$ .
- On vérifie que : pour tout nombre réel x tel que $a+x\in D_f$, $f(a+x)=f(a-x)$.

### b- Centre de symétrie

Méthode

Le plan est muni d'un repère (O; I; J). (C) la représentation graphique d'une fonction f. Pour montrer que le point A (a ; b) est un centre de symétrie de (C), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Méthode 1

On détermine la fonction h définie par $h(x)=f(x+a)-b$ puis on montre que h est impaire.

- Méthode 2

- On vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a, c'est-à-dire : pour tout x élément de $\mathbb{R}$ , $a-x\in D_f \Leftrightarrow a+x\in D_f$
- On vérifie que : pour tout nombre réel x tel que $a-x\in D_f$, $\dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2}=b$

☑ Exemples

**1)** Montrer que la droite (D) d'équation $x=3$ est un axe de symétrie pour la représentation graphique de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$ dans le repère orthogonal (O; I; J).

**2)** Le plan est muni d'un repère (O; I; J). Montrer que le point $E(3;4)$ est un centre de symétrie de la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}$..

# II. BRANCHES INFINIES D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

## 1- Asymptotes

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) et (C) la représentation graphique d'une fonction numérique f.

### a- Asymptote verticale

- La droite $(\Delta)$ d'équation x = a est une asymptote verticale à (C) si $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}}|f(x)|=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}}|f(x)|=+\infty$ .

### b- Asymptote horizontale

- La droite (D) d'équation y = b est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ( respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ )

### c- Asymptote oblique

- La droite (L) d'équation y = ax + b (avec a ≠ 0) est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ( respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ )

☑ Exemples

**1)** f est la fonction définie par $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ de représentation graphique (C).

a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

b) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe (C).

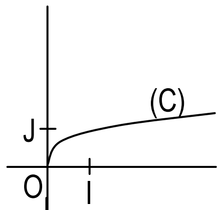
**2)** Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{2x-1}{4x+3}$ de représentation graphique (C').

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

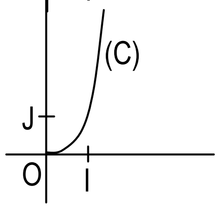
## 2- Branches paraboliques

f est la fonction de courbe représentative (C) dans un repère (O, I, J).

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OI) *(l'axe des abscisses)*.




- Si $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=+\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) *(l'axe des ordonnées).*




***NB** : $\infty$ représente $-\infty$ ou $+\infty$*

☑ Exemples

Etudier les branches infinies de chacune des représentations graphiques (C) et (C') respectives des fonctions f et g définies par :

a) $f(x)=\sqrt{x}$

b) $g(x)=\dfrac{3}{4}x^5+7$

# III. EXEMPLES D'ETUDES DE FONCTIONS

## 1- Variations d'une fonction

**En général**, étudier les variations d'une fonction f consiste à adopter la démarche suivante :

- Ensemble de définition
- Ensemble d'étude
  - Parité
  - Périodicité
- Limites aux bornes de l'ensemble d'étude
- Dérivée
  - Détermination de f'
  - Signe de f' et sens de variation de f
- Tableau de variation

## 2- Représentation graphique (C)

- Construction de (C)
  - Table de valeurs
  - Choix de la fenêtre, du repère et des unités graphiques.
- Points et droites remarquables
  - Asymptotes
  - Tangentes

## 3- Application

f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

**1.**

a) Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Etudier la parité de la fonction f.

c) En déduire que l'on peut réduire l'ensemble d'étude et que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.

**2.** Etude de f sur $]-\infty;0]$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite ($\Delta$) d'équation y = x est asymptote à (C).

c) Calculer la dérivée f ' de f.

d) Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

**3.** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse – 1.

**4.** En utilisant les propriétés géométriques d'une fonction impaire, représenter (C) sur Df.

**5.** a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;0]$ vers un intervalle K à préciser.

b) Déterminer l'ensemble sur lequel sa bijection réciproque $f^{-1}$ est dérivable.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

**6.** Représenter dans le même repère (C) et (C') la courbe représentative de $f^{-1}$.

# EXERCICES

## *Limites de fonctions composées*

Calculer les limites de f en a

**1-** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2}}$ ; $a=+\infty$ ; $a=0$

**2-** $f(x)=\sqrt{4x+2-\dfrac{1}{x}}$ ; $a=+\infty$

**3-** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-2x-3}}$ ; $a=-\infty$ ; $a=+\infty$ ; a=4

**4-** $f(x)=\left(2x-1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ ; $a=+\infty$ ; $a=-\infty$ ; $a=0$

**5-** $f(x)=\dfrac{1}{\left(|x|-1\right)^3}$ ; $a=1$ ; $a=-1$ ; $a=-\infty$

**6-** $f(x)=\cos\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ; $a=+\infty$

**7-** $f(x)=\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos X}$ ; $a=0$

## *Limites et formes indéterminées*

Calculer les limites suivantes:

**8-** *a)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{x^2-x}$ ; *b)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-4}{x^2-4}$ ; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ ; *d)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$

*e)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$

**9-** *a)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)\right]$ ; *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$ ; *c)* $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$

*d)* $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

**10-** *a)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x+1\right)$ ; *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-3x\right)$ ; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)$

**11-** *a)* $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ ; *b)* $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\cos x+1}{x+\pi}$ ; *c)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$ ; *d)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

**12-** *a)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+2}-2x}{2x-3}$ ; *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}$ ; *c)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$ ; *d)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ ;

*e)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}$

## *Prolongement par continuité*

**13-** Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ensuite dire si l'on peut prolonger f par continuité au point a indiqué; si oui préciser le prolongement.

*a)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$ ; $a=0$

*b)* $f(x)=\dfrac{-2x+6}{x^2-5x+6}$ ; $a=3$

*c)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3}$ ; $a=3$

*d)* $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x^2-3x+1}$ ; $a=1$

## *Bijections et calcul approché des zéros d'une fonction*

**14-** g est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^3+3x^2-8$

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$

b) Justifier que $-3<\alpha<-2$.

c) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.

c) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$ .

**15-** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-1$.

a) Etudier les variations de f.

b) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$ ; montrer que h est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle K à déterminer.

c) Déterminer le sens de variation de $h^{-1}$, la bijection réciproque de h puis dresser son tableau de variation.

d) Montrer que l'équation $(E): x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$.

e) Calculer f(1;5) et f(1;6) puis donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.

f) Déterminer le signe de f(x).

***16-*** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^3-3x-3$

1. Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.
2. Calculer $g(]-\infty;1[)$ et $g(]1;+\infty[)$
3. a) Montrer que l'équation $x\in\mathbb{R}$ ; $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$.
   b) Calculer g(2) et g(2,1) et déduire un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.
4. Démontrer que $\begin{cases}\forall x\in]-\infty;\alpha[; & g(x)<0\\ \forall x\in]\alpha;+\infty[; & g(x)>0\end{cases}$

## *Dérivation*

**17-** Soit la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x)=3x^2-8 & \text{si } x\in]-\infty;-1] \\ f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-3} & \text{si } x\in]-1;3[\cup]3;+\infty[ \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en -1.

**18-** On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x-8}{2x-8} \quad ; & \text{si } x\in ]\text{-}\infty;0[ \\ h(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} \quad ; & \text{si } x\in[0;4] \\ h(x)=x-5+\dfrac{4}{x} \quad ; & \text{si } x\in ]4;+\infty[ \end{cases}$$

a) Justifier que h est continue en 0 puis en 4.
b) Etudier la dérivabilité de h en 0 puis en 4.

**19-** Etudier la dérivabilité de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{x-3}{3-|x|}$ en 0 puis déterminer la tangente à gauche et la tangente à droite en 0 à la courbe de g dans le plan muni d'un repère.

## *Fonction dérivée*

**20-** Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de la fonction f.

*a)* $f(x)=(2x-1)^3$ ; *b)* $f(x)=\sqrt{3x+5}$ ; *c)* $\text{f}(x)=\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^4$ ; *d)* $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ ;

*e)* f(x) = $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ; *f)* $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ; g) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-1}$

**21-** On considère la fonction $f:\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\to[0;1]$
$x\mapsto\cos x$

a) Démontrer que f est une bijection.
b) Calculer le nombre dérivé en $\dfrac{1}{2}$ de la fonction réciproque $f^{-1}$.
c) Construire la représentation graphique (C') de $f^{-1}$ et la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I, J).

**22-** Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

a) Démontrer que g réalise une bijection de $]0;1[$ sur un ensemble à déterminer.
b) Préciser les éléments caractéristiques de la bijection réciproque notée $g^{-1}$, puis dresser son tableau de variation.
c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

# PROBLEMES DE SYNTHESE

## Problème 1

*Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.*

**PARTIE A**

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$, de représentation graphique ($C_f$) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

1- a) Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)$ puis interpréter graphiquement si possible les résultats.

2- a) Démontrer que $\forall x\in D_f$ ; $f(x)=x+1-\dfrac{3}{x+2}$

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à ($C_f$).

c) Etudier la position de ($C_f$) par rapport à (D).

3- Montrer que le point A (-2;-1) est un centre de symétrie pour ($C_f$).

4- a) Montrer que $\forall x\in D_f$ ; $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à ($C_f$) au point d'abscisse -1.

**PARTIE B**

On considère la fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | $-\infty$ | $\nearrow$ $+\infty$ | \|\| | $-\infty$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

1- Préciser $D_g$ l'ensemble de définition de g.

2- a) Sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$, montrer que l'équation $g(x)=0$ admet respectivement une unique solution $\alpha_1$ et $\alpha_2$.

b) Déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3- a) Démontrer que g réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;-2[$ vers un intervalle K à préciser.

b) Soit $\varphi$ cette bijection. Déterminer le sens de variation et dresser le tableau de variation de $\varphi^{-1}$ la bijection réciproque de $\varphi$.

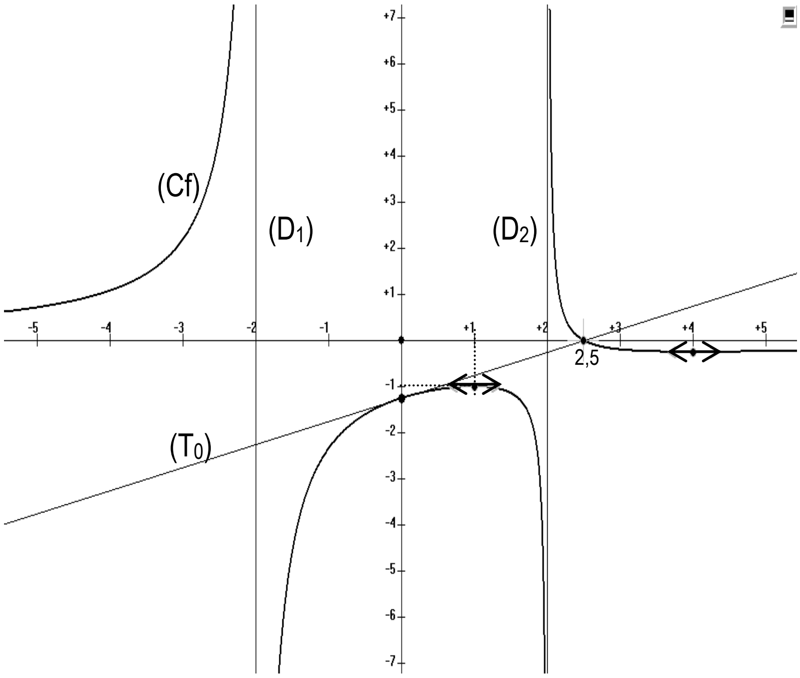
## Problème 2

1- En observant le graphique ci-dessous représentant la courbe ($C_f$) d'une fonction:

a) Donner l'ensemble de définition de f

b) Préciser les asymptotes (noms et équations) à la courbe (Cf) représentant f.

c) Préciser : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)$




2- $(T_0)$ est la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse 0. Les abscisses des points d'intersection de (Cf) et $(T_0)$ sont 0 et $\frac{5}{2}$.

a) Préciser la position relative de $(C_f)$ par rapport à $(T_0)$.
b) Donner le sens de variation de f.
c) En déduire le tableau de variation de f.
d) Préciser f ' (1) et f ' (4).

## Problème 3

On considère les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ de courbe représentatives respectives (C) et (C') dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'unité étant le centimètre, on prendra OI = 3 et OJ = 1.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (C).
   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

3- a) Montrer que pour tout nombre réel non nul x, $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}$
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

4- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$
   b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$ puis justifier que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$

5- a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle K à préciser.
   b) Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$. Donner le sens de variation de $h^{-1}$ la bijection réciproque de h.

6- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse 1.
   b) Montrer que (C) possède une tangente (T') parallèle à (D) et donner une équation de (T').

7- Contruire (C), (D) et (T)

8- Montrer que (C') est le symétrique de (C) par rapport au point O et en déduire la construction de (C').

## Problème 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O; I; J) ; (unité : 1 Cm). On note (C) la courbe représentative de la fonction f.

### PARTIE A

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

1- a) Déterminer Df l'ensemble de définition de la fonction f.
   b) Calculer les limites aux bornes de Df puis interpréter graphiquement ces résultats.
2- Déterminer a et b pour que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 ait pour équation $y=4x+3$.

### PARTIE B

On suppose que $a=4$ et $b=3$

1- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $f(x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}$
2- Calculer $f'(x)$
3- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4- Démontrer que l'équation $f(x)=4$ admet une solution unique dans $[1;+\infty[$
5- Démontrer que le point $A(0;3)$ est un centre de symétrique de (C)
6- Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.
   a) Montrer que h est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle K à préciser.
   b) Dresser le tableau de variation de $h^{-1}$ la bijection réciproque de h.
7- Construire (C), son asymptote et $(C^{-1})$ (représentation graphique de $h^{-1}$)

## Problème 5

### PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$.

1- Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2- Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
3- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $g(x)<0$

### PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$, (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) unité 2cm.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (interpréter le résultat) et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $f'(x)=g(x)$
3- Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4- a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à ( C) en $-\infty$
   b) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (D).
5- Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse de 0.
6- Tracer (D), (T), l'autre asymptote et (C).
7- a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle K à préciser.
   b) Sans expliciter $f^{-1}$, donner le sens de variation de $f^{-1}$ la bijection réciproque de f puis dresser son tableau de variation.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right)$

d) Expliciter $f^{-1}$ puis vérifier $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right)$

e) Représenter $\left(C^{-1}\right)$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans le même repère.

## Problème 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Le but de ce probleme est d'étudier la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^3+x^2+x-5}{x^2}$ de représentation graphique (C).

**A- Etude de la fonction g définie par $g(x)=x^3-x+10$.**

1- Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

2- a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ justifier $-3<\alpha<-2$

b) Calculer $g(-2,4)$ et $g(-2,3)$ puis en déduire un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.

3- Montrer que $\begin{cases}\forall x\in\left]-\infty;\alpha\right[; & g(x)<0\\ \forall x\in\left]\alpha;+\infty\right[; & g(x)>0\end{cases}$

**B- Etude de f.**

1- a) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f.

b) Calculer: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et interpréter les résultats si possible.

2- a) Justifier que $\forall\in Df;\quad f(x)=x+1+\frac{x-5}{x^2}$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C).

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

3- Montrer que $\forall x\in D_f$ ; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ où h est une fonction à préciser.

4- a) Déduire, des questions A-3 et B-3, le sens de variation de f

b) dresser le tableau de variation de f.

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.

6- a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0;+\infty\right[$ vers un intervalle K à déterminer.

b) Soit $f^{-1}$ la bijection réciproque de la restriction de f à $\left]0;+\infty\right[$. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{9}{4}\right)$

c) Dresser le tableau de variation de $f^{-1}$

7- Construire dans le repère (O; I; J); (C); (T); les asymptotes à (C) et la courbe (C') de la bijection réciproque $f^{-1}$.

## Problème 7

### PARTIE A

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ ; (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J) d'unité : 4 cm.

1- Déterminer $D_f$ et étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. Interpréter graphiquement les résultats.

2- En admettant que f est dérivable sur $\left]-1;1\right[$, montrer que $f'(x)=\frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ où p(x) est un polynôme à déterminer.

3- Etudier le signe de f '(x) et en déduire le tableau de variation de f.
4- Construire la courbe (Cf) en précisant ses tangentes ou demi-tangentes aux points d'abscisses -1; 0 ; 0,5 et 1.

**PARTIE B**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = (x+1)\sqrt{|1-x^2|}$

1- Etudier la dérivabilité de g en -1 et en 1.
2- Démontrer que: $\forall x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$ ; $g'(x) = \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ et que $\forall x \in ]-1;1[$ $g'(x) = f'(x)$ ; $f'(x)$ étant la dérivée de la fonction f de la partie A. En déduire les variations de g et dresser son tableau de variation en précisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3- Démontrer que la courbe (Cg) de g admet une branche infinie en $-\infty$ et en $+\infty$ que l'on précisera.

## Problème 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-2}{2x^2-2}$ de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

**C- Etude de la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x + 4$.**

4- Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
5- a) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]-3;-2[$
   b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,1.
6- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**D- Etude de f.**

8- Déterminer l'ensemble de définition de f.
9- Calculer: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
10- a) Préciser les asymptotes horizontales et verticales à (C) si elles existent.
   b) Montrer que la droite $(D): y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à (C).
11- a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $\forall x \in D_f ; f(x) = ax + \frac{bx+c}{2x^2-2}$
   b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).
12- Montrer que $\forall x \in D_f$ ; $f'(x) = h(x) \times g(x)$ où h est une fonction à préciser.
13- Déduire de la partie A, le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
14- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.
15- Tracer dans le repère (O; I; J); (C); (T); les asymptotes à (C) et préciser les tangentes en 0 et en $\alpha$ à (C). (On prendra $\alpha = -2,2$).

# CHAPITRE II : PRIMITIVES ET FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## A. PRIMITIVES

### I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1. Définition
2. Propriétés

### II. CALCULS DE PRIMITIVES

1. Primitives des fonctions élémentaires
2. Opérations et composition
3. Exemples de détermination de primitives

## B. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

### I. DEFINITION – PROPRIETES

1. Définition
2. Propriétés
   a) Conséquences immédiates de la définition
   b) Représentation graphique et conséquences
   c) Propriétés algébriques
   d) Limites de référence
3. Equations et inéquations

### II. DERIVEES ET PRIMITIVES

1. Dérivée de $\ln \circ u$
2. Dérivée de $\ln \circ |u|$
3. Primitives de $\frac{u'}{u}$

### III. LOGARITHME DECIMAL

1. Définitions
2. Propriétés

### IV. EXEMPLE D'ETUDE DE FONCTION

# PRIMITIVES ET FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

# A. PRIMITIVES

## I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

Activité Compléter :
La fonction f est la dérivée de la fonction F sur K.

- $x \mapsto 7$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto$ ....................... sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto 6x$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto$ ....................... sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sin x$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto$ ....................... sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto$ ....................... sur $]0;+\infty[$

On dit que la fonction F est ..........................................................................................................
.............................................................................................................................................

### 1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur K Toute fonction F dérivable sur K Telle que $\forall x \in K,\ F'(x)=f(x)$.

### 2. Propriétés

a) Condition d'existence d'une primitive
*Propriété*

Toute fonction continue sur un intervalle K, admet une primitive sur K.

b) familles des primitives d'une fonction
*Propriété*

Soit F une primitive de f sur un intervalle K, alors :

- Pour tout réel c, la fonction G : $x \mapsto F(x)+c$ est aussi une primitive de f sur K.
- Toute primitive de f sur K est de la forme $F(x)+c$.

c) La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale.
*Propriété*

f est une fonction continue sur un intervalle K, $x_0$ un nombre réel de K et $y_0$ un nombre réel quelconque. Il existe une et une seule primitive F de la fonction f sur l'intervalle K qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$ $(F(x_0)=y_o)$.

☑ Exemples

**1)** Justifier que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle K et en déduire les primitives de f dans chaque cas.

a) $h(x)= x^4+2x^3+1$, $\quad H(x)=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^3+x$, $\quad K=\mathbb{R}$

b) $h(x)= \sin(5x)$, $\quad H(x) = -\dfrac{1}{5}\sin(5x)$, $\quad K=\mathbb{R}$

c) $h(x)= 5x^4+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $\quad H(x)= x^5+3\sqrt{x}+7$, $\quad K=]0;+\infty[$.

**2)** Dans chacun des cas précédents, déterminer la primitive F de la fonction h prenant la valeur $y_0$ en $x_0$

a) $y_o = -3$, $\quad x_o = 0$

b) $y_o = -\frac{1}{5}$, $\quad x_o = \frac{\pi}{5}$

c) $y_o = 12$, $\quad x_o = 1$

# II. CALCUL DE PRIMITIVES

## 1. Primitives des fonctions élémentaires

| Fonction | Primitives sur K | Sur intervalle K |
|---|---|---|
| $x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$ | $x \mapsto ax + C \quad (C \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x} + C$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \neq 1)$ | $x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto x^r; \quad (r \in \mathbb{Q}; r \neq -1)$ | $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ | $[0;+\infty[$ si $r \geq 0$<br>$]0;+\infty[$ si $r < 0$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto -\cos(x) + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto \sin(x) + C$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $x \mapsto \tan(x) + C$ | $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ \quad (k \in \mathbb{Z})$ |

## 2. Opérations et composition

a) Propriétés

Propriété 1

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle K, alors pour tous nombres réels $a$ et $b$, la fonction $(aF + bG)$ est une primitive sur K de la fonction $(af + bg)$

Propriété 2

- f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle L telle que f(K) soit inclus dans L, f ' la dérivée de la fonction f sur K et g ' la dérivée de g sur L. $g \circ f$ est dérivable sur K, et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ donc $g \circ f$ est une primitive sur K de $(g' \circ f) \times f'$

b) Tableau récapitulatif

| Si f est de la forme … | Alors une primitive de f sur K est : | Condition |
|---|---|---|
| $au'$ | $au$ | $a \in \mathbb{R}^*$ |
| $u' + v'$ | $u + v$ | |
| $u' \times u^n$ | $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ | $n \in \mathbb{N}^*$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{u'}{u^n}$ | $-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ | $n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}, u\neq 0$ |
| $u'\times u^r$ | $\dfrac{1}{r+1}u^{r+1}$ | $r\in \mathbb{Q}^*\setminus\{-1\},\ u>0$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | $u>0$ |
| $u'\sin u$ | $-\cos u$ | |
| $u'\cos u$ | $\sin u$ | |

☑ Exemples de détermination de primitives

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle K considéré

**Exemple 1**

a) $f(x)=4x^2-5x+\dfrac{1}{x^2}$ K= $]0;+\infty[$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sin x$ K= $]0;+\infty[$

c) $f(x)=x\left(3x^2+1\right)^4$ K= $\mathbb{R}$

d) $f(x)=\cos x(1-\sin^2 x)$ K= $\mathbb{R}$

e) $f(x)=2\sin(3x-5)$ K= $\mathbb{R}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ K= $\mathbb{R}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$ K= $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

**Exemple 2**

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$ K= $]0;+\infty[$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$ K= $]1;+\infty[$ (on déterminera les réels a et b tels que $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$)

c) $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$ K= $\mathbb{R}$

d) $f(x)=\sin^2 x$ K= $\mathbb{R}$

e) $f(x)=\sin^4 x$ K= $\mathbb{R}$

f) $f(x)=\cos^5 x$ K= $\mathbb{R}$

# B. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## II. DEFINITION – PROPRIETES

### 1. Définition

✍ La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

Notation :
La fonction logarithme est notée ln. Le logarithme népérien de x est noté ln(x) ou lnx.

## 2. Propriétés

### a) Conséquences immédiates de la définition

- Caractérisation de la fonction ln.

Propriété 1

✍ La fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $\forall x \in ]0;+\infty[;\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ avec ln1=0.

Propriété 2

✍ La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Conséquences

✍ Pour tous réels a et b strictement positifs on a : $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$ et
$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

***Remarque***

*a est un nombre réel strictement positif* $a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$ et $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$

- Le nombre réel e

Activité :

Démontrer que l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]2;3[$ et donner une valeur approchée d'ordre 2 de la solution.

Notation

On note e l'unique nombre réel tel que $\ln e = 1$. On a $e \approx 2{,}718$

Remarque : La notation e a été donné par Euler qui démontra que ce nombre est irrationnel. e est appelé base du logarithme népérien.

- Ensemble de définition de $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$

Propriété

✍ Soit u une fonction d'ensemble de définition $D_u$ et x un nombre réel.

$x \in D_{\ln \circ u} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) > 0$ ($D_{\ln \circ u}$ l'ensemble de définition de la fonction $\ln \circ u$ )

$x \in D_{\ln \circ |u|} \Leftrightarrow x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$ ($D_{\ln \circ |u|}$ l'ensemble de définition de la fonction $\ln \circ |u|$ )

### b) Représentation graphique et conséquences

Activité :

Compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice.

| x | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 1 | 1,5 | 2 | e | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lnx | | | | | | | | | | | |

Dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1 cm), représenter la courbe de la fonction ln notée ($C_{\ln}$).
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe ($C_{\ln}$) au point d'abscisse 1 et étudier la position relative de ($C_{\ln}$) par rapport à (T).

Conséquences :

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- La droite (OJ) (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe ($C_{\ln}$).

- $(C_{\ln})$ admet une branche parabolique de direction (OI) d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

c) Propriétés algébriques

Propriété fondamentale

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Conséquences

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, tout nombre rationnel r on a :

(1) $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$ (2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

(3) $\ln(a^r) = r\ln a$ (En particulier pour $r = \dfrac{1}{2}$, $\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$) ; $\ln e^r = r$

d) Limites de référence

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

## 3. Equations et inéquations

☑ Exemples

**1)** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

a) $f(x) = \ln(2x-6)$ d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

b) $f(x) = \ln(-x+3)$ e) $f(x) = \ln|-x+3|$

c) $f(x) = \ln(-2x^2+3x+2)$ f) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

**2)** Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2 + 5x\ln x)$ (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \dfrac{\ln x}{x-1}\right)$

**3)** Soit f la fonction définie de ℝ vers ℝ par $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de f et calculer les limites aux bornes de $D_f$

**4)** Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = \ln\dfrac{3}{4} + \ln\dfrac{8}{3} - \ln 2^3$ $B = \ln 7^{-3} + 2\ln 49$ $C = 4\ln 25 - 2\ln\sqrt{5}$

**5)** Résoudre dans ℝ chacune des équations suivantes :

$(E_1): \ln(2x) = \ln(x^2-1)$ $(E_2): \ln(x) = -3$ $(E_3): \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1$

**6)** Résoudre dans ℝ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : \ln(3x-2) \leq \ln(x-3)$ $\qquad$ $(I_2) : \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) < 0$

($I_3$) Etudier le signe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

## III. DERIVEES ET PRIMITIVES

### 1. Dérivée de $\ln \circ u$

Propriété

✍ Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur K et on a : $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$

### 2. Dérivée de $\ln \circ |u|$

Propriété

✍ Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle K, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur K et on a : $(\ln \circ |u|)' = \dfrac{u'}{u}$

### 3. Primitives de $\dfrac{u'}{u}$

Propriété

✍ u est une fonction dérivable sur un intervalle K, ne s'annulant pas sur K, alors , une primitive sur K de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction $\ln|u|$.

- Cette primitive est $\ln(u)$ si la fonction u est strictement positive sur K..
- Cette primitive est $\ln(-u)$ si la fonction u est strictement négative sur K.

☑ Exemples

**1)** Déterminer la dérivée de la fonction f dans chaque cas (on précisera l'ensemble sur lequel f est dérivable)

a) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c) $f(x) = \ln(\dfrac{x+1}{x-1})$

d) $f(x) = \ln|x^2 + 2x + 1|$

e) $f(x) = \ln|x^2 - 4|$

f) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

**2)** Déterminer une primitive sur K de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad$ $K = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ $\qquad$ $K = ]-1;1[$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\qquad$ $K = ]1;+\infty[$

## IV. FONCTION LOGARITHME DECIMAL

Définition

✍ La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

***Remarque*** *:*
*La fonction logarithme décimal a les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien.*

## V. EXEMPLE D'ETUDE DE FONCTION

**PROBLEME**

**Partie A**

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de g.

**Partie B**

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln|x|}{x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 1 cm)

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Etudier la parité de f.
2. Etude de f sur $]0;+\infty[$
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement les résultats si possible.
   b) Montrer que $\forall x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   c) En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
4. a) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation y = x est une asymptote à (C).
   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à $(\Delta)$.
5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0;+\infty[$
   b) Donner un encadrement de $\alpha$ par des décimaux d'ordre 2.
6. a) Rechercher les points de (C) en lesquels la tangente est parallèle à $(\Delta)$.
   b) Soit (T) la tangente à (C) au point A d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de la droite (OI) et de la tangente (T).
7. Construire (T), (C) et les asymptotes à (C).

# EXERCICES

***Primitives***

**1.** Justifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur K et en déduire les primitives de f dans chaque cas :

a) $f(x)=2x^3-3x^2+\frac{1}{2}$ $\quad F(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x+2$ $\quad K=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ $\quad F(x)=x\sqrt{x}+2$ $\quad K=]0;+\infty[$

**2.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K.

a) $f(x)=x+\frac{4}{x^3}$ $\quad K=]0;+\infty[$

b) $f(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad K=]0;+\infty[$

c) $f(x)=4x^3-x+\frac{2}{x^3}$ $\quad K=]-\infty;0[$

d) $f(x)=(x+2)^3$ $\quad K=\mathbb{R}$

e) $f(x)=(1-2x)^{13}$ $\quad K=\mathbb{R}$

f) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)^3$ $\quad K=]0;+\infty[$

g) $f(x)=2x\left(1-x^2\right)^5$ $\quad K=\mathbb{R}$

h) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)^3}$ $\quad K=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

i) $f(x)=\frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+5\right)^2}$ $\quad K=]0;+\infty[$

j) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad K=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

k) $f(x)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2}}$ $\quad K=]0;+\infty[$

l) $f(x)=2x\cos\left(x^2\right)$ $\quad K=\mathbb{R}$

m) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\quad K=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

n) $f(x)=\frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$ $\quad K=]1;+\infty[$ (On déterminera les nombres réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$ )

o) $f(x)=\cos^3 x\sin^2 x$ $\quad K=\mathbb{R}$

p) $f(x)=\cos^2 x$ $\quad K=\mathbb{R}$

q) $f(x)=\cos^4 x$ $\quad K=\mathbb{R}$

r) $f(x)=\sin^5 x$ $\quad K=\mathbb{R}$

s) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ $\quad K=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

**3.** Soit la fonction $f:\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x\sqrt{3-2x}$ et la fonction $F:\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-2x}$

Trouver trois nombres réels a, b, c pour que la fonction F soit une primitive de f.

**4.** Trouver la primitive F sur K de la fonction f prenant la valeur $y_0$ en $x_0$

a) $f(x)=\dfrac{2}{(3-x)^3}$ $\quad x_0=0;\ y_0=0$ $\quad K=]-\infty;3[$

b) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ $\quad x_0=0;\ y_0=\sqrt{5}$ $\quad K=]-\infty;1[$

c) $f(x)=\sin x\cos^4 x$ $\quad x_0=\pi;\ y_0=0$ $\quad K=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ $\quad x_0=-\dfrac{\pi}{2};\ y_0=-1$ $\quad K=]-\infty;0[$

e) $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4};\ y_0=1$ $\quad K=]0;+\infty[$

## *Fonction logarithme népérien*

**5.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dans chaque cas.

a) $f(x)=\ln(x+2)$

b) $f(x)=\ln(-2x+7)$

c) $f(x)=\ln(x^2-4)$

d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$

e) $f(x)=\ln|x+3|$

f) $f(x)=\ln\left|\dfrac{2x+1}{x^2-9}\right|$

**6.** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to0}x^3\ln x$

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+2}{\ln x+4}$

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x+2}{\ln x+4}$

k) $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-4}\\ <}}\dfrac{\ln x+2}{\ln x+4}$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln x}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x\ln x}$

n) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

**7.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x+2)=0$

b) $\ln|2-5x|=1$

c) $\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(-2x-2)$

d) $\ln(5x+2)-\ln(x+2)=\ln(x-2)$

e) $\ln\left[3(x^2+x+3)\right]=3\ln(x+1)$

f) $\ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$

g) $\ln\left|\dfrac{1}{2}+x\right|=\ln|x|$

**8.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(3-2x)>-1$

b) $\ln(\ln x)>0$

c) $\ln|2x-1|<0$

d) $(1-\ln x)(3+\ln x)\geq 0$

e) $2\ln(x-1)\leq -1$

f) $\ln(-x^2-4x+5)+\ln(\frac{1}{8})>0$

**9.** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases}2\ln x+\ln y=7\\ 3\ln x-5\ln y=4\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y=-2\\ \ln x+\ln y=\ln 15\end{cases}$

**10.** Trouver à l'aide de la calculatrice le plus petit nombre entier naturel n tel que :

a) $n\ln 1{,}3 \geq 2$ b) $(1{,}05)^n \geq 2$

**11.** Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et calculer sa dérivée.

a) $f(x) = x - \ln x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{3x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(1 + 2x^2\right)$

d) $f(x) = x\ln(3 - x)$

e) $f(x) = x^2 + (x + 1)\ln x$

f) $f(x) = x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \ln\left|x^2 - 1\right|$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2(x + 2)}\right)$

i) $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1}$

j) $f(x) = x + \dfrac{2\ln|x|}{x}$

K) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

l) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|$

m) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**12.** Déterminer une primitive sur K de la fonction f dans chaque cas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $K = \left]-\infty ;0\right[$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ $K = \left]3;+\infty\right[$

c) $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$ $K = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $K = \left]0;+\infty\right[$

**13.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{3x + 1}{(2x + 1)^2}$

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : pour tout x distinct de $-\dfrac{1}{2}$,

$$f(x) = \frac{a}{(2x + 1)} + \frac{b}{(2x + 1)^2}$$

b) En déduire les primitives de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

c) Déterminer la primitive F de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ vérifiant $F(0) = 1$

## PROBLEMES DE SYNTHESE

**14.** **<u>Problème 1</u>**

**<u>Partie A</u>**

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$

1. Vérifier que $P(1) = 0$ puis déterminer les trois réels a, b et c tels que :

$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2. Déterminer le signe P(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

On considère la fonction numérique g continue sur $]0;+\infty[$ définie par $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1. a) Démontrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[,\ g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$.

   b) Etudier les variations de g. Calculer les limites de g aux bornes de $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

2. Déduire des questions précédentes, le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**Partie C**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x + \ln x}{x^2}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère oithononné (O, I, J), unité 2 cm.

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.

   b) Justifier que la droite (OJ) et la droite (D) d'équation $y = x + 1$ sont asymptotes à (C).

2. a) Montrer que la fonction h telle que $h(x) = x + \ln x$ est strictement monotone sur $]0;+\infty[$ et que h prend des valeurs négatives et positives.

   b) En déduire que (D) coupe (C) en unique point d'abscisse a vérifiant : $a + \ln a = 0$. Donner un encadrement de a d'amplitude 0,01.

   c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Déduire de la question 3. l'existence d'une valeur unique b telle que $f(b) = 0$. Montrer que $0,46 < b < 0,47$.

5. Construire (C).

## 15. Problème 2

On considère la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{4x + 9}{(2x + 3)^2}$ de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction f.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} f(x)$ et interpréter graphiquement chacune d'elle.

   c) Calculer la dérivée f ' de f et montrer que $\forall x \in D_f;\ f'(x) = \dfrac{-16(x+3)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(2x+3)^4}$.

   d) Déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Montrer que (C) admet un unique point d'intersection avec la droite (OI), trouver l'abscisse de ce point.

   b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

3. Construire (T), (C) et ses asymptotes.

4. a) Trouver deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in D_f;\ f(x) = \dfrac{a}{(2x+3)} + \dfrac{b}{(2x+3)^2}$

   b) En déduire une primitive de f sur $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

5. On considère la fonction $F : \left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(2x+3) - \frac{3}{4x+6}$$

   a) Calculer $F'(x)$
   b) Donner le sens de variation de F
   c) Montrer que F est une bijection.
   d) En déduire que l'équation F(x) = 0 admet une unique solution $\alpha$.
   e) Vérifier que $\alpha \in \left]-1;0\right[$ puis donner un encadrement de $\alpha$ d'ordre 1.

## 16. Problème 3

1. Soit la fonction numérique g définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.
   a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ vérifiant $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$.
   d) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x strictement positif.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln x\right)$.
   a) Donner les limiles de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Etudier le sens de varialion de f et dresser son tableau de variation *(on utilisera le résultat de la question 1.d)*
   c) En utilisant la question 1.c), montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 - 1}{\alpha}$. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,1 près.

3. Soit (C) la courbe représentative de f.
   a) Montrer que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote oblique à (C).
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de (C) et (D).
   c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

4. Construire (C) après avoir tracé (D) et les tangentes éventuelles.

## 17. Problème 4

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité 1cm)

**Partie A**

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

On appelle (Cg) la représentation graphique de la fonction g.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g puis calculer les limites de g aux bornes de Dg. En déduire une interprétation graphique.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
2. a) Montrer que Le point $A(1;1)$ est un centre de symétrie de (Cg)

b) Tracer (Cg) dans le repère (O, I, J).

3. Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout x élément de Dg; $g(x) = a + \frac{b}{x-1}$ Puis déterminer la primitive de g sur $]-\infty;1[$ qui s'annule en 0.

**Partie B**

Soit la fonction t définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $t(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ où ln désigne le logarithme Néperien

1. a) Déterminer l'ensemble de définition $D_t$ de t.
   b) Montrer que t est prolongeable par continuité en 0.

2. Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in ]0;e[\cup]e;+\infty[, & h(x) = t(x) \\ & h(0) = 1 \end{cases}$

   a) Montrer que $\frac{h(x)-1}{x} = \frac{2}{x(\ln(x)-1)}$

   b) Calculer $\lim_{x \to 0}\left(\frac{h(x)-1}{x}\right)$ puis en déduire que h n'est par dérivable en 0.

   c) Donner une interprétation graphique de la question b.

3. Calculer les limites de h aux bornes $E = [0;e[\cup]e;+\infty[$.

4. a) Montrer que : $h'(x) = \frac{-2}{x(\ln(x)-1)^2}$.

   b) Dresser Le tableau de variation de h.

5. a) Justifier que la restriction k de h à l'intervalle $[0;e[$ est une bijection de $[0;e[$ dans un intervalle L à déterminer.
   b) Donner le tableau de variation de $k^{-1}$ (la bijection réciproque de k). Justifier.
   c) Tracer dans le renere (O, I, J) (Ch) et (C) les représentations graphiques respectives de h et de $k^{-1}$. (On tracera (C) en bleu).

**18. Problème 5**

Partie A

Soit g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition Dg.
2. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
3. Etudier le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie B

La fonction f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1.
   Peut-on prolonger f par continuité en 1?
2. Montrer que $\forall x \in ]1;+\infty[; f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$.
3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. Calculer $f(2)$.
4. Jutifier que f détermine une bijection de $]1;+\infty[$ dans un intervalle K à préciser.

5. Etudier les variations de $f^{-1}$ la réciproque de f puis dresser son tableau de variation.
6. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$.
7. Construire (Cf) et $\left(Cf^{-1}\right)$ dans un même repère orthonormé (O,I,J). On donne OI = OJ = 2cm

**19. Problème 6**

**Partie A**

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x(x+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de g.
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x)$
3. Montrer que $\forall x \in D_g$ ; $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$
4. a) Etudier les variations de g puis établir son tableau de variations
   b) Calculer g(- 2) et g(1)
5. Déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$. On désigne par (Cf) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de f.
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
3. Montrer que : $\forall x \in D_f$ ; $f'(x) = g(x)$.
4. Etudier les variations de f puis établir son tableau de variations
5. a) Montrer que le point $A\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour (Cf).
   b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Cf) au point A.
   c) Déterminer les points P et R , points d'intersection de (T) respectivement avec les axes (OI) et (OJ).
6. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et en $+\infty$
   b) Préciser la position de (D) par rapport à (Cf) sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]0;+\infty[$
7. Tracer (T) et (Cf).

**Partie C**

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-1;0[$

1. Montrer que h est une bijection de $]-1;0[$ vers un intervalle K à préciser.
2. On appelle $h^{-1}$ la bijection réciproque de h
   a) Sans faire de calculs, établir le tableau de variations de $h^{-1}$
   b) Calculer $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(h^{-1}\right)'\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

# CHAPITRE III : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

## A. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

### I. DEFINITION – PROPRIETES

1. Définition
2. Conséquences immédiates
   a) Notation $e^x$
   b) Propriétés
   c) Représentation graphique et conséquences
3. Equations et inéquations.

### II. DERIVEES – PRIMITIVES – LIMITES DE REFERENCE

1. Dérivée de $e^x$
2. Dérivée de $\exp \circ u$
3. Primitives
4. Limites de référence

### III. EXEMPLE D'ETUDE DE FONCTION

## B. FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

### I. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

1. Définition
2. Remarque

### II. FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT a

1. Définition
2. Dérivée, primitives

### III. CROISSANCES COMPAREES DES FONCTIONS :

ln, exp, et $f_a$ $(a > 0)$

# FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

# A. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

## I. DEFINITION – PROPRIETES

### 1. Définition

✍ La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note exp. Ainsi $\begin{cases} y = \exp(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

### 2. Conséquences immédiates

a) Notation $e^x$

Pour tout nombre rationnel r, on a : $\ln e^r = r$ or $\ln[\exp(r)] = r$ donc $\ln[\exp(r)] = \ln e^r$ par conséquent $\exp(r) = e^r$. On convient d'étendre aux nombres réels cette écriture $\exp(r)$.

On note alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$

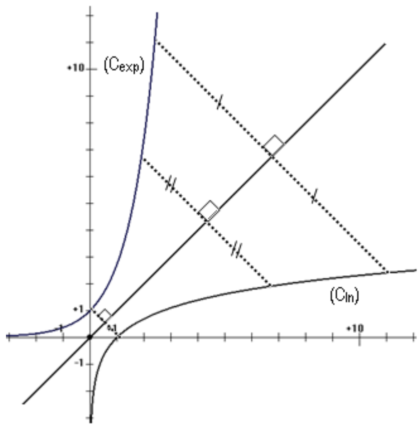
b) Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x \quad ; e^0 = 1 ; \; e^1 = e$
- Pour tous nombres réels a et b ; pour tout nombre rationnel r on a :

  $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b \qquad e^{a+b} = e^a \times e^b$

  $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b \qquad e^{-b} = \dfrac{1}{e^b} \qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad e^{ra} = \left(e^a\right)^r$
- Pour tout nombre réel x on a : $e^x > 0$

c) Représentation graphique et conséquences




- Représentation graphique

Dans le plan muni du repère orthonormé, les courbes représentatives ($C_{\ln}$) de la fonction ln et ($C_{\exp}$) de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

- Construction de la courbe ($C_{\exp}$)
- Droites remarquables de ($C_{\exp}$) et branche infinie.

Une asymptote horizontale : La droite (OI) d'équation y=0.

($C_{\exp}$) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

- Limites

$\bullet \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \; ; \qquad \bullet \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; ; \qquad \bullet \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

- Tableau de variation

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $(e^x)'$ | + |
| $e^x$ | 0 ↗ $+\infty$ |

### 3. Equations et inéquations

☑ Exemples

**1.** Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-2x)e^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}-1}$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+1}$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{x-2}=e^{2x+3}$ ; $e^{x-2}<e^{2x+3}$

b) $e^{3x-1}=3$ ; $e^{3x-1}\geq 3$

c) $e^{-x^{2}+2x+4}=-5$ ; $e^{-x^{2}+2x+4}<-5$ ; $e^{-x^{2}+2x+4}>-5$

d) $e^{2x}-3e^{x}+2=0$ ; $e^{2x}-3e^{x}+2<0$

e) $2(\ln x)^{2}-5\ln x+2=0$ ; $2(\ln x)^{2}-5\ln x>-2$

# II. DERIVEES – PRIMITIVES – LIMITES DE REFERENCE

## 1. Dérivée de $e^{x}$

Activité

On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln\circ\exp(x)=x$.

Calculer la dérivée de chaque membre de l'égalité ci-dessus et en déduire la dérivée exp'(x).

Propriété

✍ La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée.
On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\exp)'(x)=(e^{x})'=e^{x}$

## 2. Dérivée de la fonction $\exp\circ u$

Notation

La fonction $\exp\circ u$ se note $e^{u}$

Propriété

✍ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $e^{u}$ est dérivable sur K et on a : $\left(e^{u}\right)'=u'e^{u}$

## 3. Primitives

Propriété

✍ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $e^{u}$ est une primitive sur K de la fonction $u'e^{u}$.

4. Limites de référence

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ; • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ; • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ; • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

☑ Exemples

**1.** Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ci-dessous déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée f ' de la fonction f.

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = e^{\cos x}$

c) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^x - 1}$

**2.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = \sin x e^{\cos x}$

c) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{x^2+x+3}$

## III. EXEMPLE D'ETUDE DE FONCTION

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x - e^x - 1$. On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement si possible ces résultats.
   b) Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]1;2[$
   b) Donner une valeur approchée à $10^{-1}$ près de $\alpha$ .
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement cette limite.
4. Construire (C).

# B. FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

## I. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

1. Définition

✍ a est un nombre réel strictement positif, différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a, l'application $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$

## 2. Remarques

- *Pour tout nombre réel x,* $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. *Toute l'étude de* $a^x$ *repose sur cette transformation.*
- *Pour* $a = 1$, $\exp_1(x) = 1$ *d'où la fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante.*
- *Pour* $a = e$, $\exp_e(x) = e^x$ *d'où la fonction exponentielle népérienne est la fonction exponentielle de base e.*

# II. FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT $\alpha$

## 1. Définition

✍ $\alpha$ étant un nombre réel différent de 0, on appelle fonction puissance d'exposant réel $\alpha$, l'application : $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^\alpha$$

✍ Pour tout nombre réel strictement positif x, $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(\alpha \neq 0)$

## 2. Dérivée – Primitives

a) Dérivée

Propriétés

✍ La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

✍ Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors la fonction $u^\alpha$ est dérivable sur K et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

b) Primitives

Propriétés

✍ $\alpha$ étant un nombre réel différent de 0 et de -1.

- Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors une primitive sur K de la fonction $u'u^\alpha$ est la fonction $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

# III. CROISSANCES COMPAREES DES FONCTIONS : ln, exp, $f_\alpha$ $(\alpha > 0)$

Propriétés

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

☑ Exemples :

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^{10})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - \ln x)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^5 - \ln x + e^x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 e^x$

# EXERCICES

## *Limites*

**1.** Calculer limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)e^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)e^{x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{|3x-1|}$

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x}-e^{x^2}\right)$

K) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x}-e^{-x}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x}-e^{-x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$

## *Equations, inéquations, systèmes*

**2.** Résoudre les équations, les inéquations ou les systèmes suivants

a) $e^{2x-1}=e^{x}$ $\qquad e^{2x-1}\geq e^{x}$

b) $e^{5x}=e^{x^2}$ $\qquad e^{5x}<e^{x^2}$

c) $e^{x-3}=1$ $\qquad e^{x-3}\leq 1$

d) $\left(e^{-x}-2\right)\left(e^{-x}-\dfrac{1}{2}\right)=0$ $\qquad \left(e^{-x}-2\right)\left(e^{-x}-\dfrac{1}{2}\right)>0$

e) $e^{x^2-1}=-3$ $\qquad e^{x^2-1}<-3$ $\qquad e^{x^2-1}\geq -3$

f) $e^{x(x+1)}=1$ $\qquad e^{x(x+1)}<1$

g) $2e^{2x}-3e^{x}+1=0$ $\qquad 2e^{2x}-3e^{x}+1<0$

h) $3e^{6x}+5e^{3x}-2=0$ $\qquad 3e^{6x}+5e^{3x}-2>0$

i) $(\ln x)^2-\ln x-42=0$ $\qquad (\ln x)^2-\ln x-42\leq 0$

j) $e^{|x+1|}=2$ $\qquad e^{|x+1|}<2$

k) $\begin{cases} e^{x}-2e^{y}=-5 \\ 3e^{x}+e^{y}=13 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2e^{-x}=e^{y}+1 \\ 3e^{-x}+3=2e^{y} \end{cases}$

m) $\begin{cases} 5e^{x}-e^{y}=19 \\ e^{x+y}=30 \end{cases}$

## *Dérivées*

**3.** Calculer la dérivée de la fonction f dans chaque cas.

a) $f(x)=e^{x^2-x+1}$

b) $f(x)=e^{-x}+2$

c) $f(x)=3x^2-e^{x}$

g) $f(x)=\dfrac{e^{1-x}}{x^2+1}$

h) $f(x)=e^{\sin x}$

i) $f(x)=e^{1/x}$ pour $x\neq 0$

d) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-e^{-3x}$, pour $x \neq 0$

e) $f(x)=\left(x^2-3x\right)e^{x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

j) $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$

K) $f(x)=\ln\left(2x^2+e^{2x}\right)$

### *Primitives*

**4.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur K de la fonction f.

a) $f(x)=-2xe^{x^2}$ $\quad K=\mathbb{R}$

b) $f(x)=e^x+2x-1$ $\quad K=\mathbb{R}$

c) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ $\quad K=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad K=\left]-\infty;0\right[$

e) $f(x)=e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad K=\mathbb{R}$

f) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ $\quad K=\mathbb{R}$

**5.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{-2x}$. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

**6.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^x$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x)=(ax+b)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

### *Croissances comparées.*

**7.** Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^3\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x)^3$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-x}-x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-x}-x\right)$

## PROBLEMES DE SYNTHESE

**8. PROBLEME 1**

**Partie A**

1. Soit $g:\left[0;+\infty\right[\to\mathbb{R}$

$\qquad x\mapsto e^x-x-1$

 a) Montrer que pour tout $x>0,\ g'(x)>0$. En déduire le sens de variation de g sur $\left]0;+\infty\right[$.

 b) Calculer g(o) puis en déduire que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;\ g(x)>0$.

2. Soit la fonction définie par $h : [0;+\infty[ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (2-x)e^x - 1$$

a) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et que $\alpha > 1$.

c) Vérifier que $1{,}84 < \alpha < 1{,}85$

d) Préciser le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

1. Soit $f : [0;+\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 5 cm).

a) Justifier que $\forall x \in [0;+\infty[\,;\ e^x - x > 0$.

b) Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[\,;\ f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

d) Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[\,;\ f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

e) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[\,;\ f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{(e^x - x)}$.

b) En déduire suivant les valeurs de x, la position relative de (C) par rapport à la droite (D) d'équation y = x.

3. a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

c) Tracer avec soin (C) en faisant figurer sur le schéma, la droite $(\Delta) : y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

## 9. PROBLEME 2

**Partie A**

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ telle que $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$.
4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

**Partie B**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$. On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, où f ' désigne la dérivée de la fonction f, vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

Dresser le tableau de variation de f.

4. a) Démontrer l'égalité $f(\alpha)=\dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $h: x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right[$.

En déduire, à partir de l'encadrement de $\alpha$ obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $f(\alpha)$.

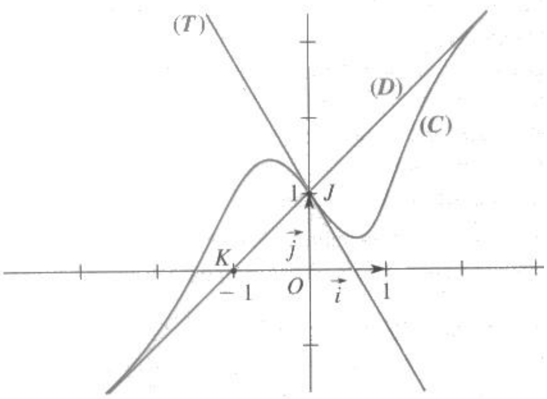
5. Démontrer que la droite (D), d'équation $y=2x-5$, est une asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D).

6. Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 2 cm).

## 10. PROBLEME 3

ETUDE GRAPHIQUE

On a représenté la courbe (C) dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0. On sait que le point $J(0;1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C), que (D) passe par les points $K(-1,0)$ et $J$, que la tangente (T) a pour équation $y=(1-e)x+1$




**Partie A** : Expression de *f*

1. Déterminer une équation de la droite (D).
2. On suppose qu'il existe deux réels *m* et *p* et une fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel *x*, $f(x)=mx+p+\varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.
   a) Déterminer *m* et *p*.
   b) Montrer que, pour tout réel *x*, on a $f(x)+f(-x)=2$
   c) En déduire que la fonction $\varphi$ est impaire puis que la fonction *f '*, dérivée de *f*, est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\varphi(x)=(ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
   Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a=-e$ et $b=0$

**Partie B**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+x-xe^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe (C) représente la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=1+\left(2x^2-1\right)e^{-x^2+1}$. Calculer $f'(0)$
   b) Vérifier que (T) est bien la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de la courbe (C) et de sa tangente (T).
2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur $[0;1]$.
   a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $6x-4x^3$.
   b) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $[0;1]$.
   c) Montrer que $0{,}51<\alpha<0{,}52$.
   Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en $\alpha$.

# CHAPITRE IV : CALCUL INTEGRAL

## I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1. Notion d'intégrale d'une fonction continue
   a) Définition
   b) Conséquences immédiates
   c) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

2. Propriétés de l'intégrale
   a) Relation de Chasles
   b) Linéarité
   c) Inégalité et intégration

## II. TECHNIQUES DE CALCUL D'INTEGRALES

1. Techniques de base
   a) Utilisation des primitives
   b) Intégration par parties

2. Intégration de fonctions particulières
   a) Fonction paire, impaire et périodiques
   b) Fonctions trigonométriques et fonctions rationnelles

## III. CALCUL DE GRANDEURS

1. Unité d'aire, unité graphique
2. Calcul d'aire

# CALCUL INTEGRAL

## I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

### 1. Notion d'intégrale d'une fonction continue

a) Définition

- f est une fonction numérique continue sur un intervalle K de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur K. a et b sont deux nombres réels appartenant à K.
- On appelle intégrale de a et b de la fonction f, le nombre réel $F(b) - F(a)$. Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$ on a donc $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit ***"intégrale ou somme de a à b de $f(x)dx$ "***
- $[F(x)]_a^b$ se lit ***" F pris entre a et b"***
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ , on peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre (sauf a et b) et écrire $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(s)ds$ ; on dit x est appelée variable muette.

b) Conséquences immédiates

Propriété

- f est une fonction continue sur un intervalle K, a et b des nombres réels quelconques de K.

$(1)\int_a^a f(x)dx = 0$ $\qquad$ $(2)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

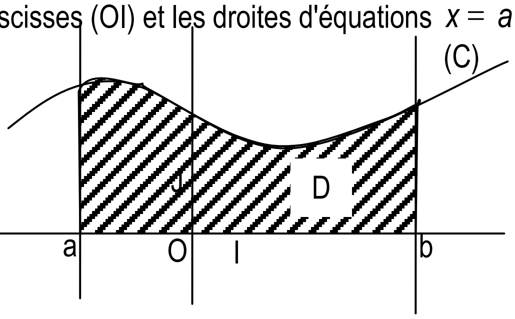
(3) La fonction : $\begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{array}$ est la primitive de la fonction f sur K qui s'annule en a.

c) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

Propriété

- Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle K, (C) sa courbe représentative, a et b deux éléments de K tels que a < b. $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire (en unité d'aire) de la partie D limitée par (C), l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$$M(x;y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a < x < b \\ 0 < y < f(x) \end{cases}$$




### 2. Propriétés de l'intégrale

a) Relation de Chasles

Propriété

- f est une fonction continue sur un intervalle K. a, b et c des réels quelconque de K.

On a $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$,

b) Linéarité

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, a et b deux nombres réels de K; $\alpha$ un nombre réel on a:

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

c) Inégalité et intégration

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
- Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

***Remarque***

*On peut avoir* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$, *sans que f soit positive sur* $[a;b]$

☑ Exemples

Calculer les intégrales suivantes

**1.** $a)\int_2^3 (x^2 + 1)dx \qquad b)\int_4^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad c)\int_o^1 e^{-t}\,dt \qquad d)\int_o^1 \sin(t)\,dt$

**2.** $a)\int_{-4}^4 |t^2 - 9|dt$

b) $\int_{-2}^3 f(t)dt$ avec f une fonction définie par $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;1\right], & f(x) = x + 2 \\ \forall x \in \left[1;+\infty\right[, & f(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$

**3.** $\int_3^4 \left(6t + \frac{7}{2\sqrt{t}}\right)dt$

# II. TECHNIQUES DE CALCUL D'INTEGRALES

## 1. Techniques de base

a) Utilisation des primitives.

Rappels

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle K, v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(K)$ et $\alpha$ un nombre réel différent de -1.

| Fonction | $\frac{u'}{u}$ | $u'e^u$ | $u'u^\alpha$ | $u' \times v' \circ u$ |
|---|---|---|---|---|
| Primitive | $\ln\lvert u\rvert$ | $e^U$ | $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$ | $v \circ u$ |
| Commentaires | $u \neq 0$ sur K | | $u > 0$ sur K | |

b) Intégration par parties

Propriété

✍ Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que les dérivées u' et v' sont continues sur $[a;b]$ On a : $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

## 2. Intégration de fonctions particulières

a) Fonction paire impaire et périodique

Propriété

✍ Soit f une fonction continue sur un intervalle K centré en 0. Pour tout a élément de K:

- Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- Si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

✍ Soit f f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. a est un nombre réel.

On a : $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

b) Fonctions trigonométriques et fonctions rationnelles

☑ Exemples

Calculer les intégrales suivantes.

**1.** $a)\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ $\quad b)\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ $\quad c)\int_0^4 xe^{x^2+2}dx$

$d)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)e^{(\tan x - x^2)}dx$ $\quad e)\int_0^4 (x-2)\left(x^2-4x+1\right)^3 dx$ $\quad f)\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$

$g)\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad h)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)dt$ $\quad i)\int_{-3}^{-2} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$

**2.** Utiliser une intégration par parties pour calculer chacune des intégrales ci-dessous.

$a)\int_1^e \ln t\,dt$ $\quad b)\int_1^e x\ln x\,dx$ $\quad c)\int_0^1 xe^x dx$

**3.** Utiliser deux intégrations par parties pour calculer chacune des intégrales ci-dessous.

$a)\int_0^1 x^2e^x dx$ $\quad b)\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin(3x)dx$

**4.** Calculer chacune des intégrales ci-dessous (On utilisera la parité de la fonction f de $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ ).

$a)\int_{-4}^{4} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$ $\quad b)\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

**5.** Calculer chacune des intégrales ci-dessous.

$a)\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4(t)dt$ $\quad b)\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)dx$ $\quad c)\int_0^{\pi} \sin^3(u)\cos^2(u)du$

**6.** Calculer l'intégrale ci-dessous

$$\int_{-1}^{1} \frac{3x^3-5x^2+2x-1}{(x-2)^2}dx$$

(On déterminera les nombres réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}$ )

# III. CALCUL DE GRANDEUR

## 1. Unité d'aire, unité graphique

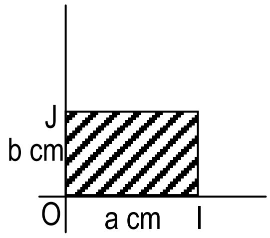
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

a) L'unité graphique

a et b sont deux nombres réels strictement positifs. Sur l'axe des abscisses (OI), prendre a cm pour unité. Sur l'axe des ordonnées (OJ), prendre b cm pour unité. a cm est l'unité graphique sur l'axe (OI) exprimée en cm.
b cm est l'unité graphique sur l'axe (OJ) exprimée en cm.

b) L'unité d'aire

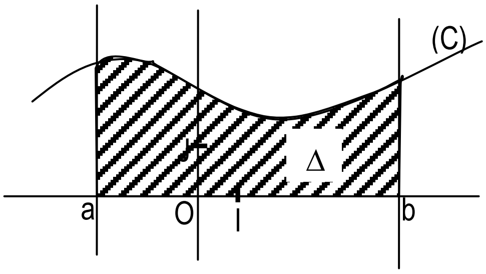
L'unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur le triangle OIJ. Elle est notée u.a.
L'unité d'aire s'exprime en cm², en mm², en m² … si l'unité graphique sur chaque axe est exprimée en cm, en mm, en m…




$1\ u.a = a \times b\ \text{cm}^2$

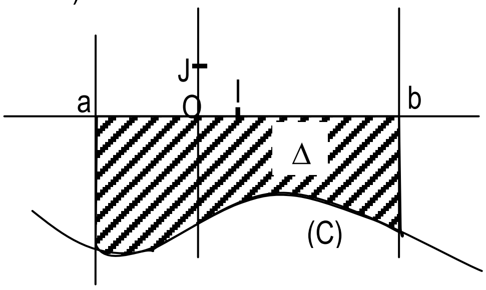
## 2. Calcul d'aire

a) Cas où f est une fonction continue et positive.



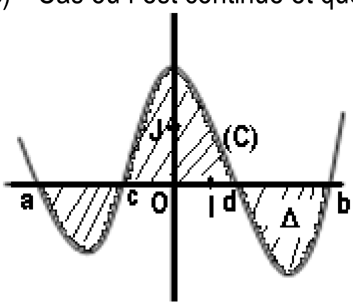

aire de $\mathcal{D} = \int_a^b f(x)dx$ u.a

b) Cas où f est une fonction continue et négative.



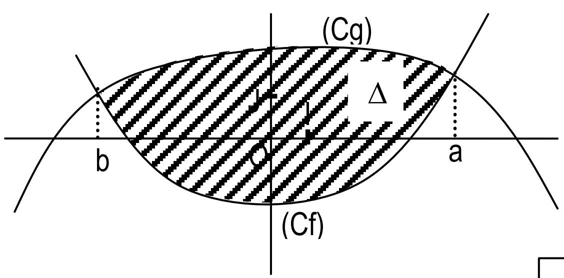

aire de $\mathcal{D} = -\int_a^b f(x)dx$ u.a

c) Cas où f est continue et quelconque




aire de $\mathcal{D} = \left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx\right] u.a$

d) Calcul d'une aire d'une partie du plan limitée par deux courbes.




Comme g > f sur $[a;b]$

aire de $\mathcal{D} = \int_a^c [g(x) - f(x)]dx\ u.a$

☑ Exemples

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre. On prendra $OI = 2$, $OJ = 1{,}5$ et (C) la courbe représentative de la fonction carrée. Calculer l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

# EXERCICES

## *Intégrale d'une fonction continue*

Calculer les intégrales suivantes

**1.** $a) \int_{-4}^{3}\left(x^3 + x - 1\right)dx$ $\quad b) \int_{-3}^{-2}\frac{-2}{x^2}\,dx$ $\quad c) \int_{3}^{4}dt$ $\quad d) \int_{0}^{4}e^{u}du$ $\quad e) \int_{0}^{\pi}\cos x dx$

**2.** $a) \int_{0}^{6}\left(2 - |x-3|\right)dx$ $\quad b) \int_{-1}^{2}\left|e^{x} - 1\right|dx$ $\quad c) \int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2|x| + 1\right)dx$ $\quad d) \int_{0}^{3}f(x)dx$

avec f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;1\right], & f(x) = 2x+1 \\ \forall x \in \left[1;+\infty\right[, & f(x) = -x+4 \end{cases}$

## *Techniques de calcul d'intégrale*

**3.** $a) \int_{0}^{1}(2x-5)\left(x^2-5x+1\right)dx$ $\quad b) \int_{-1}^{1}(3x-1)^3dx$ $\quad c) \int_{0}^{1}\frac{3x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

$d) \int_{-3}^{0}\frac{x+3}{\left(x^2+6x-7\right)^3}\,dx$ $\quad e) \int_{0}^{3}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ $\quad f) \int_{0}^{2}\frac{e^{x}}{e^{x}+3}dx$

$g) \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x + \tan^3 x\right)dx$ $\quad h) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x \cos x dx$ $\quad i) \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x \sin(2x)dx$

$j) \int_{0}^{4}(x-2)e^{x^2-4x+1}\,dx$ $\quad k) \int_{0}^{2}(2x+1)\sqrt{2x+1}dx$ $\quad l) \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

**4.** A l'aide d'une intégration par parties.

$a) \int_{0}^{1}x\sqrt{x+1}\,dx$ $\quad b) \int_{0}^{3}2xe^{2x}dx$ $\quad c) \int_{0}^{\pi}(x-1)\sin(3x)dx$ $\quad d) \int_{2}^{3}(2x+1)\ln x dx$

A l'aide de deux intégrations par parties

$a) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\sin x\,dx$ $\quad b) \int_{0}^{1}\left(3x^2 - x + 1\right)e^{x}dx$ $\quad c) \int_{0}^{\pi}\cos(x)e^{x}dx$ $\quad d) \int_{2}^{3}\ln^2 x dx$

## *Intégration de fonctions particulières*

**5.** Soit les intégrales I et J telles que : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x dx$ $\qquad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x dx$

1. Calculer $I + J$
2. En utilisant la technique d'intégration par parties, Calculer $I - J$.
3. En déduire les valeurs exactes de I et J.

**6.** f est la fonction définie et dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$

1. Montrer que $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$
2. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

**7.**

1. Trouver des nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x différent de 0 et 3, $\frac{x+9}{x^3-6x^2+9x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$
2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$

**8.**

1. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x+1}dx$ (Indication $\frac{2x}{x+1}=2-\frac{2}{x+1}$)
2. Utiliser la question 1 pour calculer $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2}{e^x+1}dx$

**9.**

1. a) Trouver des nombres réels a et b tels que $x \mapsto (ax+b)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x+1)e^x$

   b) En déduire $\int_0^{\frac{2}{3}} (3x+1)e^x dx$
2. a) Trouver des nombres réels a, b et c tels que $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x^2+3x+1)e^x$

   b) En déduire $\int_{-1}^{0} (x^2+3x+1)e^x dx$

### *Calculs d'aires*

**10.** Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\frac{3e^x-3}{3e^x-1}$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x appartenant $[0;2]$,

   $f(x)=a+\frac{be^x}{3e^x-1}$
2. En déduire une primitive de f sur $[0;2]$.
3. On donne un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique : 2cm). Calculer l'aire en cm$^2$ de la partie du plan définie par : $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

**11.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+3-4e^{-x}$. On note (C) sa courbe représentation dans un repère orthogonal (O, I, J).
L'unité étant le centimètre, prendre OI = 2 et OJ = 3

1. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x+3$ est asymptote à (C) en $+\infty$

   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).
2. Calculer l'aire en cm$^2$ de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

# CHAPITRE V : SUITES NUMERIQUES

## I. GENERALITES

1. Définition
2. Modes de détermination d'une suite
   a) Suite définie par une formule explicite
   b) Suite définie par une formule de récurrence
3. Représentation graphique.
4. Démonstration par récurrence

## II. ETUDE D'UNE SUITE NUMERIQUE

1. Sens de variation d'une suite
2. Convergence d'une suite
   a) Définition
   b) Propriété
   c) Convergence d'une suite monotone

## III. SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

1. Suites arithmétiques
   a) Définition
   b) Sens de variation et convergence
   c) Propriétés.
2. Suites géométriques
   a) Définition
   b) Convergence
   c) Propriétés.

# SUITES NUMERIQUES

## I. GENERALITES

### 1. Définition

✍ On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Notation

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Une suite numérique d'ensemble de définition E se note $(u_n)_{n\in E}$ ou tout simplement $(u_n)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité.

On note $u_n$ l'image de n par u. $u_n$ est aussi le terme d'indice n. $u_n$ est encore appelé le terme général de la suite.

***Remarque***

*L'ensemble de définition d'une suite est l'ensemble des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à un nombre entier naturel donné*

### 2. Modes de détermination d'une suite numérique

Il y a deux procédés usuels pour définir une suite numérique.

a) Suite définie par une formule explicite

✍ Une suite définie par une formule explicite est définie par une expression du type $u_n = f(n)$ (f une fonction numérique à variable réelle) permettant de calculer $u_n$ en fonction de n.

☑ Exemple : $u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$

b) Suite définie par une formule de récurrence.

✍ On peut définir une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée :

- de son premier terme défini par sa valeur numérique et son indice.
- d'une formule de récurrence explicitant le calcul d'un terme à partir du terme précédent ou des termes précédents.

☑ Exemple : $\begin{cases} u_3 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$

### 3. Représentation graphique

- Suite définie par une formule de récurrence.

☑ Exemple :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \ ; n \geq 3 \end{cases}$$

Désignons par g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x - 2$ de représentation graphique (C) et par $(D)$ la droite d'équation $y = x$ .

Représenter graphiquement quelques premiers termes de cette suite à l'aide de (C) et de $(D)$ sur l'axe des abscisses.

### 4. Démonstration par récurrence

**Principe**

Pour démontrer par récurrence la proposition $P_n$ pour tout entier $n \geq n_0 \, (n_0 \in \mathbb{N})$

1. On vérifie la proposition pour le premier indice $n_0$.
2. On suppose que pour un entier naturel $n \geq n_0$ ; on a $P_n$ et on démontre que $P_{n+1}$ est vérifiée
3. On conclut

**Exemple**

On donne la suite $(v_n)$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}8 \\ v_{n+1} = 5v_n \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $v_n = 0{,}8 \times 5^n$.

## II. ETUDE D'UNE SUITE NUMERIQUE

### 1. Sens de variation d'une suite

Définition

✍ u est une suite numérique, $n_0$ un nombre entier naturel.

- u est croissante (respectivement décroissante) à partir de l'indice $n_0$ lorsque pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$).
- u est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) à partir de l'indice $n_0$ lorsque pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).
- u est monotone (respectivement strictement monotone) lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante (respectivement soit strictement croissante soit strictement décroissante).
- u est stationnaire à partir de l'indice $n_0$ lorsque pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_{n+1} = u_n$

**Remarque** : une suite stationnaire sur son ensemble de définition est constante.

**Point méthode**

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique u, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- On compare $u_n$ et $u_{n+1}$, ce qui revient aussi à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ .
- Pour une suite à termes positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Lorsque u est définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de f (car u et f ont le même sens de variation).
- Lorsque u est définie par une formule de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$, on utilise un raisonnement par récurrence (éventuellement le sens de variation de g)

### 2. Convergence d'une suite

a) Définition

✍ Une suite est dite convergente lorsqu'elle a une limite finie.

✍ Une suite est divergente si elle ne converge pas.

b) Propriété

✍ Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$ ; si f est une fonction numérique telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors la suite numérique définie par $u_n = f(n)$ a la même limite.

***Remarques***

- *Les règles de calcul sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.*
- *On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.*
- *Si la fonction n'admet pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de la suite.*

c) Convergence d'une suite monotone

- Suites majorées, minorées, bornées.

Définitions

✍ On dit qu'une suite numérique u définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est :

- minorée s'il existe un nombre réel m tel que : pour tout n élément de E, $u_n \geq m$
- positive si elle est minorée par 0.
- majorée s'il existe un nombre réel M tel que : pour tout n élément de E, $u_n \leq M$
- négative si elle majorée par 0.
- bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

- Convergence d'une suite monotone

Propriétés

✍ Toute suite décroissante et minorée converge.

✍ Toute suite croissante et majorée converge.

✍ Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

✍ Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

**Point méthode**

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est bornée, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
- Etudier la fonction f, lorsque la suite est du type : $u_n = f(n)$
- Faire un raisonnement par récurrence.

☑ Exemples

**1.** Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie dans chacun des cas ci-dessous

$a)\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\qquad b)\ u_n = 3^n$ $\qquad c)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 2 \end{cases}$

**2.** Calculer les limites de chacune des suites numériques suivantes.

$a)\ u_n = -3 + \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad b)\ u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n} + 2$ $\qquad c)\ u_n = \sin(n\pi)$ $\qquad d)\ u_n = \sqrt{n^3 + 3n^2 + 1}$

**3.** On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que u est croissante.

b) Démontrer par récurrence que u est majorée par 2.

c) En déduire que la suite u converge.

# III. SUITES ARITHMETIQUES – SUITES GEOMETRIQUES

## 1. Suites arithmétiques.

a) Définition

✍ Une suite $(u_n)_{n \in E}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r appelé raison tel que : $\forall n \in E,\ \ u_{n+1} = u_n + r$ .

b) Sens de variation et convergence.

✍ u est une suite arithmétique de raison r.

- Si r > 0, alors u est strictement croissance et diverge vers $+\infty$ .
- Si r = 0, alors u est constante et converge vers le premier terme.
- Si r < 0, alors u est strictement décroissante et diverge vers $-\infty$ .

c) Propriétés

- Formule explicite

✍ La suite arithmétique $(u_n)_{n \in E}$ de raison r est définie, pour tous nombres entiers naturels éléments de E, par la formule explicite $u_n = u_p + (n-p)r$ . Si $p = 0$ alors $u_n = u_0 + nr$

- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

✍ $(u_n)_{n \in E}$ est une suite arithmétique. On a :

✍ $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$ avec p et n éléments de E tels que $p \leq n$

$$= \text{nombre de termes} \times \frac{1^{er} \text{ terme de la somme} + \text{ dernier terme de la somme}}{2}$$

## 2. Suites géométriques

a) Définition

✍ Une suite $(v_n)_{n \in E}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q appelé raison tel que : $\forall n \in E,\ \ v_{n+1} = qv_n$

b) onvergence

✍ v une suite géométrique de premier terme $v_0$ et de raison q.

- Si $|q| < 1$ alors v converge vers 0.
- Si $q > 1$ alors v diverge vers $\begin{cases} -\infty & \text{si } v_0 < 0 \\ +\infty & \text{si } v_0 > 0 \end{cases}$ .
- Si $q < -1$ alors v n'a pas de limite.
- Si $q = 0$ ou $v_0 = 0$ alors v est la suite constante nulle.
- Si $q = 1$ alors v est une suite constante et converge vers $v_0$.

c) Propriétés

- Formule explicite

✍ La suite géométrique $(v_n)_{n \in E}$ de raison q est définie, pour tous nombres entiers naturels éléments de E, par la formule explicite $v_n = q^{n-p}.v_p$ . Si $p = 0$ alors $v_n = q^n v_0$

- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

✍ $(v_n)_{n\in E}$ est une suite géométrique de raison q différent de 1, pour p et n éléments de E tels que $p \leq n$ on a :

$$v_p + v_{p+1} + ... + v_n = v_p \times \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1}$$

$$= 1^{er} \text{ terme de la somme} \times \frac{(\text{raison})^{\text{nombre de terme}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

☑ <u>Exemples</u>

**1.** On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}$

a) Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.

c) Calculer la somme $v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.

d) Etudier la convergence de u.

**2.** On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$

a) Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ est géométrique.

b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.

c) Etudier la convergence de u.

# EXERCICES

**1.** Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes.

$a)\ u_n = n^2 - n$ $\quad b)\ u_n = \dfrac{n^2 - 2}{n + 1}$ $\quad c)\ u_n = 5n + 1$ $\quad d)\ u_n = 2 \times (-5)^n$

$e)\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ $\quad f)\ u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ $\quad g)\ u_n = \dfrac{e^n}{1 + e^n}$ $\quad h)\ u_n = \sqrt{2^n}$

**2.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1$

a) Démontrer par récurrence que, $(u_n)$ est décroissante.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n \geq -3$.

c) En déduire que $(u_n)$ converge.

**3.** Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 4$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$

a) Tracer dans un repère orthonormé (O, I, J) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

b) En déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite $(u_n)$.

c) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée.

d) En déduire que cette suite est convergente.

**4.** On pose $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$.

b) Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**5.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n,

$u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 1$

1. Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$.
2. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n, par : $v_n = u_n + \dfrac{3}{2}$
   a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, la suite $(v_n)$ est géométrique.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de n.
   c) En déduire $u_n$ en fonction de n.
   d) Etudier la limite de la suite $(u_n)$.
3. On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   Exprimer $S_n$ puis $S'_n$ en fonction de n.

**6.** Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 3$.
   a) Tracer dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm), la représentation graphique (D) de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
   c) Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite $(u_n)$.
   d) Conjecturer sur le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)$.
2. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n, par : $v_n = u_{n+1} - u_n$
   a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$. En déduire la nature de la suite $(v_n)$ et préciser son premier terme $v_0$.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de n.

c) Exprimer $v_n$ en fonction de $u_n$ et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n,

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

d) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

e) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**7.** Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 24 000 F. et le locataire s'engage à occuper la maison neuf années complètes.

- **1er contrat**

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer $u_1$ payé lors de la 2e année.

b) Exprimer $u_n$ (loyer payé lors de la $(n+1)^{ième}$ année) en fonction de n. Calculer $u_8$.

c) Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de ce contrat.

- **2e contrat**

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 1500 F du loyer de l'année précédente.

a) Calculer le loyer $v_1$ payé lors de la 2e année.

b) Exprimer $v_n$ (loyer payé lors de la $(n+1)^{ième}$ année) en fonction de n. Calculer $u_8$.

c) Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de ce contrat.
Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

# CHAPITRE VI : PROBABILITES

## A. DENOMBREMENT

Rappels

## B. PROBABILITES

### I. PROBABILITE D'UN EVENEMENT

1. Vocabulaire
2. Définition de la probabilité dans le cadre de l'équiprobabilité
   a) Définition de la probabilité
   b) Définition de la probabilité dans le cadre de l'équiprobabilité
3. Propriétés

### II. PROBABILITES CONDITIONNELLES

1. Définition – propriétés
   a) Probabilité conditionnelle
   b) Evénements indépendants en probabilité
2. Probabilités totales
   a) Partition d'un ensemble
   b) Formules des probabilités totales

### III. VARIABLES ALEATOIRES

1. Loi de probabilité
   a) Notion de variable aléatoire
   b) Loi de probabilité
2. Fonction de répartition
3. Espérance mathématique
4. Variance et écart type

### IV. SCHEMA DE BERNOULLI

1. Epreuve de Bernoulli
2. Schéma de Bernoulli
3. Loi binomiale et ses conséquences
   a) Loi binomiale
   b) conséquences

# PROBABILITES

## A. DENOMBREMENT

### Rappels

✍ n et p sont des nombres entiers naturels non nuls. E un ensemble à n éléments.
Dénombrer c'est calculer ou compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini.

- **Cardinal d'un ensemble fini**

Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de cet ensemble.
On le note card(E) et lit « cardinal de E ».

**Exemples** : $\text{card}(\emptyset) = 0$ $\quad$ $\text{card}(\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}) = 10$

Proriété

A et B étant deux parties d'un ensemble fini E on a : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

- **Produit cartésien**

A et B étant deux ensembles finis non vides. On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples (a,b) tels que :

- Le 1er terme a est élément de A.
- Le 2e terme b est élément de B.

On le note : $A \times B$ et lit « A croix B ».

**Remarques**

- $E_1, E_2, \ldots, E_P$ étant des ensembles finis non vides. $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_P$ est appelé produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_P$
- Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{\text{p facteurs}}$ est noté $E^p$
- Les éléments du produit cartésien de deux ensembles sont appelés couples.
- Les éléments du produit cartésien de trois ensembles sont appelés triplets.
- Les éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_P$ sont des p-listes ou des p-uplets

**Exemple** : $(e_1, e_2, \ldots, e_P)$ ou $e_1 e_2 \ldots e_P$ avec $e_i \in E_i$ ; $1 \leq i \leq p$

Propriété

- $E_1, E_2, \ldots, E_P$ étant des ensembles finis non vides.
  On a : $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_P) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_p)$
- $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}E)^p$

Propriété

✍ Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est $n^p$.

- **Arrangement, Permutation, Combinaison**

n et p sont des nombres entiers naturels non nuls. E un ensemble à n éléments.

- **Arrangement**

Définition

✍ Un arrangement de p éléments de E ou p-arrangement d'éléments de E est tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts $(p \leq n)$.

Propriété

✍ Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $A_n^p$ et défini par $A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{p facteurs}}$

- **Permutations**

Définition

✍ On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement de n éléments de E.

Notation

✍ On appelle factorielle n le nombre entier naturel noté $n!$ et défini par $n! = n(n-1)(n-2)\times \ldots \times 3\times 2\times 1$

Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.

Propriété 1

✍ Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

Propriété 2

✍ n et p deux nombres entiers naturels tels que $n \geq p$ on a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ; $A_n^0 = 1$.

- **Combinaison**

Définition :

✍ On appelle combinaison de p éléments de E à n éléments tout sous ensemble (toute partie) de E ayant p éléments $(p \leq n)$.

Propriété 1

✍ Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est tel que $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Propriété 2

✍ Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que $n \geq p$ on a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

☑ Exemples

**1.** Le réseau téléphonique ivoirien utilise 8 chiffres pour un numéro de téléphone

a) Quel est la capacité théorique de ce réseau.

b) Parmi ces numéros, combien sont du réseau orange sachant que réseau utilise comme deux premiers chiffres 07, 08 ou 09 ?

**2.** A l'aide de l'alphabet français, combien y a –t –il de mots ayant un sens ou non :

a) de 4 lettres ?

b) de 5 lettres distinctes ?

c) de 7 lettres distinctes ?

d) de 4 lettres distinctes qui sont les lettres B, C, E, G ?

**3.** Sur une table, il y a un ananas, une banane, une orange, un citron, une mangue, une papaye et une pomme. Une personne désire manger trois de ces fruits. Combien de choix possibles, la personne aura – t- elle ?

# B. PROBABILITE

## I. PROBABILITE D'UN EVENEMENT

### 1. Vocabulaire

Activité

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'expérience $\mathcal{E}$ qui consiste à lancer le dé et à lire le chiffre inscrit sur la face supérieure.

Définitions

- On appelle épreuve aléatoire ou expérience aléatoire, toute épreuve ou expérience dont les résultats sont dus à l'effet du hasard.
- Un résultat d'une épreuve aléatoire est une éventualité.
- L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est l'univers noté souvent $\mathcal{U}$ ou $\Omega$.
- Un événement est une partie ou un sous ensemble de l'univers.
- Un événement est dit :
  - *Elémentaire* lorsqu'il contient un seul élément.
  - *Impossible* lorsqu'il est l'ensemble vide.
  - *Certain* lorsqu'il est l'univers.
- Soit A et B deux événements de l'univers $\mathcal{U}$ d'une expérience aléatoire.
  - L'événement " A ou B" est la réunion de ces deux événements noté $A \cup B$.
  - L'événement " A et B" est l'intersection de ces deux événements noté $A \cap B$.
- Si l'événement "A et B" est impossible (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors l'événement A et l'événement B sont incompatibles.
- L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est le sous ensemble complémentaire de A dans $\mathcal{U}$
  ($A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$)

### 2. Définition de la probabilité d'un événement

a) Définition de la probabilité

- Soit $\mathcal{U}$ l'univers associé à une expérience aléatoire. Une probabilité sur l'univers $\mathcal{U}$ est une application p de l'ensemble des parties de $\mathcal{U}$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de $\mathcal{U}$ associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- La probabilité de l'événement certain est 1 ($P(\mathcal{U}) = 1$)
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ($P(\emptyset) = 0$).

b) Définition de la probabilité dans le cadre de l'équiprobabilité

- Lorsque les événements élémentaires ont tous la même probabilité de se produire, on dit qu'ils sont équiprobables.
- Dans cette situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\mathcal{U})} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

***Remarque*** :

*Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par les expressions comme : "dé parfait" , "dé non pipé", "pièce parfaite", "boules indiscernables au toucher", "cartes bien battues", "tirage au hasard"…*

### 3. Propriétés

A et B étant deux événements d'un univers $\mathcal{U}$ d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

- $P(\emptyset) = 0$ $\quad P(\mathcal{U}) = 1$ $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. En particulier si A et B sont deux événement incompatibles ( $A \cap B = \emptyset$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

☑ Exemples

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

**PARTIE A : TIRAGE D'UNE BOULE**

On tire au hasard une boule de cette urne ; calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge et en déduire celle d'obtenir une boule blanche.

**PARTIE B : TIRAGE DE DEUX BOULES**

***1.*** *Tirage simultané.*

On tire au hasard et ensemble deux boules de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir :

a) deux boules rouges
b) deux boules de même couleur
c) deux boules de couleurs différentes

***2.*** *Tirages successifs avec remise*

On tire au hasard de l'urne deux boules l'une, après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir :

a) deux boules rouges
b) deux boules de même couleur
c) deux boules de couleurs différentes
d) une boule rouge et une seule au premier tirage.
e) une boule rouge et une seule.

**3.** *Tirages successifs sans remise*

On tire au hasard de l'urne deux boules l'une, après l'autre sans remettre la boule tirée dans l'urne.
Répondre aux questions du 2.

## II. PROBABILITES CONDITIONNELLES

Activité

On considère une classe de 50 élèves constituée de 30 garçons et 20 filles. Parmi les filles 15 ont plus de 18 ans et parmi les garçons 20 ont plus de 18 ans.

1. On choisit au hasard un élève de cette classe.
   a) Calculer la probabilité des évènements suivants :
      A "L'élève choisi est une fille"
      B " L'élève choisi a plus de 18 ans"
   b) Traduire en langage courant l'événement " $A \cap B$ "
   c) Calculer la probabilité de $A \cap B$.
2. Parmi les filles, quelle est la probabilité de choisir une fille de plus de 18 ans.
3. Sachant que l'élève choisi a plus de 18 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il soit fille?

## 1. Définitions – propriétés

### a) Probabilité conditionnelle

Soit B un événement de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(B) \neq 0$.

✍ On définit la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $\mathrm{P_B(A)}$ ou $\mathrm{P(A/B)}$ par la relation

$$\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \text{ ou } \mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{Card(A \cap B)}}{\mathrm{Card(B)}}$$

✍ Cette probabilité est appelée probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou probabilité de A sachant B.

Conséquences

- $P_B(B) = 1$ · Si $A \subset B$ alors $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$ · Si $B \subset A$ alors $P_B(A) = 1$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$, lorsque $P(A) \neq 0$ *et* $P(B) \neq 0$.

### b) Evénements indépendants en probabilité

Définition

✍ Deux événements A et B d'un même univers sont dits indépendants en probabilité, lorsque:
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$ *avec* $(P(B) \neq 0)$ ou $P_A(B) = P(B)$ *avec* $(P(A) \neq 0)$

## 2. Probabilités totales

### a) Partition d'un ensemble

Définition

✍ $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de $\mathcal{U}$ signifie que $B_1, B_2, ..., B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \mathcal{U}$

### b) Formule des probabilités totales

Propriété

✍ $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de l'univers $\mathcal{U}$. Pour tout événement A de $\mathcal{U}$, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n)$.

☑ Exemples

**1.** Un joueur tire, au hasard et sans la montrer, une carte d'un jeu de 32 cartes. Il dit à ses partenaires : " la carte tirée est une figure, quelle est la probabilité que ce soit un roi ?"

**2.** Les données figurent dans le tableau ci-dessous.
On lit par exemple $P(A) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}5$

a) Dans ce tableau, écrire les probabilités manquantes.

b) Calculer $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$

| | A | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| B | 0,5 | | 0,7 |
| $\overline{B}$ | | | |
| | 0,6 | | |

**3.** Deux urnes $U_1$ et $U_2$ indiscernables contiennent respectivement :

- Urne $U_1$ : 3 boules rouges, 2 boules vertes;
- Urne $U_2$ : 2 boules rouges, 1 boule verte;

On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

**4.** Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}3$
Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$

**5.** Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. Les événements « obtenir un roi » et « obtenir un trèfle » sont-il indépendants.

# III. VARIABLES ALEATOIRES

## 1. Loi de probabilité

### a) Notion de variable aléatoire

*Exemple introductif*

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée

**1)** Définir l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités en extension. On notera P pour chaque apparition de "pile" et F pour chaque apparition de "face"

**2)** On gagne 100 F pour chaque résultat "pile" et on perd 50 F pour chaque "face". Dresser un tableau donnant à chaque éventualité de $\mathcal{U}$ le gain algébrique correspondant du joueur.

Définition

✍ Lorsque à chaque éventualité $e_i$ d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel $x_i$, on dit que l'on a défini une variable aléatoire numérique X.

***Remarque*** *: La variable aléatoire X est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.*

Notation et vocabulaire :

L'événement " X prend la valeur $x_i$ " est noté $(X = x_i)$

**3)** On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de l'univers $\mathcal{U}$ associe le gain algébrique du joueur.

**a)** Déterminer les valeurs prises par X.

***b)*** Dresser un tableau donnant à chaque valeur $x_i$ prise par X sa probabilité $P_i$ *(On rangera les valeurs $x_i$ dans l'ordre croissant).*

### b) Loi de probabilité

Définition

✍ Lorsque à chaque valeur $x_i$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité $P_i$ de l'événement $(X = x_i)$, on dit que l'on a défini la loi de probabilité de X (ou la distribution de X).

***Remarque*** *: Il est intéressant de présenter la loi de probabilité par un tableau en prenant soin de ranger les $x_i$ dans l'ordre croissant.*

- $x_1 < x_2 < ... < x_n$
- $P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i = P(X = x_i)$ | $P_1$ | $P_2$ | … | $P_n$ |

## 2. Fonction de répartition

Définition

✍ La Fonction de répartition de la variable aléatoire X est l'application
$$F : \mathbb{R} \to [0;1]$$
$$x \mapsto P(X \leq x)$$

***Remarque*** :

- *F est une fonction croissante en escalier.*
- *F est définie par les formules explicites suivantes :*

  *Pour* $x < x_1,\ F(x) = 0$

  *Pour* $x_i \leq x < x_{i+1},\ F(x) = F(x_{i-1}) + P(X = x_i)$

  *Pour* $x_n \leq x,\ F(x) = 1$

☑ Exemple

Définir la fonction de répartition F de l'exemple introductif. Représenter la courbe de la fonction de répartition F

## 3. Espérance mathématique

Définition

✍ X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, avec les probabilités respectives $P_1, P_2, ..., P_n$, on appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté *E(X)* définie par : $E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_nP_n = \sum_{i=1}^{n} x_iP_i$

✍ *E(X)* est donc la moyenne des valeurs $x_i$ pondérées par les nombres réels $P_i$.

Interprétation de E(X) en terme de jeu

**Remarque**

La variable aléatoire X désignant le gain du joueur, lorsque :

- $E(x) > 0$, le jeu est avantageux (favorable) pour le joueur.
- $E(x) < 0$, le jeu est désavantageux (défavorable) pour le joueur.
- $E(x) = 0$, le jeu est dit équitable.

## 4. Variance – Ecart type

Définition

✍ X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, avec les probabilités respectives $P_1, P_2, ..., P_n$ et E(X) étant noté m;

- On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) définie par :

$$V(X) = E(X - m)^2 = P_1(x_1 - m)^2 + P_2(x_2 - m)^2 + ... + P_n(x_n - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - m)^2$$

- On appelle écart type de X, le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Autre expression de la variance

$$V(X) = E(X^2) - m^2 = \sum_{i=1}^{n} P_ix_i^2 - m^2$$

☑ Exemple

Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X de l'exemple introductif.

# IV. SCHEMA DE BERNOULLI

## 1. Epreuve de Bernoulli

Définition

- Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement $S$ précisé, appelé succès ou à sa non réalisation $\overline{S}$, appelé échec, on dit que cette expérience correspond à une épreuve de Bernoulli.
- La probabilité du succès P(S) est appelée paramètre de l'épreuve de Bernoulli.

## 2. Schéma de Bernoulli

Définition

- On appelle schéma de Bernoulli une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (n étant un nombre entier naturel différent de 0 et 1)
- Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité P(S) du succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

## 3. Loi binomiale et ses conséquences.

a) Loi binomiale

- $\mathscr{E}$ est un schéma de Bernoulli, suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. $p = P(S)$ la probabilité du succès, $q = 1 - p$ celle de l'échec. X est la variable aléatoire qui à chaque éventualité de $\mathscr{E}$ associe le nombre k de succès $(0 \leq k \leq n)$. La loi de probabilité de X est définie par $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ . Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale à paramètres n et p.

b) Conséquences

Lorsque X suit la loi binomiale, l'espérance mathématique et la variance de X sont définies par :
$E(X) = np$ et $V(X) = npq$

☑ Exemple

**1.** Lors d'un lancer d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on s'intéresse à l'apparition du numéro 1.
Déterminer la probabilité p d'obtenir le n° 1.

**2.** On lance 5 fois de suite ce dé dans les mêmes conditions et de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de fois où le nombre 1 est apparu lors des 5 lancers.
a) Définir la loi de probabilité de X.
b) Calculer E(X) et V(X).

# EXERCICES

### *Dénombrement*

**1.** On considère un groupe de 10 personnes. Chaque personne du groupe est soit sélectionnée, soit éliminée pour participer à un concours. Combien y a-t-il de sélections différentes ?

**2.** Trois personnes veulent manger chacune un gâteau. Il y a cinq gâteaux. Combien y a-t-il de choix possibles ?

**3.** Dans une chaîne de fabrication, une pièce doit passer sur cinq machines A, B, C, D, E.

a) Combien y a-t-il de trajets possibles ?
b) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit d'abord passer sur la machine E ?
c) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit passer sur la machine B avant de passer sur la machine E?
d) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit passer sur la machine B avant de passer sur la machine E et D?

**4.** Dans un sac, il y a : quatre boules bleues, trois boules blanches, deux boules rouges et une boule verte. On prend simultanément trois boules.
Quel est le nombre de possibilités d'avoir :

a) Trois boules de même couleur ?
b) Trois boules de couleurs différentes ?
c) Au moins deux boules de même couleur ?
d) Exactement une boule blanche?
e) Aucune boule bleue ?
f) Au moins une boule bleue ?

**5.** Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.

1. De combien de façons différentes est – il possible de tirer trois boules simultanément de l'urne?
2. Combien de tirages font-ils apparaître trois numéros pairs ?
3. Combien de tirages font-ils apparaître un numéro pair et deux numéros impairs ?
4. Pour combien de tirages la somme des trois numéros tirés est-elle paire ?
5. Parmi les neuf boules de l'urne, il y a cinq boules blanches, trois boules rouges et une boule verte. Si l'on tire simultanément trois boules de cette urne, combien y a-t-il de tirages comportant :
   a) des boules ayant la même couleur ?
   b) des boules ayant des couleurs distinctes (deux à deux)?
   c) Exactement deux boules de même couleur ?
   d) Reprendre les a), b) et c) (précédentes) si l'on tire trois fois successivement une boule sans remise.

## *Probabilité d'un événement*

**6.** Quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant une main de 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes, obtienne :

a) un roi ?
b) deux dames ?
c) quatre trèfles ?
d) au moins deux piques ?

**7.** Dans un lycée, 40% des élèves ont déclaré aimer l'étude des SVT, 60% l'étude des mathématiques, 15% aiment à la fois l'étude des SVT et des mathématiques.
Quelle est la probabilité de tirer au hasard un élève de ce lycée qui :

a) aime les SVT, mais pas les mathématiques ?
b) aime les mathématiques, mais pas les SVT ?
c) n'aime ni les SVT, ni les mathématiques ?

**8.** Dans un sac, il y a neuf boules indiscernables au toucher dont :

- trois boules rouges numérotées 1, 2, 3;
- quatre boules vertes numérotées 4, 5, 6, 7;

- deux boules blanches numérotées 8, 9.

On tire au hasard et successivement trois boules que l'on place côte à côte sur une table, et on observe la couleur et le numéro de chaque boule.

a) Définir l'ensemble des éventualités de l'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience et calculer $Card(\mathcal{U})$

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
"les trois boules sont rouges", "les trois boules sont de la même couleur", " les trois boules sont de couleurs différentes", "il y a une boule blanche entre une rouge et une verte"

c) Citer parmi les événements précédents, deux événements incompatibles, justifier.

**9.** On dispose de deux dés cubiques A et B dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance les deux dés et on note les chiffres obtenus sur les faces supérieures. Soit l'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience.
A l'événement : "la somme des chiffres est 4"
B l'événement : "on obtient deux chiffres identiques"
C l'événement : "on obtient deux chiffres différents"
D l'événement : "on obtient deux chiffres pairs"
Calculer $Card(\mathcal{U})$ puis la probabilité de chacun des événements A, B, C et D.

**10.** Une coopérative agricole compte 125 membres dont 100 hommes et 25 femmes. Le président de cette coopérative propose au cours d'une réunion de mettre en place un comité de 10 membres pour le suivi des travaux de finition du siège de la coopérative.

a) Combien de comités peut-on former ?
b) Calculer la probabilité pour que ce comité ne contienne aucune femme.
c) Calculer la probabilité pour que ce comité contienne au moins une femme.
d) Calculer la probabilité pour que ce comité contienne exactement 6 hommes et 4 femmes.

## *Probabilités conditionnelles – variables aléatoires – loi binomiale*

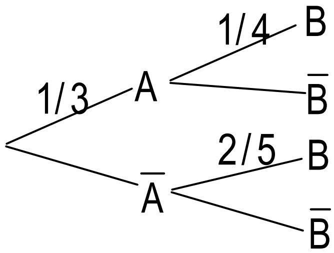
**11.** Jean a égaré le texte de son exercice de probabilité, mais il dispose de l'arbre ci-contre sur lequel il a traduit les principales données de l'énoncé.

a) Déterminer, à l'aide de cet arbre, les probabilités :
$P_A(B)$; $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_A(\overline{B})$

b) Ecrire les probabilités manquantes sur les branches.

c) Calculer $P(A \cap B)$. Ecrire ce résultat sur l'arbre. Ecrire de même les probabilités des trois autres chemins.

d) Utiliser les résultats obtenus pour compléter le tableau ci-dessous.




| | B | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{12}$ | | $\frac{1}{3}$ |
| $\overline{A}$ | | | |
| | | | |

**12.** Dans une ville donnée, 40% de la population a les cheveux blonds, 50% les yeux bleus et 35% les cheveux blonds et les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.
Quelle est la probabilité pour

a) Qu'elle ait les yeux bleus, sachant qu'elle a les cheveux blonds ?
b) Qu'elle n'ait pas les cheveux blonds, sachant qu'elle a les yeux bleus ?

**13.** Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes. Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule (premier tirage) et à la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur, puis enfin, à tirer une nouvelle fois une boule de l'urne (second tirage). On désigne par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités et par R, V et R' les événements : R "on tire une boule rouge au premier tirage"; V "on tire une boule verte au premier tirage" et R' "on tire une boule rouge au second tirage"

a) Calculer $P(R)$, $P(V)$, $P(R'/R)$ et $P(R'/V)$

b) En déduire $P(R'\cap R)$, $P(R'\cap V)$ puis $P(R')$et conclure.

**14.** Un sac contient 10 billes noires, 35 billes rouges et 55 billes bleues. On tire au hasard une bille du sac. Si elle est noire, on gagne 2F, si elle est rouge, on gagne 1F enfin si elle est bleue, on gagne 0,2F. Pour jouer une partie, la mise est de 0,8F. Soit X le gain du joueur. Le gain est égal à ce que lui rapporte le tirage diminué de sa mise.

a) Quels sont les gains possibles ?

b) Etablir la loi de probabilité de X.

c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 0{,}8)$.

**15.** Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?
   b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?
2. Lorsqu'on tire une boule bleue, on marque un point; lorsqu'on tire une boule rouge, on perd un point; lorsqu'on tire une boule verte, on marque zéro point. On désigne par X le nombre de points marqués.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

**16.** Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :

- Si elle est rouge, il gagne 10 F
- Si elle est Jaune, il gagne 5 F
- Si elle est Verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée dans l'urne. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8F, sinon il perd 4F.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des événements de ce jeu.
2. On s'intéresse au gain algébrique du joueur.
   a) Donner la loi de probabilité correspondante.
   b) Calculer l'espérance mathématique.

**17.** Une enquête faite auprès d'une population comprenant 51% de femmes et 49% d'hommes montre que 20% des femmes et 15% des hommes de cette population ne vont pas au cinéma.

1. On choisit un individu de cette population. Tous les choix sont équiprobables. On note :
   F : l'événement "l'individu choisi est une femme"
   C : l'événement "l'individu choisi fréquente les salles de cinéma".
   a) Déterminer la probabilité de l'événement $F\cap C$.
   b) Montrer que la probabilité de l'événement $\overline{C}$ est égale à 0,17.
   c) Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle ne va jamais au cinéma.

2. On choisit trois individus au hasard dans cette population. On suppose la population assez nombreuse pour pouvoir considérer que l'on répète alors trois fois l'expérience "choisir au hasard un individu dans la population" dans les conditions identiques et indépendantes.
   a) Quelle est la probabilité qu'aucun des trois individus ne fréquente les salles de cinéma?
   b) En déduire la probabilité que l'un au moins des individus choisis fréquente les salles de cinéma.

**18.** On dispose de deux dés cubiques identiques parfaitement équilibrés A et B. Le dé A a une face numérotée 1, deux faces numérotées 2, deux faces numérotées 3 et une face numérotée 4. Le dé B a trois faces numérotées 1 et trois faces numérotées 2.

*I et II sont indépendants.*

I. On choisit au hasard un dé, on le lance et on note le numéro inscrit sur la face supérieure à l'équilibre.

1. Calculer la probabilité :
   a) de choisir le dé A.
   b) d'obtenir le numéro 1 avec le dé B.
   c) d'obtenir le numéro 1.

2. Sachant que la face obtenue porte le numéro1 quelle est la probabilité pour que le dé choisi soit le dé B.

II. On lance simultanément les deux dès et on note les numéros inscrits sur les faces supérieures.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir deux chiffres identiques est de: $\frac{1}{4}$
2. On répète cette expérience trois fois de suite. Les lancers sont supposés indépendants. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le nombre de faces portant des chiffres identiques.
   a) Montrer que X suit la loi binomiale et calculer la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
   c) Définir la fonction de répartition

# CHAPITRE VII : NOMBRES COMPLEXES

## I. ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1. Ensemble des nombres complexes.
2. Forme algébrique d'un nombre complexe.
   a) Définition- propriété
   b) Egalité de deux nombres complexes.
   c) Nombres réels – nombres imaginaires purs.
3. Calculs dans $\mathbb{C}$
   a) Somme de deux nombres complexes
   b) Produit de nombres complexe
   c) Puissances entières d'un nombre complexe.
   d) Quotient d'un complexe par un nombre complexe non nul.
4. Module et conjugué d'un nombre complexe.
   a) Définition du module.
   b) Propriétés

## II. FORMES TRIGONOMETRIQUES – FORMES EXPONENTIELLES

1. Nombre complexe et représentation géométrique
2. Arguments d'un nombre complexe non nul.
   a) Définition
   b) Egalité de nombres complexes non nuls.
3. Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.
   a) Définition
   b) Forme algébrique - formes trigonométriques.
4. Formes exponentielles.
   a) Définition
   b) Nombres complexes de module 1
   c) Propriétés des arguments
5. Nombre complexes et trigonométrie
   a) Formules de Moivre.
   b) Formules d'Euler

## III. RESOLUTION D'EQUATIONS

1. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.
   a) Définition
   b) Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.
2. Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$ .

## IV. NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE.

1. Interprétation de $\arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$
2. Alignement de trois points
3. Orthogonalité de deux droites.
4. Cocyclicité ou alignement de quatre points
   a) Définition
   b) Propriété

# NOMBRES COMPLEXES

## I. ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

### 1. Ensemble des nombres complexes

Propriété – définition

- Il existe un nombre imaginaire noté i vérifiant $i^2 = -1$
- Tout nombre de la forme $a + ib$ $(a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R})$ est appelé nombre complexe.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ ;
- L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sont valables dans $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$.

### 2. Forme algébrique d'un nombre complexe

a) Définition – propriété

- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ $(a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R})$.
- L'écriture $a + ib$ est appelée forme algébrique de z.
- a est appelé la partie réelle de z et noté $\mathcal{Re}(z)$
- b est appelé la partie imaginaire de z et noté $\mathcal{Im}(z)$.

b) Egalité de deux nombres complexes.

Propriété

- Si deux nombres complexes sont égaux alors ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

***Autrement :*** $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ avec a, b, a' et b' des nombres réels.

***Cas particulier :*** $a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

c) Nombres réels – nombres imaginaires purs

Définition

- Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.
- Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est un nombre imaginaire pur.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriété

- z étant un nombre complexe, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ il existe un nombre réel b tel que $z = ib$.

### 3. Calculs dans $\mathbb{C}$

Pour tous nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $a' + ib'$.

a) Somme de deux nombres complexes.

Propriété

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

  - Opposé d'un nombre complexe

    Définition

- L'opposé du nombre complexe $a + ib$ est noté $-(a + ib) = -a - ib$

✍ z et z' des nombres complexes $z+(-z')=z-z'$.

b) Produit de deux nombres complexes.

Propriété

✍ $(a+ib)(a'+ib') = aa'-bb'+i(ab'+a'b)$

- Produit nul

Propriété

✍ Pour tous nombres complexes z et z', $zz'=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z'=0$

c) Puissances entières d'un nombre complexe.

- Définition

✍ Z étant un nombre complexe non nul, n un nombre entier naturel, on a :

$(1) z^0=1$; $(2) 0^n=0$; $(3) z^{n+1}=z^n \times z$ $(4) z^{-n}=\frac{1}{z^n}$.

- Puissances entières de i

✍ Pour tout nombre entier naturel n, $i^{4n}=1$; $i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}=-1$ $i^{4n+3}=-i$

- Formule du binôme de Newton

Propriété

✍ Pour tous nombres complexes non nuls u et v, pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1. $(u+v)^n = C_n^0u^n + C_n^1u^{n-1}v + ... + C_n^ku^{n-k}v^k + ... + C_n^nv^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ku^{n-k}v^k$

d) Quotient d'un nombre complexe par un nombre complexe non nul

- Définition du conjugué d'un nombre complexe

✍ On appelle conjugué du nombre complexe z de forme algébrique $a+ib$, le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}=a-ib$.

***Remarque*** *:*

*z et $\bar{z}$ ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées*

$(\mathcal{Re}(\bar{z})=\mathcal{Re}(z)$ et $\mathcal{Im}(\bar{z})=-\mathcal{Im}(z))$

- Inverse d'un nombre complexe non nul

✍ L'inverse du nombre complexe non nul $a+ib$ est le nombre complexe :

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

- Définition du quotient

✍ z et z' deux nombres complexes tels que $z'\neq 0$, $z\times\frac{1}{z'}=\frac{z}{z'}$.

## 4. Module et conjugué d'un nombre complexe

a) Définition du module

✍ Soit $z=a+ib$ un nombre complexe (a et b réels). On appelle module de z le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.

b) Propriétés

Propriété 1

✍ Pour tout nombre complexe z,

• $|\overline{z}| = |z|$  • $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  • $|\mathcal{Re}(z)| \leq |z|$  • $|\mathcal{Im}(z)| \leq |z|$

Propriété 2

Pour tous nombres complexes z et z' on a:

• $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  • $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriété 3

Pour tout nombre complexe z tel que $z = a + ib$, on a :

• $\overline{\overline{z}} = z$ on dit que les nombres z et $\overline{z}$ sont conjugués.

• $z + \overline{z} = 2\mathcal{Re}(z)$  $z + \overline{z} = 2a$

• $z \times \overline{z} = [\mathcal{Re}(z)]^2 + [\mathcal{Im}(z)]^2$  $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$

• $z - \overline{z} = 2i.\mathcal{Im}(z)$  $z + \overline{z} = 2ib$

• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$  • $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Propriété 4

Pour tous nombres complexes z et z' ; pour tout nombre entier relatif n on a:

• $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$  • $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Si $z' \neq 0$ alors • $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$  • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$  • $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

☑ Exemples

**1.** Donner la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z dans chacun des cas suivants :

a) $z = 2 + 3i$  b) $z = 0$  c) $z = -5i$  d) $z = -20$

**2.** Calculer et donner le résultat sous forme algébrique :

a) $1 + 3i + (-2 + i)$  b) $2 + i - (4 + 5i)$  c) $i - (3 + 2i)$  d) $(1 + i)(2 - i)$

e) $(2 + 4i)(-1 + 2i)$  f) $-2i(3 + i)$  g) $(1 - i)(2 - i)(-2 + 3i)$  h) $(5 + 3i)^2$

i) $(1 + i)^4$  j) $(2 - i)^5$  k) $(2 - 3i)^2$  l) $\frac{1}{i}$

m) $\frac{2-5i}{2-i}$  n) $\frac{3+4i}{i}$  o) $\frac{1}{1-i}$

**3.** Déterminer le module et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

a) $2 + 3i$  b) $-6$  c) $4i$  d) $(3-2i)(4+3i)$

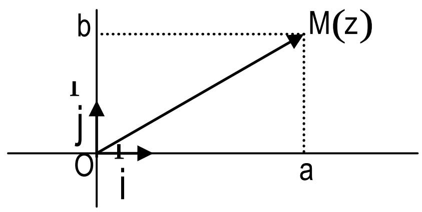
e) $2i(3 + i)$  f) $\frac{1}{3-4i}$  g) $\frac{3i}{1-i}$  h) $\frac{2-5i}{2-i}$

# II. FORMES TRIGONOMETRIQUES – FORMES EXPONENTIELLES

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

## 1. Nombre complexe et représentation géométrique

- L'application qui à tout nombre complexe $a+ib$ assorcie le point $M(a;b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{P}$.
- $M(a;b)$ est appelé point image du nombre complexe $a+ib$.
- $a+ib$ est appelé affixe du point $M(a;b)$.
- L'application qui à tout nombre complexe $a+ib$ associe le vecteur $\vec{u}(a;b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.
- $\vec{u}(a;b)$ est appelé vecteur image du nombre complexe $a+ib$ ; $a+ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}(a;b)$
- Le plan muni du repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$ est appelé plan complexe. Un point M d'affixe z de ce plan est souvent noté $M(z)$.
- Les droites de repères $(O;\vec{i})$ et $(O;\vec{j})$ sont respectivement appelées axe réel et axe imaginaire.
- Si $z_A$ et $z_B$ sont les affixes respectives de deux points A et B alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et la distance AB est $AB = |z_B - z_A| = \|\overrightarrow{AB}\|$.




## 2. Arguments d'un nombre complexe non nul

### a) Définition

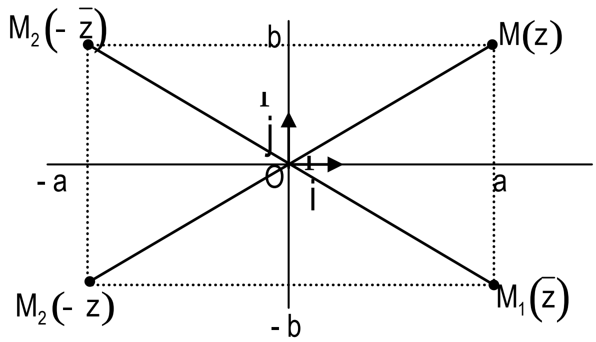
- Soit z un nombre complexe non nul et M son point image.
  - On appelle argument du nombre complexe z, toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$.
  - On le note $\arg(z)$.
  - La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ est appelé argument prnicipal de z et noté $\mathrm{Arg}(z)$.

*Remarque*

- $\theta$ *étant un argument d'un nombre complexe non nul z, tout argument de z est de la forme :* $\theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- *Le nombre complexe nul n'a pas d'argument*
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- *Pour tout nombre complexe z non nul et pour tout nombre entier relatif k on a :*

  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$

  $\arg(-z) = \arg(z) + (2k+1)\pi$



$\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) + 2k\pi$

**Interprétation géométrique**

- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, arg(z) est une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI},\vec{u})$.
- Si $z_A$ et $z_B$ sont les affixes respectives de deux points A et B, $\arg(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI},\vec{AB})$.

b) Egalité de deux nombres complexes non nuls.
Propriété

✍ z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

## 3. Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul

a) Définition

✍ Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument $\theta$. On appelle forme trigonométrique de z, l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

b) Forme algébrique – formes trigonométriques.

| Forme algébrique | | Formes trigonométrique |
|---|---|---|
| $z = a + ib$ <br> $(a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}^*)$ | → $r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cos\theta = \frac{a}{r}$ $\sin\theta = \frac{b}{r}$ <br> ← $a = r\cos\theta$ $b = \sin\theta$ | $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ <br> $(r \in \mathbb{R}^*; \theta \in \mathbb{R})$ |

## 4. Formes exponentielles.

a) Définition

✍ Pour tout nombre réel $\theta$, on pose $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$. On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe z non nul de module r et d'argument $\theta$ l'écriture $z = re^{i\theta}$.

b) Nombre complexe de module 1.

✍ Les nombres complexes de module 1 sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

c) Propriété des arguments

✍ Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour tout entier relatif n, on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

## 5. Nombres complexes et trigonométrie

a) Formules de Moivre

Propriété

✍ Pour tout nombre réel $\theta$ ; pour tout entier relatif n, on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

b) Formules d'Euler.

Propriété

✍ Pour tout nombre réel $\theta$ ; pour tout entier relatif n, on a :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$
- $\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

☑ Exemples

**1.** Placer dans le plan complexe les points–images des nombres complexes suivants :
$1 - 2i$; $3 + 2i$; $-5 - 3i$; $7$; $4i$; $-4 + 2i$

**2.** Compléter le tableau suivant :

| z | 1 | i | $-1$ | $-i$ | $1+i$ | $1-i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Arg(z) | | | | | | |

**3.** Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

a) $1 + i$ b) $1$ c) $1 + i\sqrt{3}$

**4.** Déterminer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\sqrt{3} + i$ b) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ c) $\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$

d) $(1-i)^5$ e) $(\sqrt{3}+i)^{-6}$

**5.**

a) Calculer $(\sqrt{3}+i)^{1996}$

b) Calculer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ le réel $\cos 3\alpha$.

c) Linéariser $\sin^4\alpha$ c'est-à-dire exprimer $\sin^4\alpha$ en fonction de $\sin n\alpha$ et $\cos n\alpha$, n étant un nombre entier relatif.

# III. RESOLUTION D'EQUATIONS

## 1. Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe.

a) Définition

✍ Soit Z un nombre complexe non nul et n un nombre entier naturel $(n \geq 2)$. On appelle racine $n^{ième}$ de Z le nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

b) Recherche des racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe

***Présentation en activité***

Propriétés

✍ n étant un nombre entier naturel non nul.

- Tout nombre complexe non nul de forme trigométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ admet n racines $n^{ième}$ qui sont les différentes valeurs de :
$\sqrt[n]{r}\left[(\cos\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$.
- Les points images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$ .

***Remarques***

- *0 est la seule racine $n^{ième}$ de 0.*
- *1 admet n racines $n^{ième}$ tel que* $\cos(\frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{k2\pi}{n})$ *avec* $k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$.

## 2. Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété

✍ Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes ($a \neq 0$).
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par $\delta$ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $\Delta$.

- Si $\Delta = 0$ alors (E) a une solution double : $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solutions distinctes : $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

☑ Exemples

1. Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ de deux manières différentes.
2. a) Déterminer les racines cubiques de l'unité.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = -8i$ *(on utilisera 2. a)*
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ , chacune des équations suivantes :
$(E_1): z^2 + z + 1 = 0$ $(E_2): 2z^2 - 3z + 1 = 0$
$(E_3): z^2 + iz + (1+3i) = 0$ $(E_4): z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = 0$

# IV. NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

A, B, C et D sont des points distincts d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

## 1. Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$

Propriété

✍ $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB})$.

Autrement $mes(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

## 2. Alignements de trois points

Propriété:

✍ Trois points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

## 3. Orthogonalité de deux droites

Propriété

✍ Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

En particulier, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

## 4. Cocyclicité ou alignement de quatre points.

a) Définition

✍ Des points appartenant à un même cercle sont cocycliques.

b) Propriété

✍ A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \times \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

***Remarque*** *: Les quatre points sont alignés si trois d'entre eux le sont.*

☑ Exemples

**1.** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 - i$ ; $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = -10 - 13i$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

**2.** A, B et C étant des points d'affixes respectives $z_A = -1 - i$ ; $z_B = 4 + i$ et $z_C = -2 + \frac{3}{2}i$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

**3.** Les points A, B, E et C ont pour affixes respectives $z_A = 3 + i$ ; $z_B = 2i$ ; $z_E = -1 - i$ et $z_C = 2 - 2i$. Démontrer que les points A, B, E et C sont cocycliques.

# EXERCICES

**1.** Donner la forme algébrique du nombre complexe dans chaque cas.

a) $z = 2(3 + 2i) + 3(-4 + 3i)$ b) $z = (1 + i)(1 - 2i)$

c) $z = \frac{1 - i}{2i}$ d) $z = \frac{3 - 4i}{7 + 5i}$

e) $z = (2i + 1)(1 + i)^2(3i - 4)$ f) $z = (3 + 4i)^3$

g) $z = (2 - 3i)^4$ h) $z = \frac{2 + i}{3 + 4i} - \frac{3 - 4i}{2 - i}$

**2.** Déterminer le module et le conjugué du nombre complexe z dans chaque cas.

a) $z = (1 + i)(1 - 2i)$ b) $z = 3i(2 - 3i)$ c) $z = 2(3 + 2i) + 3(-4 + 3i)$

d) $z = \frac{1 - i}{2i}$ e) $z = \frac{3 - 4i}{7 + 5i}$

**3.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i$ ; $z_B = 2 + i$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

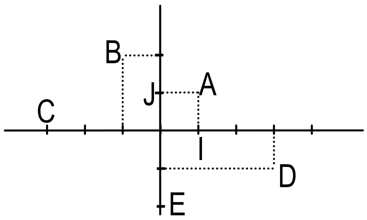
c) Calculer les distances AB, AC et BC. Le triangle ABC est-il rectangle en A?

**4.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)

a) Déterminer les affixes des points O, A, B, C, D et E.

b) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EB}$.

c) Vérifier que ADEC est un parallélogramme.




**5.** Donner une forme trigonométrique du nombre complexe z dans chaque cas.

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ b) $z = -7$ c) $z = \frac{-3}{i}$ d) $z = 3i - 3\sqrt{3}$

e) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^4$ f) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$ g) $z = \cos\theta - i\sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$

h) $z = \sin\theta + i\cos\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$ i) $z = -3(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R})$

**6.** a) Calculer en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ pour tout nombre réel $\theta$ : $\cos 5\theta$ ; $\sin 6\theta$ et $\cos 6\theta$

b) Linéariser chacune des expressions suivantes : $\sin^5\theta$ ; $\cos^6\theta$ et $\sin^4\theta$.

**7.** On donne $z = \sqrt{3} + i$. Ecrire z sous forme exponentielle et en déduire $z^{2006}$.

**8.** On pose $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

a) Calculer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$

b) Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

d) Quelle est la plus petite valeur du nombre entier naturel n telle que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit réel ?

**9.** On considère le nombre complexe défini par $z = \sqrt{3} + 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

a) Ecrire $z^2$ sous forme algébrique.

b) En déduire le module et un argument de $z^2$ puis donner une forme trigonométrique de z.

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

**10.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes:

a) $2z - 2 + 3i = 0$ b) $3z + i = z - 2 + 3i$ c) $-\bar{z} + 1 + 2i = 0$ d) $z^2 = -9$

e) $z^2 = -\sqrt{5}$ f) $z^2 = 7$ g) $z^2 + 4z + 5 = 0$ h) $4z^2 - 2z + 1 = 0$

i) $2z^2 + 3z + 1 = 0$

**11.** a) Déterminer les racines carrées de z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique :

• $z = 1 + i$ • $z = 1 - i\sqrt{3}$ • $z = 2 + 2i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^4 = 1$ et $z^3 = i$

**12.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes:

a) $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$ b) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

c) $(2+i)z^2 - (9+2i)z + 5(3-i) = 0$ (on calculera $(1+8i)^2$).

**13.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2z + 10 = 0$ puis représenter les points images A et B des solutions $(x_A > 0)$.

b) Trouver les nombres complexes u et v tels que : $\begin{cases} -2u + v = 1 + 13i \\ -u + v = 4 + 8i \end{cases}$

Représenter sur la figure les points C et D d'affixes respectives u et v.

c) Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A et que le triangle BCD est rectangle en C.

d) En déduire que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle $(\Gamma)$ dont on précisera le centre E et le rayon. Tracer $(\Gamma)$.

e) Démontrer que les points images C' et D' des nombres complexes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ appartiennent à $(\Gamma)$.

**14.** On pose $P(z) = z^3 + (3i - 6)z^2 + (10 - 18i)z + 30i$.

a) Calculer $P(-3i)$.

b) En déduire une factorisation de $P(z)$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

**15.** On considère l'équation: $(E): z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$.

a) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle $z_1$ et une solution imaginaire pure $z_2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On notera $z_3$ la troisième solution)

c) Démontrer que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

**16.** Dans chacun des cas suivants, déterminer, puis construire, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

a) $|z - 2| = |z + i|$ b) $\left|z - \frac{1}{3}i\right| = 3$ c) $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

**17.** On considère, dans le plan complexe muni du repère (O, I, J), les points $A(2)$, $B(i)$ et pour tout nombre complexe $z \neq i$, $M(z)$, $M'(z')$ avec $z' = \frac{z + 2}{z - i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M vérifiant :

a) $|z'| = 1$ b) $z' \in \mathbb{R}$ c) $z' \in i\mathbb{R}$.

**18.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). (unité 2 cm)
f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = iz + 2 + i$.

a) Calculer $f(i)$ et $f(1)$

b) Placer les points A, B, A' et B' d'affixes respectives i, 1, $f(i)$ et $f(1)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$ (On notera a la solution).

d) Calculer le module et un argument de a. Placer sur la figure le point $\Omega$ d'affixe a.

e) Comparer les distances $\Omega A$ et $\Omega A'$ puis $\Omega B$ et $\Omega B'$.

f) Démontrer que $(\Omega A) \perp (\Omega A')$ et $(\Omega B) \perp (\Omega B')$.

g) M est le point d'affixe z. Donner une équation de l'ensemble des points M tels que $|f(z)| = 2$, puis donner la nature de cet ensemble et le représenter.

# CHAPITRE VIII : NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

## I. TRANSFORMATIONS DU PLAN

1. Homothétie
   a) Définition
   b) Propriétés

2. Rotation
   a) Définition
   b) Propriétés

3. Similitudes
   a) Définition
   b) Similitudes directes.

## II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

1. Transformations élémentaires du plan
   a) Vocabulaire
   b) Transformation élémentaires du plan

2. Transformations usuelles du plan
   a) Rotation de centre quelconque
   b) Homothétie de centre quelconque
   c) Composées de transformations du plan et bijection complexe

3. Similitudes
   a) Définition
   b) Caractérisation géométrique d'une similitude directe.

# NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

## I. TRANSFORMATIONS DU PLAN

Définition

✍ Toute application f du plan dans lui-même pour laquelle tout point M' est l'image d'un unique point M est appelé transformation du plan.

### 1. Homothétie

a) Définition

✍ Soit O un point, k un nombre réel non nul.
On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application notée $h(O,k)$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Conséquences

- Un point M, son image M' par une homothétie et le centre O de cette homothétie sont alignés.
- Le seul point invariant, par une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

b) Propriétés

✍ Soit h une homothétie de rapport k, M' et N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

✍ L'homothétie conserve l'orientation des angles.

Conséquences

- L'image de la droite (MN) par l'homothétie h est la droite (M'N') parallèle à (MN).
- L'image du cercle de centre I et de rayon r par l'homothétie h est le cercle de centre I' et de rayon $|k|r \quad (h(I) = I')$

### 2. Rotation

a) Définition

✍ Soit O un point, $\theta$ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
On appelle rotation de centre O et d'angle $\theta$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M = O$ alors $M' = M$
- Si $M \neq O$ alors $\begin{cases} OM' = OM \\ \text{Mes}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \end{cases}$

Conséquence

- Le point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

b) Propriété

✍ Soit r une rotation d'angle $\alpha$, A' et B ' les images respectives par r de deux points quelconques A et B. On a : $A'B' = AB$ et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha$ .

Conséquences

L'image par une rotation :

- d'une droite est une droite
- d'un cercle est un cercle de même rayon

La rotation conserve l'orientation des angles.

## 3. Similitudes

a) Définition

✍ k est un nombre réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute transformation du plan telle que : pour tous points M et N d'images respectives M' et N', $M'N' = kMN$

b) Similitudes directes

**Définition**

✍ On appelle similitude directe toute similitude qui conserve l'orientation des angles.

**Propriétés**

- Caractérisation géométrique d'une similitude directe

Propriété 1

Soit S une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ. Pour tout point M ≠ Ω d'image M' par S on a : $S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$

**Remarque**

La similitude directe de centre Ω qui transforme A en B a pour :

- rapport $k = \dfrac{\Omega B}{\Omega A}$
- angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)$

Propriété 2

S est une similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

S a pour rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ et pour angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$

- Similitude directe et configuration du plan

Propriété 3

Soit S une similitude directe de rapport k. A, B et C trois points distincts d'images respectives A', B' et C' par S. On a :

- $A'B' = kAB$ on dit que S multiplie les distances par le rapport k.
- $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ on dit que S conserve les angles orientés.
- L'image de la droite (AB) est la droite (A'B').
- L'image par S d'un cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon $k \times R$
- L'image par S d'une configuration géométrique est une configuration géométrique de même nature

- Toute similitude directe de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}_+^*\right)$ est soit :

  - Une translation
  - Une rotation
  - Une homothétie de rapport k
  - La composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k.

# II. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

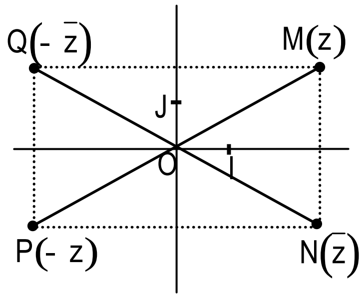
## 1. Transformations élémentaires du plan.

### a) Vocabulaire

La transformation $F: \begin{array}{l} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{array}$ a pour bijection complexe associée $f: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' \end{array}$ ou a pour écriture complexe $z' = f(z)$.

### b) Transformations élémentaires du plan.

- Symétries

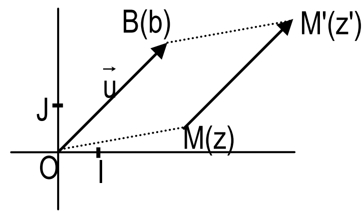



✍ La symétrie d'axe (OI) a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$

✍ La symétrie de centre O a pour écriture complexe $z' = -z$

✍ La symétrie d'axe (OJ) a pour écriture complexe $z' = -\bar{z}$

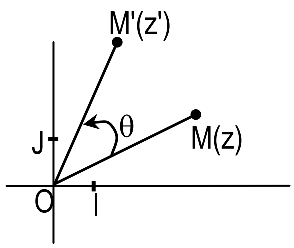
- Translation




✍ $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

✍ La translation de vecteur $\vec{u}$ a pour écriture complexe $z' = z + b$

- Rotation de centre O

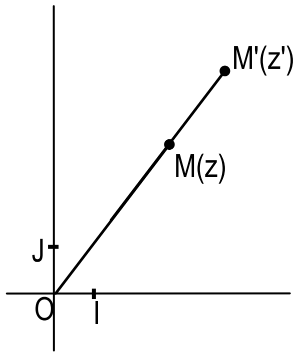



✍ r est la rotation de centre O et d'angle orienté $\theta$. M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a :

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ Mes\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \end{cases}$$

✍ La rotation de centre O et d'angle orienté $\theta$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z$.

- Homothétie de centre O




✍ h est l'homothétie de centre O et de rapport k. M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a : $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

✍ L'homothétie de centre O et de rapport k a pour écriture complexe $z' = kz$.

☑ Exemples

**1.** On donne le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = 1 - 2i$.

a) Donner l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Déterminer l'images respectives A', B', C', I' et J' de chacun des points A, B, C, I et J avec $z_A = 3 - i$, $z_A = 5$, $z_C = -3i$; $z_I$ et $z_J$.

**2.** On donne $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$

a) Caractériser la tranformation du plan associée à cette écriture complexe.
b) Construire les images respectives A' et B' des points $A(-1;3)$ et $B(3;0)$.

**3.** On donne $z' = -4z$
a) Caractériser la tranformation du plan associée à cette écriture complexe.
b) Construire l'image du point A d'affixe $z_A = 2+i$.

## 2. Transformations usuelles du plan.

a) Rotation de centre quelconque

Propriété

✍ $\theta$ est un nombre réel et $\omega$ un nombre complexe. La bijection complexe f associée à la rotation d'angle orienté $\theta$ et centre $\Omega$ le point d'affixe $\omega$ est de la forme : $f(z) = e^{i\theta}z + b$ avec $f(\omega) = \omega$ ou a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

b) Homothétie de centre quelconque

Propriété

✍ k est un nombre réel et $\omega$ un nombre complexe. La bijection complexe f associée à l'homothétie de rapport k et centre $\Omega$ le point d'affixe $\omega$ est de la forme : $f(z) = kz + b$ avec $f(\omega) = \omega$ ou a pour écriture complexe $z' - \omega = k(z - \omega)$.

c) Composées de transformations du plan et bijections complexes.

Propriété

✍ Si f et g sont des bijections complexes associées respectivement aux transformations du plan F et G, alors $f \circ g$ est la bijection complexe associée à la transformation du plan $F \circ G$.

☑ Exemples

**1.** a) Trouver la bijection complexe f associée à la rotation r d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ et de centre $\Omega$ d'affixe $i\sqrt{3}$.

b) Trouver la transformation T du plan associée à la bijection complexe $f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + i$

**2.** a) Trouver l'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport – 2 et de centre $\Omega$ d'affixe $3-i$.

b) Trouver la transformation T du plan associée à la bijection complexe $f(z) = 2z + \frac{1}{2} - i$.

**3.** Soit r la rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe $i$, h l'homothétie de rapport 3 et de centre le point B d'affixe $1-i$. Trouver la bijection complexe f associée à la transformation $r \circ h$.

## 3. Similitude directe

### a) Définition

- Toute similitude directe de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}_+^*\right)$ est associée à une bijection complexe f définie par $f(z) = az + b$ $\left[a \in \mathbb{C}^*\ ,\ |a| = k \text{ et } b \in \mathbb{C}\right]$ et $z' = az + b$ est son écriture complexe.
- Réciproquement, toute bijection complexe f définie par : $f(z) = az + b$ $\left[a \in \mathbb{C}^*\ ,\ b \in \mathbb{C}\right]$ est associée à une similitude directe S de rapport $|a|$
- Réciproquement toute écriture complexe de la forme $z' = az + b$ $\left[a \in \mathbb{C}^* ; b \in \mathbb{C}\right]$ est associée à une similitude directe S de rapport $|a|$.

### b) Propriétés

- Une similitude directe est caractérisée par :
  - son centre $\Omega$ d'affixe $\omega$
  - son rapport k
  - son angle orienté $\theta$
- S est la similitude directe de rapport k avec $k \in \mathbb{R}_+^*$ d'angle orienté $\hat{\theta}$ et de centre $\Omega$ le point d'affixe $\omega$.

  f est la bijection complexe définie par : $f(z) = az + b$ $\left[a \in \mathbb{C}^*\ ,\ b \in \mathbb{C}\right]$.

  S et f sont associées $\Leftrightarrow$ $a = ke^{i\theta}$ et $f(\omega) = \omega$

  On peut écrire : $S_{(\Omega,k,\theta)}$
- Toute similitude directe de rapport k est aussi la composée de l'homothétie de centre O et de rapport k, d'une rotation de centre O et d'une translation. (O étant l'origine du repère).

☑ Exemples

1. Trouver le centre, l'angle orienté et le rapport de la similitude directe associée à la bijection complexe : $f(z) = (1+i)z - i$
2. Quelle est la bijection complexe f associée à la similitude directe de rapport 3, d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{6}$ et de centre le point $\Omega$ d'affixe $2-3i$ ?

# EXERCICES

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

a) $z' = -z + 2 + i$ b) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 4i$ c) $z' = -\frac{1}{3}z + 2 - i$ d) $z' = -iz + 1 + i$

e) $z' = z + 3 - i$ f) $z' = z - i$ g) $z' = 3z$ h) $z' = iz$

2. Soit les points $A(1;-1)$ et $\Omega(-2;1)$. Dans chacun des cas suivants :
   - Donner l'écriture complexe de la transformation.
   - Déterminer l'image de A par la transformation.

a) Homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-\frac{1}{2}$

b) Rotation de centre $\Omega$ et d'angle orienté $\frac{\hat{\pi}}{3}$

**3.** Soit F la tranformation du plan dont l'écriture complexe est : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4\sqrt{3} - 2i$

a) Déterminer le nombre complexe $z_0$ tel que : $z' - z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0)$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de F.

**4.** Soit T la tranformation du plan d'écriture complexe est : $z' = z + 2 - 3i$

a) Reconnaître T et déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points $A(-1;0)$ et $B(-2;-1)$ par T.

b) Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$ et (D') l'image de (D) par T.
Déterminer une équation de (D')

**5.** Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan. Soit M un point du plan d'affixe z et f l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 - i)z + 2 - i$

a) Déterminer la nature et éléments caractériques de la transformation F associée à f.

b) Quelle est l'image par F du cercle de centre O et de rayon 2 ?

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $|(1 - i)z + 2 - i| = 2$

**6.** Le plan P est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct.

1. On considère la transformation T de P dans P, qui à chaque point $M(x;y)$ fait correspondre le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$

   z et z' étant les affixes respectives de M et M'.

   a) Exprimer z' en fonction de z.

   b) Donner la nature de la transformation T

2. On considère maintenant la transformation S, qui au point M d'affixe z associe $M_1$ d'affixe $z_1$ tel que $z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Quelle est la nature de la transformation S ? Préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit la transformation $S \circ T$, qui au point $M(x;y)$ d'affixe z associe $M_2(x_2;y_2)$ d'affixe $z_2$.

   a) Exprimer $z_2$ en fonction de z, puis $x_2$ et $y_2$ en fonction de x et y.

   b) Quelle est l'image par $S \circ T$ du point $C\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ?

   c) Soit la droite (D) d'équation $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$. Montrer que le point C appartient à (D). Si (D') est l'image de (D) par $S \circ T$, quel est le point d'intersection de (D) et (D') ?

**7.** Dans Le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,I,J)$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = 4i$, $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes $z_A$, $z_B$ et $z_C$.
2. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et C. *(unité graphique : 1 cm)*
3. Démontrer que le triangle OBA est équilatéral.

4. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
5. On désigne par K le milieu du segment [OA] et par la similitude directe de centre O qui transforme B sur K.
   a) Déterminer l'écriture complexe de S.
   b) Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment [AC].
   c) En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment [AC] est la droite (OI).

**8.** Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,I,J)$(unité : 2 cm).

I) On donne (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i = 0$

   Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une unique solution réelle.

II) Soit A et B les points d'affixes respectives $4i$ et $2-2i$. ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que le triplet (A, B, C) soit direct.
   1. Faire une figure
   2. S est la similitude directe qui applique A sur A et B sur C.
      a) Déterminer les éléments caractériqtiques de S.
      b) Déterminer l'écriture complexe de S
      c) Calculer l'affixe du point C.

# CHAPITRE IX : STATISTIQUES

## I. SERIES STATISTIQUES DOUBLES – NUAGE DE POINTS

1. Séries statistiques doubles.
2. Nuage de points associé à une série statistique double

## II. AJUSTEMENT ET CORRELATION LINEAIRE

1. Ajustement
    a) Présentation
    b) Point moyen d'un nuage représentant une série double
2. Ajustement affine par la méthode de Mayer
3. Ajustement affine par la méthode des moindres carrées
    a) Définition de la covariance
    b) Equations des droites de régression.
4. Corrélation linéaire.

    Définition et propriété

# STATISTIQUES

## I. SERIES STATISTIQUES DOUBLES- NUAGE DE POINTS

### 1. Séries statistiques doubles

☑ Exemple:

On a relevé le poids en kg et la taille en cm de dix élèves. On a obtenu les résultats suivants.

- Tableau linéaire

| Poids(x) | 65 | 68 | 62 | 62 | 68 | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taille (y) | 165 | 168 | 174 | 168 | 171 | 174 | 174 | 171 | 171 | 174 |

Désignons par :

- P la population étudiée c'est-à-dire l'ensemble des dix élèves.
- X le caractère "poids des élèves"
- Y le caractère "taille des élèves"
- $M_X$ l'ensemble des modalités du caractère X.
- $M_Y$ l'ensemble des modalités du caractère Y.
- $M_X = \{62;\ 65;\ 68;\ 71;\ 74\}$
- $M_Y = \{165;\ 168;\ 171;\ 174\}$

A chaque couple $(x_i;y_i)$ de l'ensemble $M_X \times M_Y$ on associe le nombre $n_i$ d'élèves de poids $x_i$ et de taille $y_i$

On définit ainsi une série statistique à deux caractères (ou série double).

Le nombre $n_i$ est appelé effectif de la modalité $(x_i;y_i)$.

- Tableau à double entrées et séries statistiques marginales

| $M_Y$ \ $M_X$ | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 | Effectif des modalités de Y |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 165 | | | | | | |
| 168 | | | | | | |
| 171 | | | | | | |
| 174 | | | | | | |
| Effectif des modalités X | | | | | | |

On pourra déduire du tableau ci-dessus la distribution statistique associée à X et celle associée à Y.

Ces séries sont appelées respectivement série marginale associée à X et série marginale associée à Y.

Tableau linéaire associé à X

| $x_i$ | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | | | | | |

Tableau linéaire associé à Y

| $y_j$ | 165 | 168 | 171 | 174 |
|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | | | | |

- Déterminer la moyenne de chaque série statistique.

Définition:

✍ On appelle série statistique double de caractère $(X,Y)$ l'ensemble des triplets $(x_i;\ y_j;\ n_{ij})$ où $n_{ij}$ est l'effectif du couple $(x_i;y_j)$.

## 2. Nuage de points associé à une série statistique double

Définition

✍ X et Y sont deux caractères définis sur une population P. F la représentation graphique du produit cartésien $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthonal.

On appelle nuage de points associé à la série statistique double de caractères X et Y, la partie de F dont tous les points ont un couple de coordonnées $(x_i;y_j)$ d'effectif non nul.

***Remarque***

*Un nuage de points peut être représenté par un diagramme cartésien, un ensemble de points pondérés ou des taches (dans le cas des taches l'aire est proportionnelle à l'effectif ou couple).*

☑ Exemple

Représenter par un diagramme cartésien, le nuage de points associé à la série statistique double étudiée dans l'exemple précédent.

# II. AJUSTEMENT ET CORRELATIONLINEAIRE

## 1. Ajustement

### a) Présentation

Lorsque la représentation graphique du nuage de points prend l'allure d'une droite, on trace la droite qui passe le plus proche possible de ces points.

On dit alors que l'on a un ajustement affine ou un ajustement linéaire.

Cette droite est appelée droite de régression.

### b) Point moyen

Définition

✍ On appelle point moyen, d'un nuage de n points $M_i$ de coordonnées $(x_i;y_i)$, le point G de coordonnées $(x_G;y_G)$ telle que $x_G = \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $y_G = \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i$

## 2. Ajustement affine par méthode de Mayer

Principe de la méthode

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties disjointes $E_1$ et $E_2$ de même effectif *(si possible)* dans l'ordre où les points se présentent. Les deux parties $E_1$ et $E_2$ sont alors remplacées respectivement par les points moyens $G_1$ et $G_2$ des nuages qu'ils représentent. La droite $(G_1G_2)$ est alors une droite d'ajustement, on l'appelle la droite de Mayer.

Elle passe par le point moyen G du nuage.

☑ Exemple:

Soit une série statistique double dont les modalités des caractères X et Y sont données par le tableau ci-dessous:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 9 |
| $y_i$ | 8 | 10 | 12 | 13 | 19 | 14 | 15 | 17 |

a) Représenter le nuage de points associé à cette série par un diagramme cartésien.
b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer. Vérifier qu'elle passe par G.

## 3. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

a) Définitions

✍ On appelle variance de X le nombre réel noté $V(X)$ et définie par:

$$V(X)=\frac{n_1\left(x_1-\overline{X}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{X}\right)^2+...+n_p\left(x_p-\overline{X}\right)^2}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$$

ou $$V(X)=\frac{n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2-\overline{X}^2$$

✍ On appelle écart-type de X, le nombre réel noté et défini par : $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$

✍ On appelle covariance de la série statistique à double caractère $(X,Y)$ le nombre réel noté $\mathrm{cov}(X,Y)$ tel que $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{\sum n_{ij}x_iy_j}{N}-\left(\overline{X}\overline{Y}\right)$ ou $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum n_{ij}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_j-\overline{Y}\right)$

On note aussi $\mathrm{cov}(X,Y)=\sigma_{XY}$

b) Equations des droites de régression

- Droite de régression de Y et X

Propriété

✍ Si le nuage de points associé à la série double où $M_X$ est en abscisse et $M_Y$ en ordonnée, les variables X et Y étant en corrélation linéaire, alors, il existe une droite d'ajustement $(\Delta)$ du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage. Elle a pour équation: $y=ax+b$ aevc $a=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)}$ ou $a=\frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$

✍ Cette droite $(\Delta)$ est la droite des moindres carrées ou droite de régression de Y en X; elle passe par le point moyen G du nuage.

- Droite de régression de X et Y

✍ Une démarche analogue montre l'existence d'une droite d'ajustement $(\Delta')$ du nuage et une seule, d'équation : $x=a'y+b'$ aevc $a'=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{V(Y)}$ ou $a'=\frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$.

✍ Cette droite $(\Delta')$ est la droite de régression de X en Y; elle passe par le point moyen G du nuage

## 4. Corrélation linéaire

Définitions

✍ Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.

✍ On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractères X et Y le nombre réel r défini par : $r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(x)V(Y)}}$.

***Remarque:***

- $a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_x)^2}$ ; $a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$
- $aa' = r^2 \Leftrightarrow |r| = \sqrt{a\,a'}$
- *Si* $a > 0$ *et* $a' > 0$ *alors* $r = \sqrt{a\,a'}$ *si* $a < 0$ *et* $a' < 0$ *alors* $r = -\sqrt{a\,a'}$
- *On admet que* $|r| \le 1$
- *Si* $r^2 = 1$ *alors* $a = \frac{1}{a'}$. *Les deux droites* $(\Delta)$ *et* $(\Delta')$ *sont confondues, on dit que l'ajustement linéaire est parfait.*
- *Si* $|r|$ *est proche de 1 alors* $(\Delta)$ *et* $(\Delta')$ *sont proches, on dit qu'il y a une bonne corrélation ou une forte corrélation en ne les deux variables.*
- *En général, on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte lorsqu'on a :* $0,87 \le r \le 1$.

☑ Exemple

Un pharmacien observe, durant les six premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans un tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaires correspondant.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 12 | 13 | 15 | 19 | 21 | 22 |

1. Calculer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement des variables X et Y
2. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G *(unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée)*.
3. Calculer la variance $V(X)$ de X et la variance $cov(X,Y)$ de X et Y. *(les résultats seront données sous forme fractions irréductibles)*
4. Démontrer qu'une équation de la droite de régression $(D)$ de Y en X est: $y = \frac{78}{35}x + 9,2$.
5. Tracer la droite $(D)$.
6. En utilisant la droite $(D)$, calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ième mois.
7. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et interpréter.

# EXERCICES

**1.** On a observé pendant 10 années les variations des prix et des quantités consommées d'un produit agricole et on a obtenu les résultats suivants :

| Quantités $x_i$ | 8 | 9 | 6 | 9 | 7 | 9 | 14 | 9 | 12 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prix $y_i$ | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 2 | 4 | 4 | 5 |

Soit X et Y deux caractères de modalités $x_i$ et $y_i$.

1. a) Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,I,J)$.
   b) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Calculer la variance des séries statistiques associées aux caractères X et Y.
3. a) Trouver une équation de la droite de régression de X en Y.
   b) Trouver une équation de la droite de régression de Y en X
   c) Représenter ces deux droites dans le repère précédent.
4. Calculer et analyser le coefficient de corrélation linéaire.

**2.** Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires, en milliers de francs, réalisé une entreprise.

| Année | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_i$ | 1350 | 1380 | 1460 | 1590 | 1680 | 1800 | 1920 | 2020 | 2130 |

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer sur le graphique.
3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affine.
   a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X
   b) Tracer cette droite sur le graphique précédent.
   c) En supposant que la tendance se poursuive, estimez le chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2003
   d) En quelle année, pour la première fois, le chef d'entreprise pourra-t-il dire *"j'ai plus que doublé mon chiffre d'affaires de 93"?*

**3.** Un groupe d'élèves participe à un jeu. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'élèves ayant obtenu le point $x_i$ et ayant le nombre $y_i$ de cahiers (nombre situé à l'intersection de la colonne $x_i$ et de la ligne $y_j$. On définit ainsi un caractère double (X,Y) sur ce groupe d'élèves.

| $y_i$ \ $x_i$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 10 | 3 | 5 | 1 |
| 20 | 2 | 3 | 6 |

a) Quel est le l'effectif total N de ce groupe d'élèves.
b) Déterminer les séries marginales associées respectivement à X et à Y dans deux tableaux linéaires.

c) Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux caractères X et Y.
d) Calculer la covariance de la série double (X, Y).
e) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X.
f) Déterminer une équation de la droite (D') de régression de X en Y.
g) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.
   Y a-t-il une forte corrélation entre X et Y?

**4.** On donne le tableau à double entrée réel hf à l'étude de la série double suivante: 56 individus classés sous les deux caractères poids et taille X désigne le poids en kg et Y la taille en cm.

| Y \ X | $[45;50[$ | $[50;55[$ | $[55;60[$ |
|---|---|---|---|
| $[150;155[$ | 9 | 1 | 0 |
| $[155;160[$ | 18 | 4 | 1 |
| $[160;165[$ | 5 | 12 | 6 |

a) On note $x_i$ les centres des classes de X et $y_i$ les centres des classes de Y.
   Calculer les moyennes et les variances de X et de Y.
b) Déterminer l'équation de chacune des deux droites de régressions ($\Delta$) et ($\Delta'$).
c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

# CHAPITRE X : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I. GENERALITES

3. Définition d'une équation différentielle
4. Vocabulaire

## II. RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Equation différentielle du type : $f' + af = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$
   a) Solution générale
   b) Soluition vérifiant une condition initiale
2. Equation différentielle du type : $f'' - a^2 f = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$
   a) Equation du type $f'' = 0$.
   b) Equation du type $f'' - a^2 f = 0$ avec $a \neq 0$.
3. Equation différentielle du type : $f'' + a^2 f = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$
4. Tableau recapitulatif

# CHAPITRE X : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I. GENERALITES

### 1. Définition d'une équation différentielle

On appelle équation différentielle, toutte équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

### 2. Vocabulaire

- Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle.
- Une équation différentielle est dite d'ordre n lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.
- Toute fonction vérifiant une équation différentielle de cette équation différentielle.

## II. RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

### 1. Equation du type : $f' + af = 0$

a) Solution générale

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' + af = 0$ , où a est un nombre réel, sont les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{-ax}$ $(k \in \mathbb{R})$

**Exemples**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

$(E_1) : f' + 3f = 0$ $\quad (E_2) : f' - 2f = 0$ $\quad (E_3) : f' - \frac{3}{2}f = 0$ $\quad (E_4) : 3f' + 7f = 0$

b) Solution vérifiant une condition initiale

Pour tout couple $(x_0 ; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $f' + af = 0$ $(a \in \mathbb{R})$ admet une unique solution sur R qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.

**Exemples**

Dans chacun des cas suivants, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée

(1) $f' - 3f = 0$ et $f(0) = 2$ $\qquad$ (2) $f' + f\ln 2 = 0$ et $f(1) = -2$

**Exemple de résolution**

$f' - 3f = 0$ et $f(0) = 2$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonctions $f_k : x \mapsto ke^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f_k(0) = 2 &\Leftrightarrow ke^0 = 2 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Donc l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' - 3f = 0$ et $f(0) = 2$ est la fonction $f : x \mapsto 2e^{3x}$

### 2. Equation du type : $f'' - a^2 f = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$

a) Equation du type : $f'' = 0$

Les solutions sur R de l'équation différentielle $f'' = 0$ sont les fonctions :

$f_{(A,B)} : x \mapsto Ax + B \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

**Exemples**

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution la solution vérifiant la condition initiale donnée.

(1) $f'' = 0$ avec $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$

(2) $y'' = 0$ avec $y(2) = 1$ et $y'(2) = 3$

b) Equation du type $f'' - a^2 f = 0$ avec $a \neq 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' - a^2 f = 0$ avec $a \neq 0$ sont les fonctions :

$f_{(A,B)} : x \mapsto Ae^{ax} + Be^{-ax} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

**Exemples**

Résoudre dans $\mathbb{R}$

(1) $f'' - 3f = 0$

(2) $f'' - 9f = 0$ et trouver le plan muni du repère (O, I,J) l'unique solution dont la courbe représentative admet à l'origine une tangente de coefficient directeur – 1.

## 3. Equation différentielle du type : $f'' + a^2 f = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f'' + a^2 f = 0$ avec $a \neq 0$ sont les fonctions :

$f_{(A,B)} : x \mapsto A\cos ax + B\sin ax \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

**Exemples**

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f = 0$ sachant que f est une fonction paire et $f(0) = 1$
2. a) Résoudre l'équation différentielle : (E) : $16f'' + f = 0$

   b) Déterminer la solution f de (E) vérifiant : $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = -\sqrt{3}$

   c) Démontrer que : pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\cos(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3})$

## 4. Tableau récapitulatif

| Equation différentielle du type … | a pour solution les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : |
|---|---|
| $f' + af = 0$ | $f_k : x \mapsto ke^{-ax} \quad (k \in \mathbb{R})$ |
| $f'' = 0$ | $f_{(A,B)} : x \mapsto Ax + B \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |
| $f'' - a^2 f = 0$ | $f_{(A,B)} : x \mapsto Ae^{ax} + Be^{-ax} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |
| $f'' + a^2 f = 0$ | $f_{(A,B)} : x \mapsto A\cos ax + B\sin ax \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ |

# EXERCICES

**Exercice 1**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $4y' + 3y = 0$

b) $y\ln 5 - y' = 0$

c) $\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0$

d) $y\sqrt{3} = y'$

**Exercice 2**

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $(E) : 3y' + y = 0$ et $y(1) = e$

b) $(E) : y' + y\ln 2 = 0$ et $y(1) = 1$

c) $(E) : y' = 0$ et $y(1) = -1$

**Exercice 3**

Le plan est muni du repère (O,I,J).

Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse – 2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$ .

**Exercice 4**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 4y = 0$

b) $y'' + 16y = 0$

**Exercice 5**

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a) $(E) : y'' + 16y = 0$ $\quad$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$

b) $(E) : y'' - (\ln 2)^2 y = 0$ $\quad$ $y(0) = 1$ et $y(2) = 1$

c) $(E) : 4y'' + y = 0$ $\quad$ $y(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

**Exercice 6**

Le plan est muni du repère (O,I,J).

Déterminer la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' - \pi f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point $A(0;\pi)$ une tangente de coefficient directeur $\pi$ .

**Exercice 7**

Déterminer la solution f des équations différentielles suivantes :

(1) $9f'' + f = 0$ sachant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$ et $\int_0^{\pi} f(x)dx = 3$

(2) $f'' - f = 0$ sachant que f est une fonction paire et $f(0) = 1$.

**Exercice 8**

**Partie A**

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E): f' + kf = 0$ où f est une fonction dépendant du temps t $(t \geq 0)$ et k est une constante réelle strictement positive.
2. Préciser la solution particuliére $f_1$ correspondant à la condition initiale : $f_1(0) = 2$.

**Partie B**

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) décroit à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi : $g' + kg = 0$ où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t $(t \geq 0)$ et k une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. A l'aide de la partie A, déterminer l'expression g(t) à l'instant t sachant que $g(0) = 2$. Etudier les variations de g et donner l'allure de sa représentation graphique.
2. Calculer en fonction de k l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $M(0;2)$ avec l'axe des temps.
3. On pose : $g_1 = g(t_1)$, $g_1$ étant le taux de glycémie à l'instant $t_1$ donné et positif.
   Déterminer la formule donnant le coefficient k en fonction de $g_1$

**Exercice 8** (extrait du BAC 2002)

On se propose de chercher les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E): $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$

1) Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = x - 1$ est solution de (E).
2) Soit (E') l'équation différentielle: $f'(x) + 2f(x) = 0$.
   a) Résoudre (E').
   b) Soit k un nombre réel. Démontrer que les fonctions $f_k$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que: $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$ sont solutions de (E).
3) a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de (E) alors $f - g$ est solution de (E').
   b) En déduire les solutions de (E).

# SUJETS TYPE BACCALAUREAT

## SUJET 1 : (BAC D 2003)

### EXERCICE 1

1. Un dé A, bien équilibré possède :
   - une face numérotée 1;
   - deux faces numérotées 2;
   - une face numérotée 4;
   - une face numérotée 5;
   - une face numérotée 6.

   a) On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilitité d'obtenir le numéro 2 ?

   b) On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres.
   Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

2. Un autre dé B, bien équilibré, possède :
   - une face numérotée 1;
   - deux faces numérotées 2;
   - deux faces numérotées 4;
   - une face numérotée 6.

   On lance 3 fois de suite le de B comme à la question 1.b).

   Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à $\frac{1}{54}$.

3. Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B.
   Egny tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre à 3 chiffres comme décrit précédemment.

   a) Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$

   b) Egny a obtenu 421; calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

### EXERCICE 2

Soit a un nombre réel donné. On considère les suites (U) et (V) définies respectivement par :

- $U_0 = 3,\ U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_n = U_{n+1} - U_n$

1. On pose $a = 1$

   a) Démontrer que la suite (V) est constante et donner sa valeur.

   b) En déduire que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

   c) On pose $S_n = U_o + U_1 + ... + U_n$. Exprimer $U_n$ puis $S_n$ en fonction de n.

2. On pose $a = -5$

   a) Démontrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.

   b) Exprimer $V_n$ en fonction de n.

   c) Pour tout entier supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme $T_n$ où $T_n = V_o + V_1 + ... + V_{n-1}$

   d) Exprimer $U_n$ en fonction de $T_n$

   e) En déduire que la suite (U) est divergente.

**PROBLEME**

**Partie A**

Soit h la fonction dérivabie sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$
2. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) = (2-x)e^{-x}$.
3. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
4. 
   a) Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, 2]$ l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$

   b) Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
5. En déduire que, pour tout nombre réel x :

   si $x < \alpha$ alors $h(x) < 0$ ;

   si $x > \alpha$ alors $h(x) > 0$.

**Partie B**

Soit fia fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (unité : 2 cm).

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. *(On pourra mettre x en facteur clans l'expression def(x)).*
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = h(x)$.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que la droite ($\Delta$) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Etudier la position relative de ($\Delta$) et (C).
6. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Tracer ($\Delta$), (T) et (C) *(On prendra : $\alpha \approx -0{,}6$ et $f(\alpha) \approx 0{,}3$ ).*
9. Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif.

   a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$.

   b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par (C), ($\Delta$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

   c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

## **SUJET 2 : (BAC D 2004)**

**EXERCICE 1**

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

1. Le camionneur arrive à un barrage donné.
   *(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus)*

   a) Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

   b) Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré est égale à 0,6.

2. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10 000 francs (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

- On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert. On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.
    a) Déterminer la loi de probabilité de X.
    b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 18 000.

- On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe.
    Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

**EXERCICE 2**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$ telles que : $z_A = 4i$, $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -2\sqrt{3} + 2i$

1. Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes $z_A$, $z_B$ et $z_C$.
2. Utiliiser les résultats précédents pour placer les points A, B et C. Unité graphique: 1 cm.
3. Démontrer que le triangle OBA est équilatéral.
4. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
5. On désigne par K le milieu du segment [OA] et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.
    a) Déterminer l'écriture complexe de S.
    b) Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment [AC].
    c) En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment [AC] est ta droite (OI).

**PROBLEME**

**Partie A**

On donne la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4$

1. Résoudre l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$
2. Démontrer que :

$$\forall x \in \left]-\infty;0\right[ \cup \left]\ln 4;+\infty\right[, \quad P(x) > 0$$
$$\forall x \in \left]0;\ln 4\right[, \quad P(x) < 0$$

**Partie B**

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^{x} - 2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ en $-\infty$, à gauche et à droite en $\ln 2$.
3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f ' sa dérivée.
    a) Vérifier que : $\forall x \in \left]-\infty;\ln 2\right[ \cup \left]\ln 2;+\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{\left(e^{x} - 2\right)^{2}}$
    b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
    c) Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
5. Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $\left]-\infty;\ln 2\right[$.

6. Démontrer que: $\forall x \in ]-\infty;\ln 2[ \cup ]\ln 2;+\infty[$, $f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$
7. Démontrer que la droite ($\Delta$) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$
8. Etudier la position de (C) par rapport à ($\Delta$) sur l'intervalle $]-\infty;\ln 2[$.
9. Construire (C)

**Partie C**

Soit $\lambda$ un nombre réel strictement négatif.

1. Exprimer en fonction de $\lambda$ l'aire $A(\lambda)$ en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite ($\Delta$) et la droite d'équation $x = \lambda$.
2. 
   a) Calculer la limite A de $A(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $-\infty$.
   b) Hachurer sur la figure la partie du plan dont l'aire est ésale à A.

## SUJET 3 : (BAC D 2005)

**EXERCICE 1**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est le centimètre. On donne le point A d'affixe i.

Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\left|(1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\right| = 6$.

1. a) Démontrer qu'un point M appartient à $(\Gamma)$ si et seulement si son affixe z vérifie : $|z - i| = 3$
   b) En déduire la nature de $(\Gamma)$.

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.
   L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.
   Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par S.
   a) Démontrer que : $z' = (1-i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. On notera $\Omega$ son centre.

3. On désigne par (C) l'image de $(\Gamma)$ par S.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C).
   b) Construire (C) et $(\Gamma)$.

4. Soit D le point tel que : $D \in [\Omega B)$ et $\Omega D = 2\Omega B$.
   a) Construire les points D et $\Omega$ dans le même repère.
   b) Démontrer que le triangle $\Omega CD$ est équilatéral.

5. Soit r la rotation de centre $\Omega$ qui transforme C en D.
   a) Déterminer l'écriture complexe de r.
   b) Calculer l'affixe de D.

## EXERCICE 2

A) Soit la fonction définie de $[2;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$.

1. Calculer f(2) puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que : $\forall x\in[2;+\infty[;\quad f(x)=6-\dfrac{8x+16}{x^2+5x+6}$
3. a) Démontrer que : $\forall x\in[2;+\infty[;\quad f'(x)=\dfrac{8(x+2)^2}{\left(x^2+5x+6\right)^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f.

B) Une urne contient un jeton marqué 1, deux jetons marqués 2 et n jetons marqués 3, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On tire simultanément deux jetons de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les deux jetons extraits de l'urne.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par X
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Soit E(X) l'espérance mathématique de X.
   a) Démontrer que : $E(X)=\dfrac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$
   b) Déterminer n pour que E(X) soit égale à 5.
   c) Déduire de la partie A que : $4,4\leq E(X)<6$. Donner une interprétation de cet encadrement.

## PROBLEME

### Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3+1-2\ln x$

1. a) Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$

   b) Déterminer le signe de g'(x) suivant les valeurs de x.

   c) En déduire les variations de g.

2. a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$, $g(x)>0$.

### Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par :
$f(x)=\dfrac{2}{3}x-1+\dfrac{\ln x}{x^2}$
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) En déduire que (C) admet une asymptote verticale.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{2}{3}x-1$ est une asymptote oblique à (C).
   b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3. a) Démontrerque : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$
   b) Déterminer les variations de f. *(On pourra utiliser la question A.2.b)*
   c) Dresser le tableau de variations de f.
4. a) Démontrer que l'équation : $x\in\left]0;+\infty\right[,\ f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$.
   b) Démontrerque : $1{,}15<\alpha<1{,}3$.
   c) Construire (D) et (C) dans le même repère. *(On prendra $\alpha=1{,}2$).*
5. $\lambda$ est un nombre réel strictement supérieur à 1. $A(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par (D), (C) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\lambda$
   d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.
   e) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

## <u>SUJET 4</u> : (BAC D 2006)

### <u>EXERCICE 1</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (0, I, J). L'unité est !e centimètre. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$ tels que : $z_A=2+6i$ ; $z_B=4+2i$ ; $z_C=6i$

d) Placer les points A, B et C dans le plan.

e) a) Déterminer la forme algébrique de $z=\frac{z_O-z_A}{z_B-z_A}$ où $z_O$ est l'affixe de l'origine du repère.

b) Ecrire Z sous forme trigonométnque.

c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$.

f) Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'écriture complexe de r.
b) Déterminer l'image de 0 par r.
c) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

g) a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C).
b) Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

### <u>EXERCICE 2</u>

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal. Exemples de codes ; 0375 ; 9918 ; 2400.

*Les deux parties A) et B) suivantes sont indépendantes.*

A)

1. Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?
2. Démontrer que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.
3. Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2; 4; 5; 7.

B) Monsieur KONE, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code. Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2; 4; 5; 7. Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.
Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais Infructueux successifs. Monsieur KONE joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a) E : « Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai ».
   b) F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai».

2. Soit G l'événement : « Monsieur KONE retire de l'argent ».
   Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.
3. De retour à la maison, Monsieur KONE annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.
   Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux. X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

**PROBLEME**

A) Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$.
3. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions sur $]0;+\infty[$.
   On désigne par $\alpha$ la plus petite des solutions.
   b) Démontrer que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.
   c) Calculer g(1).
   d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :
   si $x \in ]0;\alpha[ \cup ]1;+\infty[$ alors $g(x) > 0$.
   si $x \in ]\alpha;1[$ alors $g(x) < 0$.

B) Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (0, I, J). L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1. a) Déterminer la limite de f en 0. Donner une Interprétation graphique du résultat.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
3. a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$
   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Etudier la position de (D) par rapport à (C).
6. Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$.
7. Soit A l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$.
   Calculer A.

## SUJET 5 : (BAC D 2007)

### EXERCICE 1

On considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.
2. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)}{2(V_n + U_n)}$
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq V_n$
   et que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$
   c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$.
3. a) Démontrer que la suite $(U_n)$ est croissante et que la suite $(V_n)$ est décroissante.
   b) En déduire que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ convergent.
   c) Démontrer que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ ont la même limite l.
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}V_{n+1} = U_nV_n$.
   b) En déduire la valeur exacte de l.

### EXERCICE 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

**Partie A**
On choisit au hasard un élève de ta population. On note :

B l'événement : «l'élève est bachelier» ;
T l'événement : «l'élève est admis au test» ;
A l'événement : «l'élève est bachelier et est admis au test».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a) la probabilité P(B) de l'événement B ;
   b) la probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;
   c) la probabilité de $P_{\overline{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,3
3. Calculer la probabilité de 'événement T.
4. Déduire des questions précédentes que les événements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

***Partie B***

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

**PROBLEME**
L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h définies ci-dessous.

- f est la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$
- g est la fonction définie sur l'ensemble $D_g=\left[0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ par : $g(x)=f(\ln x)$ et $g(0)=1$.
- h est la fonction dérivabie sur $\mathbb{R}$ et définie par $h(x)=f(e^x)$.

**Partie A**

1. Démontrer que :

   a) $\forall x\in D_g$ et $x\neq 0$, $g(x)=1-\frac{4}{\ln x+1}$

   b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=1-\frac{4}{e^x+1}$
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

**Partie B**
On note $(C_g)$ la représentation graphique de g dans le plan muni du repère orthogonal $R_1$ = (0,1, J).
L'unité sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 2 cm.

1. a) Démontrer que g est continue en 0.
   b) Démontrer que $(C_g)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
3. Démontrer que g est strictement croissante puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer $(C_g)$ et ses asymptotes dans le repère $R_1$.

**Partie C**

On note $(C_h)$ la représentation graphique de h dans le plan muni du repère orthonormé $R_2$ = (0, I, J). L'unité graphique est 1 cm.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $h'(x) = \dfrac{4e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ .
3. En déduire les variations de h puis dresser son tableau de variation.

4. On note A et B les points d'intersection respectifs de $(C_h)$ avec les droites (OI) et (OJ).
   a) Déterminer les coordonnées de chacun des points A et B.
   b) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $(C_h)$ en B est y = x - 1.
   c) Démontrer que B est un centre de symétrie de $(C_h)$

5. a) Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un l'intervalle que l'on précisera.
   b) Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque $h^{-1}$ de h.
6. a) Tracer (T), $(C_h)$ et ses asymptotes dans le repère $R_2$
   b) En déduire la représentation graphique $(\Gamma)$ de la fonction réciproque $h^{-1}$ dans le repère $R_2$.

## SUJET 4 : (BAC D 2008)

**EXERCICE 1**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (6-5i)z^2 + (1-20i)z - 14 - 5i = 0$.

1. a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).
   b) Résoudre dans X l'équation : $z^2 + (6-4i)z + 5 - 14i = 0$
   c) Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).
2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i$ ; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$.
   a) Placer les points A, B et D dans le repère.
   b) Ecrire le nombre complexe $Z = \dfrac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.
   c) En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B ;
3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.

a) Justifier que le traingle ABB’ est rectangle isocèle en B’.
b) En déduire la construction du point B’.

4. a) Déterminer l’écriture complexe de S.
   b) Calculer l’affixe de B’.

**EXERCICE 2**

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005. $X_i$ est la note de mathématiques, $Y_i$ la note en sciences physiques.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 14 | 12 | 17 |
| $Y_i$ | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 9 | 14 |

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d’un repère orthonormé (O, I, J). L’unité graphique est 1 cm.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.
3. a) Vérifier que la covariance $\text{cov}(X,Y)$ de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$.
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
4. Démontrer qu’une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $y=\frac{19}{22}x-\frac{17}{44}$
5. Sur la base de l’ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d’un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

**PROBLEME**

L’objet de ce problème est l’étude de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x)=2x-3+\frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
L’unité graphique est 2 cm.

**Partie A**

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $g(x)=2x^2+1-\ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de calculer les limites).
2. Justifier que $\forall x\in]0;+\infty[;g(x)>0$.

**Partie B**

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Démontrer que la droite (D) d’équation $y=2x-3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x - 4$

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.

   b) Justifier que $1,3 < \alpha < 1,4$

**Partie C**

On pose $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1. a) Déterminer le sens de varaiation de h sur $]0;+\infty[$

   b) Calculer h(1) puis justifier que : $\begin{cases} \forall x \in ]0;1[ ; h(x) > 0 \\ \forall x \in ]1;+\infty[ ; h(x) < 0 \end{cases}$

2. a) Démontrer que $\forall x \in ]0;+\infty[ ; \varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

   b) Etudier les variations de $\varphi$ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

**Partie D**

1. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra
2. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

# SUJET 6

## EXERCICE 1

Dans Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,I,J)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} z - \sqrt{3} + i.$$

1. Déterminer les images par S des points O et A.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
3. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C').
   b) Construire (C').

## EXERCICE 2

Le parc des compteurs d'eau des abonnés d'une commune se repartit de la façon suivante: 10% des compteurs ont moins de deux ans et se trouvent de ce fait sous garantie. 60% des compteurs ont entre deux ans et vingt ans. 30% des compteurs ont plus de vingt ans, lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante:

- $\dfrac{1}{100}$ s'il s'agit d'un compteur sous garantie.
- $\dfrac{1}{20}$ s'il s'agit d'un compteur de deux à vingt ans.

- $\frac{1}{10}$ s'il s'agit d'un compteur de plus de vingt ans.

On note les événements:

A: " le compteur est sous garantie"
B: " le compteur a entre deux ans et vingt ans"
C: "le compteur a plus de vingt ans "
D: " le compteur est défectueux"

1. Calculer la probabilité des évènements suivants:
   a) " le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux"
   b) " le compteur est défectueux"
2. l'agent constate qu'un compteur est défectueux.
   Calculer la probabilité qu'il soit encore sous garantie.
3. l'agent trouve huit compteurs défectueux.
   Quelle est la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit encore sous garantie?

## PROBLEME

A) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x)=1+x(1-\ln x)$.

1. Déterminer le sens de variation de g et ses limites aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$
   Dresser son tableau de variation.
2. a) Montrer qu'il existe un réel unique a tel que $g(a)=0$.
   b) Préciser suivant les valeurs de x, le signe de g(x).
   c) Calculer g(3) et g(4) et montrer que $a\in]3;4[$.
3. Calculer une valeur approchée de a, à 0,1 près par excès.

B) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$

1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de $]0;+\infty[$.
   b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de g(x).
   c) Indiquer les variations de la fonction f.
2. d) Montrez que $f(a)=\frac{1}{a}$
3. Construire la représentation graphique (C) de f sur l'intervalle $]0;8]$ dans un repère orthogonal (O,I,J) (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

C) On se propose de trouver une valeur approchée de l'intégrale : $I=\int_1^2 f(x)dx$

1. h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x\ln x-x$
   a) Calculer la dérivée de h.
   b) En déduire l'intégrale $L=\int_1^2 \ln x dx$
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;2]$ on a : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{1+x}\leq\frac{1}{2}$
3. En déduire un encadrement de I, avec des décimaux comportant deux chiffres après la virgule.

# SUJET 7

## EXERCICE 1

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1, u_2, u_3$ d'une part et $v_1, v_2, v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormé (O,I,J) (unité graphique : 5 cm) tracer les droites (D) et ($\Delta$) d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.

   Utiliser (D) et ($\Delta$) pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1, A_2, A_3$ d'abscisses respectives $u_1, u_2, u_3$ ainsi que les points $B_1, B_2, B_3$ d'abscisses respectives $v_1, v_2, v_3$

3. On considère la suite $(s_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$
   a) Calculer $s_0, s_1, s_2, s_3$. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite $(s_n)$?
   b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(s_n)$ est une suite constante.

4. On considère la suite $(d_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$
   a) Montrer que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique.
   b) Donner l'expression $d_n$ en fonction de n.
5. En utilisant les résultats des questions 3.b) et 4.b) donner l'expression $u_n$ et $v_n$ en fonction de n.
6. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent. Préciser leurs limites.

## EXERCICE 2

*Les parties A et B sont indépendantes.*

A) On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$
   1. a) Montrer que $u^2 = -2\sqrt{3} - 2i$
      b) Caluler $|u^2|$ et $\operatorname{Arg}(u^2)$
   2. a) En déduire le module de u et un argument de u.
      b) Vérifier que $\dfrac{19\pi}{12}$ est un argument de u.
   3. a) Déduire de ce qui précéde les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$.
      b) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ puis celles de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

B) On considère l'équation suivantes : (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i = 0$.
   1. a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire que l'on calculera.
      b) Résoudre (E).

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$. On considère les points A, B, et C d'affixes respectives 2i, 1 – i et 2 + i. S est la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Déterminer l'écriture complexe de S.
   c) D est l'image de B par S. Calculer l'affixe de D.

**PROBLEME**

**Partie A**

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-\ln x-xe^x+1$

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solutions $\alpha$ sur $]0;+\infty[$ et que :
   $1{,}23<\alpha<1{,}24$
4. Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

**Partie B**

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. a) Démontrer que f est continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter gémétriquement ce résultat.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-\ln x\right)^2}$
   b) En utilisant la question A. 4., déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{e^\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}$
5. Construire (Cf) la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2 cm) on prendra $\alpha\approx 1{,}2$ et $f(\alpha)\approx 0{,}3$.

## SUJET 8

**EXERCICE 1**

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires Y d'une entreprise commerciale en fonction du budget de publicité X. (X et Y sont exprimés en millions de francs CFA)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 18 | 20 | 22 | 25 | 30 | 34 | 35 | 40 | 42 | 44 |
| Y | 300 | 350 | 340 | 360 | 400 | 380 | 450 | 480 | 490 | 520 |

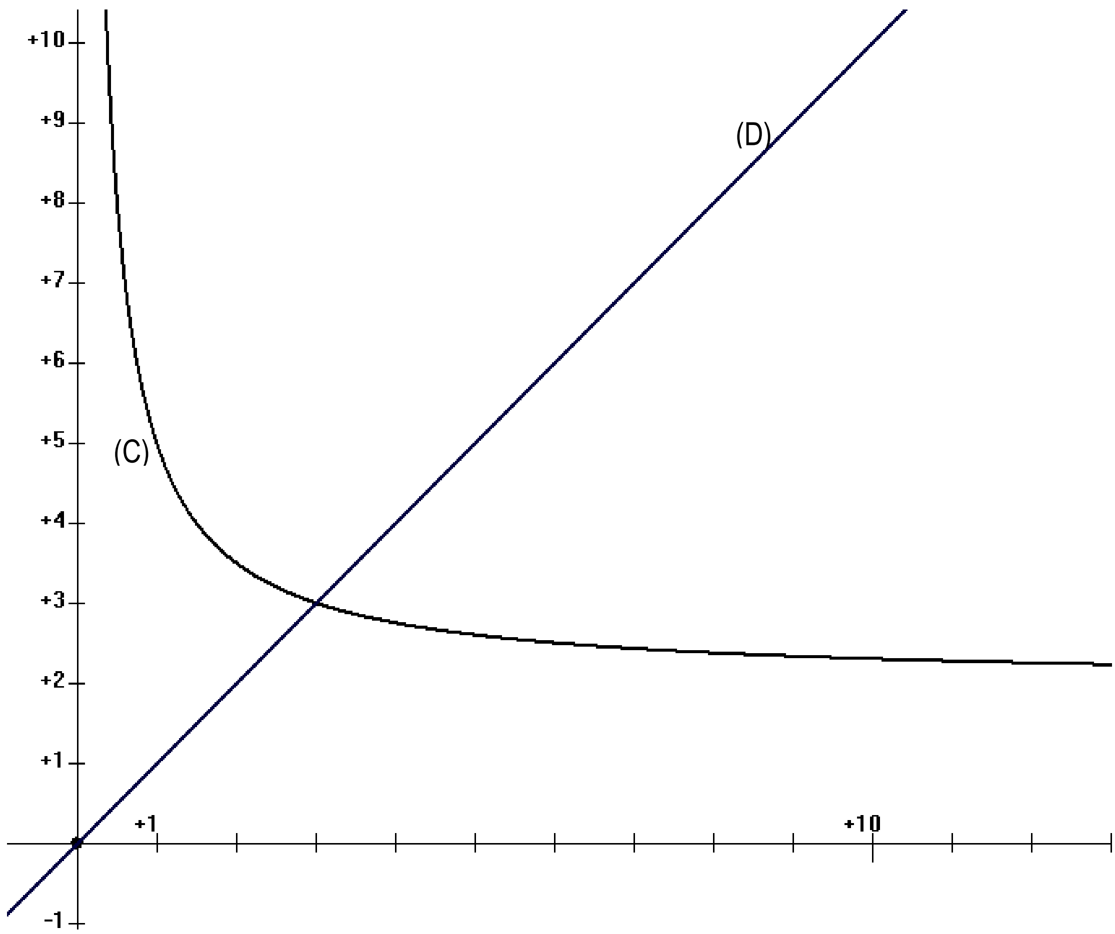
1. Représenter graphiquement le nuage de points correspondant dans un repère orthogonal.
   (1 cm pour 2 millions de francs en abscisses et 2 cm pour 100 millions en ordonnées).
   Calculer cov (X,Y)

2. a) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression linéaire de
Y en X (On donnera les coefficients a et b de l'équation sous la forme d'arrondi d'ordre 2).
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.
c) Justifier l'existence d'une forte corrélation linéaire entre X et Y.
d) Calculer, selon l'ajustement ainsi réalisé, une estimation du chiffre d'affaires pour un budget de publicité de 50 millions de francs CFA.

**EXERCICE 2**

On considère la suite U définie par: $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n}$

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.
   a) Représenter sur l'axe (OI) les termes $U_0$; $U_1$; $U_2$; $U_3$ de la suite U à l'aide de la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$.
   b) Que peut-on conjecturer quand à la convergence de la suite U?
2. a) Montrer que $f([1;5]) \subset [1;5]$.
   b) En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $1 \leq U_n \leq 5$.
3. Soit V la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$.
   a) Démontrer que V est une suite géométrique de raisons $-\dfrac{1}{3}$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $V_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$.
4. a) Exprimer $U_n$ en fonction de $V_n$, puis en fonction de n.
   b) En déduire la limite de la suite U.



**PROBLEME**
**Partie A**

Soit g la fonction dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et définie par $g(x)=\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|$.

1. a- Justifier que $D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
   b- Calculer g'(x) pour $x\in D_g$
   c- Etudier le sens de variation de g
2. Calculer g(0) puis démontrer que :
   $\forall x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]1;+\infty[,\quad g(x)>0$ et $\forall x\in\,]0;1[,\quad g(x)<0$

## Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et définie par $f(x)=x\ln|x-1|$.
On note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *L'unité graphique est 2 cm.*

1. a- Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1. Interpréter graphiquement ces résultats.
   b- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c- Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. a- Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\quad f'(x)=g(x)$.
   b- En déduire les variations de f.
   c- Dresser le tableau de variation de f.
3. a- Démontrer que (C) coupe la droite (OI) en deux points dont on précisera les coordonnées. On notera A le point dont l'abscisse est non nulle.
   b- Soit (T) la tangente à (C) en A. Justifier que une équation de (T) est $y=2x-4$.
   c- Soit d la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $d(x)=f(x)-2x+4$
   Etudier les variations de la fonction d puis démontrer que :
   $\forall x\in\,]1;2[,\ d(x)<0$ et $\forall x\in\,]2;+\infty[,\ d(x)>0$.
   En déduire la position relative de (C) par rapport à (T) sur $]1;+\infty[$.
4. Construire (C) et (T) dans le même repère.
5. On désigne par h la restriction de f à $]1;+\infty[$
   a- Démontrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle F que l'on précisera.
   b- Préciser $(C_h)$ la représentation graphique de h et construire $(C_{h^{-1}})$ celle de la bijection réciproque de h dans le même repère que (C).

## Partie C

1. a- Déterminer les nombres réels a, b, et c tels que pour tout x différent de 1 :

$$\frac{x^2}{2x-2}=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

   b- En déduire une primitive de la fonction k définie par $k(x)=\frac{x^2}{2x-2}$ sur $]-\infty;0]$
2. $\lambda$ est un nombre réel strictement négatif.
   Soit $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI), la droite d'équation par $x=\lambda$ et (OJ)
   a) En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer A ( $\lambda$ ) en fonction de $\lambda$

b) Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

## SUJET 9

### EXERCICE 1

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément; 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.

- Si le joueur obtient 3 boules rouges, événement que l'on note $R_3$ , il gagne 100 euros.
- S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, événement que l'on note $R_2$, il gagne 60 euros.
- En fin s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges, il ne gagne rien, on note cet événement E.

2. Montrer que les probabilités des événements $R_2$ et $R_3$ sont: $P(R_2) = \frac{5}{12}$ et $P(R_3) = \frac{1}{12}$
3. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
4. Dans cette question on modifie les règles du jeu de la façon suivante:
   - Si le joueur réalise les évènements $R_3$ ou $R_2$, il ne gagne plus d'agent immédiatement mais est qualifié pour la suite du jeu, que l'on appelle "Banco"
   - Si l'événement E est réalisé, le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifie pour le "Banco". Le "Banco" consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'euroe; si celle-ci est vente le joueur empoche les 200 euros du "Banco" et si elle est rouge le joueur a perdu mais repart avec une prime de "consolation" de 40 euros.

   a) Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du "Banco" sachant que $R_3$ est réalisé.

   b) Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du " Banco sachant que $R_2$ est réalisé?

   c) En déduire la probabilité d'empocher les 200 euros du "Banco".

### EXERCICE 2

On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur ℕ par : $a_0 = 1$, $b_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ ; $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

1. Calculer $a_1$ et $b_1$.
2. Soit la suite $(d_n)$ définies sur ℕ par : $d_n = b_n - a_n$.

   a) Démontrer que $(d_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $d_0$ et la raison.

   b) En déduire une expression de $d_n$ en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, $d_n > 0$.

   c) Calculer la limite de la suite $(d_n)$.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$.

   En déduire les variations des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

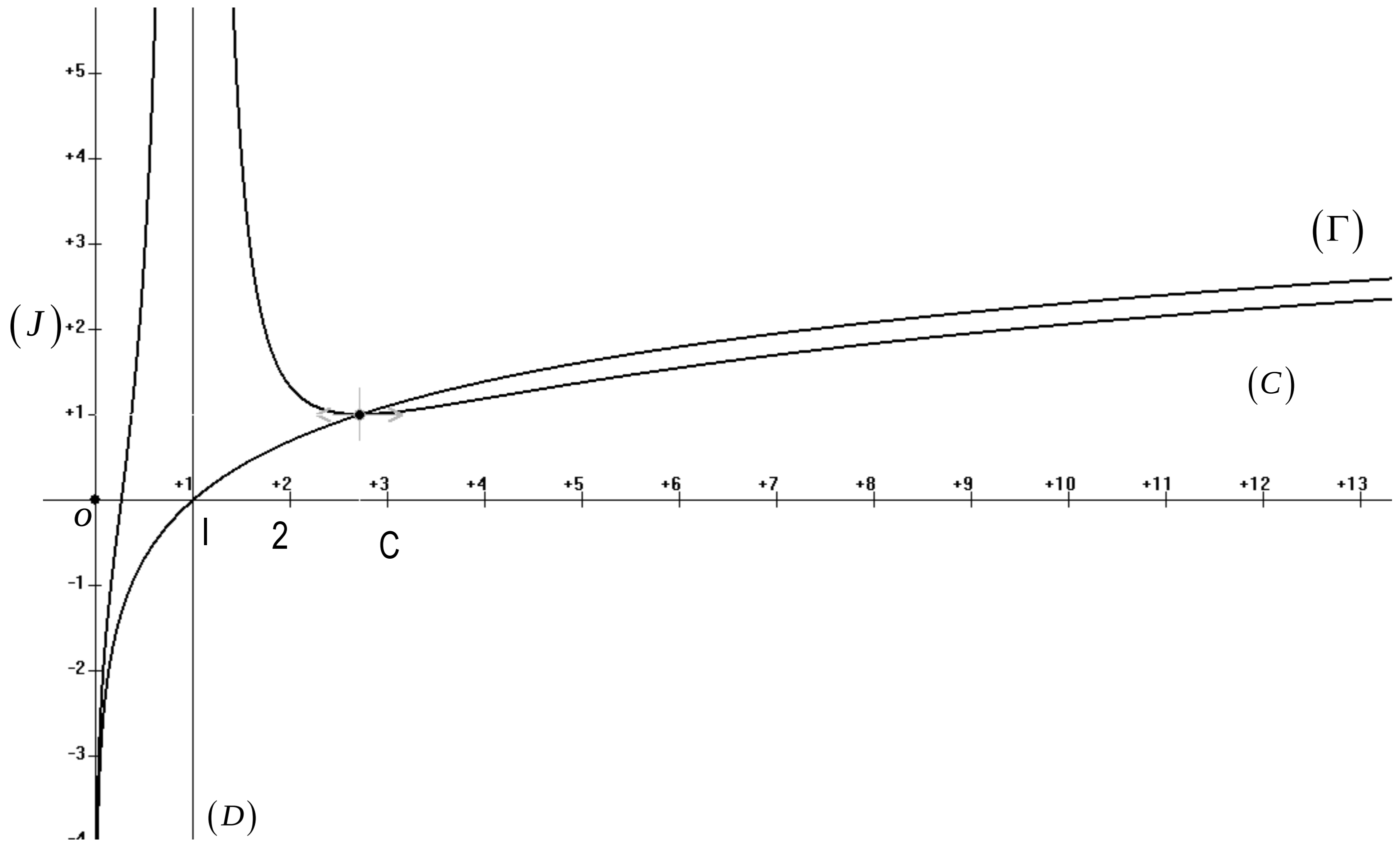
   c) Déduire de 3. a) et 3. b) que les $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes.
4. a) Déduire de la question 3. a) que, pour tout entier naturel n strctement plus grand que 1, $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + ... + d_{n+1})$.

b) En déduire la limite de la suite $(a_n)$ puis celle de la suite $(b_n)$.

## PROBLEME

1ere PARTIE : (Exploitation graphique)

$(C)$ et $(\Gamma)$ représentent respectivement les fonctions f et ln. (*Unité graphique : 2 cm)*




En observant le graphique ci-dessus :

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Préciser $\lim_{x\to 0} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Préciser les asymptotes à (C) (noms et équations).
4. Donner le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5. Préciser la position relative de (C) et $(\Gamma)$.

2e PARTIE : (Vérification des observations graphiques).

*Partie A*

g est la fonction définie par $g(x) = (\ln x)^3 + \ln(x) - 2$.

1. Donner l'ensemble de définition de g et calculer les limites aux bornes.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Calculer $g(e)$ et justifier que $\forall x \in ]0;e[$ ; $g(x) < 0$ et $\forall x \in ]e;+\infty[$ ; $g(x) > 0$.

*Partie B*

f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^3 - \ln(x) + 1}{(\ln x)^2}$

1. Détermine l'ensemble définition de f et justifier que la courbe (C) de la première partie représente cette fonction (pour cela on calculera $f(e)$ et les limites aux bornes de $D_f$).
2. a) Montrer que $\forall x \in D_f$ ; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^3}$.

   b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

   c) Déterminer une équation de la tangente.(T) à (C) au point $B\left(\dfrac{1}{e};1\right)$.

1. a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$.

   b- Montrer que $0,2 < \alpha < 0,3$
2. h est la fonction définie par $h(x)=\ln x$ et (T) sa courbe représentative dans le repère précédent.

   a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$ et interpréter graphiquement ce résultat.

   b- Etudier la position relative de (C) et (T).Soit d la restriction de f à l'intervalle $\left[e;+\infty\right[$
3. Soit d la restriction de f à l'intervalle $\left[e;+\infty\right[$

   a- Montrer que d est une bijection de $\left[e;+\infty\right[$ vers un intervalle J à préciser.

   b- Donner les caractéristiques de la bijection complexe $d^{-1}$de d. On note C' la courbe représentative de $d^{-1}$

   c- Reproduis la partie de (C) sur $\left[e;+\infty\right[$ et construis (C').

Partie C

t est un nombre réel strictement supérieur à e.

On pose $I=\displaystyle\int_e^t \frac{1}{\ln x}dx$ et $J=\displaystyle\int_e^t \frac{1}{(\ln x)^2}dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.
2. En déduire l'aire A(t) en cm² de la région du plan limitée par (C), (T) et les droites d'équations $x=e$ et $x=t$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

## SUJET 10

### EXERCICE 1

On considère dans ℂ l'équation (E) : $z^3+(4-2i)z^2+(8-6i)z+8-4i=0$.

1. a) Démontrer que (E) admet une solution réelle $z_0$, que l'on déterminera.

   b) Résoudre l'équation (E).
2. On considère, dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J) *(unité graphique : 2 cm)*, les points A, B et C d'affixes respectives $-1+3i$, $-2$ et $-1-i$. Soit r la rotation d'angle orienté de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega$ d'affixe i.

   a) Placer les points A, B et C dans le repère.

   b) Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation r.

   c) Déterminer l'antécédent D du point C par r. Placer le sur la figure.
3. a) Démontrer que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Démontrer que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle

*(BAC D 1997 Côte d'Ivoire)*

**EXERCICE 2**

Au cours d'une séance d'éssais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule. Au moment du top sonore, on mesure la vitesse notée $x_i$ (en km/h) de l'automobile, puis la distance notée $y_i$ (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule. Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

| Vitesse (en km/h) : X | 20 | 43 | 62 | 80 | 98 | 115 | 130 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distance d'arrêt (en m) : Y | 4 | 21 | 36 | 68 | 101 | 136 | 169 |

*1.* Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i;y_i)$ *(1 cm pour 10 km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 m sur l'axe des ordonnées)*

2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ du caractère X et la moyenne $\overline{Y}$ du caractère Y.
3. a) Calculer V(X) et $\text{cov}(X,Y)$.

   b) Déterminer une équation de la droite de regression $(\Delta)$ de Y en X.

   c) Déterminer une équation de la droite de regression $(\Delta')$ de X en Y.

   d) Tracer $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sur la même figure.
4. Calculer le coefficient de correlation linéaire r et interpréter.
5. a) Estimer la vitesse de ce véhicule lorsque sa distance d'arrêt est de 180 m.

   b) Estimer la distance d'arrêt de ce véhicule lorsqu'il roule à 150 km/h.

**PROBLEME**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 4 cm)

**Partie A**

On considère la fonction numérique f définie sur par $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. On note $(\Gamma)$ la courbe représentative de f.

1. a) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. Justifier que $(\Gamma)$ admet pour asymptotes la droite (OI) et la droite (D) d'équation $y=1$.
3. a) Démontrer que le point $K\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(\Gamma)$.

   b) Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équation : $x-4y+2=0$ est une tangente à $(\Gamma)$ en K.
4. On se propose d'étudier la position relative de $(\Gamma)$ par rapport à $(\Delta)$. Soit h et $\varphi$ les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x$ et $\varphi(x)=4e^{-x}-\left(1+e^{-x}\right)^2$.

   a) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{4\left(1+e^{-x}\right)^2}$

   b) Etudier le sens de variation de $\varphi$ et dresser son tableau de variation. *(On ne demande pas de calculer les limites de $\varphi$ en $-\infty$ et en $+\infty$).*

   c) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\le 0$.

   d) Démontrer que h est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   e) A l'aide des questions précédentes, démontrer que :

   $\forall x\in\left]-\infty;0\right]$, $h(x)\ge 0$ et $\forall x\in\left[0;+\infty\right[$, $h(x)\le 0$

   f) En déduire la position relative de $(\Gamma)$ par rapport à $(\Delta)$.

g) Tracer la courbe $(\Gamma)$, les droites $(\Delta)$ et (D) dans le repère (O, I, J).

**Partie B**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$. (C) est la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J) et $(\Delta')$ est la tangente à (C) en K.

1. Démontrer que $(\Gamma)$ et (C) sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
2. En déduire les constructions de $(\Delta')$ et (C) dans le repère (O, I, J) (Utiliser une couleur différente de la précédente).
3. a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

   b) Calculer en $cm^2$, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation $x=1$.