RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

Classes préparatoires économiques et commerciales option scientifique, première année (ECS1)

Catherine Laidebeure
Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy
2009 – 2010

fiche n°1

CALCUL ALGEBRIQUE

Fractions

$\frac{a}{b}$ est défini si et seulement si $b \neq 0$.

$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ $\qquad$ $\mathrm{Sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{Sgn}(ab)$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ $\qquad$ $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$ $\qquad$ $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$

Puissances

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^n = a \times \ldots \times a$ (n fois) $\quad$ si $n \in \mathbb{N}^*$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $a^b = e^{b \ln a}$ si $a > 0$

$a^b \times a^c = a^{b+c}$ $\qquad$ $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $\qquad$ $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

$a^c \times b^c = (ab)^c$ $\qquad$ $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

Inégalités

Pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence : $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$.

$a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c$ (on note $a < b < c$)

$a < b$ et $a' < b' \Rightarrow a + a' < b + b'$

$0 < a < b$ et $0 < a' < b' \Rightarrow aa' < bb'$ (seulement s'ils sont positifs)

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc & \text{si } c > 0 \\ ac > bc & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

fiche n°1 (suite)

Racines carrées

$\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$.

$\sqrt{a}$ est défini si et seulement si $a \geq 0$.

$\sqrt{a} \geq 0$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\qquad$ $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $\qquad$ si $a \geq 0$ et $b > 0$

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\qquad$ Mais en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a < b^2 \end{cases}$ $\quad$ si $a \geq 0$

$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow b < 0$ ou $\begin{cases} b \geq 0 \\ a > b^2 \end{cases}$

Valeurs absolues

$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$ $\qquad$ donc $\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ |a| = \mathrm{Max}(a, -a) \end{cases}$ $\quad$ et $|0| = 0$

$|a| \geq 0$ $\qquad$ $|a| = \sqrt{a^2}$ $\qquad$ pour tout a réel

$|ab| = |a||b|$ $\qquad$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $\qquad$ si $b \neq 0$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ $\qquad$ Mais en général : $|a+b| \neq |a| + |b|$

$0 \leq a \leq b \Rightarrow |a| \leq |b|$ $\qquad$ Mais : $a \leq b \leq 0 \Rightarrow |b| \leq |a|$

$$\left.\begin{array}{l} |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b \\ |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \\ |a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ ou } a > b \end{array}\right\} \text{ si } b \geq 0$$

Inverses

$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ $\quad$ si et seulement si a et b sont de même signe.

fiche n°2

IDENTITES REMARQUABLES

Identités usuelles

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Généralisation

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

La formule $a^n + b^n$ ne se généralise que si n est impair.

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriétés : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ et $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Conséquence : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

fiche n°3

SOMMES ET PRODUITS

Propriétés des Sommes

$$\sum_{k=p}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} u_k \qquad \sum_{k=p}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k$$

Si $p \le q < n$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k$

$$\sum_{k=p}^{n} a = a(n-p+1) \qquad \sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = S_n(x) \quad \text{si } x \ne 1$$

Si $x \ne 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = S'_n(x) \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2} = S''_n(x)$

Propriétés des Produits

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k \qquad \prod_{k=p}^{n} (u_k v_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=p}^{n} v_k\right)$$

Si $p \le q < n$: $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k = \left(\prod_{k=p}^{q} u_k\right)\left(\prod_{k=q+1}^{n} u_k\right)$

$$\prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1} \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

Produit usuel

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$ <u>Propriétés</u> : $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $0! = 1$

fiche n°4

ENSEMBLES

Inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble E ($A \subset E$) si tout élément de A est élément de E. Alors A est une partie de E.

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Intersection de deux parties de *E*

$A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

Propriétés : $A \cap B = B \cap A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ noté $A \cap B \cap C$

$A \subset B \cap C$ si et seulement si $A \subset B$ et $A \subset C$

Réunion de deux parties de *E*

$A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Propriétés : $A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ noté $A \cup B \cup C$

$A \cup B \subset C$ si et seulement si $A \subset C$ et $B \subset C$

Distributivité

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Complémentaire

$\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$.

Propriétés : $\overline{\overline{A}} = A$ $\qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\qquad A \cup \overline{A} = E$

$A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$

Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Différence de deux parties de *E*

$A - B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Donc $A - B = A \cap \overline{B}$.

fiche n°4 (suite)

Différence symétrique de deux parties de *E*

$A \Delta B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou (exclusif) } x \in B\}$.

Donc $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Donc $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Partition d'un ensemble *E*

Des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E forment une partition de E si :

- Elles sont deux à deux disjointes : $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.
- Leur réunion est E : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Cas particulier : une partie A et son complémentaire $\overline{A}$.

Produit cartésien de deux ensembles

$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$ $\qquad E^2 = \{(x, y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in E\}$

Par récurrence, on généralise au produit de plusieurs ensembles et E^p est l'ensemble des p-listes $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E.

fiche n°5

RECURRENCE

Premier théorème de récurrence

Soit $P(n)$ est une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) Initialisation : $P(n_0)$ est vraie.

2) Hérédité : Chaque fois que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Conseils de rédaction d'une récurrence

- *Bien définir la propriété $P(n)$.*
- *Initialisation : Déterminer le premier entier n_0 et démontrer que $P(n_0)$ est vraie.*
- *Hérédité : Supposer que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$. Démontrer que (pour ce n) $P(n+1)$ est vraie.*
- *Conclusion : En appliquant le théorème, conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.*

Deuxième théorème de récurrence (récurrence forte)

Soit $P(n)$ est une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) Initialisation : $P(n_0)$ est vraie.

2) Hérédité : Chaque fois que (pour un entier $n \geq n_0$) $P(k)$ est vraie jusqu'à n (c'est-à-dire pour tout entier k tel que $n_0 \leq k \leq n$), alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Conseils de rédaction

Hérédité : Supposer que $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, …, $P(n)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$.

Démontrer que (pour ce n) $P(n+1)$ est vraie.

fiche n°6

ENSEMBLE DES REELS

Majorants d'une partie

Un réel M est majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in A \quad x \leq M$.

Tout réel plus grand que M est aussi un majorant de A.

Si $M \in A$, alors M est le plus grand élément de A, noté $\operatorname{Max} A$.

Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A (s'il existe) : $M = \operatorname{Sup} A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$

(M est majorant, mais, pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas majorant)

Minorants d'une partie

Un réel m est majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ si : $\forall x \in A \quad x \geq m$.

Tout réel plus petit que m est aussi un minorant de A.

Si $m \in A$, alors m est le plus petit élément de A, noté $\operatorname{Min} A$.

Borne inférieure

La borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A (s'il existe) : $m = \operatorname{Inf} A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad m \leq x \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad m \leq x < m + \varepsilon \end{cases}$

(m est minorant, mais, pour tout $\varepsilon > 0$, $m + \varepsilon$ n'est pas minorant)

Propriété fondamentale de l'ensemble des réels

Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Partie entière d'un réel

On appelle partie entière d'un réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Notations : $\operatorname{Ent}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Propriété caractéristique : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Ent}(x) \leq x < \operatorname{Ent}(x) + 1$.

La fonction partie entière est une fonction en escalier croissante.

fiche n°7

TRIGONOMETRIE

Définitions

A tout réel θ on associe l'unique point M du cercle trigonométrique tel que θ soit une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

- $\cos\theta$ est l'abscisse du point M.
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point M.
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ et $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Formules de base

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \qquad \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{cotan}^2\theta$$

Lignes trigonomues usuelles

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{cotan}\theta$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Symétries

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \qquad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{cotan}\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{cotan}\theta$$

fiche n°7 (suite)

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Transformation de produits en sommes (linéarisation)

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \qquad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \qquad \sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$$

Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

fiche n°8

NOMBRES COMPLEXES

Ensemble $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations internes (addition et multiplication). Il a une structure de corps commutatif.

Il possède un élément noté i qui vérifie $i^2 = -1$.

Il ne possède pas de relation d'ordre compatible avec les opérations.

Forme algébrique

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad z = x + iy$.

$x = \mathrm{Re}(z)$ est sa partie réelle et $y = \mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

z est réel ssi $\mathrm{Im}(z) = 0$ $\qquad$ z est imaginaire pur ssi $\mathrm{Re}(z) = 0$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}.$$

Il y a bijection entre $\mathbb{C}$ et le plan de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Tout point $M(x,y)$ a pour affixe $z = x + iy$.

Nombre complexe conjugué

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{z} = x - iy$ si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

z est réel ssi $z = \overline{z}$ $\qquad$ z est imaginaire pur ssi $z = -\overline{z}$

Propriétés : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad$ $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\quad$ $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $\quad$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Module d'un nombre complexe

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

Le module de z est la distance OM si z est l'affixe de M.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Propriétés : $|z| = |\overline{z}|$ $\qquad$ $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

$|zz'| = |z| \times |z'|$ $\qquad$ $|z^n| = |z|^n$ $\qquad$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\qquad$ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

fiche n°8 (suite)

Argument d'un nombre complexe non nul

Si $\boxed{z \neq 0}$ et si M est le point d'affixe z, $\arg(z)$ est l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ et par abus de langage toute mesure de cet angle.

Si $z \neq 0$: $\arg(z) = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

z est réel ssi $\arg(z) \equiv 0 \ (\pi)$

z est imaginaire pur ssi $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$

Propriétés : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ (2\pi)$ $\qquad$ $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ (2\pi)$

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$ $\qquad$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ (2\pi)$

Notation exponentielle

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique réel $r > 0$ et un réel θ unique à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) tels que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Et $r = |z|$.

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \ (2\pi)$

Formules d'Euler

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Racines *n*-èmes d'un complexe non nul

Les racines n-èmes de Z sont les solutions de $z^n = Z$.

Si $Z = Re^{i\alpha}$, il y a n racines $z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Leur somme est égale à 0. Elles sont toutes obtenues en multipliant l'une d'entre elles par les racines n-èmes de l'unité.

Il y a n racines n-èmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (\omega_1)^k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

fiche n°9

APPLICATIONS

Application

Une application f d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément x de E un unique élément y de F : on note $y = f(x)$.

Si $y = f(x)$, alors x est un antécédent de y, et y est l'image de x.

Restriction et prolongement d'une application

Si f est une application de E dans F et si $A \subset E$, la restriction de f à A est l'application notée $f_{/A}$ de A dans F qui coïncide avec f pour tout élément de A : $\forall x \in A \quad f_{/A}(x) = f(x)$.

Si f est une application de E dans F et si $E \subset B$, une application g de B dans F est un prolongement de f à B si f est la restriction de g à E, ($f = g_{/E}$), donc si : $\forall x \in E \quad g(x) = f(x)$.

La restriction est unique, mais pas le prolongement.

Image directe

Si f est une application de E dans F et si $A \subset E$, on appelle image (directe) de A par f l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

Propriétés : Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$ (égalité si f injective)

Image réciproque

Si f est une application de E dans F et si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Propriétés : Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Si $A \subset E$, alors $A \subset f^{-1}[f(A)]$ (égalité si f injective).

Si $B \subset F$, alors $f[f^{-1}(B)] \subset B$ (égalité si f surjective).

fiche n°9 (suite)

Injectivité

Une application f de E dans F est injective si tout élément $y \in F$ possède au plus un antécédent dans E.

Pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution dans E.

La fonction f est injective si et seulement si pour tous x_1 et x_2 de E on a : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Surjectivité

Une application f de E dans F est surjective si tout élément $y \in F$ possède au moins un antécédent dans E.

Pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans E.

Bijectivité

L'application f est bijective si tout élément $y \in F$ possède un unique antécédent dans E.

Pour tout élément $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution dans E.

f est bijective de E dans F ssi elle est injective et surjective.

Si f est bijective de E dans F, on lui associe une application réciproque f^{-1} de F dans E qui à tout élément de F associe son unique antécédent : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

L'application réciproque f^{-1} est bijective de F dans E.

Composée de deux applications

Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G, on appelle composée de f par g l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.

Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.

Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective de E dans F, alors : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

fiche n°10

POLYNOMES

On note $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ et X la fonction $x\mapsto x$.

Définitions

Un monôme sur K est de la forme aX^k où $k\in\mathbb{N}$ et $a\in K$.

Un polynôme P sur K est une somme finie de monômes.

Si le polynôme P n'est pas nul, il existe un unique $n\in\mathbb{N}$ et un unique $(a_0,...,a_n)\in K^{n+1}$ avec $a_n\neq 0$ tels que : $P=a_0+a_1X+....+a_nX^n$.

a_0, …, a_n sont les coefficients de P et a_n son coefficient dominant.

$K[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans K.

Degré d'un polynôme

Si P est non nul, n est unique et s'appelle le degré de P.

Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

$d°(P+Q)\leq \mathrm{Max}(d°P,d°Q)$ $\qquad d°(PQ)=d°P+d°Q$

$d°(P\circ Q)=d°P\times d°Q$ $\qquad d°P'=d°P-1$ si $P'\neq 0$

$K_n[X]$ est l'ensemble des polynômes $P\in K[X]$ tels que $d°P\leq n$.

Egalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

Division euclidienne

Si A et B appartiennent à $K[X]$ et $B\neq 0$, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes de $K[X]$ tels que $A=BQ+R$ et $d°R<d°B$.

Si $R=0$, A est divisible par B ou multiple de B, et B est diviseur de A.

Racines d'un polynôme

Un élément $\alpha\in K$ est racine du polynôme P si $P(\alpha)=0$.

α est racine de P si et seulement si P est divisible par $(X-\alpha)$.

Ordre de multiplicité d'une racine

α est racine d'ordre m de P si P est divisible par $(X-\alpha)^m$, mais pas par $(X-\alpha)^{m+1}$: $P=(X-\alpha)^mQ$ avec $Q(\alpha)\neq 0$ et $d°Q=d°P-m$.

α est racine multiple d'ordre m du polynôme P si et seulement si :

$$\forall k\in[\![0,m-1]\!] \quad P^{(k)}(\alpha)=0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha)\neq 0.$$

fiche n°10 (suite)

Formule de Taylor

$$\forall P\in K_n[X] \quad \forall\alpha\in K \quad P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

<u>Conséquence 1</u> : Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

<u>Conséquence 2</u> : Un polynôme $P\in K_n[X]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois est le polynôme nul.

Polynômes irréductibles

Un polynôme A non constant est irréductible dans $K[X]$ s'il n'admet pas de diviseur B dans $K[X]$ tel que $1\leq d°B<d°A$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont de degré 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 avec $\Delta<0$.

Factorisation d'un polynôme non constant

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P non constant admet une factorisation de la forme : $P(X)=a\prod(X-\alpha_k)^{m_k}$ où a est le coefficient dominant de P et où les α_k sont toutes les racines complexes distinctes de P avec leur ordre de multiplicité m_k.

Si $P\in\mathbb{R}[X]$, ses racines dans $\mathbb{C}$ sont soit réelles soit complexes conjuguées avec le même ordre de multiplicité.

En calculant $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ on obtient un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de la forme X^2+bX+c avec un discriminant négatif.

Donc dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme P non constant admet une factorisation de la forme : $P(X)=a\left(\prod(X-\alpha_k)^{m_k}\right)\left(\prod(X^2+b_jX+c_j)^{m_j}\right)$ où a est le coefficient dominant de P, où les α_k sont toutes les racines réelles distinctes de P avec leur ordre de multiplicité m_k, et où les polynômes $X^2+b_jX+c_j$ ont un discriminant négatif et ont pour racines les racines complexes conjuguées de P, avec leur ordre de multiplicité m_j.

fiche n°11

LOGARITHME NEPERIEN

Définition

La fonction logarithme népérien est l'unique fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ qui vérifie $\ln 1 = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Expression : $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

Interprétation géométrique : Si $a \geq 1$, $\ln a$ est l'aire (en unités d'aire) de la partie de plan limitée par la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$. Si $0 < a < 1$, $\ln a$ est l'opposé de cette aire.

Propriété fondamentale

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

Conséquences : $\ln(a^k) = k \ln a$ pour tout entier k.

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a \qquad \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a \qquad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Limites ($\alpha > 0$)

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

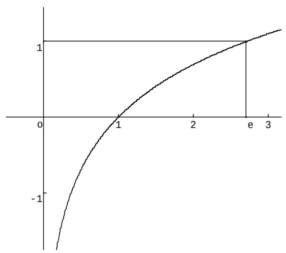
$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	‖	$-$	0	$+$	

Courbe

x	0		$+\infty$
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$)

fiche n°12

EXPONENTIELLE

Nombre de Neper

Le nombre e est l'unique réel positif tel que $\ln e = 1$: $e \approx 2{,}718$.

Définition

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Pour tout x, on note $\exp(x) = e^x$.

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad \text{pour tout réel } x \text{ et tout réel } y > 0.$$

Conséquences : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad e^{\ln x} = x$.

Propriété fondamentale

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour tous réels a et b.

Conséquences : $(e^a)^k = e^{ka}$ pour tout entier k.

$$e^{a/2} = \sqrt{e^a} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$.

Limites $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

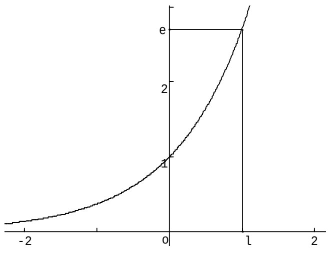
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Signe

Elle est positive : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

Courbe

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$



fiche n°13

AUTRES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Définition

La fonction exponentielle de base $a > 0$ est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

L'exponentielle est la fonction exponentielle de base *e*.

Propriété fondamentale

$a^{x+y} = a^x \times a^y$ pour tous réels *x* et *y*.

Mêmes conséquences que pour l'exponentielle.

Dérivée

La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = a^x \ln a$.

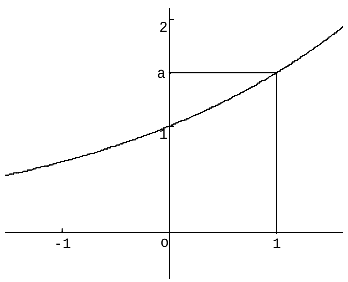
Limites

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

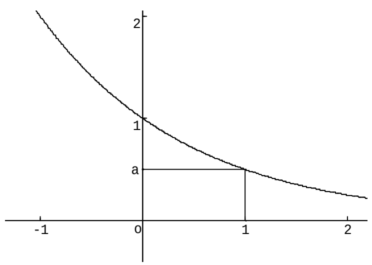
Signe

Elle est positive : $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x > 0$.

Courbes



$a < 1$



$a > 1$

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ si } a > 1 \text{ et } \alpha > 0.$$

fiche n°14

FONCTIONS PUISSANCES

Définition

Si α est un réel : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Cas particuliers : $x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$

Certaines fonctions puissances sont prolongeables à $\mathbb{R}$.

Propriété fondamentale

$x^\alpha \times y^\alpha = (xy)^\alpha$ pour tous $x > 0$ et $y > 0$.

Conséquences : $x^{k\alpha} = \left(x^k\right)^\alpha = \left(x^\alpha\right)^k \qquad \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Autres propriétés

$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$

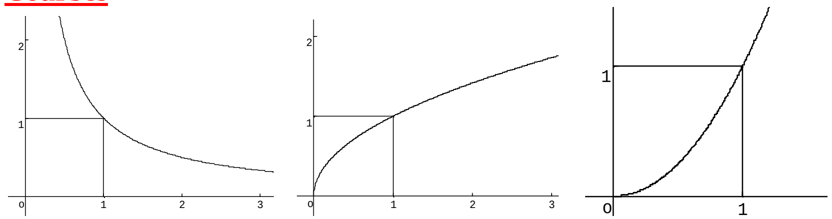
Dérivée

La fonction puissance est dérivable et $\forall x \in]0,+\infty[\quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Limites

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ 0 \text{ si } \alpha > 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Courbes



$\alpha < 0 \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad \alpha > 1$

Croissances comparées ($\alpha > 0$)

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

fiche n°15

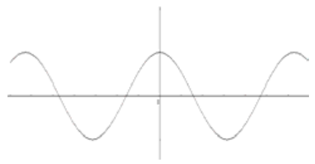
FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Fonction cosinus

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et paire. La fonction cosinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos)'(x) = -\sin x$.

Elle n'admet pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

x	0		$\pi/2$		π
cos'	0	$-$	-1	$-$	0
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a \equiv b\ (2\pi)$ ou $a \equiv -b\ (2\pi)$

Fonction Arccosinus

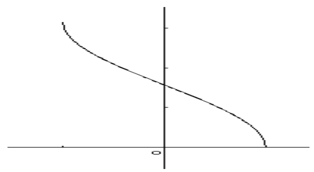
La fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$.

Sa réciproque est la fonction Arccosinus.
La fonction Arccosinus est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$.
$\forall x \in [-1,1] \quad y = \operatorname{Arccos} x \Leftrightarrow x = \cos y$ et $y \in [0,\pi]$
La fonction Arccosinus est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

Sa dérivée est définie par : $\forall x \in]-1,1[\quad (\operatorname{Arccos})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction Arccosinus est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

x	-1		0		1
Arccos'	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
Arccos	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0



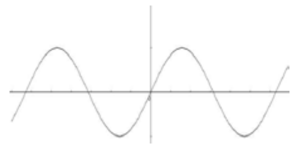
fiche n°15 (suite)

Fonction sinus

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et impaire. La fonction sinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos x$.

Elle n'admet pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

x	0		$\pi/2$		π
sin'	1	$+$	0	$-$	-1
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (\pi)$.

$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a \equiv b\ (2\pi)$ ou $a \equiv \pi - b\ (2\pi)$

Fonction Arcsinus

La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$.

Sa réciproque est la fonction Arcsinus.

La fonction Arcsinus est définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

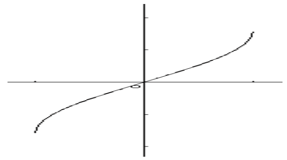
$\forall x \in [-1,1] \quad y = \operatorname{Arcsin} x \Leftrightarrow x = \sin y$ et $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

La fonction Arcsinus est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

Sa dérivée est définie par : $\forall x \in]-1,1[\quad (\operatorname{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction Arcsinus est strictement croissante sur $[-1,1]$.

x	-1		0		1
Arcsin'	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
Arcsin	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$



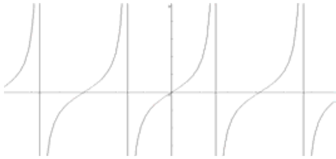
fiche n°15 (suite)

Fonction tangente

La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$, périodique de période π et impaire. La fonction tangente est continue et dérivable sur D.

Sa dérivée est définie par : $\forall x \in D \quad (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
tan'		$+$	1	$+$	
tan	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$\tan x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad (\pi)$.

$\tan a = \tan b \Leftrightarrow a \equiv b \ (\pi)$

Fonction Arctangente

La fonction tangente réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$.

Sa réciproque est la fonction Arctangente.

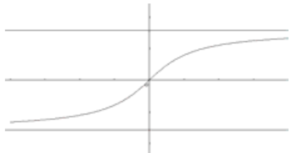
La fonction Arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \operatorname{Arctan} x \Leftrightarrow x = \tan y$ et $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

La fonction Arctangente est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Arctan'		$+$	1	$+$	
Arctan	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$



fiche n°16

SUITES USUELLES

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel b (appelé raison de la suite) tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + b$.

Alors son terme général est : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nb$.

Pour tous les entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)b$.

Pour tous les entiers $p \leq n$: $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$

Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel a (appelé raison de la suite) tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n$.

Alors son terme général est : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n u_0$.

Pour tous les entiers n et p : $u_n = a^{n-p} u_p$.

Pour tous les entiers $p \leq n$: $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$.

Convergence de (a^n)

$a \leq -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Pas de limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe des réels $a \neq 0$ et b tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$, il existe un unique réel α (point fixe) tel que $\alpha = a\alpha + b$.

Alors, la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a. On en déduit v_n, puis u_n en fonction de n.

fiche n°16 (suite)

Suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2

Une suite (u_n) suit une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 s'il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

L'équation $x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

Elle équivaut à $x^2 - ax - b = 0$. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

Premier cas : $\Delta > 0$.

L'équation caractéristique possède deux racines distinctes q_1 et q_2.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha(q_1)^n + \beta(q_2)^n$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.

Deuxième cas : $\Delta = 0$.

L'équation caractéristique possède une racine double q.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta)q^n$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.

Troisième cas : $\Delta < 0$.

L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées que l'on met sous forme trigonométrique : $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = re^{-i\theta}$.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r^n[\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)]$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.

fiche n°17

SUITES NUMERIQUES

Définition

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.

La suite de terme général u_n (image de l'entier n) est notée (u_n).

Sens de variations

La suite (u_n) est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Si la suite est à termes positifs : La suite (u_n) est croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Bornes d'une suite

La suite est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.

La suite est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.

La suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Suite convergente

La suite (u_n) est convergente si elle admet une limite réelle.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$

Suite divergente

La suite est divergente si elle n'est pas convergente. Il y a deux cas : le terme général tend vers $\pm\infty$ ou bien il n'a pas de limite.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si : $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > A$

Compatibilité avec l'ordre (ℓ et ℓ' réels)

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et :

- si les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors $\ell \leq \ell'$ (inégalité large même si l'inégalité sur les termes généraux est stricte)
- si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.
- si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes vers le même ℓ, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est ℓ.

fiche n°17 (suite)

Opérations algébriques sur les limites

u_n	v_n	$u_n + v_n$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indétermination**

u_n	v_n	$u_n v_n$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
∞	$\ell' \neq 0$	∞
∞	0	**Indétermination**
∞	∞	∞

u_n	v_n	u_n / v_n
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ / ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
0	0	**Indétermination**
∞	ℓ'	∞
ℓ	∞	0
∞	∞	**Indétermination**

Image d'une suite par une fonction (ℓ et L réels ou infinis)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = L$ et si (u_n) est une suite d'éléments de I qui a pour limite ℓ, alors la suite de terme général $f(u_n)$ a pour limite L.

Convergence des suites monotones

Toute suite croissante majorée est convergente et sa limite est un majorant. Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante minorée est convergente et sa limite est un minorant. Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite.

fiche n°17 (suite)

Négligeabilité

(u_n) est négligeable devant (v_n), noté $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Si $u_n = o(v_n)$ et si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Négligeabilités usuelles :

- $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $0 \leq \alpha < \beta$.
- $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$.
- $n^\alpha = o(e^{\beta n})$ si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$.
- $n^\alpha = o(a^n)$ si $\alpha \geq 0$ et $a > 1$.

Propriétés :

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$, alors $u_n + u'_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$, alors $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\underline{\alpha > 0}$, alors $|u_n|^\alpha = o(|v_n|^\alpha)$.

Mais la relation de négligeabilité n'est compatible ni avec la division (et donc les puissances négatives) ni avec la composition.

Equivalence

(u_n) est équivalente à (v_n), noté $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite (ε_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Si $u_n \sim v_n$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature et admettent la même limite.

fiche n°17 (suite)

Equialences usuelles :

- En $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré et une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\ (\neq 0)$, alors $u_n \sim \ell$.
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :
  - $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
  - $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
  - $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
  - $\sin u_n \sim u_n$.
  - $\tan u_n \sim u_n$.
  - $1 - \cos u_n \sim \frac{1}{2} u_n^2$.
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, alors : $\ln u_n \sim u_n - 1$

Propriétés :

- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$. On écrit $u_n = v_n + o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n w_n \sim v_n w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n|^\alpha \sim |v_n|^\alpha$.

Mais la relation d'équivalence n'est compatible ni avec l'addition ni avec la composition.

fiche n°18

SERIES NUMERIQUES

Définition

Soit (u_n) une suite numérique.

On appelle série numérique de terme général u_n, notée $(\sum u_n)$, la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Sommes partielles d'une série

La somme partielle d'ordre n de la série $(\sum u_n)$ est $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Série convergente

La série $(\sum u_n)$ est convergente si la suite (S_n) est convergente.

Sa limite est appelée somme de la série et est notée : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$ est le reste d'ordre n de la série.

Série divergente

La série $(\sum u_n)$ est divergente si elle n'est pas convergente.

Propriétés

- Une condition nécessaire, mais pas suffisante pour que la série soit convergente est : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

  Conséquence : si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série est divergente.
- On ne change pas la nature d'une série en supprimant les premiers termes. Mais on change sa somme.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \lambda u_n)$ ont même nature.
- Si $(\sum u_n)$ est une série convergente, les séries $(\sum v_n)$ et $(\sum [u_n + v_n])$ sont de même nature.

fiche n°18 (suite)

Séries à termes positifs

- La série $(\sum u_n)$ converge ssi la suite (S_n) est majorée.
- La série $(\sum u_n)$ diverge ssi $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$:
  - si la série $(\sum v_n)$ converge, alors la série $(\sum u_n)$ converge.
  - si la série $(\sum u_n)$ diverge, alors la série $(\sum v_n)$ diverge.
- Si $u_n \sim v_n$, les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Convergence absolue

La série $(\sum u_n)$ est absolument convergente si la série $(\sum |u_n|)$ (de terme général $|u_n|$) est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente mais la réciproque est fausse.

Séries géométriques et leurs séries dérivées

Elles sont convergentes si et seulement si $-1 < x < 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Séries exponentielles

Elles sont convergentes pour tout x réel et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Séries de Riemann

La série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

fiche n°19

DENOMBREMENT

Cardinal d'un ensemble fini

Si $E \neq \varnothing$, c'est l'unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$.

$\operatorname{Card} E = n$ est le nombre d'éléments de E et $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

Propriétés :

- $\operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$
- $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$
- $\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) - \operatorname{Card}(B \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C)$

Formule du crible : $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$

- $\operatorname{Card}(A \times B) = (\operatorname{Card} A) \times (\operatorname{Card} B)$

Partition

Une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties de E est une partition de E si :

1) Leur réunion est égale à E : $E = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.
2) Elles sont deux à deux disjointes : $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

Alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} A_1 + \ldots + \operatorname{Card} A_n$.

Arbre de dénombrement

Si une situation se décompose en k étapes ayant respectivement $n_1, \ldots, n_k$ issues possibles, alors on peut schématiser cette situation par un arbre et le nombre total d'issues est : $n = n_1 \times \ldots \times n_k$.

Notation factorielle

Si $n \neq 0$, $n!$ est le produit de tous les entiers compris entre 1 et n.
Par définition : $0! = 1$.
Propriété : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Nombre de *p*-listes avec répétition

Une p-liste avec répétition de E est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p.

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de p-listes avec répétition de E est : n^p.
C'est aussi le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

fiche n°19 (suite)

Nombre de *p*-listes sans répétition (arrangements)

Une p-liste sans répétition de E est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ où les x_i sont des éléments distincts de E.
Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de p-listes sans répétition de E est :

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ $\qquad$ $A_n^p = 0$ sinon

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Nombre de permutations

Une permutation de E est une bijection de E dans E. Si $\operatorname{Card} E = n$, une permutation de E correspond à une n-liste sans répétition de E.
Donc le nombre de permutations de E est $n!$.
C'est aussi le nombre de bijections de E dans F si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F = n$.

Nombre de parties à *p* éléments (combinaisons)

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de parties à p éléments est :

$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ $\qquad$ $\dbinom{n}{p} = 0$ sinon

Propriétés : $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$ $\qquad$ $\dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1}$ si $1 \leq p \leq n$

Formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{p}{k}\dbinom{q}{n-k} = \dbinom{p+q}{n}$.

Nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Nombre de manières d'ordonner des objets

Le nombre de manières d'ordonner n objets est : $n!$.

Nombre de tirages de *p* objets parmi *n*

- Tirages successifs avec remise : n^p.
- Tirages successifs sans remise : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$.
- Tirages simultanés : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$.

fiche n°20

ESPACES PROBABILISES

Expérience aléatoire

Il s'agit d'une expérience à laquelle on peut associer l'ensemble Ω (univers) de tous les résultats ω possibles (éventualités).

Evénements

Un événement A est une partie de Ω. Il est réalisé si $\omega \in A$.

Si $A = \varnothing$, c'est l'événement impossible.

Si $A = \Omega$, c'est l'événement certain.

Si A n'a qu'un élément ($A = \{\omega\}$), c'est un événement élémentaire.

Opérations sur les événements

L'événement $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés.

Si $A \cap B = \varnothing$, les événements A et B sont incompatibles.

L'événement $A \cup B$ est réalisé si A ou B est réalisé.

L'événement $\overline{A}$ est l'événement contraire de l'événement A.

L'événement $A - B = A \cap \overline{B}$ est réalisé si A est réalisé, mais pas B.

Tribu (ou algèbre) des événements

On appelle tribu (ou σ- algèbre) d'événements toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1) $\Omega \in \mathscr{A}$.

2) $\forall A \in \mathscr{A} \quad \overline{A} \in \mathscr{A}$.

3) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$: $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

La tribu engendrée par une famille de parties de Ω est la plus petite tribu contenant cette famille.

Propriétés des tribus

$\varnothing \in \mathscr{A}$.

Si A et B sont des éléments de $\mathscr{A}$, alors : $A \cap B \in \mathscr{A}$, $A \cup B \in \mathscr{A}$ et $A - B \in \mathscr{A}$.

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$: $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

fiche n°20 (suite)

Espace probabilisable

Un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ associé à l'expérience aléatoire est la donnée de l'univers Ω et d'une tribu $\mathscr{A}$ d'événements.

Probabilité

Une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application de l'ensemble des événements $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1) $P(\Omega) = 1$.

2) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Propriétés

$P(\varnothing) = 0$.

$0 \le P(A) \le 1$ pour tout événement A.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Formule du crible : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$

Si (A_n) est une suite croissante ($\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1}$) d'éléments de $\mathscr{A}$, alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Si (A_n) est une suite décroissante ($\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n$) d'éléments de $\mathscr{A}$, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Espace probabilisé

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est la donnée de l'univers Ω, d'une tribu $\mathscr{A}$ d'événements et d'une probabilité P.

fiche n°20 (suite)

Cas d'un univers fini ou dénombrable

Dans le cas où Ω est un univers fini ou dénombrable, on prend en général pour tribu d'événements $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Si $\Omega = \{\omega_i / i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou dénombrable, la probabilité P est déterminée par les probabilités des événements élémentaires $p_i = P(\{\omega_i\})$:

$P(\varnothing) = 0$ et si $A \neq \varnothing$, alors $P(A) = \sum_{i \in J} p_i$ où $J = \{i \in I / \omega_i \in A\}$.

Réciproquement une famille de nombres $(p_i)_{i \in I}$ définit une probabilité sur Ω ssi : $\forall i \in I \quad 0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Equiprobabilité dans le cas d'un univers fini

Si Ω est un univers fini, il y a équiprobabilité sur Ω si tous les événements élémentaires ont même probabilité (tous les p_i sont égaux). Alors $P(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$ pour tout événement A.

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité $P(B) \neq 0$. Alors l'application P_B qui, à tout élément A de $\mathscr{A}$, associe le réel positif $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$: la probabilité conditionnée par B.

Propriétés : $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

$$P_B(A \cup A') = P_B(A) + P_B(A') - P_B(A \cap A').$$

Formule des probabilités composées

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

si pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0$

Cas particulier : $P(A \cap B) = P_B(A) P(B) = P_A(B) P(A)$

si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

fiche n°20 (suite)

Système complet d'événements

$(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements s'ils sont 2 à 2 incompatibles ($B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$), si leur réunion est Ω et si $\forall i \in I \quad P(B_i) \neq 0$.

Cas particulier : un événement B et son contraire $\overline{B}$.

Formule des probabilités totales

Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P_{B_i}(A) P(B_i).$$

Cas particulier : $P(A) = P_B(A) P(B) + P_{\overline{B}}(A) P(\overline{B})$.

Formule de Bayes

Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements :

$$P_A(B_k) = \frac{P_{B_k}(A) P(B_k)}{\sum_{i \in i} P_{B_i}(A) P(B_i)}.$$

Indépendance de deux événements

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Deux tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont indépendantes si tout élément de $\mathscr{A}$ est indépendant de tout élément de $\mathscr{B}$:

$$\forall (A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} \quad P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Indépendance de plusieurs événements

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements avec I fini ou dénombrable.

Les événements A_i sont deux à deux indépendants si pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Les événements A_i sont mutuellement indépendants si pour toute partie finie J de I, on a : $P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

Alors les événements B_i avec $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ sont indépendants

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

fiche n°21

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Définition

Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on ait $X^{-1}(I) \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ convient.

Elle est discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Ensemble des valeurs prises par X

$X(\Omega) = \{x_k \,/\, k \in I\}$ où I est un ensemble fini ($I = [\![1, n]\!]$) ou dénombrable ($I = \mathbb{N}^*$). On suppose $x_1 < x_2 < \ldots$

Notation : $(X = x_k) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x_k\}$.

Les événements $(X = x_k)_{k \in I}$ forment un système complet d'événements.

Loi de probabilité (ou distribution) de X

$\forall k \in I \quad p_k = P(X = x_k)$.

Propriété : $\sum_{k \in I} p_k = 1$ (somme finie ou somme d'une série).

Fonction de répartition

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P([X \le x])$

F est une fonction en escalier croissante, continue à droite en tout x réel et admettant pour limites : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Détermination pratique :

$\forall x \in]-\infty, x_1[\quad F(x) = 0 \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad F(x) = p_1 + \ldots + p_k$

Et si $I = \{1, \ldots, n\}$, alors : $\forall x \in [x_n, +\infty[\quad F(x) = 1$

Loi de X : On peut retrouver la loi de la variable aléatoire X à l'aide de sa fonction de répartition F :

$p_1 = F(x_1) \qquad \forall k \ge 2 \quad p_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$

Probabilités d'événements :

$P(X \le a) = F(a)$. $\qquad P(X > a) = 1 - F(a)$.

$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.

fiche n°21 (suite)

Espérance mathématique de X

$E(X) = \sum_{k \in I} x_k P(X = x_k)$ sous réserve de convergence absolue.

Dans le cas où I est fini, la variable X a toujours une espérance. Mais si I est infini, elle n'a une espérance que si la série est absolument convergente.

L'espérance mathématique de X est la valeur moyenne de X.

La variable aléatoire X est centrée si $E(X) = 0$.

Théorème de transfert (sous réserve d'existence) :

$$E(Y) = \sum_{k \in I} \varphi(x_k) P(X = x_k) \text{ si } Y = \varphi(X).$$

Conséquence : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Linéarité : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Positivité : Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, alors $E(X) \ge 0$.

Variance de X

$V(X) = E([X - E(X)]^2)$ sous réserve d'existence.

Dans le cas où I est fini, la variable X a toujours une variance. Mais si I est infini, elle n'a une variance que si X^2 a une espérance.

La variance de X mesure la dispersion de X autour de sa moyenne.

Propriétés : $V(X) \ge 0$.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

avec $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Ecart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ si la variable aléatoire X a une variance.

La variable aléatoire X est réduite si $\sigma(X) = 1$.

Propriété : $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Variable centrée réduite associée à X

C'est $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$ si X a une espérance m et un écart-type $\sigma \ne 0$.

fiche n°22

LOIS DISCRETES FINIES

Loi uniforme $\mathscr{U}(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}(n) \text{ ssi } X(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!] \quad P(X=k) = \frac{1}{n}$$

Espérance : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ Variance : $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Loi uniforme $\mathscr{U}([\![a,b]\!])$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ et $a \leq b)$

On introduit : $n = \text{Card}([\![a,b]\!]) = b-a+1$.

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!]) \text{ ssi } X(\Omega) = [\![a,b]\!] \text{ et } \forall k \in [\![a,b]\!] \quad P(X=k) = \frac{1}{n}$$

Espérance : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ Variance : $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ $(p \in]0,1[)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \text{ ssi } X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et : } \begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$$

Espérance : $E(X) = p$ Variance : $V(X) = p(1-p)$

Epreuve de Bernoulli : Succès ou Echec (p : probabilité de succès)

Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ $(n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \text{ ssi } X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance : $E(X) = np$ Variance : $V(X) = np(1-p)$

Schéma de Bernoulli : On répète n fois, de manière indépendante et dans les mêmes conditions, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p (par exemple n tirages successifs avec remise dans une même urne contenant une proportion p de boules blanches). Alors le nombre X de succès (boules blanches) suit la loi binômiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Stabilité : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathscr{B}(n+m,p)$.

fiche n°22 (suite)

Loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N,n,p)$ $(N \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[, Np \in \mathbb{N}^*)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{H}(N,n,p) \text{ ssi } X(\Omega) \subset [\![0,n]\!] \text{ et } P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Espérance : $E(X) = np$ Variance : $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

Exemple : On effectue n tirages successifs sans remise (ou simultanés) dans une même urne qui contient N boules avec une proportion p de boules blanches. Alors le nombre X de boules blanches obtenues suit la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N,n,p)$.

LOIS DISCRETES INFINIES

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ $(p \in]0,1[)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ ssi } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$$

Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{p}$ Variance : $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Exemple : On répète de manière indépendante et dans les mêmes conditions, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p (par exemple lancer indéfiniment une pièce dont la probabilité de « pile » est p). Alors le rang X (ou temps d'attente) du premier succès (premier « pile ») suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ $(\lambda \in]0,+\infty[)$

$$X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \text{ ssi } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Espérance : $E(X) = \lambda$ Variance : $V(X) = \lambda$

Exemple : Flux d'individus pendant une période donnée ou nombre d'objets présentant un défaut dans une production en série.

Stabilité : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

fiche n°23

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Fonction

Une fonction *f* d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément x de E au plus un élément y de F (donc 0 ou 1).
Son ensemble de définition D_f est l'ensemble des éléments x de E qui sont associés à un élément y de F (qui possèdent une image).
On a une fonction réelle d'une variable réelle si $E = F = \mathbb{R}$.
Sa courbe représentative dans un repère est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

Fonction paire

Une fonction *f* est paire si :
- D_f est symétrique par rapport à 0 : $\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f$.
- $\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$.

On l'étudie sur $D_f \cap [0,+\infty[$ et on complète sa courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire

Une fonction *f* est impaire si :
- D_f est symétrique par rapport à 0 : $\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f$.
- $\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$.

On l'étudie sur $D_f \cap [0,+\infty[$ et on complète sa courbe par symétrie par rapport au point O.

Fonction périodique

Une fonction *f* est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel que :
- D_f est invariant par translation de T : $\forall x \in D_f \quad (x+T) \in D_f$.
- $\forall x \in D_f \quad f(x+T) = f(x)$.

La période est le plus petit réel $T > 0$ qui convient (s'il existe). On étudie f sur $D_f \cap [a,a+T]$ (a quelconque) et on complète sa courbe par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

fiche n°23 (suite)

Fonction bornée

Une fonction *f* est <u>majorée</u> sur un intervalle I s'il existe un réel M (majorant) tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \le M$.
Une fonction *f* est <u>minorée</u> sur un intervalle I s'il existe un réel m (minorant) tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \ge m$.
Une fonction *f* est <u>bornée</u> sur I si elle est majorée et minorée.

Fonction monotone

Une fonction *f* est <u>croissante</u> sur un intervalle I si, pour tous a et b de I vérifiant $a \le b$, on a $f(a) \le f(b)$ (*f* conserve le sens).
Une fonction *f* est <u>strictement croissante</u> sur un intervalle I si, pour tous a et b de I vérifiant $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
Une fonction *f* est <u>décroissante</u> sur un intervalle I si, pour tous a et b de I vérifiant $a \le b$, on a $f(a) \ge f(b)$ (*f* change le sens).
Une fonction f est <u>strictement décroissante</u> sur un intervalle I si, pour tous a et b de I vérifiant $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La fonction f est <u>(strictement) monotone</u> si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Extremum d'une fonction sur un intervalle

Une fonction f admet sur I un <u>maximum global</u> en $a \in I$ si : $\forall x \in I \quad f(x) \le f(a)$.
Une fonction *f* admet sur I un <u>maximum local</u> en $a \in I$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) \le f(a)$.
Une fonction f admet sur un intervalle I un <u>minimum global</u> en $a \in I$ si : $\forall x \in I \quad f(x) \ge f(a)$.
Une fonction *f* admet sur I un <u>minimum local</u> en $a \in I$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) \ge f(a)$.
La fonction *f* admet en a un <u>extremum global (local)</u> si elle admet un maximum ou un minimum global (local).

fiche n°24

LIMITES

Définition

Une fonction f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (réel ou $\pm\infty$) admet en a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell) \quad \exists W \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in D_f \cap W \quad f(x) \in V$$

Application aux différents cas ($a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x < -B \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow f(x) < -A$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x < -B \Rightarrow f(x) > A$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \quad x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

Limites à gauche et à droite

Une fonction f admet en $a \in \mathbb{R}$ une limite à gauche $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet la limite ℓ. Les définitions s'obtiennent en remplaçant $|x-a| < \alpha$ par $a - \alpha < x < a$.

Une fonction f admet en $a \in \mathbb{R}$ une limite à droite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$ admet la limite ℓ. Les définitions s'obtiennent en remplaçant $|x-a| < \alpha$ par $a < x < a + \alpha$.

Unicité

Si une fonction admet en a une limite ℓ, cette limite est unique.

fiche n°24 (suite)

Caractérisation séquentielle d'une limite

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite (u_n) convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Opérations algébriques sur les limites (ℓ et ℓ' réels)

Somme

u	v	$u+v$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indétermination**

Produit (compléter par la règle des signes)

u	v	uv
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
∞	$\ell' \neq 0$	∞
∞	0	**Indétermination**
∞	∞	∞

Quotient (compléter par la règle des signes)

u	v	u/v
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
0	0	**Indétermination**
∞	ℓ'	∞
ℓ	∞	0
∞	∞	**Indétermination**

Composition de limites (a, b et ℓ réels ou infinis)

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} (v \circ u)(x) = \ell$.

Méthode : En posant $X = u(x)$, on obtient :

$\lim\limits_{x\to a} (v \circ u)(x) = \lim\limits_{X\to b} v(X) = \ell$

fiche n°24 (suite)

Compatibilité avec l'ordre (a réel ou infini, ℓ et ℓ' réels)

Si, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$ et :

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$

  (même si l'inégalité sur les fonctions est stricte).
- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement (a réel ou infini)

Si, pour tout x au voisinage de a, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si les deux fonctions u et v admettent en a la même limite réelle : $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \ell$, alors la fonction f admet en a une limite égale à ℓ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Limite d'une fonction monotone

Si f est une fonction croissante sur $]a,b[$ (a et b réels ou infinis) :

- Si f est majorée, f a une limite réelle en b. Sinon $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.
- Si f est minorée, f a une limite réelle en a. Sinon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

  .

Si f est une fonction décroissante sur $]a,b[$ (a et b réels ou infinis) :

- Si f est minorée, f a une limite réelle en b. Sinon $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.
- Si f est majorée, f a une limite réelle en a. Sinon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

  .

fiche n°25

INTERPRETATION DES LIMITES

Cas où $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\ell}$

La courbe de f admet un « point limite » $A(a,\ell)$ (ou point d'arrêt).
On obtient le coefficient directeur de la tangente en A en étudiant la limite de $\dfrac{f(x)-\ell}{x-a}$ quand x tend vers a (ou des demi-tangentes si l'on étudie les limites à gauche ou à droite de a).

Cas où $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=a$.

Cas où $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell}$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=\ell$.

Cas où $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty}$

Les courbes de f et de g sont asymptotes si $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$.

En particulier, la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe de f si $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$.

Etude de la branche infinie : on étudie $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Si $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$: branche parabolique de direction Oy.

Si $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$: branche parabolique de direction Ox.

Si $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (\neq 0)$: on étudie $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$.

- Si $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$: direction asymptotique $y=ax$.
- Si $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$: asymptote oblique d'équation $y=ax+b$.

fiche n°26

COMPARAISON LOCALE DES FONCTIONS

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Négligeabilité

f est négligeable devant g au voisinage de a, noté $f \underset{a}{=} o(g)$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V qui vérifie : $\forall x \in V \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{=} o(g)$ ssi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Propriétés de la négligeabilité au voisinage de *a*

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{=} o(g) \\ f_2 \underset{a}{=} o(g) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g). \qquad \left.\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{=} o(g_1) \\ f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2).$$

Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $|f|^\alpha \underset{a}{=} o(|g|^\alpha)$ si $\alpha > 0$.

La relation n'est compatible ni avec la composition, ni avec la division.

Négligeabilités usuelles

En $+\infty$	$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ si $0 \le \alpha < \beta$
	$(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$
	$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$
En 0	$x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta)$ si $0 \le \beta < \alpha$
	$(\ln x)^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$
En $-\infty$	$e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\lvert x\rvert^\beta}\right)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

fiche n°26 (suite)

Equivalence

f est équivalente à g au voisinage de a, noté $f \underset{a}{\sim} g$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V qui vérifie : $\forall x \in V \quad f(x) = [1 + \varepsilon(x)] g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Donc $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ (réel non nul), alors $f \underset{a}{\sim} g$.

Propriétés de l'équivalence au voisinage de *a*

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$.

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Si $\left\{\begin{array}{l} f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \\ f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \end{array}\right.$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$ (s'ils sont définis).

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $|f|^\alpha \underset{a}{\sim} |g|^\alpha$ pour tout α.

La relation n'est compatible ni avec la composition, ni avec l'addition.

Equivalences usuelles

<table>
<tr><td rowspan="2">En $\pm\infty$</td><td colspan="3">Polynôme $\underset{\infty}{\sim}$ Terme de plus haut degré</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fraction rationnelle $\underset{\infty}{\sim}$ Quotient des termes de plus haut degré</td></tr>
<tr><td rowspan="4">En 0</td><td>$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$</td><td>$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$</td><td>$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$</td></tr>
<tr><td>$\sin x \underset{0}{\sim} x$</td><td>$\tan x \underset{0}{\sim} x$</td><td>$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Polynôme $\underset{0}{\sim}$ Terme de plus bas degré</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fraction rationnelle $\underset{0}{\sim}$ Quotient des termes de plus bas degré</td></tr>
<tr><td>En 1</td><td>$\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

fiche n°27

CONTINUITE

Continuité en un point

La fonction f doit être définie en a et au voisinage de a.

f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

f est continue à gauche ou à droite de a s'il n'y a égalité qu'avec la limite à gauche ou à droite.

Prolongement par continuité en un point

Une fonction f définie au voisinage de a, mais pas en a est prolongeable par continuité en a si elle admet une limite réelle ℓ en a. Son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ continue en a qui est définie par : $\forall x \in D_f \quad \tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(a) = \ell$.

Continuité sur un intervalle

f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de l'intervalle I.

Si $I = [a,b]$, f doit être continue en tout point de $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Opérations

- Si u est continue sur un intervalle I et si k est une constante, alors ku est continue sur l'intervalle I.
- Si u et v sont continues sur un intervalle I, alors $u+v$ et uv sont continues sur l'intervalle I.
- Si u et v sont continues sur un intervalle I, alors $\dfrac{u}{v}$ est continue sur l'intervalle I privé des points où v s'annule.
- Si u est continue sur un intervalle I et si v est continue sur l'image $u(I)$, alors $v \circ u$ est continue sur l'intervalle I.

Fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes, rationnelles, logarithme, exponentielles, puissances, trigonométriques sont continues sur leur ensemble de définition ainsi que la fonction $x \mapsto |x|$.
- La fonction $x \mapsto \text{Ent}(x) = \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$.

fiche n°27 (suite)

Image d'un intervalle

$f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

Donc l'équation $f(x) = m$ admet des solutions dans I (pas forcément une unique solution) si et seulement si $m \in f(I)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

L'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle (pas forcément de même nature).

<u>Conséquence</u> : Si f est continue sur l'intervalle I et si f prend deux valeurs distinctes, elle prend au moins une fois toutes les valeurs intermédiaires. En particulier, si elle prend une valeur positive et une valeur négative, elle s'annule au moins une fois sur I.

Fonction continue sur un segment [a,b]

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

<u>Conséquence</u> : Si f est continue sur un segment $[a,b]$, elle est bornée, possède un minimum $m = \operatorname{Inf}\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et un maximum $M = \operatorname{Sup}\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ qu'elle atteint (il existe $c \in [a,b]$ et $d \in [a,b]$ tels que $m = f(c)$ et $M = f(d)$), et elle prend au moins une fois toute valeur comprise entre m et M.

Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, $f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert ou fermé) que I, obtenu en prenant les valeurs de f ou les limites de f aux bornes de I (il faut intervertir les bornes si f est décroissante).

Théorème de bijection

Si f est <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un <u>intervalle</u> I, f définit une bijection de I dans $f(I)$. Sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone (même sens que f) sur $f(I)$.

Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation : $y = x$.

fiche n°28

DERIVATION

Dérivabilité en un point

La fonction f doit être définie en a et au voisinage de a.

f est dérivable en a si son taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite réelle en a : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La fonction est dérivable à gauche ou à droite de a si son taux d'accroissement en a admet une limite réelle à gauche ou à droite. Elle est dérivable en a ssi ces deux limites sont égales.

Développement limité d'ordre 1

Si f est dérivable en a, il existe un voisinage V de 0 tel que : $\forall h\in V \quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

<u>Conséquence</u> : Toute fonction <u>dérivable</u> en a est <u>continue</u> en a (réciproque fausse).

<u>Exemples classiques</u> : Toujours avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$:

$\ln(1+h)=h+h\varepsilon(h)$ $\quad e^h=1+h+h\varepsilon(h)$ $\quad (1+h)^\alpha=1+\alpha h+h\varepsilon(h)$

$\sin h=h+h\varepsilon(h)$ $\quad \tan h=h+h\varepsilon(h)$ $\quad \cosh=1+h\varepsilon(h)$

Interprétation géométrique

- Si f est dérivable en a, sa courbe représentative admet au point A d'abscisse a une tangente d'équation : $y=(x-a)f'(a)+f(a)$.
  La tangente en A est horizontale si et seulement si $f'(a)=0$.
- Si le taux d'accroissement de f en a tend vers $\pm\infty$, sa courbe admet en A une tangente verticale.
- Si le taux d'accroissement de f en a admet à gauche et à droite des limites réelles différentes, sa courbe admet deux demi-tangentes distinctes à gauche et à droite du point A : le point A est un point « anguleux ».
- Si le taux d'accroissement de f en a admet à gauche et à droite des limites infinies, sa courbe admet deux demi-tangentes verticales : le point A est soit un point d'inflexion soit un point de rebroussement.

fiche n°28 (suite)

Dérivabilité sur un intervalle

f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout $a\in I$.

Alors sa fonction dérivée est la fonction $x\mapsto \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Dérivées usuelles

$f(x)=c$	$f'(x)=0$	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	
$f(x)=x^\alpha$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$	
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boxed{\text{si } x\neq 0}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	
$f(x)=\text{cotan}\, x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-1-\text{cotan}^2 x$	
$f(x)=\text{Arcsin}\, x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\boxed{\text{si } x\neq \pm 1}$
$f(x)=\text{Arccos}\, x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\boxed{\text{si } x\neq \pm 1}$
$f(x)=\text{Arctan}\, x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	

fiche n°28 (suite)

Opérations

- Si u et v sont dérivables sur l'intervalle I et si k est une constante, alors $u+v$, uv et ku sont dérivables sur I, et $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I privé des points où v s'annule.

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (uv)'=u'v+uv' \qquad (ku)'=ku' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

- Si u est dérivable sur l'intervalle I et si v est dérivable sur $u(I)$, alors $v\circ u$ est dérivable sur I : $(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u'$.

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2} \qquad (\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad (u^\alpha)'=\alpha u'u^{\alpha-1} \qquad (e^u)'=u'e^u$$

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u} \qquad (\sin u)'=u'\cos u \qquad (\cos u)'=-u'\sin u \quad \ldots$$

- Si u est dérivable et bijective de l'intervalle I dans l'intervalle $u(I)$, sa réciproque u^{-1} est dérivable sur $u(I)-\{u(x)/\ u'(x)=0\}$ et $(u^{-1})'=\dfrac{1}{u'\circ u^{-1}}$.

Sens de variation

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

- f est constante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)=0$.
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$.
- Si $\forall x\in I \quad f'(x)>0$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), f est strictement croissante sur I.
- Si $\forall x\in I \quad f'(x)<0$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), f est strictement décroissante sur I.

Extremum local

Une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I admet un extremum local en $a\in I$ si et seulement si sa dérivée f' s'annule en changeant de signe en a.

Dérivée d'ordre *n*

Sous réserve d'existence : $f^{(0)}=f$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

fiche n°28 (suite)

Classes de fonctions

Sur un intervalle I, une fonction f est :

- de classe D^n si elle est dérivable n fois sur I.
- de classe C^n si elle est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
- de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable sur I (elle admet des dérivées de tout ordre).

Formule de Leibniz : $(uv)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$ si u et v sont D^n.

Les fonctions polynômes, rationnelles, logarithme, exponentielle, trigonométriques sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions $x\mapsto x^\alpha$ sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition si $\alpha\leq 0$ ou $\alpha\geq 1$, et sur $]0,+\infty[$ si $0<\alpha<1$ (donc en particulier $x\mapsto\sqrt{x}$). La fonction $x\mapsto|x|$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Prolongement de la dérivée

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si sa dérivée f' admet une limite réelle en a, alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$.

Donc f est dérivable en a et $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$, la fonction f n'est pas dérivable en a, et la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

Théorème de Rolle $(a<b)$

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Egalité des accroissements finis $(a<b)$

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Inégalités des accroissements finis

Si f est dérivable sur un intervalle I et si $a\in I$ et $b\in I$:

Première inégalité (si $a\leq b$)

Si $\forall x\in[a,b] \quad m\leq f'(x)\leq M$, alors : $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$

Deuxième inégalité (a et b sont quelconques dans I)

Si $\forall x\in I \quad |f'(x)|\leq M$, alors : $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$.

fiche n°29

CONVEXITE

Ensemble convexe

Une partie D du plan est convexe si pour tous points A et B de D, le segment $[A,B]$ est contenu dans D, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,1]$, le barycentre de (A,t) et $(B,1-t)$ appartient à D.

Fonction convexe

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f[ta+(1-t)b] \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

Sa courbe est en dessous de ses cordes.

Fonction concave

Une fonction f est concave sur un intervalle I si :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f[ta+(1-t)b] \geq tf(a)+(1-t)f(b)$$

Sa courbe est au dessus de ses cordes.

La fonction f est concave sur I si la fonction $(-f)$ est convexe sur I.

Cas des fonctions dérivables une fois

Une fonction f dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante.

C'est équivalent à dire que sa courbe est au dessus de ses tangentes.

Une fonction f dérivable sur un intervalle I est concave si et seulement si sa dérivée f' est décroissante.

C'est équivalent à dire que sa courbe est en dessous de ses tangentes.

Cas des fonctions dérivables deux fois

Une fonction f dérivable deux fois sur un intervalle I est convexe si et seulement si $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$.

Une fonction f dérivable deux fois sur un intervalle I est concave si et seulement si $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$.

Point d'inflexion

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.

Si f est dérivable deux fois sur l'intervalle I, le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de la courbe si et seulement si la dérivée f'' s'annule en a en changeant de signe.

fiche n°30

PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction s'il n'est pas donné dans l'énoncé.
- Réduire éventuellement cet ensemble par la recherche de la parité et de la périodicité de la fonction.
- Etudier de la continuité de la fonction.
- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de l'ensemble d'étude et aux points où les théorèmes de continuité ne s'appliquent pas. Interpréter géométriquement ces limites.
- Etudier la dérivabilité de la fonction.
- Déterminer la limite du taux d'accroissement aux points où les théorèmes de dérivabilité ne s'appliquent pas. Interpréter géométriquement ces limites en termes de tangentes.
- Calculer la dérivée de la fonction et étudier le signe de cette dérivée (une étude de fonction auxiliaire est parfois nécessaire).
- En déduire le sens de variation de la fonction.
- Résumer tous les résultats précédents dans un tableau après en avoir vérifié la cohérence. Calculer les coordonnées des points « particuliers » rencontrés dans l'étude et des points à tangente horizontale ($f'(x)=0$). Ne jamais mettre de valeurs approchées dans un tableau.
- Eventuellement calculer la dérivée seconde pour étudier la convexité de la fonction et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe.
- Tracer la courbe représentative de la fonction :
  - Choisir astucieusement la position du repère dans le plan et l'unité de longueur si elle n'est pas donnée dans l'énoncé. Sinon, respecter l'unité imposée par l'énoncé.
  - Placer les asymptotes et les points particuliers (avec leur tangente).
  - Tracer la courbe en plaçant quelques autres points sans oublier de vérifier la cohérence avec le tableau de variations.

fiche n°31

PRIMITIVES

Définition

Une fonction F est primitive d'une fonction f sur un intervalle J si F est dérivable sur J et si : $\forall x \in J \quad F'(x) = f(x)$.

Existence

Toute fonction f continue sur un intervalle J admet une infinité de primitives sur J. Elles sont toutes obtenues à partir de l'une d'entre elles en ajoutant des constantes.

Unicité

Etant donnée une fonction f continue sur un intervalle J, un réel $a \in J$ et un réel b quelconque, il existe une unique primitive F de f sur J qui vérifie $F(a) = b$.

Primitives usuelles

$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$
$f(x) = x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x \rvert + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + k$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \mathrm{Arctan}\, x + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}\, x + k \\ -\mathrm{Arccos}\, x + k \end{cases}$

fiche n°31 (suite)

Opérations algébriques sur les primitives

$f = u + v$	$F = U + V + k$
$f = \lambda u$	$F = \lambda U + k$

Primitives obtenues par composition de fonction

$f = u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$F = \dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + k$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\lvert u \rvert + k$
$f = u'e^u$	$F = e^u + k$
$f(x) = u'\sin u$	$F = -\cos u + k$
$f(x) = u'\cos u$	$F = \sin u + k$
$f(x) = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$	$F = \tan u + k$
$f(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$F = \mathrm{Arctan}\, u + k$
$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$F(x) = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}\, u + k \\ -\mathrm{Arccos}\, u + k \end{cases}$

Interprétation géométrique

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$), la fonction F qui, à tout réel t de $[a,b]$, associe l'aire de la partie de plan située sous la courbe de f et limitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = t$, c'est-à-dire l'aire de $D = \{M(x,y) / a \le x \le t \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$, est une primitive de la fonction f sur $[a,b]$.

Expression d'une primitive

Si f est continue sur un intervalle J et si $a \in J$, alors la fonction F définie par : $\forall x \in J \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a.

fiche n°32

INTEGRALES DEFINIES

Subdivision d'un segment

Si $a<b$, on appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma=(x_0,...,x_n)$ où $x_0=a$ et $x_n=b$.

Le pas de la subdivision est $|\sigma|=\text{Max}\{x_{k+1}-x_k \,/\, k\in[\![0,n-1]\!]\}$.

La subdivision est régulière si : $\forall k\in[\![0,n-1]\!] \quad x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Une fonction φ est en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,...,x_n)$ adaptée à φ, c'est-à-dire telle que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, φ soit constante sur $[x_k,x_{k+1}]$: $\varphi(x)=c_k$.

Alors l'intégrale de φ sur $[a,b]$ est : $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)c_k$.

Elle est indépendante de la subdivision σ choisie.

Fonction intégrable

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ (avec $a<b$).

L'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f admet une borne supérieure $I^-(f)$.

L'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui majorent f admet une borne inférieure $I^+(f)$.

La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si les deux bornes sont égales.

Alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=I^-(f)=I^+(f)$.

Fonctions continues par morceaux

Une fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,...,x_n)$ telle que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, f soit continue sur $]x_k,x_{k+1}[$ et admette un prolongement par continuité $\tilde{f}_k$ sur $[x_k,x_{k+1}]$ (limite réelle à gauche et à droite de tout x_k).

Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\tilde{f}_k(t)\,dt$.

fiche n°32 (suite)

Fonctions continues

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Extension de la définition

Si f est une fonction continue sur un intervalle J, si F est une primitive <u>quelconque</u> de f sur J, alors :

$$\forall(a,b)\in J^2 \quad \int_a^b f(t)dt=\left[F(t)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

<u>Conséquences</u> : $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt=-\int_a^b f(t)\,dt$.

Expression d'une primitive

Si f est continue sur un intervalle J et si $a\in J$, la fonction F définie par $\forall x\in J \quad F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a. Donc $F(a)=0$ et $\forall x\in J \quad F'(x)=f(x)$.

Calculs d'aires

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a\le b$) :

- l'aire (en unités d'aire) de la partie de plan limitée par $\mathcal{C}_f$, Ox et les droites $x=a$ et $x=b$ est : $\mathscr{A}=\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.
- l'aire (en unités d'aire) de la partie de plan limitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites $x=a$ et $x=b$ est : $\mathscr{A}=\displaystyle\int_a^b |f(t)-g(t)|dt$.

Relation de Chasles

Si f est continue sur J : $\forall(a,b,c)\in J^3 \quad \displaystyle\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$

Intégrale d'une fonction continue paire ou impaire

<u>Si f est impaire</u> : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt=0$ <u>Si f est paire</u> : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$

fiche n°32 (suite)

Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont continues sur J :

$$\forall (a,b) \in J^2 \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Signe d'une intégrale

Si f est continue sur un intervalle J et si $(a,b) \in J^2$:

- Si $a \le b$ et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \ge 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \ge 0$.
- Si $a \le b$ et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \le 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \le 0$.

Comparaison de deux intégrales

Si f et g sont continues sur un intervalle J et si $(a,b) \in J^2$:

- Si $a \le b$ et si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \le g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

Inégalités de la moyenne

Si f est continue sur un intervalle J et si $(a,b) \in J^2$:

- Si $a \le b$ et $\forall t \in [a,b] \quad m \le f(t) \le M$, alors $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$.
- Si $\forall t \in J \quad |f(t)| \le M$, alors : $\displaystyle\forall (a,b) \in J^2 \quad \left|\int_a^b f(t)dt\right| \le M|b-a|$.

Majoration d'une intégrale

Si f est continue sur un intervalle J et si $(a,b) \in J^2$:

- Si $a \le b$, on a : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt \le (b-a) \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Nullité d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et de signe constant. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b] \quad f(t) = 0$. Donc pour montrer que l'intégrale n'est pas nulle, il suffit de montrer que : . $\exists t \in [a,b] \quad f(t) \ne 0$.

fiche n°32 (suite)

Valeur moyenne d'une fonction continue entre *a* et *b*

Si f est une fonction continue sur J et si $(a,b) \in J^2$, alors la valeur moyenne de f entre a et b est : $\displaystyle\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle J :

$$\forall (a,b) \in J^2 \quad \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Changement de variable

Si φ est de classe C^1 sur un intervalle J et si f est continue sur $\varphi(J)$, alors $\displaystyle\int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$ en posant $u = \varphi(t)$ et $du = \varphi'(t)\,dt$.

Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a < b$ et si $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, on appelle somme de Riemann toute somme $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(y_k)$ où $\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad y_k \in [x_k,x_{k+1}]$.

Si f est continue sur $[a,b]$, toute somme de Riemann sur $[a,b]$ tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ quand le pas de la subdivision σ tend vers 0.

En particulier : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Equation différentielle

Si g est une fonction continue sur un intervalle J de primitive G, les fonctions f dérivables sur J qui vérifient $\forall x \in J \quad f'(x) = f(x)g(x)$ sont les fonctions telles que : $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in J \quad f(x) = Ke^{G(x)}$.

Prolongement des fonctions de classe C^n

Si f est une fonction de classe C^n sur $]a,b]$ avec $a < b$ et si $f^{(n)}$ a une limite réelle en a, alors f admet un prolongement de classe C^n sur $[a,b]$.

fiche n°33

FORMULES DE TAYLOR

n désigne un entier naturel.

Formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, alors pour tous a et b de I :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Cas des polynômes

Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors pour tout a réel :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Egalité de Taylor-Lagrange

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I, alors pour tous a et b distincts dans I, il existe c compris entre a et b tel que :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et si $\forall t\in I\quad \left|f^{(n+1)}(t)\right|\le M$, alors pour tous a et b de l'intervalle I :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\le M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I contenant a, alors il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$:

$$\forall x\in I\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

ce que l'on écrit : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o\left((x-a)^n\right)$.

fiche n°34

DEVELOPPEMENTS LIMITES

Développement limité en 0

Soit $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle contenant 0 et non réduit à 0.
Une fonction f définie sur $D = I$ ou $D = I - \{0\}$ admet en 0 un développement limité d'ordre n (on note $DL_n(0)$) s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall x \in D \quad f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C'est équivalent à : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ au voisinage de 0.
Le polynôme P_n est la partie régulière du $DL_n(0)$.

Développement limité en *a*

Méthode de calcul : On effectue un changement de variable en posant : $h = x - a$. On se ramene à la recherche de l'existence d'un $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(h) = f(a+h)$.
La fonction f admet en a un $DL_n(a)$ s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall x \in D \quad f(x) = P_n(x-a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Le polynôme $x \mapsto P_n(x-a)$ est la partie régulière du $DL_n(a)$.

Développement limité à l'infini

Méthode de calcul : On effectue un changement de variable en posant : $h = \frac{1}{x}$. On est donc ramené à la recherche de l'existence d'un $DL_n(0)$ de la fonction g définie par $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$.

La fonction f admet à l'infini un $DL_n(\infty)$ s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall x \in D \quad f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

Parfois, l'étude conduit à des termes qui sont des puissances de $\frac{1}{h}$.
On parle alors de développement asymptotique à l'infini.

fiche n°34 (suite)

Propriétés

- Si f admet un $DL_n(a)$, il est unique.
- Si f admet un $DL_n(a)$, elle admet des développements limités d'ordre $q \le n$ et P_q est obtenu en tronquant P_n à l'ordre q (on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à q).
- Si f est paire (impaire) et si f admet un $DL_n(0)$, alors le polynôme P_n est pair (impair).
- Si f est définie en a, elle admet un $DL_0(a)$ si et seulement si elle est continue en a. Si f n'est pas définie en a, elle admet un $DL_0(a)$ si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a.
- Si f est définie en a, elle admet un $DL_1(a)$ si et seulement si elle est dérivable en a. Si f n'est pas définie en a, elle admet un $DL_1(a)$ si et seulement si son prolongement par continuité est dérivable en a.
- Si f admet un $DL_n(a)$ et si la partie régulière P_n n'est pas le polynôme nul, alors : $f(x) \underset{a}{\sim} P_n(x-a)$.

Condition suffisante (non nécessaire) d'existence

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I contenant a, elle admet un $DL_n(a)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$

Recherche d'une tangente en un point

Si la fonction f admet un $DL_1(a)$, alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = P_1(x-a)$. La position par rapport à la tangente est donnée par le premier terme suivant non nul.

Recherche d'une asymptote

On cherche un DL de f à l'infini. Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. La position par rapport à l'asymptote est donnée par le premier terme non nul du DL à l'infini de φ.

fiche n°34 (suite)

Développements limités usuels en 0

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$$

Opérations algébriques (On se ramène d'abord en 0)

Si *f* et *g* admettent des $DL_n(a)$ de parties régulières P_n et Q_n :

- si α et β sont réels, alors $\alpha f+\beta g$ admet $DL_n(a)$ dont la partie régulière est $\alpha P_n+\beta Q_n$.
- fg admet $DL_n(a)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant P_nQ_n à l'ordre *n*.
- $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(a)$ si $Q_n(a)\neq 0$. Pour l'obtenir, dans le $DL_n(a)$ de *g*, on met en facteur $Q_n(a)$, ce qui permet d'écrire $\frac{f}{g}=\frac{f}{Q_n(a)}\times\frac{1}{1-u}$ avec $\lim\limits_{x\to a}u=0$. Si $Q_n(a)=0$, on se ramène au cas précédent en factorisant par des puissances de $(x-a)$, mais l'ordre obtenu ne sera pas *n*.

Composition

Si *f* admet un $DL_n(a)$, si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et si *g* admet un $DL_n(b)$, alors $g\circ f$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est la troncature d'ordre *n* de $Q_n\circ P_n$ (composée des parties régulières de *g* et *f*).

fiche n°35

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Système de *n* équations linéaires à *p* inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les $x_1,\ldots,x_p$ sont les inconnues.

Les a_{ij} et les b_i sont les coefficients.

Une solution du système est un élément $(x_1,\ldots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ qui vérifie toutes les équations.

Système homogène

Le système est homogène si $\forall i \quad b_i = 0$. Il admet au moins une solution $(0,\ldots,0)$.

Système de Cramer

C'est un système carré $(n = p)$ qui admet une unique solution.

Systèmes équivalents

Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Opérations élémentaires sur les lignes

- Echange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Ajout d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

Elles transforment un système en un système équivalent.
Il en est de même pour toute transformation de la forme : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ à condition que $\alpha \neq 0$.

Matrice complétée du système

C'est la matrice des coefficients : $A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$.

fiche n°35 (suite)

Méthode du pivot de Gauss

Objectif : A l'aide d'opérations élémentaires, transformer le système en un système triangulaire équivalent simple à résoudre.

Etape 1 : on choisit une ligne de référence que l'on met dans L_1 (coefficient de x_1 non nul et le plus simple possible), puis on transforme toutes les lignes sauf L_1 par $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$ (avec $\alpha \neq 0$) pour annuler le coefficient de x_1 dans L_i.

Etapes suivantes : Ensuite, on ne change plus L_1, et on recommence le même procédé avec l'inconnue x_2 sur le système formé par $L_2,\ldots,L_n$, … et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait épuisé les lignes ou les inconnues.

Si, au cours de ces transformations, on trouve une équation de la forme $0x_1 + \ldots + 0x_p = b$:

- Si $b \neq 0$, le système n'a pas de solution. Le processus s'arrête.
- Si $b = 0$, on continue le processus en supprimant la ligne.

Ensemble des solutions

On se place dans le cas où l'on n'a pas trouvé $S = \varnothing$.

Si le système final est triangulaire, les termes de la diagonale étant non nuls (pivots), le système est un système de Cramer et on obtient la solution par substitution depuis la dernière ligne jusqu'à la première. On peut aussi effectuer des transformations symétriques sur la matrice complétée pour obtenir une matrice de la forme : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right)$.

Si le système final comporte moins d'équations que d'inconnues, on considère certaines inconnues comme « paramètres », et on exprime les autres en fonction de celles-là. Le système a alors une infinité de solutions.

fiche n°36

ESPACES VECTORIELS

Définition

Un ensemble E est un espace vectoriel sur $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$ s'il est muni d'une addition interne $\begin{array}{l} E\times E\to E \\ (u,v)\mapsto u+v \end{array}$ et d'une multiplication externe (à opérateurs dans K) $\begin{array}{l} K\times E\to E \\ (\alpha,u)\mapsto \alpha u \end{array}$ qui vérifient :

- $\forall (u,v)\in E^2 \quad u+v=v+u$.
- $\forall (u,v,w)\in E^3 \quad (u+v)+w=u+(v+w)$.
- Il existe un unique élément (neutre) 0_E de E tel que : $\forall u\in E \quad u+0_E=0_E+u=u$
- Pour tout vecteur u de E, il existe un unique vecteur de E noté $-u$ tel que : $u+(-u)=(-u)+u=0_E$
- $\forall u\in E \quad 1u=u$.
- $\forall \alpha\in K \quad \forall (u,v)\in E^2 \quad \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$.
- $\forall (\alpha,\beta)\in K^2 \quad \forall u\in E \quad (\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$.
- $\forall (\alpha,\beta)\in K^2 \quad \forall u\in E \quad \alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$.

<u>Propriété</u> : $\alpha u=0_E \Leftrightarrow \alpha=0$ ou $u=0_E$ dans un espace vectoriel

Exemples fondamentaux

K^n, $\mathcal{F}(D,K)$ (applications de D dans K), $\mathcal{U}=K^{\mathbb{N}}$ (suites numériques), $K[X]$ (polynômes), $K_n[X]$ (degré $\leq n$), $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\mathcal{M}_n(K)$ (matrices).

Sous-espaces vectoriels

Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulemenr si :

- $F\neq\varnothing$.
- $\forall \alpha\in K \quad \forall (u,v)\in F^2 \quad \alpha u+v\in F$

Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.
Tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul 0_E .
Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E (donc non vide). C'est faux pour une réunion.

fiche n°36 (suite)

Somme de deux sous-espaces vectoriels

La somme $F+G=\{u+v / u\in F \text{ et } v\in G\}$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
La somme est <u>directe</u> (notée $F\oplus G$) si $F\cap G=\{0_E\}$.
F et G sont <u>supplémentaires</u> si $F\oplus G=E$: tout vecteur de E se décompose de manière unique en $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.

Sous-espace vectoriel engendré

Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, …, u_n est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

$$u\in \text{Vect}<u_1,\dots,u_n> \Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n \quad u=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k .$$

Famille génératrice

Une famille (u_1, …, u_n) de vecteurs appartenant à un sous-espace vectoriel F est génératrice de F si $\text{Vect}<u_1,\dots,u_n> = F$, c'est-à-dire si tout vecteur de F est combinaison linéaire de u_1, …, u_n.
Toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice.
Si l'un des vecteurs d'une famille génératrice est combinaison linéaire des autres, la famille privée de ce vecteur est génératrice.

Famille libre

Une famille (u_1, …, u_n) de vecteurs de E est libre si :

$$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n \quad \alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n=0_E \Leftrightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=0 .$$

Une famille (u_1) est libre ssi $u_1\neq 0_E$.
Une famille (u_1, u_2) est libre ssi u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
La famille est libre ssi tout vecteur de $\text{Vect}<u_1,\dots,u_n>$ s'écrit de manière <u>unique</u> comme combinaison linéaire de u_1, …, u_n.

Famille liée

Une famille (u_1, …, u_n) de vecteurs de E est liée si elle n'est pas libre, donc si : $\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(0,\dots,0) \quad \alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n=0_E$.
La famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Toute famille qui contient une famille liée (par ex. 0_E) est liée.

fiche n°36 (suite)

Base

Une famille ($u_1, \ldots, u_n$) de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F est une base de F si elle est libre et génératrice.

Une famille ($u_1, \ldots, u_n$) est une base de F si et seulement si :

$$\forall u \in F \quad \exists! (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n .$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont les coordonnées de u dans la base ($u_1, \ldots, u_n$).

Espace vectoriel « de dimension finie »

C'est un espace vectoriel qui a une famille génératrice finie.

Tout espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$ de dimension finie admet une base.

Dimension d'un espace vectoriel

Théorème de la dimension : Si un espace vectoriel possède une base de n vecteurs, toutes les autres bases ont n vecteurs.

Ce nombre n s'appelle la dimension de E : $\dim E = n$.

Par convention : $\dim \{0_E\} = 0$.

Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1.

Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2.

Un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Bases canoniques

$\dim K^n = n$ Base canonique : $(1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$.

$\dim K_n[X] = n+1$ Base canonique : $(1, X, \ldots, X^n)$.

$\dim \mathcal{M}_{n,p}(K) = np$ Base canonique : $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ (où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1)

Sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension *n*

Si F est un sous-espace vectoriel de E : $\dim F \le \dim E$.

Et $F = E$ si et seulement si : $\dim F = \dim E$.

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

F et G sont supplémentaires ssi $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Le rang de ($u_1, \ldots, u_n$) est la dimension de $\mathrm{Vect} < u_1, \ldots, u_n >$.

fiche n°36 (suite)

Familles de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension *n*

- Toutes les bases ont n vecteurs.
- Toutes les familles libres ont au plus n vecteurs.
- Toutes les familles génératrices ont au moins n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
- Toute famille libre peut être complétée en une base.
- De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

fiche n°37

APPLICATIONS LINEAIRES

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application f de E dans F est linéaire (ou est un homomorphisme) si :

$$\forall \alpha \in K \quad \forall (u,v) \in E^2 \quad f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$$

Un <u>endomorphisme</u> de E est une application linéaire de E dans E.
Un <u>isomorphisme</u> est une application linéaire bijective de E dans F.
Un <u>automorphisme</u> de E est un endomorphisme bijectif de E.

Opérations sur les applications linéaires

La somme de deux applications linéaires est linéaire.
Le produit d'une application linéaire par un scalaire est linéaire.
L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F et l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E munis de ces deux opérations sont des espaces vectoriels.
La composée de deux applications linéaires est linéaire.
La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
L'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E est un groupe.

Propriétés

Si f est une application linéaire de E dans F :

- L'image du vecteur nul 0_E de E est le vecteur nul 0_F de F.
- L'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est la combinaison linéaire de leurs images affectées des mêmes coefficients : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$.
- L'image d'un sous-espace vectoriel E' de E est un sous-espace vectoriel de F : $f(E') = \{v \in F / \exists u \in E' \quad v = f(u)\}$.
- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel F' de F est un sous-espace vectoriel de E : $f^{-1}(F') = \{u \in E / f(u) \in F'\}$.

Noyau d'une application linéaire

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E / f(u) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.
L'application f est injective si et seulement si : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

fiche n°37 (suite)

Image d'une application linéaire

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{v \in F / \exists u \in E \quad v = f(u)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.
L'application f est surjective si et seulement si : $\operatorname{Im} f = F$.

Image d'une famille de vecteurs

Si f est une application linéaire de E dans F :

- L'image d'une famille liée de E est une famille liée de F.
- Si f est <u>injective</u>, l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- L'image d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel E' de E est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $f(E')$ de F.
- Si f est <u>injective</u>, l'image d'une base d'un sous-espace vectoriel E' de E est une base du sous-espace vectoriel $f(E')$ de F.

Forme linéaire

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K.
Si $\dim E = n$, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan (sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Projection

Si E_1 et E_2 sont supplémentaires : $\forall u \in E \quad u = u_1 + u_2$ avec $\begin{cases} u_1 \in E_1 \\ u_2 \in E_2 \end{cases}$.

La projection p sur E_1 suivant E_2 est définie par $p(u) = u_1$.

<u>Propriétés</u> : C'est un endomorphisme de E.

$p \circ p = p$.

$\operatorname{Ker} p = E_2$.

$\operatorname{Im} p = E_1 = \{u \in E / p(u) = u\}$.

Projecteur

Un projecteur sur E est un endomorphisme de E tel que : $p \circ p = p$.

Si p est un projecteur sur E, alors :

- $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
- p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \{u \in E / p(u) = u\}$ suivant $\operatorname{Ker} p$.

fiche n°37 (suite)

Symétrie

Si E_1 et E_2 sont supplémentaires : $\forall u \in E \quad u = u_1 + u_2$ avec $\begin{cases} u_1 \in E_1 \\ u_2 \in E_2 \end{cases}$.

La symétrie s par rapport à E_1 suivant E_2 est définie par $s(u) = u_1 - u_2$.

Propriétés : C'est un automorphisme de E.

$s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

$E_1 = \{u \in E / s(u) = u\}$.

$E_2 = \{u \in E / s(u) = -u\}$.

Involution

Un endomorphisme s est involutif si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Si s est un endomorphisme involutif, alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{u \in E / s(u) = u\}$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{u \in E / s(u) = -u\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ suivant $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Théorème du rang (dimensions finies)

Si E et F sont de dimensions finies, et si f est une application linéaire de E dans F, alors : $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

Conséquences :

- Si f est injective : $\dim E \leq \dim F$.
- Si f est surjective : $\dim E \geq \dim F$.
- Si f est bijective (isomorphisme) : $\dim E = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective ssi $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$.

Matrice d'une application linéaire en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle matrice de f la matrice A des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Si u est un vecteur de E de matrice X dans la base $\mathscr{B}$, alors le vecteur $f(u)$ a pour matrice $Y = AX$ dans la base $\mathscr{B}'$.

fiche n°37 (suite)

Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ peut s'interpréter comme matrice d'une application linéaire de E dans F, ou de K^p dans K^n rapportés à leurs bases canoniques.

Opérations sur les matrices

La matrice de $f + g$ est $M_f + M_g$.

La matrice de λf est λM_f.

La matrice de $g \circ f$ est $M_g \times M_f$.

Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice est inversible. La matrice de sa réciproque f^{-1} est $(M_f)^{-1}$.

fiche n°38

MATRICES

Matrices à *n* lignes et *p* colonnes

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij}$ est l'élément de $\begin{cases} \text{la ligne } i \\ \text{la colonne } j \end{cases}$

Matrice ligne si $n = 1$. Matrice colonne si $p = 1$.

Matrice nulle si $\forall (i, j) \quad a_{ij} = 0$.

Matrice carrée d'ordre *n* si $p = n$.

Matrice carrée diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$.

Matrice I_n unité d'ordre *n* : matrice diagonale avec $\forall i \quad a_{ii} = 1$.

Matrice carrée triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.

Matrice carrée triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$.

$\mathcal{M}_{n,p}(K)$: ensemble des matrices à *n* lignes et *p* colonnes dont les éléments sont dans *K*.

$\mathcal{M}_n(K)$: ensemble des matrices carrées d'ordre *n* dont les éléments sont dans *K*.

Egalité de deux matrices

Elles doivent avoir les mêmes dimensions et : $\forall (i, j) \quad a_{ij} = b_{ij}$.

Addition de deux matrices

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $C = A + B$, alors $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

On additionne les éléments terme à terme : $\forall (i, j) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\lambda \in K$ et $C = \lambda A$, alors $C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

On multiplie tous les éléments par λ : $\forall (i, j) \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Multiplication de deux matrices

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C = AB$, alors $C \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$.

On multiplie la ligne *i* de *A* par la colonne *j* de *B* :

$\forall (i, j) \quad c_{ij} = \sum^{p} a_{ik} b_{kj}$

fiche n°38 (suite)

Transposée d'une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $C = {}^tA$, alors $C \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

On intervertit les lignes et les colonnes de *A* : $\forall (i, j) \quad c_{ij} = a_{ji}$.

Propriétés : ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \qquad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Matrice carrée symétrique si ${}^tA = A$, antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Propriétés algébriques

$A + B = B + A$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$	$\lambda A = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $A = 0$
$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$	$(AB)C = A(BC)$
$A(B + C) = AB + AC$	$(A + B)C = AC + BC$

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$: $AI_p = I_n A = A$.

La multiplication des matrices n'est pas commutative : $AB \neq BA$.

Si $AB = BA$, on dit que les matrices *A* et *B* commutent.

Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune des matrices soit nulle.

Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée *A* d'ordre *n* est inversible s'il existe une matrice carrée *B* d'ordre *n* telle que : $I = AB = BA$. Alors $B = A^{-1}$.

Propriétés : $(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

$AB = C \Leftrightarrow B = A^{-1}C \qquad BA = C \Leftrightarrow B = CA^{-1}$

Une matrice diagonale ou triangulaire est inversible si et seulement si les éléments de sa diagonale sont non nuls.

Méthodes de calcul : Méthode de Jordan-Gauss ou Inversion du système ou Polynôme annulateur.

Puissances d'un matrice carrée

$A^k = A \times \ldots \times A \quad$ (*k* fois si $k \in \mathbb{N}^*$) $\qquad A^0 = I$

Propriétés : $A^k A^m = A^{k+m} \qquad (A^k)^m = A^{km}$

$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k} \qquad {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$

Formule du binôme seulement si *A* et *B* commutent :

Si $AB = BA$, alors : $(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$.

fiche n°38 (suite)

Puissances d'une matrice diagonale

Si $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, alors $D^k=\begin{pmatrix} (d_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (d_n)^k \end{pmatrix}$.

Structure de l'ensemble des matrices

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un espace vectoriel de dimension *np*.

Sa base canonique est formée des matrices $E_{i,j}$ dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{i,j}=1$.

L'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

fiche n°39

CHANGEMENT DE BASE

Matrice d'un vecteur

Dans un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, à tout vecteur $u=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on associe la matrice colonne $U=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ peut être interprétée comme matrice d'un vecteur u de E dans la base $\mathscr{B}$.

Matrice d'une famille de vecteurs

Dans un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, la matrice de la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$.

Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(K)$ peut être interprétée comme matrice d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ de E dans la base $\mathscr{B}$.

Matrice d'une base

Dans un espace vectoriel E de base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si sa matrice est inversible.

Changement de base

Si un espace vectoriel E possède deux bases $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$, on appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice P de la famille de vecteurs $(e'_1,\dots,e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Toute matrice de passage est inversible. Réciproquement, toute matrice inversible peut s'interpréter comme une matrice de passage.

Si un vecteur u a pour matrice X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$, alors : $X=PX'$.

Si f est un endomorphisme de matrice A dans $\mathscr{B}$ et de matrice A' dans $\mathscr{B}'$, alors : $A'=P^{-1}AP$.

Matrices semblables

Deux matrices A et A' sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que : $A'=P^{-1}AP$.

fiche n°40

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Valeurs propres d'un endomorphisme

Un scalaire λ est valeur propre d'un endomorphisme *f* de *E* s'il existe un vecteur *v* de *E* non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

0 est valeur propre de *f* si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0_E\}$. Donc un endomorphisme est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre.

Valeurs propres d'une matrice

Un scalaire λ est valeur propre d'une matrice *A* s'il existe une matrice colonne *X* non nulle telle que $AX = \lambda X$.

Si *f* est un endomorphisme d'un espace *E* de dimension finie, un scalaire λ est valeur propre de *f* si et seulement si il est valeur propre de sa matrice *A* dans une base (quelconque) de *E*.

Toutes les matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont ses éléments diagonaux.

Propriétés

Un scalaire λ est valeur propre d'une matrice *A*, ou d'un endomorphisme *f* de matrice *A* dans un espace *E* de dimension finie, si et seulement si la matrice $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

Si λ est valeur propre d'un endomorphisme *f* de *E*, alors pour tout entier *k*, λ^k est valeur propre de $f^k = f \circ ... \circ f$ (*k* fois).

S'il existe un polynôme *P* tel que $P(f) = 0$ ou $P(A) = 0$, alors les valeurs propres de *f* ou de *A* sont racines du polynôme *P* (mais toutes les racines de *P* ne sont pas forcément des valeurs propres).

Sous espace propre associé à une valeur propre

On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ d'un endomorphisme *f* de *E* l'ensemble : $E_\lambda = \{u \in E \,/\, f(u) = \lambda u\}$.

E_λ est un sous-espace vectoriel de *E* distinct de $\{0_E\}$: $\dim E_\lambda \geq 1$.

Si 0 est valeur propre de *f*, alors $E_0 = \mathrm{Ker}\, f$.

Si l'endomorphisme *f* a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, alors : $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.

fiche n°40 (suite)

Vecteurs propres d'un endomorphisme

Un vecteur *v* de *E* est vecteur propre d'un endomorphisme *f* de *E* s'il est non nul et s'il existe un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$.

On dira que *v* est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Pour chaque valeur propre, il existe une infinité de vecteurs propres : tous les vecteurs de E_λ sauf 0_E.

Si *f* a *p* valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et si $v_1, \ldots, v_p$ sont des vecteurs propres associés, alors la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.

Conséquence : Un endomorphisme d'un espace de dimension *n* possède au plus *n* valeurs propres distinctes.

Vecteurs propres d'une matrice

Une matrice colonne *X* est vecteur propre d'une matrice *A* s'il est non nul et s'il existe un réel λ tel que $AX = \lambda X$.

On dira que *X* est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Diagonalisation d'un endomorphisme

Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de *E* formée par des vecteurs propres de *f*.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base sur laquelle sa matrice est diagonale.

Un endomorphisme de *E* est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de *E*.

Si *f* est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension *n* qui possède *n* valeurs propres distinctes, alors *f* est diagonalisable.

Diagonalisation des matrices carrées d'ordre *n*

Une matrice *A* est diagonalisable s'il existe une matrice *P* inversible telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Une matrice *A* est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme associé est diagonalisable.

D est la matrice diagonale dont la diagonale est formée par les valeurs propres de *A*, et *P* est une matrice dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs propres de *A* (dans le même ordre) qui forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.

fiche n°41

COUPLES DE VARIABLES ALEATOIRES

Loi conjointe d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes

Si $X(\Omega)=\{x_i \,/\, i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j \,/\, j\in J\}$, la loi conjointe est définie par : $\forall (i,j)\in I\times J \quad p_{i,j}=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]$

Propriétés : $\forall (i,j)\in I\times J \quad 0\le p_{i,j}\le 1$ et $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j}=1$.

Lois marginales d'un couple (X,Y) de variables discrètes

Ce sont les lois de X et de Y. On les déduit de la loi conjointe :

Loi de X : $\forall i\in I \quad P(X=x_i)=\displaystyle\sum_{j\in J} P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]$.

Loi de Y : $\forall j\in J \quad P(Y=y_j)=\displaystyle\sum_{i\in I} P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]$.

Lois conditionnelles de variables discrètes

La loi conditionnelle de X sachant $(Y=y_j)$ est définie par les probabilités $P_{(Y=y_j)}(X=x_i)$ pour tout $i\in I$.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=x_i)$ est définie par les probabilités $P_{(X=x_i)}(Y=y_j)$ pour tout $j\in J$.

Loi conjointe : $P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]=P_{(X=x_i)}(Y=y_j)P(X=x_i)$

Et : $P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]=P_{(Y=y_j)}(X=x_i)P(Y=y_j)$

Lois marginales : $\forall i\in I \quad P(X=x_i)=\displaystyle\sum_{j\in J} P_{(Y=y_j)}(X=x_i)P(Y=y_j)$

Et : $\forall j\in J \quad P(Y=y_j)=\displaystyle\sum_{i\in I} P_{(X=x_i)}(Y=y_j)P(X=x_i)$

Loi de Z = f (X,Y) si les variables X et Y sont discrètes

Si l'on note : $\forall z\in Z(\Omega) \quad K(z)=\{(i,j)\in I\times J \,/\, f(x_i,y_j)=z\}$ alors :

$\forall z\in Z(\Omega) \quad P(Z=z)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in K(z)} p_{i,j}$ où $p_{i,j}=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]$

Théorème de transfert : $E(Z)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i,y_j)p_{i,j}$.

Exemples : $E(X+Y)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J}(x_i+y_j)p_{i,j} \quad E(XY)=\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j p_{i,j}$

fiche n°41 (suite)

Somme de deux variables aléatoires discrètes

Il y a deux manières de déterminer sa loi :

$$P(X+Y=z)=\sum_{i\in I} P[(X=x_i)\cap(Y=z-x_i)]$$

$$P(X+Y=z)=\sum_{j\in J} P[(Y=y_j)\cap(X=z-y_j)]$$

Espérance : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Variance : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$

Covariance du couple (X,Y)

$\operatorname{cov}(X,Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])$

Propriété : $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

Inégalité de Schwarz : $|\operatorname{cov}(X,Y)|\le\sqrt{V(X)V(Y)}$.

Si $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, on dit que X et Y sont non corrélées.

Coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y)

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété : $-1\le\rho(X,Y)\le 1$

Plus $|\rho(X,Y)|$ est voisin de 1, plus la corrélation de X et Y est forte.

Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

X et Y sont indépendants si :

$\forall (i,j)\in I\times J \quad P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$

Propriétés : $E(XY)=E(X)E(Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=0$ donc $\rho(X,Y)=0$

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Indépendance de n variables aléatoires discrètes

Les variables aléatoires discrètes $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si : $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=x_i)\right]=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$

Alors toute fonction des variables $X_1,\dots,X_k$ est indépendante de toute fonction des variables $X_{k+1},\dots,X_n$.

Propriété : $V(X_1+\dots+X_n)=V(X_1)+\dots+V(X_n)$ si les variables sont indépendantes.

fiche n°42

CONVERGENCES ET APPROXIMATIONS

Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles, qui possède une espérance $E(X) = m$, alors : $\forall a \geq 0 \;\; P(X \geq a) \leq \frac{m}{a}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire qui possède une espérance $E(X) = m$ et un écart-type $\sigma(X) = \sigma$, alors : $\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Convergence en probabilité

La suite de variables aléatoires (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X si : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Loi faible des grands nombres

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ, alors la suite $\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers une variable certaine égale à m : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

<u>Conséquence</u> : Si l'on répète n fois de manière indépendante une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue ω tend vers la probabilité $P(\{\omega\})$ quand n tend vers l'infini.

Convergence en loi

La suite de variables aléatoires discrètes (X_n) de fonctions de répartition F_n converge en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F si : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

Si $\forall n \in \mathbb{N} \;\; X_n(\Omega) = X(\Omega)$, alors (X_n) converge en loi vers X si et seulement si : $\forall x \in X(\Omega) \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$.

fiche n°42 (suite)

Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

Si (X_N) est une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier N, X_N suive la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, n, p)$, alors la suite (X_N) converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ quand N tend vers l'infini.

<u>Conséquence</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(N, n, p)$ avec $n \leq 0{,}1N$, alors la loi de X peut être approchée par la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier n, X_n suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, alors la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ quand n tend vers l'infini.

<u>Conséquence</u> : Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ avec $n \geq 30$, $np < 15$ et $p \leq 0{,}1$, alors la loi de X peut être approchée par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda = np$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$

fiche n°43

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Définition

C'est une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $M=(x,y)\mapsto f(M)=f(x,y)$.

Droite affine

La droite affine passant par A et de vecteur directeur $u=(\alpha,\beta)$ non nul est : $d_{A,u}=\{M\in\mathbb{R}^2/\exists t\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{AM}=tu\}=\{M\in\mathbb{R}^2/\exists t\in\mathbb{R}\quad M=A+tu\}$.

Elle admet une représentation paramétrique $\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\ y=y_A+t\beta\end{cases}$ et une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

Réciproquement si $(a,b)\neq(0,0)$, l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ax+by+c=0\}$ est une droite affine de vecteur directeur $u=(b,-a)$.

Demi-plans

La droite d'équation $ax+by+c=0$ définit deux demi-plans :

- ouverts : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ax+by+c<0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ax+by+c>0\}$.
- fermés : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ax+by+c\le 0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ax+by+c\ge 0\}$.

Segment

Le segment $[A,B]$ est l'ensemble $\{M\in\mathbb{R}^2/\exists t\in[0,1]\quad M=(1-t)A+tB\}$.

Produit scalaire usuel

Le produit scalaire usuel est l'application qui à tous vecteurs $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ associe le réel $<u,v>=xx'+yy'$.

Propriétés : $<u,v>=<v,u>$ pour tous u et v.

$w\mapsto<w,v>$ et $w\mapsto<u,w>$ sont linéaires pour tous u et v.

$<u,u>\ge 0$ pour tout u et $<u,u>=0\Leftrightarrow u=0$.

Toute application qui vérifie ces propriétés est un produit scalaire.

Norme euclidienne

La norme euclidienne est l'application qui à tout vecteur $u=(x,y)$ associe le réel $\|u\|=\sqrt{<u,u>}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés : $\|u\|>\ge 0$ pour tout u et $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$.

$\|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$ pour tout vecteur u et tout réel λ.

$\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ pour tous u et v (Inégalité triangulaire).

fiche n°43 (suite)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$|<u,v>|\le\|u\|\times\|v\|$ pour tous u et v (égalité ssi u et v sont colinéaires).

Distance euclidienne de deux points

La distance euclidienne est l'application qui à tous points $M=(x,y)$ et $N=(x',y')$ associe le réel $d(M,N)=\|N-M\|=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$.

Propriétés : $d(M,N)\ge 0$ pour tous M et N, et $d(M,N)=0\Leftrightarrow M=N$.

$d(M,N)=d(N,M)$ pour tous M et N.

$d(M,P)\le d(M,N)+d(N,P)$ pour tous M, N et P.

Boules

Boules de centre A et de rayon $r>0$:

- boule ouverte : $B(A,r)=\{M\in\mathbb{R}^2/d(A,M)<r\}$.
- boule fermée : $B_f(A,r)=\{M\in\mathbb{R}^2/d(A,M)\le r\}$.

Partie ouverte (ou ouvert)

Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $D=\varnothing$ ou si, pour tout point $A\in D$, il existe un réel $r>0$ tel que $B(A,r)\subset D$.

Exemples : les boules ouvertes, $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$, les demi-plans ouverts.

Propriétés : Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Partie fermée (ou fermé)

Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire $\overline{D}$ est un ouvert.

Exemples : les boules fermées, $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$, les demi-plans fermés.

Propriétés : Une réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Une intersection de fermés est un fermé.

Partie bornée

Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est bornée s'il existe une boule contenant D.

D est bornée si et seulement si : $\exists K\ge 0\quad \forall M\in D\quad \|M\|\le K$.

Propriétés : Une réunion d'un nombre fini de bornés est un borné.

Une intersection de bornés est un borné.

Partie convexe

Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est convexe si : $\forall(M,N)\in D^2\quad [M,N]\subset D$.

D est convexe ssi : $\forall(M,N)\in D^2\quad \forall t\in[0,1]\quad (1-t)M+tN\in D$

Propriétés : Une intersection de convexes est convexe (Pas la réunion).

fiche n°43

Graphe d'une fonction de deux variables

C'est : $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D_f \text{ et } z = f(x,y)\}$ (surface de $\mathbb{R}^3$).

Lignes de niveau

La ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ est $\mathscr{L}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \in D_f \text{ et } f(x,y) = k\}$.

C'est l'intersection du graphe avec le plan d'équation $z = k$.

Limite en un point

Une fonction f définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^2$ admet au point $A \in D$ une limite ℓ si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall M \in B(A,\alpha) \cap D \quad |f(M) - \ell| < \varepsilon$.

Cette limite si elle existe est unique. On la note : $\ell = \lim_{M \to A} f(M)$.

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions d'une variable.

Continuité

Une fonction f définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^2$ est continue au point $A \in D$ si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall M \in B(A,\alpha) \cap D \quad |f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Opérations algébriques

Mêmes opérations algébriques que pour les fonctions d'une variable.
Conséquence : Les polynômes et les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Composition

- Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continue en A et si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en $f(A)$, alors la fonction $\varphi \circ f$ est continue en A.
  Conséquence : Si f est continue sur D, les fonctions $|f|$, $\ln f$, e^f, f^α, $\sin f$, $\cos f$, … sont continues sur D si elles sont définies.
- Si φ et ψ sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en a, et si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continue en $A = (\varphi(a), \psi(a))$, alors la fonction $t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$ est continue en a.
  Conséquence 1 : Si f est continue en un point A de D, alors pour tout u de $\mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(A + tu)$ est continue en 0 (mais réciproque fausse).
  Conséquence 2 : Pour montrer qu'une fonction f n'est pas continue en A, il suffit de trouver deux fonctions φ et ψ continues en a telles que $t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$ ne soit pas continue en a.

fiche n°43 (suite)

Propriétés des fonctions continues

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, alors :

- Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes.

Dérivées partielles d'ordre 1

Une fonction f définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ admet en $A = (x_0, y_0)$:

- une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x si la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 : $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$.
- une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y si la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 : $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$.

Une fonction peut admettre des dérivées partielles sans être continue.

Opérations

Mêmes opérations algébriques que pour les fonctions d'une variable.
Les formules de dérivation sont analogues.
Conséquence : Les polynômes et les fractions rationnelles admettent des dérivées partielles d'ordre 1 sur leur ensemble de définition.
Si f admet des dérivées partielles en A et si φ est dérivable en $f(A)$, alors $\varphi \circ f$ admet des dérivées partielles en A :

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(A) = (\varphi' \circ f)(A) \frac{\partial f}{\partial x}(A) \qquad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(A) = (\varphi' \circ f)(A) \frac{\partial f}{\partial y}(A)$$

Si φ et ψ sont dérivables en a, et si f admet des dérivées partielles en $A = (\varphi(a), \psi(a))$, la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t), \psi(t))$ est dérivable en a :

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\varphi'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\psi'(a)$$

Gradient

Si f est une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre 1 en A, on appelle gradient de f en A le vecteur : $\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$.

fiche n°43 (suite)

Dérivée directionnelle

Si f est définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ et si $A \in D$, alors, pour tout vecteur unitaire u, on appelle dérivée de f en A dans la direction de u le réel (s'il existe) : $f'_u(A) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+tu) - f(A)}{t}$.

Développement limité d'ordre 1

Une fonction f définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ admet en $A = (x_0, y_0)$ un développement limité d'ordre 1 s'il existe deux réels a et b, et une fonction ε tels que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ et :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \sqrt{h^2 + k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

Toute fonction qui admet un développement limité d'ordre 1 en A est continue en A et admet des dérivées partielles d'ordre 1 en A.

Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = a$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = b$.

Mais la réciproque est fausse : une fonction peut avoir des dérivées partielles d'ordre 1 sans avoir de développement limité d'ordre 1.

Fonction de classe C^1

Une fonction f est de classe C^1 sur un ouvert $D \neq \varnothing$ si elle admet en tout point de D des dérivées partielles qui sont continues sur D.

Propriété : Toute fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \neq \varnothing$ admet en tout point $A = (x_0, y_0)$ de D un développement limité d'ordre 1 :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$. Ceci s'écrit aussi :

$$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \|H\|\varepsilon(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H\to(0,0)} \varepsilon(H) = 0.$$

Conséquence : Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert non vide D de $\mathbb{R}^2$, elle admet en tout point A de D une dérivée dans toute direction u et $f'_u(A) = \langle \nabla f(A), u \rangle$.

Propriété : Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \neq \varnothing$, son gradient est, en tout point d'une ligne de niveau où il ne s'annule pas, normal à cette ligne de niveau (orthogonal à la tangente).

fiche n°43 (suite)

Extremum local

Une fonction f définie sur un ouvert $D \neq \varnothing$ admet en $A \in D$:

- un maximum local si : $\exists r > 0 \quad \forall M \in B(A,r) \cap D \quad f(M) \leq f(A)$.
- un minimum local si : $\exists r > 0 \quad \forall M \in B(A,r) \cap D \quad f(M) \geq f(A)$.

Le maximum ou le minimum est absolu si l'inégalité est vraie en tout point M de D.

Condition nécessaire d'extremum local

Si une fonction f de classe C^1 sur un ouvert $D \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en $A \in D$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

Les points qui vérifient ces conditions s'appellent des points critiques.

Dérivées partielles d'ordre 2

Sous réserve d'existence, il existe 4 dérivées partielles d'ordre 2 :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x si elle existe.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x si elle existe.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y si elle existe.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à y si elle existe.

Fonction de classe C^2

Une fonction f est de classe C^2 sur sur un ouvert $D \neq \varnothing$ si elle admet en tout point de D des dérivées partielles secondes qui sont continues sur D.

Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout M de D : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.

fiche n°43 (suite)

Développement limité d'ordre 2

Toute fonction de classe C^2 sur un ouvert non vide D de $\mathbb{R}^2$ admet en tout point (x_0, y_0) de D un développement limité d'ordre 2 :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$
$$+ hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$

où ε est une fonction qui vérifie $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

Notations de Monge

Sous réserve d'existence, on note :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Recherche d'un extremum local

Si la fonction f est de classe C^2 sur un ouvert $D \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^2$, alors pour chaque point critique $A = (x_0, y_0)$:

- Si $rt - s^2 > 0$, alors f admet un extremum local en A : si $r > 0$, c'est un minimum, et si $r < 0$, c'est un maximum.
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en A.

Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure : il faut étudier « à la main » le signe de $f(x,y) - f(x_0, y_0)$.