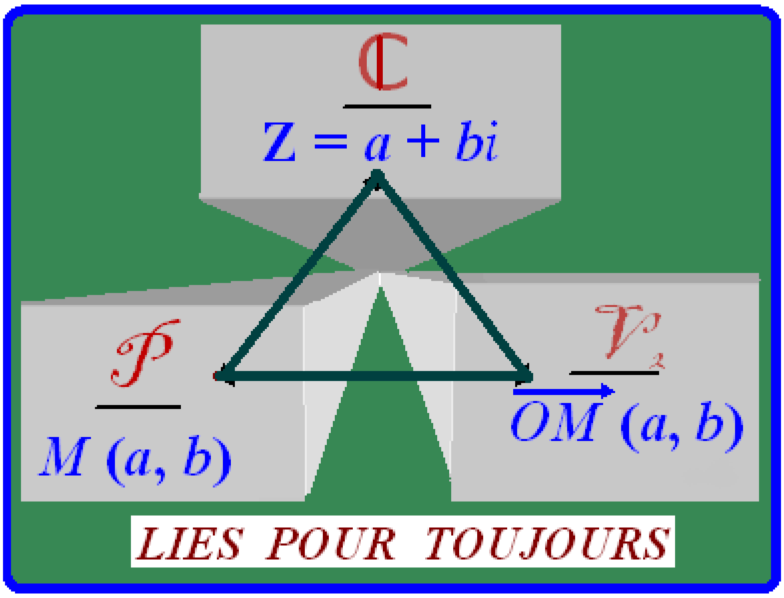
MATHS-PRATIQUES

(*Une autre vision de l'enseignement des Mathématiques*)
(Cours de Maths avec des Exercices Corrigés)

∗Conseils pour traiter un exercice de maths ;
∗Quelques éléments de logique mathématique utiles ;
∗Outils de base nécessaires pour affronter la classe de Terminale D ;
∗Historique de chaque notion et son utilité dans la vie d'aujourd'hui ;
∗Cours « pratiques » de maths ; Exercices dans chaque chapitre ;
∗Propositions de corrigés de quelques exercices ;
∗Répertoire non exhaustif de travaux.

MATHEMATIQUES



Terminale D

(Terminale S - Enseignement obligatoire)

OUBELE YAO NORBERT GNAMOU

(*Conseiller Pédagogique de l'Enseignement secondaire*)
« Leib Wo Pãngan »

ngnamou @gmail.com ; goyn11@yahoo.fr; 50 36 00 86 / 70 29 26 66 / 75 59 80 80 / 78 85 55 12

SOMMAIRE

ngnamou @gmail.com ; goyn11@yahoo.fr; 50 36 00 86 / 70 29 26 66 / 75 59 80 80 / 78 85 55 12

Préface

Trois facteurs essentiels, nous semble-t-il, sont à la base du développement de toute nation :

Les ressources humaines, la langue et les sciences.

La recherche scientifique devrait donc, dans toute nation qui aspire au développement, être la préoccupation majeure des premiers responsables.
Au Burkina nous disposons d'un ministère chargé de la recherche scientifique. Cependant, force est de constater que le pays dispose très peu de scientifiques et de nos jours peu de jeunes s'engagent dans les études scientifiques.
Le déficit des enseignants dans les disciplines scientifiques dans nos lycées augmente d'année en année à un rythme inquiétant ; surtout les enseignants de mathématiques titulaires de CAPES. ……….
Ce que l'on ne doit pas perdre de vue, c'est que les mathématiques, au-delà de son aspect disciplinaire, est aussi un outil pour le développement intellectuel de l'enfant et un outil pour les sciences.
Les mathématiques, s'avèrent donc être pour les sciences, ce qu'est le fer pour les immeubles, les tours, les ponts… Sans les mathématiques, la recherche scientifique « agonise » ; sinon est inefficace.
Nous avons voulu par ce manuel et par le site mis en ligne :
(**http://apodeyao.e-monsite.com**), espérer présenter les mathématiques comme une discipline pratique et non théorique, facile à comprendre par tous.
Ce manuel est structuré en cinq parties :

- La première partie résume en quelques lignes, notre conception de l'apprentissage et la résolution d'un exercice ou d'un problème de mathématiques.
- La deuxième partie ébauche aussi en quelques lignes, des éléments de logique mathématique utiles pour mieux comprendre un cours de mathématiques.
- La troisième partie recense des outils de bases nécessaires pour une meilleure compréhension des cours de mathématiques de Terminale D.
- La quatrième partie concerne :
  - Des rappels d'outils sous forme de cours **« Ce qu'il faut retenir »** qui sont actuellement enseignés dans nos classes de Terminale D.
  - Dans chaque chapitre, des exercices de difficultés variées vous sont proposés. Pour certains exercices, des outils possibles pour traiter chaque question dans l'exercice et des propositions de réponses sont également proposés. Il reste entendu que pour un travail donné, qu'il soit physique ou intellectuel, on peut avoir plusieurs outils ; des outils principaux pour le travail et au cours de l'exécution, d'autres outils (en passant) sont souvent nécessaires. Le choix donc des outils a essentiellement porté sur les outils principaux présents dans le chapitre et a tenu compte du programme d'enseignement et du niveau moyen des élèves des classes de Terminale D.
  - En début de chaque chapitre, un rappel historique sur la notion, son utilité pratique dans la vie courante, (tirés du net) vous sont proposés. Car, il nous semble que la connaissance historique des notions enseignées et leur utilité pratique dans la vie courante sont des aspects qui pourraient susciter l'intérêt chez les élèves pour la notion, voir la discipline.
  - Enfin la cinquième partie est un répertoire non exhaustif de quelques travaux possibles, des outils et des méthodes pour les exécuter en classe de Terminale D.

Tout en restant à votre écoute, je vous souhaite du courage et bonne chance dans vos études !

L'auteur

PROPOSITIONS DE CONSEILS POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE MATHEMATIQUES

Tout **apprentissage,** qu'il soit formel ou informel est basé sur les trois principes pédagogiques qui sont :

1) **Accepter** (l'apprenant est tenu d'accepter les définitions, les théorèmes, les notions etc.… qui lui sont enseignés. Il est difficile, voire souvent impossible pour lui de les remettre en cause.)
2) **Retenir** (Une fois la notion acceptée, il revient à l'apprenant de la retenir, de la mémoriser.) (Dans rare de situations, l'apprenant utilise les documents pour un examen de qualification ou de certification) ; il faut alors retenir le savoir enseigné si l'on veut être déclaré qualifié ou si l'on veut obtenir un diplôme à l'issue de la formation.
3) **Appliquer** (Appliquer dans des activités variées ce qui a été accepté et retenu; l'application peut se faire pendant l'apprentissage ou longtemps après l'apprentissage. L'application pendant l'apprentissage se fait souvent à travers les exercices d'application, les partiels, les devoirs, mais aussi les examens qui sont tous organisés après que vous ayez reçu les cours c'est-à-dire les « outils ».)

Résoudre un problème ou traiter un exercice de mathématiques, (ou de toute autre discipline), se présente comme un **travail** : **« le travail intellectuel »**. Comme pour tout travail il faut avoir des outils, il faudrait alors donc dans ce cas de travail (travail intellectuel), avoir également des outils que nous appelons des **outils intellectuels**. Il faudra alors, dans un **travail intellectuel** donné, bien choisir les **« outils »** nécessaires et/ou convenables pour faire le travail.

Les **outils intellectuels** pour le travail intellectuel sont **« le savoir »** qui est enseigné dans nos classes.

En mathématiques particulièrement, les outils intellectuels ne sont autres choses que les définitions, les propositions, les théorèmes, les règles, les corolaires, les lemmes, les axiomes, etc.….

La résolution d'un problème passe par les trois étapes suivantes :

1) **Comprendre le travail demandé.**
   Cette étape est très importante, car si vous n'avez pas bien compris le travail que l'on vous demande, vous allez prendre des outils qui ne sont pas appropriés et le travail serait laborieux sinon impossible.
2) **Rechercher les outils convenables.**
   Une fois le travail compris, on recherche les « outils » c'est-à-dire le contenu du cours nécessaire pour le travail.
3) **Faire le travail.**
   Il faut d'abord se poser la question comment faire le travail avec l'outil ciblé? A ce niveau, il faut se rappeler des exemples que l'enseignant à donner en classe, comment il a traité la question? comment il a utilisé l'outil? se rappeler également de ses expériences personnelles.

I) Pour comprendre le travail demandé.

- Ayez une disposition intérieure positive, en vous concentrant au plus, en refusant les tremblements, les agitations intérieures et la peur. Acceptez que le travail est de votre niveau et que vous avez les compétences pour le faire.
- Lisez l'énoncé en intégralité une première fois, en vous méfiant des toutes premières impressions ; elles peuvent être trompeuses. Repérez à partir de cette lecture les parties du cours mises en évidence dans l'énoncé.
- Relisez l'énoncé une deuxième fois (voire une troisième fois, …) en faisant attention à

tous les détails possibles surtout mettre à la lumière le travail demandé; essayez de reformuler s'il y a lieu l'énoncé pour mieux le comprendre.

II) **Pour rechercher les outils convenables.**

- Dégagez en vous-même ou au brouillon les outils ciblés : ce sont généralement des définitions, des théorèmes, des propriétés, des propositions, des règles ... Par l'énoncé du problème, on peut facilement retrouver les outils nécessaires pour le travail.
- Si la question est de "montrer que...", si il ne s'agit pas d'un calcul algébrique, ce qu'il faut montrer est généralement la conclusion d'un théorème ; ce théorème est l'outil approprié pour le travail; il s'agira alors de montrer que l'hypothèse ou les hypothèses de ce théorème est ou sont réalisée(s).
- Si la question est de "enduire que..", l'outil ou les outils est ou sont souvent dans le travail qui précède cette question, c'est à dire tout juste au dessus de la question "en déduire"...

III) **Pour faire (ou exécuter) le travail.**

1) Commencez la résolution par la première question (si possible) en respectant les consignes suivantes :

a) Mettez sur les copies les données de l'énoncé.

b) Mettez le numéro de la question ; nommez ou conjuguez la question posée ; séparez les questions en sautant des lignes.

c) Exploitez le fait que dans un problème de mathématiques, les questions sont souvent liées les unes aux autres. Souvent les solutions à une question posée sont données vers le bas sous forme de désignation ou de considération.

d) La réponse trouvée à une question devient souvent "une porte de sortie ", un " outil" une hypothèse, pour les questions suivantes.

e) En général des questions du genre : **Montrer que** … ; **Démontrer que** … ; **En déduire que** …, lorsqu'il ne s'agit pas de calculs algébriques, font souvent appels à des "outils" du cours (théorèmes, propriétés, définitions,…) ; la relation ou la proposition à montrer ou à démontrer est souvent la conclusion d'un théorème, ou d'une propriété : Lorsque vous voulez alors appliquer un théorème comme outil, vérifiez que vous êtes dans le contexte et que les hypothèses sont réunies : (elles sont souvent des données dans l'énoncé, ou des réponses à des questions précédentes).

f) Tirez profit de la formulation et de l'enchaînement des questions.
En particulier, une question commençant par : En déduire que …, s'appuie généralement sur le(s) résultat(s) de la (des) question(s) précédente(s).

g) Exploitez les indications ou les méthodes imposées.

h) Respectez les notations imposées et les unités données.

i) L'un des critères d'évaluation de votre copie est la qualité et la rigueur de la rédaction ; n'oubliez donc pas d'expliquer clairement votre raisonnement.

j) Vérifiez si vos résultats sont cohérents, sont logiques :

2) Les calculs, les résolutions algébriques pourraient être faits au brouillon et rédigés immédiatement sur la copie question après question. Vérifiez les résultats avant de passer à la question suivante.

3) Essayez de vous réserver un quart d'heure pour relire votre copie et faire les dernières mises au point si le temps vous le permet.

« Vous pouvez avoir plus d'informations sur cette approche (Approche par les Outils) sur le site :
http://apodeyao.e-monsite.com
Ou nous contacter à l'adresse e-mail : goyn11@yahoo.fr. Ou ngnamou@gmail.com.

NOTION DE LOGIQUE MATHEMATIQUE

Dans toute discipline d'enseignement, il y a une certaine logique qu'il faut appréhender pour mieux comprendre la discipline. Les mathématiques en tant que discipline d'enseignement, de discipline d'outils et même de discipline d'éveil, n'échappent pas à cette règle. Mieux la logique mathématique rigoureuse et beaucoup plus vaste que l'on ne pense, semble beaucoup plus « nécessaire » pour une meilleure compréhension de la discipline. C'est pourquoi, nous donnons quelques éléments de logique mathématique non pas comme un cours, mais comme permettant de mieux comprendre les règles, les théorèmes, … en mathématiques.

1) Proposition mathématique ou assertion mathématique

Une proposition mathématique (ou assertion) P est une phrase (mathématique) que l'on peut qualifier sans ambiguïté, sans hésiter, qu'elle est « VRAIE » ou « FAUSSE » mais jamais les deux à la fois (principe du tiers exclu). En mathématiques, pour une proposition donnée, il n'y a que les deux : soit c'est une proposition « Vraie », soit c'est une proposition « Fausse ».

Par exemple :
« 2 est un nombre pair » est une proposition vraie ;
« 15 est un nombre premier » est une proposition fausse.
« Le nombre 5 est un nombre de chance » n'est pas une proposition.

Si P est une proposition mathématique, sa négation est aussi une proposition mathématique et est notée « non P » ou $\overline{P}$.

2) Connecteurs logiques : « et » ; « ou »

Les connecteurs logiques « **et** », « **ou** » relient deux propositions P, Q, pour donner une nouvelle proposition dite aussi proposition ou assertion composée.

a) Conjonction : et.

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, la proposition « P et Q » notée « $P \wedge Q$ » est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ; et fausse dans les autres cas : c'est à dire si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses ou si l'une des deux est fausse. Sa négation est « non P ou non Q »

Exemple :

- « **25 est un multiple de 5** » **et** « **25 est un nombre pair** » : proposition fausse.
- « **Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires** » **et** « **ses quatre côtés sont de même longueur** » : Proposition vraie.

b) Disjonction : ou.

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, la proposition « P ou Q » notée « $P \vee Q$ » est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie, (les deux propositions peuvent être vraies) ; et fausse si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses. Sa négation est « non P et non Q ».

Exemples :

- « **25 est un multiple de 5** » **ou** « **25 est un nombre pair** » : proposition vraie.
- « **Les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires** » **ou** « **ses quatre côtés sont de même longueur** » : Proposition fausse

3) L'implication logique : « Si …, alors … » ou « implique » : symbole « $\Rightarrow$ »

L'implication logique de symbole « $\Rightarrow$ » relie deux propositions H et C donnant la proposition « Si H, alors C » ou « $H \Rightarrow C$ », et dont C est une conséquence de H. Elle sera fausse seulement dans le cas où H est vraie et C fausse. Elle pourrait se traduire par :

- Pour que C soit vraie, il suffit que H soit vraie.
- H est souvent appelée hypothèse et C conclusion.

  Exemple :

  - **Si** « **deux droites sont parallèles** », **alors** « **toute droite sécante à l'une est**

sécante à l'autre » ; Proposition vraie.

- **Si** « **une fonction numérique est continue sur un intervalle** », **alors** « **elle est dérivable sur cet intervalle** » ; Proposition fausse. (fonction racine carrée !!)

4) L'équivalence logique : « … si et seulement si … », ou « … équivaut à … » : « $\Leftrightarrow$ »

L'équivalence logique ou bi-implication de symbole « $\Leftrightarrow$ » relie deux propositions P et Q donnant la proposition « P, si et seulement si Q » ou « $P \Leftrightarrow Q$ », et dont Q est une conséquence de P et aussi P est une conséquence de Q. Elle sera vraie si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est synonyme de « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$» ; on dit aussi indifféremment que :

- P est une condition nécessaire et suffisante de Q
- P (est vraie) si et seulement si Q (est vraie)
- Pour que P (soit vraie) il faut et il suffit que Q (soit vraie).

Exemple :

- « $\boldsymbol{a \times b = 0}$ » **équivaut à** « $\boldsymbol{a = 0}$ **ou** $\boldsymbol{b = 0}$ » ; proposition vraie.
- « **Une fonction numérique *f* est dérivable en *a*** » **si et seulement si** « $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **admet une limite finie en *a*.**» ; proposition vraie.

5) Quantificateurs

a) Quantificateur existentiel :

« **Il existe au moins un** » : symbole « $\exists$ », « **Il existe un et un seul** » : symbole « $\exists\,!$ »

Le quantificateur existentiel « **Il existe au moins un** » de symbole $\exists$ précède un objet (souvent noté x ou y ou z, ..) dans une phrase mathématique, pour exprimer qu'il existe au moins un élément de l'ensemble auquel il appartient, qui vérifie la propriété qui le suit dans la phrase.
On note : « $\exists\, x \in A$ **/ P (*x*)** » ; que l'on lit, « Il existe au moins un x élément de A tel que P(x) (soit vraie) » la propriété P (x) est appelée forme propositionnelle.

Exemple : « $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 = 0$ »

Si l'objet est unique dans l'ensemble on dit alors « Il existe un et un seul » ; on note alors,

« $\exists\,!\ x \in A$ **/ P (*x*)** »

Exemple : « $\exists\,!\, x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 0$ »

b) Quantificateur universel. : « **Quelque soit** » **ou** « **pour tout** » **: symbole** « $\forall$ ».

Le quantificateur universel « **quelque soit** » **ou** « **pour tout** » de symbole $\forall$ précède un objet (souvent noté x ou y ou z, ..) dans une phrase mathématique, pour exprimer que tout élément de l'ensemble auquel il appartient, vérifie la propriété qui le suit dans la phrase. On note :
« $\forall\ x \in A$, P (x). » que l'on lit « quelque soit (ou pour tout) x élément de A, P(x) (est vraie) »

Exemple : « $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$. »

Remarques importantes :

1) En mathématiques, tous les axiomes, toutes les définitions, tous les théorèmes, toutes les propriétés, etc…, sont des propositions vraies.
2) La plupart des théorèmes mathématiques sont formulés de la forme : « Soit… ; Si H, alors C » ou « Soit… ; H implique C ». Ce qui fait que dans un travail, lorsque l'on veut utiliser un théorème comme outil, il suffit de vérifier que l'on est dans le contexte (ce qui vient après Soit) et montrer que l'hypothèse H est vraie ; la conclusion C est alors vraie d'après ce théorème.

OUTILS DE BASE NECESSAIRES

I) INEGALITES DANS ℝ ; PARTIES DE ℝ.

1) Inégalités dans ℝ

***a* et *b* sont des réels quelconques.**

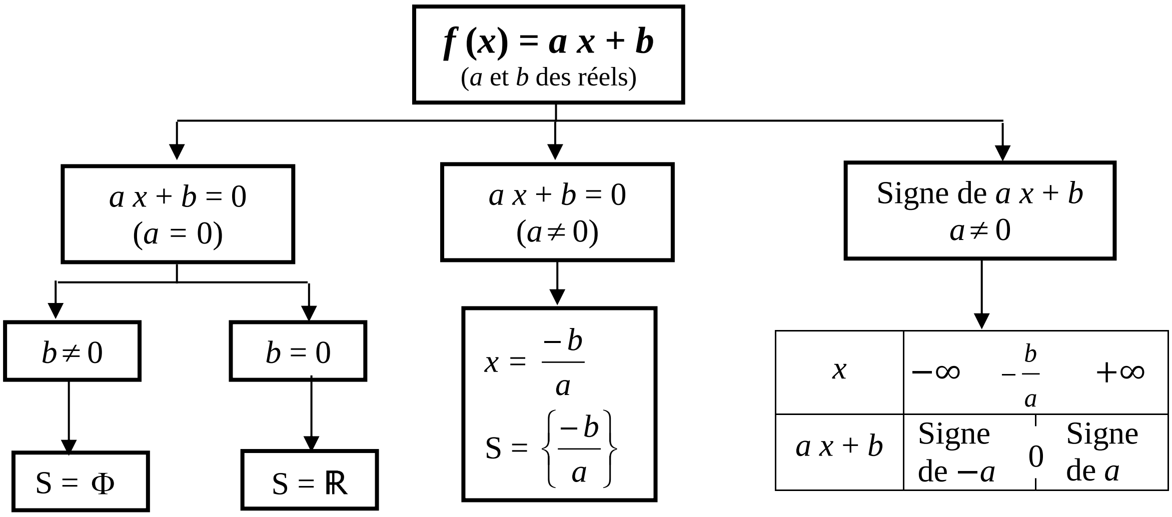
- $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$ pour tout réel *c*.
- $a \leq b$ équivaut à $a \times c \leq b \times c$ pour tout réel *c* strictement positif.
- $a \leq b$ équivaut à $a \times c \geq b \times c$ pour tout réel *c* strictement négatif.
- Si $0 < a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ ou $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ou $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ ou $a^3 \leq b^3$.
- Si $a \leq b < 0$ alors $a^2 \geq b^2$ ou $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ou $a^3 \leq b^3$.

2) Parties de ℝ

***a* et *b* sont des réels donnés.**

- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[\, = \mathbb{R}^*_+$
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq a\} = \mathbb{R} \setminus \{a\} = \,]-\infty, a[\, \cup \,]a, +\infty[$.
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq a \text{ et } x \neq b\} = \mathbb{R} \setminus \{a, b\} = \,]-\infty, a[\, \cup \,]a, b[\, \cup \,]b, +\infty[$ avec $a < b$.
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\} = \,]-\infty, a[$; $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\} = \,]-\infty, a]$.
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\} = \,]a, +\infty[$; $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\} = [a, +\infty[$.
- $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\} = [a, b]$; $\{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\} = \,]a, b]$.

II) EQUATIONS , INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS ℝ



III) EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS ℝ.

$f(x) = ax^2 + bx + c$
(a, b et c étant des réels avec $a \neq 0$)

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Forme canonique

Discriminent → **$\Delta = b^2 - 4ac$**

$\Delta < 0$

$f(x) = 0$ n'a pas de solution dans ℝ

$f(x)$ n'est pas factorisable dans ℝ

$f(x)$ est du signe de a

$\Delta = 0$

$f(x) = 0$ admet une solution double.
$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$f(x) = a(x - x_0)^2$

$f(x)$ est du signe de a

$\Delta > 0$

$f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

IV) EQUATIONS ET INEQUATIONS AVEC RADICAUX DANS ℝ

***A* et *X* étant des réels : $\sqrt{X} = A$ équivaut à $\begin{cases} A \geq 0 \\ X = A^2 \end{cases}$; si $A < 0$, S = Φ**

<u>*f* et *g* sont des fonctions numériques ; *a* et *b* sont des réels.</u>

1) $\sqrt{f(x)} = ax + b$ équivaut à $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ f(x) = (ax + b)^2 \end{cases}$

2) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ équivaut à $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

3) $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$ équivaut à $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ ax + b \geq 0 \\ f(x) \leq (ax + b)^2 \end{cases}$

4) $ax + b \leq \sqrt{f(x)}$ équivaut à $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ (ax + b)^2 \leq f(x) \end{cases}$ ou $\begin{cases} ax + b \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

5) $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ équivaut à $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

V) TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN.

Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Nature de la transformation f	**Translation de vecteur $\vec{u}$: $t_{\vec{u}}$**	**Rotation de centre O et d'angle α : $r_{O,\alpha}$**	**Symétrie centrale de centre I : s_I**	**Symétrie orthogonale d'axe Δ : s_Δ**	**Homothétie de centre I et de rapport k : $h_{I,k}$**
Eléments caractéristiques	le vecteur $\vec{u}$	le centre O et l'angle α	le centre I	l'axe, la droite Δ	le centre I et le rapport k
Définition affine $f(M) = M'$ signifie	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	⁎ si $M = O$, $M' = O$. ⁎ si $M \neq O$, $\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$	⁎ si $M = I$, $M' = I$. ⁎ si $M \neq I$, I est milieu de $[MM']$	⁎ si $M \in \Delta$ $M = M'$ ⁎ si $M \notin \Delta$ Δ est médiatrice de $[M\,M']$	⁎ si $M = I$, $M' = I$. ⁎ si $M \neq I$, $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$
Points invariants : ($f(M) = M$)	si $\vec{u} \neq \vec{o}$, aucun point n'est invariant	le centre O est invariant.	le centre I est invariant.	tout point de Δ est invariant.	si $k \neq 1$, le centre I est invariant.
Si $f(M) = M'$ et si $f(N) = N'$ alors	$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ $M'N' = MN$	$\begin{cases} M'N' = MN \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha \end{cases}$	$\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ $M'N' = MN$	$M'N' = MN$	$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ $M'N' = \lvert k \rvert MN$
Définition analytique : $M(x, y)$ a pour image $M'(x', y')$ signifie que :	si $\vec{u}\,(a, b)$ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$	si $I\,(a, b)$ $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$	si Δ : $y = x$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	si $I\,(a, b)$ $\begin{cases} x' = (1-k)a + kx \\ y' = (1-k)b + ky \end{cases}$

VI) PERIODICITE ET PARITE DE FONCTION : CONSEQUENCES GRAPHIQUES ET CONSEQUENCES ANALYTIQUES

f est p−périodique signifie que :
$\forall\, x \in D_f$; $x + p \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$

f est paire ; signifie que :
$\forall\, x \in D_f$; $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

f est impaire ; signifie que :
$\forall\, x \in D_f$; $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

CONSEQUENCES GEOMETRIQUES OU GRAPHIQUES

La courbe (C_f) de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné, est invariante par translation de vecteur k p $\vec{i}$. (k $\in \mathbb{Z}$)

La courbe (C_f) de f dans un repère ortho. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est symétrique par rapport à l'axe (Oy)

La courbe (C_f) de f dans un repère ortho. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est symétrique par rapport au point O

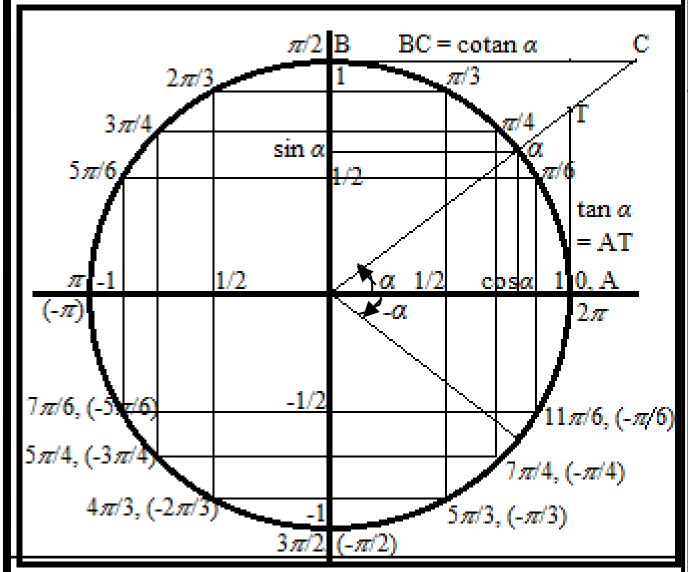
CONSEQUENCES ANALYTIQUES

f peut être étudiée sur un intervalle de longueur p ; par exemple sur
$E_f = D_f \cap [-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$

f peut être étudiée par exemple sur
$E_f = D_f \cap [0, +\infty[$

f peut être étudiée par exemple sur
$E_f = D_f \cap [0, +\infty[$

TRIGONOMETRIE



Pour tout réel α ,

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$; $-1 \le \sin\alpha \le 1$

α (rds)	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
α°	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**
sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1
tan α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0
cotan α		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	

A) Formules d'addition

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\tan(\alpha \pm \beta) = (\tan\alpha \pm \tan\beta) \div (1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta)$

B) Formules de duplication

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = (1 - \tan^2\alpha) \div (1 + \tan^2\alpha)$;

$\sin 2\alpha = (2\tan\alpha) \div (1 + \tan^2\alpha)$

$\tan 2\alpha = (2\tan\alpha) \div (1 - \tan^2\alpha)$

En posant $\tan(x/2) = t$; $(x \neq (2k+1)\pi)$

$\cos x = (1 - t^2) \div (1 + t^2)$; $\sin x = (2t) \div (1 + t^2)$;

$\tan x = (2t) \div (1 - t^2)$

C) Formules relatives aux angles associés

C1) *Angles opposés*

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

C2) *Angles supplémentaires*

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

C3) *Angles complémentaires*

$\cos((\pi/2) - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin((\pi/2) - \alpha) = \cos\alpha$;

$\tan((\pi/2) - \alpha) = 1/\tan\alpha$

C4) *Angles de différence* π

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

C5) *Angles de différence* $\pi/2$

$\cos((\pi/2) + \alpha) = -\sin\alpha$; $\sin((\pi/2) + \alpha) = \cos\alpha$;

$\tan((\pi/2) + \alpha) = -1/\tan\alpha = -\text{cotan}\,\alpha$

D) Formules de transformation

D1) *de produit en somme : linéarisation*

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = (½)[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = (½)[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = (½)[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

D2) *de somme en produit : factorisation*

$\cos p + \cos q = 2\cos[(p+q)/2] \cdot \cos[(p-q)/2]$

$\cos p - \cos q = -2\sin[(p+q)/2] \cdot \sin[(p-q)/2]$

$\sin p + \sin q = 2\sin[(p+q)/2] \cdot \cos[(p-q)/2]$

$\sin p - \sin q = 2\sin[(p-q)/2] \cdot \cos[(p+q)/2]$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos(\beta - \alpha)] \text{ où } \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,[\sin(\beta + \alpha)] \text{ où } \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

E) Equations trigonométriques

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ **(avec k un entier relatif)**

F) Fonctions circulaires

$f(x)$ =	parité	Pério.	$f'(x)$	variati.sur	courbe invariante par			asympt	au voisin.de 0
cos x	paire	2π	$-\sin x$	décroiss. $[0, \pi/2]$	* S_I $I(k\pi + \pi/2, 0)$	* $S_{D'}$ (D'): $x = k\pi$	* $t_{2k\pi i}$	-	$\cos x \approx 1 - x^2/2$
sin x	impaire	2π	$\cos x$	croiss. sur $[0, \pi/2]$	* S_D (D): $x = (\pi/2) + k\pi$	* $S_{I'}$ $I'(k\pi, 0)$	* $t_{2k\pi i}$	-	$\sin x \approx x$
tan x $x \neq \pi/2 + k\pi$	impaire	π	$1/\cos^2 x$	croiss. sur $[0, \pi/2[$	* $S_{I'}$ $I'(k\pi, 0)$	-	* $t_{k\pi i}$	(D) :	$\tan x \approx x$
cotan x $x \neq k\pi$	impaire	π	$-1/\sin^2 x$	décroiss. $]0, \pi/2]$	* S_I $I(k\pi + \pi/2, 0)$	-	* $t_{k\pi i}$	(D') : $x = k\pi$	$\text{cotan}\, x \approx 1/x$

$f(x)$	cos $(ax+b)$	sin $(ax+b)$	tan $(ax+b)$	cotan $(ax+b)$	D) Inéquations dans $]-\pi, \pi]$
période	$\frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$	$\frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$	$\frac{\pi}{\lvert a \rvert}$	$\frac{\pi}{\lvert a \rvert}$	$\cos x \le \cos\alpha \Leftrightarrow x \in]-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$ $\cos x \ge \cos\alpha \Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$
$f'(x)$	$-a\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$a/\cos^2(ax+b)$	$-a/\sin^2(ax+b)$	$\sin x \le \sin\alpha \Leftrightarrow x \in]-\pi, \alpha] \cup [\pi - \alpha, \pi]$ $\sin x \ge \sin\alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, \pi - \alpha]$

ngnamou @gmail.com ; goyn11@yahoo.fr; 50 36 00 86 / 70 29 26 66 / 75 59 80 80 / 78 85 55 12

CHAPITRE 1

CALCUL DE PROBABILITES

- Vers la fin du Moyen Age, l'usage des chiffres arabes s'est généralisé, l'arithmétique s'est développée. Cela a peut être facilité l'approche du calcul des chances par des nombres. Le calcul des probabilités était né mais s'appelait la géométrie du hasard.
- Par la suite, les premiers écrits contenant le concept de la probabilité numérique ont été rédigés. Galilée (1564−1642) publie un énoncé qui traite le problème du Grand Duc du Toscane. « Si on jette 3 dés combien existe-t-il de résultats différents possibles? » Outre ce problème, deux autres problèmes anciens très intéressants proposés par le Chevallier de Méré, un joueur et viveur, à Blaise Pascal (un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français 1623−1662) et à Pierre de Fermat (un juriste et mathématicien français, en 1665) les ont amené à créer des règles pour leur résolution.
- Le premier problème était : « Trouver le nombre n de jets de dés pour que les chances d'un double six soient supérieures à 0,5 ».
- Le deuxième problème était : « Trouver le partage du prix d'un jeu s'il est interrompu avant qu'un participant ait obtenu un certain nombre de points pour gagner ».
- Influencé par le Chevallier de Méré, Blaise Pascal a commencé une correspondance avec Pierre de Fermat sur quelques questions générales des probabilités et sur ce deuxième problème particulier Pascal l'a résolu en utilisant le triangle arithmétique des coefficients du développement de $(a + b)^n$. Ce triangle portant son nom (triangle de Pascal). Fermat l'a considéré comme un problème de disposition avec répétition. Ils ont trouvé tous les deux la même solution.
- C'est donc en se posant des questions sur les jeux de hasard que les calculs de probabilités sont apparues.

Aujourd'hui, elles sont bien plus que cela : elles sont entre autre, présentes :

- ✓ sur le marché boursier, grâce en particulier à la formule de Black et Sholes (1973) pour laquelle ses auteurs reçurent le prix Nobel d'économie en 1997.
- ✓ dans le domaine médical, où la notion de probabilité conditionnelle permet par exemple de déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il présente certaines symptômes, ou encore permet de mettre en place la notion de fiabilité d'un test : « sachant que le test à une maladie est positif, quelle est la probabilité d'être réellement malade ? »
- ✓ en physique, et plus précisément dans le domaine de la mécanique quantique, où contrairement à la mécanique classique (appelée mécanique newtonienne), on ne peut déterminer avec certitude la position d'une particule et sa vitesse à un instant donné, intervient alors la notion de probabilité de présence…

- Le chapitre « Probabilités » fait suite au chapitre « Dénombrements » vu en classe de Première. Il convient de maitriser les outils de dénombrements vus en classe de première pour mieux faire un travail de probabilités.
- Ce chapitre n'est pas compliqué, pour peu qu'on sache l'aborder et faire apparaitre les indices pour déterminer le type de dénombrement, puis des indices pour déterminer le type de probabilités dans une épreuve donnée. Il est alors important de bien insister sur ces indices afin de permettre aux élèves de mieux réussir le travail demandé.

CE QU'IL FAUT RETENIR :

A) **Dénombrement** (Rappels)

I) Vocabulaire des ensembles

Soit E un ensemble fini ; A et B sont 2 parties ou 2 sous-ensembles de E.

1) Inclusion ; intersection ; union ; complémentaire ; produit cartésien

- $A \subset B$ signifie que tout élément de A est élément de B ; autrement dit : quelque soit $x \in E$, si $x \in A$, alors $x \in B$.
- $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A$ et $x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A$ ou $x \in B\}$
- $\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$.
- $A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A$ et $y \in B\}$; x et y sont des éléments de E.

2) Cardinal de E

- Card (E) est le nombre d'éléments de E ; (E contenant un nombre fini d'éléments).
- Card (A) $\leq$ Card (E).
- Card ($A \cup B$) = Card (A) + Card (B) – Card ($A \cap B$).
- Si A et B sont disjoints c'est à dire $A \cap B = \Phi$; alors Card ($A \cup B$) = Card (A) + Card (B).
- Card ($\overline{A}$) = Card (E) – Card (A).
- Card ($A \times B$) = Card (A) $\times$ Card (B).

3) Partition de l'ensemble *E*

$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots,\ E_k$ ($1 \leq k \leq$ Card (E)) des parties de E forment une partition de E signifie que :

$$\begin{cases} *\ \forall i,\ 1 \leq i \leq k, \quad E_i \neq \Phi \\ *\ \forall i,\ 1 \leq i \leq k \quad \text{et} \quad \forall j,\ 1 \leq j \leq k\ ; \quad \text{si} \quad i \neq j,\ \text{alors} \quad E_i \cap E_j = \Phi \\ *\ E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_k = \bigcup_{i=1}^{k} E_i = E. \end{cases}$$

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \text{Card}(E_3) + \cdots + \text{Card}(E_k)$$

II) Dénombrement

1) Suites ordonnées d'éléments

a) *p*-liste ou *p*-uplet

Si Card (E) = n et si p est un naturel non nul, le nombre de p-listes ou de p-uplets (suites ordonnées de p éléments distincts ou non) de E est n^p : c'est le Card (E^p).

b) Arrangement

Si Card (E) = n et si p est un naturel tel que $p \leq n$; le nombre d'arrangements de p éléments (suites ordonnées de p éléments distincts) choisis parmi n est A_n^p.

$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-p+1)$.

(A_n^p est le produit de p nombres consécutifs dont le plus grand est n)

c) Permutation

Le nombre de permutations de n éléments distincts (suites ordonnées constituées de n éléments distincts) est $n!$.

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$; $1! = 1$; $0! = 1$; $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

2) Sous-ensembles (ou parties)

a) Combinaison

Si Card (E) = n et $0 \le p \le n$, le nombre de combinaisons ou de parties de E comportant p éléments est : C_n^p ou $\binom{n}{p}$; $\quad C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

b) Propriétés des C_n^p

$C_n^0 = 1$; $\quad C_n^n = 1$; $\quad C_n^1 = n$.

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$; $\quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p \times b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} \times b^p$.

c) Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
…………………

3) Pour se retrouver ; des indices : Tirage de *p* éléments parmi *n* éléments

Manière de tirer les *p* éléments.	Répétition d'éléments	Ordre	Nature	Nombres de tirages possibles
Tirages successifs avec remise	Un élément peut être tiré plus d'une fois	L'ordre intervient dans les tirages des *p* éléments	*p*-liste ou *p*-uplet	n^p
Tirages successifs sans remise.	Aucun élément ne peut être tiré plus d'une fois		Arrangement (si $p < n$)	A_n^p
			Permutation (si $p = n$)	$n!$
Tirages simultanés des *p* éléments		L'ordre n'intervient pas	Combinaison	C_n^p

4) Exemples de dénombrements

a) Lancer de pièce de monnaie

- ✓ On lance 1 ; 2 ; 3 ;… ; n fois successivement la même pièce et on lit la face supérieure. Le nombre de résultats possibles est : 2 (pile P ou face F) ; 2^2 ; 2^3 ; … ; 2^n .
- ✓ Le nombre de résultats comportant k fois "P" à l'issue des n lancers successifs est C_n^k .

b) Lancer de dé cubique

- ✓ On lance 1 ; 2 ; 3;…; n fois successivement le même dé et on lit le numéro sur la face supérieure. Le nombre de résultats possibles est 6 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) ; 6^2 ; 6^3 ; … ; 6^n
- ✓ On lance une fois 1 ; 2 ; 3 ;…; n dés en lisant chaque fois le numéro sur la face supérieure. Le nombre de résultats possibles est 6 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) ; 6^2 ; 6^3 ; …; 6^n

B) Probabilités

I) Probabilité définie sur un univers fini

1) Vocabulaire des probabilités

Vocabulaire des probabilités	Vocabulaire des ensembles
Univers : $\Omega = \{e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots, e_n\}$	Ensemble : $\Omega = \{e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots, e_n\}$
Eventualité : e_i de Ω	Elément e_i de Ω $(e_i \in \Omega)$
Evènement : A de Ω	Partie A de Ω $(A \subset \Omega)$
Evènement élémentaire $\{e_i\}$	Singleton $\{e_i\}$
Evènement impossible : Φ	Partie vide : Φ
Evènement certain : Ω	Partie plaine : Ω
Evènement A ou B	Union de A et B : $A \cup B$
Evènement A et B	Intersection de A et B ; $A \cap B$
Evènements incompatibles ou disjoints	Parties disjointes $A \cap B = \Phi$
Evènement contraire de A : $\overline{A}$	Complémentaire de A dans Ω : $\overline{A}$

2) Définition de probabilité ; propriétés

a) Définition : (*Outils pour déterminer la probabilité d'un évènement A dans une situation de probabilité non partculière*)

Soit Ω un univers fini : Card (Ω) = n .
La probabilité p définie sur Ω est une application de $P(\Omega)$ vers le segment [0, 1] vérifiant :

- Si $\Omega = \{e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots, e_n\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1 = p\ (\Omega)$.
- Si $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{e_i\}$ (avec $k \le n$), alors $p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(e_i)$.

En particulier, $p(\Phi) = 0$; car : $p(\Omega) = p(\Omega \cup \Phi) = p(\Omega) + p(\Phi) = 1$ donc $p(\Phi) = 0$
p est aussi appelée loi de probabilité.

D'une manière générale donc, la probabilité p (A) d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple : On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et on lit le numéro de la face supérieure. La probabilité d'apparition d'un numéro pair est le double de la probabilité d'apparition d'un numéro impair. Les numéros de même parité ont la même probabilité d'apparition .
1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro à l'issue du lancer.
2) Calculer la probabilité de l'évènement A : "obtenir un diviseur de 6"

Solution : Soit Ω l'univers associé à l'épreuve : Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

1) Calculons la probabilité d'apparition de chaque face à l'issue du lancer.
Désignons par p_i la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i.
D'après l'énoncé on a : $p_2 = p_4 = p_6 = 2p_1 = 2p_3 = 2p_5$; on sait que
$p(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$; donc $p_1 + 2p_1 + p_1 + 2p_1 + p_1 + 2p_1 = 1$
$p_1 = \frac{1}{9}$; donc $p_1 = p_3 = p_5 = \frac{1}{9}$ et $p_2 = p_4 = p_6 = \frac{2}{9}$

2) Calculons la probabilité de l'évènement A.
A = {1, 2, 3, 6} , alors $p(\text{A}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) <u>Propriétés</u> : (*Outils pour déterminer la probabilité des évènements $A \cup B$; A ; $\overline{A}$*)

* Si A et B sont deux évènements quelconques, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
* Si A et B sont deux évènements disjoints, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
* Si A est un évènement quelconque, on a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; $0 \leq p(A) \leq 1$.

<u>Exemple</u> : Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire ; montrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

<u>Solution</u> : Si A et B sont deux évènements quelconques, on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ avec $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ deux évènements disjoints ; alors $p(B) = p\left((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})\right) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

c) <u>Evènements indépendants</u> : (*Outil pour montrer que deux évèments A et B sont indépendants ou non ; ou calculer la probabilité de A∩B ; A et B étant indépendants*)

* Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si on a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

<u>Exemple 1</u> : Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire.
On a $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$. (Car $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ avec $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ disjoints).
Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également ; que peut-on dire des évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

<u>Solution</u> : Supposons donc les évènements A et B indépendants : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$, alors $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(B \cap A) = p(B) - p(B) \times p(A)$
(car les évènements A et B sont indépendants) $p(B \cap \overline{A}) = p(B)\,(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A})$.
Ceci montre que les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants ; de même si les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

<u>Exemple 2</u> : Deux chasseurs Adama et Basile sont allés à la chasse. Ils aperçoivent ensemble un lièvre et promptement chacun tire de son côté sur le lièvre.
Les observations ont montré que Adama tue 5 lièvres sur 6 et Basile tue 4 lièvres sur 5.
On désigne par A l'évènement "Adama a tué le lièvre" ; par B l'évènement "Basile a tué le lièvre".
(On admet que : les évènements "le lièvre est atteint "et "le lièvre est tué " sont identiques).
Calculer la probabilité pour le lièvre de ne pas être tué après ces deux tirs simultanés.

<u>Solution</u> : Les deux chasseurs ont chacun de son côté tiré sur le lièvre, donc les évènements A et B sont indépendants ; d'après l'exemple 1 ci-dessus, les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants ; les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants de même que les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
La probabilité pour le lièvre de ne pas être tué après ces deux tirs simultanés est la probabilité de l'évènement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ c'est-à-dire $\overline{A} \cap \overline{B}$; donc $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p(\overline{B}) = [1 - p(A)] \times [1 - p(B)]$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

3) <u>Des cas particuliers de probabilités</u>

Soit Ω un univers fini ; $\Omega = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ \cdots,\ e_n\}$; p une probabilité définie sur Ω.

a) <u>Probabilité uniforme ou équiprobabilité</u> : (*Outil pour déterminer la probabilité d'un évènement A dans une situation d'équiprobabilité*)

p est une probabilité uniforme sur Ω si pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $p(e_i) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$.

Si A est un évènement quelconque ; $p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$.

<u>Remarque</u> : La situation de probabilité uniforme est souvent clairement exprimée dans l'énoncé ; sinon on peut la reconnaître par des indices du genre : (jeux de cartes bien battues, dé non pipé ou dé parfaitement équilibré, boules indiscernables au toucher, pièce de monnaie parfaite,….)

<u>Exemple</u> : À la kermesse du lycée, un jeu consiste à tirer simultanément 2 enveloppes parmi 12 dont une contient un billet de 2000 F ; 2 contiennent chacune un billet de 1000 F ; 3 contiennent chacune un billet de 500 F et les six autres contiennent chacune un bout de papier sans valeur.

Les enveloppes sont identiques et non transparentes.

1) Calculer la probabilité de ne rien gagner à ce jeu.
2) Calculer la probabilité de gagner exactement 2000 F à ce jeu.

<u>Solution</u> : Les enveloppes sont identiques et non transparentes, on est dans une situation de probabilité uniforme. Le nombre de cas possibles est $C_{12}^2 = 66$

1) Calculons la probabilité de ne rien gagner à ce jeu.
   Le nombre de cas favorables est $C_6^2 = 15$ et alors la probabilité cherchée est
   $$\frac{C_6^2}{C_{12}^2} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$
2) Calculons la probabilité de gagner exactement 2000 F à ce jeu.
   Pour avoir exactement 2000 F, il faudra tirer soit 1 enveloppe de 2000 et 1 enveloppe contenant un papier, soit 2 enveloppes de 1000 F ; le nombre de cas favorables est alors :
   $\left(C_1^1 \times C_6^1\right) + C_2^2 = 7$; donc la probabilité de gagner exactement 2000 F est $\frac{7}{66}$.

b) <u>Probabilité conditionnelle</u> : (*Outil pour déterminer la probabilité d'un évènement conditionné à un autre évènement.*).

A et *B* sont deux évènements de Ω.

Si $p(A) \neq 0$; la probabilité de *B* conditionnée par *A* ; ou de *B* sachant *A* est :

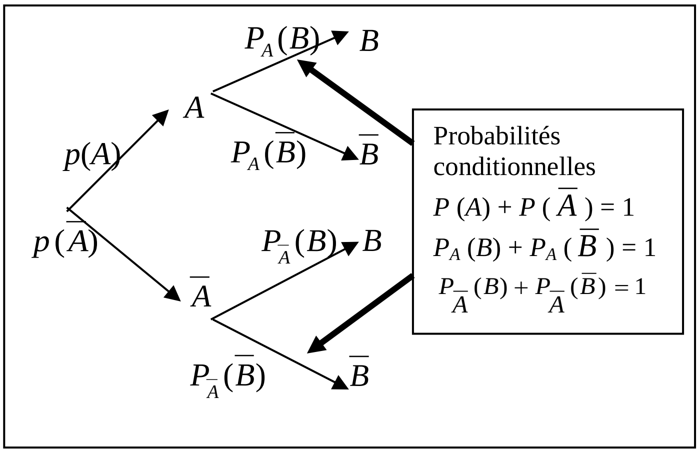
$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

<u>Remarques</u>

- Dans le cas d'équiprobabilité $p(B/A) = \frac{Card(B)}{Card(A)}$
- *A* et *B* sont deux évènements indépendants ssi $p(B/A) = p(B)$; ou $p(A/B) = p(A)$.
- Si on connaît la probabilité conditionnelle de *B* sachant que *A* est réalisé et la probabilité de *A*, alors on peut calculer la probabilité de l'événement « *A* et *B* » :
  $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

<u>Arbre de probabilité conditionnelle</u>

On traduit souvent la situation de probabilité conditionnelle sous la forme d'un arbre appelé arbre de probabilité conditionnelle ou arbre pondéré.



Remarque

La situation de probabilités conditionnelles n'est pas souvent clairement exprimée dans l'énoncé ; toutes fois dans un énoncé, on peut la reconnaître par des indices du genre : (sachant que…, calculer la probabilité de…. ; ou si…, calculer la probabilité de…. ; ou encore calculer la probabilité de …, sachant que… ; ….). Toujours la situation de probabilités conditionnelles se reconnaît dans une épreuve où deux événements sont réalisés successivement ; le second événement étant conditionné au premier évènement.

Exemple : Dans un troupeau d'animaux, il y a 10 % d'animaux qui sont contaminés par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- **La probabilité qu'un animal contaminé ait un test positif est de** $\frac{19}{20}$
- **La probabilité qu'un animal non contaminé ait un test négatif est de** $\frac{17}{20}$

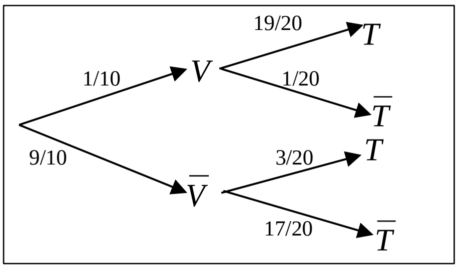
On fait passer un test à un animal choisi au hasard dans ce troupeau.
On note V l'événement «l'animal est contaminé par le virus» et T l'événement «le test est positif».

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $p(V)$; $p_V(T)$; $p_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2) Déterminer la probabilité que le test soit positif.
3) **a) Si le test est positif, déterminer la probabilité que l'animal soit contaminé.**
   b) Déterminer la probabilité qu'un animal ne soit pas contaminé par le virus sachant que son test est négatif.

Solution :

1) a) Précisons les valeurs des probabilités : $p(V) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $p_V(T) = \frac{19}{20}$ et $p_{\overline{V}}(\overline{T}) = \frac{17}{20}$.

Traduisons la situation à l'aide d'un arbre de probabilités



b) En déduisons $p(V \cap T)$

D'après la formule de probabilités conditionnelles, $p_V(T) = \frac{p(V \cap T)}{p(V)}$; donc

$$p(V \cap T) = p_V(T) \times p(V) = \frac{19}{20} \times \frac{1}{10} = \frac{19}{200}$$

2) Déterminer la probabilité que le test soit positif ; c'est-à-dire $p(T)$.
On a $T = (V \cap T) \cup (\overline{V} \cap T)$ (union disjointe) donc $p(T) = p(V \cap T) + p(\overline{V} \cap T)$

$$p(T) = p_V(T) \times p(V) + p_{\overline{V}}(T) \times p(\overline{V}) = \frac{19}{200} + \frac{27}{200} = \frac{46}{200} = \frac{23}{100}$$

3) **a) Si le test est positif, déterminons la probabilité que l'animal soit contaminé.**
Il s'agit de $p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{19}{200} \times \frac{200}{46} = \frac{19}{46}$

c) Déterminons la probabilité qu'un animal ne soit pas contaminé par le virus sachant que son test est négatif.

Il s'agit de $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)=\dfrac{p\left(\overline{V}\cap\overline{T}\right)}{p\left(\overline{T}\right)}=\dfrac{p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)\times p\left(\overline{V}\right)}{1-p(T)}=\dfrac{17}{20}\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{200}{154}=\dfrac{153}{154}$.

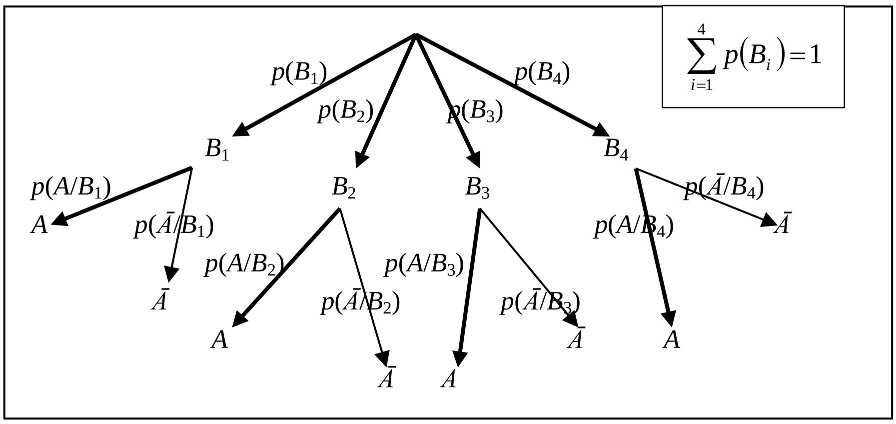
d) (<u>Probabilités totales</u>) : (*Outil pour déterminer la probabilité d'un évènement A dans une situation de « probabilités totales »*)

Soit A un évènement de Ω ; soit B_1, B_2, B_3, B_4 quatre évènements tous de probabilité non nulle et constituant une partition de Ω ; tels que :

$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)\cup(A\cap B_4)$, alors :

- $p(A)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+p(A\cap B_3)+p(A\cap B_4)$.
- $p\ (A)=\ p(A/B_1)\times p(B_1)+p(A/B_2)\times p(B_2)+p(A/B_3)\times p(B_3)+p(A/B_4)\times p(B_4)$.

On peut illustrer cette situation également par un arbre pondéré :



<u>Remarque</u>

La situation de probabilités totales n'est pas souvent non plus clairement exprimée dans l'énoncé ; toutes fois dans un énoncé, on peut la reconnaître par des indices du genre :

Dans l'énoncé : (si telle épreuve est réalisée, alors on réalise telle autre épreuve) ou dans les questions : (sachant que la probabilité de…est... ; calculer la probabilité de …. ; ou si la probabilité de…est... ; calculer la probabilité de …. Ou encore calculer la probabilité de …., sachant que… ;….). A la différence avec la situation des probabilités conditionnelles qui se reconnaît dans une épreuve où deux événements sont réalisés l'un après l'autre, la situation de probabilités totales se reconnaît souvent dans une épreuve composée de deux épreuves qui se réalisent l'une après l'autre ; la seconde épreuve étant conditionnée à la première épreuve.

<u>Exemple</u> : 4 concours différents $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$, et C_4 sont lancés. **Pour chaque concours, une présélection sur dossiers a d'abord lieu ; si les dossiers sont retenus, on passe ensuite le concours**. Alain dépose ses dossiers pour les 4 concours. Il a 3 chances sur 10 de passer le concours C_1 ; 2 chances sur 5 de passer le concours C_2 ; 1 chance sur 5 de passer le concours C_3 et 1 chance sur 10 de passer le concours C_4.

Si ses dossiers sont retenus et qu'il passe le concours, il a 2 chances sur 5 d'être admis au concours C_1 ; 7 chances sur 10 d'échouer au concours C_2 ; 3 chances sur 10 d'échouer au concours C_3 et 1 chance sur 10 d'être admis au concours C_4.

Alain passe un concours.

1) Calculer la probabilité qu'il soit admis.
2) S'il est admis, quelle est la probabilité que ce soit au concours C_4 ?

<u>Solution</u> : On a là deux épreuves successives : « avoir le dossier retenu » et « passer le concours » ; il est clair que la deuxième épreuve est conditionnée à la première ! on est alors dans une situation de probabilités totales. Désignons par $c_i = p(C_i)$ la probabilité pour Alain de passer le concours C_i ; et par $a_i = p(A_i)$ la probabilité que Alain soit admis au concours C_i. Ainsi d'après l'énoncé on a :

$c_1 = p(C_1) = \frac{3}{10}$; $c_2 = p(C_2) = \frac{2}{5}$; $c_3 = p(C_3) = \frac{1}{5}$ et $c_4 = p(C_4) = \frac{1}{10}$; et s'il passe un concours, désignons par A l'évènement : « Alain est admis » ; on alors d'après l'énoncé :
$p_{C_1}(A) = \frac{2}{5}$; $p_{C_2}(A) = \frac{3}{10}$; $p_{C_3}(A) = \frac{7}{10}$ et $p_{C_4}(A) = \frac{1}{10}$.

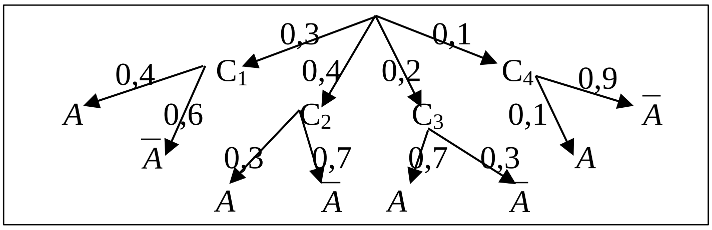
1) Calculons la probabilité qu'il soit admis ; il s'agit de $p(A)$.

On a : $A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup (A \cap C_3) \cup (A \cap C_4)$ et d'après la formule de probabilités totales, $p(A) = p(A \cap C_1) + p(A \cap C_2) + p(A \cap C_3) + p(A \cap C_4)$;
$p(A) = p(A/C_1) \times p(C_1) + p(A/C_2) \times p(C_2) + p(A/C_3) \times p(C_3) + p(A/C_4) \times p(C_4)$; donc
$p(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{39}{100}$.

2) S'il est admis, calculons la probabilité que ce soit au concours C_4

Il s'agit de calculer $p_A(C_4) = \frac{p(A \cap C_4)}{p(A)} = \frac{p(A/C_4) \times p(C_4)}{p(A)} = \frac{1}{100} \times \frac{100}{39} = \frac{1}{39}$.

Remarque : On pourrait se servir de l'arbre pondéré suivant :



e) <u>Epreuve de Bernoulli ; Schéma de Bernoulli</u> : (*Outil pour déterminer la probabilité d'un évènement dans une situation d'épreuve de Bernouilli ou de schéma de Bernouilli*)

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues notées "Succès"-*S*- et "Echec"- $\overline{S}$ - ou -*E*- ; avec $p(S) = p$ et $p(\overline{S}) = q = 1 - p$.

Un schéma de Bernoulli est la répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques dans les mêmes conditions et indépendantes les unes des autres.

La probabilité d'obtenir exactement *k* succès ($0 \le k \le n$) à l'issue des *n* épreuves est :
$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ [avec $p = p(S)$]

<u>Remarque</u>

La situation d'épreuve de Bernoulli se reconnaît dans une épreuve comportant deux (2) éventualités : Succès et Echec.
Lorsqu'une épreuve de Bernoulli se répète *n* fois de façon identique dans les mêmes conditions et indépendantes les unes des autres, on est dans une situation de schéma de Bernoulli.

<u>Exemple</u> : Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts :
le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) On prélève au hasard un sac dans la production d'une journée. On note *A* l'événement « le sac présente le défaut a » et *B* l'événement « le sac présente le défaut b ». On sait que $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.
Calculer la probabilité (arrondie à 10^{-2} près) de l'événement *C* « le sac est défectueux ».
2) On prélève au hasard et successivement 100 sacs dans la production d'une journée. on considère que ces prélèvements sont indépendants et se font tous dans les mêmes conditions.
Calculer la probabilité d'avoir exactement 5 sacs défectueux.

<u>Solution</u> : 1) Calculons la probabilité de l'événement C « le sac est défectueux ».
$C = A \cup B$ et $p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
$p(C) = 0,02 + 0,01 - 0,02 \times 0,01 = 0,0298 = 0,03$.

2) Calculons la probabilité d'avoir exactement 5 sacs défectueux.

D'après l'énoncé on est dans une situation de schéma de Bernoulli. En effet,
• 100 expériences identiques et indépendantes les unes des autres sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le sac est défectueux » avec une probabilité $p = 0,03$ et « le sac n'est pas défectueux » avec une probabilité $q = 1 - p = 0,97$.

La probabilité demandée est donc p_5 ; $p_5 = C_{100}^{5} \times (0,03)^5 \times (0,97)^{95} = 0,0092$.

II) Variable aléatoire réelle

Soit Ω un univers fini ; $\Omega = \{e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots, e_n\}$; p une probabilité définie sur Ω.

1) Définition ; Loi de probabilité d'une variable aléatoire X : (*Outil pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire*)

- Une variable aléatoire est une application souvent notée X, de Ω vers $\mathbb{R}$.
- Les valeurs prises par une variable aléatoire X sont : $X(e_1)$; $X(e_2)$; $\cdots$; $X(e_n)$ désignées souvent par x_1 ; x_2 ; x_3 ; $\cdots$; x_m : avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m$ et $m \leq n$
- La loi de probabilité de X est la donnée des $p_i = p(X = x_i)$ $(1 \leq i \leq m)$. Elle est souvent représentée sous forme d'un tableau.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m
$p(X = x) =$ p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_m

Avec $p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots + p_m = 1$

Exemple : Une urne contient 4 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
On définit X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

1) Établir la loi de probabilité de X.

Solution : 1) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3 et $p(X = x) = \dfrac{C_4^x \times C_5^{3-x}}{C_9^3} = \dfrac{C_4^x \times C_5^{3-x}}{84}$.

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

2) Fonction de répartition de X : (*Outils pour déterminer et/ou représenter la fonction de répartition d'une variable aléatoire*)

$$\begin{aligned} \mathrm{F} : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mathrm{F}(x) = p(X \leq x) \end{aligned}$$

Si $x \in]-\infty,\ x_1[$; alors $\mathrm{F}(x) = 0$;

Si $x \in [x_1,\ x_2[$; alors $\mathrm{F}(x) = p_1$

Si $x \in [x_2,\ x_3[$; alors $\mathrm{F}(x) = p_1 + p_2$;

Si $x \in [x_3,\ x_4[$; alors $\mathrm{F}(x) = p_1 + p_2 + p_3$

$\vdots$

Si $x \in [x_i,\ x_{i+1}[$; alors $\mathrm{F}(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_i$

$\vdots$

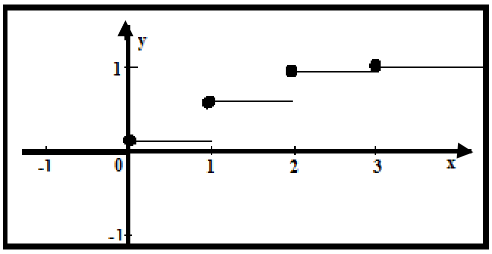
Si $x \in [x_m, +\infty[$; alors $\mathrm{F}(x) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots + p_m = 1$

Exemple : Avec les données de l'exemple précédent :

2) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Solution : D'après la loi de probabilité de X, on a :

$F(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$; $F(x) = \dfrac{5}{42}$ sur $[0, 1[$; $F(x) = \dfrac{25}{42}$ sur $[1, 2[$; $F(x) = \dfrac{40}{42}$ sur $[2, 3[$ et $F(x) = 1$ sur $[3, +\infty[$. Représentons F dans un repère.



3) **<u>Caractéristiques de X</u> :** (*Outils pour déterminer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ ou l'écart-type σ (X) d'une variable aléatoire X*)
Soit X, la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau de la partie 1) Définition :

a) **<u>Espérance mathématique de X : $E(X)$.</u>**

- $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \cdots + x_m p_m$

b) **<u>Variance de X : $V(X)$; Ecart-type de X</u> : σ (X)**

- $V(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 \times p_i = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \times p_i - [E(X)]^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

<u>Exemple</u> : Avec les données de l'exemple précédent (loi de probabilité d'une variable aléatoire) :
3) Déterminer l'espérance mathématique de $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type σ (X) de X

<u>Solution</u> : Par définition $E(X) = 0 \times \dfrac{5}{42} + 1 \times \dfrac{10}{21} + 2 \times \dfrac{5}{14} + 3 \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{28}{21}$;

$V(X) = 0 \times \dfrac{5}{42} + 1 \times \dfrac{10}{21} + 4 \times \dfrac{5}{14} + 9 \times \dfrac{1}{21} - \left(\dfrac{28}{21}\right)^2 = \dfrac{735}{1323}$ et σ (X) = $\sqrt{\dfrac{735}{1323}}$.

<u>Remarque</u>

Dans le cas particulier d'un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre k de succès à l'issue des n épreuves, suit une loi binomiale de paramètres $(n ; p)$ où $[p = p(S)]$.

$p(X = k) = p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

$E(X) = n \times p$ et ($V(X) = n \times p \times (1-p)$; pour information)

<u>Exemple</u> Suite de l'exemple du point e) Schéma de Bernouilli.

On prélève au hasard et successivement 100 sacs dans la production d'une journée. on considère que ces prélèvements sont indépendants et se font tous dans les mêmes conditions.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de sacs défectueux sur les 100.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

<u>Solution</u> : La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli ; en effet :
On a 100 épreuves identiques et indépendantes les unes des autres qui sont effectuées successivement ; et chaque épreuve a 2 issues : « avoir un sac défectueux » de probabilté $p = 0, 03$ et « avoir un sac non défectueux » de probabilté $q = 1 - p = 0, 97$. Donc X suit une loi binomiale de paramètre (100 ; 0,03).

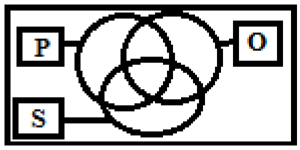
EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1-1

Dans un groupe de 100 professeurs tous des "lecteurs" de journaux, on a remarqué qu'au total 55 professeurs lisent régulièrement le journal "Le Pays" ; 30 au total lisent régulièrement le journal "L'Observateur" dont 12 lisent exclusivement le journal "L'Observateur" ; au total 58 professeurs lisent régulièrement le journal "Sidwaya" ; 15 au total lisent régulièrement les deux journaux "Sidwaya" et "L'Observateur" ; 15 ne lisent régulièrement que "Le Pays" et " Sidwaya "; 10 professeurs lisent régulièrement les 3 journaux.

1) Quel est le nombre de professeurs qui ne lisent que "L'Observateur" et "Sidwaya" ?
2) Déterminer le nombre de professeurs qui ne lisent que "Le Pays" et "L'Observateur".
3) Déterminer le nombre de professeurs qui lisent :
   a) exclusivement "Le Pays" ;
   b) exclusivement "Sidwaya".



Exercice 1-2

Une urne contient 5 boules noires, 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire 6 boules de cette urne.

En distinguant successivement les trois (3) types de tirages (tirages successifs avec remise, tirages successifs sans remise, tirage simultané), déterminer :

1) Le nombre de tirages possibles.
2) Le nombre de tirages possibles comportant exactement 4 boules noires et 2 boules blanches.
3) Le nombre de tirages possibles comportant exactement 2 boules rouges, 2 boules blanches et 2 boules noires.

Exercice 1-3

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) et dans chaque couleur il y a 8 valeurs ou hauteurs : (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; J ; Q ; K ; As).

À partir d'un jeu de 32 cartes, on veut former une main de 8 cartes.

1) Quel est le nombre de mains possibles peut-on former ?
2) Quel est le nombre de mains possibles peut-on former comportant exactement :
   a) 2 as et 3 piques. (distinguer le cas où l'as de pique est choisi et le cas où il n'est pas choisi)
   b) 2 cartes de chaque couleur.
   c) 3 cartes d'une même couleur et 5 cartes d'une autre couleur.

Exercice 1-4

À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches portant les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 et les lettres A ; B ; C.

Pour déclencher l'ouverture de la porte, il faut taper successivement 2 lettres suivies de 3 chiffres.

1) Dans cette question les 2 lettres sont distinctes ou non et les 3 chiffres sont distincts ou non.
   a) Combien de codes possibles peut-il y avoir ?
   b) Le régisseur se rappelle que la première lettre est A et le premier chiffre est 8. Combien de codes peut-il proposer ?
2) Dans cette question les 2 lettres sont distinctes et les 3 chiffres sont distincts.
   a) Combien de codes possibles peut-il y avoir ?
   b) Combien de codes possibles comportant le chiffre 5 ?

Exercice 1-5

On dispose d'un dé truqué (pipé) dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Pour un lancer de ce dé on note p_i la probabilité d'apparition de la face supérieure portant le numéro *i*. Des observations ont montré que : $p_1 = p_2 = p_6 = \dfrac{1}{12}$; $p_4 = \dfrac{1}{6}$; $p_5 = \dfrac{1}{4}$.

1) a) Quel est l'univers Ω associé à l'épreuve ?
   b) Calculer p_3 la probabilité d'apparition de la face numérotée 3.
2) On lance ce dé une fois et on lit le numéro sur la face supérieure. On désigne par :
   - A l'évènement "obtenir un nombre premier".
   - B l'évènement "obtenir un diviseur de 6".
   - C l'évènement "obtenir un nombre pair plus grand que 3".

   a) Exprimer par une phrase les évènements suivants : $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A\cap B$; $A\cup B$.
   b) Calculer la probabilité des évènements A ; B ; C ; $A\cap B$; $A\cap C$;
   c) Calculer de deux façons différentes la probabilité des évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$ et $A\cup C$

<u>Exercice 1-6</u>

Dans l'armoire de la maman à Julie se trouvent 3 bracelets, 3 bagues, 4 colliers et 2 montres.
Pour la kermesse du lycée, Julie décide de "se parer" avec ces bijoux. Elle ouvre l'armoire de sa maman en son absence pour faire son choix. Mais surprise par elle, elle prend au hasard et simultanément 3 bijoux dans l'armoire.

1) Déterminer le cardinal de l'univers Ω associé à l'épreuve.
2) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) A : "Julie a pris 3 bijoux de même nature ".
   b) B : "Julie a pris 3 colliers ".
   c) C : "Julie a pris au moins un collier ".
3) Son souhait était de prendre un bracelet un collier et une bague, ou un bracelet un collier et une montre. Quelle aurait été la probabilité d'être satisfaite ?

<u>Exercice 1-7</u> (Sujet de bac Polynésie)

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. Ces boules sont indiscernables au toucher.
On prélève *n* boules successivement et avec remise, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants:

- *A*:" On obtient des boules des deux couleurs";
- *B*:" On obtient au plus une boule blanche ".

1) a) Calculez la probabilité de l'événement C : "Toutes les boules tirées sont de même couleur"
   b) Calculez la probabilité de l'événement D : "On obtient exactement une boule blanche".
   c) Déduisez-en que les probabilités $p(A\cap B)$; $p(A)$ et $p(B)$ sont:

$$p(A\cap B) = \frac{n}{2^n} \; ; \; p(A) = 1 - \frac{1}{2^{(n-1)}} \; ; \; p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2) Montrez que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n+1$.
3) Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2 par:
   $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$
   a) Calculez les trois premiers termes de cette suite.
   b) Démontrez que cette suite est strictement croissante.
4) Donner la valeur de l'entier *n* pour laquelle les événements *A* et *B* sont indépendants.

<u>Exercice 1-8</u>

Dans une clinique, on fait appel à un spécialiste chaque semaine pour consulter des malades.
Pour chaque malade hospitalisé, il décide chaque semaine de le consulter ou non.
Pour un certain nombre de cas concernant ces malades hospitalisés, il a fait le constat suivant :

- qu'il doit les consulter la première semaine ;
- que s'il les consulte la *n*-ième semaine, la probabilité qu'il les consulte la (*n* + 1)-ième

semaine est égale à $\frac{3}{4}$;

- que s'il ne les consulte pas la n-ième semaine, la probabilité qu'il les consulte la (n + 1)-ième semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : "Le spécialiste consulte ces malades la n-ième semaine" ; et par p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1) a) Que représente l'évènement E_1 d'après le constat du spécialiste ?
   b) En déduire la valeur de $p_1 = \mathrm{p}(E_1)$.
   c) Déterminer $\mathrm{p}(E_{n+1} / E_n)$; puis $\mathrm{p}(E_{n+1} / \overline{E}_n)$.
   d) Déterminer en fonction de p_n, $\mathrm{p}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathrm{p}(E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$.
2) En déduire que pour tout $n > 0$; $p_{n+1} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}$.
3) On pose $q_n = p_n - \frac{2}{7}$.
   a) Montrer que (q_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire p_n en fonction de n.
   c) À partir de quelle-ième semaine, la probabilité que le spécialiste consulte ces malades est – elle inférieure ou égale à $\frac{3}{10}$?

On donne : $\ln(13) \approx 2{,}56$; $\ln 2 \approx 0{,}7$; $\ln 5 \approx 1{,}6$

Exercice 1-9

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :

- U_1 : 4 boules rouges et 3 boules noires.
- U_2 : 2 boules rouges et 4 boules noires.

On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard une boule de chaque urne.
   a) Calculer la probabilité d'avoir 2 boules de couleurs différentes.
   b) Si les 2 boules sont de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge provienne de l'urne U_1 ?
2) Dans cette question, on lance d'abord une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'avoir la face « pile » est $\frac{2}{5}$.

- Si le résultat est « pile », on tire 1 boule de l'urne U_1.
- Si le résultat est « face », on tire 1 boule de l'urne U_2.
   a) Calculer la probabilité de l'événement : « la boule tirée est rouge ».
   b) Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 1-10 (tiré du net)

Certains gènes peuvent avoir deux états : *A* (allèle dominant) ou *a* (allèle récessif).

Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants : *AA* ou *Aa* ou *aa*

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.

Par exemples :

- Si un parent a le génotype *AA* et l'autre *Aa*, l'enfant sera du type *AA* ou *Aa* avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.

- Si un parent a le génotype *Aa* et l'autre *aa*, l'enfant sera du type *Aa* ou *aa* avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.
- Si les parents ont les mêmes génotypes, alors l'enfant a certainement le même génotype.
- Si un parent a le génotype *Aa* et l'autre *Aa*, l'enfant sera du type *AA* ou *Aa* ou *aa* avec des probabilités égales à $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ respectivement.

On note p_n, q_n et r_n les probabilités pour les deux parents d'avoir des génotypes *AA*, *Aa*, *aa* de la génération *n*, respectivement.

1) À l'aide d'un arbre pondéré, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.
2) En déduire les probabilités p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
3) On note $\alpha = p_0 - r_0$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n - r_n = \alpha$.
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre α.
   c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes.

Ce résultat est connu sous le nom de "loi de l'équilibre génétique de Hardy-Weinberg". Ainsi, quelles que soient les proportions initiales des trois génotypes, la répartition est stabilisée dès la génération suivante.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 1-11

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules jaunes.
U_2 contient 2 boules rouges et 3 boules jaunes.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de chaque urne : on obtient ainsi 4 boules.

1) On note *X* la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Déterminer la loi de probabilité de *X* .
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de *X* .
2) Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule rouge de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré 2 boules rouges.
3) On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément 2 boules. On nomme succès (*S*) le tirage de 2 boules rouges.
   a) Déterminer la probabilité *p* de *S* .
   b) On renouvelle 10 fois de suite la même épreuve dans les mêmes conditions (en remettant chaque fois les 2 boules tirées dans l'urne).
   - *k* étant un entier compris entre 0 et 10, déterminer la probabilité d'avoir *k* succès à l'issue des 10 tirages .
   - Déterminer la probabilité d'avoir au moins 1 succès sur les 10 tirages.

Exercice 1-12 : (Sujet de Bac)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut *a* et le défaut *b*. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) On prélève au hasard un sac dans la production d'une journée.
   On note *A* l'événement « le sac présente le défaut *a* » et *B* l'événement « le sac présente le

défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

a) Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b »

b) Calculer la probabilité (arrondie à 10^{-2} près) de l'événement D « le sac est défectueux ».

c) Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2) On suppose que la probabilité qu'un sac soit défectueux est égale à 0, 03.
On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à des tirages successifs avec remise de 100 sacs dans les mêmes conditions et indépendants les uns des autres.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des sacs est défectueux » ? Interpréter ce résultat.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

<u>Exercice 1-13</u>

On dispose de 2 dés parfaits (non pipés) A et B.

- Le dé A a 1 face portant le n° 0 ; 2 faces portant le n° 1 et 3 faces portant le n° –1.
- Le dé B a 2 faces portant le n° 0 ; 2 faces portant le n° 1 et 2 faces portant le n°–1.

On lance une fois les 2 dés simultanément et on lit les numéros sur les faces supérieures.
On construit le nombre complexe $a + bi$ avec, a le numéro sur le dé A et b celui sur le dé B.

1) a) Quels sont les nombres complexes possibles que l'on peut obtenir à l'issue de ce lancer ?
b) Calculer la probabilité d'obtenir chacun de ces nombres complexes.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
a) E_1 "obtenir un nombre réel".
b) E_2 "obtenir un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ ".
c) E_3 "obtenir un nombre complexe d'argument $k\frac{\pi}{2}$ ".(avec $k \in \mathbb{Z}$)

3) On désigne par X la variable aléatoire qui, associe après le lancer simultané des deux dés, le module du nombre complexe construit ci-dessus.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

<u>Exercice 1-14</u>

I) Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement :
U_1 : 2 boules numérotées 1 et 2 ; U_2 : 4 boules numérotées 1 ; 2 ; 3 et 4.
Dans chaque urne les boules sont indiscernables au toucher.
On sait que l'urne U_2 a 2 fois plus de chance d'être choisie que l'urne U_1.
On choisit alors une urne et on en tire 1 boule.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule numérotée 1.

2) On a tiré une boule numérotée 1. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

II) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 boules précédentes.

1) On tire simultanément au hasard 2 boules de cette nouvelle urne. On désigne par S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 boules tirées.
a) Calculer la probabilité de tirer 2 boules de mêmes numéros.
b) Déterminer la loi de probabilité de S.

2) Deux joueurs, Abel et Claude, décident que :
- si la somme des numéros des 2 boules tirées est impaire, Claude donne 100 F à Abel ;
- si la somme des numéros des 2 boules tirées est paire, Claude reçoit a F d'Abel. ($a > 0$).

On note X, la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le gain algébrique de Claude.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .
b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a.
c) Déterminer la valeur de a pour que le jeu soit équitable (c'est à dire $E(X) = 0$).

Exercice 1-15

Des études statistiques ont montré que 5% des jeunes filles d'une ville sont porteuses du virus V.I.H. (On dit qu'elles sont séropositives).

On considère un échantillon de 100 jeunes filles prises au hasard. La ville est suffisamment grande pour que ce choix soit des choix identiques et indépendants d'une personne.

On note X la variable aléatoire égale au "nombre de filles porteuses du virus V.I.H. de l'échantillon ".

1) Soit k un entier compris entre 0 et 100.
 a) Exprimer en fonction de k la probabilité de l'évènement "$(X = k)$".
 b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.
2) Un test est réalisé pour dépister le virus chez les filles. On a établit que :
 - Sachant qu'une fille est séropositive, la probabilité qu'elle ait un test positif est $\frac{17}{20}$.
 - Sachant qu'une fille est séronégative, la probabilité qu'elle ait un test négatif est $\frac{9}{10}$.

 On désigne par M, l'évènement "être séropositive" et par T l'évènement "avoir un test positif ".

 a) Calculer la probabilité des évènements "M et T" ; "$\overline{M}$ et $\overline{T}$" et "$\overline{M}$ et T".
 b) En déduire la probabilité de T puis de $\overline{T}$.
 c) Calculer la probabilité qu'une fille ayant un test positif soit séropositive.
 d) Calculer la probabilité qu'une fille ayant un test négatif soit séropositive.

(On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles).

Exercice 1-16

Adama lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

Il lance les dés suivant les règles suivantes:

- Si les deux dés donnent le même numéro alors il perd 10 points.
- Si les deux dés donnent deux numéros de parités différentes (l'un pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

1) Adama joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points qu'il obtient.
 a) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique de X.
 b) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
2) Adama effectue 10 parties de suites. Les parties se font dans les mêmes conditions et sont indépendantes les unes des autres.

 On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.
 a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y?
 b) Quelle est la probabilité que Adama gagne au moins une fois 15 points?
 c) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.
3) Le joueur joue n parties de suite dans les mêmes conditions et de façon indépendantes les unes des autres.
 a) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points?

b) A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 1--17

- Une urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires.
- Une urne U_2 contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher dans chaque urne.
On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est noire, on la place dans l'urne U_2.
- Sinon on l'écarte du jeu.

On tire ensuite une boule de l'urne U_2.
L'ensemble de toutes ces opérations constitue une épreuve.
On considère les évènements suivants :

- R_1 "la boule tirée de l'urne U_1 est rouge"
- N_1 "la boule tirée de l'urne U_1 est noire"
- R_2 "la boule tirée de l'urne U_2 est rouge"
- N_2 "la boule tirée de l'urne U_2 est noire".

1) a) Calculer $p(R_1)$; $p(N_1)$; $p(R_2/R_1)$ et $p(R_2/N_1)$.

b) En déduire que $p(R_2) = \frac{27}{50}$.

c) Calculer $p(N_2)$.

2) Un jeu consiste à répéter l'épreuve précédente n fois de façons indépendantes et identiques.
Si à l'issue des n épreuves, le joueur a tiré : 1, 2, …, n boules noires de l'urne U_2, il marque 1, 2, …, n points respectivement.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués à l'issue du jeu.

a) Calculer $p(X = k)$; $0 \leq k \leq n$.

b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

c) Quel est le minimum d'épreuves à effectuer pour que la probabilité de marquer au moins 1 point à la fin du jeu soit strictement supérieure à 0,90 ?

Exercice 1-18

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n \geq 1$).
- U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard 1 boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard 1 boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1) On considère les évènements suivants :

- A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent dans leur configuration de départ".
- B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient 1 seule boule blanche".

a) Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est : $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

b) Montrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est : $p(B) = \frac{3}{2(n+3)}$.

2) Camara mise 200 F et effectue une épreuve. A l'issue de l'épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2 :

- si U_2 contient 1 seule boule blanche, Camara reçoit $20 \times n$ F ;
- si U_2 contient 2 boules blanches, il reçoit $10 \times n$ F ;
- si U_2 contient 3 boules blanches, il ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi Camara n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X égale au gain algébrique de Camara après le jeu.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.
d) On dit que le jeu est favorable à Camara si et seulement si $E(X) > 0$.
Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 1-19
Les 6 faces d'un dé cubique sont marquées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
On suppose que lors d'un lancer du dé, toutes les faces ont la même chance d'apparaître, sauf la face marquée 1 qui a 2 fois plus de chance d'apparaître que les autres faces.
On note p_i la probabilité d'apparition de la face marquée i.

1) On lance 1 fois ce dé et on lit le numéro de la face supérieure.
Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
2) On lance 2 fois de suite dans les mêmes conditions le dé et on note i, j les numéros apparus sur la face supérieure.
i est le numéro apparu au premier lancer et j est celui apparu au second lancer.
On pose $S = i + j$ et on admet que les couples (i, j) sont des évènements élémentaires et que $p(i, j) = p_{\mathrm{i}} \times p_j$.
a) Déterminer la loi de probabilité de S.
b) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   - E_1 : "S vaut 2 ; 3 ; 5 ; 7 ou 11".
   - E_2 : "S est un nombre pair différent de 2 et 12."
   - E_3 : "$S = 12$".
   - E_4 : "$S = 9$".
3) Un jeu consiste à lancer le dé 2 fois de suite. La règle du jeu est la suivante :
   - le joueur gagne 200 F si E_1 est réalisé ;
   - le joueur perd 300 F si E_2 est réalisé ;
   - le joueur gagne 600 F si E_3 est réalisé ;
   - le joueur perd 200 F si E_4 est réalisé.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 1-20
Une urne contient n boules blanches ($n > 0$) ; 2 boules noires et 3 boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

1) Déterminer en fonction de n, les probabilités p_1 ; p_2 ; p_3 suivantes :
a) p_1 : probabilité de l'évènement : "obtenir 2 boules blanches" ;
b) p_2 : probabilité de l'évènement : "obtenir 0 boule blanche" ;
c) p_3 : probabilité de l'évènement : "obtenir 2 boules de couleurs différentes".
2) Déterminer n pour que $p_1 = \frac{2}{9}$. On vérifera que $43^2 = 1\,849$.
3) On prend $n = 5$ et on considère le jeu suivant :
   - le tirage d'une boule noire rapporte 5 points ;
   - le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points ;
   - le tirage d'une boule blanche enlève 2 points.

On désigne par X la variable aléatoire, égale au nombre de points marqués à tout tirage simultané de 2 boules.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et la variance $\mathrm{V}(X)$ de X.

c) Déterminer et représenter graphiquement dans un repère orthogonal, la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

Exercice 1-21

- Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
- Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A.

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
Il le lance une fois : s'il obtient 1 ou 6, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1) Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(R) = \frac{1}{5}$
2) Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de l'urne A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de l'urne B ?

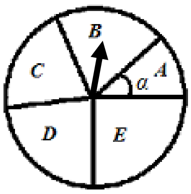
Partie B.

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit a un entier naturel non nul. Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne a francs s'il obtient une boule rouge et perd 500 F s'il obtient une boule noire.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en francs au terme des deux épreuves.

1) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Exprimer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X en fonction de a.
4) Un jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$; Pour quelles valeurs de a a-t-on ce jeu équitable ?

Exercice 1-22

Lors d'une kermesse, on dispose d'une roue de loterie partagée en 5 secteurs portant les lettres ***A*** ; ***B*** ; ***C*** ; ***D*** ; ***E*** ; comme indiquée ci-dessous. Le secteur ***A*** a pour mesure α°. Les mesures en degrés de ces secteurs constituent dans l'ordre une suite arithmétique de premier terme α ($0 < \alpha < 360$) et de raison r ; ($r > 0$).



Lors d'une partie, on fait tourner la roue, et un repère fixe désigne le secteur obtenu à l'arrêt ; on admet que les probabilités d'obtenir les différents secteurs circulaires sont proportionnelles aux mesures des angles de ces secteurs.

1) Montrer que les probabilités d'obtenir les secteurs ***A*** ; ***B*** ; ***C*** ; ***D*** et ***E*** sont respectivement :
$p(\boldsymbol{A}) = \frac{\alpha}{360}$; $p(\boldsymbol{B}) = \frac{\alpha + r}{360}$; $p(\boldsymbol{C}) = \frac{\alpha + 2r}{360}$; $p(\boldsymbol{D}) = \frac{\alpha + 3r}{360}$ et $p(\boldsymbol{E}) = \frac{\alpha + 4r}{360}$; où α et r vérifient une relation que l'on précisera.
2) Le billet de loterie pour ce jeu coûte 500 F. La règle du jeu est la suivante :
   - si le résultat est le secteur ***A***, le joueur gagne 1500 F ;
   - si le résultat est le secteur ***B***, le joueur gagne 1000 F ;
   - si le résultat est le secteur ***C***, le joueur gagne 500 F ;

- si le résultat est le secteur ***D***, le joueur ne gagne rien ;
- si le résultat est le secteur ***E***, le joueur ne gagne rien.

Alice achète un billet et joue. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs les gains algébriques de Alice à l'issue d'une partie.

a) Donner la loi de probabilité de X en fonction de α et r.

b) Déterminer α et r pour que l'espérance mathématique E(X) de X soit nulle.

3) On fixe $\alpha = 54$ et $r = 9$

Calculer la probabilité d'obtenir un gain strictement positif à l'issue d'une partie.

4) Alice joue n fois de suite ; les n jeux sont supposés identiques et indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que Alice ait un gain strictement positif à l'issue des n jeux.

a) Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale.

b) Préciser les paramètres de Y ?

c) Soit k un entier compris entre 0 et n ; déterminer en fonction de n et k la probabilité d'avoir exactement k fois un gain strictement positif à l'issue des n jeux.

d) Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'Alice gagne au moins une fois un gain strictement positif, à l'issue des n parties, soit supérieure ou égale à $\frac{7}{8}$.

On donne : $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 5 \approx 1,6$.

<u>Exercice 1-23</u>

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 7 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

* si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
* si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

Partie A

1) Montrer que $p(G) = \frac{1}{4}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3) Un joueur fait quatre parties de façon indépendante et dans les mêmes conditions. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux.
4) Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

* chaque joueur paye 100 F par partie ;
* si le joueur gagne la partie il reçoit 500 F ;
* si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

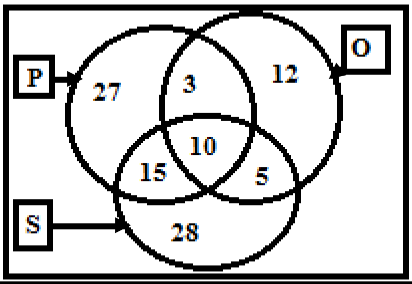
Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions:

Exercice 1-1

- *Cardinal d'un ensemble : (Définition, Propriétés)*

Solution

En remplissant successivement les cases par les cardinaux des ensembles : $P \cap S \cap O$; $P \cap S$; $S \cap O$; S ; $P \cap O$; O et P, on a :



1) 5 professeurs
2) 3 professeurs
3) a) 27 professeurs
   b) 28 professeurs

Exercice 1-2

1) *Tirage de p boules parmi n boules !*
   p-liste ; arrangement ; combinaison
2) *et 3) Attention à l'ordre !*

Solution

1) 12^6 ; A_{12}^6 ; C_{12}^6 ; 2) $C_6^4\left(5^4 \times 3^2 \times 4^0\right)$; $C_6^4\left(A_5^4 \times A_3^2 \times A_4^0\right)$; $C_5^4 \times C_3^2$

3) $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}\left(5^2 \times 3^2 \times 4^2\right)$; $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}\left(A_5^2 \times A_3^2 \times A_4^2\right)$; $C_5^2 \times C_3^2 \times C_4^2$

Exercice 1-3

(Une main de 8 cartes est composée de 8 cartes choisies simultanement au hasard parmi les cartes).

1) *, 2) Combinaison.*

Solution

1) C_{32}^8 ; 2) *a)* $C_1^1 \times C_3^1 \times C_7^2 \times C_{21}^4 + C_3^2 \times C_7^3 \times C_{21}^3$; *b)* $\left(C_8^2\right)^4$; *c)* $A_4^2\left(C_8^3 \times C_8^5\right)$

Exercice 1-4

1) *P-liste ; tirage successifs de 2 parmi 3 et de 3 parmi 9 avec remise*
2) *Arrangement.*

Solution

1) *a)* $3^2 \times 9^3$; *b)* $1^1 \times 3^1 \times 1^1 \times 9^2$; 2) *a)* $A_3^2 \times A_9^3$; *b)* $A_3^2 \times 1 \times A_8^2 \times C_3^2$ (car (4, 5, 6) ≠ (6, 5, 4)) par exemple.

Exercice 1-5

1) *Définition d'un univers ; définition de probabilité.*
2) *Vocabulaire de probabilité ; Propriétés de probabilité.*

Solution

1) *a)* $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$; $\text{Card}(\Omega) = 6$; *b)* $p_3 = \dfrac{1}{3}$: (car $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$)

2) *a)* $A = \{2, 3, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 6\}$; $C = \{4, 6\}$

$\overline{A}$ est l'évènement : « obtenir un nombre non premier » ;
$\overline{B}$ est l'évènement : « obtenir un nombre non diviseur de 6 »
$A \cap B$ est l'évènement : « obtenir un nombre premier diviseur de 6 »
$A \cup B$ est l'évènement : « obtenir un nombre premier ou un diviseur de 6 »

b) $p(A) = p_2 + p_3 + p_5 = \dfrac{2}{3}$; $p(B) = \dfrac{7}{12}$; $p(C) = \dfrac{1}{4}$; $p(A \cap B) = p_2 + p_3 = \dfrac{5}{12}$; $p(A \cap C) = 0$

$c)\ p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}$; ou $p(\overline{A}) = p_1 + p_4 + p_6 = \frac{1}{3}$.

$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = \frac{5}{12}$; ou $p(\overline{B}) = p_4 + p_5 = \frac{5}{12}$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{6}$; ou $p(A \cup B) = p_1 + p_2 + p_3 + p_5 + p_6 = \frac{5}{6}$.

$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{11}{12}$; ou $p(A \cup C) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{11}{12}$.

Exercice 1-6

1) *Combinaison*
2) *Formule de probabilité uniforme sur une combinaison.*

Solution

1) $\text{Card}(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

2) $a)\ p(A) = \frac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{220} = \frac{3}{110}$; $b)\ p(B) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{1}{55}$; $c)\ p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{C_8^3}{220} = \frac{41}{55}$

3) La probabilité qu'elle soit satisfaite est : $\frac{\left(C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1\right) + \left(C_3^1 \times C_4^1 \times C_2^1\right)}{220} = \frac{3}{11}$

Exercice 1-7

1) *Probabilité uniforme sur une p-liste..*
2) *Règles de calculs algébriques dans ℝ.*
3) *Monotonie de suite numériques.*
4) *Evènements indépendants.*

Solution

1) $a)\ p(C) = \frac{5^n + 5^n}{10^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$; $b)\ p(D) = \frac{5^1 \times 5^{n-1}}{10^n} \times C_n^1 = \frac{n}{2^n}$;

$c)\ A \cap B = D$ donc $p(A \cap B) = p(D) = \frac{n}{2^n}$; $A = \overline{C}$; donc $p(A) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$;

$p(B) = \frac{5^n}{10^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

2) $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si

$\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{(n-1)}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$ ce qui donne $2^{n-1} = n + 1$

3) a) $u_2 = -1$; $u_3 = 0$; $u_4 = 3$;

b) $u_{n+1} - u_n = \left(2^n - (n+2)\right) - \left(2^{n-1} - (n+1)\right) = 2^n - 2^{n-1} - 1 = 2^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \geq 0$; donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

4) A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$; c'est-à-dire que $2^{n-1} = n + 1$; autrement dit $2^{n-1} - (n+1) = u_n = 0$ or $u_3 = 0$ et la suite est monotone (croissante) donc $n = 3$.

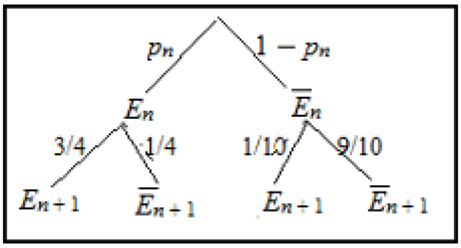
Exercice 1-8

1) *Evènement certain ; Probabilités conditionnelles ; ou arbre pondéré.*
2) *Probabilités totales ou arbre pondéré.*
3) *Définition de suites géométriques ;Propriétés algébriques de ln.*

Solution

1) a) E_1 est l'évènement certain ; b) $p(E_1) = p_1 = 1$; c) $p(E_{n+1} / E_n) = \frac{3}{4}$; $p\left(E_{n+1} / \overline{E_n}\right) = \frac{1}{10}$

d) $p(E_{n+1} \cap E_n) = p\left(E_{n+1} / E_n\right) \times p(E_n) = \frac{3}{4} p_n$; $p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right) = p\left(E_{n+1} / \overline{E_n}\right) \times p\left(\overline{E_n}\right) = \frac{1}{10}(1 - p_n)$



2) $p(E_{n+1}) = p\left(E_{n+1} \cap E_n\right) + p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$ *donc* $p_{n+1} = \frac{3}{4} p_n + \frac{1}{10}(1 - p_n) = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}$

3) *a)* $q_{n+1} = \frac{13}{20} q_n$; $q_1 = \frac{5}{7}$; *b)* $\forall n \geq 1,\ q_n = \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}$; donc $\forall n \geq 1,\ p_n = \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}$;

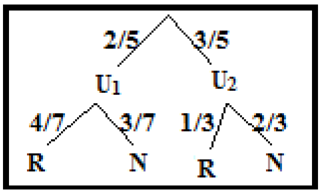
c) $p_n \leq \frac{3}{10}$ si et seulement si $\frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7} \leq \frac{3}{10}$, d'où $n \geq 10$

Exercice 1-9

1) *Probabilité de l'évènement A ou B avec A et B disjoints ; Probabilités conditionnelles ou arbre pondéré.*
2) *Probabilités totales ou arbre pondéré.*

Solution

1) Désignons par A l'évènement « avoir 2 boules de couleurs différentes » ; par R_i « tirer 1 boule rouge de l'urne U_i » et N_i « tirer 1 boule noire de l'urne U_i » i = 1, 2
   a) On peut avoir (R_1,N_2) ou (N_1,R_2) ; donc la probabilité d'avoir 2 boules de couleurs différentes est $p(A) = p = \left(\frac{4}{7} \times \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{21}$
   b) La probabilité demandée est p (R_1/A) où R_1 est l'évènement « tirer une boule rouge de U_1 ». Ainsi $p_A(R_1) = \frac{p(A \cap R_1)}{p(A)} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}}{\frac{11}{21}} = \frac{8}{11}$
2) Désignons par R l'évènement « la boule tirée est rouge ».



   a) La probabilité de l'événement : « la boule tirée est rouge » est d'après la formule de probabilités totales $p(R) = p = \left(\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{7}$.
   b) La probabilité demandée est : $\frac{\frac{4}{7} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{8}{15}$.

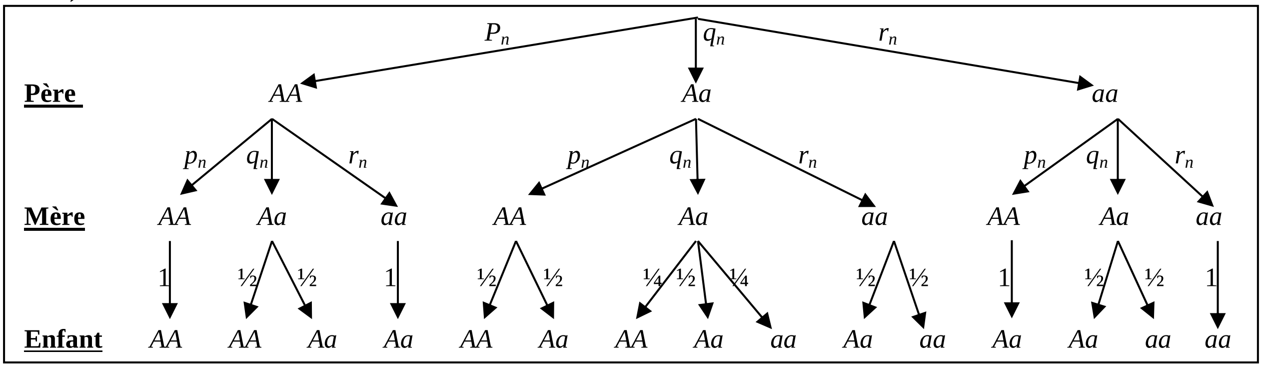
Exercice 1-10

1) *Arbre pondéré ; Probabilités conditionnelles.*
2) *Probabilités totales ; Règles de calculs sur un arbre pondéré.*

3) Démonstration par récurrence ; Règles de calculs dans $\mathbb{R}$ *; Suite constante.*

Solution

1)



2) $p_{n+1} = p_n^{\,2} + \frac{1}{2}p_nq_n + \frac{1}{2}q_np_n + \frac{1}{4}q_n^{\,2} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$;

$r_{n+1} = r_n^{\,2} + \frac{1}{2}r_nq_n + \frac{1}{2}q_nr_n + \frac{1}{4}q_n^{\,2} = \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$

$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$; donc $q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$

3) a) Pour tout naturel n, $p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = p_n - r_n$; d'où pour tout naturel n, $p_n - r_n = p_0 - r_0 = \alpha.$. En effet : $p_0 - r_0 = \alpha.$; supposons que $p_n - r_n = \alpha$ et montrons que $p_{n+1} - r_{n+1} = \alpha$ or on a $p_{n+1} - r_{n+1} = p_n - r_n$ d'où $p_{n+1} - r_{n+1} = p_n - r_n = \alpha$.
Donc pour tout naturel n, $p_n - r_n = p_0 - r_0 = \alpha.$.

b) $p_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n - r_n + r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left((p_n - r_n) + \frac{2r_n + q_n}{2}\right)^2$;

donc $p_n + \frac{q_n}{2} = (p_n - r_n) + \frac{2r_n + q_n}{2} = \alpha + \frac{1 - p_n + r_n}{2} = \frac{1+\alpha}{2}$; d'où $p_{n+1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$

$r_{n+1} = \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(r_n - p_n + \frac{2p_n + q_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$; par suite $q_{n+1} = \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)$.

c) Pour tout naturel n $p_{n+1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$; $r_{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$; $q_{n+1} = \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)$.

d'où $p_n = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$; $r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$; $q_n = \left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right)$.

***Chapitre* 2**

STATISTIQUES À DEUX VARIABLES

Bien que le nom de *statistique* soit relativement récent – on attribue en général l'origine du nom au XVIII^e siècle de l'allemand STAATS KUNDE – cette activité semble exister dès la naissance des premières structures sociales.
Les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. (Notamment en Chine au XXIII^e siècle av. J.-C. ou en Égypte au XVIII^e siècle av. J.-C.). Ce système de recueil de données se poursuit jusqu'au XVII^e siècle après J.- C.
Ce n'est qu'au XVIII^e siècle que l'on voit apparaître le rôle prévisionnel des statistiques avec la construction des premières tables de mortalité. Antoine DEPARCIEUX écrit en 1746 l'*Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine*. Elle va d'abord servir aux compagnies d'assurances sur la vie. ….
De nos jours les statistiques sont utilisées dans des domaines très variés comme :

- en géophysique, pour les prévisions météorologiques, la climatologie, la pollution, les études des rivières et des océans ;
- en démographie : le recensement permet de faire une photographie à un instant donné d'une population et permettra par la suite des sondages dans des échantillons représentatifs ;
- en sciences économiques et sociales, et en économétrie : l'étude du comportement d'un groupe de population ou d'un secteur économique s'appuie sur des statistiques. Les questions environnementales s'appuient également sur des données statistiques ;
- en sociologie : les sources statistiques constituent des matériaux d'enquête, et les méthodes statistiques sont utilisées comme techniques de traitement des données ;
- en marketing : le sondage d'opinion devient un outil pour la décision ou l'investissement ;
- en physique : l'étude de la mécanique statistique et de la thermodynamique statistique (cf Physique statistique) permet de déduire du comportement de particules individuelles un comportement global (passage du microscopique au macroscopique) ;
- en médecine et en psychologie, tant pour le comportement des maladies que leur fréquence ou la validité d'un traitement ou d'un dépistage ;
- en archéologie appliquée aux vestiges (céramologie...)
- en écologie (étude des communautés végétales et des écosystèmes)
- en assurance et en finance (calcul des risques,...)
- ……………..

L'étude conjointe de **deux variables statistiques** sur une **même population** est fréquente dans le domaine des sciences exactes comme dans celui des sciences humaines. On cherche alors à déterminer s'il existe un lien entre ces deux variables et, le cas échéant, quelle est la nature de ce lien.
En général la démarche consiste à représenter sur un même graphique les deux variables statistiques. C'est ce que l'on appelle,représenter un **nuage de points**.
On regarde ensuite si ce nuage de points se rapproche d'une courbe connue, afin de déterminer la nature du lien éventuel entre les deux variables statistiques.

CE QU'IL FAUT RETENIR .

I) Nuage de points ; point moyen .

Soit la série statistique à 2 variables (x, y). $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ les valeurs de la variable x ; avec

$x_i < x_{i+1}$. $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ les valeurs de la variable y ; y_i correspondant à la valeur x_i.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

1) <u>Nuage de points</u>

(*Outil pour représenter un nuage de points d'une série statistique à deux variables dans un repère*)

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ est appelé nuage de points associé à la série (x, y). $(1 \leq i \leq n)$.

2) <u>Point moyen</u>

(*Outil pour déterminer ou calculer les coordaonnées du point moyen d'une série statistique à deux variables*).

Le point $G(\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ est appelé point moyen du nuage.

<u>Exemple</u> : Une banque dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

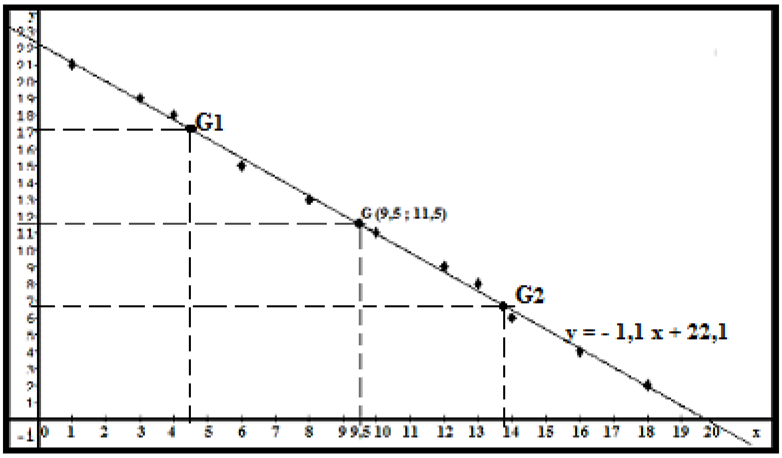
Nombre de caisses ouvertes *x*	1	3	4	6	8	10	12	13	14	16	18
Temps moyen d'attente (en minutes) *y*	21	19	18	15	13	11	9	8	6	4	2

1) Construire le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ correspondant à cette série statistique.

Unités graphiques : en abscisse : 0,5 cm pour une caisse ouverte et en ordonnée : 0,5 cm pour une minute d'attente.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique

<u>Solution</u> : 1) Construisons le nuage de points



2) Calculons les coordonnées du point moyen G du nuage et plaçons-le sur le graphique

$$\bar{x} = \frac{1+3+4+6+8+10+12+13+14+16+18}{11} = 9{,}5454 \approx 9{,}5 \ ; \ \bar{y} = 11{,}4545 \approx 11{,}5 \ ; \ G(9{,}5;11{,}5)$$

II) <u>Ajustement affine d'un nuage de points par des méthodes graphiques.</u>

(*Outil pour affirmer s'il est possible ou non, de réaliser par une méthode graphique un ajustement affine d'un nuage de points d'une série statistique à deux variables*)

Dans un repère donné, lorsque la forme d'un nuage de points peut laisser penser qu'on peut tracer une droite qui passerait le plus près possible des points de ce nuage, on dit qu'on peut réaliser un ajustement affine ou linéaire de ce nuage. Une telle droite est appelée droite d'ajustement affine du nuage de points.

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, les points du nuage semblent alignés, un ajustement affine du nuage de points est donc possible.

III) Méthodes graphiques d'ajustement affine d'un nuage de points.

On considère un nuage de points d'une série statistique à deux variables (x, y) dans un repère donné. Conformément au programme en vigueur au Burkina, il y a 3 méthodes graphiques d'ajustement affine ou linéaire du nuage de points.

1) Méthode du tracé au jugé.

(*Outil pour réaliser graphiquement un ajustement affine au jugé d'un nuage de points d'une série statistique à deux variables*)

À l'aide d'une règle on trace une droite que l'on juge passée le plus près possible des points du nuage.

2) Méthode du point moyen.

(Outil pour réaliser graphiquement un ajustement affine par la méthode du point moyen d'un nuage de points d'une série statistique à deux variables)

On place le point moyen G($\bar{x}, \bar{y}$) du nuage dans le repère et, à l'aide d'une règle, on trace une droite passant par G et le plus près possible des points du nuage.

3) Méthode du fractionnement ou méthode de Mayer.

(*Outil pour réaliser graphiquement un ajustement affine par la méthode de Mayer d'un nuage de points d'une série statistique à deux variables*)

- Le nuage de points est fractionné en 2 nuages N_1 et N_2 dont les effectifs diffèrent d'au plus 1.
- On détermine les points moyens partiels $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ et $G_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ de chacun de ces 2 nuages.
- On ajuste le nuage de points par la droite (G_1G_2) dont on peut déterminer une équation.

Exemple : Mêmes données que dans l'exemple ci-dessus :

3) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 associés respectivement aux cinq premiers points et aux six derniers points du nuage.

Solution : G_1(4,4 ; 17,2) et G_2 (13,8 ; 6,7) et (G_1G_2) a pour équation ; $y = -1{,}1\,x + 22{,}1$; car $\frac{6{,}7-17{,}2}{13{,}2-4{,}4} = -1{,}117021 = -1{,}1$. (voir la droite dans le repère ci-dessus).

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 2-1

Un dé cubique dont les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 , a été "pipé" de manière que les probabilités d'apparition de chaque face à l'issue d'un lancer soient différentes. On teste ce dé en faisant une série de 100 lancers. On appelle x les numéros portés par les faces du dé et y le nombre d'apparition de la face portant le n° x. Le résultat du test est le suivant :

x	1	2	3	4	5	6
y	10	12	16	18	20	24

1) a) Représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points de cette double série statistique (x, y).
   b) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
   c) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux trois premiers nombres$x$ et aux trois derniers nombres x.
   d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) de cette série sous la forme $y = ax + b$ (a et b étant des réels) ; puis tracer cette droite (G_1G_2) dans le repère.
2) On conçoit qu'avec un tel dé, la probabilité d'apparition d'un numéro sur la face supérieure à l'issue d'un lancer, est la fréquence de sortie de ce numéro à partir du test ci-dessus.
   a) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque numéro sur la face supérieure du déà l'issue d'un lancer.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair à l'issue d'un lancer.

Exercice 2-2

Durant les 9 mois de sa grossesse, Awa a pris régulièrement son poids. Voici le tableau où x représente la variable "nombre de mois de grossesse" et y la variable "poids" en kg.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	50	50,25	51	51,50	52,25	52,5	52,75	53,25	53,5

1) a) Représenter le nuage de points de la série (x, y) dans un repère orthogonal.
   b) Ce nuage de points laisse-t-il penser à un ajustement affine ? Justifier !
   c) Tracer à l'aide d'une règle, une droite jugée ajuster le nuage de points.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G et celles des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux points dont les abscisses sont les cinq premiers mois de grossesse et ceux dont les abscisses sont les quatre derniers mois de grossesse.
3) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).
   b) Montrer que la droite (G_1G_2) contient le point moyen G du nuage.
   c) Tracer la droite (G_1G_2) et placer le point moyen G dans le repère.

Exercice 2-3 (Inspiré du Bac – D Burkina)

Le tableau suivant donne pour chaque année, le nombre de naissances enregistrées dans une mairie.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre de naissances y_i	374	a	334	312	b	266

Lors d'un déménagement de cette mairie, les registres de naissances des années 2006 et 2009 ont été égarés, de sorte que le nombre de naissances de ces années reste introuvable.
Mais un stagiaire qui y était affecté avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de Mayer, par regroupement des trois premiers mois et des trois derniers mois du

nuage, la droite d'ajustement affine de y en x, d'équation $y = -22x + 397$.

1) À combien peut-on estimer le nombre de naissances durant les années 2006 et 2009 ?
2) a) Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points de la série (x, y).
   b) Tracer la droite d'ajustement.
3) On suppose que l'évolution des naissances reste semblable au cours des années à venir.
   a) Quel pourrait être le nombre de naissances au cours de l'année 2014 ?
   b) À partir de quelle année y aura-t-il moins de 100 naissances par an ?

<u>Exercice 2-4</u>

Un conducteur ohmique de résistance R est traversé par un courant variable d'intensité I.
On fait varier I et on mesure pour chaque valeur de I, la puissance absorbée P par le conducteur.
On a relevé les résultats suivants :

$\boldsymbol{I}$ (ampères)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\boldsymbol{P}$ (watts)	0,5	1,7	4,5	7,3	12,5	16,2	24,5	28,8
$\boldsymbol{x = I^2}$								

1) a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessus par les valeurs de x (sous forme de fractions irréductibles).
   b) Construire dans un même repère orthogonal, le nuage de points représentant la série (I, P) et celui représentant la série (x, P).
   c) Lequel de ces 2 nuages de points laisse penser à un ajustement affine ? Justifier !
   d) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux points dont les abscisses sont des entiers et ceux dont les abscisses ne sont pas des entiers de la série ajustable.
   e) Donner une équation de la droite (G_1G_2).
   f) Tracer cette droite, et placer le point moyen G de la série à ajuster dans le repère.
2) On sait que $P = R \times I^2$
   a) Donner la valeur de R à 10^{-1} près pour chaque valeur de I.
   b) Dresser le tableau des effectifs des valeurs de R.
   c) Calculer la résistance moyenne $\overline{R}$ du conducteur ohmique.

<u>Exercice 2-5</u>

Une entreprise a fait son bilan durant les six dernières années. Elle a désigné par :

- ✓ p_i, sa production en kilogrammes durant l'année i ;
- ✓ b_i, son bénéfice en milliers de francs durant l'année i ;
- ✓ i, le rang de l'année.

On a obtenu les données suivantes :

année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
rang *i* de l'année	1	2	3	4	5	6
production $\boldsymbol{p_i}$ (en kg**)**	2	4	16	20	36	64
Bénéfice $\boldsymbol{b_i}$ (en milliers de F**)**	5	13	64	81	168	324
$\boldsymbol{x_i = \ln p_i}$						
$\boldsymbol{y_i = \ln b_i}$						

Le but du travail est de trouver une relation entre le bénéfice b (en milliers de francs) de l'entreprise et sa production p (en kg)

1) On pose $x_i = \ln p_i$ et $y_i = \ln b_i$.
   a) Reproduire et compléter le tableau par les valeurs de x_i et y_i arrondies à 10^{-1} près.
   b) Calculer la production moyenne $\overline{p}$ et le bénéfice moyen $\overline{b}$ au cours de ces six dernières années.

2) On admet que par fractionnement, en regroupant les trois premiers points, puis les trois derniers points du nuage de points de la série (x, y), la droite d'ajustement (D) de y en
x a pour équation $y = 1,2\,x + 0,9$.

a) Déterminer les coordonnées arrondies à 10^{-1} près du point moyen G ($\bar{x}$, $\bar{y}$).
b) Montrer que le point moyen G appartient à la droite d'ajustement (D).
c) Exprimer le bénéfice b en fonction de la production p sous la forme $b = \alpha \times p^{\beta}$ (α, β, deux réels)
d) Quelle est la quantité de production p qui occasionnerait un bénéfice de 500 000 F ?

$\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 7 \approx 1,9$; $\ln 13 \approx 2,6$; $e^{4,4} \approx 81,5$; $e^{0,9} \approx 2,5$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 2-6

La production d'un produit (en kg) d'une entreprise pour les dix dernières années est donnée par le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production z_i (kg)	250	300	420	450	540	625	800	900	1200	1500

On pose $y_i = \ln z_i$.

a) Déterminer les valeurs de y_i arrondies à 10^{-1} près.
b) Représenter le nuage de points de la série statistique (x, y) dans un repère orthogonal.
c) On admet que les variables x et y sont liées par la relation : $y = 0,2x + 5,3$.
   a) Tracer dans le repère la droite d'équation $y = 0,2x + 5,3$.
   b) Parait-elle ajuster le nuage de points de la série (x, y) ?
   c) Donner une relation entre x et z sous la forme $z = f(x)$ où f est une fonction à définir.
4) En supposant que l'évolution reste la même au cours des prochaines années, déterminer en quelle année la production du produit dépassera-t-elle pour la première fois le double de celle de l'an 2010.

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 7 \approx 1,9$.

Exercice 2-7

On sait que la tension U aux bornes d'un générateur qui débite dans un circuit, vérifie la relation $U = E - R \times I$ où U est exprimée en volts ; E, la force électromotrice du générateur, est exprimée en volts ; R, la résistance interne du générateur, est exprimée en ohms et I, l'intensité du courant, est exprimée en ampères.

En faisant varier un rhéostat lors d'une expérience, on a obtenu le tableau statistique suivant donnant les valeurs I de l'intensité du courant et les valeurs U de la tension au cours de l'expérience.

I (en ampères)	1	2	3	4	5	6
U(en volts)	35	28	22	16	10	5

1) Dessiner le nuage de points de la série (I, U) dans un repère orthogonal.
2) On se propose de déterminer une équation d'une droite d'ajustement de ce nuage par la méthode de Mayer.
   a) Calculer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 associés respectivement aux trois premiers points et aux trois derniers points du nuage.
   b) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$. (a et b des réels).
   c) Tracer (G_1G_2) dans le repère.
   d) En déduire la résistance interne R en ohms, du générateur et sa force électromotrice E en volts.
3) Donner une estimation de la tension U du générateur lorsque $I = 6,5$ ampères.
   (N.B. On donnera tous les résultats arrondis à 10^{-1} près)

Exercice 2-8

1) Dans une entreprise, le prix de revient théorique de fabrication d'un produit A est composé d'un prix fixe a (en centaines de francs) et d'une valeur $b \times n$ (en centaines de francs) pour n unités produites. Soit $a + bn$ (en centaines de francs) pour n unités

produites.

Donner en fonction du nombre n d'unités produites, le prix de revient théorique y de fabrication d'une unité.

2) Dans la pratique, on a relevé les prix suivants :

Nombre d'unités *n*	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12
Prix unitaire *y* (en centaines de francs)	1500	870	660	555	492	450	420	380	366	345

a) Représenter le nuage de points de la série (n, y) dans un repère orthogonal.

b) Un ajustement affine de ce nuage paraît-il justifié ? Pourquoi ?

3) On pose $x = \dfrac{63}{n}$.

a) Calculer les valeurs de x sous forme de fractions irréductibles.

b) Représenter le nuage de points de la série (x,y) dans un autre repère orthogonal.

c) Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 correspondant respectivement aux cinq premiers points et aux cinq derniers points du nuage de points de la série (x, y). (Donner les valeurs des coordonnées sous forme de fractions irréductibles).

4) On se propose de déterminer une équation de la droite d'ajustement affine du nuage de points de la série (x, y) sous la forme $y = mx + p$.

a) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$.

b) En déduire les valeurs de a et b de la question 1. (On admet que les conclusions statistiques concordent avec le modèle théorique).

c) Estimer le prix de revient unitaire pour la fabrication de 8 unités puis de 11 unités.

d) Déterminer le prix de revient unitaire pour la fabrication de 20 unités.

e) Montrer qu'il est possible d'avoir un prix de revient unitaire inférieur ou égal à 250 F puis donner le nombre d'unités à fabriquer pour avoir un prix de revient unitaire à 250 F.

f) Montrer qu'il est impossible d'avoir un prix de revient inférieur ou égal à 240 F.

Exercice 2-9

Le tableau suivant présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active, dans un pays, entre 1994 et 2014

Année	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Rang x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Taux y_i	8	10	12	14	16	18	19	21	24	26	30

1) On considère un repère orthogonal pour lequel : 1 cm représente 2 années sur l'axe des abscisses ; 1 cm représente un taux de chômage de 4 % sur l'axe des ordonnées.

a) Représenter le nuage de points correspondant à la série $(x_i\ ,\ y_i)$ dans ce repère.

b) Ce nuage de points laisse-t-il penser à un ajustement affine ? Justifier la réponse.

c) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

2) On prend pour droite d'ajustement affine de ce nuage la droite (D) passant par G et de pente 0,9.

a) Déterminer une équation de la droite (D).

b) Représenter (D) sur le graphique.

3) G_1 désigne le point moyen des 5 premiers points du nuage et G_2 celui des 6 derniers points.

a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

b) Placer ces points sur le graphique précédent et tracer la droite (G_1G_2). Le point G appartient-il à (G_1G_2)?

c) Donner l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$

4) Répondre aux questions suivantes en utilisant la droite d'ajustement de Mayer:

a) Quel est le taux de chômage prévisible pour 2020 ?
b) A partir de quelle année le taux prévisible de chômage dépassera-t-il 50 % ?

Exercice 2-10

Une population homogène de bactéries placée dans un milieu liquide stable se multiplie par divisions successives. On s'intéresse dans cette étude à l'évolution de la densité bactérienne y en fonction du temps x. Une série de 9 mesures a donné les résultats suivants :

Temps : x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Densité : y	0,4	0,7	1,2	2	4	7	13	25	45
$z = \ln y$									

1) On pose $z = \ln y$.
 a) Reproduire et compléter le tableau précédent par les valeurs de z arrondies à 10^{-1} près.
 b) Construire le nuage de points représentant la série (x, y) et celui représentant la série (x, z) dans un même repère orthogonal.
 c) Lequel des deux nuages de points laisse penser à un ajustement affine ? Justifier.
 d) Tracer alors à l'aide d'une règle, une droite jugée ajuster ce nuage de points.
2) a) Calculer les coordonnées du point moyen M de la série statistique (x, z).
 b) Soit $A(1 ; 0,2)$ un point du plan :
 - donner une équation de la droite (AM), puis représenter-la dans le repère ;
 - paraît-elle être une droite d'ajustement affine du nuage de points de la série (x, z) ?
 c) En déduire une relation entre x et y sous la forme $y = ke^{ax}$; (k et a étant des réels).

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 7 \approx 1,9$; $\ln 13 \approx 2,6$; $e^{7,4} \approx 1636$.

Exercice 2-11

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaire en milliers de francs CFA d'une petite entreprise, entre 1994 et 2007

Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Taux y_i	10	12	14	18	21	24	27	31	34	37	44	52	62	69

1) Le plan est muni d'un repère orthogonal : 1 cm représente 1 an sur l'axe des abscisses ; 1 cm représente 10 000 sur l'axe des ordonnées.
 a) Représenter le nuage de points correspondant à la série $(x_i\,,\ y_i)$ dans ce repère.
 b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Puis placer-le-dans le repère

2) G_1 désigne le point moyen des 7 premiers points du nuage et G_2 celui des 7 derniers points.
 a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
 b) Placer ces points sur le graphique précédent et tracer la droite (G_1G_2).
 c) Cette droite ajuste-t-elle judicieusement le nuage de points ?
 d) Déduire de cet ajustement une estimation du montant du chiffre d'affaire de l'entreprise en 2013.

3) L'expérience d'une évolution linéaire du chiffre d'affaire de l'entreprise ne semble pas satisfaire les responsables. On admet alors que la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 23$ réalise un ajustement des points de ce nuage.
 a) Représenter la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 23$ dans le repère.
 b) Déduire de ce nouvel ajustement le montant du chiffre d'affaire de l'entreprise en 2013.

4) On sait qu'en 2013, le chiffre d'affaire de l'entreprise a été de 270 000 F CFA.
 a) Donner l'ajustement le plus pertinent des deux ajustements.
 b) Calculer le pourcentage des erreurs commises en utilisant les prévisions trouvées avec chacun des deux ajustements.

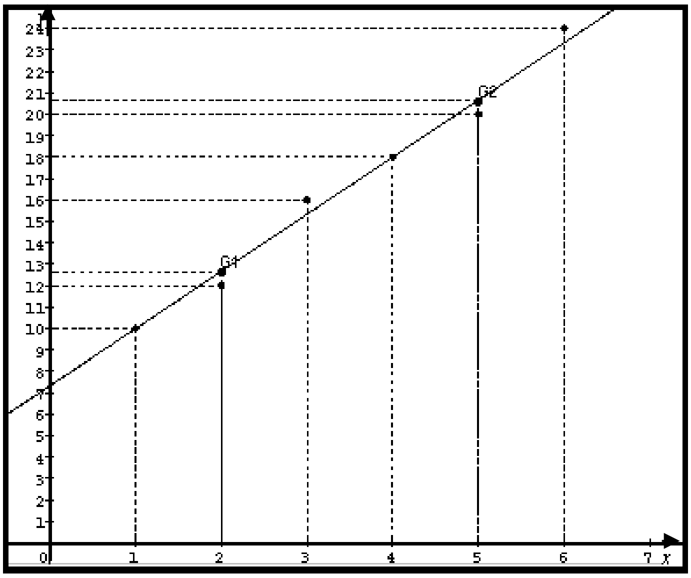
Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 2-1

1) *Définition d'un nuage de points dans un repère orthogonal ; Coordonnées du point moyen d'un nuage de points ; Equation de droite passant par deux points.*
2) *Définition de la fréquence d'une valeur* (quotient de l'effectif de cette valeur sur l'effectif total) *Probabilité d'un évènement dans le cas général*.

Solution

1) a) Représentons dans un repère orthogonal d'origine (0, 0), le nuage de point de la série :



b) Déterminons les coordonnées du point moyen G ; G (3,5 ; 16,67).

c) Déterminons les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 :

$$G_1\left(2,\ \frac{38}{3}\right) \text{ et } G_2\left(5,\ \frac{62}{3}\right)$$

d) Déterminons une équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) : $y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}$.

2) a) Déterminons la probabilité d'apparition de chaque numéro :

Désignons par $p\,(i)$ la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i ; d'après l'énoncé, on a donc :

$$p(1) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\ ;\ \ p(2) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}\ ;\ \ p(3) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}\ ;$$

$$p(4) = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}\ ;\ \ p(5) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}\ ;\ \ p(6) = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

b) Calculons la probabilité d'obtenir un numéro pair à l'issu d'un lancer.

Soit A, l'évènement « obtenir un numéro pair à l'issu d'un lancer » ; alors :

$$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{25} + \frac{9}{50} + \frac{6}{25} = \frac{27}{50}.$$

Exercice 2-2

1) Définition d'un nuage de points dans un repère orthogonal ;Méthode du tracé au jugé
2) Coordonnées du point moyen d'un nuage de points.
3) Equation de droite passant par deux points ; Condition pour qu'un point appartienne à une droite

Solution

1) a) Représentons dans un repère orthogonal d'origine (1, 50), le nuage de points.
   b) Ce nuage laisse penser à un ajustement affine car les points du nuage semblent être allignés.
   c) Traçons une droite d'ajustement au jugé : (Voir figure suivante)

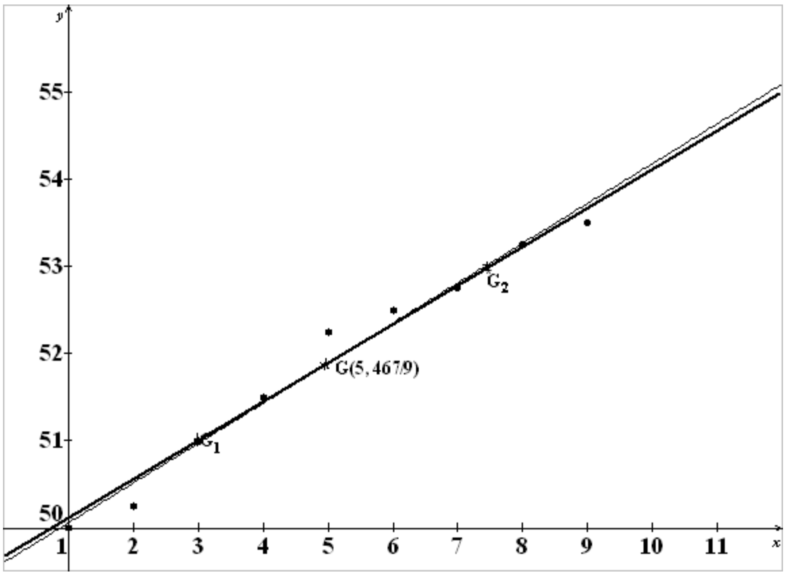
2) Déterminons les coordonnés du point moyen G ; $G\left(5,\ \frac{467}{9}\right)$ et les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 : $G_1(3,\ 51)$ et $G_2\left(\frac{15}{2}, 53\right)$.

3) a) Déterminons une équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) : $y = \frac{4}{9}x + \frac{149}{3}$

b) Montrons que le point moyen G appartient à la droite (G_1G_2) : $G\left(5,\ \frac{467}{9}\right)$

$y = \frac{4}{9}.5 + \frac{149}{3} = \frac{20}{9} + \frac{447}{9} = \frac{467}{9}$; donc le point moyen G appartient à la droite (G_1G_2).

c) Sur la figure la droite (G_1G_2) est en trait gras.



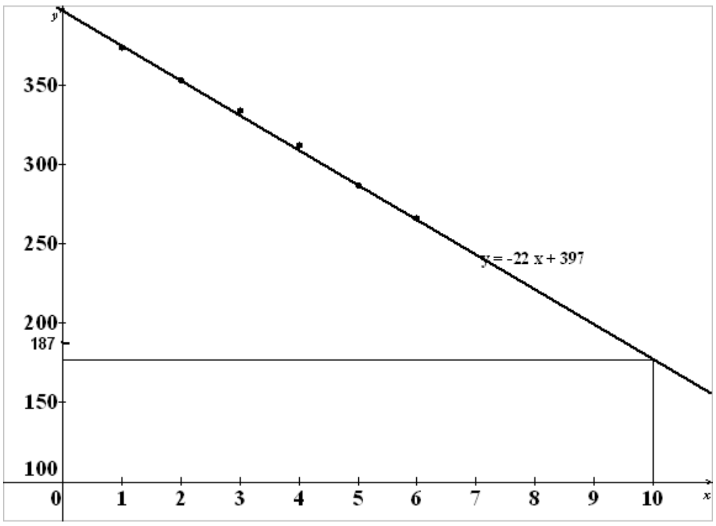
Exercice 2-3

1) Condition pour qu'un point appartienne à une droite
2) Idem qu'en exercice 2-2, 1)

Solution

1) Estimons le nombre de naissance durant les années 2006 et 2009 :
Année 2006, $x = 2$: $y = -22 \times 2 + 397 = 353$
Année 2009, $x = 5$; $y = -22 \times 5 + 397 = 287$
Les naissances en 2006 et en 2009 peuvent être estimées respectivement à 353 et 287.

2) Représentons le nuage de points et traçons la droite d'ajustement dans un repère orthogonal.



3) a) Donnons l'estimation du nombre de naissance en 2014 :
2014 correspond à $x = 10$; $y = -22 \times 10 + 397 = 177$; le nombre de naissance en 2014 pourrait être estimé à 177.

b) Déterminons l'année à partir de laquelle il y aurait moins de 100 naissances :
Il s'agit de déterminer x tel que $y = -22x + 397 < 100$; on obtient $x > 13,5$. Donc à partir de 2018, le nombre de naissance pourrait être inférieur à 100.

<u>Exercice 2-4</u>

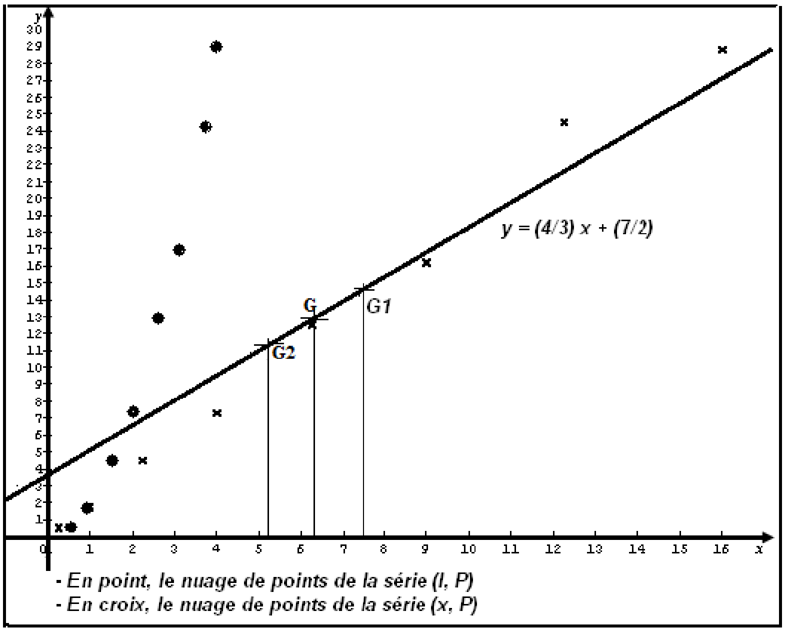
1) *Les outils sont pratiquement les même que les exercices précédents*
2) *Série statistique à une variable.*

<u>Solution</u>

1) a) Dressons le tableau avec $x = I^2$

I (ampères)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
P (watts)	0,5	1,7	4,5	7,3	12,5	16,2	24,5	28,8
$x = I^2$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	$\frac{49}{4}$	16

b) Construisons le nuage de points des séries (I, P) et (x, P)



a) Le nuage de points de la série (x, P) laisse penser à un ajustement affine, car les points du nuage semblent être alignés.

b) Déterminons les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 :
$G_1\left(\frac{15}{2}, \frac{27}{2}\right)$ et $G_2\left(\frac{21}{4}, \frac{21}{2}\right)$

c) Donnons l'équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$: $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{2}$

d) (Voir la droite sur la figure au-dessus)

2) $P = R \times I^2$; donc $R = \frac{P}{I^2}$

a) Déterminons les valeurs possibles de R à 10^{-1} :
les valeurs possibles de R sont : 1,7 ; 1,8 et 2

b) Dressons le tableau des effectifs des valeurs de R.

R	1,7	1,8	2
effectif	1	3	4

c) Déterminons le mode et valeur moyenne de R.

Le mode est 2 et la valeur moyenne $\overline{R} = 1{,}9$.

Exercice 2-5

1) Opérations algébriques avec ln
Idem aux exercices précédents
2) Propriétés de ln ; Propriétés de exponentielle

Solution

1) a) Valeurs de x et y arrondies à 10^{-1}

année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
rang *i* de l'année	1	2	3	4	5	6
production p_i (en kg**)**	2	4	16	20	36	64
Bénéfice b_i (en milliers de F**)**	5	13	64	81	168	324
x_i = ln p_i	0,7	1,4	2,8	3	3,6	4,2
y_i = ln b_i	1,6	2,6	4,2	4,4	5,1	5,8

b) Valeur de la production moyenne $\overline{p}$ et du bénéfice moyen $\overline{b}$:

$\overline{p} = 23{,}7$ (kg) ; $\overline{b} = 109{,}2$ (en milliers de francs) soit 109 200 F

2) La droite d'ajustement (D) du nuage de points de la série (x, y) a pour équation :
$y = 1{,}2\,x + 0{,}9$

a) Coordonnées du point moyen G de la série (x, y) : G (2,6 ; 4)

b) Position du point moyen G sur la droite (D) :
$1{,}2\,(2{,}6) + 0{,}9 = 4{,}02 = 4$ (arrondi à 10^{-1}) donc $G \in (D)$.

c) Relation entre b et p.
$y = 1{,}2\,x + 0{,}9$ équivaut à $\ln b = 1{,}2 \ln p + 0{,}9$; ce qui donne $b = e^{0,9}\left(p^{1,2}\right)$;
$b = 2{,}5\left(p^{1,2}\right)$

d) Quantité de production pour avoir un bénéfice de 500 000 F ; soit $b = 500$:
$b = 2{,}5\left(p^{1,2}\right)$ équivaut à $500 = 2{,}5\left(p^{1,2}\right)$; $p^{1,2} = 200$; $\ln p = 4{,}4$; $p = e^{4,4} \approx 81{,}5$
La quantité p de production pour avoir un bénéfice b de 500 000 F est 81,5 kg.

CHAPITRE 3

NOMBRES COMPLEXES

La notion de nombres a été l'un des fondements en mathématiques. Au cours des siècles cette notion a pris des extensions successives, pour des besoins de comptage d'objets, de résolution d'équations du $2^{\text{ème}}$degré ; du $3^{\text{ème}}$ degré……

- Au XVI^{e} siècle, les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raffaele Bombelli et Tartaglia, découvrent que des solutions réelles d'équations peuvent faire intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Par exemple « $7 = \left(2+\sqrt{-3}\right)\left(2-\sqrt{-3}\right)$ » ?!.
- Ils ont introduit alors des **nombres « imaginaires »** ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré de la forme : $x^3 + px + q = 0$ où p et q désignent des réels .
- En 1722, le Britannique Abraham de Moivre découvre la formule qui porte depuis son nom : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
- Au XVIII^{e} siècle Leonhard Euler et Jean le Rond d'Alembert ont parachevé la création des **nombres complexes** et fixé les notations actuelles, en particulier celle du nombre i.
- C'est à l'aide des nombres complexes que Gauss, dans sa thèse de doctorat parue en 1799, donne la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, selon lequel tout polynôme de degré n possède exactement n racines, non nécessairement distinctes. Il est également le premier à établir la correspondance entre les nombres complexes et les points du plan.
- Les nombres complexes ont de nombreuses applications en physique ; le nombre i apparaît ainsi de manière explicite dans l'équation fondamentale de Schrödinger qui décrit la nature ondulatoire des particules…..

- Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi en Finance, et dans d'autres sciences comme la physique ; notamment dans l'étude des ondes et du courant sinusoïdal : (en électronique, en optique et en astronomie).
- Par exemple la théorie des ondes, si utile pour les MP3, est basée sur les nombres complexes.

➢ Les nombres complexes prolongent la liste des ensembles de nombres déjà étudiés au primaire et au premier cycle, qui, pour la plupart ont été créés pour des raisons de comptage, de recherche de solutions à des équations rencontrées…

➢ L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est le dernier ensemble de nombres étudiés au secondaire, il prolonge donc directement l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

CE QU'IL FAUT RETENIR .

I) Etude algébrique des nombres complexes

1) Existence.

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes :

❖ Qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;

❖ Où il existe un nombre qui n'est donc pas réel, appelé nombre imaginaire noté i et qui vérifie $i^2 = -1$; $i \notin \mathbb{R}$ mais $i \in \mathbb{C}$.

❖ L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent dans $\mathbb{C}$ en conservant les mêmes règles de calcul.

2) Forme algébrique d'un nombre complexe.

(*Outil pour déterminer la forme algébrique ; la partie réelle ; la partie imaginaire d'un nombre complexe*)

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme : $z = a + bi$; avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; $a = \text{Re}(z)$ appelé partie réelle de z et $b = \text{Im}(z)$ appelé partie imaginaire de z.

Remarque : Si $b = 0$, le nombre complexe z est réel ; si $a = 0$ et $b \neq 0$, le nombre complexe z est dit imaginaire pur.

Propriété : Soit $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes, a, b, a', b' des réels ;

$$z = z' \text{ équivaut à } \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

Exemple : Soit $z_1 = -i\,(2\,i + 3)$; $z_2 = \dfrac{-i+5}{3}$; $z_3 = (3\,i)\,(-1 + i\,) + 3$; $z_4 = (\,x\,i + 2)i - y\,i$.

1) Ecrire chaque nombre complexe sous la forme algébrique ; préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2) Déterminer x et y pour que $z_4 = -3$.

Solution : 1) $z_1 = -i\,(2\,i + 3) = -2i^2 - 3i = -2(-1) - 3i = 2 - 3i$; $\text{Re}(z_1) = 2$ et $\text{Im}(z_1) = -3$

$z_2 = \dfrac{-i+5}{3} = \dfrac{-i}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)i$; $\text{Re}(z_2) = \dfrac{5}{3}$ et $\text{Im}(z_2) = -\dfrac{1}{3}$.

$z_3 = (3\,i)\,(-1 + i\,) + 3 = -3i + 3i^2 + 3 = -3i - 3 + 3 = -3i$; $\text{Re}(z_3) = 0$ et $\text{Im}(z_3) = -3$.

$z_4 = (\,x\,i + 2)i - y\,i = x\,i^2 + 2i - y\,i = -x + (2 - y)\,i$; $\text{Re}(z_4) = -x$ et $\text{Im}(z_4) = (2 - y)$.

2) $z_4 = -3$ équivaut à $-x + (2 - y)\,i = -3$; donc $x = 3$ et $y = 2$.

3) Conjugué et module d'un nombre complexe

(*Outil pour calculer le conjugué et le module d'un nombre complexe*)

Soit $z = a + bi$, un nombre complexe : ($a, b \in \mathbb{R}$)

a) **Le conjugué de *z*** est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - bi$.

Remarques : $\bar{\bar{z}} = z$; $\bar{i} = -i$; $\bar{z} = a - bi$ équivaut à $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Propriétés :

- Si $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), alors : $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$
- $\text{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\text{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- z est réel équivaut à $z = \bar{z}$; z est imaginaire pur équivaut à $z = -\bar{z}$ et $z \neq 0$.

b) **Le module de *z*** est le réel positif noté $|z|$ et défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Remarques : Si z est réel, alors le module de z est la valeur absolue de z ;

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ si et seulement si a et b sont des réels.

Propriétés :

- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$;
- $|z| = 1$ équivaut à $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$; $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.

Exemple : Déterminer le conjugué et le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -i\,(2\,i + 3)\ ;\ z_2 = \frac{-i+5}{3}\ ;\ z_3 = (3\,i)\,(-1 + i\,) + 3\ ;\ z_4 = (3i + 2)i - 2i.$$

Solution : D'après l'exemple ci-dessus ; on a:

$z_1 = -i\,(2\,i + 3) = -2i^2 - 3i = -2(-1) - 3i = 2 - 3i$; donc ;

$\bar{z}_1 = 2 + 3i$ et $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$;

$z_2 = \dfrac{-i+5}{3} = \dfrac{-i}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)i$; donc $\bar{z}_2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}i$ et $|z_2| = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

$z_3 = (3\,i)\,(-1 + i\,) + 3 = -3i + 3i^2 + 3 = -3i - 3 + 3 = -3i$; donc

$\bar{z}_3 = 3i$ et $|z_3| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3$.

$z_4 = (3i + 2)i - 2i = 3i^2 + 2i - 2i = -3$;donc

$\bar{z}_3 = -3 = z_3$ et $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$.

4) Représentation géométrique d'un nombre complexe

(*Outil pour déterminer l'affixe d'un point, d'un vecteur du plan par exemple*)

Le plan $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2}\right)$.

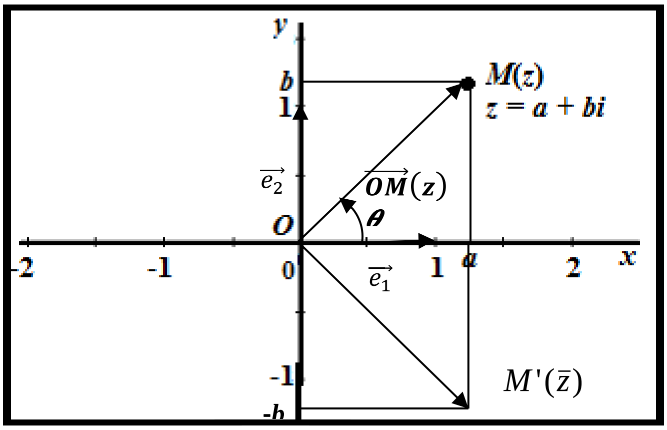
- A tout nombre complexe $z = a + bi$ (a, $b \in \mathbb{R}$), on associe le point M (a, b) du plan d'une part et le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$ de l'ensemble des vecteurs du plan d'autre part. On dit que le point M est le point image du nombre complexe z et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
- Inversement à tout point M (a, b) du plan, on associe un seul nombre complexe $z = a + bi$ appelé affixe du point M et à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b), on associe un seul nombre complexe $z = a + bi$ appelé affixe du vecteur $\vec{u}$.

On définit ainsi une application de $\mathbb{C}$ vers $(\mathcal{P})$ et une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{V}_2$.

$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow (\mathcal{P})$ tel que pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$, φ (z) est le point M (a, b) de $(\mathcal{P})$;

ψ : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{V}_2$ tel que pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$, ψ (z) est le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ de $\mathcal{V}_2$.

Ces deux applications sont bijectives.



L'ensemble $\mathbb{C}$ est alors assimilable à un plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2}\right)$; un tel plan est appelé plan complexe ;

- ✓ l'axe $\left(O,\ \vec{e_1}\right)$ est appelé axe des réels ;
- ✓ l'axe $\left(O,\ \vec{e_2}\right)$ est appelé axe des imaginaires purs.

Si M (z) et $M'(z')$ sont deux points du plan complexe, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$. On a alors : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $|z' - z| = MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$

II) Etude trigonométrique des nombres complexes

Dans toute cette partie le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2}\right)$

1) Forme trigonométrique ; forme exponentielle, d'un nombre complexe non nul.

(*Outil pour déterminer la forme trigonométrique, l'argument et la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul*)

a) Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul (a et b des réels) d'image M (a, b), un argument du nombre complexe z non nul est toute mesure θ de l'angle orienté $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$; on le note arg(z) ; ainsi arg(z) est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$. Si θ est un argument de z, alors toute mesure de la forme $\theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) est aussi un argument de z. On note alors arg(z) = $\theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ; ou arg(z) = θ modulo $2\pi = \theta\ [2\pi]$.

Exemple :

Soit M (1, 1) l'affixe de M est $z = 1 + i$; l'angle $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ donc arg(z) = $\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Remarque : Si z = 0, l'angle $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini ; donc arg(z) (z = 0) n'existe pas.

Propriété : Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives M (z) et $M'(z')$

- ❖ z est réel si et seulement si $z = 0$ ou arg(z) = $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ❖ z est imaginaire pur si et seulement si $z = 0$ ou arg(z) = $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ❖ $z = z'$ équivaut à $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\,[2\pi] \end{cases}$
- ❖ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$; $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\,[2\pi]$; $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z)\,[2\pi]$.
- ❖ Si $z \neq z'$, alors $\arg(z' - z) = \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{MM'}\right)[2\pi]$.

b) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ; alors l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; avec $r = |z|$; $\theta = \arg(z) + 2k\pi$; et $z \neq 0$ est la forme trigonométrique de z.

Exemple : Si $z = 1 + i$, d'après l'exemple ci-dessus, arg(z) = $\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$; donc la forme trigonométrique de $z = 1 + i$ est $z = |z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Remarques :

- ❖ Il n'y a pas unicité de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z ; car arg(z) est défini à $2k\pi$ près.
- ❖ $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est une forme trigonométrique d'un nombre complexe z si et seulement si $r > 0$ (on a alors $|z| = r$ et arg(z) = $\alpha\,[2\pi]$)

Propriétés : Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ un nombre complexe ; alors on a ;

- ❖ $\bar{z} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]$
- ❖ $-z = -r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r[-\cos\alpha - i\sin\alpha] = r[\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)]$

c) Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; on convient de noter z sous la forme $z = re^{i\theta}$; cette notation $z = re^{i\theta}$ est la forme exponentielle du nombre complexe z de module r et d'argument θ.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ équivaut à $r = |z|$; $\theta = \arg(z) + 2k\pi$; et $z \neq 0$. $(e \approx 2{,}72)$

Remarque :

- ❖ Il n'y a pas aussi unicité de la forme exponentielle d'un nombre complexe z ; car arg(z) est défini à $2k\pi$ près.
- ❖ $re^{i\alpha}$ est une forme exponentielle d'un nombre complexe z si et seulement si $r > 0$ (on a alors $|z| = r$ et arg(z) = $\alpha\,[2\pi]$)

Propriétés : Soit $re^{i\alpha}$ un nombre complexe ; alors on a ;

- ❖ $\bar{z} = re^{i(-\alpha)}$; $-z = re^{i(\pi+\alpha)}$

2) Passage d'une forme à une autre.

(*Outil pour déterminer la forme d'un nombre complexe, donné sous une autre forme*)

➢ **De la forme algébrique à la forme trigonométrique ou à la forme exponentielle.**

Forme algébrique $z = a + bi$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.	calculer r et déterminer θ tel que →	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{a^2+b^2}$ $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$	→	Forme trigonométrique $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$ Forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ $r > 0$ et $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$

➢ **De la forme trigonométrique ou de la forme exponentielle à la forme algébrique.**

Forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ Forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ $r > 0$ et $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$	Déterminer $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$ →	$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$	→	Forme algébrique $z = a + bi$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple:Mettre sous la forme algébrique, sous la forme trigonométrique, puis sous la forme exponentielle, les nombres complexes suivants : a) $z = i(\sqrt{3} - i)$; b) $z = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$

c) $z = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Solution : a) $z = i(\sqrt{3} - i) = 1 + i\sqrt{3}$; $|z| = 2$; $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Alors $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$; $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $z = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{(i+\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $|z| = 1$; $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc $\theta = \dfrac{4\pi}{3}\,[2\pi]$; alors $z = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$; $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

c) $z = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$;

donc $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$; $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

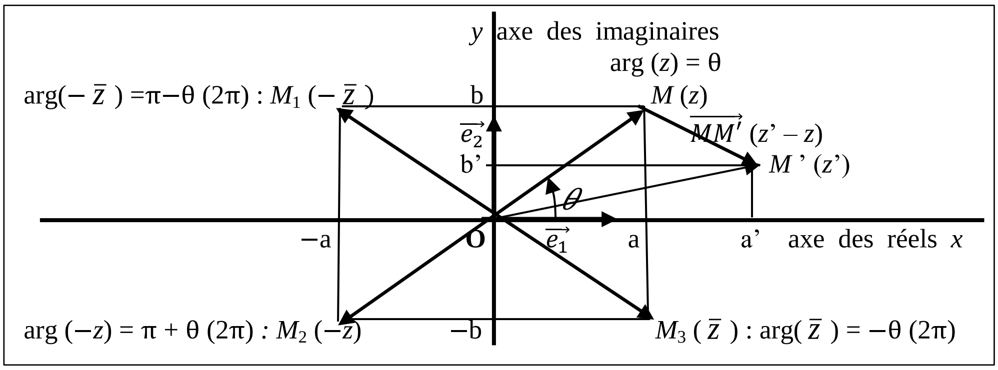
III) Retour sur interprétation géométrique des nombres complexes

(*Outil pour interpréter géométriquement un nombre complexe ; son module et son argument s'il est non nul*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ direct.

- ➢ $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est l'affixe du point $M(a, b)$ du plan ; et aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}\,(a, b)$.
- ➢ $M\,(a, b)$ est le point image du nombre complexe $a + bi$; $\overrightarrow{OM}\,(a, b) = \vec{u}\,(a, b)$ est le vecteur image du nombre complexe $a + bi$.

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$.
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; $\theta = \arg(z)\ (2\pi) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$. ($k \in \mathbb{Z}$).
- Si M a pour affixe z et M' a pour affixe z', alors $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$; et $|z' - z| = MM' = \|\overrightarrow{MM'}\|$.



IV) <u>Règles de calculs algébriques dans $\mathbb{C}$</u>

1) <u>Sur les nombres complexes sous forme algébrique</u> : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

(*Outils pour effectuer des opérations algébriques sur les nombres complexes sous forme algébrique*)

- $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.
- $z \times z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$. ($z \neq 0$)
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$; ($z' \neq 0$)

2) <u>Sur les conjugués</u>

(*Outils pour effectuer des calculs algébriques sur les conjugués de nombres complexes*)

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.
- $z \times \overline{z} = |z|^2$;
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

3) <u>Sur les modules</u>

(*Outils pour effectuer des calculs algébriques avec les modules de nombres complexes*)

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; * $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ (avec $z' \neq 0$).
- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

4) <u>Sur les nombres complexes sous forme exponentielle</u> : $z = r\,e^{i\alpha}$ et $z' = r'\,e^{i\alpha'}$

(*Outils pour effectuer des opérations algébriques sur les nombres complexes sous forme exponentielle*)

- $\bar{z} = r\,e^{-i\alpha}$.
- $z \times z' = (r\,e^{i\alpha}) \times (r'\,e^{i\alpha'}) = (r \cdot r')\,e^{i(\alpha+\alpha')}$.
- $z^n = (r\,e^{i\alpha})^n = r^n\,e^{in\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$. $(z' \neq 0)$

5) <u>avec les arguments</u> : $(z \neq 0$ et $z' \neq 0)$

(*Outils pour effectuer des calculs algébriques avec les arguments de nombres complexes*)

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\arg(z' - z) = (\vec{e_1}, \overrightarrow{MM'}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, z l'affixe du point M et z' celui du point M'.

V) <u>Formules</u>

(*Outils pour calculer la puissance entière d'un nombre complexe sous forme trigonométrique et/ou pour effectuer des transformations sur des formules trigonométriques (linéarisation)*)

1) <u>Formule de Moivre</u>

- $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$; on en déduit :
- $(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$; pour tout naturel non nul n.

2) <u>Formules d'Euler</u>

- $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
- $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

<u>Exemple</u> : 1) Calculer $\cos 5x$ (respectivement $\sin 5x$) en fonction des puissances de cosinus (respectivement sinus).

2) Calculer $\cos^5 x$ en fonction des cosinus des arcs multiples de x. (linéariser $\cos^5 x$)

3) Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$.

<u>Solution</u> : 1) Calculons $\cos 5x$ (respectivement $\sin 5x$) en fonction des puissances de cosinus (respectivement sinus).

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$ d'après Moivre. D'autres parts, en développant selon le binôme de Newton et en tenant compte que $(i)^{4p+r} = i^r$; $r = 0, 1, 2, 3$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x + i\sin x)^5 = i\sin^5 x + 5\cos x.\sin^4 x - 10i\cos^2 x.\sin^3 x$$
$$-10\cos^3 x.\sin^2 x + 5i\cos^4 x.\sin x + \cos^5 x$$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \left[\cos^5 x - 10\cos^3 x\,(1-\cos^2 x) + 5\cos x\,(1-\cos^2 x)^2\right]$$
$$+ i\left[\sin^5 x - 10\sin^3 x\,(1-\sin^2 x) + 5\sin x(1-\sin^2 x)^2\right]$$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = (16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x) + i\,(16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x)$$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$$

On en déduit que :

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$$

2) Calculons $\cos^5 x$ en fonction des cosinus des arcs multiples de x.

$$\cos^5 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{i5x} + 5e^{i3x} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} + e^{-i5x}\right);$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{32}\left[\left(e^{i5x} + e^{-i5x}\right) + 5\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

3) Linéarisons $\cos^2 x \sin^3 x$.

$$\cos^2 x \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 . \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32i}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right)\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right)$$

$$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32i}\left[\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right)-\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)-2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]$$

$$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{32i}\left(2i\sin 5x-2i\sin 3x-4i\sin x\right)=-\frac{1}{16}\left(\sin 5x-\sin 3x-2\sin x\right)$$

$$\cos^2 x \sin^3 x = -\frac{1}{16}\left(\sin 5x-\sin 3x-2\sin x\right).$$

VI) Equations dans $\mathbb{C}$

(*Outils pour déterminer les racines carrées, les racines n*[ième] *d'un nombre complexe ; pour résoudre des équations du second degré dans* $\mathbb{C}$).

1) Racines carrées de $a + bi$ (a et b étant des réels)

- $x + iy$ (avec x, y des réels) est une racine carrée du nombre complexe $a + bi$, signifie que : $(x + iy)^2 = a + bi$; ce qui signifie que : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ (xy)\times b > 0 \end{cases}$

2) Racines n-ième de $Z = R\, e^{i\theta}$

- $z = r\,e^{i\alpha}$ $(r > 0)$; z est une racine n-ième de Z, signifie que :

$z^n = Z$, signifie que : $r^n e^{in\alpha} = Re^{i\theta}$; alors : $r = \sqrt[n]{R}$ et $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ $(k \in [0 ; n-1])$

3) Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$. (a, b, c des réels ou non).

- $\Delta \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} * \ \Delta \geq 0,\ alors :\ z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ * \ \Delta < 0,\ alors :\ z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad et \quad z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \overline{z_1} \end{cases}$

- $\Delta \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} * \ \text{Déterminer une racine carrée } \delta \text{ de } \Delta \text{ ; } \delta^2 = \Delta. \ (\delta \text{ un nombre complexe}). \\ * \ \text{Les racines sont alors : } z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \end{cases}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z = \dfrac{z-i-2}{z+i}$.

Solution : L'équation $z = \dfrac{z-i-2}{z+i}$ n'a de sens dans $\mathbb{C}$ que si $z \neq -i$. Dans cette condition :

$z = \dfrac{z-i-2}{z+i}$ équivaut à $z^2 + (-1+i)z + 2 + i = 0$; $\Delta = -8-6i$; soit $\delta = x + iy$ tel que

$\delta^2 = \Delta$; c'est-à-dire $(x + i\,y)^2 = -8 - 6i$; donc $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ x\,y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ et $y = -3$; d'où

$\delta = 1 - 3i$; on a donc $z_1 = \dfrac{1 - i - 1 + 3i}{2} = i$ et $z_2 = \dfrac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i$. $S_{\mathbb{C}} = \{i, 1 - 2i\}$

VII) Applications géométriques.

1) Transformations affines et nombres complexes.

(*Outils pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une translation, d'une rotation de centre O ou d'une homothétie connaissant l'écriture complexe ; ou pour déterminer l'écriture complexe d'une de ces transformations*)

Soit M (z) et M' (z') deux points du plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Application complexe: $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$	**Transformation affine associée.** **T :** $\mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$	**Nature de la transformation affine T associée à** f
$z \mapsto z'$ tel que : $z' = z + b$ (avec $b \in \mathbb{C}$)	$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = z + b$: ("écriture complexe" de T) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$:("écriture géométrique" de T) où $\vec{u}$ a pour affixe b	translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur d'affixe b.
$z \mapsto z'$ tel que : $z' = e^{i\theta} z$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$)	$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = e^{i\theta} z$.: ("écriture complexe" de T) $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta + 2k\pi \end{cases}$ ("écriture géométrique" de T)	rotation de centre O et d'angle θ
$z \mapsto z'$ tel que : $z' = k\,z$ (avec $k \in \mathbb{R}^*$)	$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = k\,z$ ("écriture complexe" de T) $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ ("écriture géométrique" de T)	Hométhétie de centre O (0, 0) et de rapport k

2) Interprétation géométrique du nombre complexe $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

(*Outils pour interpréter géométriquement le module et l'agument du nombre complexe* $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$; z_A *,* z_B *et* z_C *étant les affixes des points A, B et C respectivement*)

$$\begin{cases} \bullet \left| \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \dfrac{AC}{AB} \\ \bullet \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi \quad (k \text{ entier relatif}) \end{cases}$$

3) Nombres complexes et configurations dans le plan

(*Outil pour déterminer la nature exacte d'un triplet de points A, B, C*)

Caractérisations complexes	Interprétations géométriques	Configurations
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\theta}$ $(0 < \theta < \pi \ ;\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2})$	$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\theta + 2k\pi \end{cases}$ $(0 < \theta < \pi \ ;\ \theta \neq \dfrac{\pi}{2})$	*ABC* est un triangle isocèle de sommet *A*.
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$	$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$	*ABC* est un triangle rectangle isocèle en *A*.
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = yi$ (*y* réel non nul) (*Z* est un imaginaire pur)	$\begin{cases} AC = \lvert y \rvert AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ $(AB) \perp (AC)$	*ABC* est un triangle rectangle en *A*.
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	$\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$	*ABC* est un triangle équilatéral.
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = a$ (*a* réel non nul) (*Z* est un réel non nul).	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$	Les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

4) <u>Ensembles de points ou lieux géométriques</u>

(*Outil pour déterminer la nature d'un ensemble de points M*)

A et *B* sont deux points fixés d'affixes respectives z_A et z_B ; *M* est le point d'affixe *z*, du plan.

Ensemble (E) des points *M*(*z*) tels que :	Interprétations géométriques.	Nature de l'ensemble (E)
$\left\lvert \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right\rvert = 1$	$AM = BM$	(E) est la médiatrice du segment [*AB*].
$\dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathbb{R}^*$ ou $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$	$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ $= 0\ (\pi)$	(E) est la droite (*AB*) privée des points *A* et *B*.
$\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 0\ (2\pi)$	$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0\ (2\pi)$	(E) est la droite (*AB*) privée du segment [*AB*]
$\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \pi\ (2\pi)$	$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi\ (2\pi)$	(E) est le segment [*AB*] privé des points *A* et *B*.
$\dfrac{z - z_A}{z - z_B} = yi \ (y \in \mathbb{R}^*)$ ou $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$	$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$	(E) est le cercle de diamètre [*AB*] privé des points *A* et *B*.
$\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$	$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$	(E) est l'un des demi-cercles de diamètre [*AB*] privé des points *A* et *B* ; l'orientation du plan permet de le désigner.

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 3-1

1) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z = (3 + 2i)(1 - i) - (2 - i)^2 + \overline{\left(\dfrac{5-5i}{1+2i}\right)}$; b) $z = -\dfrac{1}{i} + \dfrac{2-i}{2+i} - \dfrac{4i}{3-i} + \dfrac{2+3i}{1-i}(1+i)$

c) $z = \dfrac{(2-3i)(1-2i)}{(2+i)^2} + \dfrac{(1-i)(2+i)}{\dfrac{-3+i}{1+i}}$; d) $z = (1+2i)^2 - \dfrac{2-i}{1+i} + \overline{\left(i(-1+i)(1-2i)\right)}$

2) Donner dans chacun des cas suivants, la forme algébrique, la forme trigonométrique puis la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z = \dfrac{3+i}{1-i} + (1 + i)^4 - 2(-1 + i) - i\sqrt{3}$; b) $z = \dfrac{\dfrac{1+i}{1-i}}{\dfrac{2-i}{1+i} + 1}$

c) $z = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}{1+i}$; d) $z = \left[\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - i\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

Exercice 3-2

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes :

1) a) $(1 - 2i)(z + i) + 1 - 4i = (1 - iz)(1 + i)$; b) $\dfrac{z+i-1}{z-i} = 1 + i$

2) a) $2z - \bar{z} = 3 - 6i$; b) $\bar{z}\,\dfrac{1+i}{i} + iz - 2 + 3i = 1 - i$. (On pourra écrire $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$)

3) a) $-z^2 + 5z - 6 = 0$; b) $2z^2 - 3z + 2 = 0$; c) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$

d) $iz^2 + (1 - i)z + 1 + 2i = 0$; e) $(1 + i)z^2 - (3 + 4i)z + 2 + 3i = 0$.

Exercice 3-3

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$ et 2.

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 4z$.

Le point M' est appelé l'image de M.

1) Faire une figure et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?
3) Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.
4) a)Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre arg $(z'+4)$ et arg $(z - 2)$.

   c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2 ?

5) Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

   a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}; \overrightarrow{IE}\right)$.

   b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}; \overrightarrow{JE'}\right)$.

   c) Construire à la règle et au compas, le point E' sur la figure sans déterminer son affixe.

Exercice 3-4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité : 2 cm). On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1) Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2) Placer les points *A*, *B* et *C* dans le repère.
3) Démontrer que le triangle *ABC* est équilatéral.

Partie B

Soit *f* l'application qui, à tout point *M* du plan d'affixe *z*, associe le point *M* ' d'affixe $z' = \frac{1}{3} i z^2$

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par *f* aux points *O*, *A*, *B* et *C*.

1) a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

   b) Placer les points A', B' et C'.

   c) Démontrer l'alignement des points *O*, *A* et *B*' ainsi que celui des points *O*, *B* et *A*'.

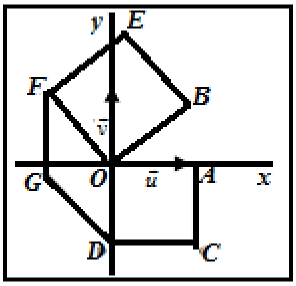
2) Démontrer que si un point *M* (*z*) appartient à la droite (*AB*) alors son image *M* ' (*z'*) par *f* appartient à une parabole dont on précisera son équation. (On ne demande pas de tracer cette parabole).

Exercice 3-5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On place dans ce repère, les points *A* d'affixe 1, *B* d'affixe *b* où *b* est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.

On construit à l'extérieur du triangle *OAB* les carrés directs *ODCA* et *OBEF* comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1) Déterminer les affixes *c* et *d* des points *C* et *D*.
2) On note *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer l'écriture complexe de *r*.
   b) En déduire que l'affixe *f* du point *F* est *i b*.
   c) Déterminer l'affixe *e* du point *E*.
3) On appelle *G* le point tel que le quadrilatère *OFGD* soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe *g* du point *G* est égal à *i* (*b* – 1).
4) Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire la nature exacte du triangle *EGC*.

Exercice 3-6 : (Bac technologique Métropole)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit *A* le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

   b) Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $r\,e^{i\theta}$ où *r* est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c) Placer le point A dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2) Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a) Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $r\,e^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b) Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c) Placer le point B dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3) Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4) Soit C le point d'affixe $z_C = z_A\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b) Placer le point C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

c) Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d) Établir l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

<u>Exercice 3-7</u> (Bac – D)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) Soit K, L, M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$; $z_L = 1 - i$; $z_M = -i\sqrt{3}$.

Placer ces points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$).

3) a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L.

Vérifier que l'affixe z_N du point N est $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.

Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

c) La translation de vecteur d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B.

Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.

4) a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.

c) En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

<u>Exercice 3-8</u>

$\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{2}\left(z + i\,\bar{z}\right)$.

1) On pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ avec x, y, x' et y' des réels.

a) Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x + y)$.

b) En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

d) Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a) Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + i$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b) Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c) $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d) Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2} i z_3$.

e) En déduire que $MM' = \frac{1}{2} OM_3$.

3) Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2} OM$.

4) Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$

Exercice 3-9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité 4 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1) Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2) a) Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$.

b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3) Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} i$.

a) Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

b) Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4) On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

a) Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b) Déterminer l'affixe du point N.

5) On désigne par M' le point du plan dont l'affixe $z_{M'}$ vérifie $\left(z_{M'} - z_B\right) = \left(z_M - z_B\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$

a) Déterminer l'affixe $z_{M'}$ du point M'.

b) Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

Exercice 3-10 :

Partie A

1) Calculer $\delta = \left(1+\sqrt{3}+2i\right)^2$

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$z^2 - \left(3+\sqrt{3}\right)z + \left(3+\sqrt{3}\right) - i\left(1+\sqrt{3}\right) = 0$

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2+\sqrt{3}+i$

1) Déterminer le module et un argument de z_A.

2) a) Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

b) Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) En déduire la forme exponentielle de z_B.

3) On note B_1 l'image du point *B* par la rotation ***r*** de centre *O* et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

a) Déterminer l'affixe du point B_1.

b) En déduire que le point B_1 est le symétrique du point *B* par rapport à l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$.

4) Soit *M* un point du plan. On note M_1 l'image du point *M* par la rotation *r* et *M* ' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$.

On désigne par (*E*) l'ensemble des points *M* du plan tels que *M* ' = *M*.

a) Montrer que les points *O* et *B* appartiennent à l'ensemble (*E*).

b) On suppose que le point *M* est distinct du point *O*.

Son affixe *z* est égale à $\lambda e^{i\theta}$ où λ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe *z*' du point *M'* est égale $\lambda e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que *M* appartienne à l'ensemble (*E*).

c) Déterminer l'ensemble (*E*).

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 3-11

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes :

a) $z^2 - z + 1 = 0$ et b) $z^2 - 4z + 1 = 0$.

2) On considère les équations (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ et

(E') : $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 5(z + \dfrac{1}{z}) + 6 = 0$.

a) Vérifier que le nombre 0 n'est pas solution de l'équation (E).

b) Montrer que les équations (E) et (E') ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$.

c) On pose $u = z + \dfrac{1}{z}$; calculer $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ en fonction de *u*.

d) Montrer que *u* est solution de l'équation (E'') : $u^2 - 5u + 4 = 0$.

e) Résoudre l'équation (E''), puis en déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3-12 : (Bac S La Réunion)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. Soit A le point de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) a) Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2) a) Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
b) Construire les points A, B et C dans le repère.
c) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.
a) Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.
b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4) a) Donner « l'écriture complexe » de la transformation h.
b) Calculer $z_A + z_B + z_C$; puis en déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.
c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

Exercice 3-13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 1 cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$. On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2) On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 - 2i$ et $b = -a$.
   a) Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.
   b) Déterminer l'affixe c du point C, image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   c) On note D le point d'affixe d vérifiant $(d-a) = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$; vérifier que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6i$.
   d) Placer les points C et D sur le graphique.
   e) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3) α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le point du plan défini par $\overrightarrow{G_\alpha A} - \overrightarrow{G_\alpha B} + \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{O}$.
   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.
   b) En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.
   c) Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = D$?
4) On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.
   Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 4\sqrt{2}$

Exercice 3-14 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$.

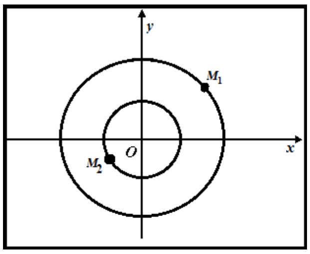
1) Montrer que l'affixe du point I est $\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

2) a) Donner une relation entre les modules de z et z'.
   b) Donner une relation entre leurs arguments.
   Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
   c) Placer le point N_1 image de M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.
   d) Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M'_1, puis le point I_1 milieu de segment $[M_1M'_1]$.
   e) Effectuer cette construction.

3) Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.
   a) Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.
   Sur la figure jointe est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
   b) Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question 3. a), on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2M'_2]$.
   c) Effectuer cette construction.
   d) Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit (C).

4) Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.
   a) Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.
   b) Développer $(z - 2i)^2 + 3$.
   c) Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est 2i.

5) Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x + iy$ (x et y réels).
   a) Exprimer en fonction de x et y la partie imaginaire de l'affixe de I.
   b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.
   c) Déterminer l'ensemble F des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.



Exercice 3-15 (Bac –D)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3) Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe z_3 du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport –3.

b) Déterminer l'affixe z_4 du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) Placer dans le repère les points A, M_1, M_2, M_3, M_4.

d) Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e) Soit I le milieu du segment $[M_3 M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que le quadrilatère $M_1 M_3 M_5 M_4$ est un carré.

Exercice 3-16

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1) Soit d le nombre complexe défini par : $d = \frac{1+3i}{1-i} + \frac{5-6i}{i} + (1-i)^3 + (3-2i)(2-i)$.

   a) Ecrire d sous forme algébrique, puis déterminer les racines carrées de d.

   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - (2-i)z + 2 + 2i = 0$.

   On notera z_1 et z_2 les solutions avec $\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$.

2) On désigne par A et B les points du plan d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + 2i$.

   a) Déterminer l'affixe z_C du point C, dont l'image par la translation t de vecteur d'affixe $3i$ est le point B.

   b) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

   c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

3) On considère l'application f de ($\mathcal{P}$) dans ($\mathcal{P}$) qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z-2-2i}{z-1+i}$ et $z \neq 1-i$.

   a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f c'est à dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(M) = M$.

   b) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.

   c) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

      c_1) z' soit de module 1 ;

      c_2) z' soit un réel strictement négatif ;

      c_3) z' soit un imaginaire pur ; avec $\mathrm{Im}(z') < 0$.

Exercice 3-17 : (Bac - D)

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1) On considère les points A, B et C distincts et d'affixes respectives a, b et c.

   a) Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$.

   b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.

2) a) Placer les points A_1, B_1 et C_1 d'affixes respectives $a_1 = 2$, $b_1 = i\sqrt{3}$ et $c_1 = -4 + 3i\sqrt{3}$.

   b) Montrer à l'aide de la propriété précédente, que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

3) On considère les points A_2, B_2, C_2 ; A_3, B_3, C_3 tels que les quadrilatères $OA_1A_2A_3$; $OB_1B_2B_3$ et $OC_1C_2C_3$ soient des carrés directs.

   a) Tracer les carrés $OA_1A_2A_3$; $OB_1B_2B_3$ et $OC_1C_2C_3$ dans le repère.

b) Donner les affixes a_3 et b_3 des points A_3 et B_3 ; puis les affixes a_2 et b_2 des points A_2 et B_2.

c) En considérant la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$; calculer l'affixe c_3 du point C_3.

d) En déduire que les points A_3, B_3 et C_3 sont alignés.

4) a) Déterminer le réel x tel que : $x\overrightarrow{C_2O}+\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{C_2C_3}=\vec{O}$.

b) Calculer l'affixe c_2 du point C_2.

c) Montrer que les points A_2, B_2 et C_2 sont alignés.

<u>Exercice 3-18</u>

1) Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$z^2 - 4\sin\alpha\ z + 4 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions.

b) Calculer le module et un argument de z_1 et z_2, puis mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Calculer S = $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ et S' = $(z_1)^4 + (z_2)^4$ en fonction de α.

Pour quelles valeurs de α a-t-on S' = −16 ?

2) Dans cette partie on prend $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$).

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; et la transformation f du plan complexe (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $\frac{z'}{z}=\frac{z_A}{z_B}$.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon 2.

b) Placer les points A et B, et tracer le cercle (Γ) dans le repère.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

d) Soit A' l'image de A par f ; déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A'.

e) Donner la nature exacte du triangle $AA'B$.

f) Déterminer l'image du triangle $AA'B$ et celle de la droite (AB) par la transformation f.

<u>Exercice 3-19</u>

Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{e_1},\vec{e_2}$), on considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives 1, i, −1 et $-i$.

À tout point M d'affixe z, distinct des points A, B, A' et B', on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles respectivement en M_1 et M_2, avec $(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$.

1) a) Faire une figure qui sera complétée par la suite. (Placer le point M à abscisse et ordonnée positives.

b) Justifier les égalités $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

c) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$.

2) Dans cette question, on se propose de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a) Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$.

b) En déduire l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) dans le repère.

c) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

d) Montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.

e) En déduire l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$.

f) Tracer l'ensemble (Γ) dans le repère.

g) En déduire les deux points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral et placer ces points sur la figure.

Exercice 3-20

Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$), on considère les points A, B et M d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -2i$ et z.

Soit f l'application de (P) \ $\{A\}$ dans (P) qui, à tout point $M(z)$ ($z \neq i$), associe le point M' (z') tel que $z' = \dfrac{2z}{iz+1}$.

1) a) Déterminer les points invariants par l'application f.
   b) Montrer que $(z' + 2i)(z - i) = 2$.

2) Pour tout z ($z \neq i$), on désigne par r et θ respectivement le module et un argument de $z - i$ par r' et θ' respectivement le module et un argument de $z' + 2i$.
   a) Interpréter géométriquement r et θ à l'aide des points A et M.
   b) Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ.
   c) Interpréter géométriquement r' et θ' à l'aide des points B et M'.

3) Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 2.
   a) Montrer que si M appartient au cercle (C), son image M' par f appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Le cercle (C') est-il l'image du cercle (C) par f ? Justifier la réponse.

4) Soit C le point d'affixe $1 + (1 + \sqrt{3})\, i$.
   a) Montrer que C appartient à (C).
   b) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté ($\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}$).
   c) Tracer les cercles (C) et (C') et placer le point C dans le repère.
   d) En utilisant les questions précédentes, construire l'image C' du point C par f.

Exercice 3-21

Dans le plan complexe ($\mathcal{P}$) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note a le nombre complexe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{a}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe a.

1) a) Tracer le cercle ($\mathcal{C}$), placer le point A dans le repère et compléter la figure par la suite.
   b) Démontrer que $a^2 - 4a = 2\bar{a} - 8$.
   c) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives a et $\bar{a}$ appartiennent à ($\mathcal{C}$).

2) Soit D un point du cercle ($\mathcal{C}$) d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

a) Déterminer l'affixe z_E du point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Justifier que $z_E = a e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Déterminer l'affixe z_F du point F en fonction de a et de θ.

b) Déterminer l'affixe z_G du point G en fonction de a, de θ et de $\bar{a}$.

c) Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{a}{2}$

d) En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4) On se propose de déterminer une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

a) Montrer que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

b) Montrer que $3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

c) Etudier le sens de variations de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et dresser son tableau de variations.

d)Pour quelle affixe du point D la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale ?

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 3-1

1) *Règles de calcul dans* $\mathbb{C}$
2) *Règles de calcul dans* $\mathbb{C}$ *; Formules trigonométriques ; Passage d'une forme à une autre.*

Solutions

1) Donnons la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z=(3+2i)(1-i)-(2-i)^2+\overline{\left(\frac{5-5i}{1+2i}\right)}=5-i-3+4i+\frac{5+5i}{1-2i}=2+3i+(1+i)(1+2i)=1+6i$

b) $z=-\frac{1}{i}+\frac{2-i}{2+i}-\frac{4i}{3-i}+\frac{2+3i}{1-i}(1+i)=i+\frac{(2-i)^2}{5}-\frac{4i(3+i)}{10}+\frac{(2+3i)(1+i)^2}{2}=-2+i$

c) $z=\frac{(2-3i)(1-2i)}{(2+i)^2}+\frac{(1-i)(2+i)}{\frac{-3+i}{1+i}}=\frac{-4-7i}{3+4i}+\frac{2(2+i)}{-3+i}=\frac{-40-5i}{25}+\frac{-10-10i}{10}=\frac{-13-6i}{5}$

d) $z=(1+2i)^2-\frac{2-i}{1+i}+\overline{i(-1+i)(1-2i)}=-3+4i-\frac{1-3i}{2}+(-i)(-1-i)(1+2i)$

$=\frac{-7+11i}{2}+(-3-i)=-\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i$

2) Donnons dans chaque cas, la forme algébrique, la forme trigonométrique puis la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $z=\frac{3+i}{1-i}+(1+i)^4-2(-1+i)-i\sqrt{3}=\frac{(3+i)(1+i)}{2}+(2i)^2+(2-2i)-i\sqrt{3}=-1-i\sqrt{3}$

$$z=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

b) $z=\frac{\frac{1+i}{1-i}}{\frac{2-i}{1+i}+1}=\frac{\frac{1}{2}(2i)}{\frac{1}{2}(2-i)(1-i)+1}=\frac{2i}{3-3i}=\frac{2i(1+i)}{3(2)}=\frac{-1+i}{3}$;

$$z=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

c) $z=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1+i}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right](1-i)$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}i\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$d)\ z=\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right](1+i\sqrt{3})=2\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z=2\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]+$$

$$2i\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z=2\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)-i\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-i\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$z=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3-2

1)Règles de calcul dans ℂ
2)Règles de calcul dans ℂ ; Egalité de deux nombres complexes
3)Résolution d'équations du second degré dans ℂ.

Solutions

Résolvons dans ℂ

1)

$a)$ $(1-2i)(z+i)+1-4i=(1-iz)(1+i)$; $z-2iz+3-3i=z-iz+1+i$

$iz=2-4i$; *donc* $z=-4-2i$

$b)$ $\dfrac{z+i-1}{z-i}=1+i$; $z+i-1=(z-i)(1+i)$; $z+i-1=z+iz+1-i$;

$iz=-2+2i$; *donc* $z=2+2i$

2)

$a)$ $2z-\bar{z}=3-6i$; Posons $z=x+yi$; $\bar{z}=x-yi$; $2(x+yi)-(x-yi)=3-6i$

$x+3yi=3-6i$; $x=3$ *et* $y=-2$; *donc* $z=3-2i$

$b)$ $\bar{z}\dfrac{1+i}{i}+iz-2+3i=1-i$; Posons $z=x+yi$; $\bar{z}=x-yi$;

$(x-yi)(1-i)+(xi-y)-2+3i=1-i$; $(x-2y)-yi=3-4i$;

$x-2y=3$ *et* $y=4$; $x=11$ *et* $y=4$; *donc* $z=11+4i$

3)

$a)$ $-z^2+5z-6=0$; $\Delta=1$; *donc* $z=\dfrac{-5-1}{-2}=3$ *ou* $z=\dfrac{-5+1}{-2}=2$; $z=2$ *ou* $z=3$

$b)$ $2z^2-3z+2=0$; $\Delta=-7=7i^2$; donc $z=\dfrac{3-i\sqrt{7}}{4}$ ou $z=\dfrac{3+i\sqrt{7}}{4}$

$c)$ $z^2-3iz-3+i=0$; $\Delta=-9+12-4i=3-4i$; soit $\delta=x+yi$ tel que $\delta^2=\Delta$

on a donc $\begin{cases}x^2-y^2=3\\x^2+y^2=5\end{cases}$ avec $xy<0$; ($x=2$ et $y=-1$) ou ($x=-2$ et $y=1$)

donc $\delta=2-i$ *ou* $\delta=-2+i$; alors $z=\dfrac{3i+2-i}{2}=1+i$ ou $z=\dfrac{3i-2+i}{2}=-1+2i$

$d)$ $iz^2+(1-i)z+1+2i=0$; $\Delta=-2i+8-4i=8-6i$; soit $\delta=x+yi$ tel que $\delta^2=\Delta$

on a donc $\begin{cases}x^2-y^2=8\\x^2+y^2=10\end{cases}$ avec $xy<0$; ($x=3$ et $y=-1$) ou ($x=-3$ et $y=1$)

$$donc\ \ \delta = 3 - i\ \ ou\ \ \delta = -3 + i\ ;\ alors\ \ z = \frac{-1 + i + 3 - i}{2i} = -i\ \ ou\ \ z = \frac{-1 + i - 3 + i}{2i} = 1 + 2i$$

$e)$ $(1+i)z^2 - (3+4i)z + 2 + 3i = 0$; $\Delta = -7 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i$; *soit* $\delta = x + yi$

tel que $\delta^2 = \Delta$; $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ *avec* $xy > 0$; $(x = 1\ et\ \ y = 2)\ ou\ (x = -1\ et\ \ y = -2)$

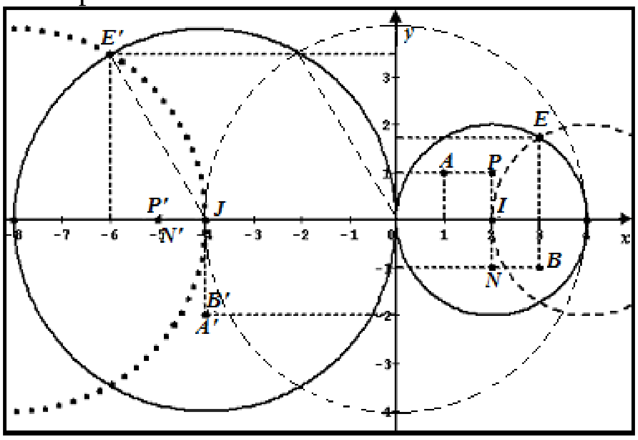
$$donc\ \ \delta = 1 + 2i\ ou\ \ \delta = -1 - 2i\ ;\ alors\ \ z = \frac{3 + 4i + 1 + 2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{2}\ \ ou\ \ z = \frac{3 + 4i - 1 - 2i}{2(1+i)} = 1$$

Exercice 3-3

1) Repère du plan ; Interprétation géométrique d'un nombre complexe.
2) Règles de calculs dans $\mathbb{C}$.
3) Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
4) Règles de calculs dans $\mathbb{C}$. *; Condition d'appartenance d'un point à un cercle*
5) Distance de deux points (dans $\mathbb{C}$ *ou dans le plan) ; argument d'un nombre complexe non nul.*

Solutions

1) Figure dans le plan complexe.



2) Déterminons les affixes des points *A'* et *B'* images respectives des points *A* et *B*.
L'image du point *A* d'affixe 1 + i est le point *A'* d'affixe $z_{A'} = -4 - 2i$: L'image du point *B* d'affixe 3 – *i* est le point *B'* d'affixe $z_{B'} = -4 - 2i$: On constate que les points *A'* et *B'* ont même affixe, ils sont confondus : *A' = B'*.

3) Déterminons les points qui ont pour image le point d'affixe –5.
On cherche les points *M* d'affixe *z* tels que leur image *M'* ait pour affixe – 5. On cherche donc à résoudre *z'* = – 5 ; *z'* = – 5 équivaut à $z^2 - 4z = -5$; donc $z^2 - 4z + 5 = 0$
Donc $z' = -5$ équivaut à $z = 2 - i$ ou $z = 2 + i$.
Les points ayant pour image le point d'affixe – 5 sont les points *N*(2 ; – 1) et *P*(2 ; 1).

4) a)Vérifions que pour tout nombre complexe *z*, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

$$z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$$

b) En déduisons une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque *z* est différent de 2, une relation entre arg $(z' + 4)$ et arg (*z* – 2).

$|z' + 4| = |(z-2)^2| = |z - 2|^2$ et pour $z \neq 2$; $\arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2)\ (2\pi)$

c) Voyons ce qu'on peut dire du point *M '* lorsque *M* décrit le cercle (*C*) de centre *I* et de rayon 2

Lorsque *M* décrit le cercle (*C*) de centre *I* et de rayon 2, $|z - 2| = 2$ donc $|z' + 4| = |z - 2|^2 = 2^2 = 4$ donc *M'* appartient au cercle (*C'*) de centre *J* d'affixe -4 et de rayon 4 ; et $\arg(z - 2) \in [0,\ 2\pi]$ donc $\arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2) \in [0,\ 4\pi]$ donc *M'* décrit complètement le cercle (*C'*) de centre *J* d'affixe -4, et il parcourt 2 fois le cercle (C') lorsque M parcourt une fois le cercle (C).

5) a) Calculons la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE}\right)$.

$$IE = \left|z_{\overrightarrow{IE}}\right| = \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2 \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{IE}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

b) Calculons la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{JE'}\right)$.

Le point E appartient au cercle de centre I et de rayon 2, donc d'après la question 4. c), son image E' appartient au cercle (C') de centre J et de rayon 4, $JE' = \left|z_{\overrightarrow{JE'}}\right| = 4$ et

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{JE'}\right) = 2\left(\vec{u}, \overrightarrow{IE}\right) = 2\frac{\pi}{3} + 4k\pi$$

c) Cf. graphique de la question 1.

Exercice 3-4

Partie A

1) 2) ; 3) Passage d'une forme à une autre ; Interprétation géométrique d'un nombre complexe. Distance de deux points dans le plan (par exemple)

Partie B

1) Calcul dans $\mathbb{C}$; Passage d'une forme à une autre ; Interprétation géométrique d'un nombre complexe ; Condition d'alignement de trois points.

2) Condition pour qu'un point appartienne à une courbe.

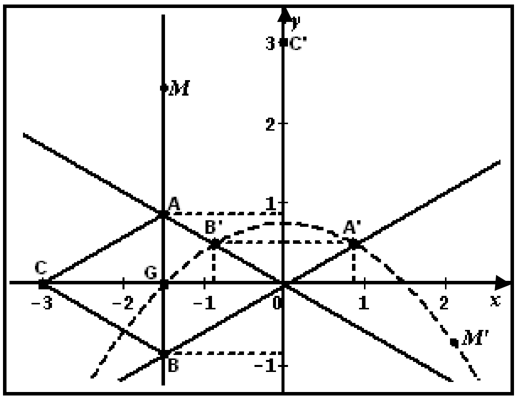
Solution

Partie A

1) Écrivons les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

$$z_A = \sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \;;\quad z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

2) Plaçons les points A, B et C dans le repère.



3) Démontrons que ABC est un triangle équilatéral.

$$AB = |z_A - z_B| = |z_A - \overline{z_A}| = |2\,\mathrm{Im}(z_A)| = \sqrt{3} \;;$$

$$AC = |z_A - z_C| = \sqrt{3} \text{ et } BC = |z_B - z_C| = \sqrt{3}$$

donc $AB = BC = AC$ d'où ABC est équilatéral

Partie B

1) a) Déterminons la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'

$$z_{A'} = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};\;\; z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}};\quad z_{B'} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}};\;\; z_{C'} = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) Voir figure.

c) Démontrons l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

$z_{B'} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} z_A$ donc *O*, *A* et *B'* sont alignés. $z_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} z_B$ donc *O*, *B* et *A'* sont alignés.

2) Démontrer que si *M* appartient à la droite (*AB*) alors *M* ' appartient à une parabole dont on précisera son équation.

Soit *M* un point de la droite (*AB*), alors $x_M = -\frac{3}{2}$, autrement dit z_M est de la forme

$z_M = -\frac{3}{2} + i\,y$; donc $x_{M'} = y$ et $y_{M'} = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}x_{M'}{}^2 + \frac{3}{4}$ d'où

M ' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

Exercice 3-5

1) *Propriété d'un carré.*
2) *Nombres complexes et transformations du plan ; Image d'un point par une rotation.*
3) *Propriétés du parallélogramme*
4) *Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$; Nombres complexes et configurations du plan.*

Solution

1) Déterminons les affixes *c* et *d* des points *C* et *D*.
Par lecture graphique en utilisant le fait que *ODCA* est un carré direct : $d = -i$ et donc $c = 1 - i$.

2) a) Déterminons l'écriture complexe de *r*.
L'écriture complexe d'une rotation de centre *O* et d'angle θ s'écrit : $z' = e^{i\theta} z$

ici $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ par conséquent l'écriture complexe de *r* est $z' = i\,z$.

b) En déduisons que l'affixe *f* du point *F* est *i b*.
OBEF est un carré direct donc *F* est l'image de *B* par la rotation *r* de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $z_F = i\,z_B$ autrement dit $f = i\,b$

c) Déterminons l'affixe *e* du point *E*.
OBEF est un carré donc $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OB}$ d'où $z_{\overrightarrow{FE}} = z_{\overrightarrow{OB}}$; donc $e - f = b$; on a alors
$e = b + f = b + i\,b = (1 + i)\,b$

3) Démontrons que l'affixe *g* du point *G* est égal à $i\,(b - 1)$.
OFGD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OD}$ d'où $z_{\overrightarrow{FG}} = z_{\overrightarrow{OD}}$ donc $g - f = d$;
d'où $g = d + f = -i + ib = i(b-1)$

4) Démontrons que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduisons la nature exacte du triangle *EGC*.

$\frac{e-g}{c-g} = \frac{(1+i)b - i(b-1)}{(1-i) - i(b-1)} = \frac{b+i}{1-bi} = \frac{i(-ib+1)}{1-ib} = i$; donc $\frac{EG}{CG} = \left|\frac{e-g}{c-g}\right| = |i| = 1$.

Alors $EG = CG$ d'où *EGC* est isocèle en *G* et $\left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}\right) = \arg\left(\frac{e-g}{c-g}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

et donc *EGC* est rectangle en *G*. En conclusion *EGC* est rectangle et isocèle en *G*.

Exercice 3-6

1) *Définition du module et d'argument d'un nombre complexe ; Passage d'une forme à une autre ; Interprétation géométrique de nombre complexe*
2) *Nombres complexes et Transformations du plan; Passage d'une forme à une autre ; Interprétation géométrique de nombre complexe.*
3) *Nombres complexes et configurations du plan ou distance de deux points dans le plan.*

4) Nombres complexes et Transformations du plan; Passage d'une forme à une autre ; Interprétation géométrique de nombre complexe.

Solution

1) a) Déterminons le module et un argument du nombre complexe z_A.

$$|z_A| = 2;\ \arg(z_A) = \theta \text{ tel que } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{donc } \theta = \frac{\pi}{3}\ (2\pi).$$

b) Écrivons le nombre complexe z_A sous la forme $r\,e^{i\theta}$. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) Point *A* dans le repère : (Voir figure en fin de corrigé de l'exercice)

2) a) Déterminons l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $r\,e^{i\theta}$

$$z_B = z_A\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} \text{ ; On a donc : } \theta = \frac{2\pi}{3};\ r = 2.$$

b) Écrivons le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

$$z_B = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}.$$

c) Placer le point *B* dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (Voir figure en fin de corrigé de l'exercice)

3) Montrons que le triangle *AOB* est équilatéral.

$$OA = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = |z_A| = 2;\ OB = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = |z_B| = 2;\ AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A| = 2$$

Donc les 3 côtés du triangle *OAB* ont même mesure ; par conséquent, *OAB* est un triangle équilatéral.

4) a) Déterminons par quelle transformation géométrique le point *C* est l'image du point *A* et précisons les éléments caractéristiques de cette transformation.

On a $|z_C| = |z_A|$; $\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 1$; donc $OA = OC$

$$\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi) \quad donc \quad \left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$$

On en conclut que *C* est l'image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) Plaçons le point *C* dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (Voir figure en fin de corrigé)

c) Écrivons le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

$$z_C = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

d) Établissons l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

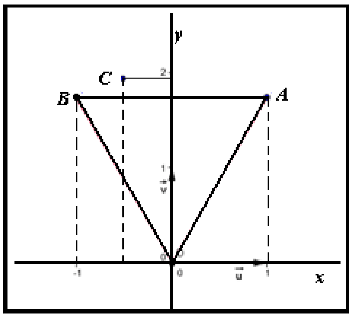
$$z_C = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$$

e) Déduisons des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

$$|z_C| = 2\ ;\ donc\ \ z_C = 2\left[\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)\right];\quad d'où\ \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\ \ et$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Figure :



Exercice 3-7

1) Equation du second degré dans ℂ.
2) Interprétation géométrique d'un nombre complexe.
3) Nombres complexes et Transformations du plan.
4) Milieu d'un segment (Coordonnées ou affixe) ; Calcul algébrique dans ℂ ; Nombres complexes et configurations du plan.

Solution

1) Résolvons dans ℂ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
$\Delta' = -1$; donc $z_1 = 1 + i$ *et* $z_2 = 1 - i$.

2) Soit *K*, *L*, *M* les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$; $z_L = 1 - i$; $z_M = -i\sqrt{3}$.
Plaçons ces points dans le repère. (Voir figure en fin de corrigé)

3) a) Vérifions que l'affixe z_N du point *N* est $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
$z_N = 2z_{L.} - z_M = 2 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$.

b) Déterminons les affixes respectives z_A et z_C des points *A* et *C*.
$z_A = z_M e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}$; $z_C = z_N e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2 - \sqrt{3}\right) + 2i$

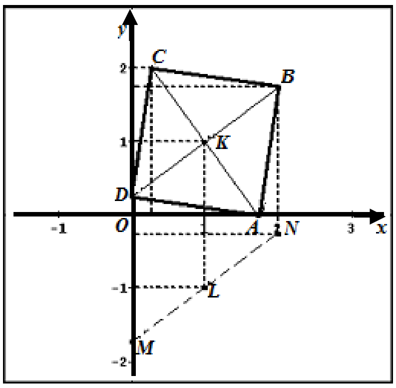
c) Déterminons les affixes respectives z_D et z_B des points *D* et *B*.
$z_D = z_M + 2i = i\left(2 - \sqrt{3}\right)$; $z_B = z_N + 2i = 2 + i\sqrt{3}$

4) a) Montrons que le point *K* est le milieu des segments [*DB*] et [*AC*].
$\frac{z_D + z_B}{2} = 1 + i = z_K$ *et* $\frac{z_A + z_C}{2} = 1 + i = z_K$

b) Montrons que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$. ; $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{4i - 2i\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} = i$

c) En déduisons la nature exacte du quadrilatère *ABCD*.
ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu *K*, de plus elles sont perpendiculaires (car $\arg\left(\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}\right) = \left(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$) et de même longueur ; $\left(\frac{KC}{KB} = 1\right)$; donc *ABCD* est un carré.

Figure



Exercice 3-8

1) *Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$; Condition d'appartenance d'un point à une droite ; Egalité de deux nombres complexes ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs dans le plan.*
2) *Interprétation géométrique de nombres complexes ; Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$;Propriétés de losange.*
3) *Condition pour que qu'un point appartienne à un cercle de centre donné.*
4) *Relations trigonométriques sur un triangle rectangle.*

Solution

1) a) Démontrons les égalités suivantes : $x'=\frac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\frac{1}{2}(x+y)$

$z'=\frac{1}{2}(z+i\,\bar{z})=x'+i\,y'=\frac{1}{2}(x+y)+i\,\frac{1}{2}(x+y)$; donc $x'=\frac{1}{2}(x+y)$et $y'=\frac{1}{2}(x+y)$.

b) En déduisons que le point M' appartient à la droite (OA).

Le point M' appartient à la droite d'équation $y = x$; c'est-à-dire donc à la droite (OA).

c) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

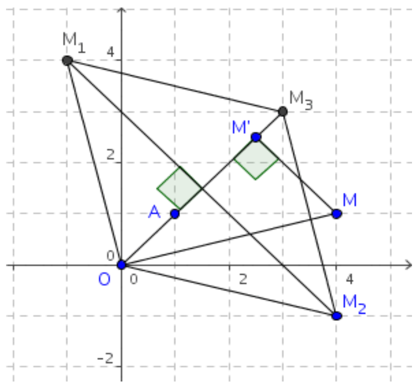
$M = M'$ équivaut à $z = z'$; L'ensemble des points M tels que $M = M'$ est la droite d'équation $y = x$; C'est à dire la droite (OA).

d) Démontrons que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

Pour tout point M du plan $z'-z=\frac{1}{2}(-x+y)+i\frac{1}{2}(x-y)$; $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{OA}=0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ *et* $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2) a) (voir figure)



b) Exprimons z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}z=i\,z$

$OM_1M_3M_2$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{M_2M_3}$ c'est-à-dire que $z_1=z_3-z_2$; Donc $z_3=i\,z+\bar{z}$.

c) Justifions si $OM_1M_3M_2$ est un losange.

$OM_1M_3M_2$ est un parallélogramme donc $OM_1M_3M_2$ serait un losange si et seulement si (OM_3) et (M_1M_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{OM_3}.\overrightarrow{M_1M_2}=0$.

Posons $z=x+i\,y$; $z_1=i\,z=-y+i\,x$; $z_2=\bar{z}=x-i\,y$; $z_3=(x-y)+i\,(x-y)$

Donc $\overrightarrow{OM_3}.\overrightarrow{M_1M_2}=(x-y)(x+y)+(x-y)(-x-y)=0$

Donc (OM_3) et (M_1M_2) sont perpendiculaires, $OM_1M_3M_2$ est un losange.

d) Vérifions que $z'-z=\frac{1}{2}i\,z_3$.

$$z'-z=\frac{1}{2}(z+i\,\bar{z})-z=\frac{1}{2}(i\,\bar{z}-z)=\frac{1}{2}\left[i\,(z_3-i\,z)-z\right]=\frac{1}{2}i\,z_3$$

e) En déduisons que $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.

On en déduit que $\left|z'-z\right|=\frac{1}{2}\left|z_3\right|$; *donc* $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.

3) Démontrons que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM'=\frac{1}{2}OM$.

Si M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O, alors on a $OM=OM_3=OM_2=OM_1$ et d'après le résultat de la question précédente, $MM'=\frac{1}{2}OM_3=\frac{1}{2}OM$. Réciproquement si $MM'=\frac{1}{2}OM$, on a $MM'=\frac{1}{2}OM_3=\frac{1}{2}OM$; donc $OM=OM_3$; M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $OM=OM_1$; de plus $z_2=\bar{z}$, $OM_2=OM$. On a alors $OM=OM_3=OM_2=OM_1$ donc M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O.

Conclusion M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM'=\frac{1}{2}OM$.

4) Donnons alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

D'après le résultat de la question *1. d)*, le triangle MOM' est rectangle en M', donc $\sin\left(\widehat{M'OM}\right)=\frac{MM'}{OM}=\frac{1}{2}$ et par conséquent $\widehat{M'OM}=\frac{\pi}{6}$

Exercice 3-9

2) a) Condition pour qu'un point appartienne à l'axe (Ox) et à un cercle donné.

b) Définition du diamètre d'un cercle dont on connait le centre.

3) a) Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$.

b) Interprétation géométrique de nombres complexes. Condition pour qu'un point appartienne à un cercle donné.

4) a) condition pour que deux droites soient parallèles.(2 droites perpendiculaires à une même droite)

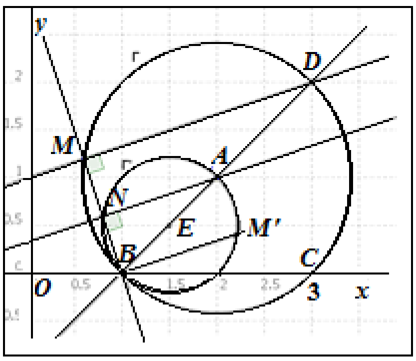
b) Théorème de Thalès ; Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$.

5) a) Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$.

b) Condition pour qu'un point appartienne à un cercle.

Solution

1) Figure complète :



2) a) Déterminons les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$.

$M(z)$ ($z = x + iy$) est point d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$ si et seulement si $y = 0$ et $(x-2)^2 + 1 = 2$. Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$ sont d'affixes 1 et 3.

b) Déterminons l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur (Γ)

Le point D est tel que le milieu de $[BD]$ est le point A. On a donc

$\dfrac{z_B + z_D}{2} = z_A$ d'où $z_D = 2z_A - z_B = 3+2i$

3) a) Calculons le nombre complexe $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$. $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{6+2i}{1-3i} = 2i.$

b) Interprétons géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduisons que le point M appartient au cercle (Γ).

On a : $\arg\left(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Donc le triangle MDB est rectangle en M. On en déduit que M appartient au cercle de diamètre $[BD]$ c'est-à-dire à (Γ)

4) a) Montrons que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

On a $(DM) \perp (BM)$; comme N appartient au cercle de diamètre $[AB]$, le triangle ABN est rectangle en N autrement dit $(BN) \perp (AN)$ de plus $N \in (BM)$ on en déduit que (DM) et (AN) sont perpendiculaires à une même droite, donc elles sont parallèles.

b) Déterminons l'affixe du point N.

Dans le triangle MDB, A est le milieu de $[BD]$ et $(DM) // (AN)$ donc (AN) coupe le côté $[BM]$ en son milieu. On a donc N milieu de $[BM]$, d'où $z_N = \dfrac{z_B + z_M}{2} = \dfrac{4+3i}{5}$.

5) a) Déterminons l'affixe $z_{M'}$ du point M'.

On a $(z_{M'} - z_B) = (z_M - z_B)e^{-i\frac{\pi}{2}}$ soit $z_{M'} = -i\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{5}i\right) + 1 + i = \dfrac{11}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

b) Montrons que le point M' appartient au cercle (Γ').

Soit E le centre du cercle (Γ') de diamètre $[AB]$; $z_E = \dfrac{z_B + z_A}{2} = \dfrac{3+i}{2}$.

Le cercle (Γ') a pour rayon $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; et $M'E = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc $M' \in (\Gamma')$.

Exercice 3-10

Partie A

1) *Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$*
2) *Equation du second degré dans $\mathbb{C}$.*

Partie B

1) *Module et argument d'un nombre complexe*
2) *Quotient de 2 nombres complexes. Passage d'une forme à une autre. Calcul algébrique.*
3) *Image d'un point par une rotation de centre O et d'angle donné. Symétrique d'un point par rapport à l'axe des abscisses.*
4) *Transformations du plan et nombres complexes.*

Solution

Partie A :

1) Calculons $\delta = \left(1+\sqrt{3}+2i\right)^2 = 4+2\sqrt{3}-4+4i\left(1+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}+4i\left(1+\sqrt{3}\right)$

2) Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$z^2-\left(3+\sqrt{3}\right)z+\left(3+\sqrt{3}\right)-i\left(1+\sqrt{3}\right)=0$

$\Delta = \left(3+\sqrt{3}\right)^2-4\left[\left(3+\sqrt{3}\right)-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}+4i\left(1+\sqrt{3}\right) = \left(1+\sqrt{3}+2i\right)^2$

Donc $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2+\sqrt{3}+i$.

Partie B

1) $|z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) a) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;

b) $\dfrac{z_B}{z_A} = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) On a donc ; $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

3) a) $z_{B_1} = e^{-i\frac{\pi}{6}}\,z_B = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}}$

b) $z_{B_1} = \overline{\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)} = \overline{z_B}$; donc B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$.

4) M est un point du plan. M_1 son image par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$. (E) est l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

a) B_1 est l'image de B par r et B est le symétrique de B_1 par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$ donc $B = B'$ et par conséquent B appartient à (E). $O_1 = r(O) = O$ et O est le symétrique de O_1 ($= O$) par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$. Donc O appartient à (E) ; d'où les points O et B appartiennent à (E).

b) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}\,z = \lambda e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$; alors $z' = \overline{z_1} = \lambda e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$;

M appartient à (E) si et seulement si $M' = M$; c'est-à-dire $z' = z$.

$z' = z$ équivaut à $\lambda e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = \lambda e^{i\theta}$; $e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = e^{i\theta}$; donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}-\theta+2k\pi$;

$\theta = \dfrac{\pi}{12}+k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) $M \in (E)$ équivaut à $M = O$ si $z = 0$ ou si $z \neq 0$, $\arg(z) = \theta = \dfrac{\pi}{12}+k\pi$; c'est-à-dire $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{12}+k\pi$; d'où $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)[\pi]$; ce qui donne $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right) = 0\,[\pi]$. Les points O, B et M sont alors alignés ; $M \in (OB)$. L'ensemble (E) est donc la droite (OB).

CHAPITRE 4

LIMITES ET CONTINUITE DE FONCTIONS

Le mot fonction est emprunté sous la forme simplifiée *funcion* (1370) au latin *functio* "accomplissement, exécution", en français courant.. C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, mais la première définition fut donnée par J. Bernouilli (1654-1705). Pour le symbole *f* (.), il a été introduit par Euler en 1734
Les mathématiques se sont d'abord intéressées aux limites de suites : on cherchait à savoir si, pour les grandes valeurs de l'indice, les termes de la suite se rapprochaient d'une valeur particulière, c'est-à-dire si, à partir d'un certain rang, on était aussi proche que l'on veut de cette valeur particulière. La notion « être proche » voudrait signifier « être dans un voisinage arbitrairement choisi ».
Ensuite est intervenue la notion de limite de fonction, initialement rattachée à la limite de suite. Pour chercher la limite d'une fonction quand la variable s'approche de a, on cherchait à déterminer la limite de la suite ($f(u_n)$) pour toute suite (u_n) dont la limite était a. La complexité de cette approche et la multiplicité des cas ont conduit à définir la notion de limite de fonction indépendamment de celle de limite de suite. Pour pouvoir manipuler la notion de limite et l'exploiter sans erreur, il a été nécessaire de la définir de manière plus précise et plus formelle.

C'est dans cet esprit que Cauchy, en 1821, pour faire comprendre l'idée de limite de fonction, affirmait : **« Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres »**.
C'est encore un peu flou, mais l'idée est là. Elle a ´été précisée par Weierstrass (1840-1860), qui a écrit la définition moderne.

La notion de **limite** est très intuitive malgré sa formulation abstraite. Pour les mathématiques, il convient de distinguer une limite en un point réel fini (pour une fonction numérique) et une limite en $+\infty$ ou $-\infty$ (pour une fonction numérique ou une suite).

- Les limites servent (entre autres) à définir les notions fondamentales de continuité et de dérivabilité et contribuent à la représentation graphique de fonction dans un repère donné.
- De nos jours, les limites de fonctions et/ou de suites sont utilisées en Finance, en médécine…

➢ Le point sur les limites de fonctions prépare l'étude de la fonction en vue de sa représentation graphique. Il serait alors important d'amener les élèves à illustrer graphiquement les limites de fonctions dans un repère donné. Et aussi à partir de la courbe représentative d'une fonction, les amener à retrouver son ensemble de définition, ses limites aux bornes de cet ensemble et éventuellement les asymptotes à la courbe.

➢ La continuité de fonction numérique à une variable, sur un intervalle, prépare également la construction de la courbe représentative de celle-ci dans un repère donné. (Car la courbe serait tracée d'un trait continu sans rupture sur cet intervalle). L'allure de la courbe serait précisée par l'étude de la dérivabilité de la fonction sur cet intervalle.

CE QU'IL FAUT RETENIR

A) LIMITES DE FONCTION

I) Notion de limites d'une fonction numérique.

1) Existence de limite d'une fonction numérique *f* en x_0 :

(*Outil pour justifier l'existence éventuelle de limite d'une fonction f en un point* x_0)

La notion de limite d'une fonction numérique *f* en x_0 n'a de sens que si :

- *f* est définie en x_0 ; (x_0 réel) ; ou,
- x_0 est une borne d'un intervalle où *f* est définie : ($]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, a]$ ou $]x_0, +\infty[$; x_0 fini ou non). En d'autres termes *f* doit être définie « au voisinage de x_0 » c'est-à-dire pour des *x* assez proches de x_0.

<u>Exemple</u> : La fonction *f* définie par : $f(x) = \sqrt{|2 - x^2| - 2}$; n'a pas de limite en 0 ; car $D_f =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$; *f* n'est pas définie « au voisinage de 0 » donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nexiste pas.

2) <u>Propriétés</u>

(*Outil pour déterminer la limite d'une fonction f en un point* x_0)

- Si $x_0 \in D_f$ et si *f* admet une limite finie *l* en x_0, c'est-à-dire si *f* est définie « au voisinage de x_0 », alors $l = f(x_0)$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ équivaut à $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - l\right) = 0$ équivaut à : (au voisinage de x_0), $f(x) = l + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. (x_0 fini ou non ; *l* un réel.)

II) <u>Opérations algébriques</u> : (Calcul pratique de limites de fonction en x_0)

(*Outils pour calculer la limite d'une fonction f en un point* x_0)

f et *g* sont deux fonctions numériques telles que $D_f \cap D_g \neq \Phi$; x_0 un réel, ou égal à $-\infty$ ou à $+\infty$, au voisinage duquel *f* et *g* sont définies.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$	**et si** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$	**alors**	$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) =$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) =$	$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$
l	$l' \neq 0$		$l + l'$	$l \times l'$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0		l	0	$\pm\infty$ si $l > 0$ et $0^{\pm}$ $\mp\infty$ si $l < 0$ et $0^{\pm}$
0	0		0	0	**on ne peut pas conclure**
$l \neq 0$	$\pm\infty$		$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $l > 0$ $\mp\infty$ si $l < 0$	0
0	$\pm\infty$		$\pm\infty$	**on ne peut pas conclure**	0
$\pm\infty$	$l' \neq 0$		$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $l' > 0$ $\mp\infty$ si $l' < 0$	$\pm\infty$ si $l' > 0$ $\mp\infty$ si $l' < 0$
$\pm\infty$	0		$\pm\infty$	**on ne peut pas conclure**	$+\infty$ si $0^{\pm}$ $-\infty$ si $0^{\mp}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$		$\pm\infty$	$+\infty$	**on ne peut pas conclure**
$\pm\infty$	$\mp\infty$		**on ne peut pas conclure**	$-\infty$	**on ne peut pas conclure**

- Les cas où on ne peut pas conclure, sont les formes indéterminées ; ce sont :
  $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Remarques

- À $+\infty$ ou à $-\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- À $+\infty$ ou à $-\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport de ses termes de plus haut degré.
- Si f est une fonction polynôme, ou une fonction rationnelle, ou une fonction irrationnelle, ou une fonction trigonométrique, ou une fonction obtenue par opérations sur ces fonctions citées, alors f admet en tout point $x_0 \in D_f$, une limite finie $l = f(x_0)$.
- Pour les fonctions trigonométriques, on admet la limite suivante : $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$.

Exemple : calculer en utilisant $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Solution : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{2x}{3x} \times \dfrac{3x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} = 1 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{3}$.

III) Enoncés admis

(*Outils pour calculer la limite d'une fonction f en un point* x_0)

1) Comparaison.

f, g, u et v sont des fonctions numériques. Au voisinage de x_0, (x_0 fini ou non) :

- Si $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. (Théorème des gendarmes ou des sandwichs)
- Si $|f(x) - l| \leq v(x)$ (l un réel) et si $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$. (l, l' des réels)

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Solution : $\forall x > 0$, on a :

$-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq 1$; donc $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \sqrt{x}$; et $\lim\limits_{x \to 0^+} -\sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et alors on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$.

2) Limite de fonctions composées: *f = v o u*

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = y_0$ et si $\lim\limits_{x \to y_0} v(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (v \circ u)(x) = l$.

  (x_0, y_0 et l finis ou non).

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1 + \cos x} - 1}{\cos x}$.

Solution : Posons $u(x) = \cos x$ et $v(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; on a $(v \circ u)(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \cos x} - 1}{\cos x}$ et la limite cherchée est $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (v \circ u)(x)$. Alors ; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} u(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ et

$\lim\limits_{x\to 0} v(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{2}$; donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (v\circ u)(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}-1}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

IV) <u>Asymptotes à la courbe (C_f) d'une fonction *f*. : Conséquences graphiques de limites</u>

(*Outils pour détrminer l'équation d'une asymptote, pour montrer qu'une droite est une asymptote à une coube d'une fonction f ; ou pour donner les conséquences graphiques de limite d'une fonction en un point* x_0)

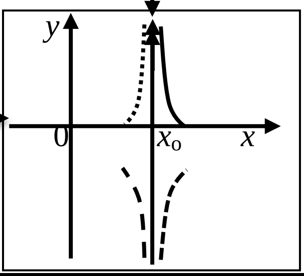
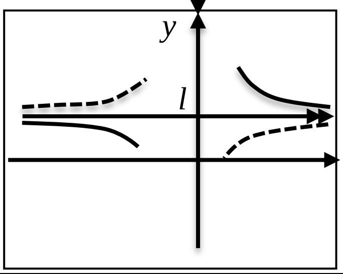
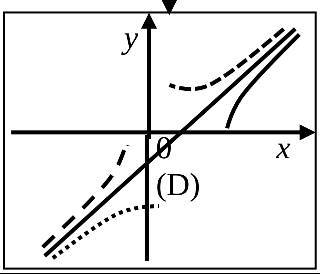
1) <u>Asymptotes à la courbe (C_f) d'une fonction *f*</u>

f est une fonction numérique ; (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

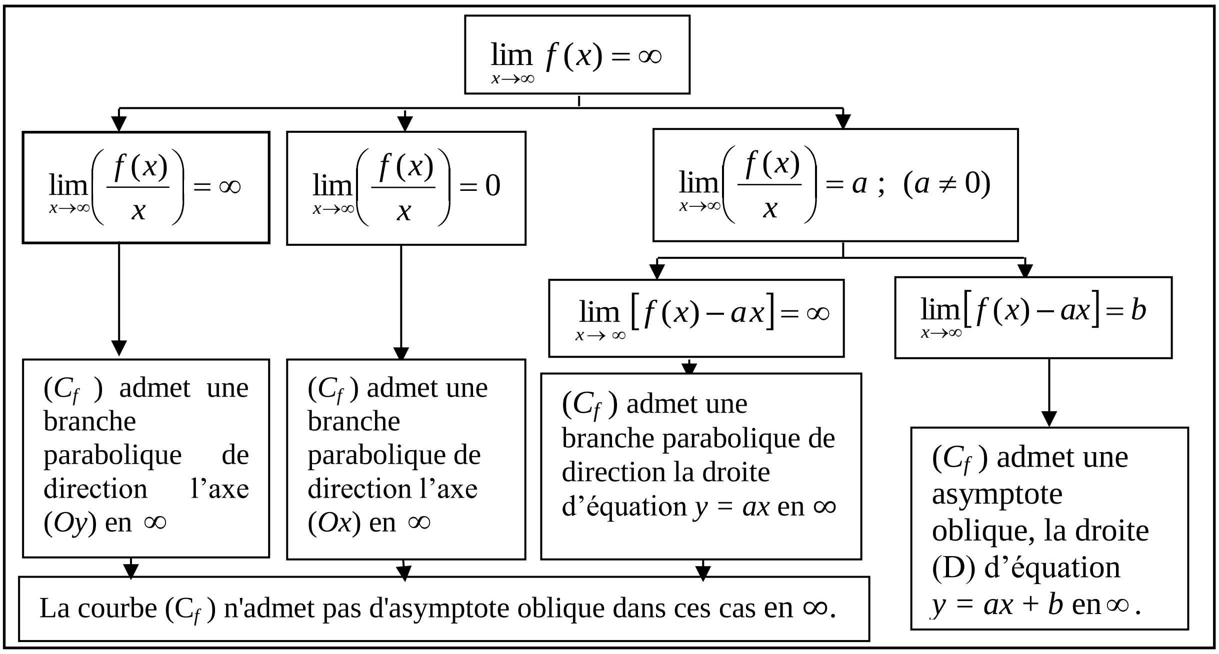
- La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, ($x_0 \in \mathbb{R}$).
- La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en ∞ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, ($l \in \mathbb{R}$).
- La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C_f) en ∞ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$, ($a$ et b, des réels).

  Le signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de préciser la position relative de la courbe (C_f) parrapport à son asymptote d'équation $y = ax + b$
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = \infty$, alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$, alors la courbe ($C_f$) admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox).
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = \infty$; alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$. ($a \in \mathbb{R}$)

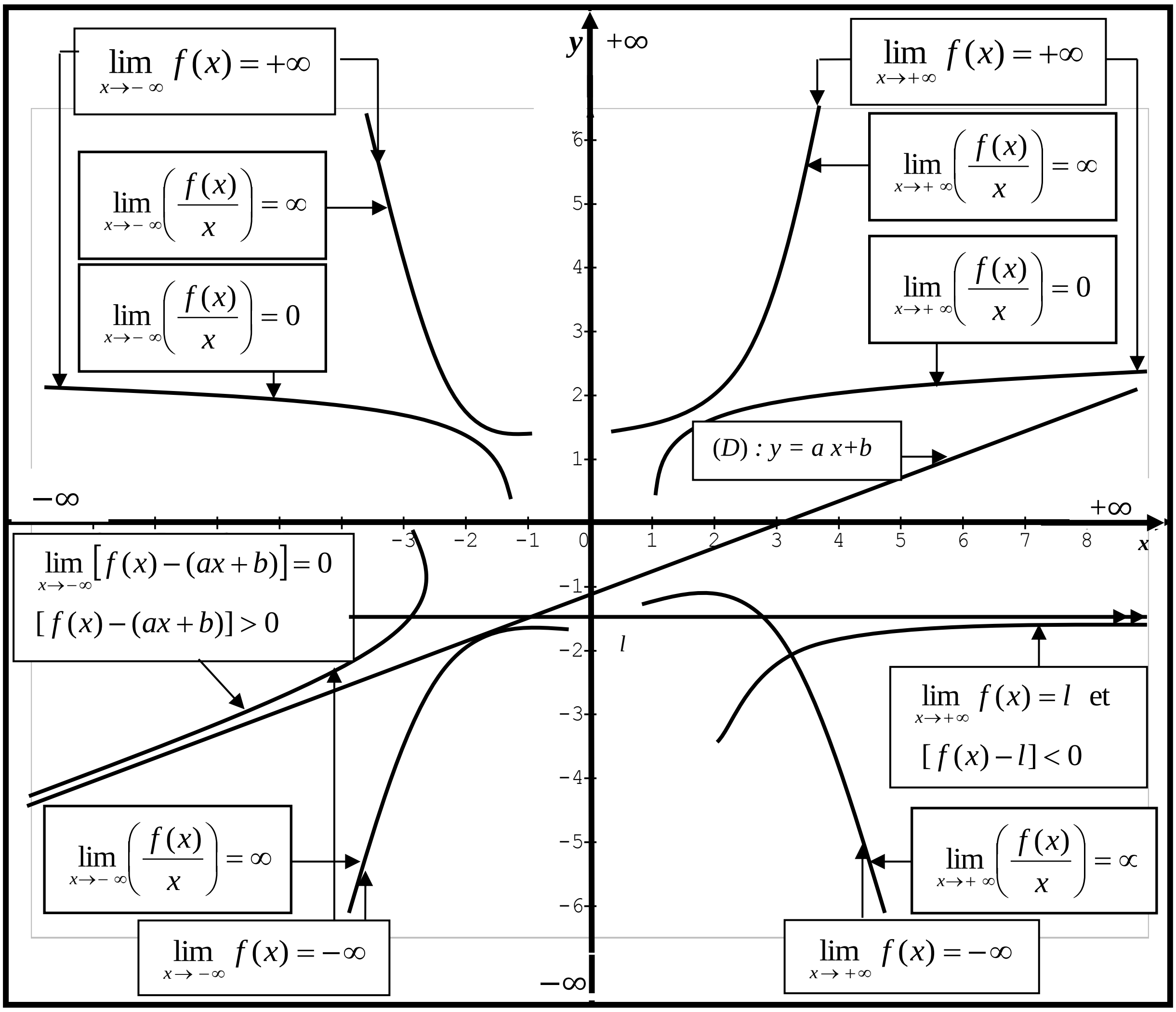
2) <u>Conséquences graphiques de limites de fonction : Illustrations graphiques.</u>.

Limites de *f*	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$; l réel	$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)] =$
Conséquences graphiques	La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).	La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en ∞.	La droite d'équation (D) : $y = a\,x + b$ est une asymptote à la courbe (C_f). en ∞.
Illustrations graphiques (Des positions possibles de (C_f) selon la limite de *f* en x_0 ou en ∞)			

3) **Recherche de branches infinies éventuelles d'une courbe (C_f) d'une fonction *f*.**



4) **Illustration graphique de quelques limites de fonctions à l'infini.**



Ces illustrations sont des situations possibles pour des fonctions, mais elles ne peuvent pas toutes représentées une même fonction.

B) CONTINUITE DE FONCTION

I) Fonction continue en un point ;fonction continue sur un intervalle.

1) Définitions ; Propriété

Soit *f* une fonction numérique ; x_0 un réel ; I un intervalle inclus dans D_f .

Définition1 : Fonction continue en un point

Outil pour étudier la continuité d'une fonction f en un point x_0, ou pour montrer qu'une fonction f est continue en x_0 .

- *f* est continue en x_0 , si et seulement si $x_0 \in D_f$, et *f* admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$: c'est-à-dire si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- *f* est continue à gauche de x_0 , (respectivement à droite de x_0) si et seulement si $f(x_0)$ existe et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (respectivement $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$)

Définition2 : Fonction continue sur un intervalle

- *f* est continue sur l'intervalle I inclus dans D_f si et seulement si *f* est continue en tout point x_0 appartenant à I.

Propriétés

Outils pour étudier la continuité d'une fonction f sur un interevalle

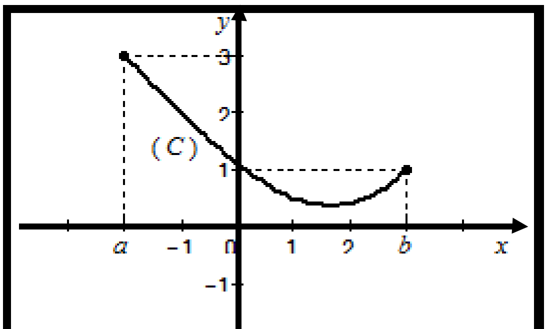
- Si *u* et *v* sont deux fonctions continues sur un intervalle I inclus dans $D_u \cap D_v$, alors :

  $u + v$; $k\,u$ (*k* un réel) ; $u\times v$ sont continues sur I ; $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues sur I tel que $v \neq 0$; $v \circ u$ est continue sur I.

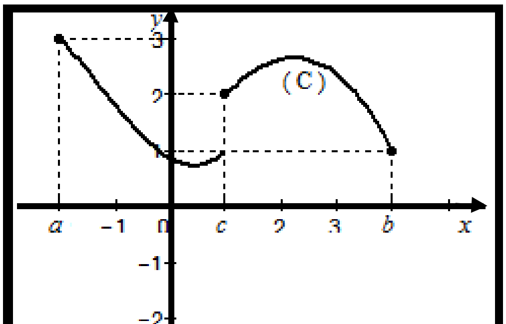
Remarques

Outils pour étudier la continuité d'une fonction f sur un interevalle

- Si *f* est une fonction polynôme, ou une fonction rationnelle, ou une fonction irrationnelle, ou une fonction trigonométrique, ou une fonction obtenue par opérations sur ces fonctions citées, alors *f* est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
- Toutes les fonctions de reférence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Comme conséquence graphique de la continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle sur un intervalle, est que dans un repère donné, sa courbe représentative est tracée d'un « trait continu » sans rupture sur cet intervalle.



Courbe de fonction continue sur [a, b]



Courbe de fonction non continue sur [a, b]

Exemple : Etudier la continuité de la fonction *f* sur ℝ définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solution : Si $x \neq 0$, $f(x) = x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$; les fonctions $x \mapsto x^4$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \sin x$, sont continues sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonctions de références ; la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. La fonction *f* définie par : $f(x) = x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

Si $x = 0$, $f(0) = 0$; $\forall\, x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$ donc $-x^4 \leq x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^4$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^4\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$; et alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 = f(0)$; donc *f* est continue en 0. *f* est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 ; donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Prolongement par continuité

(*Outil pour montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point, ou pour déterminer la fonction prolongeant par continuité une autre fonction en un point*)

- Si *f* est définie sur E $\setminus\{a\}$ (E un intervalle de $\mathbb{R}$ et *a* un réel) ou sur $]-\infty, a[$ ou $]a, b]$ ou $]a, +\infty[$, … ; et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$), alors on peut prolonger la fonction *f* par continuité en *a* en une fonction *g* définie et continue sur E, ou sur $]-\infty, a]$ ou $[a, b]$; ou $[a, +\infty[$, …. , par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases}$

II) Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

1) Image d'un intervalle par une fonction continue : Théorème

(*Outil pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue*)

- Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans D_f ;
  si *f* est continue sur I (inclus dans D_f), alors l'image de I par *f* notée *f* (I) est un intervalle de la même nature que I.
- Graphiquement, la courbe représentative (C_f) de *f* dans un repère donné est tracée d'un « trait continu sans rupture » sur I.

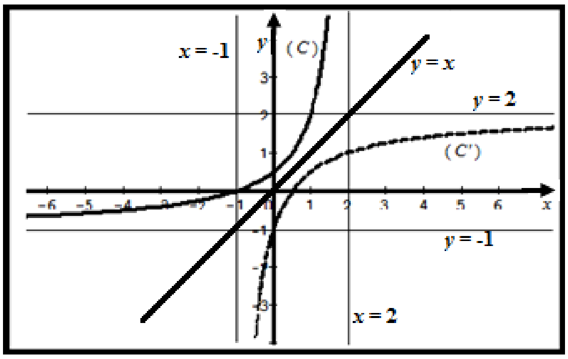
2) Théorème de la bijection

(*Outil pour montrer qu'une fonction f réalise une bijection d'un intervalle I vers un intervalle f (I) ; et pour tracer la courbe de la bijection réciproque*)

Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans D_f ;

- *S*i *f* est continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle I alors *f* réalise une bijection de I vers *f* (I) = J.
- La bijection réciproque de *f* notée f^{-1} est continue sur *f* (I) et varie dans le même sens que *f*. Sa courbe représentative (C ') dans un repère orthogonal est le symétrique de la courbe représentative (C_f) de *f* par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$.

Sur la figure ci-dessous, (C) représente la courbe représentative d'une bijection sur
$]-\infty, 2]$ et (C') celle de sa réciproque.



3) Théorème des valeurs intermédiaires.

(*Outil pour montrer qu'une équation de la forme* $f(x) = m$ *admet une solution unique dans un intervalle donné*)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans D_f.

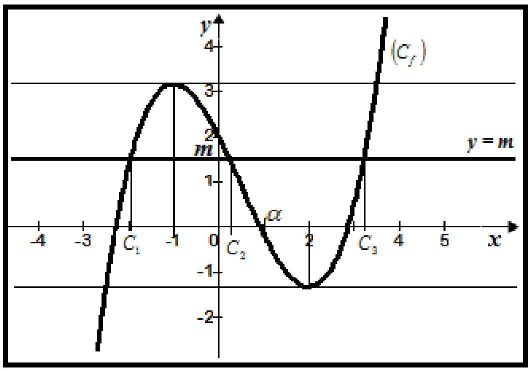
- Si f est continue et strictement monotone sur I = [a, b], (ou sur I = [a, b[), alors pour tout réel $m \in f(\mathrm{I})$, il existe un unique réel $\alpha \in \mathrm{I}$ tel $f(\alpha) = m$. Autrement dit l'équation $f(x) = m$ (d'inconnue x) admet une solution unique $\alpha \in \mathrm{I}$.
- D'une manière générale, si f est continue sur l'intervalle I = [a, b], alors pour tout nombre réel $m \in f(\mathrm{I})$, il existe au moins un réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = m$.
  On dit que toutes les *valeurs intermédiaires* entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par la fonction f au moins une fois.

4) Principe de localisation. (un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires)

(*Outil pour montrer qu'une équation de la forme* $f(x) = 0$ ou $f(x) = u(x)$ (en posant $g(x) = f(x) - u(x) = 0$) *admet une solution unique dans un intervalle donné*)

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans D_f;
  si f est continue et strictement monotone sur I = [a, b], (ou sur I = [a, b[) et si de plus $f(a) \times f(b) < 0$, (ou $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ sont de signes contraires), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle]a, b[.

Illustration graphique.



- $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = m$
- $f(\alpha) = 0$

1) La fonction f est continue sur I = ℝ ; selon la position de m dans l'intervalle $f(\mathrm{I})$, il existe ***une, deux*** ou ***trois*** valeurs de $c \in \mathrm{I}$ telles que $f(c) = m$.
Par conséquent, dans le cas général, il existe ***au moins*** un $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = m$.

2) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1, 2]$; pour tout m de l'intervalle $f([-1, 2])$, il existe ***une seule*** valeur c (ici $c_2 \in [-1, 2]$ telle que $f(c_2) = m$. Par conséquent, dans ce cas , il existe un unique $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = m$.

3) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1, 2]$ par exemple ; de plus $f(-1) > 0$ et $f(2) < 0$ ($f(-1) \times f(2) < 0$; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [-1, 2]$. Dans ce cas , il existe un unique $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 4-1

1) Déterminer la limite en x_0 de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{-2x+\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $x_0 = 2$. b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$; $x_0 = -1$.

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $x_0 = 3$. d) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+3}-2x}$ $x_0 = 1$.

e) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$; $x_0 = 0$. f) $f(x) = \dfrac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. (On sait que $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$)

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+3x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+x}{x+1}$;

Exercice 4-2

1) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

2) En utilisant les limites de fonctions composées, calculer :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{4x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{1+\cos(x+\frac{\pi}{4})}-1}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{6x}$.

Exercice 4-3

1) Déterminer les limites en 0 de chacune des fonctions suivantes :

a) f / $f(x)=1+x^2\sin\dfrac{1}{x}$; b) g / $g(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$; c) h / $h(x)=\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x^2}$.

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) f / $f(x) = x + 2\sin 3x$; b) g / $g(x) = \dfrac{1}{x+\cos x}$; c) h / $h(x) = \dfrac{2x-\cos x^2}{\sin x + x}$;

d) k / $k(x) = \dfrac{x\cos x}{1+x^2}$.

Exercice 4-4

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

a) Démontrer que $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$; déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$.

Exercice 4-5

Etudier la continuité de la fonction *f* sur son ensemble de définition dans chaque cas.

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}+x}{x^2+1}$; 2) $\begin{cases} f(x) = x^3+2x-1 \text{ ; si } x \le 0 \\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ ; si } x > 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} \text{ ; si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1}+3 \text{ ; si } x \ge 1 \end{cases}$

Exercice 4-6

Dans les cas suivants, la fonction *f* peut-elle être prolongée par continuité en a ?
Si oui, préciser le prolongement continu.

1) $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x^2-1}$; sur $]-\infty,-1[$, $a = -1$;

2) $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x^2-1}$; sur $]1, +\infty[$, $a = 1$;

3) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^3}$; sur $]0, +\infty[$, $a = 0$;

4) $f(x) = \frac{x-1-\sqrt{x+1}}{x-3}$; sur $]3, +\infty[$, $a = 4$.

Exercice 4-7

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+2x-1}$; et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer son ensemble de définition D_f, puis montrer que $f(x) = \sqrt{(x+1)^2-2}$.
   b) Montrer que la courbe (C_f) admet un axe de symétrie d'équation $x = -1$.
2) a) Montrer que la droites (D_1) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C_f), en $-\infty$.
   b) Montrer qu'en $+\infty$ (C_f) admet une asymptote (D_2) dont on précisera son équation.
   c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D_1) au voisinage de $-\infty$, et par rapport à (D_2) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4-8

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi, 0]$ par : $f(x) = x \sin x + \cos x$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-\pi, 0[$. À quel intervalle $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ α appartient-il ?
2) Donner l'image de l'intervalle $[-\pi, 0]$ par *f*.
3) Montrer que la restriction de *f* à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ vers un autre intervalle à préciser.

Exercice 4-9

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
On sait que

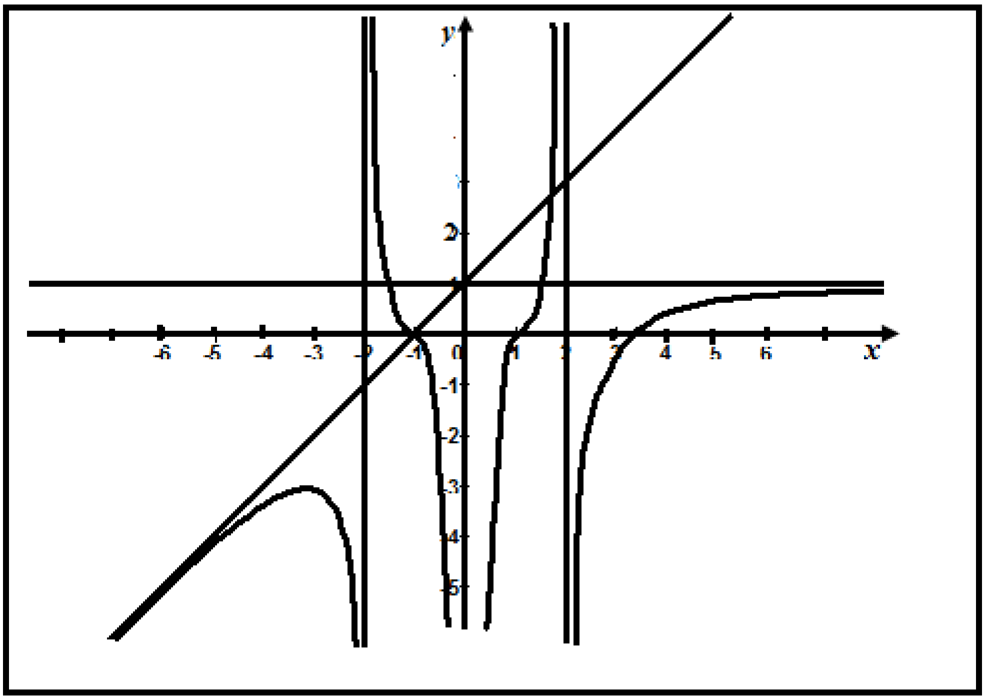
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $f(x)+1<0$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [\, f(x)+(x+1)] = 0$ et $f(x)+x+1>0$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$ illustrer graphiquement ces limites de la fonction *f*.

Exercice 4-10

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction *f* dans un repère orthonormal.
Par la lecture graphique :
1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*
2) Déterminer les limites de *f* aux bornes de D_f
3) Préciser s'il y a lieu les équations des asymptotes à la courbe.



EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 4-11

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*.
   b) Etudier la parité de *f* .
   c) Etudier la continuité de *f* sur D_f.
2) a) Montrer que la fonction *f* est prolongeable par continuité en 0.
   b) Définir la fonction *h* prolongeant *f* par continuité en 0.

Exercice 4-12

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ par : $f(x) = 1 + 3x - x^3$.
1) Montrer en utilisant le principe de localisation que l'équation $f(x) = 0$ admet :
   a) une racine unique x_1 appartenant à l'intervalle $]-2, -1[$;
   b) une racine unique x_2 appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$;

c) une racine unique x_3 appartenant à l'intervalle]1, 2[.

2) On se propose de déterminer la valeur exacte des trois racines de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $2\sin\alpha$.

a) Montrer que pour tout réel t ; $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$. (On pourra utiliser les nombres complexes).

b) Montrer que la fonction g définie par $g(t) = 2\sin t$ réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers l'intervalle $[-2, 2]$.

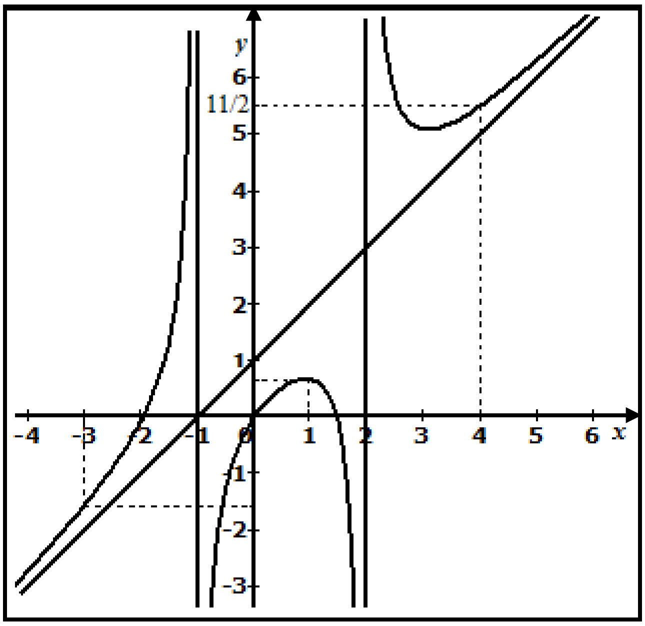
c) En déduire en posant $x = 2\sin t$, que l'équation $f(x) = 0$ où x appartient à $[-2, 2]$ est équivalente à l'équation $1 + 2\sin 3t = 0$ où t appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Exprimer les trois racines de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $2\sin\alpha$, avec α appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4-13

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f.
Par la lecture graphique,

1) déterminer l'ensemble de définition D_f ;
2) déterminer les limites de f aux bornes de D_f ; en 0 et en 4 ;
3) préciser s'il y a lieu les équations des asymptotes à la courbe ;
4) préciser la position relative de la courbe avec la droite d'équation $y = x + 1$.



Exercice 4-14

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2x - \sin x$; (C_f) désigne sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la parité de f.
   b) En déduire une conséquence graphique pour la courbe (C_f).
2) Montrer que 0 est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
3) a) Montrer que pour tout réel x, $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$
   b) En déduire les limites aux bornes de D_f.
   c) Montrer que la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptotes.

4) On considère les droites (D_1) d'équation $y = 2x - 1$ et (D_2) d'équation $y = 2x + 1$.
   a) Déterminer les points communs à (C_f) et à (D_1).
   b) Déterminer les points communs à (C_f) et à (D_2).

5) a) Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   b) Préciser la transformation géométrique qui permet de passer de la partie de (C_f) représentant la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ à la partie de de (C_f) représentant la restriction de f aux intervalles $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4-15

1) On considère la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_1(x) = 2x - 2 + \sqrt{x}$
   a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique α_1 sur $[0, +\infty[$.
   c) Montrer que $0 < \alpha_1 < 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0, +\infty[$ par
   $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\sqrt{x}}{n}$
   a) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
   b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$.
   c) Justifier que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < \alpha_n < 1$.
   d) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\alpha_n = 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4) Etude de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$
   a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   b) En déduire qu'elle est convergente.
   c) Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 4-1

1) a) Limite de $\frac{u}{v}$ *en* x_0 *,où* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$ *; b) Factorisation et simplification ;*

c) Expression conjuguée et simplification ou nombre dérivé ; d) Double expressions conjuguées et simplification ; e) et f) Limite par comparaison ou nombre dérivé.
2) a) Factorisation ; b) Expression conjuguée ; c) Simplification.

Solution

1) a) $+\infty$ à gauche de 2 et $-\infty$ à droite de 2 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{4}$; d) $-\frac{6}{7}$; e) 0 ; f) $\sqrt{3}$.

2) a) $-\infty$; b) 0 ; c) -1.

Exercice 4-2

1) Calcul de limite en utilisant les expressions conjuguées et simplification ou nombre dérivé.
2) $\lim\limits_{x\to x_0} (v \circ u)(x)$

Solution

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ est le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0 ;

c'est donc $\frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$.

2) a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$.

Exercice 4-3

1) et 2) Limites par comparaison ; théorème des gendarmes.$(-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ *et* $-1 \leq \cos\alpha \leq 1)$

Solution

1) a) 1 ; b) 0 ; c) $+\infty$ à droite de 0 et $-\infty$ à gauche de 0
2) a) $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$; b) 0 en $+\infty$ et en $-\infty$; c) 2 en $+\infty$ et en $-\infty$;
d) 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 4-4

1) Formules de duplication ; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Définition de tan x ; changement de variables, formules d'addition $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

Solution

1) a) $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$; donc $\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$; alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2$;

b) $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{x^2}$, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x} \times \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x} = 0$;

c) Posons $X = x - \frac{\pi}{3}$ donc, $x = X + \frac{\pi}{3}$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = \lim_{X \to 0} \frac{-\sin 3X}{1 - 2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right)}$;

$2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right) = \cos X - \sqrt{3}\sin X$; d'où $\lim_{X \to 0} \frac{-\sin 3X}{1 - 2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{X \to 0} \frac{-\sin 3X}{1 - \cos X + \sqrt{3}\sin X}$

$$\lim_{X \to 0} \frac{-\sin 3X}{1 - \cos X + \sqrt{3}\sin X} = \lim_{X \to 0} \left[-\frac{\sin 3X}{3X} \times \frac{3}{\frac{1 - \cos X}{X} + \sqrt{3}\frac{\sin X}{X}} \right] \; ; \; \frac{1 - \cos X}{X} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}X\right)}{\frac{1}{2}X}$$

$$\lim_{X \to 0} \left[-\frac{\sin 3X}{3X} \times \frac{3}{\frac{1 - \cos X}{X} + \sqrt{3}\frac{\sin X}{X}} \right] = -1 \times \frac{3}{0 + \sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

Exercice 4-5

Continuité en un point ; opérations sur les fonctions continues

Solution

1) f esr continue sur $D_f = [1, +\infty[$: car la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1} + x$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction irrationnelle ; $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur ℝ en tant que fonction polynôme ; donc $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x-1} + x}{x^2 + 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues.
2) f n'est pas continue sur D_f = ℝ car f n'est pas continue en 0 ;
3) f est continue sur D_f = ℝ car la fonction $x \mapsto \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ est continue sur ℝ \ {1} en tant que fonction rationnelle, donc elle est continue sur $]-\infty, 1[$; $x \mapsto \sqrt{x-1} + 3$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que fonction irrationnelle donc f est continue sur ℝ \ {1} ; mais $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3 = f(3)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} + 3 = 3 = f(3)$, d'où f est continue en 1. f est alors continue sur ℝ \ {1} et en 1 ; donc f est continue sur ℝ.

Exercice 4-6

Définition de fonction prolongeable par continuité en un point a.

Solution

1) Non en –1 : car $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$;
2) Oui en 1 : $1 \notin D_f$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{3}{2}$; donc la fonction φ est définie par
$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) \; ; \; \text{si } x \neq 1 \\ \varphi(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$
3) Non en 0 : car $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$; 4) Non en 4 : $4 \in D_f$ et f est déjà continue en 4.

Exercice 4-7

1) *« contraintes » de certaines opérations dans ℝ ; Trinôme du second degré ; Eléments de symétries d'une courbe : axe de symétrie d'une courbe (C_f)*
2) *Asymptote à une courbe à l'infini ; Position relative d'une courbe et d'une droite dans le plan.*

Solution

1) a) $D_f =]-\infty, -1-\sqrt{2}\,] \cup [-1+\sqrt{2}, +\infty[$, $\sqrt{x^2+2x-1} = \sqrt{(x+1)^2-1-1} = \sqrt{(x+1)^2-2}$

b) $f\left(2(-1)-x\right) = \sqrt{(-x-1)^2-2} = f(x)$; donc la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{(x+1)^2-2}+(-x-1)} = 0$; donc (D_1) est asymptote à (C_f) à $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}{1} = 1$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1} = 1$; ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$) ; donc (C_f) admet une asymptote (oblique) (D_2) d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$.

c) $f(x)-(-x-1) = \dfrac{-2}{\sqrt{(x+1)^2-2}+(-x-1)} < 0$ pour x tendant vers $-\infty$; donc au voisinage de $-\infty$ (C_f) est en dessous de (D_1).

$f(x)-(x+1) = \dfrac{-2}{\sqrt{(x+1)^2-2}+(x+1)} < 0$ pour x tendant vers $+\infty$; donc au voisinage de $+\infty$ (C_f) est en dessous de (D_2).

Exercice 4-8

1) Principe de localisation
2) Image d'un intervalle par une fonction continue
3) Théorème de la bijection.

Solution

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 ↗	$\frac{\pi}{2}$	↘ 1

1) $f'(x) = x\cos x$; sur $[-\pi, 0]$ on a les variations de f ;

f est croissante $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissane sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

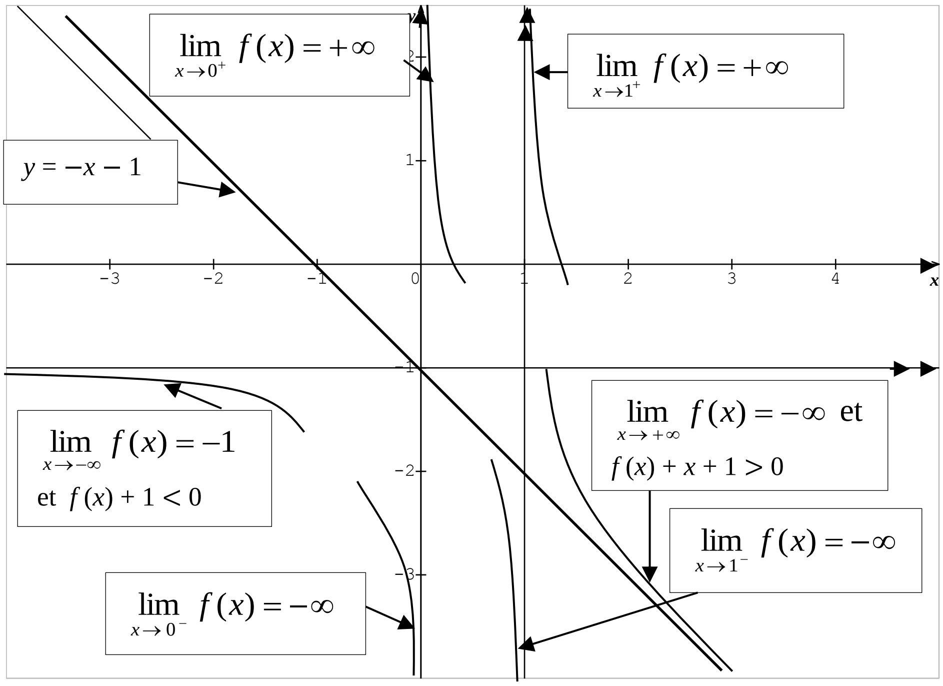
D'après le tableau de variations de f ; f est continue et strictement croissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; de plus $f(-\pi) < 0$; $f(-\frac{\pi}{2}) > 0$ et $f(0) > 0$; donc d'après le principe de localisation appliqué à f, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-\pi, 0]$; et α appartient à l'intervalle $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

2) L'image de l'intervalle $[-\pi, 0]$ par f, est l'intervalle $\left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) La restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ d'après le tableau de variations de f. Donc d'après le théorème de la bijection, cette restriction est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ vers $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4-9

Interprétation ou illustration graphique des limites ; asymptotes à une courbe



Exercice 4-10

1) ; 2) ; 3) Illustration graphique des limites ; asymptotes à une courbe ; lecture graphique

Solution

1) $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

2) Par lecture graphique,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3) Les équations des asymptotes sont :

$y = x+1$; $y = 1$; $x = -2$; $x = 0$ *et* $x = 2$

CHAPITRE 5

DERIVEES ; PRIMITIVES DE FONCTIONS

Dès la seconde moitié du XVII^{e} siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connut une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'*infiniment petit* et de son rapport avec les sommes dites *intégrales*.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) dans son traité « *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus* » publié en 1684; avait introduit la notation moderne d'une intégrale dès 1675, calculé les dérivées des fonctions usuelles en 1676 et démontré les règles de dérivation des produits, quotient et composées de fonctions en 1677. Il introduit la notation *dx* ; *dy* comme différences des valeurs successives prises par les variables *x*, *y*.

C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVII^{e} siècle, a le premier mené des études sur la notion de *tangente à une courbe* lui-même les appelait « touchantes ».

Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

C'est au XVIII^{e} siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : l'ensemble $\mathbb{R}$ n'était pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^{e} siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

C'est à Lagrange (fin du XVIII^{e} siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x.

- La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des courbes et des tangentes à une courbe ; de résoudre des problèmes d'optimisation….
- En sciences, lorsqu'une grandeur est fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur, et la dérivée de la dérivée donne l'accélération.
- Le nombre dérivé, s'il existe, s'interprète donc de plusieurs façons : numériquement, en termes d'approximation affine ; géométriquement, en terme de tangente ; cinématiquement, en terme de vitesse instantanée ; en économie, il est lié aux quantités marginales.
- La notion de dérivée et / ou de différentielle est largement utilisée dans la plupart des branches scientifiques (en Physiques ; en Biologie en Chimie ; en Economie …..)

➢ La dérivée d'une fonction numérique d'une variable réelle n'est pas nouvelle pour les élèves des classes de terminales. Elle prolonge l'étude sur les limites de fonctions.

➢ Les primitives, nouvelles notions pour les élèves de terminales, préparent le calcul intégral..

CE QU'IL FAUT RETENIR.

A) DERIVEES DE FONCTIONS

I) Dérivabilité en un point

1) Nombre dérivé

(*Outil pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ; ou pour montrer qu'une fonction f est dérivable ou non en un point ; ou pour déterminer la limite d'une fonction f (dérivable) en un point x_o*)

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie sur D_f ; $x_0 \in D_f$.

- On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ou $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) existe et est finie. Cette limite finie est notée $f'(x_0)$ et est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; ou encore si et seulement si il existe un réel A et une fonction ε définie sur un intervalle contenant 0 tels que $x_0+h \in D_f$ et $f(x_0+h) = f(x_0) + \mathrm{A}h + h\,\varepsilon(h)$; avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$; le réel A est le nombre dérivé de f en x_0 ; il est noté $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.
- f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, (ou $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) existe et est finie. Cette limite finie est notée $f_d'(x_0)$ et est appelée nombre dérivé de f à droite de x_0.
- f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, (ou $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) existe et est finie. Cette limite finie est notée $f_g'(x_0)$ et est appelée nombre dérivé de f à gauche de x_0.

Exemple : 1) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en 1.
2) Sachant que la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$ est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{2}$ calculer en utilisant la définition du nombre dérivé $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$; donc $1 \in D_f$; $f(1) = -1$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+1-(-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{x-1} = -3$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-3$. Ou $\forall\, h \neq 0$

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 1 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3(1+2h+h^2) + 1$$

$f(1+h) = -1 - 3h + h(h^2) = f(1) + \mathrm{A}h + h\,\varepsilon(h)$; avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = \lim\limits_{h\to 0}(h^2) = 0$; ce qui prouve que f est dérivable en 1 et on a bien A = $f'(1) = -3 = \frac{df}{dx}(1)$.

2) En posant $f(x)=\sqrt{x+1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ (par définition du nombre dérivé) or $f'(0)=\frac{1}{2}$; donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

Par exemple $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = (\sin' 0) = \cos 0 = 1$; car la fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin' x = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Tangente à une courbe d'une fonction : Conséquences graphiques de la dérivabilité d'une fonction en un point

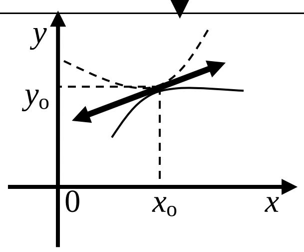
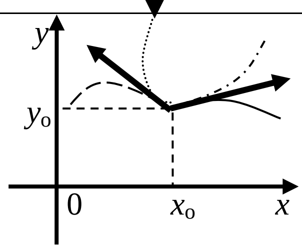
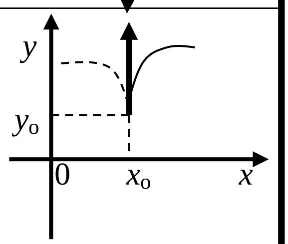
(*Outil pour déterminer l'équation d'une tangente à une courbe d'une fonction en un point* *d'abscisse donné ; ou pour donner les conséquences graphiques de la dérivabilité d'une fonction en un point donné*).

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie sur D_f ; $x_0 \in D_f$. (C_f) sa courbe représentative dans un repère donné.

- Si f est une fonction dérivable en x_0 , alors sa courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$ avec l_1 et l_2 deux réels différents, alors f n'est pas dérivable en x_0 et donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes d'équations respectives $y = l_1(x-x_0)+f(x_0)$ à droite et $y = l_2(x-x_0)+f(x_0)$ à gauche. Le point d'abscisse x_0 est appelé point angleux de la courbe.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$ avec l'un des deux l_1 ou l_2 réel et l'autre infini, alors f n'est pas dérivable en x_0 et donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes dont une verticale d'équation $x = x_0$ et l'autre d'équation $y = l_1(x-x_0)+f(x_0)$ si $l_2 = \infty$ ou $y = l_2(x-x_0)+f(x_0)$ si $l_1 = \infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale d'équation $x = x_0$.

<u>Tableau recapitulatif</u>

f est une fonction numérique d'une variable réelle x ; x_0 un réel appartenant à D_f; (C_f) sa courbe représentative dans un repère donné.

Dérivabilité de f en x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ $l \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$ $l_1 \neq l_2$, 2 réels	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$
Conséquences graphiques	La courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente l et d'équation : $y = l(x-x_0)+f(x_0)$	La courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes de pente respective l_1 à droite et l_2 à gauche.	La courbe (C_f) admet au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale d'équation $x = x_0$.
Illustrations graphiques (Des positions possibles de (C_f) selon le sens des variations de f.)			

<u>Remarque</u>

Si *f* est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$; ce qui se traduit que lorsque *x* est voisin de x_0, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; le polynôme $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est appelé approximation affine de *f* (*x*) au voisinage de x_0. Ou encore en posant $x = x_0 + h$:
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ donc au voisinage de x_0, $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$.

II) Dérivabilité sur un intervalle.

Soit *f* une fonction numérique ; I un intervalle inclus dans D_f.

1) Dérivée de *f*

- *f* est dérivable sur I, si et seulement si *f* est dérivable en toutpoint x_0 appartenant à I.
- La fonction dérivée ou la dérivée *f* ' est définie sur I :

$$f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2) Dérivabilité et continuité

(*Outil pour étudier la continuité d'une fonction (déjà dérivable) sur un intervalle*)

Si *f* est dérivable sur l'intervalle I, alors *f* est continue sur I.

NB : La réciproque est fausse, par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur [0, + ∞[mais est dérivable sur]0, +∞[.

3) Dérivées successives de *f*

(*Outil pour calculer les dérivées successives d'une fonction*)

- Si *f* est dérivable sur l'intervalle I, alors f' est la dérivée première de *f* ; et on note $f' = \dfrac{df}{dx}$.
- Si f' est dérivable sur l'intervalle I, alors sa dérivée est notée f'' et est appelée dérivée seconde de *f*. On note $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$
- Si f'' est dérivable sur l'intervalle I, alors sa dérivée est notée f''' ou $f^{(3)}$ et est appelée dérivée troisième de *f*. On note $f''' = f^{(3)} = \dfrac{d^3 f}{dx^3}$.
- ………………………………
- $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$ est la dérivée *n*-ième de *f*. ; c'est la dérivée de $f^{(n-1)}$: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemple : Soit *f* la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$; alors :

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \; ; \; f''(x) = \frac{2}{x^3} \; ; \; f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4} \; ; \; f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} = \frac{(-1)^4 \times 2 \times 3 \times 4}{x^5} = \frac{(-1)^4 4!}{x^5} \; ; \cdots ;$$

on montre par récurrence que pour tout naturel *n*, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

4) **Dérivées de fonctions usuelles ou de références**

u est une fonction usuelle ; u' sa dérivée sur I

Si $u(x)$ =	**Alors**	**$u'(x)$ =**	**Par exemple sur I =**
a (a étant un réel)		0	$\mathbb{R}$
$ax+b$ (a et b étant des réels)		a	$\mathbb{R}$
x^n (n étant un entier naturel)		$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
x^r ($r \in \mathbb{Q}^*$)		$r\,x^{r-1}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\text{cotan}\, x$		$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2 x$	$]0, \pi[$
$\sin(ax+b)$		$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$		$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

5) **Propriétés algébriques** : **Calcul pratique de dérivée de fonction**

(*Outil pour déterminer $f'(x)$ f étant une fonction dérivable ; ou pour étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle*)

u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I ; u' et v' sont leurs dérivées respectives.

Si f est de la forme	**alors**	**f' est de la forme**	**Observations**
$u+v$		$u'+v'$	
$u\times v$		$u'\times v + u\times v'$	
$\dfrac{1}{v}$		$\dfrac{-v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\dfrac{u}{v}$		$\dfrac{u'\times v - u\times v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\sqrt{u}$		$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
u^r		$r\times u'\times u^{r-1}$	$r \in \mathbb{Q}^*$ et $u > 0$ sur I
$v \circ u$		$u' \times v' \circ u$	
$\ln\lvert u\rvert$ (pour mémoire)		$\dfrac{u'}{u}$	$u > 0$ sur I
e^u (pour mémoire)		$u'\,e^u$	$u(x) \in \mathbb{R}$

Exemple 1: Dans chacun des cas suivants, déterminer $f'(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = (3x^2 - x)\cos x$; 3) $f(x) = \sin(-2x+1)$;

4) $f(x)=\sqrt{3-\cos^2 x}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$; ($f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$) ; donc

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x^2+1)-(2x^2-3x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \;;\; f'(x)=\frac{3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}.$$

2) $f(x)=(3x^2-x)\cos x$; ($f(x)$ est de la forme $u(x)\times v(x)$) ; donc
$f'(x)=(6x-1)\cos x+(3x^2-x)(-\sin x)=(6x-1)\cos x-(3x^2-x)\sin x$.

3) $f(x)=\sin(-2x+1)$; ($f(x)$ est de la forme $(v\circ u)(x)$) ; donc
$f'(x)=(-2)\times\cos(-2x+1)=-2\cos(-2x+1)$.

4) $f(x)=\sqrt{3-\cos^2 x}$; ; ($f(x)$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$) ; donc

$$f'(x)=\frac{2\sin x\times\cos x}{2\sqrt{3-\cos^2 x}}=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{3-\cos^2 x}}$$

Exemple 2 : Montrer que la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\begin{cases} x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$ est dérivable sur ℝ.

Solution :

- Si $x\neq 0$, $f(x)=x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$; les fonctions $x\mapsto x^4$; $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ et $x\mapsto\sin x$, sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonctions usuelles ; la fonction $x\mapsto\sin\dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables. La fonction f définie par :
  $f(x)=x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$
- Si $x=0$, $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)=0$; car on a :
  $\left|x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)\right|=\left|x^3\right|\left|2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right|$; or on a $\left|2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leq 2+\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leq 3$, d'où
  $\left|x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)\right|\leq 3\left|x^3\right|$ et $\lim\limits_{x\to 0}3\left|x^3\right|=0$; donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$..
- f est alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 ; donc f est bien dérivable sur ℝ.

6) Dérivabilité et monotonie

(*Outil pour préciser le sens des variations d'une fonction f dérivable sur un intervalle*)

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I (inclus dans D_f.) ; alors on a :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I, $f'(x)\geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I, $f'(x)\leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x élément de I, $f'(x)=0$.

7) Dérivabilité et extrema.

(*Outil pour montrer si une fonction f admet un extremum en un point* x_0 *; ou pour déterminer la nature de l'extremum*)

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

- Si f est dérivable sur I et si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$. (La réciproque est fausse).
- Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0. Le sens de variation de f (dans son tableau de variations) permet de préciser la nature de l'extremum local.
- Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors f n'admet pas d'extremum en x_0 ; la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 traverse la courbe en ce point ; un tel point est appelé point d'inflexion.
- Si f est deux fois dérivable sur I, si f' s'annule en x_0 ($f'(x_0) = 0$) et
  - ✓ Si $f''(x_0) < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.
  - ✓ Si $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0
  - ✓ Si $f''(x_0)$ s'annule en changeant de signe, alors le point d'abscisse x_0 de la courbe (C_f) est un point d'inflexion

On pourrait par exemple avoir la situation suivante :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	maximum local $f(x_1)$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	minimum local $f(x_4)$	↗	

<u>Exemple</u> : Etudier suivant les valeurs de p ($p \in \mathbb{R}$), les extrema éventuels de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + px + 1$.

<u>Solution</u> : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + p$

- Si $p = 0$, $f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; mais $f'(x)$ s'annule en 0 sans changer de signe ($\forall\, x \in \mathbb{R},\ 3x^2 \geq 0$) ; ***f* n'a donc pas d'extremum si *p* = 0**.
- Si $p > 0$, $f'(x) = 3x^2 + p > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $f'(x)$ ne s'annule pas ; donc ***f* n'a pas d'extremum si *p* > 0.**
- Si $p < 0$, **($-p > 0$)**, $f'(x) = 3x^2 + p = 3\left(x^2 + \dfrac{p}{3}\right) = 3\left[x^2 - \left(\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)^2\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right) = 0$; $x = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$; on a :

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{-p}{3}}, +\infty\right[$ et $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left[-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}, \sqrt{\dfrac{-p}{3}}\right]$

Donc $f'(x)$ s'annule en $-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ et en $\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ en changeant de signe ; alors ***f* admet des extrema en** $-\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ et en $\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ **si *p* < 0.**

De plus

$f''(x) = 6x$; $f''\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{-p}{3}} < 0$ et $f''\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = 6\sqrt{\frac{-p}{3}} > 0$; donc la fonction *f* admet un maximum local en $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ de valeur $f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$ et un minimum local en $\sqrt{\frac{-p}{3}}$ de valeur $f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$

Remarque : On pourrait aussi utiliser le sens de variations de *f*, notamment son tableau de variations comme outil de travail ; on aurait les mêmes résultats par exemple pour $p < 0$, *f* est croissante sur $\left]-\infty,\ -\sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{-p}{3}},\ +\infty\right[$et décroissante sur $\left[-\sqrt{\frac{-p}{3}},\ \sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	↘	$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$	↗	

D'après le tableau de variation de *f*, *f* admet un maximum local en $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ de valeur $f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$ et un minimum local en $\sqrt{\frac{-p}{3}}$ de valeur $f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$.

B) PRIMITIVES DE FONCTIONS

I) Définition – Existence – Propriétés

1) Définition

(*Outil pour montrer qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle*)

F est une primitive d'une fonction numérique *f* sur un intervalle I si et seulement si *F* est dérivable sur I et pour tout *x* élément de I, $F'(x) = f(x)$.

2) Théorème d'existence de primitives d'une fonction

(*Outil pour justifier qu'une fonction admet des primitives sur un intervalle donné*)

Soit *f* une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans D_f.
Si *f* est continue sur l'intervalle I, alors elle admet des primitives sur I.

3) Propriétés

(*Outil pour déterminer la primitive d'une fonction qui vérifie une condition donnée*)

- Si *F* est une primitive de *f* sur I, alors toute fonction *G* définie de la forme $G(x) = F(x) + k$, (avec $k \in \mathbb{R}$) est aussi une primitive de *f* sur I. Toutes les primitives de *f* sur I sont de cette forme.
- Parmi toutes les primitives de *f* sur I, il existe une et une seule qui vérifie une condition donnée. (Par exemple $F(x_0) = y_0$; x_0 et y_0 étant des réels donnés)
- En particulier la primitive *F* de *f* qui s'annule en *a* sur I, est noté pour tout $x \in$ I, par :
  $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (lire intégrale de a à x $f(t)\,dt$)

II) Primitives des fonctions de référence – Propriétés algébriques

(*Outils pour déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle donné*)

1) Primitives des fonctions de référence

Soit u une fonction usuelle ou de référence continue sur I, U une primitive de u sur I. (k est un réel)

Si $u(x)$ **=**	**alors**	$U(x)$ **=**	**Sur I =**
a ; $(a\in\mathbb{R})$		$a\,x+k$	$\mathbb{R}$
$a\,x+b$ $(a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R})$		$\frac{1}{2}a\,x^2+b\,x+k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$		$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$ (pour mémoire)		$\ln\lvert x\rvert+k$	$]0,+\infty[$
$x^r(r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\})$		$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+k$	$]0,+\infty[$
$\sin x$		$-\cos x+k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\sin x+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x+k$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\text{cotan}\,x+k$	$]0,\pi[$
$\sin(a\,x+b)$ $(a\neq 0)$		$-\frac{1}{a}\cos(a\,x+b)+k$	$\mathbb{R}$
$\cos(a\,x+b)$ $(a\neq 0)$		$\frac{1}{a}\sin(a\,x+b)+k$	$\mathbb{R}$
$\ln x$ (pour mémoire)		$x\ln x-x+k$	$]0,+\infty[$
e^x (pour mémoire)		e^x+k	$\mathbb{R}$

2) Propriétés algébriques : Détermination pratique de primitives de fonction

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I ; F une primitive de f sur I.
u et v étant deux fonctions dérivables sur I ; k un réel.

Si f **est de la forme :**		**alors**	F **est de la forme :**		**Observations**
$u'u^r$ $(r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\})$			$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+k$		$u>0$
$u'\times v'\circ u$	$u'\sin u$		$v\circ u+k$	$-\cos u+k$	
	$u'\cos u$			$\sin u+k$	
$\frac{u'}{u}$; (pour mémoire)			$\ln\lvert u\rvert+k$		$u>0$
$u'e^u$; (pour mémoire)			e^u+k		

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I.

- Si U est une primitive de u sur I et si V est une primitive de v sur I, alors une primitive de $au+bv$ sur I est $aU+bV$ (avec a et b des réels).
- $(u\times v)=\text{prim}(u'\times v)+\text{prim}(u\times v')$ (prim signifiant « primitive de ») ; cela vient du fait que $(u\times v)'=(u'\times v)+(u\times v')$ et que $\text{prim}\big((u\times v)'\big)=(u\times v)$. Donc si une

fonction f peut se mettre sous la forme $f = u' \times v$; alors une primitive F de f sur I est de la forme $F = prim(f) = prim(u' \times v) = u \times v - prim(u \times v')$; ou si f peut se mettre sous la forme $f = u \times v'$; alors une primitive F de f sur I est de la forme $F = prim(f) = prim(u \times v') = u \times v - prim(u' \times v)$

C) <u>ELEMENTS DE SYMETRIES D'UNE COURBE (C_f)</u> : (Rappel)

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) <u>Le point I (a, b) est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :</u>

(*Outil pour montrer qu'un point I* (a, b) *est centre de symétrie d'une courbe* (C_f))

- **<u>1er outil.</u>**
  La fonction h définie par $h(x) = f(x + a) - b$ est impaire.
- **<u>2e outil.</u>**
  Pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.
- **<u>3e outil</u>.**
  Pour tout $x \neq 0$ tel que $a - x \in D_f$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

2) <u>La droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :</u>

(*Outil pour montrer qu'une droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie d'une courbe* (C_f))

- **<u>1er outil.</u>**
  La fonction h définie par $h(x) = f(x + a)$ est paire.
- **<u>2e outil.</u>**
  Pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- **<u>3e outil.</u>**
  Pour tout $x \neq 0$ tel que $a - x \in D_f$ et $a + x \in D_f$, $f(a - x) = f(a + x)$.

D) <u>ETUDIER LE SENS DE VARIATIONS ; DRESSER LE TABLEAU DE VARIATIONS ET TRACER LA COURBE REPRESENTATIVE D'UNE FONCTION NUMERIQUE *f*.</u>

(*Outil pour étudier le sens de variations ; dresser le tableau de variations et tracer la courbe représentative d'une fonction f*)

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x ; (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) <u>Etudier le sens de variations de *f* et dresser son tableau de variations</u>.

1) <u>Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f*.</u>

En général il est indiqué dans l'énoncé ; sinon si $f(x)$ est de la forme :

- $\dfrac{u(x)}{v(x)}$; alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, v(x) \neq 0\}$
- $\sqrt{u(x)}$; alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, u(x) \geq 0\}$
- $\ln(u(x))$; alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, u(x) > 0\}$
- $e^{u(x)}$; alors $D_f = D_u$

(u et v étant des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et en tenant compte des contraintes des opérations « quotient », « racine carrée » et « logarithme » dans $\mathbb{R}$)

2) <u>Etudier la parité et la périodicité de *f*</u>:

- Si f est périodique de période p : [pour tout x D_f, $x + p \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$] ; on peut alors étudier f par exemple sur $E_f = D_f \cap \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$.

- Si f est paire : [pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$] ou impaire [pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$] ; on peut alors étudier f sur $E_f = D_f \cap [0 ; +\infty[$ par exemple.

3) **<u>Etudier les limites de f aux bornes de D_f ou de E_f.</u>**

4) **<u>Donner le sens de variations de f</u>** :

- Préciser l'ensemble de dérivabilité de f ;
- Calculer $f'(x)$;
- étudier le signe de $f'(x)$;
- préciser le sens des variations de f suivant le signe de f'.

5) **<u>Dresser le tableau de variations de f</u>** :

- sur la première ligne, figurent les valeurs particulières de x : (bornes de D_f ou de E_f ; points où la dérivée s'annule ; points où f n'est pas continue ou n'est pas dérivable …)
- sur la seconde ligne, figurent les signes de f' et les valeurs éventuelles prises par f' aux valeurs particulières de x ; ⋯
- sur la troisième ligne, figurent le sens des variations de f matérialisées par des flèches ascendantes (↗) si f est croissante et des flèches descendantes (↘) si f est décroissante ; puis les limites de f aux valeurs particulières de x ....

II) <u>Tracer la courbe représentative (C_f) de f</u>

1) **<u>Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f).</u>**

2) **<u>Dans un repère soigneusement tracé (en respectant les unités données),</u>**

- Placer éventuellement les points remarquables de la courbe (C_f) (points où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées ; points où (C_f) admet une demi-tangente verticale, ou deux demi-tangentes ; « points d'inflexions » ; points de concours de (C_f) avec les axes si possible ; points donnés dans l'énoncé ;….)
- Tracer les droites particulières à (C_f) : les tangentes aux points particuliers ; les asymptotes éventuelles à (C_f),
- Placer d'autres points si nécessaire.

3) **<u>Trcer la courbe (C_f)</u>**

- En respectant ses particularités et en suivant le tableau devariations de f qui précise "la forme" de la courbe.

<u>COMPLEMENT : Inégalité des accroissements finis : (hors programme en T^{le} D)</u>

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

1) S'il existe deux nombres réels m et M tels que, pour tout x de I :
   $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.:autrement dit:
2) S'il existe un nombre strictement positif M tel que, pour tout x de $[a , b]$:
   $|f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 5-1

On considère les fonctions *f* ; *g* et *h* définies respectivement par :

$$f(x)=\frac{2\left|x-1\right|+\sqrt{x+1}}{x}\ ;\ g(x)=\frac{-x+\sqrt{\left|1-2x^2\right|-1}}{x^2+1}\ \text{ et }\ h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$$

On désigne par (C_f) ; (C_g) et (C_h) les courbes représentatives respectives de *f*, *g* et *h* dans un repère donné.

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2) Etudier la continuité, puis la dérivabilité :
   a) de *f* en 1 et en –1 ; b) de *g* en 0 ; c) de *h* en 0.
   Quelles conséquences graphiques peut-on déduire de la dérivabilité de chacune de ces fonctions en ces points ?

Exercice 5-2

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f* ; l'ensemble sur lequel *f* est dérivable puis déterminer $f'(x)$ pour tout *x*.

1) *f* définie par $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x+2}$; 2) *f* définie par $f(x)=(x-1)\sqrt{2x-1}$

3) *f* définie par $f(x)=\dfrac{2\cos x+1}{\sin x}$; 4) *f* définie par $f(x)=\dfrac{2\left|x\right|-1}{x-1}$

5) *f* définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$; 6) *f* définie par $f(x)=\left(\dfrac{-2x+1}{x-1}\right)^3$

Exercice 5-3

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction *f* sur I ; puis la primitive *F* de *f* qui vérifie la condition indiquée.

I) Par lecture directe de l'inverse du tableau : opérations sur les fonctions dérivables

1) *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}$; I = ℝ ; $F(0) = 0$

2) *f* définie par $f(x)=\dfrac{1-6x}{\left(3x^2-x-2\right)^2}$; I =]1, +∞[; $A(2, -1) \in (C_F)$

3) *f* définie par $f(x)=3\cos x\cdot\sin^2 x$; I = ℝ ; *F* prend la valeur 1 en 0.

II) Par transformation simple de l'expression *f* (*x*).

1) *f* définie par $f(x)=\dfrac{3x-1}{\left(3x^2-2x-1\right)^2}$; I = $\left]-\dfrac{1}{3}, 1\right[$; $F(0) = 1$

2) *f* définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; I = ℝ ; $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$; I =]0, +∞[; $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=1$

III) Par transformation « en profondeur » de l'expression *f* (*x*)

1) f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$; I = $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$; $F(1) = 1$

2) f définie par $f(x) = \cos^3 x$; I = $\mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$

3) f définie par $f(x) = \cos^3 x \times \sin^2 x$; I = $\mathbb{R}$; $F(0) = 1$

4) f définie par $f(x) = \dfrac{-\tan x}{\cos x}$; I = $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $F(0) = 2$

5) f définie par $f(x) = \cos^2 x \times \sin^3 x$; I = $\mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

IV) **Par parties (par décomposition de l'expression $f(x)$).**

1) f définie par $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$; I = $\mathbb{R}$; $F(0) = -\dfrac{4}{15}$.

2) f définie par $f(x) = (x+1)\cdot\cos x$; I = $\mathbb{R}$; $F(0) = 1$

Exercice 5-4

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$ pour tout $x \neq -1$.

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.
2) En déduire une primitive de f sur $]-\infty, -1[$.
3) Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty, -1[$ qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 5-5

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x-1)^3}$ pour tout $x \neq 1$.

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.

2) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

3) Déterminer la primitive F de f sur $]1, +\infty[$ qui prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ en 2.

Exercice 5-6

Soit f une fonction numérique définie sur [0, 1]. On suppose que :

- f est continue et dérivable sur [0, 1] ;
- pour tout x appartenant à [0, 1], $f(x)$ appartient à] 0, 1[;
- pour tout x appartenant à [0, 1] $f'(x) < 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique sur] 0, 1[.

Exercice 5-7

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
2) Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction g définie sur D_f par : $g(x) = f(x) - x + 1$.
3) Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$

4) Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ).
5) Etudier les variations de *f*.
6) Montrer que le point I(–1, –2) est centre de symétrie de (C_f).
7) Tracer la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère.

Exercice 5-8

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f* ; puis les limites de *f* aux bornes de D_f.
2) a) Etudier la continuité puis la dérivabilité de *f* en 0 et en 2.
   b) Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?
3) Préciser le sens des variations de *f* ; puis dresser son tableau de variations.
4) Montrer que le point I (1, 1) est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
5) Construire la courbe (C_f) dans le repère.
6) a) Montrer que la restriction *g* de *f* à l'intervalle]1, 2] réalise une bijection de l'intervalle]1, 2] vers un autre intervalle J à déterminer.
   b) Représenter graphiquement la fonction réciproque g^{-1} de *g* dans le repère ; justifier la construction.

Exercice 5-9

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de *f* ; puis les limites de *f* aux bornes de D_f.
   a) Etudier la continuité puis la dérivabilité de *f* en 0 et en 2.
   b) Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?
2) Préciser le sens des variations de *f* ; puis dresser son tableau de variations.
   a) Calculer $f(2-x) - f(x)$.
   b) Quelle conséquence peut-on en déduire pour la courbe (C_f).
3) Construire la courbe (C_f) dans le repère.
4) a) Montrer que la restriction *g* de *f* à l'intervalle [0,1[réalise une bijection de l'intervalle [0,1[vers un autre intervalle J à déterminer.
   b) Représenter graphiquement la fonction réciproque g^{-1} de *g* dans le repère ; justifier la construction.

Exercice 5-10

I) Résoudre dans l'ensemble ℝ des nombres réels les inéquations avec radicaux suivantes :
   a) $\sqrt{x^2-1}+x<0$; b) $\sqrt{1-x^2}-x>0$

II) Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x) = x+\sqrt{|x^2-1|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité 4 cm).

1) a) Etudier la dérivabilité de *f* en –1 et en 1 ;
   b) Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?
2) Calculer les limites de *f* en $-\infty$ puis en $+\infty$.
3) a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où *f* est dérivable.
   b) Donner en utilisant la question I) le signe de $f'(x)$; puis le sens des variations de *f*.
   c) Dresser le tableau de variations de *f*.
4) Etudier l'existence des branches infinies à la courbe (C_f).
5) Construire les asymptotes ; les tangentes ou demi-tangentes s'il ya lieu et la courbe (C_f) dans le repère.

Exercice 5-11

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$.

On appelle (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de : $4\cos x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$
3) Etudier les variations de f sur $[-\pi, \pi]$ et dresser son tableau de variations.
4) Donner les valeurs exactes des extrema, et préciser en justifiant s'il s'agit de minima ou de maxima.
5) Démontrer que la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.
6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
7) Tracer dans le repère la tangente (T) et la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice 5-12

On considère f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x - 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   b) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire l'ensemble d'étude E_f de f.
2) Etudier les limites de f aux bornes de E_f.
   a) Calculer $f'(x)$; puis montrer que pour tout $x \in D_f$ $f'(x) = \dfrac{(1+\cos^2 x)2\sin x}{(\cos 2x - 1)^2}$.
   b) Donner le sens de variations de f sur E_f.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
4) a) Construire la droite (T), les asymptotes s'il y a lieu, puis la courbe (C_f) sur E_f.
   b) Expliquer comment on obtient la courbe entière (C_f) sur D_f, puis construire (C_f) sur $D_f \cap]-\pi, \pi]$.
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0, \pi[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $]0, \pi[$ vers un autre intervalle J à déterminer.
   b) Construire dans le même repère que (C_f), la courbe représentative (C') de la bijection réciproque h^{-1} ainsi que la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0 : (on ne demande pas une équation de la tangente (T')).

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 5-13

I) Soit u la fonction numérique définie sur $[-1, 1]$ par $u(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.
   1) Etudier le sens de variation de u sur $[-1, 1]$.
   2) En déduire le signe de $u(x)$ sur $[-1, 1]$.

II) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.
   1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
      b) Etudier la parité de g ?
   2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1 et en -1
      b) Que peut – on déduire graphiquement de la dérivée de g en 1 et en -1 ?
   3) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0.

III) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Que représente la fonction f pour la fonction g ?
3) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0.
4) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
   b) Donner le sens de variations de f
   c) Dresser son tableau de variations.
5) Donner les équations des tangentes ou des demi-tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisses –1 ; 1 et 0.
6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère.
7) a) Montrer que f est bijective de [–1 ; 1] vers un intervalle J à déterminer.
   b) Construire la courbe représentative $C_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque f^{-1} dans le repère.

Exercice 5-14

I) Déterminer le signe de $1-2\cos x$ sur $[0,\ \pi]$

II) On désigne par f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x)=\dfrac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) a) Etudier la périodicité et la parité de f.
   b) En déduire que f peut être étudiée sur $E = D_f \cap [0,\ \pi]$.
3) Etudier le sens de variations de f sur E et dresser son tableau de variations.
4) Construire la courbe (C_f) sur E puis sur D_f ; justifier la construction de (C_f) sur D_f.

Exercice 5-15

I) On considère g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,\ \pi]$ par : $g(x) = x\cos x - \sin x$.

1) Etudier le sens de variations de g puis dresser son tableau de variations.
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,\ \pi]$.

II) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,\ \pi]$ par :

$$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

1) Calculer $h'(x)$; $h''(x)$ et $h^{(3)}(x)$; (h' ; h'' et $h^{(3)}$ désignent les dérivées première, seconde et troisième de h respectivement)
2) Etudier le sens de variations de h'' ; de h' puis de h. Dresser un tableau de variations conjoint.
3) En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,\ \pi]$, on a :

$$0 \le x-\sin x \le \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad 1-\frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

III) On considère la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,\ \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x\in\,]0,\pi] \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1) En utilisant la question II) étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Etudier le sens de variations de f ; puis dresser son tableau de variations.
3) On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$.

4) Construire la courbe (C_f) sur $[0, \pi]$; puis sur $]-\pi, \pi]$: on justifiera la construction de (C_f) sur $]-\pi, 0]$.

Exercice 5-16

Partie A

On considère la fonction *f* de la variable réelle *x* définie sur l'intervalle I = $]-1, 1[$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ($C_f$) désigne sa courbe représentative dans un repère othonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier le sens de variations de *f* et dresser son tableau de variations.
2) Tracer la courbe (C_f) dans le repère.

Partie B

1) Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive *F* de *f* sur I s'annulant en 0.
2) Exprimer *F* (*x*) à l'aide d'une intégrale.
3) Préciser le sens de variation de *F* sur I.
4) a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in$ I.
   b) Préciser la valeur exacte de $F(x) + F(-x)$ puis en déduire que *F* est impaire.

Partie C

On considère la fonction sin : $x \mapsto \sin x$.

1) Montrer que la restriction *u* de la fonction sinus à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $]-1, 1[$.
2) On définit la fonction *G* par : $G = F \circ u$.
   a) Montrer que la fonction *G* est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   b) Calculer alors $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   c) En déduire qu'il existe un réel *k* tel que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = x + k$.
   d) Calculer *G* (0) et en déduire la valeur de *k*.
3) a) Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(u(x)) = x$ puis que pour tout $x \in]-1, 1[$, $u^{-1}(x) = F(x)$.
   b) Préciser alors les limites de *F* en -1 et en 1.
   c) Dresser le tableau de variations de *F*.
   d) Tracer dans le même repère, la courbe représentative (C_F) sur $]-1, 1[$, la fonction sinus sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. $\left(\text{On constatera que } x = \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 5-17

Partie A

On considère la fonction *f* de la variable réelle *x* définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. (C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère othonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier le sens de variation de *f* et dresser son tableau de variations.

2) Tracer la courbe (C_f) dans le repère.

Partie B

On définie pour tout réel x, la fonction F par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) a) Que représente la fonction F pour la fonction f ?

b) Préciser le sens de variations de F sur ℝ.

2) a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in$ ℝ.

b) Préciser la valeur exacte de $F(x) + F(-x)$ puis en déduire que F est impaire.

3) a) Montrer que pour tout réel $t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $\int_1^x f(t)\,dt \leq 1 - \dfrac{1}{x}$.

c) Montrer en utilisant le fait que pour tout $t \in [0, 1]$ $f(t) \leq 1$, que $\int_0^1 f(t)\,dt \leq 1$.

d) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq 2$.

(on rappelle que $\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$).

e) On admet le théorème suivant : « Soit f une fonction définie sur un intervalle I =] a, b [a ou b fini ou non. Si f est croissante sur I et si il existe un réel M tel que pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq$ M, alors f admet une limite finie ou non en a et en b ». En utilisant ce théorème (qui est un outil), Montrer que F admet une limite finie en + ∞.

Partie C

On considère la fonction tan : $x \mapsto \tan x$.

1) Montrer que la restriction u de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $[0, +\infty[$.

2) On définit la fonction par : $v = F \circ u$.

a) Montrer que la fonction v est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer alors $v'(x)$.

c) En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $v(x) = x + k$.

d) Calculer $v(0)$ et en déduire la valeur de k.

3) a) Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\big(u(x)\big) = x$ puis que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $u^{-1}(x) = F(x)$.

b) Préciser alors la limite de F en + ∞.

c) Tracer dans le même repère, la courbe représentative (C_F) sur ℝ, la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 5-1

1) *« Contraintes » de certaines opérations dans* $\mathbb{R}$
2) *Définition de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquences graphiques de la dérivabilité d'une fonction en un point.*

Solution

1) Déterminons l'ensemble de définition de chaque fonction :
   $D_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$; $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$; $D_h = [-1, +\infty[$.
2) Etudions la continuité puis la dérivabilité de :
   a) f en 1 et en -1.
   - ✓ $f(1) = \sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sqrt{2} = f(1)$; donc f est continue en 1.
   - ✓ $f(-1) = -4$; $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -4 = f(-1)$; donc f est continue en -1.
   - ✓ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-\sqrt{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{-2x-1}{\sqrt{x+1}+x\sqrt{2}}\right] = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ et
     $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-\sqrt{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\dfrac{2}{x} + \dfrac{-2x-1}{\sqrt{x+1}+x\sqrt{2}}\right] = -2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$; donc f n'est pas dérivable en 1 ; mais f est dérivable à droite de 1 et à gauche de 1.
   - ✓ $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)+4}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}\right] = -\infty$; donc f n'est pas dérivable en -1.

   b) g en 0.
   - ✓ g n'est pas continue en 0 car g n'admet pas de limite en 0. (g n'est pas définie au voisinage de 0).
   - ✓ g n'est pas dérivable en 0 pour la même raison.

   c) h en 0.
   - ✓ $h(0) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2} = h(0)$; donc h est continue n 0.
   - ✓ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-\frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sqrt{x+1}-(x+2)}{2x^2}\right] = -\dfrac{1}{8}$; donc h est dérivable en 0.
3) Conséquences graphiques des dérivabilités :
   a) (C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 1 et une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.
   b) Aucune conséquence graphique de la dérivabilité de g en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ n'existe pas.
   c) (C_h) admet une tangente au point d'abscisse 0 de pente $-\dfrac{1}{8}$.

Exercice 5-2

« Contraintes » de certaines opérations dans $\mathbb{R}$*, dérivabilité sur un intervalle ; Calculs pratiques de dérivées de fonctions ; (Dérivées de fonctions usuelles, opérations sur les fonctions dérivables).*

Solution

1) $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$; f est dérivable sur D_f en tant que fonction rationnelle.

$f'(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$.

2) $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$; f est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables dont la fonction $x\longmapsto\sqrt{2x-1}$ qui est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$. $f'(x)=\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}$.

3) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\};\ k\in\mathbb{Z}$; f est dérivable sur D_f en tant que quotient de fonctions dérivables (fonctions usuelles) ; $f'(x)=\dfrac{-2-\cos x}{\sin^2 x}$.

4) $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$; sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ et sur $]-\infty,0]$;

$f(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$; f est dérivable sur $]-\infty,0[$ en tant que fonction rationnelle ; sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction rationnelle.

Sur $]-\infty,0[$, $f'(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}$; et sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

5) $D_f=]-1,\ 1]$; f est dérivable sur $]-1,1[$ en tant que composée de la fonction racine carrée et de fonction rationnelle ; pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$.

6) $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$; f est dérivable sur D_f en tant que composée de la fonction cube et de fonction rationnelle ; $f'(x)=\dfrac{3(-2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Exercice 5-3

Primitives de fonctions usuelles ; opérations sur les fonctions dérivables ; Opérations sur les primitives de fonctions.

Solution

I) Par lecture directe de l'inverse du tableau : opérations sur les fonctions dérivables

1) $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{(2\sqrt{u})(x)}$; donc $F(x)=\sqrt{x^2+x+3}+k$; ($k\in\mathbb{R}$) ; $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

$F(0)=0$ équivaut à $\sqrt{3}+k=0$; $k=-\sqrt{3}$ d'où $F(x)=\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{3}$

2) $f(x)$ est de la forme $\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$; donc $F(x)=\dfrac{1}{3x^2-x-2}+k$; $\forall\, x\in\ ]1, +\infty[$ et $k\in\mathbb{R}$.

$A(2,-1)\in(C_F)$ équivaut à $F(2)=-1$; $\dfrac{1}{8}+k=-1$; $k=-\dfrac{9}{8}$; $F(x)=\dfrac{1}{3x^2-x-2}-\dfrac{9}{8}$

3) $f(x)$ est de la forme $r\,u'(x)\cdot(u^{r-1})(x)$; donc $F(x)=(\sin^3 x)+k$ · ; $\forall\, x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}$.

F prend la valeur 1 en 0 équivaut que $F(0)=1$; $0+k=1$; $k=-1$; $F(x)=(\sin^3 x)-1$

II) Par transformation simple de l'expression *f* (*x*).

1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(3x^2-2x-1)^2}=\dfrac{-1}{2}\left[-\dfrac{6x-2}{(3x^2-2x-1)^2}\right]$; donc $F(x)=\dfrac{-1}{2}\left[\dfrac{1}{3x^2-2x-1}\right]+k$;

$\forall\ x\in\left]\dfrac{-1}{3},1\right[$ et $k\in\mathbb{R}$; $F(0)=1$ équivaut à $\dfrac{1}{2}+k=0$; $k=-\dfrac{1}{2}$; donc

$F(x)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3x^2-2x-1}\right]-\dfrac{1}{2}$; $\forall\, x\in\left]\dfrac{-1}{3},1\right[$.

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} = \dfrac{1}{4}\times 2\times\left[\dfrac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}\right]$; donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + k$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

$F(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $k = 0$; donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x} = -\left[-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right] = \left[-\dfrac{1}{x^2}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\right] = \left[-\dfrac{1}{x^2}\cos'\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$; donc

$F(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + k$; $\forall\, x \in\,]0,\ +\infty[$ et $k \in \mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 1$ équivaut à $k = 1$;

$F(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$; $\forall\, x \in\,]0, +\infty[$.

III) Par transformation « en profondeur » de l'expression *f* (*x*)

1) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{2}\left[2(2x-1)^{-\frac{3}{2}}\right]$; donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[-2(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\right] + k$;

$F(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + k$; $k \in \mathbb{R}$; sur $\left]\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$; $F(1) = 1$ équivaut à $-1 + k = 1$; d'où

$F(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + 2$; $\forall\, x \in \left]\dfrac{1}{2},\ +\infty\right[$

2) $f(x) = \cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}\left[\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = \dfrac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$; donc

$F(x) = \dfrac{1}{12}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x + k$; $k \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$ équivaut à $\dfrac{2}{3} + k = \dfrac{2}{3}$

d'où $F(x) = \dfrac{1}{12}\sin 3x + \dfrac{3}{4}\sin x$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \cos^3 x \times \sin^2 x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right)\times \sin^2 x = \cos x \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot \sin^4 x$; donc

$F(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \dfrac{1}{5}\sin^5 x + k$; $k \in \mathbb{R}$; sur $\mathbb{R}$; $F(0) = 1$ équivaut à $k = 1$; d'où

$F(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \dfrac{1}{5}\sin^5 x + 1$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{-\tan x}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}$; donc $F(x) = \dfrac{-1}{\cos x} + k$; $k \in \mathbb{R}$; $F(0) = 2$ équivaut à

$-1 + k = 2$; alors $F(x) = \dfrac{-1}{\cos x} + 3$; $\forall\, x \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

5) $f(x) = \cos^2 x \times \sin^3 x = \cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right)\sin x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$; donc

$F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3 x + \dfrac{1}{5}\cos^5 x + k$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3 x + \dfrac{1}{5}\cos^5 x$

IV) Par parties (par décomposition de l'expression de *f* (*x*)).

1) $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}$; posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \sqrt{x+1}$ alors $u'(x) = 1$ et

$v(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ donc $F(x) = \dfrac{2}{3}x\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + k$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$;

$F(0) = -\dfrac{4}{15}$ donc $F(x) = \dfrac{2}{3}x\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = (x+1)\cdot\cos x$; posons $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = \cos x$ alors $u'(x) = 1$ et

$v(x) = \sin x$ donc $F(x) = (x+1)\sin x + \cos x + k$; $\forall x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$; $F(0) = 1$ donc $F(x) = (x+1)\sin x + \cos x$; $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 5-4</u>

1) *« Méthode de la division euclidienne » ; ou « méthode des coefficients indéterminés »*
2) *Primitives de fonctions usuelles ; Opérations sur les primitives de fonctions*

<u>Solution</u>

1) Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = 2 + \dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

2) $F(x) = 2x + \dfrac{3}{x+1} + k$; 3) $F(0) = 2$; donc $F(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x+1}$.

<u>Exercice 5-5</u>

1) *Règles de calculs de quotients (somme de fractions)*
2) *Primitives de fonctions usuelles ; Opérations sur les primitives de fonctions*

<u>Solution</u>

1) Pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} + \dfrac{-1}{(x-1)^3}$.

2) $F(x) = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{2(x-1)^2} + k$; 3) $F(2) = \dfrac{1}{2}$; donc $F(x) = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{2(x-1)^2} - 2$

<u>Exercice 5-6</u>

Principe de localisation

<u>Solution</u>

Posons $g(x) = f(x) - x$; g est continue et dérivable sur [0, 1] ; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (d'après l'hypothèse $f'(x) < 1$) donc la fonction g est strictement décroissante sur [0, 1].
De plus si x appartient à [0, 1], $f(x)$ appartient à] 0, 1[donc
$g(0) = f(0) > 0$ *et* $g(1) = f(1) - 1 < 0$. On a donc g qui est continue et strictement décroissante sur [0, 1] ; de plus $g(0) > 0$ *et* $g(1) < 0$. Donc d'après le principe de localisation appliqué à la fonction g sur l'intervalle [0, 1], l'équation
$g(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) = x$ admet une solution unique dans]0, 1[.

<u>Exercice 5-7</u>

1) *« Méthode de la division euclidienne ou des coefficients indéterminés »*
2) *Calcul de limites de fonction*
3) *Conséquences graphiques de limites.*
4) *Position relative d'une courbe et d'une droite dans le plan*
5) *Plan d'étude d'une fonction numérique*
6) *Eléments de symétrie d'une courbe : centre de symétrie.*

<u>Solution</u>

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - x + 1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right) = 0;$ *de même* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right) = 0$.

3) On peut en déduire que la droite (Δ) *d'équation* $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

4) Si $x > -1$, $f(x) - x + 1 > 0$ donc (C_f) est au dessus de (Δ) sur $]-1, +\infty[$;
Si $x < -1$, $f(x) - x + 1 < 0$ donc (C_f) est en dessous de (Δ) sur $]-\infty, -1[$.

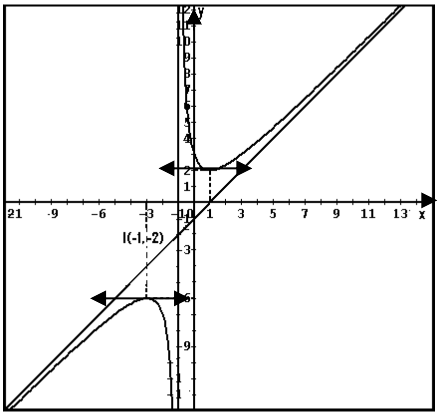
5) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty;$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que fonction rationnelle et on a pour

tout $x \in D_f$, $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; f est croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[1, +\infty[$, et décroissante sur $[-3, -1[$ et sur $]-1, 1]$. On peut dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

6) $f\big(2(-1)-x\big) = 2(-2) - f(x)$; donc le point I(–1, –2) est bien centre de symétrie de (C_f).

7) Courbe représentative (C_f) de f.



Exercice 5-8

1) *Règles de calculs ou contraintes de certaines opérations dans $\mathbb{R}$; Calcul de limites de fonction.*
2) *Continuité et dérivabilité d'une fonction numérique en un point ; conséquences graphiques de la dérivabilité.*
3) *Plan d'étude d'une fonction numérique.*
4) *Eléments de symétrie d'une courbe : centre de symétrie.*
5) *Construction de courbe représentative de fonction.*
6) *Théorème de la bijection.*

Solution

1) $D_f = [0, 1[\cup]1, 2]$; $f(0) = 0$; $f(2) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

2) a) f est continue en 0 et en 2 ; car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$; f n'est pas dérivable en 0 et en 2 car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\infty$.

b) On en déduit que la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0, une demi tangente verticale et au point d'abscisse 2, une demi tangente verticale.

3) $f'(x) = \dfrac{-1-\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2\sqrt{2x-x^2}}$; $f'(x) < 0$ sur $]0, 2[\setminus \{1\}$; donc f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$.

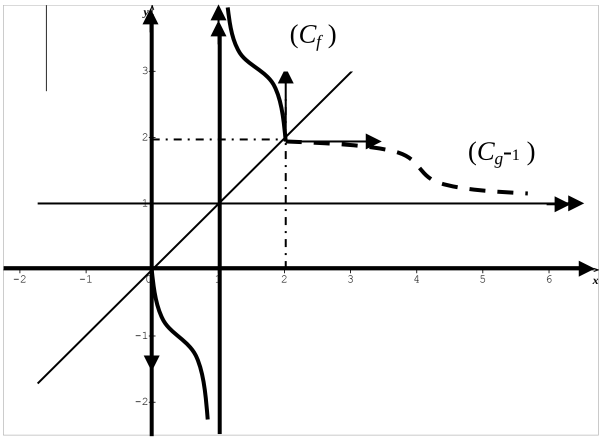
x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

4) $f(2-x) = 2 - f(x)$ donc le point I (1, 1) est bien un centre de symétrie de la courbe (C_f).

5) Courbe (C_f) (voir à la fin du corrigé de l'exercice)

6) a) Sur]1, 2], g est continue et strictement décroissante (d'après le tableau de variation de f), donc elle réalise une bijection de]1, 2] vers l'intervalle [2, $+\infty$ [.

b) La courbe représentative de la bijection réciproque g^{-1} est le symétrique de celle de f sur]1, 2] par rapport à la droite d'équation $y = x$. (Courbe en pointillés).



Exercice 5-9

1) *Règles de calculs dans ℝ ; Inéquations du second degré ; Calcul de limites de fonction.*
2) Continuité et dérivabilité d'une fonction numérique en un point ; Conséquences graphiques de la dérivabilité.
3) Plan d'étude d'une fonction numérique.
4) Eléments de symétrie d'une courbe : centre de symétrie.
5) Construction de courbe représentative de fonction.
6) Théorème de la bijection.

Solution

1) $D_f = [0, 1[\cup]1, 2]$; $f(0) = 1$; $f(2) = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

2) a) f est continue en 0 et en 2 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$; f n'est pas dérivable en 0 et en 2 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\infty$

b) On en déduit que la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0, une demi tangente verticale et au point d'abscisse 2, une demi tangente verticale.

3) $f'(x) = \dfrac{-\left(\sqrt{2x - x^2} + 1\right)^2}{(x-1)^3 \sqrt{2x - x^2}}$; sur]0, 1[$f'(x) > 0$ et sur]1, 2[$f'(x) < 0$; donc f est strictement croissante sur]0, 1[et strictement décroissante sur]1, 2[.

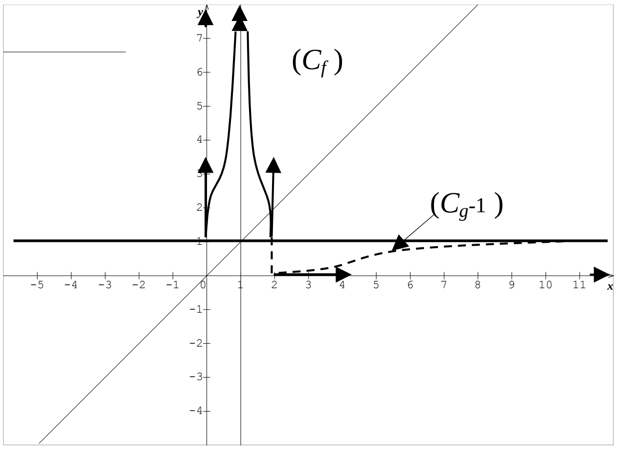
x	0	1	2
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 1

4) a) $f(2 - x) - f(x) = 0$; b) On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

5) Courbe (C_f) (voir à la fin du corrigé de l'exercice)

6) a) Sur [0, 1[, g est continue et strictement croissante (d'après le tableau de variation de f), donc elle réalise une bijection de [0, 1[vers l'intervalle [1, $+\infty$ [.

b) La courbe représentative de la bijection réciproque g^{-1} est le symétrique de celle de f sur [0, 1[par rapport à la droite d'équation $y = x$. (Courbe en pointillés).



Exercice 5-10

I) Inéquations avec radicaux : (connaissances de base)

II) 1) Définition de la dérivabilité de fonction en un point ; Conséquences graphiques de la dérivabilité de fonction en un point.

2) Calcul de limite de fonction à l'infinie (penser aux expressions conjuguées)

3) Calcul pratique de dérivée de fonction ; Dérivabilité et monotonie ; Tableau de variation

4) Recherche des équations des branches infinies à une courbe.

5) Construction d'une courbe représentative de fonction.

Solution

I) Résolvons dans l'ensemble ℝ des nombres réels les inéquations avec radicaux suivantes.

a) $\sqrt{x^2-1}+x<0$ équivaut à $\sqrt{x^2-1}<-x$ c'est-à-dire $\begin{cases} x<0 \\ x^2-1\geq 0 \end{cases}$ ce qui donne $x \leq -1$.

b) $\sqrt{1-x^2}-x>0$ équivaut à $\sqrt{1-x^2}>x$ c'est-à-dire $\begin{cases} x<0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x^2>x^2 \end{cases}$ ce qui donne $-1\leq x<0$ ou $0\leq x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc $-1\leq x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II) $f(x)=x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$.

1) a) Etudions la dérivabilité de f en –1 et en 1.

D_f = ℝ ; et sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$; $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ et sur $[-1, 1]$ $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$; $f(-1)=-1$ et $f(1)=1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1^-}\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+\sqrt{1-x^2}+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\left(1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1^+}\left(1+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=+\infty$$

Dans l'un des cas on peut conclure que f n'est pas dérivable en –1.

De même on a $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}-1}{x-1}=\lim_{x\to -1}\left(1+\frac{\sqrt{\left|x^2-1\right|}}{x-1}\right)=\infty$; f n'est pas dérivable en 1.

b) En déduisons des conséquences graphiques.

f n'est pas dérivable en –1 et $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\infty$; donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse –1, une demi tangente verticale d'équation $x = -1$.

De même f n'est pas dérivable en 1 et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\infty$; donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 1, une demi tangente verticale d'équation $x = 1$.

2) Calculons les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$; car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

3) a) Calculons $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.

Sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; $f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$; donc sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$f'(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$;

Sur $[-1, 1]$ $f(x) = x+\sqrt{1-x^2}$; donc sur $]-1, 1[$ $f'(x) = 1+\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Donnons en utilisant la question I) le signe de $f'(x)$; puis le sens des variations de f.

Pour tout $x \in\,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $\sqrt{x^2-1} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x^2-1}+x$; de même sur $]-1, 1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{1-x^2}-x$; or d'après les solutions à la question I),

$\sqrt{x^2-1}+x < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, $\sqrt{x^2-1}+x > 0$;

$\sqrt{1-x^2}-x > 0$ sur $\left]-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ par suite $\sqrt{1-x^2}-x < 0$ sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

Par conséquent $f'(x) > 0$ sur $\left]-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup]1, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[\cup \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

f est alors strictement croissante sur $\left]-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et sur $]1, +\infty[$; et strictement décroissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ et sur $]-\infty, -1[$

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

4) Etudions l'existence des branches infinies à la courbe (C_f).

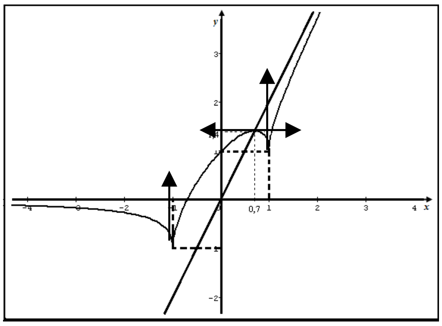
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right) = 2$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.

5) Construisons les asymptotes ; les tangentes ou demi-tangentes s'il ya lieu et la courbe (C_f) dans le repère.



Exercice 5-11

1) *Périodicité de la fonction*
2) *Calcul pratique de dérivées de fonctions, Formules trigonométriques*
3) *Dérivabilité et monotonie de fonction*
4) *Dérivabilité et extrema de fonction*
5) *Eléments de symétrie d'une courbe : axe de symétrique.*
6) *Equation de tangente à une courbe (C_f) en un point d'abscisse x_0.*
7) *Construction d'une courbe représentative de fonction.*

Solution

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$.

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifions que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
La fonction f est définie sur ℝ ; la fonction sinus est périodique de période 2π et la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est période de période π ; donc f est périodique de période 2π (ppcm $(\pi, 2\pi)$). Donc on peut étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π soit par exemple sur $E_f = D_f \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]$.

2) Démontrons que, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de : $4\cos x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$
f est dérivable sur ℝ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout x ;
$f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = -4\sin x\cos x + 2\cos x = 4\cos x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$; donc $f'(x)$ est du signe de : $4\cos x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$.

3) Etudier les variations de f sur $[-\pi, \pi]$ et dresser son tableau de variation.
$f'(x) = 0$ équivaut à $4\cos x\left(\frac{1}{2}-\sin x\right) = 0$ soit $\cos x = 0$, ou $\sin x = \frac{1}{2}$; sur$[-\pi, \pi]$ on a : $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.
$f'(x) \le 0$ sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ et $f'(x) \ge 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$
Par conséquent f est décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$; sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$;
f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

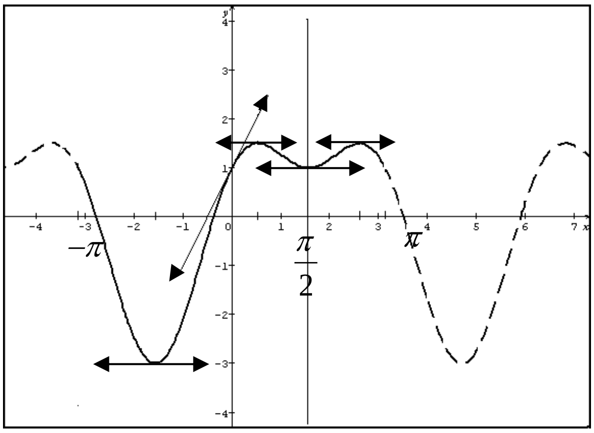
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-2
$f(x)$	1	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

4) Donnons les valeurs exactes des extrema, et précisons en justifiant s'il s'agit de minima ou de maxima.
D'après le tableau de variation de *f*, –3 est un minimum absolu, 1 est un minimum local et un maximum local et $\frac{3}{2}$ est un maximum absolu.

5) Démontrons que la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.
$f(\pi - x) = \cos(2\pi - 2x) + 2\sin(\pi - x) = \cos 2x + 2\sin x = f(x)$; donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est bien axe de symétrie de la courbe (C_f).

6) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
(T) a pour équation $y = f'(0)\,x + f(0) = 2x + 1$

7) Traçons dans le repère la tangente (T) et la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Exercice 5-12

1) *Règles de calculs dans ℝ ; Equations trigonométriques ; Définition de la périodicité ; de la parité d'une fonction.*
2) *Calculs pratiques de limites de fonctions*
3) *Calculs pratiques de dérivée de fonction ; Dérivées et monotonie ; Tableau de variation*
4) *Equation de tangente à une courbe de fonction en un point d'abscisse x_0*
5) *Construction de droites et de courbe représentative de fonction ; Conséquences graphiques de la périodicité et de la parité d'une fonction.*
6) *Théorème de la bijection.*

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x - 1}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminons l'ensemble de définition D_f de *f*.
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \cos(2x) - 1 \neq 0\}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Etudions la périodicité et la parité de *f*
La fonction cosinus est périodique de période 2π ; la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est période de période π ; donc *f* est périodique de période 2π (ppcm $(\pi, 2\pi)$).
Pour tout $x \in D_f$, $x \neq k\pi$; $-x \neq -k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-2x) - 1}$;
la fonction cosinus est paire donc, $f(-x) = \frac{\cos x}{\cos 2x - 1} = f(x)$; *f* est paire.

En déduisons l'ensemble d'étude E_f de *f*.
f est périodique de période 2π; on peut alors étudier *f* sur $D_f \cap [-\pi, \pi]$; de plus *f* est

paire d'où on peut l'étudier sur $E_f = D_f \cap [0, \pi] =]0, \pi[$.

2) Etudions les limites de f aux bornes de E_f.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = +\infty$

3) a) Calculons $f'(x)$; puis montrons que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{(1+\cos^2 x)2\sin x}{(-1+\cos 2x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{-\sin x\ (\cos 2x - 1) + 2\sin 2x\cos x}{(\cos 2x - 1)^2} = \frac{2\sin^3 x + 4\sin x\cos^2 x}{(\cos 2x - 1)^2} = \frac{2\sin x(1+\cos^2 x)}{(\cos 2x - 1)^2}$$

b) Donnons le sens de variations de f sur E_f.

Pour tout $x \in]0, \pi[$; $\sin x > 0$; $1+\cos^2 x > 0$ et $(\cos 2x - 1)^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$; par conséquent f est strictement croissante sur $]0, \pi[$.

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	0	π
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

(T) a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}$

5) a) Construisons la droite (T), les asymptotes s'il y a lieu, puis la courbe (C_f) sur E_f (Voir la figure en fin de corrigés de l'exercice)

b) Expliquons comment on obtient la courbe entière (C_f) sur D_f, puis construisons (C_f) sur $D_f \cap]-\pi; \pi[$.

La partie de la courbe (C_f) sur $D_f \cap]-\pi; \pi[$ s'obtient en traçant, en plus de celle tracée sur $]0, \pi[$, son symétrique par rapport à l'axe (Oy).

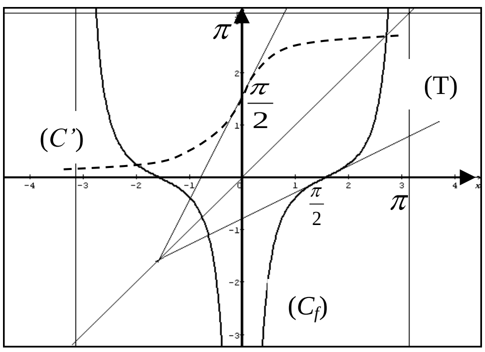
La courbe entière (C_f) s'obtient à partir de celle tracée sur $D_f \cap]-\pi; \pi[$ par translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

6) a) Montrons que h réalise une bijection de $]0, \pi[$ vers un autre intervalle J à déterminer.

La restriction h de f à l'intervalle $]0, \pi[$ est, d'après le tableau de variation continue (car dérivable) et strictement croissante ; elle réalise alors d'après le théorème de la bijection, une bijection de $]0, \pi[$ vers J = $\mathbb{R}$.

b) Construisons dans le même repère que (C_f), la courbe représentative (C') de la bijection réciproque h^{-1} ainsi que la tangente (T') à (C') au point d'abscisse 0.

(Voir la figure ci-dessous) (C') est en pointillé.



CHAPITRE 6

FONCTIONS LOGARITHMES
FONCTIONS EXPONENTIELLES
FONCTIONS PUISSANCES

Vers la fin du XVI^{e} siècle, le développement de l'astronomie et de la navigation d'une part et les calculs bancaires d'intérêts composés d'autre part, poussent les mathématiciens à chercher des méthodes de simplifications de calculs et en particulier le remplacement des multiplications par des sommes.

Des tables de correspondances entre produit et somme sont créées au fil des années :

- Paul Wittich (1546—1586) et Christophe Clavius établissent des correspondances entre produit ou quotient et somme, d'une part ; entre différence et division par deux d'autre part, en utilisant des tables trigonométriques ; par exemple en posant x = sin (a) et y = cos(b) on peut formuler : $x \times y = (\sin a) \times (\cos b) = \dfrac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$.
- Simon Stévin, intendant général de l'armée hollandaise, met au point des tables de calculs d'intérêts composés.
- John Napier (ou Neper) (1614) crée des tables de correspondances qu'il appela tables logarithmiques : entre deux séries de valeurs possédant la propriété suivante : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre.

La notation Log comme abréviation de logarithme apparait en 1616 dans A Description of the Admirable Table of Logarithmes, une traduction anglaise d' Edward Wright des travaux de NEPPER.

- Le travail de John Napier sera poursuivi et prolongé par les mathématiciens Henry Briggs, Johann Kepler, Ezechiel de Decker et Adriaan Vlacq.
- En 1647, Grégoire de Saint-Vincent met en évidence une nouvelle fonction qui se trouve être la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ s'annulant en 1 ; mais c'est Huygens en 1661 qui remarquera que cette fonction se trouve être une fonction logarithme particulière : le logarithme naturel.
- Ce logarithme serait appelé plus tard logarithme népérien en hommage au mathématicien écossais John Napier qui est à l'origine des premières tables logarithmiques en mathématiques.
- La notion de fonction, la correspondance entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes n'apparaissent que plus tardivement après le travail de Leibniz sur la notion de fonction (1697).

La première apparition de e comme nombre remarquable date de 1683, date à laquelle Bernoulli s'intéresse à la limite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. Plus tard Leibniz identifiera ce nombre comme étant la base du logarithme naturel, mais il le nomma b.

On doit la notation e pour cette constante à Euler en 1731.

ln (notation contemporaine de Log) est utilisé en 1893 par l'américain Irving STRINGHAM (1847-1909) dans Uniplanar Algebra.

Depuis ces fonctions sont des puissants outils en mathématiques (pures ou appliquées) ; en physiques ; en économie ; en médecine….

CE QU'IL FAUT RETENIR

A) FONCTIONS LOGARITHMES

I) Fonction logarithme népérien : ln.

1) Définition

(*Outil pour reconnaitre la fonction ln ; pour déterminer la dérivée de ln*)

- La fonction logarithme népérien notée ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 sur $\mathbb{R}_+^*$; $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.
- ln est donc une fonction définie et dérivable sur]0, +∞[et on a $\ln' x = \frac{1}{x}$; ln 1 = 0.
- La fonction ln est donc continue et strictement croissante sur]0, +∞[(car ln' $x > 0$ sur]0, +∞[ ) ; elle est alors bijective. Le réel 1 possède alors un seul antécédent par ln.

2) Propriétés algébriques

(*Outil pour effectuer des calculs algébriques sur les ln ou résoudre des équations ou inéquations comportant ln*)

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs, alors on a :

$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$; $\ln a^r = r\times\ln a$; $(r\in\mathbb{R})$

$\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$; $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$; $\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$

Exemple : Résoudre dans ℝ, l'équation $\ln(-2x+5) = 0$; puis l'inéquation $\ln\left(-x^2+2x+3\right) \le 0$

Solution : L'équation $\ln(-2x+5) = 0$ n'est valable que si $-2x + 5 > 0$; c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$; donc $D_v = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$ et sur D_v $\ln(-2x+5) = 0$ équivaut à $\ln(-2x+5) = \ln 1$ ce qui équivaut à $-2x + 5 = 1$; $x = 2$; $2 \in D_v$ donc S = {2}.

L'inéquation $\ln\left(-x^2+2x+3\right) \le 0$ n'est valable que si $-x^2+2x+3 > 0$; c'est-à-dire $-1 < x < 3$; donc $D_v =]-1, 3[$ et sur D_v, $\ln\left(-x^2+2x+3\right) \le 0$ équivaut à $\ln\left(-x^2+2x+3\right) \le \ln 1$ ce qui équivaut à $-x^2+2x+3 \le 1$; $-x^2+2x+2 \le 0$; donc $S = \left]-1,\ 1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3},\ 3\right[$

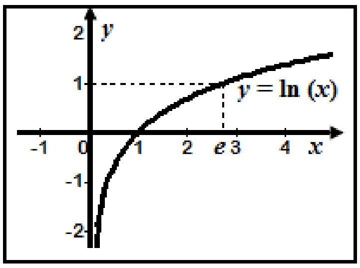
3) Etude de la fonction ln.

(*Outil pour étudier le sens de variations de la fonction ln*)

$$\ln :]0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

- La fonction ln est définie sur] 0 ; +∞ [
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\ln' x = \frac{1}{x}$; pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$; ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[
- L'unique antécédent de 1 par la fonction ln est le nombre $e \approx 2,72$: ln e = 1.

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$		+	1	+	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



Courbe d'équation : y = ln x

4) Limites

(*Outil pour déterminer la limite d'une fonction comportant ln en un point ; ou pour lever les formes indéterminées sur les limites où il y a ln*)

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$ (pour tout rationnel $r > 0$)
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ce qui se traduit : au voisinage de 0, ln $(1 + x) \approx x$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \ln(u(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \\ -\infty & \text{si } \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \\ \ln l & \text{si } \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = l\ ;\ (l>0) \end{cases}$ (x_0 fini ou non et $u(x) > 0$)

<u>Exemple</u> : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-2)\ln(x-1)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{2x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x)\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$

<u>Solution</u> : Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-2)\ln(x-1)$ prend la forme indéterminée $0 \times \infty$ (car $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-2) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0^+$ et alors $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$)

Posons $X = x - 1$, alors $x = X + 1$; si $x \to 1^+$, $X \to 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-2)\ln(x-1) =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x+2)(x-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{X\to 0^+} (X+3)X\ln(X) = 0;\ [\ (0+3)\times 0]$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ prend la forme indéterminée $0 \times \infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$)

Posons $X = \dfrac{1}{x}$, alors $x = \dfrac{1}{X}$; si $x \to +\infty$, $X \to 0^+$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{2x-1}$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ (car

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$) ; on peut dire que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \times \dfrac{x+1}{2x-1}$; posons $X = x + 1$, $x = X - 1$; si $x \to +\infty$, $X \to +\infty$ et

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \times \dfrac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} \times \dfrac{X}{2X-3} = 0$; $\left(0 \times \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{2x-1} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x)\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$ prend la forme indéterminée $0 \times \infty$ (car

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x) = +\infty$) ; on a

$\dfrac{x+2}{x+3} = 1 + \left(\dfrac{-1}{x+3}\right)$ et posons $X = \dfrac{-1}{x+3}$; $x = \dfrac{-3X-1}{X}$; si $x \to -\infty$, $X \to 0^+$ et donc

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\ln\left[1+\left(\frac{-1}{x+3}\right)\right]=\lim\limits_{X\to0^+}\left(\frac{7X+2}{X}\right)\ln(1+X)$; ensuite

$\lim\limits_{X\to0^+}\left[\left(\frac{7X+2}{X}\right)\ln(1+X)\right]=\lim\limits_{X\to0^+}\left[(7X+2)\frac{\ln(1+X)}{X}\right]$; on a finalement

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=\lim\limits_{X\to0^+}(7X+2)\frac{\ln(1+X)}{X}=2$; (2×1).

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; sin 2x = 2 sin x × cos x ; donc on a

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\frac{1}{2\cos x}\right]$; au « voisinage de 0 cos $x > 0$,

$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$; donc $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\frac{1}{2\cos x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\right]$

Posons X = sin x; si $x\longrightarrow 0$, $X\longrightarrow 0$ et donc

$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\right]=\lim\limits_{X\to0}\left[\frac{\ln(1+X)}{X}\times\frac{1}{2\sqrt{1-X^2}}\right]=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; alors

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$

5) Dérivées ; Primitives

(*Outil pour déterminer la dérivée d'une fonction comportant ln (fonction logarithmique) ou déterminer une primitive de la fonction :* $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ *sur un intervalle*)

- Lorsque $u > 0$ et dérivable sur I, alors $\ln\circ u$ est dérivable sur I et pour tout x appartenant à I ; $\ln'(u(x))=\frac{u'(x)}{u(x)}$
- Lorsque $u > 0$ et dérivable sur I, alors une primitive de la fonction : $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I est la fonction : $x\mapsto\ln|u(x)|+k$ (avec k un nombre réel)

Exemple : Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) f définie par $f(x)=\tan x$ sur I = $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

b) f définie par $f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{1-x}$ sur I =] 1, +∞[

Solution : Déterminons une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) f définie par $f(x)=\tan x$ sur I = $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; pour tout $x\in$ I,

$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=-\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=-\left(\frac{\cos' x}{\cos x}\right)$ qui est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$; donc une primitive F de f sur I est de la forme $F(x)=-\ln|\cos x|+k$; $k\in\mathbb{R}$. ; mais sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ cos $x > 0$,

donc $F(x)=-\ln(\cos x)+k$; $k\in\mathbb{R}$.

b) f définie par $f(x)=\frac{2x^2+x+3}{x-1}$ sur I =] 1, +∞[; pour tout $x\in$ I, on a par la division euclidienne, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{1-x} = -2x + 1 + \dfrac{3}{-x+1} = -2x + 1 - 3\left(\dfrac{-1}{-x+1}\right)$; donc une primitive F de f sur I est de la forme $F(x) = -x^2 + x - 3\ln\left|-x+1\right| + k$; $k \in \mathbb{R}$. ; mais sur $]1, +\infty[$, $(-x+1) < 0$; donc $F(x) = -x^2 + x - 3\ln(x-1) + k$; $k \in \mathbb{R}$.

II) Logarithme décimal : log.

Le logarithme décimal noté log est défini pour tout nombre réel x strictement positif, par : $\log x = \log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. $\ln 10 \approx 2{,}30$; $\log 10 = 1$; $\log 10^n = n$.

Remarques :

- Le logarithme décimal est aussi appelé logarithme en base 10. On note aussi pour tout $x > 0$, $\log x = \log_{10} x$.
- On peut ainsi définir des logarithmes de base a, ($a > 0$ et $a \neq 1$) en posant : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} \times \ln x$; $\forall\, x > 0$.

B) FONCTIONS EXPONENTIELLES.

I) Fonction exponentielle népérienne.:*exp.*

1) Définition

(*Outil pour résoudre des équations comportant exponentielles ou ln*)

- La fonction exponentielle (ou fonction exponentielle népérienne) est la bijection réciproque de la fonction ln.
- Pour tout réel x, on pose *exp* $(x) = e^x$ et $e^x = y$ signifie que $y > 0$ et $x = \ln y$ De même $\ln x = y$ équivaut à $x > 0$ et $x = e^{\,y}$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.

2) Conséquences:

- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$;
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. Pour tout réel x, $\ln e^{\,x} = x$.

3) Propriétés algébriques

(*Outil pour effectuer des calculs algébriques sur les exponentiels ou résoudre des équations ou inéquations comportant exponentiel*)

- Si a et b sont des nombres réels quelconques, alors on a :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$.

$e^{\,a} = e^{\,b}$ équivaut à $a = b$; $e^{\,a} < e^{\,b}$ équivaut à $a < b$; $e^{\,a} > e^{\,b}$ équivaut à $a > b$.

Exemple :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^{x^2+2x-3} \leq 1$; b) $2e^x + e^{-x} = 3$
2) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 4 \\ e^{x-y} = 1 \end{cases}$

Solution :

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2+2x-3} \leq 1$; $1 = e^0$; donc $e^{x^2+2x-3} \leq 1$ équivaut à $e^{x^2+2x-3} \leq e^0$; alors on a : $x^2 + 2x - 3 \leq 0$; $(x-1)(x+3) \leq 0$; $-3 \leq x \leq 1$; $S = [-3, 1]$.

b) $2e^x + e^{-x} = 3$ équivaut à $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$; posons $X = e^x$; l'équation devient :

$2X^2 - 3X + 1 = 0$; soit $X = 1$ ou $X = \frac{1}{2}$. Si $X = e^x = 1$, alors $x = 0$ et si

$X = e^x = \frac{1}{2}$, alors $x = -\ln 2$; $S = \{-\ln 2, 0\}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$; par combinaison linéaire, on a : $7e^x = 21$; $e^x = 3$, et par suite

$e^y = 4$; donc $x = \ln 3$ et $y = 2\ln 2$. $S = \{(\ln 3, 2\ln 2)\}$.

b) $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 4 \\ e^{x-y} = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 4 \\ e^x = e^y \end{cases}$; donc $e^{2x} = 4$ ou $\left(\left(e^x - 2\right)\left(e^x + 2\right) = 0\right.$.

On a alors $e^x = 2$, car $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. Donc $e^x = 2$ et $e^y = 2$; $x = y = \ln 2$.
$S = \{(\ln 2, \ln 2)\}$.

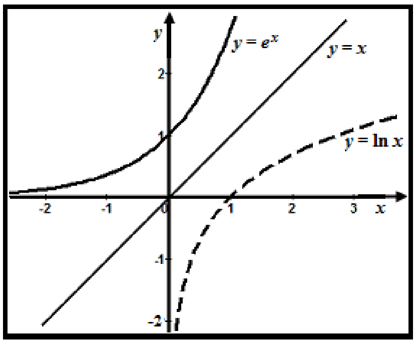
4) <u>Etude de la fonction *exp*.</u>

(*Outil pour étudier le sens de variations de la fonction exponentielle*)

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto exp\,(x) = e^x$$

- La fonction *exp* est définie sur $\mathbb{R}$; (pour tout nombre réel x, $exp\,(x) = e^x$.)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $exp'(x) = (e^x)' = e^x$; pour tout réel x, $e^x > 0$; la fonction *exp* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$	$+$	1	$+$
e^x	0 ↗	1	↗ $+\infty$



Courbe d'équation : $y = e^x$

5) <u>Limites</u>

(*Outil pour déterminer la limite d'une fonction comportant exponentiel, en un point*)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^r e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r e^{-x} = 0$ (pour tout rationnel $r > 0$)
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; ce qui se traduit : au voisinage de 0, $e^x \approx x + 1$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \\ 0 & \text{si } \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \\ e^l & \text{si } \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l \text{ ; } (l \text{ un réel quelconque}) \end{cases}$

<u>Exemple</u> : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\left(\frac{-2x+1}{x-2}\right)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)e^{-x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2+e^{1-x}}{x-1}\right)$.

Solution : Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\left(\frac{-2x+1}{x-2}\right)}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2x+1}{x-2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$: donc $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\left(\frac{-2x+1}{x-2}\right)}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x}\right)+\left(e^{-x}\right)=0$ (limites usuelles)

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2+e^{1-x}}{x-1}\right)$ prend la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$; posons $X = x - 1$; $x = X + 1$; si

$x \to 1$, $X \to 0$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2+e^{1-x}}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to 0}\left(\dfrac{X+e^{X}-1}{X}\right)=\lim\limits_{X\to 0}\left(1+\dfrac{e^{X}-1}{X}\right)=1+1=2$.

6) Dérivées ; Primitives

(*Outil pour déterminer la dérivée d'une fonction comportant exponentiel ou déterminer une primitive de la fonction :* fonction $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ *sur un intervalle donné*).

- Lorsque u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I ; et pour tout $x \in$ I, on a :
 $f'(x) = (e^{u(x)})' = u'(x)\,e^{u(x)}$.
- Lorsque u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors une primitive de la fonction $x\mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ est de la forme $x\mapsto e^{u(x)}+k$; (k un nombre réel).

II) Fonction exponentielle de base *a* : exp_a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

1) Puissance réelle : a^b

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on poset $a^b=e^{b\ln a}$; la puissance réelle possède les mêmes propriétés algébriques que la puissance entière.

2) Fonction exponentielle de base *a* ($a > 0$ et $a \neq 1$)

- Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, la fonction : $Exp_a : x \mapsto a^x=e^{x\ln a}$ pour tout réel x est appelée fonction exponentielle de base a.
- L'étude d'une fonction exponentielle de base quelconque a ($a > 0$ et $a \neq 1$) se ramène à celle d'une fonction de la forme e^u ; car $a^x=e^{x\ln a}$.
- La fonction exponentielle de base a $\left(Exp_a : x \mapsto a^x=e^{x\ln a}\right)$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a $\left(\log_a : x \mapsto \log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)$.
- En particulier la fonction exponentielle de base 10 $Exp_{10} : x\mapsto 10^x=e^{x\ln 10}$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme décimale $\log : x\mapsto \log x$.

C) FONCTIONS PUISSANCES

I) Fonction puissance entière f_n : $x\mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)

(*Outil pour étudier une fonction puissance entière ; pour déterminer la racine n*[ième] *d'un nombre*)

1) cas où $n \in \mathbb{Z}_+^*$

- f_n : $x\mapsto x^n$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$;
- Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ si n est pair ; et une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si n est impair.

Fonction racine *n*-ième

- Pour tout $x \geq 0$, la fonction réciproque de f_n : $x\mapsto x^n$ ($n > 0$) est appelée fonction racine n-ième et définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_{\frac{1}{n}}\ :\ x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

- Pour tous réels positifs a et x, $\sqrt[n]{x} = a$ équivaut à $x = a^n$.

2) <u>cas où $n \in \mathbb{Z}_-^*$</u>

- Si $n < 0$; la fonction $f_n :\ x \mapsto x^n$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$.

II) <u>Fonction puissance</u> f_α : $x \mapsto x^\alpha$ (α étant un réel non nul)

(*Outil pour étudier les fonctions puissances ou des fonctions comportant un paramètre réel*)

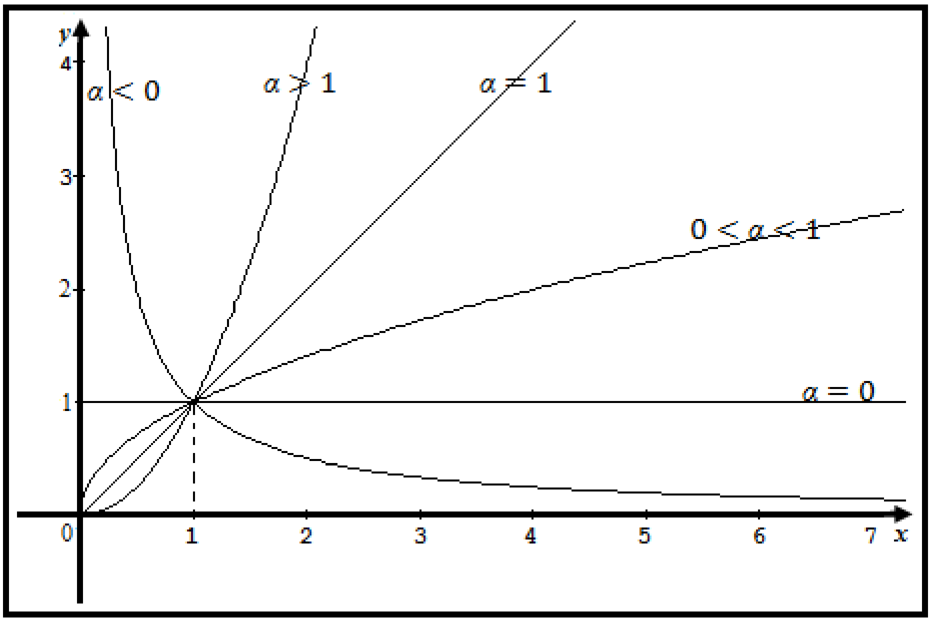
1) <u>Définition</u>

- Pour tout réel $\alpha \neq 0$, la fonction puissance $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

2) <u>Etude des fonctions puissances</u> : $f_\alpha :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$

$$X \mapsto f_\alpha(x) = x^\alpha$$

<table>
<tr><td>$\alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$</td><td>$\alpha < 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$</td></tr>
<tr><td>f_α est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty[$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(x^\alpha)'$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x^α</td><td>0 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table></td>
<td>f_α est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty[$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(x^\alpha)'$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>x^α</td><td>$+\infty$ ↘ 0</td></tr>
</table></td></tr>
</table>



D) <u>CROISSANCES COMPAREES</u> :

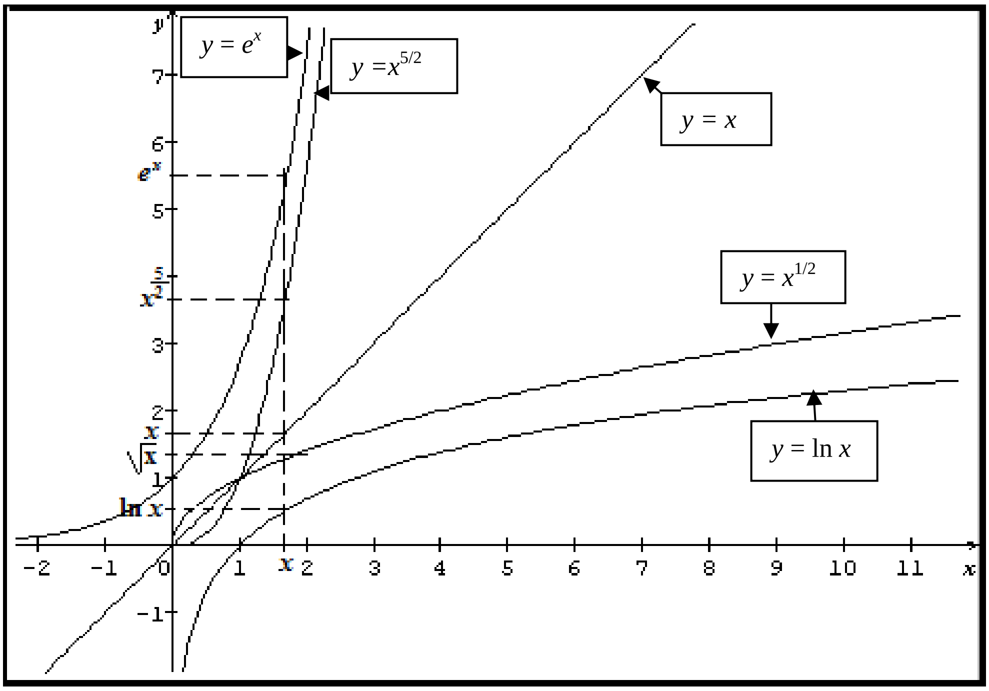
(*Outils pour étudier les limites de fonctions comportant ln, exponentiel et ou puissance en un point*)

Il s'agit de comparer les limites en ∞ et en 0 des fonctions logarithmes, exponentielles et puissances :

- **<u>Comparaison logarithme et puissances</u>** :
  - ✓ $\forall\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$; (en général on a : $\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=0$)
  - ✓ $\forall\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0$; (en général on a : $\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha(\ln x)^\beta=0$)
- **<u>Comparaison exponentielle et puissances</u>**
  - ✓ $\forall\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$; (en général on a : $\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)^\beta}{x^\alpha}=0$)
  - ✓ $\forall\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$; (en général on a : $\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha(e^{-x})^\beta=0$)
  - ✓ $\forall\alpha>0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha e^{x}=0$; (en général on a : $\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha(e^{x})^\beta=0$)
- **<u>Comparaison logarithme et exponentielle</u>**
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=+\infty$; ; (en général on a : $\forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(\ln x)^\beta}=+\infty$)
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln x=0$; ; (en général on a : $\forall\beta>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}(\ln x)^\beta=0$)

<u>Principe général</u> : A plus l'infini, l'exponentielle « l'emporte » sur les puissances qui, elles-mêmes « l'emportent » sur le logarithme !

On peut l'observer sur la figure ci-dessous.



EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 6-1

Simplifier les expressions suivantes : (a, b et x étant des réels strictement positifs.)

A = $\dfrac{\ln\left(\sqrt{19}-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\sqrt{19}+\sqrt{3}\right)}{4\ln 2}$; B = $\ln(a^7) - 12\ln\sqrt{a} + \ln\left(\dfrac{2}{a}\right)$;

C = $6\ln\left(a^{\frac{-3}{2}} \times b^{\frac{7}{2}}\right) + 4\ln\left(\dfrac{a^3}{b^6}\right)^{\frac{5}{6}}$; D = $\dfrac{e^{3+\ln x^2}}{x\ln 3^x}e^{\ln(\ln 3)+\ln x-3}$

Exercice 6-2

Résoudre dans l'ensemble ℝ des nombres réels, les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x^2 + 5x + 2) = \ln 2 + \ln\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$; 2) $\ln(2x^2 - 3x + 1) \leq \ln(x+1) + \ln(-x + 3)$;

3) $e^{x^2+2x-3} = 1$; 4) $2e^{2x} - e^{x} = 3$; 5) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$; 6) $e^x \geq 4e^{-x}$

Exercice 6-3

Résoudre dans ℝ×ℝ, les systèmes d'équations suivantes :

1) $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ \ln x - \ln 2 = \ln y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 2\ln y = -8 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$

Exercice 6-4

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition, puis calculer $f\,'(x)$ pour tout x.

1) $f(x) = 2x + 1 + \ln(1 - x)$; 2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$; 3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

4) $f(x) = \dfrac{3e^x + 2}{e^x - 1}$; 5) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{5}{3}} + 1}{x}$; 6) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} + 2x - 1$

Exercice 6-5

Déterminer dans chaque cas sur l'intervalle I, une primitive F de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 3}$: I = $]-\infty, +\infty[$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$: I = $]1, +\infty[$;

3) $f(x) = (1 - x)\,e^{2x - x^2}$: I = $]-\infty, +\infty[$; 4) $f(x) = \tan x$: I = $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5) $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$: I = ℝ ; 6) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{3}{2}\ln x}}{x}$: I = $]0, +\infty[$.

7) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$: I = $]-\infty, 1[$; 8) $g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x+1}$: I = $]-1, +\infty[$;

(pour les 7 et 8, pensez à la division euclidienne).

Exercice 6-6

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - \ln(1 - x)$; et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.

2) Donner une équation de la tangente (D) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
3) Soit u la fonction définie par $u(x) = -x - \ln(1-x)$.
   a) Etudier le sens des variations de u et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire la position relative de (C_f) et de (D)
4) Etudier l'existence de branche infinie à la courbe (C_f) à l'infinie.
5) Tracer dans le repère, la tangente (D) et la courbe (C_f).

Exercice 6-7

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2e^{\frac{5\ln x}{2}}}{2x}$; et

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}$
2) Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Montrer que la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptote.
4) Démontrer que la courbe (C_f) traverse l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle]2, 3[.
5) Tracer dans le repère, la demi-droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x$ à droite de l'origine du repère et la courbe (C_f).
   On donne : $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $\sqrt{27} \approx 5,2$

Exercice 6-8

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 4 cm)

1) a) Exprimer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
3) On note I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.
   a) Donner le sens de variations de f sur l'intervalle I et dresser son tableau de variations sur I.
   b) Tracer la partie de (C_f) correspondant aux points dont l'abscisse appartient à l'intervalle I.
4) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers un intervalle à déterminer.
   b) Construire en justifiant la courbe représentative ($C'_{g^{-1}}$) de g^{-1} dans le repère.

On donne $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} \approx 3,1$; $e^{-\pi} \approx 0,04$

Exercice 6-9

I) Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]0, + ∞[par :
$u(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$

1) Donner le sens de variation de u.
2) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0, +\infty[$.

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) ; & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 1 - e^x ; & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

1) a) Etudier la continuité, puis la dérivabilité de la fonction f en 0.
b) En déduire une conséquence graphique de la dérivabilité de f en 0.

2) a) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
b) Etudier l'existence des branches infinies à la courbe (C_f).

3) a) Vérifier que $f(-2) \times f(-1) < 0$.
b) En déduire une localisation de solution de l'équation $f(x) = 0$ si $x < 0$.

4) Tracer dans le repère, les asymptotes éventuelles et la courbe (C_f) en précisant ses particularités au point d'abscisse 0.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
b) Construire dans le repère, en justifiant, la courbe ($C'_{g^{-1}}$) représentant la bijection réciproque de g.

6) Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe $z$dont la partie réelle est négative ou nulle, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \overline{z}$.
Soit $M(x, y) \in (C_f)$ et $M'(x', y')$ son image par S.
a) Etablir une relation entre les coordonnées du point M' et celles du point M.
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
c) Déterminer une équation de la courbe (C') image de la courbe (C_f) par S.
d) Construire la courbe (C') dans le repère.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$

Exercice 6-10

Pour tout réel k, on note f_k la fonction définie sur ℝ par : $f_k(x) = (x-1)e^{-kx}$ et (C_k) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Quelle est la nature de f_0 ?
2) a) Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
b) Déterminer les limites de f_1 en $-\infty$.
c) Préciser le sens des variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.
3) Tracer dans le repère, les courbes (C_0) et (C_1).

Partie B

1) a) k et k' étant deux réels quelconques différents, déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f_k(x) = f_{k'}(x)$.
b) En déduire que toutes les courbes (C_k) passent par deux points fixes indépendants de k dont on déterminera les coordonnées.
2) On suppose $k \neq 0$.
a) Déterminer suivant le signe de k, les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
c) En déduire suivant les valeurs de k, le sens de variations de la fonction f_k

d) Dresser le tableau de variations de f_k dans chaque cas.

e) Préciser dans chaque cas, la nature de l'extremum absolu de f_k

3) a) Etudier suivant les valeurs du réel α, le signe dans ℝ de l'expression $u_\alpha(x) = (x-1)(e^{\alpha x} - 1)$

b) En déduire selon que $k' > k$ ou que $k' < k$, les positions relatives des courbes (C_k) et $(C_{k'})$.

4) En vous basant sur les questions précédentes, tracer la courbe (C_{-1}) dans le repère sans étudier le sens de variations de la fonction f_{-1}

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 6-11

1) Etudier le signe de l'expression $u(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2$ suivant les valeurs de x.

2) f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 2x + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Montrer que pour tout x élément de D_f, $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

c) Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.

d) Démontrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = 2x$ et $y = 2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe (C_f) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

e) Démontrer que le point $I\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f).

f) Tracer dans le repère les droites (D), (D') et la courbe (C_f).

3) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = f(|x|)$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier la parité de la fonction g.

b) Sans étudier la fonction g, construire la courbe (C_g) dans le repère ; justifier la construction.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}7$; $e \approx 2{,}7$; $e^2 \approx 7{,}4$; $e^{-1} \approx 0{,}4$; $e^{-2} \approx 0{,}14$; $e^{-3} \approx 0{,}1$.

Exercice 6-12 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1) a) Etudier les variations de la fonction g sur ℝ.

b) En déduire le signe de g.

2) Justifier que pour tout réel x, $e^x - x > 0$.

Partie B

1) a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (T).
4) Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C) dans le repère.

Exercice 6-13

Partie A.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$. ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

1) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire des conséquences graphiques pour la courbe (C_f).
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Démontrer que le point d'intersection A de (C_f) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour (C_f).
4) Donner une équation de la tangente à (C_f) en A.
5) Tracer sur un même graphique : (C_f), sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

Partie B.

On considère la fonction f', dérivée de f. On note $(C_{f'})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal.

1) En utilisant le fait que (C_f) admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.
2) a) Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire les droites asymptotes à la courbe $(C_{f'})$.
3) Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
4) Tracer $(C_{f'})$ sur le même graphique que (C_f).
5) Justifier la position de $(C_{f'})$ par rapport à (C_f).

Partie C

1) Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2) Soit F, la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 0$, et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Quel est le sens de variation de F ?
   b) Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.
   c) Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une conséquence pour (Γ).
   d) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x)=x-\ln(1+e^{x})$. En déduire l'équation d'une asymptote oblique à (Γ).
   e) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations pour la fonction F.
   f) Tracer la courbe (Γ) et ses asymptotes dans le repère.

Exercice 6-14

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)\ln(1-x) & \text{si } x<1\\ (x-2)+e^{1-x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité de la fonction f en 1, puis la dérivabilité de f à gauche de 1.
   b) Etudier $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$; en déduire l'étude de la dérivabilité de f à droite de 1 , puis la dérivabilité de f en 1.
   c) En déduire une conséquence graphique du résultat.
2) a) Etudier les variations de la fonction f ; en déuire le signe de $f(x)$.

b) Etudier la limite de $f(x) - (x-2)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire une interprétation graphique du résultat.
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
d) Tracer dans le repère, la droite d'équation $y = x - 2$, la tangente (T) et la courbe (C_f) en précisant ses particularités au point d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = |f(x)|$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère.
a) Exprimer $g(x)$ sans le symbôle des valeurs absolues.
b) Sans étudier la fonction g, construire dans le repère, en justifiant, la courbe (C_g).

4) Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z - i$.
a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
b) Déterminer une équation de la courbe (C') image de la courbe (C_f) par S.
c) Construire la courbe (C') dans le repère.

On donne $e^{-1} \approx 0{,}4$.

Exercice 6-15

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A.

1) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^x + 1$.
a) Etudier le sens de variation de h.
b) Démontrer que pur tout réel x, $h(x) > 0$.

2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.
a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ en $+\infty$.
b) Etudier le sens des variations de g et dresser son tableau de variations.
c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$; avec $\alpha > \beta$.
d) Prouver que $\alpha \in]1, 2[$ et que $\beta \in]-2, -1[$.
e) En déuire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ en $+\infty$.
b) En déduire une interprétation graphique des résultats.

2) a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.
b) En déduire le sens des variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3) a) Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.
b) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

5) a) Etablir que pour tout réel x, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ *avec* $u(x) = e^x - xe^x - 1$.
b) Etudier le sens de variation de la fonction u ; puis en déuire le signe de $u(x)$.
c) Donner la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (T)

6) Tracer la droite (T) ; la courbe (C_f) dans le repère et illustrer l'interprétation graphique des limites de f à l'infini.

On donne $e \approx 2{,}7$; $e^2 \approx 7{,}4$; $e^{-1} \approx 0{,}4$; $e^{-2} \approx 0{,}14$.

Exercice 6-16

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x+\frac{x\ln x}{2}\ ;\text{si } x>0\\ \ln 2^{x}+2^{-x}-1\ ; \quad \text{si } x\le 0\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 4 cm).

Partie A.

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]0, + ∞[par :

$$g(x)=-\sqrt{x}+\frac{\ln x}{2}+1.$$

1) Etudier le sens de variation de g.
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur]0, + ∞[.

Partie B

1) Montrer que pour tout $x \le 0$, $f(x)=x\ln 2+e^{-x\ln 2}-1$
2) a) Etudier la continuité, puis la dérivabilité de la fonction f en 0.
   b) Quelle conséquence garphique peut-on déduire de la dérivabilité de f en 0 ?
3) Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
5) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]0, + ∞[par :

   $$h(x)=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}+\frac{x\ln x}{2}.$$

   a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x > 0$.
   b) Etudier le sens de variation de h puis en déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x > 0$.
   c) Déduire des questions précédentes, la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (T)
6) Tracer la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère.

Exercice 6-17

Pour tout réel k, on note f_k la fonction définie sur]0, +∞[par : $f_k(x)=x^k e^{-x}$ et (C_k) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Etudier le sens des variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.
2) Tracer dans le repère, la courbes (C_1).

Partie B

1) a) k et k' étant deux réels quelconques différents, déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f_k(x)=f_{k'}(x)$.
   b) En déduire que toutes les courbes (C_k) passent par un point fixe indépendant de k dont on déterminera les coordonnées.
2) Etude de f_k.
   a) Déterminer suivant les valeurs de k, les limites de f_k en 0 et en + ∞.
   b) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
   c) En déduire suivant les valeurs de k, le sens de variations de la fonction f_k
   d) Dresser le tableau de variations de f_k dans chaque cas.
   e) Préciser dans chaque cas, la nature de l'extremum absolu de f_k s'il y a lieu.
3) En vous basant sur les questions précédentes, tracer la courbe (C_{-1}) dans le repère sans étudier le sens de variations de la fonction f_{-1}.

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 6-1

Propriétés algébriques de ln et exponentielles

Solution

Simplifions les expressions suivantes : (a, b et x étant des réels strictement positifs.)

$$A = \frac{\ln\left(\sqrt{19}-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\sqrt{19}+\sqrt{3}\right)}{4\ln 2} = \frac{\ln 16}{4\ln 2} = \frac{4\ln 2}{4\ln 2} = 1\,;$$

$$B = \ln\left(a^7\right) - 12\ln\sqrt{a} + \ln\left(\frac{2}{a}\right) = 7\ln a - 6\ln a + \ln 2 - \ln a = \ln 2\,;\ \ \forall a > 0\,;$$

$$C = 6\ln\left(a^{-\frac{3}{2}} \times b^{\frac{7}{2}}\right) + 4\ln\left(\frac{a^3}{b^6}\right)^{\frac{5}{6}} = 6\left(-\frac{3}{2}\ln a + \frac{7}{2}\ln b\right) + 4\times\frac{5}{6}\left(3\ln a - 6\ln b\right)$$

$$C = -9\ln a + 21\ln b + 10\ln a - 20\ln b = \ln a + \ln b = \ln(ab)\,;\ \ \forall a>0 \text{ et } \forall b>0\,;$$

$$D = \frac{e^{3+\ln x^2}}{x\ln 3^x}e^{\ln(\ln 3)+\ln x-3} = \frac{e^3\times e^{\ln x^2}}{x\times x\ln 3}e^{\ln(\ln 3)}\times e^{\ln x}\times e^{-3} = \frac{e^3\times x^2}{x^2\ln 3}\times \ln 3\times x\times\frac{1}{e^3} = x\,;\ \ \forall x>0.$$

Exercice 6-2

Propriétés algébriques de ln et exponentielles

Solution

Résolvons dans l'ensemble ℝ des nombres réels, les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x^2 + 5x + 2) = \ln 2 + \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$; sur $\left]-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$; on a $2x^2 + 5x + 2 = 2x + 1$; soit

$2x^2 + 3x + 1 = 0$; $(x + 1)(2x + 1) = 0$; $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$; donc $S_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[} = \Phi$

2) $\ln(2x^2 - 3x + 1) \le \ln(x + 1) + \ln(-x + 3)$; sur $\left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup]1, 3[$; on a

$2x^2 - 3x + 1 \le (x + 1)(-x + 3)$; $3x^2 - 5x - 2 \le 0$; $(x - 2)(3x + 1) \le 0$; $S = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup]1, 2]$

3) $e^{x^2+2x-3} = 1$; sur ℝ ; on a $x^2 + 2x - 3 = 0$; donc $S_{\mathbb{R}} = \{1, -3\}$;

4) $2e^{2x} - e^x = 3$; sur ℝ ; on a en posant $X = e^x$; $2X^2 - X - 3 = 0$; $X = \frac{3}{2}$ $(X > 0)$; donc

$e^x = \frac{3}{2}$ d'où $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2$; $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 3 - \ln 2\}$;

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$; sur $]0, +\infty[$; en posant $X = \ln x$, on a $X^2 + X - 2 < 0$; $-2 < X < 1$; $-2 < \ln x < 1$; (la fonction *exp* est croissante sur ℝ) ; donc $e^{-2} < x < e$; d'où $S_{]0,+\infty[} =]e^{-2}, e[$.

6) $e^x \ge 4e^{-x}$; sur ℝ ; $e^{2x} \ge 4$; ln est croissante sur $]0, +\infty[$; donc $2x \ge 2\ln 2$; $x \ge \ln 2$; donc $S_{\mathbb{R}} = [\ln 2, +\infty[$

Exercice 6-3

Propriétés algébriques de ln et exponentielles

Solution

Résolvons dans ℝ × ℝ, les systèmes d'équations suivantes :

1) $\begin{cases} x-3y=-1 \\ \ln x - \ln 2 = \ln y \end{cases}$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$; on a : $\begin{cases} x-3y=-1 \\ \ln x = \ln 2y \end{cases}$; soit, $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x = 2y \end{cases}$; ce qui donne $x = 2$ et $y = 1$; $S = \{(2, 1)\}$;

2) $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; ona $\begin{cases} e^{x+y} = 8 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$; soit $\begin{cases} x+y = 3\ln 2 \\ x-y = \ln 2 \end{cases}$; donc $x = 2 \ln 2$ et $y = \ln 2$;

$S = \{(2 \ln 2, \ln 2)\}$;

3) $\begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 2\ln y = -8 \end{cases}$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$; on a en posant $\ln x = X$ et $\ln y = Y$;

$\begin{cases} X + 3Y = 1 \\ 3X - 2Y = -8 \end{cases}$; $X = -2$ et $Y = 1$; donc $x = e^{-2}$ et $y = e$; $S = \{(e^{-2}, e)\}$;

4) $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on a en posant $X = e^x$ et $Y = e^y$; $\begin{cases} X - 2Y = -5 \\ 3X + Y = 13 \end{cases}$; $X = 3$ et $Y = 4$; donc $x = \ln 3$ et $y = 2 \ln 2$; $S = \{(\ln 3, 2 \ln 2)\}$.

Exercice 6-4

Ensemble de définition des fonctions ln et ln o u ; limites des fonctions ln, exponentielle, puissances et de ln o u et croissances comparées ; calculs pratiques de dérivées, dérivées de ln, exponentielle, puissances et ln o u.

Solution

Dans chacun des cas suivants, déterminons l'ensemble de définition de la fonction f, les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition, puis calculons $f'(x)$ pour tout x.

1) $f : x \longmapsto 2x + 1 + \ln(1 - x)$: $D_f =]-\infty, 1[$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [2x+1+\ln(1-x)]$;

$$\lim_{x\to-\infty}[2x+1+\ln(1-x)] = \lim_{x\to-\infty} x\left[2+\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty} x\left[2+\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{1-x}\times\frac{1-x}{x}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}[-2x+1+\ln(1-x)] = -\infty \ ; \ f'(x) = -2+\frac{-1}{1-x} = \frac{2x-3}{1-x}, \ \forall\, x \in]-\infty, 1[.$$

2) $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)$; $D_f = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{5}{(x+2)^2}}{\dfrac{2x-1}{x+2}} = \frac{5}{(x+2)(2x-1)} \ ; \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

3) $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$; $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = 0 \ ; \ \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}}\right) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x - \sqrt{x}\,\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}\,(\ln x)^2} \ ; \text{ pour tout } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

4) $f : x \mapsto \dfrac{3e^x+2}{e^x-1}$; D$_f$ =] – ∞, 0[∪]0, + ∞[;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3e^x+2}{e^x-1}\right) = -2 \;;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3e^x+2}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) = 3$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{3e^x+2}{e^x-1}\right) = -\infty \;;\quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{3e^x+2}{e^x-1}\right) = +\infty \;;$$

$f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x-1)-(3e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-5e^x}{(e^x-1)^2}$; pour tout x ∈] – ∞, 0[∪]0, + ∞[.

5) $f : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{5}{3}}+1}{x}$; D$_f$ =]0, + ∞[; ($x \mapsto x^{\frac{5}{3}}$ est une fonction puissance, $\alpha = \frac{5}{3} > 0$)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^{\frac{5}{3}}+1}{x}\right) = +\infty \;;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{5}{3}}+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{x}\right) = +\infty \;;$$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\frac{2}{3}x^{\frac{5}{3}}-1}{x^2} = \dfrac{2x^{\frac{5}{3}}-3}{3x^2}$; pour tout x ∈]0, + ∞[.

6) $f : x \mapsto x^{-\frac{3}{2}} + 2x - 1$; D$_f$ =]0, + ∞[; ($x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ fonction puissance, $\alpha = -\frac{3}{2} < 0$).

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x^{-\frac{3}{2}}+2x-1\right) = +\infty \;;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{-\frac{3}{2}}+2x-1\right) = +\infty \;;$$

$f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + 2$; pour tout x ∈]0, + ∞[.

Exercice 6-5

Primitives de fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'e^u$

Solution

Déterminons dans chaque cas sur l'intervalle I, une primitive F de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$: I =] – ∞, + ∞[:

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+3\right| + k = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+3\right) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$: I =]1, + ∞[:

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, d'où $F(x) = \ln\left|\ln x\right| + k = \ln(\ln x) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$. ($\ln x > 0$ sur I)

3) $f(x) = (1-x)\, e^{2x-x^2}$: I =] – ∞, + ∞[:

$F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x-x^2} + k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \tan x$: I = $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc $F(x) = -\ln\left|\cos x\right| + k = -\ln(\cos x) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

5) $f(x) = \cos x \, e^{\sin x}$: I = ℝ :

$F(x) = e^{\sin x} + k$; avec $k \in$ ℝ.

6) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{3}{2}\ln x}}{x}$; I =]0, + ∞[.

$f(x) = \dfrac{e^{\frac{3}{2}\ln x}}{x} = x^{\frac{1}{2}}$; donc $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k$; avec $k \in$ ℝ.

7) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$: I = $\left]-\infty,\ 1\right[$; par la division euclidienne,

$f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} = 2 + \dfrac{5}{x-1}$; donc $F(x) = 2x + 5\ln|x-1| + k = 2x + 5\ln(1-x) + k$; avec $k \in$ ℝ.

8) $g(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x+1}$; I =] – 1, + ∞[; par la division euclidienne,

$f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x+1} = 2x - 1 - \dfrac{2}{x+1}$; donc

$F(x) = x^2 - x - 2\ln|x+1| + k = x^2 - x - 2\ln(x+1) + k$; avec $k \in$ ℝ.

Exercice 6-6

1) Plan d'étude d'une fonction numérique
2) Equation d'une tangente à une courbe en un point d'abscisse donné.
3) Plan d'étude d'une fonction numérique ; signe de f(x) à partir de son tableau de variation, position relative de deux courbes dans le plan.
4) Recherche de branches infinies à une courbe de fonction f.
5) Construction d'une courbe de fonction dans un repère.

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par : $f(x) = x - \ln(1-x)$; et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) Etudions le sens des variations de *f* et dressons son tableau de variations.
   - $D_f = \{x \in ℝ \ / \ 1 - x > 0\}$ =] – ∞, 1[;
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x - \ln(1-x)\right] = -\infty \quad \left[\text{car } \lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty\right]$;

     $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left[x - \ln(1-x)\right] = +\infty \quad \left[\text{car } \lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\right] = 0^+$
   - *f* est dérivable sur D_f en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1-x}$
   - Sur D_f, $f'(x) > 0$; donc *f* est strictement croissante sur] – ∞, 1[
   - Tableau de variation de *f* :

x	– ∞	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	– ∞ ↗	+ ∞

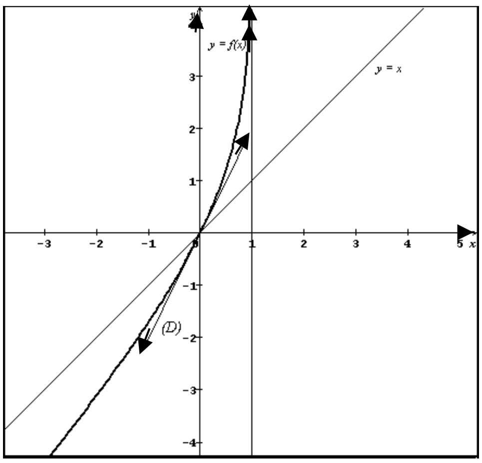
2) Donnons une équation de la tangente (D) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
   (D) a pour équation : $y = 2x$; (car $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$)
3) Soit *u* la fonction définie par $u(x) = -x - \ln(1-x)$.
   a) Etudions le sens des variations de *u*.
   - $D_u = \{x \in ℝ \ / \ 1 - x > 0\}$ =] – ∞, 1[;

- $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x-\ln(1-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left[-1+\dfrac{\ln(1-x)}{-x}\right]$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[-1+\frac{\ln(1-x)}{1-x}\times\frac{1-x}{-x}\right] = +\infty.$$
- $\lim\limits_{x\to1^-} u(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left[-x-\ln(1-x)\right] = +\infty \quad \left[\text{car } \lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\right] = 0^+$
- u est dérivable sur D_u en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in D_u$, $u'(x) = -1+\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x}{1-x}$
- $u'(x) \geq 0$ sur $[0, 1[$ et $u'(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$; donc u est croissante sur $[0, 1[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[$

b) En déduisons la position relative de (C_f) et de (D).
Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 2x = -x - \ln(1-x) = u(x)$.
D'après la question a), u admet un minimum absolu en 0 de valeur $u(0) = 0$; c'est dire que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $u(x) \geq 0$. Donc $f(x) - 2x \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$. La courbe (C_f) est au dessus de (D).

4) Etudions l'existence de branche infinie à la courbe (C_f) à l'infinie.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{\ln(1-x)}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{\ln(1-x)}{1-x}\times\frac{1-x}{-x}\right] = 1$$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(1-x)\right] = -\infty$; donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'quation $y = x$ à moins l'infini.

5) Traçons dans le repère, la tangente (D) et la courbe (C_f).



Exercice 6-7

1) Propriétés algébriques de ln et exponentielle, règles de calculs algébriques dans ℝ.
2) Plan d'étude d'une fonction numérique (fonction puissance)
3) Recherche d'asymptotes à une courbe de fonction
4) Principe de localisation
5) Construction de courbe de fonction

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2e^{\frac{5\ln x}{2}}}{2x}$; et

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrons que pour tout $x > 0$, $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}$

D$_f$ =]0, + ∞[; et pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2e^{\frac{5\ln x}{2}}}{2x} = \dfrac{-3x^2}{2x} + \dfrac{2e^{\ln x^{\frac{5}{2}}}}{2x} = -\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}$

2) Etudions le sens des variations de f et dressons son tableau de variations.
   - D$_f$ =]0, + ∞[;
   - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}\right] = 0$; et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[-\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left[-\dfrac{3}{2} + x^{\frac{1}{2}}\right] = +\infty$
   - f est dérivable sur]0, + ∞[en tant que somme de fonctions dérivables sur]0, + ∞[, et on a pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\left(-1 + \sqrt{x}\right)$.
   - $f'(x) \leq 0$ sur]0, 1] et $f'(x) \geq 0$ sur [1, + ∞[; donc f est décroissante sur]0, 1] et croissante sur [1, + ∞[.
   - Tableau de variation de$f$.

x	0		1		+ ∞
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	+ ∞

3) Montrons que la courbe (C$_f$) n'admet pasd'asymptote.

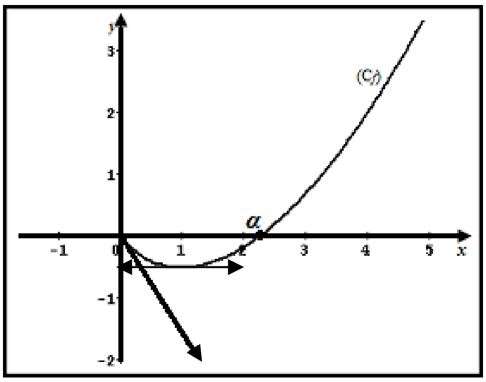
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[-\dfrac{3}{2}x + x^{\frac{3}{2}}\right] = +\infty$; donc (C$_f$) n'admet pas d'asymptote verticale ni d'asymptote horizontale.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[-\dfrac{3}{2} + x^{\frac{1}{2}}\right] = +\infty$; donc la courbe (C$_f$) n'adnet pas aussi une asymptote oblique. En conclusion, la courbe (C$_f$) n'adnet pas d'asymptote.

4) Démontrons que la courbe (C$_f$) traverse l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle]2, 3[.

   Il s'agit de montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in$]2, 3[; d'après le tableau de variations de la fonction f, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur]1, + ∞[, donc elle est aussi continue et strictement croissante sur]2, 3[; de plus, $f(2) = -3 + 2\sqrt{2} \approx -3 + 2{,}8 < 0$; $f(3) = -\dfrac{9}{2} + \sqrt{27} \approx -4{,}5 + 5{,}2 > 0$; donc d'après le principe de localisation appliqué à f sur]2, 3[, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in$]2, 3[; autrement dit la courbe (C$_f$) traverse l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle]2, 3[.

5) Traçons dans le repère, la demi-droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x$ à droite de l'origine du repère et la courbe (C$_f$).



Exercice 6-8

1) *Formules d'addition en trigonométrie ; Equations trigonométriques dans ℝ ; Calcul de limites de fonction.*
2) *Calcul pratique de dérivée de fonction ; Equations trigonométriques dans ℝ ;*
3) *Inéquations trigonométriques dans ℝ ; Sens de variations d'une fonction ; Tableau de variation de fonction ; Equation de tangente à une courbe de fonction en un point ; Construction de courbe de fonction.*
4) *Théorème de la bijection ; Constrution de courbe représentative de la réciproque d'une bijection*

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$ et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) a) Exprimons $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x$; $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

b) Résolvons dans ℝ, l'équation $f(x) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $e^{-x}(\cos x + \sin x) = 0$ c'est à dire $(\cos x + \sin x) = 0$ (car $e^{-x} > 0$) ; d'après les résultats de la question a) ; $\cos x + \sin x = 0$ équivaut à $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ équivaut à $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$. $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \text{ entier relatif}\right\}$

c) Déterminons la limite de f à $+\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$; donc $-2 \leq (\cos x + \sin x) \leq 2$; on a donc : $-2e^{-x} \leq e^{-x}(\cos x + \sin x) \leq 2e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{-x}) = 0$; donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}(\cos x + \sin x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) f' est la dérivée de f sur ℝ.

a) Calculons $f'(x)$.

$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}(-\sin x + \cos x) = -2e^{-x}\sin x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Résolvons dans ℝ l'équation $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = 0$ équivaut à $-2e^{-x}\sin x = 0$ c'est-à-dire $\sin x = 0$ (car $e^{-x} > 0$)
$\sin x = 0$ équivaut à $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $f'(x) = 0$ équivaut à $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) On note I l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

a) Donner le sens des variations de f sur I et dressons son tableau de variations.

$f'(x) = -2e^{-x}\sin x$; ($e^{-x} > 0$) donc $f'(x)$ est du signe de $-\sin x$.

$\sin x \geq 0$ sur $[0, \pi]$ et $\sin x \leq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right] \cup \left[\pi,\ \frac{7\pi}{4}\right]$; donc $f'(x) \leq 0$ sur $[0, \pi]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right] \cup \left[\pi,\ \frac{7\pi}{4}\right]$; par conséquent :

f est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante $\left[-\frac{\pi}{4},\ 0\right]$ et sur $\left[\pi,\ \frac{7\pi}{4}\right]$.

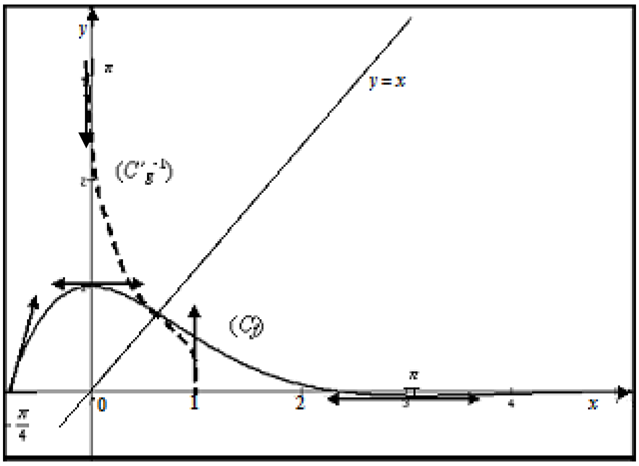
x	$-\frac{\pi}{4}$		0		π		$\frac{7\pi}{4}$
$f'(x)$	$\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{2}\,e^{-\frac{7\pi}{4}}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-e^{-\pi}$	$\nearrow$	0

b) Construisons la courbe (C_f) dans le repère.
(Voir la figure en fin de corrigé de l'exercice)

4) g désigne la restriction de f à l'intervalle $[0,\ \pi]$.

a) Montrons que g réalise une bijection de $[0,\ \pi]$ vers un intervalle à déterminer.
D'après le tableau de variation de f, sur $[0,\ \pi]$ g est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; donc g réalise une bijection de $[0,\ \pi]$ vers l'intervalle $[-e^{-\pi},\ 1]$.

b) Construisons en justifiant la courbe représentative $\left(C'_{g^{-1}}\right)$ de g dans le repère.
La courbe $\left(C'_{g^{-1}}\right)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$.
(Voir la courbe $\left(C'_{g^{-1}}\right)$ sur la figure).



Exercice 6-9

I) Dérivation et monotonie ; Définition de fonction décroissante sur un intervalle.
II) 1) Définition de la continuité et définition de la dérivabilité d'une fonction en un point ;
Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point.
2) Plan d'étude d'une fonction numérique ; Asymptote à une courbe.
3) Ordre dans ℝ ; Principe de localisation.
4) Construction de courbe de fonction dans un repère.
5) Théorème de la bijection ; Construction de courbe représentant la bijection réciproque d'une application.
6) Egalité de deux nombres complexes ; Eléments caractéristiques d'une transformation ; Equation cartésienne d'une courbe ; Symétrique d'une courbe par rapport à un axe.

Solution

I) u est la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Donons le sens de variation de u.

La fonction u est définie sur]0, + ∞[; elle est dérivable sur]0, + ∞[comme composée et somme de fonction dérivables et

$u'(x)=\dfrac{-1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}<0$ pour tout $x\in]0\,,\,+\infty[$; u est strictement décroissante sur]0, + ∞[.

2) En déduisons le signe de $u\,(x)$ sur]0, + ∞[.

u est strictement décroissante sur]0, + ∞[; de plus

$\lim\limits_{x\to0^+}u(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]=+\infty$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\right)$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]=0$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1\right)$; donc pour tout $x\in\,]0,+\infty[$; $u\,(x)>0$.

II) f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ ; & \text{si } x>0\\ \dfrac{1}{2}x+1-e^x\ ; & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

et (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. (unité 2 cm)

1) a) Etudions la continuité, puis la dérivabilité de la fonction f en 0.

- $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[x\ln(x+1)-x\ln x\right]=0=f(0)$ et

  $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2}x+1-e^x\right)=0=f(0)$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$; donc f est continue en 0.

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$;

  $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\frac{1}{2}x+1-e^x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^x-1}{x}\right)=-\dfrac{1}{2}$. f n'est pas dérivable en 0 (car f n'est pas dérivable à droite de 0).

b) En déduisons une conséquence graphique de la dérivabilité de f en 0.

On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$; on en déduit que la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes.

2) a) Etudions les variations de la fonction f et dressons son tableau de variations.

- D_f =] – ∞, + ∞[= ℝ
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}x+1-e^x\right)=-\infty$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\right)$;

  $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{X\to0}\left[\dfrac{\ln(1+X)}{X}\right]=1$;
- f est dérivable sur] – ∞, 0[en tant que somme de fonctions dérivables et sur]0, + ∞[en tant que produit et composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} = u(x)$; pour tout $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - e^{x}$

Sur $]0, +\infty[$; $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ et d'après la question I), $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0[$, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = -\ln 2$; $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty, -\ln 2]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[-\ln 2, 0[$; donc f est croissante sur $]-\infty, -\ln 2]$ et décroissante sur $[-\ln 2, 0[$.

- Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$ ‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}(1-\ln 2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

b) Etudions l'existence des branches infinies à la courbe (C_f).

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(-e^{x}\right) = 0$; donc la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.

3) a) Vérifions que $f(-2) \times f(-1) < 0$.

$f(-2) = -\dfrac{1}{e^{2}} < 0$; $f(-1) = \dfrac{e-2}{2e} > 0$, (car $e > 2$) ; on a donc

$f(-2) \times f(-1) = -\dfrac{1}{e^{2}} \times \dfrac{e-2}{2e} < 0$

b) En déduisons une localisation de solution de l'équation $f(x) = 0$ si $x < 0$.

On a $f(-2) \times f(-1) < 0$; et d'après le tableau de variations de f, f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -\ln 2[$, donc f est continue et strictement croissante sur $[-2, -1]$; d'après le principe de localisation appliqué à f sur $[-2, -1]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-2, -1[$.

4) Traçons dans le repère, les asymptotes éventuelles et la courbe (C_f) en précisant ses particularités au point d'abscisse 0.

(Voir la courbe à la fin du corrigé de cet exercice)

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Montrons que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

D'après le tableau de variations de f, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la restriction g est continue (car dérivable) et strictement croissante ; elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers l'intervalle $J =]0, 1[$.

b) Construisons dans le repère, en justifiant, la courbe ($C_{g^{-1}}$) répresentant g^{-1}.

La courbe ($C_{g^{-1}}$) est le symétrique de la courbe (C_f) de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(Voir la courbe à la fin du corrigé de cet exercice)

6) Soit S la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z dont la partie réelle est négative ou nulle, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \overline{z}$.

Soit $M(x, y) \in$ (C_f) et $M'(x', y')$ son image par S.

a) Etablissons une relation entre les coordonnées du point M' et celles du point M.

Si M a pour coordonnées (x, y) et M' son image par S a pour coordonnées (x', y'),

alors : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ (car $z' = \overline{z}$, c'est-à-dire $x' + iy' = x - i\,y$).

b) En déduisons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.

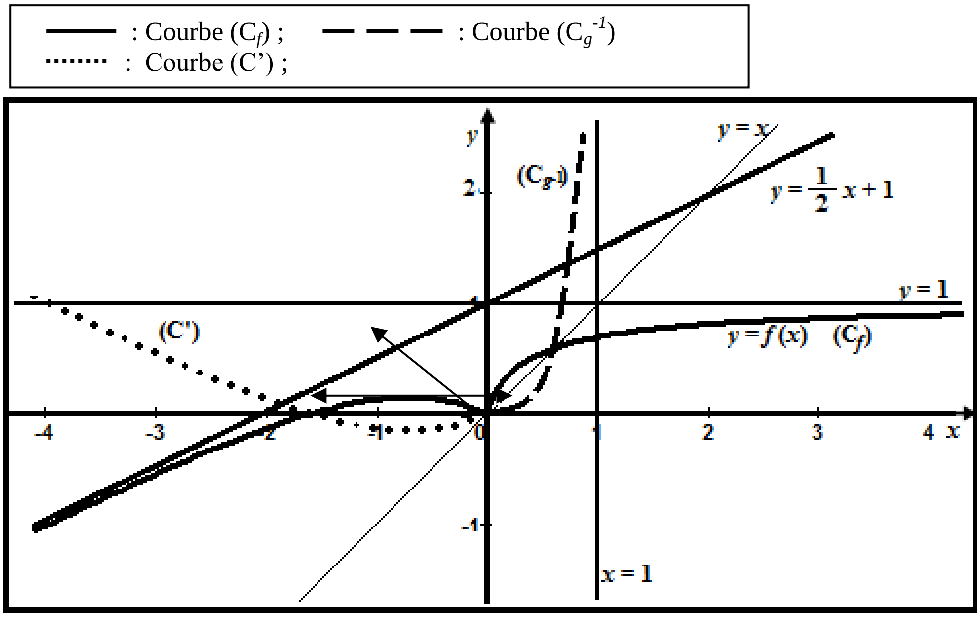
Des égalités $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, on déduit que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) ; donc S est la symétrie orthogonale d'axe (Ox).

c) Déterminons une équation de la courbe (C') image de la courbe (C_f) par S.

$M(x, y) \in (C_f)$ équivaut à $y = f(x)$ avec $x \leq 0$ c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x + 1 - e^x$; or $x = x'$ et $y = -y'$; donc on a $-y' = \frac{1}{2}x' + 1 - e^{x'}$ ce qui équivaut à $y' = -\frac{1}{2}x' - 1 + e^{x'}$; d'où une équation de (C') est $y = -\frac{1}{2}x - 1 + e^x$

d) Construisons la courbe (C') dans le repère. (C') est le symétrique de (C_f) sur $]-\infty, 0]$ par rapport à l'axe (Ox).

(Voir la courbe à la fin du corrigé de cet exercice).



Exercice 6-10

Partie A

2) *Calcul pratique de limite de fonction à l'infini ; Conséquences graphiques de limites de fonction ; Dérivation et monotonie ; tableau de varitions de fonction..*
3) *Construction de courbe de fonction.*

Partie B

1) *Résolution d'équations dans ℝ ; Conditions pour qu'un point appartienne à une courbe de fonction*
2) *Calcul pratique de limite de fonction à l'infinie ; calcul pratique de dérivée de fonction ; Dérivation et monotonie ;Tableau de variations d'une fonction ; Définition de l'extremum d'une fonction.*
3) *Résolution d'inéquations contenant exponentielle dans ℝ ; Positions relatives de deux courbes dans le plan.*
4) *Construction de courbe de fonction.*

Solution

f_k est la fonction définie sur ℝ par : $f_k(x) = (x-1)e^{-kx}$ et (C_k) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; pour tout réel k,

Partie A

1) Donnons la nature de f_0.

Si $k = 0$, $f_0(x) = (x-1)$; f_0 est alors une fonction affine.

2) a) Déterminons les limites de f_1 en $+\infty$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-x} - e^{-x}\right) = 0$; on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.

b) Déterminons les limites de f_1 en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty$; (car $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$).

c) Donnons le sens des variations de la fonction f_1 et dressons son tableau de variations.

- La fonction f_1 est définie sur ℝ.
- f_1 est dérivable sur ℝ en tant que produit de fonctions dérivables ; et pour tout réel x, on a : $f_1'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (-x+2)e^{-x}$
- Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$; donc $f_1'(x) \geq 0$ sur $]-\infty, 2]$ et $f_1'(x) \leq 0$ sur $[2, +\infty[$
- Par conséquent la fonction f_1 est croissante sur $]-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$
- Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

3) Traçons dans le repère, les courbes (C_0) et (C_1).

(Voir les courbes à la fin des corrigés de l'exercice)

Partie B

1) a) k et k' étant deux réels quelconques différents, déterminons les valeurs de x pour lesquelles $f_k(x) = f_{k'}(x)$.

Soit k et k' deux réels quelconques différents ;

$f_k(x) = (x-1)e^{-kx}$ et $f_{k'}(x) = (x-1)e^{-k'x}$

$f_k(x) = f_{k'}(x)$ signifie que

$(x-1)e^{-kx} = (x-1)e^{-k'x}$ c'est à dire $(x-1)(e^{-kx} - e^{-k'x}) = 0$ ce qui donne $x = 1$ ou $x = 0$ (car $k \neq k'$).

b) En déduisons que toutes les courbes (C_k) passent par deux points fixes indépendants de k dont on déterminera les coordonnées.

Un point $M(x, y)$ appartient à toutes les courbes (C_k) si pour tous réels k et k' différents, $f_k(x) = f_{k'}(x)$; or d'après les réponses à la question 1) a), $f_k(x) = f_{k'}(x)$ équivaut à $x = 1$ ou $x = 0$. Donc les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, -1)$ appartiennent à toutes les courbes (C_k).

2) On suppose $k \neq 0$.

a) Déterminons suivant le signe de k, les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

✓ Cas où $k > 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{-kx} = -\infty$; (car $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx} = +\infty$).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-kx} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{k}(kx)e^{-kx} - e^{-kx}\right) = 0$

✓ Cas où $k<0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-kx} = 0$; (car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{k}(kx)e^{-kx}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx} = 0$).
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-kx} = +\infty$; (car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx} = +\infty$)

b) Calculons $f_k'(x)$ pour tout réel *x*.

f_k est dérivable sur ℝ en tant que produit de fonctions dérivables ; et pour tout réel *x*, on a : $f_k'(x) = e^{-kx} - k(x-1)e^{-kx} = (-kx+1+k)e^{-kx}$

c) En déduisons suivant les valeurs de *k*, le sens de variations de la fonction f_k

Pour tout réel *x*, $e^{-kx} > 0$ pour tout réel *k* ; donc le signe de $f_k'(x)$ dépend de celui de (1+*k* – *k x*).

✓ Cas où $k>0$

Pour $x \le \frac{1+k}{k}$, $f_k'(x) \ge 0$ et pour $x \ge \frac{1+k}{k}$, $f_k'(x) \le 0$; donc si $k>0$ la fonction f_k est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1+k}{k}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1+k}{k}, +\infty\right[$.

✓ Cas où $k<0$

Pour $x \le \frac{1+k}{k}$, $f_k'(x) \le 0$ et pour $x \ge \frac{1+k}{k}$, $f_k'(x) \ge 0$; donc si $k<0$ la fonction f_k est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1+k}{k}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1+k}{k}, +\infty\right[$.

d) Dressons le tableau de variations de f_k dans chaque cas.

✓ Cas où $k>0$

x	$-\infty$	$\frac{1+k}{k}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	0	–
$f_k(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{e^{-(1+k)}}{k}$	↘ 0

✓ Cas où $k<0$

x	$-\infty$	$\frac{1+k}{k}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	–	0	+
$f_k(x)$	0 ↘	$\frac{e^{-(1+k)}}{k}$	↗ $+\infty$

e) Précisons dans chaque cas, la nature de l'extremum absolu de f_k

✓ Dans le cas où $k>0$, la fonction f_k est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1+k}{k}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1+k}{k}, +\infty\right[$; on a pour tout réel *x*, $f_k(x) \le f_k\left(\frac{1+k}{k}\right)$; donc f_k présente un maximum absolu en $\frac{1+k}{k}$ de valeur $f_k\left(\frac{1+k}{k}\right) = \frac{e^{-(1+k)}}{k}$.

✓ Dans le cas où $k<0$, la fonction f_k est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1+k}{k}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1+k}{k}, +\infty\right[$, on a pour tout réel *x*, $f_k(x) \ge f_k\left(\frac{1+k}{k}\right)$; donc f_k présente un minimum absolu en $\frac{1+k}{k}$ de valeur $f_k\left(\frac{1+k}{k}\right) = \frac{e^{-(1+k)}}{k}$.

3) a) Etudions suivant les valeurs du réel α non nul, le signe dans ℝ de l'expression

$u_\alpha(x) = (x-1)(e^{\alpha x}-1)$

L'expression $u_\alpha(x) = (x-1)(e^{\alpha x}-1)$ s'annule pour $x = 1$ ou $x = 0$ pour tout réel α non nul ; le signe de $(e^{\alpha x}-1)$ dépend de x, mais aussi de α selon que $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$.

- ✓ Cas où $\alpha > 0$

  $u_\alpha(x) \geq 0$ sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $u_\alpha(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$.
- ✓ Cas où $\alpha < 0$

  $u_\alpha(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $u_\alpha(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$.

b) En déduisons selon que $k' > k$ ou que $k' < k$, les positions relatives des courbes (C_k) et $(C_{k'})$.

Pour tous réels distincts k et k', étudions le signe de $f_{k'}(x) - f_k(x)$;

$f_{k'}(x) - f_k(x) = (x-1)e^{-k'x} - (x-1)e^{-kx} = (x-1)\left(e^{-k'x} - e^{-kx}\right) = (x-1)\left(e^{(k-k')x} - 1\right)e^{-kx}$

On sait que pour tout réel x, $e^{-kx} > 0$ pour tout réel k ; donc le signe de $f_{k'}(x) - f_k(x)$ dépend de celui de $(x-1)(e^{(k-k')x}-1)$ et, d'après les résultats de la question précédente 3) a) ; on a :

- ✓ Si $k - k' > 0$ c'est-à-dire si $k' < k$

  $f_{k'}(x) - f_k(x) \geq 0$ sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $f_{k'}(x) - f_k(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$.

  Par conséquent si $k' < k$, la courbe $(C_{k'})$ est au dessus de (C_k) sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$ et en dessous de (C_k) sur $[0, 1]$.
- ✓ Si $k - k' < 0$ c'est-à-dire si $k' > k$

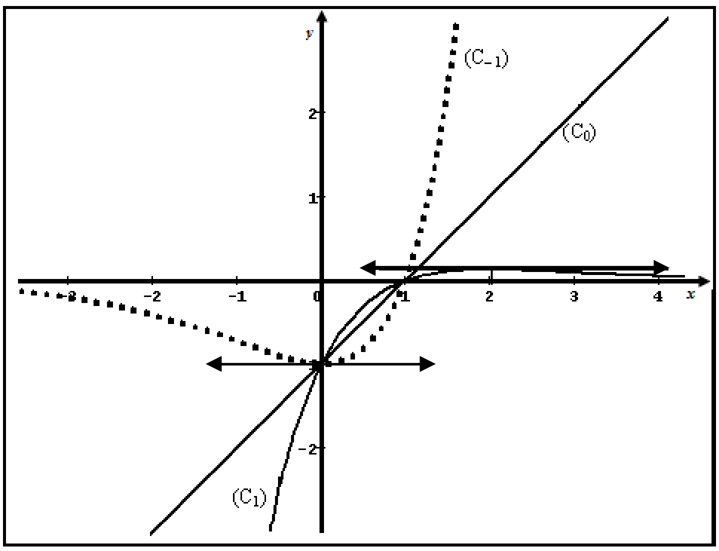
  $f_{k'}(x) - f_k(x) \leq 0$ sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $f_{k'}(x) - f_k(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$.

  Par conséquent si $k' > k$, la courbe $(C_{k'})$ est en dessous de (C_k) sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$ et au dessus de (C_k) sur $[0, 1]$.

4) Traçons la courbe (C_{-1}) sans étudier la fonction f_{-1}

D'après les résultats de la question précédente, f_{-1} correspond au cas où $k < 0$, et $-1 < 1$ qui est le cas où $k' < k$. Donc f_{-1} présente un minimum absolu en 0 de valeur -1 et la courbe (C_{-1}) est au dessus de (C_1) sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$ et en dessous de (C_1) sur $[0, 1]$

Courbes (C_0), (C_1) et (C_{-1}).



CHAPITRE 7

CALCUL INTEGRAL
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Au XVIIe siècle, deux problèmes passionnaient les mathématiciens : celui de la tangente et celui des quadratures. Le premier consiste à retrouver, à partir d'une courbe quelconque, les différentes tangentes à la courbe. Le deuxième réside dans le calcul de l'aire engendrée par une courbe. Nombreux sont ceux qui s'intéressaient à ces problèmes et en donnent diverses solutions : Descartes, Wallis, et d'autres. Cependant, deux scientifiques, Isaac Newton et Leibniz, vont chacun de leur côté faire des recherches et mettre au jour une solution générale et simple à ces problèmes. Ils vont alors introduire dans le monde des mathématiques un nouveau concept qui est aujourd'hui la base de l'analyse : le calcul infinitésimal (ou **calcul différentiel et intégral**).

- Barrow, Descartes, Fermat, Huygens et Wallis contribuèrent également dans une moindre mesure au développement du calcul infinitésimal.
- Kowa Seki, un mathématicien japonais contemporain de Leibniz et Newton, a aussi énoncé quelques principes fondamentaux du calcul intégral.

Après que cette notion de calcul infinitésimal fut maîtrisée, Fermat, Newton et Leibniz se tournèrent vers d'autre notion qui commença à faire son apparition dans des équations issues des problèmes pratiques notamment en géométrie, en mécanique, en astronomie : des égalités liant une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées : appelées aujourd'hui équations différentielles.

Née en tant qu'outil, la notion d'équation différentielle fit tout d'abord l'objet d'études en vue d'une résolution algébrique pendant les deux premiers siècles de son apparition. Depuis, les recherches se tournèrent vers la mise au point d'une méthode complète de résolution de toutes sortes d'équations différentielles :

- Newton (1642-1727) proposa une méthode de résolution dite par des séries infinies ;
- J. Bernoulli (1667-1748) proposa la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparables.
- B. Taylor (16851731) utilisa les séries pour résoudre les équations différentielles.
- Euler en 1736, développa des méthodes de résolution, basée sur des séries et certaines fonctions spéciales.

Les théorèmes d'existence pour des solutions des équations différentielles du premier ordre furent établis en 1876 par R. Lipschitz (1832-1903).

Le 19èmesiècle a été dominé par la problématique d'existence et d'unicité de solutions aux équations différentielles et par la naissance de la résolution numérique.

Les équations différentielles sont utilisées de nos jours pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

CE QU'IL FAUT RETENIR

A) CALCUL INTEGRAL

I) Définition Propriétés

1) Définition

(*Outil pour calculer* $\int_a^b f(t)\,dt$ *sachant que f est continue sur* $[a, b]$ *et connaissant une primitive F de f sur* $[a, b]$)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b] \subset D_f$. :

- Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors on a :
  - $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$; où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

  Exemple : $\int_{-2}^{1} (3x^2+2)\,dx = \left[x^3+2x\right]_{-2}^{1} = (1+2)-(-8-4) = 15$

2) Théorème : Condition d'existence d'une intégrale.

(*Outil pour prouver que* $\int_a^b f(t)\,dt$ *existe dans* $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b] \subset D_f$. :

- Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et on a

  $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$; où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Exemple : On donne $I = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1-x\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; montrer que I existe. (n'essayer pas de calculer I)

Solution : Montrons que I existe :

Posons $f(x) = \dfrac{1}{1-x\sqrt{1-x^2}}$, f est définie sur $[0, 1] \subset [-1, 1]$. La fonction $x \mapsto 1-x\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$ en tant que fonction irrationnelle ; $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[-1, 1]$ en tant que inverse de fonction continue ; f est alors continue sur $[0, 1] \subset [-1, 1]$ et par conséquent $I = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1-x\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

3) Conséquences analytiques de la définition de l'intégrale.

(*Outil pour prouver ce que représente une fonction* φ *définie par* $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *pour* f).

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b] \subset D_f$. :

- Si φ est la fonction définie par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$ alors $\varphi'(x) = f(x)$ et $\varphi(a) = 0$; φ est la primitive de f qui vérifie $\varphi(a) = 0$.
- Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$.

  Par exemple : $\ln x = \int_1^x \left(\dfrac{1}{t}\right)dt$

4) Interprétation géométrique.

(*Outil pour calculer l'aire d'un domaine plan délimité*)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b] \subset D_f$:

- Si f est une fonction continue, positive ou nulle sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$, elle mesure l'aire en u.a. du domaine plan (D) délimité par la courbe représentative (C_f) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
  (D) = { $M(x\,;y) \in (P)$ / $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ }.

5) Propriétés des intégrales.

(*Outil pour effectuer des calculs (algébriques) sur les intégrales*)

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a, b]$, on a :

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
- $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ pour tout $c \in [a, b]$.
- $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$; α et β étant des réels.
- Si sur l'intervalle $[a, b]$ $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$
- Si f est une fonction paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.
- Si f est une fonction périodique de période P, alors $\int_a^{a+P} f(t)\,dt = \int_0^P f(t)\,dt$.

II) <u>Techniques de calculs pratiques des intégrales</u>.

(*Outils de calculs pratiques des intégrales*)

1) <u>Par primitivation (utilisation des primitives)</u>.

(*Outils de calculs pratiques des intégrales par « primitivation »*)

- Si on peut trouver une primitive quelconque F de f sur l'intervalle $[a, b]$, (soit directement, soit après transformation de l'expression $f(x)$), alors :
  $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

2) <u>Par intégration par parties</u>.

(*Outils de calculs pratiques des intégrales par intégration par parties*)

Si on ne peut pas trouver une primitive quelconque F de f sur l'intervalle $[a, b]$, (soit directement, soit même après transformation de l'expression $f(x)$), mais si on peut mettre $f(x)$ sous la forme : $u'(x) \times v(x)$ (ou $u(x) \times v'(x)$) où u et v sont des fonctions dérivables sur $[a, b]$, et leurs dérivées u' et v' étant continues sur $[a, b]$, alors :

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx$.
- (ou $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx$).

<u>Remarques</u> :

- En général si $f(x)$ est sous la forme $p(x) \ln(\alpha x)$; où $p(x)$ est un polynome, on pourrait poser $u'(x) = p(x)$ et $v(x) = \ln(\alpha x)$; $\alpha \in \mathbb{R}$; alors $f(x)$ sera sous la forme $u'(x) \times v(x)$.
- Si $f(x)$ est sous la forme $p(x)e^{\alpha x}$, ou $p(x) \cos(\alpha x)$, ou $p(x) \sin(\alpha x)$, avec $p(x)$ est un polynome, on pourrait poser $u(x) = p(x)$ et $v'(x) = e^{\alpha x}$, ou $u(x) = p(x)$ et $v'(x) = \cos(\alpha x)$, ou $u(x) = p(x)$ et $v'(x) = \sin(\alpha x)$. Avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) <u>Par la « méthode » conduisant à un système d'équations</u>

Il ne s'agit pas d'une méthode théorique à enseigner, mais une technique de calcul des intégrales (généralement deux) qui ne peuvent être calculer par aucune des deux méthodes ci-dessus ; la méthode conduit souvent à la résolution d'une équation ou à celle d'un système d'équations à deux inconnues.

<u>Exemple</u>

Le but est de calculer les intégrales I et J.

On considère : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,dx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

1) Calculer I + J.
2) a) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$; calculer $f'(x)$.

b) En déduire I – J, puis déterminer I et J. (A partir du système $\begin{cases} \mathrm{I}+\mathrm{J}=\alpha \\ I-\mathrm{J}=\beta \end{cases}$.)

III) <u>Inégalité de la moyenne ; valeur moyenne d'une fonction.</u>

1) <u>Inégalité de la moyenne</u>.

(*Outil pour encadrer ou majorer une intégrale*)

<u>Théorème</u> :

Soit f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ inclus dans D_f. ($a < b$).

- Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si pour tout x appartenant à $[a, b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.(Où m et M sont des nombres réels) Ou :
- Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si pour tout x appartenant à $[a, b]$, $|f(x)| \le M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M|b-a|$. (Où M est un nombre réel strictement positif).

<u>En particulier</u>

- Si f est dérivable sur $[a, b]$, si f' est continue sur $[a, b]$, et si pour tout x appartenant à $[a, b]$, $|f'(x)| \le M$, alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$. (Car $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$)

2) <u>Valeur moyenne de f : Définition</u>

(*Outil pour calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un segment*)

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) inclus dans D_f.
La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) est le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$.

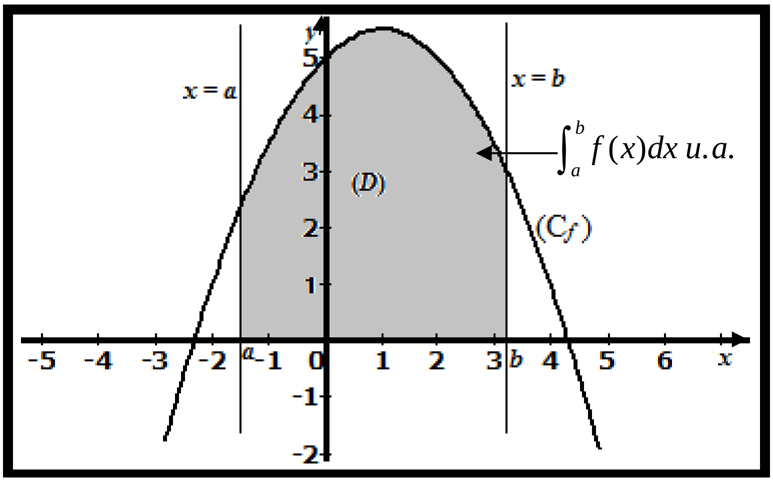
IV) <u>Calculs d'aires et de volumes. : (Applications du calcul intégral)</u>

(*Outils pour calculer l'aire d'un domaine donné ; pour calculer le volume d'un solide engendré par la rotation d'un domaine autour de l'axe des abscisses*).

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ inclus dans D_f.

1) <u>Calculs d'aires dans le plan</u>.

- Si f est de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'aire du domaine plan (D) délimité par la courbe représentative (C_f) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ en unité d'aire (u.a.)
- Si $f - g$ est de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions f et g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ en u.a., est : $\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|$



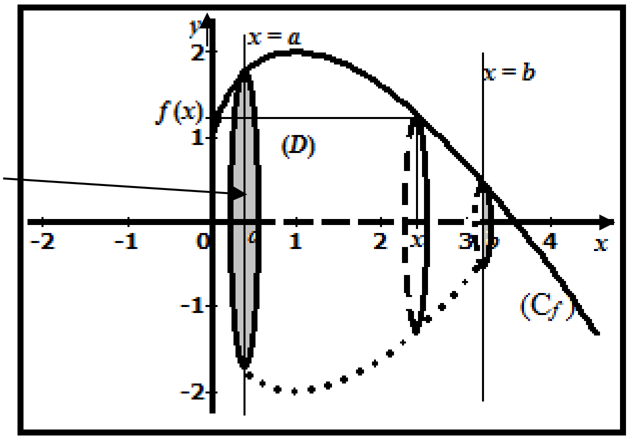
2) <u>Calculs de volume dans l'espace</u>.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$:
si un solide (S) est délimité par les plans parallèles d'équations $z = a$ et $z = b$,
si s (t) désigne l'aire de la section de ce solide par le plan d'équation $z = t$; $t \in [a, b]$, et
si $s : t \longmapsto s(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors le volume de ce solide (S) est $\int_a^b s(t)\,dt$ en unité de volume (u.v.)

<u>En particulier</u>

Si f est de signe constant sur l'intervalle $[a,b]$, et si (D) désigne le domaine plan délimité par la courbe représentative (C_f) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, alors le volume du solide engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisses, est : $\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$ en u.v.

$\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx\ u.v.$



B) <u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES</u>

I) <u>Equations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants sans second membre</u> : $y' + a\,y = 0$

(*Outils pour résoudre des équations différentielles du 1er ordre à c.c.s.s.m.*)

1) <u>Résolution</u>

L'équation différentielle $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ (a étant un réel), admet comme solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = k}\,e^{-ax}$ où k est un réel quelconque.

<u>Remarque</u> : $y' - a\,y = 0$ équivaut à $y' + (-a)\,y = 0$.

2) <u>Solution vérifiant une condition donnée</u>.

Parmi toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + a\,y = 0$, il y a une seule solution qui vérifie une condition donnée ; par exemple la solution *f* qui vérifie $f(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des réels donnés, est la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = y_0 \times e^{-a(x-x_0)}$. Il s'est agi de déterminer la valeur de *k*.

Exemple : 1) Résoudre ou intégrer l'équation différentielle $2(y'-y) = y$

2) Donner la solution *f* de cette équation qui prend la valeur 2 en 1.

Solution : 1) Résolvons ou intégrons l'équation différentielle $2(y'-y) = y$:

$2(y'-y) = y$ équivaut à $2y'-3y = 0$; soit $y' + \left(-\frac{3}{2}\right)y = 0$; $\left(a = -\frac{3}{2}\right)$ donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions *f* définies sur ℝ par $f(x) = k\,e^{\frac{3}{2}x}$ où $k \in$ ℝ.

2) Donnons la solution *f* de cette équation qui prend la valeur 2 en 1.

$f(1) = 2$ équivaut à $k\,e^{\frac{3}{2}} = 2$; $k = 2e^{-\frac{3}{2}}$ donc la solution *f* de cette équation qui prend la valeur 2 en 1 est définie sur ℝ par $f(x) = 2e^{\frac{3}{2}(x-1)}$

II) Equations différentielles linéaires du 2er ordre à coefficients constants sans second membre : $y'' + a^2 y = 0$

(*Outils pour résoudre des équations différentielles du 2nd ordre à c.c.s.s.m.*)

1) Résolution

L'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + a^2 y = 0}$ (*a* étant un réel), admet comme solutions les fonctions *f* définies sur ℝ par : $\boldsymbol{f(x) = A\cos ax + B\sin ax = C\cos(\alpha + ax)}$; où *A* et *B* sont des réels quelconques : *C* un réel quelconque.

2) Solution vérifiant deux conditions données.

Parmi toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + a^2y = 0$, il y a une seule solution qui vérifie deux conditions données ; par exemple il y a une fonction unique *f* solution, qui vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_1) = y_1$, où x_0, y_0, x_1 et y_1 sont des réels donnés. Il s'agira de déterminer la valeur de *k*.

Complément (hors programme en Tle D)

1) L'équation différentielle $\boldsymbol{y'' - a^2 y = 0}$ (*a* étant un réel), admet comme solutions les fonctions *f* définies sur ℝ par : $\boldsymbol{f(x) = A\,e^{ax} + B\,e^{-ax}}$ où *A* et *B* sont des réels.

2) Résolution de l'équation différentielle $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$; (*a*, *b*, *c* étant des réels).
Résoudre dans l'ensemble ℂ des nombres complexes l'équation caractéristique
$\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}$.

Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet	**alors les solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions $f_{A,B}$ définies sur ℝ par : (*A* et *B* étant des réels)**
2 solutions réelles r_1 et r_2	$f_{A,B}(x) = A \times e^{r_1 x} + B \times e^{r_2 x}$
1 solution double réelle :	$f_{A,B}(x) = (Ax + B) \times e^{r_0 x}$
2 solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \beta\,i$ et $r_2 = \alpha - \beta\,i$	$f_{A,B}(x) = e^{\alpha x} \times (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 7-1 : Calcul des intégrales « par primitivation »

1) Calculer les intégrales suivantes : directement « par primitivation »

a) $\int_0^1 (x^3-3x^2+1)\,dx$; b) $\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$; c) $\int_{-1}^1 \left(\frac{2x-3}{x^2-3x+4}\right)dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \sin^2 x\,dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t}$

2) Calculer les intégrales suivantes : « par primitivation » après transformation s'il y a lieu des expressions.

a) $\int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x+4)\,dx$; b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$; c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx$; d) $\int_1^2 \frac{x^2+2x-1}{x}\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x)(\cos^2 x)\,dx$; f) $\int_0^1 \frac{2x^2+x-3}{x+1}\,dx$

Exercice 7-2 : Calcul des intégrales « par intégration par partie »

1) Calculer les intégrales suivantes « Intégration par partie » une fois

a) $\int_1^x \ln t\,dt$; b) $\int_1^e t\ln t\,dt$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\,dx$; d) $\int_0^{\ln 2} x e^x\,dx$.

2) Calculer les intégrales suivantes ; « Intégration par partie » deux fois

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2-1)\sin 2x\,dx$; b) $\int_{-\pi}^0 (1-x^2)\cos x\,dx$; c) $\int_0^1 (2x^2+x)e^{-x}\,dx$

3) Calculer les intégrales suivantes ; « Intégration par partie » deux fois avec résolution d'équations

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(-2x)\,dx$; b) $J=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

Exercice 7-3

1) a) Montrer que pour tout x différent de – 2, $\frac{x^2-2x+2}{x+2}=ax+b+\frac{c}{x+2}$ où a, b et c sont 3 réels à déterminer.

b) En déduire le calcul de $I=\int_{-1}^1 \frac{x^2-2x+2}{x+2}\,dx$.

2) a) Montrer que pour tout x différent de – 1 et de 3, $\frac{2x+1}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}$ où a et b sont 2 réels à déterminer.

b) En déduire le calcul de $J=\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-2x-3}\,dx$.

3) a) Montrer que pour tout x différent de 0 et de – 1, $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$ où a, b et c sont 3 réels à déterminer.

b) En déduire le calcul de $K=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$.

4) a) Montrer que pour tout x différent de 0, de 1 et de – 1, $\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$ où a, b

et c sont 3 réels à déterminer.

b) En déduire le calcul de $L = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2}\,dx$

Exercice 7-4 : **Calcul des intégrales conduisant à une équation ou à un système d'équations : (les 4 exercices sont indépendants).**

I) On considère : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

1) Calculer $I + J$.
2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$;

a) Calculer $f'(x)$.
b) En déduire $I - J$, puis déterminer I et J.

II) On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$.

1) a) Soit $u : x \mapsto u(x) = \tan x$; calculer $u'(x)$.
b) Calculer I.

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Démontrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a

$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) En déduire une relation entre I et J ; puis calculer J.

III) Soient les intégrales : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ et $K = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right)dx$.

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.
a) Calculer $f'(x)$.
b) Calculer I.

2) a) Sans calculer explicitement J et K, montrer que $J + 2I = K$.
b) Montrer en intégrant par parties K, que $K + J = \sqrt{3}$.
c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 7-5 : Equations différentielles du 1^er^ ordre à coefficients constants sans second membre : (les trois exercices sont indépendants).

I) 1) Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$.
2) Déterminer la solution f qui prend la valeur -1 en 0.

II) 1) Résoudre l'équation différentielle : $-2y' + y = 5y$.
2) Déterminer la solution f dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $A(-1, 2)$.

III) 1) Résoudre l'équation différentielle : $y' - (\ln 2)\,y = 0$.
2) a) Déterminer la solution f dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur $-\ln 4$.
b) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $-a^{x+1}$ où a est un réel à déterminer.

Exercice 7-6 : Equations différentielles du 2^nd^ ordre à coefficients constants sans second membre : (les trois exercices sont indépendants).

I) 1) Résoudre l'équation différentielle $9\,y'' + y = 0$.
2) Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.
3) a) Déterminer la solution g qui vérifie $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\,dx = 0$ et $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx = -6$.
b) Déterminer les réels k, α et β tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k\cos(\alpha x + \beta)$.

II) 1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 49\,y = 0$.
2) a) Déterminer la solution f qui vérifie : $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$ et $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 49$
b) Déterminer les réels k, a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = k\sin(a\,x + b)$.

III) 1) Intégrer l'équation différentielle : $4\,y'' + 5\,y = -4\,y$.
2) Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -2\,x + 1$.

<u>Exercice 7-7</u> : **Equations différentielles du 1^er^ et 2^nd^ ordre à coefficients constants avec second membre ; les méthodes (théoriques) de résolution de ces types d'équations ne sont pas au programme en TD. : (les trois exercices sont indépendants).**

I) On considère l'équation différentielle : $y' + y = x$. (E).
1) Déterminer la fonction affine f solution de l'équation (E).
2) a) Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$ (E').
b) Démontrer qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g - f$ est une solution de l'équation différentielle (E').
3) a) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
b) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) qui vérifie $g'(0) = 0$.

II) On considère l'équation différentielle : $y' - 2\,y = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$. (E)
1) Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' - 2\,y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie par : $f(x) = e^{2x} g(x)$.
a) Calculer $g(0)$.
b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si
$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$
d) En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de l'équation différentielle (E).

III) On considère l'équation différentielle : $9\,y'' + 4\,y = 2\,x - 1$. (E)
1) a) Montrer que si une fonction polynôme p est solution de (E), alors son degré est 1.
b) Déterminer alors la fonction polynôme p, solution de (E).
2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation différentielle : $9\,y'' + 4\,y = 0$ (E').
3) a) Résoudre l'équation (E') ; puis donner les solutions de (E).
b) Déterminer la solution g de (E) qui vérifie $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $g''(0) = 2$.

<u>Exercice 7-8</u> :**« Une équation différentielle du 1^er^ degré à coefficients non constants avec second membre » ; la méthode théorique de résolution n'est pas au programme !**

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions f définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui vérifie la propriété (P) : Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - x\,f'(x) = \dfrac{2\,x}{x+2}$.
1) Montrer qu'une fonction affine ne peut vérifier la propriété (P)
2) f étant une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose, pour tout $x > 0$:

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

a) Montrer que la fonction *f* vérifie la propriété (P) si et seulement si, pour tout $x > 0$,
$g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.

b) En déduire l'ensemble (E).

<u>Exercices 9 à 13</u> : <u>Problèmes concrets conduisant à des équations différentielles :</u>
<u>Utilisation des équations différentielles comme outil :</u>

<u>Exercice 7-9</u> : (En chimie)
La concentration *x*, (en *g*/*l*) de micro-organiques dans une culture en continu, varie en fonction du temps *t* (en h) ; ($t \geq 0$) et vérifie la relation : $x' + \dfrac{2}{3}x = 2e^{\frac{1}{3}t}$. (1)

1) Résoudre l'équation différentielle $x' + \dfrac{2}{3}x = 0$. (2)

2) On pose $f(t) = k\,e^{\frac{t}{3}}$ où *k* est un nombre réel.

   Déterminer le réel *k* pour que la fonction $f : t \mapsto k\,e^{\frac{t}{3}}$ soit solution de l'équation différentielle (1).

3) a) Montrer qu'une fonction *x* est solution l'équation différentielle (1), si et seulement si $x - f$ est solution de l'équation différentielle (2).
   b) En déduire la forme générale de la solution *x* de l'équation différentielle (1).
   c) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une concentration initiale de $3,25\ g/l$.

<u>Exercice 7-10</u> : (En mécanique)
Un corps de masse *m*, lâché sans vitesse initiale, subit en chute libre une force de freinage d'intensité *F* proportionnelle à la vitesse *V* : ($F = -k\,V$ où *k* est un réel strictement positif appelé coefficient de force).

À chaque instant *t* (exprimé en secondes) *V* vérifie la relation : $v'(t) + \dfrac{k}{m}v(t) = g$;

(où *g* est l'accélération de la pesanteur ; et *t* un réel positif).

1) Trouver une fonction constante *c* solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{k}{m}y = g$.

2) Montrer qu'une fonction *f* est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{k}{m}y = 0$.

3) a) Résoudre l'équation différentielle (E'), puis l'équation différentielle (E).
   b) En déduire l'expression de $v(t)$ en fonction de *t* sachant que $v(0) = 0$.
   c) Donner une interprétation de la valeur $V = \dfrac{mg}{k}$.

4) a) Donner l'intensité *F* de la force de freinage en fonction de *t*.
   b) Donner une interprétation de la valeur $F = -m\,g$.

5) Le corps atteint le sol au bout de 1 mn 20 s.
   a) Déterminer la vitesse moyenne $\overline{V}$ du corps pendant la chute.
   b) En déduire la valeur moyenne $\overline{F}$ de la force de freinage pendant la période de chute.

<u>Exercice 7-11</u> : (En médecine)
On a constaté que chez une personne contaminée du virus V.I.H., le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes (globules blancs) augmentent rapidement à partir d'un instant *t* choisi comme origine de temps, selon la loi : $f'(t) - K\,f(t) = 0$. (1)

Où $f(t)$ désigne le nombre de germes dans le sang à l'instant t exprimé en mois ; $f'(t)$ désigne la vitesse de prolifération de ces germes dans l'organisme et K une constante positive appelée taux leucocytaire dans le sang ; $K = 1,20 \cdot 10^{-3}$.

Par contre chez la même personne contaminée, le nombre de leucocytes, responsables de la défense de l'organisme dans le sang, diminue à partir du même instant t, selon la loi :

$g'(t) + Kg(t) = 0$. (2)

Où $g(t)$désigne le nombre de leucocytes dans le sang à l'instant t exprimé en mois ; $g'(t)$ désigne la vitesse de leucopénie (diminution du nombre de globules blancs) dans l'organisme et K le taux leucocytaire dans le sang ; $K = 1,20.10^{-3}$.

1) a) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (1) qui vérifie $f(0) = N$. ($N \in \mathbb{Z}$)
   b) Le sang humain contient en moyenne $2,6.10^{10}$ leucocytes.
      Déterminer la solution g de l'équation différentielle (2) telle que $g(0) = 2,6.10^{10}$.
2) Le nombre N dépend des individus au moment de la contamination.
   Tambila est un jeune homme contaminé du virus V.I.H. le 1 janvier 2010. Chez lui, N estde $1,36 \times 10^{10}$.
   a) Quel a été le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes dans le sang de Tambila au 01 janvier 20011 ? (12 mois après la contamination)
   b) Combien de leucocytes sont-ils restés vivants dans son sang au 01 janvier 2011 ?
   c) Combien de leucocytes ont-ils été détruits durant ces 12 mois ?
3) Une personne contaminée du V.I.H. SIDA développe en fait la maladie dès que le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes devient strictement supérieur au nombre de leucocytes défenseurs de l'organisme dans le sang. (c'est à dire si $f(t) > g(t)$)
   Au bout de combien d'années Tambila développera-t-il la maladie si il n'a pas été de nouveau contaminé ?

On donne : $e^{0,0144} \approx 1,015$; $e^{-0,0144} \approx 0,985$; $\ln 1,912 \approx 0,648$.

Exercice 7-12 : (En électricité)

Un oscillateur électrique est un circuit constitué d'un condensateur de capacité C (en Farads) et d'une bobine d'auto-inductance L (en Henrys) de résistance négligeable, alimenté par un générateur de force électromotrice E (en Volts) et de deux interrupteurs K_1 et K_2.

- À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K_1, le condensateur se charge. La charge se termine lorsque la tension aux bornes du condensateur est $U_0 = E$, la charge est alors $q_0 = C\,U_0$ et l'intensité $i_0 = 0$.
- On ouvre alors l'interrupteur K_1 et on ferme ensuite l'interrupteur K_2, le circuit oscille et le condensateur se décharge dans le circuit. On appelle $q(t)$ la valeur de la charge (en coulombs) du condensateur à l'instant t et la valeur $q(t)$ de la charge vérifie la relation : $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{C}q = 0$

  On définit ainsi une fonction q deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ solution de l'équation différentielle $L\,y'' + \dfrac{1}{C}y = 0$.
- L'intensité $i(t)$ du courant à l'instant t est donnée par : $i(t) = -\dfrac{dq}{dt}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

1) On donne $C = 2 \times 10^{-3}$, $L = 1, 25$ et $U_0 = E = 50$.
   a) Montrer que q est solution de l'équation différentielle $y'' + 400\,y = 0$ (1)
   b) Résoudre l'équation différentielle (1).
2) a) Donner la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions

initiales : $q_0 = C\,U_0$ et $i_0 = 0$.

b) En déduire l'expression de l'intensité $i\,(t)$.

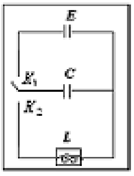
3) a) Calculer l'intégrale $\dfrac{20}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{20}} \cos(40t)\,dt$.

b) On désigne par I_e la valeur (en ampères) de l'intensité efficace du courant dans le circuit.

Son carré est donné par la formule : $I_e^{\,2} = \dfrac{20}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{20}} i^2(t)\,dt$.

Calculer $I_e^{\,2}$ puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-2} près sachant que $I_e \geq 0$.

On donne $\sqrt{2} \approx 1,4142136$



<u>Exercice 7-13</u> : (En environnement)

Le 1er août 2010, Bala pour fêter son anniversaire, a planté dans sa cour une variété d'arbre dont la hauteur maximale ne dépasse pas 1 m. Au moment du repiquage, le plant avait déjà 50 cm de haut.

On note $f\,(t)$ la taille, en m, de la plante après t jours. (On a donc $f\,(0) = 0,5$).

Le modèle de VERHULST consiste à considérer que la vitesse de croissance de cette plante évolue suivant la relation : $f\,'(t) = a\,f\,(t)\left[1 - f\,(t)\right]$; où a est une constante dépendant des conditions de repiquage et d'entretien de la plante.

Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}^+$, de l'équation différentielle : $y' = a\,y\,(1-y)$ (1).

(On ne vous demande pas de résoudre cette équation différentielle).

1) On pose, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = \dfrac{1}{f\,(t)}$.

a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $y' + a\,y = a$ (2).

b) Vérifier que la fonction constante c de valeur 1 est solution de l'équation différentielle (2).

c) k désignant un réel quelconque, montrer que la fonction z définie pour tout $t \geq 0$ par $z(t) = k\,e^{-at} + 1$ est solution de l'équation différentielle (2).

d) Donner la solution particulière z de l'équation différentielle (2) qui vérifie $z(0) = \dfrac{1}{f\,(0)}$.

e) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $f\,(t) = \dfrac{1}{e^{-at} + 1}$.

2) On observe qu'au bout de 30 jours, la plante mesure 80 cm de haut.
Calculer la valeur de a (on l'arrondira à 10^{-2} près).

3) Dans cette partie on pose $a = \dfrac{1}{20}$

a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Préciser son sens de variation.

c) En admettant que Monsieur Bala entretienne régulièrement sa plante, au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

d) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
(1cm pour dix jours en abscisse et 8 cm pour 1m en ordonnées.)

On donne $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$.

<u>Exercice 7-14</u>

Lors d'une émission en direct à la télévision, l'animateur ouvre une plage de 5 mn aux téléspectateurs afin d'envoyer des SMS de type F1 ou F2 ou F3.

Pendant ces 5 minutes, les messages arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps.
Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers de messages par minute, est donné par la fonction f telle que :
$f(x)=\begin{cases} -2x^2+8\sqrt{x}\ ; \text{ si } x\in[0,1] \\ \ln x - x + 7\ ; \text{ si } x\in[1,5] \end{cases}$; (C_f), désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$). (Unité 1cm)
On veut calculer le nombre total de messages reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre de messages est donné, en milliers, par : $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$.

1) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f sur [0, 5]. (On vérifiera particulièrement la continuité de f en 1 ; puis la dérivbilité de f en 0, en 1 et en 5)
2) a) Montrer que pour tout x vérifiant : $0 \le x \le 1$, alors $-x\sqrt{x}+1 \ge 0$
   b) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Tracer la courbe (C_f) dans le repère.
4) a) Donner une primitive de la fonction f sur [0, 1].
   b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.
5) Soient g et G les fonctions définies sur [1, 5] par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x \ln x - x$.
   a) Montrer que G est une primitive de g sur [1, 5].
   b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = 1 et x = 5.
6) Donner le nombre total de messages reçus pendant ces 5 minutes au cours de l'émission.
   On donne $\ln 5 \approx 1,61$.

Exercice 7-15

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=xe^{1-x}$; et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$) (unité 2 cm).

1) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
2) a) Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
   b) Tracer la tangente et la courbe (C) dans le repère.
3) Soit α un réel strictement positif ; (D) le domaine plan délimité par la courbe (C), les deux axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.
   a) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0, α].
   b) Calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine (D) en fonction de α.
   c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
4) Soient g et G les fonctions définies sur ℝ respectivement par :
   $g(x)=x^2e^{2-2x}$ et $G(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2-2x}$.
   a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle [0, α]
   b) Calculer $V_e = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}[f(x)]^2\,dx$ appelée valeur efficace de la fonction f sur [0, α].
5) Le domaine (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).
   a) Calculer en cm^3, le volume $V(\alpha)$ en fonction de α, du solide engendré par cette rotation.
   b) Donner la valeur de ce volume en cm^3 pour $\alpha = 3$.

Exercice 7-16

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=1+\ln(1+x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 1 cm)

1) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

2) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $\varphi(x) = \ln(1+x) - x + 1$.

   a) Etudier le sens de variations de φ et dresser son tableau de variations.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0, +\infty[$.

   c) Montrer que $\alpha \in]2, 3[$.

   d) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$; donner les positions relatives de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

   b) Vérifier que la bijection réciproque f^{-1} est définie par $f^{-1}(x) = -1 + e^{1-x}$.

4) Construire dans le repère, la droite (Δ), la courbe (C_f) et la courbe ($C_{f^{-1}}$) représentant la bijection réciproque f^{-1}.

5) On désigne par (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe (Ox), l'axe (Oy) et la droite d'équations $x = 3$. Le domaine (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).

   a) Calculer l'aire A en cm^2 du domaine (D).

   b) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
   $g(x) = x + (1+x)\ln^2(1+x)$. Calculer $g'(x)$

   c) Calculer en u.v. le volume du solide (S) engendré par cette rotation.

6) a) Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$, $f(x) \in [2, 3]$.

   b) Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

   c) En déduire que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$.

On donne $\ln 2 \approx 0,7$.

EXERCICES NON CORRIGES :

Exercice 7-17 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$.

1) a) Montrer que I_n et J_n existent.

   b) Calculer I_o et J_o.

2) On suppose $n > 0$.

   a) En intégrant par parties I_n ; puis J_n, montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$

   b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 7-18 :

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

1) Calculer les intégrales $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tels pour tout réel x,

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = a + \frac{be^x}{1+e^x} + \frac{ce^x}{(1+e^x)^2}$$

   b) Calculer l'intégrale I.

3) a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.

   b) En déduire la valeur de l'intégrale J.

Exercice 7-19

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)$ pour tout $x > 0$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on pose :

$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ avec α un réel strictement positif.

1) a) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout $x > 0$.
   b) Préciser le signe de $I(\alpha)$; donner une interprétation graphique de $I(\alpha)$.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $\dfrac{e^x}{1+e^x} = a + \dfrac{b}{1+e^x}$.

   En déduire le calcul de $\int_0^{\alpha} \dfrac{1}{1+e^x}\,dx$.

   b) Calculer $f'(x) + f(x)$ où f' désigne la dérivée de f.
   c) Calculer $I(\alpha)$.

Exercice 7-20

On se propose de déterminer les fonctions f vérifiant pour tout réel x la relation :

$f'(x) = 2f(\pi - x)$. (1)

1) Soit f une fonction vérifiant la relation (1).
   a) Calculer $f''(x)$ en dérivant $f'(x)$ et en utilisant la dérivée d'une fonction composée.
   b) En déduire que la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

2) a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.
   b) Déterminer parmi les solutions celles qui vérifient la relation (1) ; puis parmi ces dernières celle dont la valeur moyenne sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ est égale à $\dfrac{2}{\pi}$.

Exercice 7-21

Une masse m, mobile sur un axe $(O,\vec{i})$ a sa position représentée sur cet axe à chaque instant t ($t \geq 0$) par le point M.

Cette masse est soumise à une force d'attraction $\vec{F}$; l'abscisse $y(t)$ du point M exprimé comme fonction du temps t, vérifie l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{9\pi^2}{4}y = 0$.

1) Donner la solution générale de cette équation différentielle.
2) a) Montrer que la solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = \dfrac{-3\pi}{2}$,

   s'exprime pour $t \geq 0$ par : $y(t) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right)$.

   b) Déterminer le nombre réel α compris entre 0 et 1 tel que, pour tout $t \geq 0$,

   $y(t) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}(t+\alpha)\right)$.

3) a) En utilisant la question 2) b), donner la valeur positive de t pour laquelle le point M passe pour la première fois au point O.
   b) Donner les positions du point M aux instants de temps $t = \dfrac{5}{6}$ et $t = \dfrac{17}{6}$.

Exercice 7-22

Le plan est rapporté à un repère un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 x\sqrt{x - x^2}\,dx$.

1) Montrer que I existe dans $\mathbb{R}$.

2) On désigne par (C) la courbe d'équation $y = \sqrt{x - x^2}$ dans le plan.

a) Montrer que (C) est le demi-cercle de centre le point $A\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ et de diamètre 1.

b) Déterminer l'aire d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

c) En déduire que $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$.

3) a) Montrer que $\frac{\pi}{8} - 2I = \int_0^1 (1 - 2x)\sqrt{x - x^2}\, dx$.

b) Calculer $\int_0^1 (1 - 2x)\sqrt{x - x^2}\, dx$ puis en déduire la valeur de I.

Exercice 7-23

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin^2 x$; et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité 3 cm).

1) Etudier la parité et la périodicité de f.

2) a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

b) Tracer la courbe (C) dans le repère.

3) a) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\cos 2x$.

b) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

c) Exprimer $[f(x)]^2$ à l'aide de $\cos 2x$ et de $\cos 4x$. En déduire la valeur efficace de la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$: c'est à dire $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx$.

4) Soit (D) le domaine plan délimité par la courbe (C), les deux axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \pi$.

a) Calculer en cm^2, l'aire du domaine (D).

b) Le domaine (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox) ; calculer en cm^3, le volume du solide engendré par cette rotation.

Exercice 7-24

1) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

a) Etudier le sens de variations de g.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité 2 cm).

a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Démontrer que la courbe (C_f) admet une asymptote (Δ) d'équation $y = x$.
Préciser la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ).

c) Préciser s'il y a lieu les coordonnées du point de la courbe (C_f) où la tangente (T) est parallèle à la droite (Δ).

d) Donner une équation de cette tangente (T).

e) Tracer les droites (Δ) et (T) et la courbe (C_f) dans le repère.

3) On désigne par (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Calculer en u.a. l'aire du domaine (D).

4) On désigne par (E) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe (Ox) et les droites

d'équations $x=1$ et $x=e$.

a) Calculer en utilisant la méthode d'intégration par parties $I = \int_1^e (\ln x)\,dx$.

b) Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$H(x) = \frac{-1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right)$ est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) Le domaine (E) subit une rotation autour de l'axe (Ox) ; calculer en u.v. le volume du solide (S) engendré par cette rotation.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$; $e \approx 2{,}7$.

Exercice 7-25

A) On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

1) Etudier le sens de variations de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α avec $\alpha \in [1\,;2]$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

B) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$;

(unités de longueur 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) a) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et dresser le tableau de variations de f.

d) Construire la courbe (C_f) dans le repère.

C) On considère le domaine (D) délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\frac{3}{2}$.

1) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2) En déduire un encadrement de l'aire A (D) du domaine exprimée en cm^2.

Exercice 7-26

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$; et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; (unité 2 cm).

A) 1) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(-x) + f(x) = 2$. Donner une interprétation graphique de cette égalité.

b) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

2) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

3) Soit la fonction numérique φ définie par : $\varphi(x) = f(x) - (x+1)$.

a) Etudier les variations de φ.

b) Calculer $\varphi(0)$, puis donner le signe de $\varphi(x)$.

c) En déduire la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

4) Tracer la droite (T), les asymptotes à (C) s'il y a lieu puis la courbe (C) dans le repère.

B) 1) a) Prouver que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.

On notera f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative.

b) Tracer la courbe (C') dans le repère.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$: (résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$)

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $\varphi(x) = -1$.

3) Déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) d'équation $y = x$ en un seul point dont l'abscisse est α appartenant à l'intervalle [2, 3].

4) On considère le domaine plan (E) limité par les courbes (C) et (C'), et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a + \dfrac{b e^x}{e^x + 1}$ où a et b sont deux réel à déterminer.

b) Calculer en cm^2 l'aire de (E).

C) On pose l'intervalle I = [2, 3].

1) Montrer que pour tout x élément de [2, 3], $f(x)$ est aussi élément de [2, 3].

2) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = 4\left(\dfrac{1}{e^x + 1} - \dfrac{1}{\left(e^x + 1\right)^2}\right)$.

b) Montrer que pour tout x élément de [2, 3], on a : $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que pour x élément de [2, 3], on a : $\left| f(x) - \alpha \right| \leq \dfrac{1}{2}\left| x - \alpha \right|$.

Exercice 7-27

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x \in \left]0, +\infty\right[\\ -x - 1 + e^{x} & \text{si } x \in \left]-\infty, 0\right] \end{cases};$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$). (unité 2cm)

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0, dont on précisera les équations.

c) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

d) Préciser s'il y a lieu les asymptotes à la courbe (C_f).

e) Déterminer les équations de tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et 1.

f) Tracer les asymptotes (s'il y a lieu), les demi-tangentes au point d'abscisse 0, les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et 1 ainsi que la courbe (C_f) dans le repère.

2) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x) = \left|\ln x\right| x$ avec $x > 0$.

a) Sans étudier la fonction h, tracer dans le repère la courbe représentative (C_h) de h.

b) Justifier la construction.

3) On considère le domaine plan (D) délimité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. (avec 0 < <1).

a) Déterminer en u.a. l'aire $A(\alpha)$ du domaine (D) en fonction de α.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} A(\alpha)$.

c) (D) subit un pivotement autour de l'axe (Ox).

Calculer en u.v. le volume $V(\alpha)$ en fonction de α du solide engendré par ce pivotement.

Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} V(\alpha)$.

Exercice 7-28

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x^2}\ ; & \text{si } x\geq 1 \\ -x+e^{x-1}\ ; & \text{si } x<1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$; (unité 4 cm).

Partie A

1) a) Etudier la continuité puis la dérivabilité de *f* en 1.
   b) En déduire une conséquence graphique sur la dérivabilité de *f* en 1.
2) a) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.
   b) Préciser les asymptotes à la courbe (C_f) s'il y a lieu.
   c) Tracer les asymptotes (si elles existent) et la courbe (C_f) dans le repère ; on précisera l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie B

Soit *F* la fonction de la variable réelle *x* définie sur l'intervalle [1, + ∞[par :

$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$; (C'_F) sa courbe représentative dans le repère. (On ne demande pas d'abord de calculer *F* (*x*)).

1) a) Que représente *F* pour la fonction *f* sur l'intervalle [1, + ∞[?
   b) Sans calculer *F* (*x*), préciser le sens de variation de *F* sur l'intervalle [1, + ∞[.
   c) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$; dresser le tableau de variation de *F* sur [1, + ∞[.
2) On considère (D), le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe (*Ox*) et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = 4.
   a) Calculer en intégrant par parties, l'expression de *F* (*x*).
   b) Représenter en pointillés la courbe (C'_F) dans le repère ; (on tracera la tangente au point d'abscisse 1 à (C'_F)).
   c) Calculer l'aire *A* en cm² du domaine (D).

Partie C

1) Soient *a* et *b* deux réels vérifiant $b>a\geq 2$; On pose $I_{a,\,b}=\int_a^b f(x)\,dx$.
   a) Donner une interprétation géométrique de $I_{a,\,b}$.
   b) Utiliser le tableau de variations de *f* pour montrer que, pour $b>a\geq 2$ on a :
   $(b-a)\,f(b) < I_{a,\,b} < (b-a)\,f(a)$.
   c) Montrer que pour tout naturel *n* ≥ 2, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}<\int_n^{n+1} f(t)\,dt<\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
   d) Calculer en fonction des réels *n* l'intégrale $I_{n,\,n+1}$.
2) Pour tout naturel *n* ≥ 2, on pose : $S_n=\dfrac{\ln 2}{2^2}+\dfrac{\ln 3}{3^2}+....+\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
   a) Utiliser la question C) 1) c) pour montrer que pour tout *n* ≥ 2,
   $S_n-\dfrac{\ln 2}{2^2}<\int_2^n\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)dx<S_n-\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
   b) En déduire que : $\dfrac{1+\ln 2}{2}-\dfrac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}<S_n<\dfrac{2+3\ln 2}{4}-\dfrac{1+\ln(n)}{n}$
   c) Précicer un encadrement de S_{100} par deux nombres décimaux à deux décimales à partir des inégalités précédentes.

On donne : $\ln 2\approx 0{,}7$; $\ln 5\approx 1{,}6$.

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 7-1

Calcul pratique des intégrales « par primitivation » en utilisant les primitives des fonctions composées.

Solution

1) Calculons les intégrales suivantes : directement « par primitivation »

a) $\int_0^1 (x^3-3x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$

b) $\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\sqrt{x+1}\,\right]_0^3 = 2-1=1$

c) $\int_{-1}^1 \left(\frac{2x-3}{x^2-3x+4}\right)dx = \left[\ln\left|x^2-3x+4\right|\right]_{-1}^1 = -2\ln 2$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \sin^2 x\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \left[\tan t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$

2) Calculons les intégrales suivantes : « par primitivation » après transformation s'il y a lieu des expressions

a) $\int_{-1}^0 (x+1)(x^2+2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (2x+2)(x^2+2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x^2+2x+4)^2\right]_{-1}^0 = \frac{7}{4}$

b) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^{e^2} = \ln 2$;

c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\ \cos^2 x\,dx = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx$

$$= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos x - \cos x\ \sin^2 x\right)\,dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{11}{24}.$$

d) $\int_1^2 \frac{x^2+2x-1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+2-\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+2x-\ln|x|\right]_1^2 = \frac{7}{2}-\ln 2.$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x)\,(\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\cos^2 x)\,(\cos^2 x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x - \sin x\cos^4 x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$$

f) $\int_0^1 \frac{2x^2+x-3}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(2x-1-\frac{2}{x+1}\right)dx = \left[x^2-x-2\ln|x+1|\right]_0^1 = -2\ln 2$

Exercice 7-2

Calcul pratique des intégrales « par intégration par parties »

Solution

1) Calculons les intégrales suivantes : « Intégration par partie » une fois

a) $\int_1^x \ln t\,dt$; posons $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$; alors $u(t)=t$ et $v'(t)=\frac{1}{t}$; donc :

$$\int_1^x \ln t\, dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - x + 1$$

b) $\int_1^e t\ln t\, dt$; posons $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$; alors $u(t) = \frac{1}{2}t^2$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$; donc :

$$\int_1^e t\ln t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t\right]_1^e = \frac{2e^2 - e + 1}{4}.$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\, dx$; posons :

$u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = \sin x$; alors $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\cos x$; donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\, dx = [-(2x+1)\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1 - 2 = -1.$$

d) $\int_0^{\ln 2} xe^x\, dx$; posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$; donc :

$$\int_0^{\ln 2} xe^x\, dx = [xe^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x\, dx = 2\ln 2 - 1.$$

2) Calculons les intégrales suivantes ; « Intégration par partie » deux fois

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2-1)\sin 2x\, dx$; posons :

$u(x) = x^2 - 1$ et $v'(x) = \sin 2x$; alors $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$; donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2-1)\sin 2x\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x(x^2-1)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\, dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\, dx$$

Pour $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\, dx$, posons :

$u(x) = x$ et $v'(x) = \cos 2x$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$; donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2-1)\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{4}.$$

b) $\int_{-\pi}^0 (1-x^2)\cos x\, dx$; posons :

$u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = \cos x$; alors $u'(x) = -2x$ et $v(x) = \sin x$; donc :

$$\int_{-\pi}^0 (1-x^2)\cos x\, dx = [\sin x(1-x^2)]_{-\pi}^0 + 2\int_{-\pi}^0 x\sin x\, dx = 2\int_{-\pi}^0 x\sin x\, dx$$

Pour $\int_{-\pi}^0 x\sin x\, dx$, posons :

$u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$; donc

$\int_{-\pi}^0 x\sin x\, dx = [-x\cos x]_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \cos x = \pi + [\sin x]_{-\pi}^0 = \pi$; d'où

$$\int_{-\pi}^0 (1-x^2)\cos x\, dx = 2\pi$$

c) $\int_0^1 (2x^2 + x)e^{-x}\, dx$; posons :

$u(x) = 2x^2 + x$ et $v'(x) = e^{-x}$; alors $u'(x) = 4x+1$ et $v(x) = -e^{-x}$; donc :

$$\int_0^1 (2x^2+x)e^{-x}\,dx = \left[-(2x^2+x)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (4x+1)e^{-x}\,dx = -3e^{-1} + \int_0^1 (4x+1)e^{-x}\,dx$$

Pour $\int_0^1 (4x+1)e^{-x}\,dx$, posons :

$u(x) = 4x+1$ et $v'(x) = e^{-x}$; alors $u'(x) = 4$ et $v(x) = -e^{-x}$; donc ;

$$\int_0^1 (4x+1)e^{-x}\,dx = \left[-(4x+1)e^{-x}\right]_0^1 + 4\int_0^1 e^{-x}dx = -5e^{-1} + 1 + 4(-e^{-1}+1) = -9e^{-1} + 5$$

$$\int_0^1 (2x^2+x)e^{-x}\,dx = 5 - 12e^{-1}$$

3) Calculons les intégrales suivantes ; « Intégration par partie » deux fois conduisant à une équation.

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(-2x)\,dx$; posons :

$u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos(-2x)$; alors $u'(x) = e^x$ et $v(x) = -\frac{1}{2}\sin(-2x)$; donc :

$$I = \left[-\frac{1}{2}e^x \sin(-2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(-2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(-2x)\,dx \;;$$

Pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(-2x)\,dx$; posons (en gardant le même ordre)

$u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin(-2x)$; alors $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \frac{1}{2}\cos(-2x)$; donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(-2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^x \cos(-2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\,.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(-2x)\,dx = -\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}I \text{ ; on a donc } I = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}.$$

b) $J = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$; posons :

$u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \sin x$; alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = \cos x$; donc :

$$J = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx \;;$$

Pour $\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$; posons (en gardant le même ordre) :

$u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \cos x$; alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = -\sin x$; donc :

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = e^{-\pi} + 1 - J \text{ ; en définitive,}$$

$$J = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = e^{-\pi} + 1 - J \text{ ; donc } J = \frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

Exercice 7-3

1) Division euclidienne ou méthode des coefficients indéterminés ; Calcul pratique d'intégrale
2) , 3) et 4) méthode des coefficients indéterminés ; Calcul pratique d'intégrale.

Solution

1) a) Montrons que pour tout x différent de – 2, $\frac{x^2-2x+2}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$ où a, b et c

sont 3 réels à déterminer.

Par l'une des méthodes (division euclidienne ou coefficients indéterminés) on obtient : $a=1$; $b=-4$ et $c=10$; donc $\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}=x-4+\dfrac{10}{x+2}$

b) En déduisons le calcul de $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\,dx$.

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-2x+2}{x+2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x-4+\frac{10}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-4x+10\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}=10\ln 3-8$$

2) a) Montrons que pour tout x différent de – 1 et de 3, $\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}$ où a et b sont 2 réels à déterminer.

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient $a=\dfrac{1}{4}$ et $b=\dfrac{7}{4}$. Donc

$$\frac{2x+1}{x^2-2x-3}=\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{7}{4}}{x-3}.$$

b) En déduisons le calcul de $J=\int_{0}^{2}\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}\,dx$.

$$J=\int_{0}^{2}\left(\frac{2x+1}{x^2-2x-3}\right)dx=\int_{0}^{2}\left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{7}{4}}{x-3}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{7}{4}\ln|x-3|\right]_{0}^{2}=-\frac{3}{2}\ln 3.$$

3) a) Montrons que pour tout x différent de 0 et de – 1, $\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}$ où a, b et c sont 3 réels à déterminer.

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient : $a=1$ et $b=c=-1$

Donc $\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{-1}{(x+1)^2}$

b) En déduisons le calcul de $K=\int_{1}^{2}\dfrac{1}{x(x+1)^2}\,dx$.

$$K=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x(x+1)^2}\right)dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right]_{1}^{2}$$

$$K=2\ln 2-\ln 3-\frac{1}{6}.$$

4) a) Montrons que pour tout x différent de 0, de 1 et de – 1, $\dfrac{1}{x(x^2-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont 3 réels à déterminer.

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient : $a=-1$ et $b=c=\dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{1}{x(x^2-1)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$.

b) En déduisons le calcul de $L=\int_{2}^{3}\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\,dx$.

Posons $u'(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ et $v(x)=\ln x$; alors $u(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$; donc :

$$L=\int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\ln x\right]_2^3+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$L=\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{16}\ln 3+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx=\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{16}\ln 3+\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$

$$L=\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{16}\ln 3+\frac{1}{2}\left[-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_2^3=\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{16}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 3+\frac{5}{4}\ln 2$$

$$L=-\frac{13}{16}\ln 3+\frac{17}{12}\ln 2$$

Exercice 7-4 : Calcul des intégrales conduisant à une équation ou à un système d'équations.

I) *1) Propriétés des intégrales et formules fondamentales en trigonométrie.*
2) Calcul pratique de dérivée de fonction ; Définition de l'intégrale ; Résolution de système d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Solution

On considère : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

1) Calculons $I+J$.

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e^{\pi}-1)$$

(Car $\cos^2 x+\sin^2 x=1$; $\forall x\in\mathbb{R}$).

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x+\sin 2x)$;

a) calculons $f'(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; et on a pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}(\cos 2x+\sin 2x)+\dfrac{1}{2}e^{2x}(-\sin 2x+\cos 2x)=e^{2x}\cos 2x$.

b) En déduisons $I-J$, puis déterminons I et J.

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 2x\,dx$$

(Car $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$).

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=-\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}$$

On a donc $\begin{cases} I+J=\dfrac{1}{2}e^{\pi}-\dfrac{1}{2} \\ I-J=-\dfrac{1}{4}e^{\pi}-\dfrac{1}{4}\end{cases}$ ce qui donne que $I=\dfrac{e^{\pi}-3}{8}$; et $J=\dfrac{3e^{\pi}-1}{8}$

II) *1) Calcul pratique de dérivée de fonction ; Calcul d'intégrale par primitivation.*
2) Opérations sur les fonctions dérivables ; Calcul pratique de dérivée de fonction ; Formules trigonométriques ; Propriétés des intégrales ; Résolution d'équations.

Solution

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

1) a) Soit $u : x \mapsto u(x) = \tan x$; calculons $u'(x)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entier}\right\}$ et on a $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b) Calculons I.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)\,dx = u\left(\frac{\pi}{4}\right) - u(0) = 1$. D'où $I = 1$.

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Démontrons que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entier}\right\}$; et l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset D_f$; les fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos^3 x$ sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en tant que fonctions usuelles ; donc f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en tant que quotient des deux fonctions dérivables.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];\quad f'(x) = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

b) En déduisons une relation entre I et J ; puis calculons J.

On a ; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^4 x}\right) dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 2$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\,dx = 3J - 2I$; donc

$3J - 2I = 2$; on a alors $J = \frac{4}{3}$; car $I = 1$.

III) *1) Calcul pratique de dérivée de fonction ; Définition de primitives.*
2) Propriétés des intégrales ; Intégration par parties ; Résolution de système d'équations.

<u>Solution</u>

Soient les intégrales : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right) dx$.

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Calculons $f'(x)$.

f est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables ; et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

b) Calculons I.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int_0^1 f'(x)\,dx=f(1)-f(0)=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\ln 2$$

2) a) Sans calculer explicitement J et K, montrons que $J + 2I = K$.

$$J+2I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx+2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int_0^1\left(\sqrt{x^2+2}\right)dx=K\,.$$

b) Montrons en intégrant par parties K, que $K+J=\sqrt{3}$.

Posons $u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{x^2+2}$; alors $u(x)=x$ et $v'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$; donc :

$$K=\int_0^1\left(\sqrt{x^2+2}\right)dx=\left[x\sqrt{x^2+2}\,\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx=\sqrt{3}-J.$$ D'où $K+J=\sqrt{3}$.

c) En déduisons les valeurs de J et de K.

D'après les résultats aux questions précédentes, on a :

$$\begin{cases} J+2I=K \\ K+J=\sqrt{3} \end{cases};$$

donc $J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2-\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$; et $K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$

<u>Exercice 7-5</u> : Equations différentielles du 1^er ordre à c.c.s.s.m.

I) *1) Résolution d'équations différentielles du 1^er degré à c.c.s.s.m.*
2) Détermination de la solution qui vérifie une condition donnée.

<u>Solution</u>

1) Résolvons l'équation différentielle : $2y' + y = 0$.

$2y' + y = 0$ équivaut à $y'+\dfrac{1}{2}y=0$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par $f(x)=k\,e^{-\frac{1}{2}x}$; $k \in$ ℝ.

2) Déterminons la solution f qui prend la valeur -1 en 0.

$f(0) = -1$ équivaut à $k = -1$; donc la solution f qui prend la valeur -1 en 0 est définie par $f(x)=-\,e^{-\frac{1}{2}x}$.

II) *1) Résolution d'équations différentielles du 1^er degré à c.c.s.s.m.*
2) Détermination de la solution qui vérifie une condition donnée.

<u>Solution</u>

1) Résolvons l'équation différentielle : $-2y' + y = 5y$.

$-2y' + y = 5y$ équivaut à $y' + 2y = 0$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par $f(x)=k\,e^{-2x}$; $k \in$ ℝ.

2) Déterminons la solution f dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $A(-1, 2)$.

Il s'agit de déterminer la solution f qui vérifie $f(-1) = 2$; $f(-1)=k\,e^{2}=2 \Leftrightarrow k=2e^{-2}$

Donc la solution f dont la courbe représentative (C_f) passe par le point $A(-1, 2)$ est la fonction définie par $f(x)=2e^{-2(x+1)}$

III) *1) Résolution d'équations différentielles du 1^er degré à c.c.s.s.m.*
2) Solution d'uen équation différentielle qui vérifie une condition donnée. Calcul algébrique sur les puissances.

<u>Solution</u>

1) Résolvons l'équation différentielle : $y' - (\ln 2)\,y = 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - (\ln 2)\,y = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par $f(x) = k\,e^{(\ln 2)x} = k\,2^x$; $k \in$ ℝ.

2) a) Déterminons la solution f dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur –ln 4.

Il s'agit de déterminer la solution f qui vérifie $f'(0) = -\ln 4 = -2\ln 2$;

$f(x) = k\,e^{(\ln 2)x}$; donc $f'(x) = k\ln 2\,e^{(\ln 2)x}$; alors $f'(0) = k\ln 2 = -2\ln 2 \Leftrightarrow k = -2$;

Donc la solution f dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur – ln 4 est définie pour tout réel x par $f(x) = -2\,e^{(\ln 2)x}$

b) Montrons que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $-a^{x+1}$ où a est un réel à déterminer.

Pour tout réel x :

$f(x) = -2\,e^{(\ln 2)x}$ or $e^{(\ln 2)x} = 2^x$; donc $f(x) = -2\,e^{(\ln 2)x} = -2\times 2^x = -2^{x+1}$.

<u>Exercice 7-6</u> : Equations différentielles du 2nd ordre à c.c.s.s.m.

I) *1) Résolution d'équations différentielles du 2nd degré à c.c.s.s.m.*

2) 3) Solution d'une équation différentielle qui vérifie deux conditions données ; Calcul de dérivée et d'intégrales de fonctions circulaires ; Formules d'additions en trigonométrie.

<u>Solution</u>

1) Résolvons l'équation différentielle $9\,y'' + y = 0$.

$9\,y'' + y = 0$ équivaut à $y'' + \left(\frac{1}{3}\right)^2 y = 0$ et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par

$f(x) = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$; $A, B \in$ ℝ.

2) Déterminons la solution f qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

$f(x) = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$; $f'(x) = -\frac{A}{3}\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{B}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

$f(0) = A = 0$; et $f'(0) = \frac{B}{3} = 3$, donc $A = 0$ et $B = 9$. La solution f qui vérifie :

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$ est définie pour tout réel x par : $f(x) = 9\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

3) a) Déterminons la solution g qui vérifie $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\,dx = 0$ et $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx = -6$.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right)dx = \left[3A\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 3B\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 3A + 3B = 0$$

$$\int_0^{3\pi} \left(A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right)dx = \left[3A\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - 3B\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right]_0^{3\pi} = 3B + 3B = -6$$

On est donc amené à résoudre le système $\begin{cases} 3A + 3B = 0 \\ 6B = -6 \end{cases}$; $B = -1$ et $A = 1$.

Donc la solution g qui vérifie $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} g(x)\,dx = 0$ et $\int_0^{3\pi} g(x)\,dx = -6$ est définie pour tout réel x par : $g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

b) Déterminons les réels k, α et β tels que pour tout réel x, $g(x) = k\cos(\alpha x + \beta)$.

$$g(x)=\cos\left(\frac{1}{3}x\right)-\sin\left(\frac{1}{3}x\right)=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{1}{3}x\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$k=\sqrt{2}$; $\alpha=\dfrac{1}{3}$ et $\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

II) *1) Résolution d'équations différentielles du 2^{nd} degré à c.c.s.s.m.*
2) Solution d'une équation différentielle qui vérifie deux conditions données ; Calcul de dérivées de fonctions circulaires.

<u>Solution</u>

1) Résolvons l'équation différentielle $y'' + 49\,y = 0$.
$y'' + 49\,y = 0$ équivaut à $y''+7^2y=0$ et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par :
$f(x)=A\cos(7x)+B\sin(7x)$; $A, B \in$ ℝ.

2) a) Déterminons la solution f de cette équation qui vérifie : $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$ et $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=49$

$f'(x)=-7A\sin(7x)+7B\cos(7x)$ et $f''(x)=-49A\cos(7x)-49B\sin(7x)$;

$\dfrac{7\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+4\pi$ et $\dfrac{7\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi$; alors $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=7A=-\dfrac{7}{2}$; donc $A=-\dfrac{1}{2}$ et

$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-49A\dfrac{1}{2}-49B\dfrac{\sqrt{3}}{2}=49$ soit $A+B\sqrt{3}=-2$; ce qui donne $B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc la solution f de l'équation $y'' + 49\,y = 0$ qui vérifie :

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{7}{2}$ et $f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=49$ est la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos(7x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(7x).$$

b) Déterminons les réels k, a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = k\sin(a\,x + b)$.

$$f(x)=-\frac{1}{2}\cos(7x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(7x)=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cos(7x)+\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\sin(7x)$$

$f(x)=\sin\left(7x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $a=7$, $b=-\dfrac{5\pi}{6}$ et $k=1$.

III) *1) Résolution d'équations différentielles du 2^{nd} degré à c.c.s.s.m.*
2) Solution d'une équation différentielle qui vérifie deux conditions données ; Equation de tangente à une courbe de fonction en un point d'abscisse x_0.

<u>Solution</u>

1) Intégrons l'équation différentielle : $4\,y'' + 5\,y = -4\,y$.

$4\,y'' + 5\,y = -4\,y$ équivaut à $y''+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2y=0$; et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur ℝ, par

$f(x)=A\cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)+B\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$; $A, B \in$ ℝ.

2) Déterminons la solution particulière f de cette équation différentielle dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -2\,x + 1$.
L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)\,x + f(0)$; or cette équation est $y = -2\,x + 1$; donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.

$f(0) = A = 1$; $f'(x) = -\frac{3}{2}A\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}B\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$; $f'(0) = \frac{3}{2}B = -2$ donc $B = -\frac{4}{3}$

Donc la solution particulière *f* de l'équation différentielle $y'' + \left(\frac{3}{2}\right)^2 y = 0$ dont la courbe représentative (C_f) admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -2x + 1$ est la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$.

<u>Exercice 7-7</u> : Equations différentielles du 1er et 2nd ordre à c.c.a.s.m. dont les méthodes (théoriques) de résolution ne sont pas au programme en TD.

I) *1) Définition d'une fonction affine ; Solution d'une équation différentielle.*

2) Résolution d'une équation différentielle du 1er degré à c.c.s.s.m. Solution d'une équation différentielle.

3) Solution d'une équation différentielle du 1er degré à c.c.s.s.m. ; Solution d'une équation différentielle qui vérifie une condition donnée.

<u>Solution</u>

On considère l'équation différentielle : $y' + y = x$. (E).

1) Déterminons la fonction affine *f* solution de l'équation (E).
Une fonction affine *f* est une fonction définie de la forme $f(x) = ax + b$; avec $a, b \in \mathbb{R}$; une telle fonction est solution de l'équation (E) si et seulement si pour tout réel *x*, $f'(x) + f(x) = x$ c'est à dire $ax + (a+b) = x$. On a donc $a = 1$ et $b = -1$; $f(x) = x - 1$.

2) a) Résolvons l'équation différentielle : $y' + y = 0$ (E').
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E') est l'ensemble des fonctions *h* définies sur ℝ, par $h(x) = k\,e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

b) Démontrons qu'une fonction *g* définie sur ℝ, est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g - f$ est une solution de l'équation différentielle (E').
Une fonction *g* définie sur ℝ, est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si *g* vérifie $g'(x) + g(x) = x$ or, $f'(x) + f(x) = x$; donc $g'(x) + g(x) = x$ équivaut à $g'(x) + g(x) = f'(x) + f(x)$ c'est-à-dire $(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$ ce équivaut à dire que $g - f$ est une solution de l'équation différentielle (E').

3) a) En déduisons les solutions de l'équation différentielle (E).
D'après la question 2) b), une fonction *g* définie sur ℝ, est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g - f$ est une solution de l'équation différentielle (E') ; $g - f$ solution de l'équation (E') est de la forme $(g - f)(x) = k\,e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$; d'où $g(x) = f(x) + k\,e^{-x} = x - 1 + k\,e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions *g* définies sur ℝ, par $g(x) = x - 1 + k\,e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

b) Déterminons la solution *g* de l'équation différentielle (E) vérifiant $g'(0) = 0$.
$g'(x) = 1 - k\,e^{-x}$; $g'(0) = 1 - k = 0$; $k = 1$; donc la solution *g* de (E) qui vérifie $g'(0) = 0$ est définie pour tout réel *x* par : $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

II) *1) Résolution d'une équation différentielle du 1er degré à c.c.s.s.m. ; Solution d'une équation différentielle qui vérifie une condition donnée.*

2) Calcul pratique de dérivées de fonction ; Solution d'une équation différentielle.

<u>Solution</u>

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$. (E)

1) Déterminons la solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = k e^{2x}$; $k \in \mathbb{R}$.
$h(0) = 1$ équivaut à $k = 1$; donc la solution h qui prend la valeur 1 en 0 est définie par $h(x) = e^{2x}$.

2) Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie par : $f(x) = e^{2x} g(x)$.

a) Calculons $g(0)$.
On a $f(x) = e^{2x} g(x)$; donc $g(x) = e^{-2x} f(x)$; $g(0) = f(0) = \ln 2$.

b) Calculons $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
$f(x) = e^{2x} g(x)$; donc $f'(x) = 2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x) = (2g(x) + g'(x))e^{2x}$.

c) Montrons que f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si
$f'(x) - 2f(x) = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$; ce qui équivaut à (en remplaçant $f'(x)$ et $f(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$) ; $2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x) - 2e^{2x} g(x) = e^{2x} g'(x) = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$
C'est-à-dire $g'(x) = -\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d) En déduisons l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de l'équation différentielle (E).
On a $g'(x) = -\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{(1+e^{-2x})'}{1+e^{-2x}}$; donc $g(x) = \ln(1+e^{-2x}) + k$. $(1+e^{-2x} > 0)$; avec $k \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{2x} g(x)$; donc $f(x) = e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) + k$; $f(0) = \ln 2 + k = \ln 2$ donc $f(x) = e^{2x} \ln(1+e^{-2x})$.

III) *1) Degré d'un polynôme, égalité de deux polynômes ; Solution d'une équation différentielle.*
2) Solution d'une équation différentielle.
3) Résolution d'équations différentielles du 2nd degré à c.c.s.s.m.
Détermination de la solution qui vérifie deux conditions données

Solution

On considère l'équation différentielle : $9y'' + 4y = 2x - 1$. (E)

1) a) Montrons que si une fonction polynôme p est solution de (E), alors son degré est 1.
Soit p un polynôme de degré n, solution de (E), p'' est de degré $n - 2$; alors $9p''(x) + 4p(x)$ est de degré n et $2x - 1$ est de degré 1 ; l'égalité $9p''(x) + 4p(x) = 2x - 1$ n'est possible que si degré de $p(x)$ est égale à 1.

b) Déterminons p, solution de (E).
p est donc un polynôme de degré 1 ; $p(x) = ax + b$; $p'(x) = a$; $p''(x) = 0$; alors $9p''(x) + 4p(x) = 4(ax + b) = 2x - 1$ cela équivaut à $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. Donc le polynôme p solution de (E) est défini pour tout x par : $p(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

2) Montrons qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation différentielle : $9y'' + 4y = 0$ (E').

- Supposons que f est solution de (E) ; alors f vérifie pour tout réel x ;
$9f''(x) + 4f(x) = 2x - 1$; or le polynôme p défini par $p(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ vérifie $9p''(x) + 4p(x) = 2x - 1$; donc $9f''(x) + 4f(x) = 9p''(x) + 4p(x)$ ce qui donne

$9\,(f-p)''\,(x) + 4\,(f-p)\,(x) = 0$; d'où $f-p$ est solution de l'équation différentielle : $9\,y'' + 4\,y = 0$ (E').

- Réciproquement supposons que $f-p$ est solution de l'équation différentielle : $9\,y'' + 4\,y = 0$ (E') ; alors pour tout réel x, $9\,(f-p)''\,(x) + 4\,(f-p)\,(x) = 0$, c'est-à-dire $9\,f''\,(x) + 4\,f\,(x) = 9\,p''\,(x) + 4\,p\,(x)$; or $9\,p''\,(x) + 4\,p\,(x) = 2\,x - 1$; donc $9\,f''\,(x) + 4\,f\,(x) = 2\,x - 1$; ce qui traduit que f est solution de (E).
- En conclusion, une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-p$ est solution de l'équation différentielle : $9\,y'' + 4\,y = 0$ (E').

3) a) Résolvons l'équation (E') ; puis donnons les solutions de (E).

$9\,y'' + 4\,y = 0$ équivaut à $y''+\left(\frac{2}{3}\right)^2 y = 0$; l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbb{R}$, par
$h(x) = A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$; $A, B \in \mathbb{R}$.

Toute solution de (E') est de la forme $h(x) = A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$;

$A, B \in \mathbb{R}$; donc $(f-p)(x) = A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$; $A, B \in \mathbb{R}$; on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions f définies pour tout réel x par : $f\,(x) = A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$; $A, B \in \mathbb{R}$

b) Déterminons la solution g de (E) qui vérifie $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $g''\,(0) = 2$.

$g(x) = A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$; $g'(x) = -\frac{2}{3}A\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{2}{3}B\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{2}$

$g''(x) = -\frac{4}{9}A\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{4}{9}B\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$; $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}A\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}B\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{B-\sqrt{3}A}{3} + \frac{1}{2}$

$g''(0) = -\frac{4}{9}A$; on a donc $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{B-A\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *et* $g''(0) = -\frac{4}{9}A = 2.$

$$\begin{cases} B - A\sqrt{3} = 0 \\ -\frac{4}{9}A = 2 \end{cases} \; ; \; A = -\frac{9}{2} \text{ et } B = -\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Donc la solution g de (E) qui vérifie $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $g''\,(0) = 2$ est définie pour tout réel x par : $g(x) = -\frac{9}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{9\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Exercice 7-8 :**« Une équation différentielle du 1^er^ degré à coefficients non constants avec second membre » ; la méthode théorique de résolution n'est pas au programme !**

1) Solution d'une équation différentielle ; égalité de deux polynômes
2) a) Solution d'une équation différentielle, b) Primitive de fonction

Solution

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions f définies sur l'intervalle] 0, + ∞ [qui vérifie : Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f\,(x) - x\,f\,'(x) = \frac{2\,x}{x+2}$ (P).

1) Montrons qu'une fonction affine ne peut vérifier la propriété (P).
Soit f une fonction affine, pour tout réel x, $f\,(x) = ax + b$; si f vérifie (P), on aurait :

Pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f(x) - x\, f'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$; donc $a\,x + b - a\,x = \dfrac{2x}{x+2}$; soit pour tout $x > 0$, $b = \dfrac{2x}{x+2}$ c'est-à-dire $bx + 2b = 2x$; alors $b = 0$ et $b = 2$: ce qui est impossible ; donc *f* ainsi définie ne peut pas vérifier (P).

2) *f* étant une fonction définie et dérivable sur] 0, + ∞ [, on pose, pour tout $x > 0$: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

a) Montrons que la fonction *f* vérifie la propriété (P) si et seulement si, pour tout $x > 0$ $g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.

f est définie et dérivable sur] 0, + ∞ [; donc *g* l'est également :

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ donc $f(x) = x\,g(x)$; *et* $f'(x) = g(x) + x\,g'(x)$.

f vérifie la propriété (P) si et seulement si, pour tout $x \in$] 0, + ∞ [,

$f(x) - x\,f'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ (en remplaçant *f* (*x*) et *f ’* (*x*) par leurs valeurs en fonction de *g* (*x*) et *g’* (*x*)) on a $x\,g(x) - x\,g(x) - x^2\,g'(x) = \dfrac{2x}{x+2}$; soit $g'(x) = -\dfrac{2}{x(x+2)}$;

$$-\frac{2}{x(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}.$$

Donc *f* vérifie la propriété (P) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.

b) En déduisons l'ensemble (E).

D'après la question 2) a) *f* vérifie la propriété (P) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$; donc $g(x) = \ln(x+2) - \ln x + k = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

On a donc $f(x) = x\,g(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + k\,x$; avec $k \in \mathbb{R}$; pour tout $x > 0$.

(E) est donc l'ensemble des fonctions *f* définies sur] 0, + ∞ [par :

$f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) + k\,x$; avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices 9 à 13 : **Problèmes concrets conduisant à des équations différentielles ; Utilisation des équations différentielles dans d'autres domaines :**

Les outils possibles pour les exercices 9 10, 11, 12 et 13 sont pratiquement les mêmes que ceux des exercices sur les équations différentielles.

Exercice 7-9 : (En chimie)

La concentration *x*, (en *g*/*l*) de micro-organiques dans une culture en continu, varie en fonction du temps *t* (en h) ; ($t \geq 0$) et vérifie la relation : $x' + \dfrac{2}{3}x = 2e^{\frac{1}{3}t}$. (1)

1) Résolvons l'équation différentielle $x' + \dfrac{2}{3}x = 0$. (2)

La solution de l'équation différentielle (2) est toute fonction *x* définie pour tout $t \geq 0$ par $x(t) = a\,e^{-\frac{2}{3}t}$; $a \in \mathbb{R}$

On pose $f(t) = k\,e^{\frac{t}{3}}$ où *k* est un nombre réel.

2) Déterminons le réel k pour que la fonction $f: t \mapsto k\,e^{\frac{t}{3}}$ soit solution de l'équation différentielle (1).

f est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) + \frac{2}{3} f(t) = 2e^{\frac{1}{3}t}$; $f'(t) = \frac{1}{3} k\,e^{\frac{1}{3}t}$; donc $\frac{1}{3} k\,e^{\frac{1}{3}t} + \frac{2}{3} k\,e^{\frac{1}{3}t} = 2e^{\frac{1}{3}t}$; $k = 2$.

Pour $k = 2$, la fonction f définie par $f(t) = 2\,e^{\frac{1}{3}t}$ est solution de l'équation (1).

3) a) Montrons qu'une fonction x est solution l'équation différentielle (1), si et seulement si $x - f$ est solution de l'équation différentielle (2).

Une fonction x est solution de l'équation différentielle (1), si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $x'(t) + \frac{2}{3} x(t) = 2e^{\frac{1}{3}t}$; or $f'(t) + \frac{2}{3} f(t) = 2e^{\frac{1}{3}t}$; donc x est solution de l'équation différentielle (1), si et seulement si pour tout $t \geq 0$,

$x'(t) + \frac{2}{3} x(t) = f'(t) + \frac{2}{3} f(t)$; c'est-à-dire $(x - f)'(t) + \frac{2}{3}(x - f)(t) = 0$ ce qui signifie que $x - f$ est solution de l'équation différentielle (2).

Donc x est solution l'équation différentielle (1), si et seulement si $x - f$ est solution de l'équation différentielle (2).

b) En déduisons la forme générale de la solution x de l'équation différentielle (1).

$x - f$ est solution de l'équation différentielle (2) si et seulement si x est solution l'équation différentielle (1). Toute solution de l'équation différentielle (2) est de la forme $a\,e^{-\frac{2}{3}t}$; $a \in \mathbb{R}$; donc $(x - f)(t) = a\,e^{-\frac{2}{3}t}$; $a \in \mathbb{R}$; on en déduit la forme que pour tout $t \geq 0$, $x(t) = a\,e^{-\frac{2}{3}t} + f(t) = a\,e^{-\frac{2}{3}t} + 2e^{\frac{1}{3}t}$; $a \in \mathbb{R}$

c) Déterminons la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une concentration initiale de $3{,}25\ g/l$.

Il s'agit de déterminer a, pour que $x(0) = 3{,}25 = \frac{13}{4}$.

$x(t) = a\,e^{-\frac{2}{3}t} + 2e^{\frac{1}{3}t}$; $x(0) = a + 2 = \frac{13}{4}$, donc $a = \frac{5}{4}$. La solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une concentration initiale de $3{,}25\ g/l$ est la fonction x définie pour tout $t \geq 0$ par $x(t) = \frac{5}{4} e^{-\frac{2}{3}t} + 2e^{\frac{1}{3}t}$.

Exercice 7-10 : (En mécanique)

5) Valeur moyenne d'une fonction

À chaque instant t (exprimé en secondes) V vérifie la relation : $v'(t) + \frac{k}{m} v(t) = g$;

(où g est l'accélération de la pesanteur ; et t un réel positif).

1) Trouvons une fonction constante c solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{k}{m} y = g$.

c étant une fonction constante, $c' = 0$ et on aura alors : $0 + \frac{k}{m} c = g$; donc $c = \frac{m}{k} g$

La fonction constante c solution de l'équation différentielle (E) est définie pour tout t par : $c(t) = \frac{m}{k} g$

2) Montrons qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{k}{m} y = 0$.

Une fonction f est solution de l'équation différentielle (E), si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $f'(t) + \frac{k}{m} f(t) = g$; or $\frac{k}{m} c(t) = g$; donc f est solution de l'équation différentielle (E), si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $f'(t) + \frac{k}{m} f(t) = \frac{k}{m} c(t)$; c'est-à-dire (c constante) $(f - c)'(t) + \frac{k}{m}(f - c)(t) = 0$ ce qui signifie que $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E').

Donc f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{k}{m} y = 0$.

3) a) Résolvons l'équation différentielle (E'), puis l'équation différentielle (E).

La solution de l'équation différentielle (E') est toute fonction g définie pour tout $t \geq 0$ par : $g(t) = a e^{-\frac{k}{m}t}$; avec $a \in \mathbb{R}$.

Donc $f - c$ est solution de l'équation différentielle (E') équivaut à $(f - c)(t) = a e^{-\frac{k}{m}t}$; avec $a \in \mathbb{R}$; on en déduit alors que $f(t) = a e^{-\frac{k}{m}t} + c(t) = a e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g$; avec $a \in \mathbb{R}$

Donc d'après la question 2) b), la solution de l'équation (E) est toute fonction f définie pour tout $t \geq 0$ par : $f(t) = a e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g$; avec $a \in \mathbb{R}$.

b) En déduisons l'expression de $v(t)$ en fonction de t sachant que $v(0) = 0$.

On a pour tout $t \geq 0$: $v(t) = a e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g$; avec $a \in \mathbb{R}$; $v(0) = a + \frac{m}{k} g = 0$

$a = -\frac{m}{k} g$; l'expression de $v(t)$ en fonction de t sachant que $v(0) = 0$ est :

$v(t) = -\frac{m}{k} g e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g = \frac{m}{k} g \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

c) Donnons une interprétation de la valeur $V = \frac{mg}{k}$.

On a pour tout $t \geq 0$, $v(t) = -\frac{m}{k} g e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g$; et $\lim_{t \to +\infty} v(t) = \frac{m}{k} g$; donc la valeur $V = \frac{mg}{k}$ est la vitesse limite de la masse m au cours de la chute lorsque t devient aussi grand que l'on veut.

4) a) Donnons l'intensité F de la force de freinage en fonction de t.

On a $F = -kV$; donc pour tout $t \geq 0$, $F(t) = -k\left(-\frac{m}{k} g e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k} g\right) = m g e^{-\frac{k}{m}t} - m g$.

b) Donnons une interprétation de la valeur $F = -m g$.

On a pour tout $t \geq 0$, $F(t) = m g e^{-\frac{k}{m}t} - m g$; et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = -m g$; la valeur $F = -m g$ est l'intensité limite de la force de freinage lorsque t devient de plus en plus grand.

5) Le corps atteint le sol au bout de 1 mn 20 s

a) Déterminons la vitesse moyenne $\overline{V}$ du corps pendant la chute.

Il s'agit de déterminer la valeur moyenne de v sur l'intervalle [0, 80] ; 1mn 20s = 80 s

$$\overline{V} = \frac{1}{80}\int_0^{80}\left(-\frac{m}{k}g\,e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{m}{k}g\right)dt = \frac{m\,g}{80\,k}\int_0^{80}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt = \frac{m\,g}{80\,k}\left[t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^{80}$$

$$\overline{V} = \frac{m\,g}{80\,k}\left[t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^{80} = \frac{m\,g}{80\,k}\left[80+\frac{m}{k}e^{-\frac{80k}{m}}-\frac{m}{k}\right]$$

b) En déduisons la valeur moyenne $\overline{F}$ de la force de freinage pendant la période de chute.

On a $F = -kV$; donc $\overline{F} = -k\overline{V} = -\frac{m\,g}{80}\left[80+\frac{m}{k}e^{-\frac{80k}{m}}-\frac{m}{k}\right]$.

<u>Exercice 7-11</u> : (En médecine)

On a pour tout $t \geq 0$: $f'(t) - K\,f(t) = 0$: (1) ; $g'(t) + K\,g(t) = 0$: (2) ; avec $K = 1,20\cdot 10^{-3}$.

1) a) Déterminons la solution f de l'équation différentielle (1) qui vérifie $f(0) = N$. ($N \in \mathbb{Z}$)

La solution générale de l'équation différentielle $f'(t) - K\,f(t) = 0$ (1) est la fonction f définie pour tout $t \geq 0$ par : $f(t) = a\,e^{K\,t}$; avec $a \in \mathbb{R}$; $f(0) = a = N$. Donc la solution f de l'équation différentielle (1) qui vérifie $f(0) = N$. ($N \in \mathbb{Z}$) est définie pour tout $t \geq 0$ par : $f(t) = N\,e^{K\,t}$.

b) Le sang humain contient en moyenne $2,6.10^{10}$ leucocytes.

Déterminons la solution g de l'équation différentielle (2) telle que $g(0) = 2,6.10^{10}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) est l'ensemble des fonctions g définies pour tout $t \geq 0$ par : $g(t) = a\,e^{-K\,t}$; avec $a \in \mathbb{R}$; $g(0) = a = 2,6.10^{10}$. Donc la solution g de l'équation différentielle (2) qui vérifie $g(0) = 2,6.10^{10}$ est définie pour tout $t \geq 0$ par : $g(t) = 2,6\times 10^{10}\,e^{-K\,t}$.

2) Le nombre N dépend des individus au moment de la contamination.

Tambila a été contaminé du virus V.I.H. le 1 janvier 2010. Chez lui, N est de $1,36 \times 10^{10}$.

a) Déterminons le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes dans le sang de Tambila au 01 janvier 2011 ? (12 mois après la contamination)

D'après les données de l'énoncé ; $f(t)$ désigne le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes dans le sang avec t en mois. Il s'agit donc ici de calculer $f(12)$. $f(12) = 1,36\times 10^{10}\,e^{1,20\times 10^{-3}\times 12} = 1,36\times 10^{10}\,e^{0,0144} = 1,3804\times 10^{10}$; donc le nombre de germes responsables de la destruction des leucocytes dans le sang de Tambila au 01 janvier 2011 a été de $1,3804\times 10^{10}$.

b) Déterminons le nombre de leucocytes restés vivants dans son sang au 01 janvier 2011

D'après les données de l'énoncé, $g(t)$ désigne le nombre de leucocytes dans le sang à un instant t (en mois) donné ; il s'agit donc ici de calculer $g(12)$.

$g(12) = 2,6\times 10^{10}\,e^{-1,20\times 10^{-3}\times 12} = 2,6\times 10^{10}\,e^{-0,0144} = 2,561\times 10^{10}$; donc le nombre de leucocytes restés vivants dans le sang de Tambila au 01 janvier 2011 a été de $2,561\times 10^{10}$.

c) Déterminons le nombre de leucocytes détruits durant ces 12 mois ?

$2,6\times 10^{10} - 2,561\times 10^{10} = 0,039\times 10^{10}$; le nombre de leucocytes détruits durant ces 12 mois a été de $0,039\times 10^{10}$.

d) Déterminons le nombre d'années au bout desquelles Tambila développera la maladie si il n'a pas été de nouveau contaminé ?

Il s'agit de déterminer t tel que $f(t) > g(t)$.

$f(t) > g(t)$ équivaut à $1{,}36\times10^{10}\,e^{Kt} > 2{,}6\times10^{10}\,e^{-Kt}$; soit $e^{2Kt} > \dfrac{2{,}6}{1{,}36}$ ce qui donne $e^{2Kt} > 1{,}912$; $2{,}4\times10^{-3}t > 0{,}648$; $t > 270$.

Au bout de 23 ans Tambila pourra développer la maladie

<u>Exercice 7-12</u> : (En électricité)

3) Calcul pratique d'intégrale par primitivation ;Formules trigonométriques.

$q\ (t)$ désigne la valeur de la charge (en coulombs) du condensateur à l'instant t et $q\ (t)$ vérifie la relation : $L\,\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{C}q = 0$.

q est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle [0, + ∞[solution de l'équation différentielle $L\,y'' + \dfrac{1}{C}\,y = 0$.

L'intensité $i\ (t)$ du courant à l'instant t est donnée par : $i(t) = -\dfrac{d\,q}{dt}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

1) On donne $C = 2\times10^{-3}$, $L = 1{,}25$ et $U_0 = E = 50$.

a) Montrons que q est solution de l'équation différentielle $y'' + 400\,y = 0$ (1)

q est solution de l'équation $L\,y'' + \dfrac{1}{C}\,y = 0$; $C = 2\times10^{-3}$ et $L = 1{,}25$; l'équation devient $1{,}25\,y'' + \dfrac{1}{2}10^3\,y = 0$; $y'' + \dfrac{1}{2{,}5}10^3\,y = 0$ ou $y'' + 400\,y = 0$; car $\left(\dfrac{1}{2{,}5}10^3 = 0{,}4\times10^3 = 400\right)$. Donc q est bien solution de l'équation différentielle $y'' + 400\,y = 0$ (1)

b) Résolvons l'équation différentielle (1).

$y'' + 400\,y = 0$ équivaut à $y'' + (20)^2\,y = 0$; donc la solution de l'équation différentielle $y'' + 400\,y = 0$ est toute fonction y définie pour tout $t \geq 0$ par :

$y(t) = A\cos(20t) + B\sin(20t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

2) a) Donnons la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales : $q_0 = C\,U_0$ et $i_0 = 0$.

On a $y(t) = A\cos(20t) + B\sin(20t)$; $y'(t) = -20A\sin(20t) + 20B\cos(20t)$ donc $i(t) = -\dfrac{d\,q}{dt}(t) = 20A\sin(20t) - 20B\cos(20t)$.

$q_0 = y(0) = A = CU_0 = 2\times10^{-3}\times50 = 0{,}1$; $i(0) = -20B = 0$; donc $A = 0{,}1$ et $B = 0$

D'où la solution particulière de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales : $q_0 = C\,U_0$ et $i_0 = 0$ est définie pour tout $t \geq 0$ par : $q(t) = \dfrac{1}{10}\cos(20t)$

b) En déduisons l'expression de l'intensité $i\ (t)$.

On a pour tout $t \geq 0$: $q(t) = \dfrac{1}{10}\cos(20t)$; or $i(t) = -\dfrac{d\,q}{dt}(t)$ alors pour tout $t \geq 0$: $i(t) = 2\sin(20t)$.

3) a) Calculons l'intégrale $\dfrac{20}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{20}} \cos(40t)\,dt$.

$$\frac{20}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}} \cos(40t)\,dt = \frac{20}{\pi}\left[\frac{1}{40}\sin(40t)\right]_0^{\frac{\pi}{20}} = 0.$$

b) Calculons $I_e^{\,2}$ puis donnons une valeur approchée de I_e à 10^{-2} près sachant que $I_e \geq 0$.

$$I_e^{\,2}=\frac{20}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}} i^2(t)\,dt=\frac{20}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}} 4\sin^2(20t)\,dt=\frac{80}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos(40t)\right)\right]dt$$ (car on a $\sin^2(20t)=\frac{1}{2}[1-\cos(2\times 20t)]$) ;

$$I_e^{\,2}=\frac{80}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos(40t)\right)\right]dt=\frac{40}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}} dt=\frac{40}{\pi}[\,t\,]_0^{\frac{\pi}{20}}=2.$$ Donc $I_e^{\,2}=2$.

On en déduit que $I_e=\sqrt{2}$; donc sa valeur approchée de I_e à 10^{-2} près est 1, 41.

<u>Exercice 7-13</u> : (En environnement)

f est une solution, sur $\mathbb{R}^+$, de l'équation différentielle : $y'=a\,y(1-y)$ (1).

1) On pose, pour tout $t\geq 0$, $z(t)=\dfrac{1}{f(t)}$.

a) Montrons que *f* est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si *z* est solution de l'équation différentielle : $y'+a\,y=a$ (2).

f est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si on a pour tout $t\geq 0$,

$f'(t)=a\,f(t)[1-f(t)]$ or $f(t)=\dfrac{1}{z(t)}$ et donc $f'(t)=-\dfrac{z'(t)}{z^2(t)}$; d'où

$-\dfrac{z'(t)}{z^2(t)}=a\dfrac{1}{z(t)}\left[1-\dfrac{1}{z(t)}\right]$; $-z'(t)=a\,z(t)-a$ ou $z'(t)+a\,z(t)=a$ c'est-à-dire que *z* est solution de l'équation différentielle : $y'+a\,y=a$.

b) Vérifions que la fonction constante *c* de valeur 1 est solution de l'équation différentielle (2).

Pour tout $t\geq 0$, $c(t)=1$; $c'(t)=0$; donc $0+a1=a$; d'où *c* est bien solution de l'équation différentielle (2).

c) *k* désignant un réel quelconque, montrons que la fonction *z* définie pour tout $t\geq 0$ par $z(t)=k\,e^{-at}+1$est solution de l'équation différentielle (2).

On a $z(t)=k\,e^{-at}+1$; $z'(t)=-a\,k\,e^{-at}$ et $z'(t)+a\,z(t)=-a\,k\,e^{-at}+ak\,e^{-at}+a=a$

Donc la fonction *z* définie pour tout $t\geq 0$ par $z(t)=k\,e^{-at}+1$ est bien solution de l'équation différentielle (2).

d) Donnons la solution particulière *z* de l'équation différentielle (2) qui vérifie $z(0)=\dfrac{1}{f(0)}$.

On a pour tout $t\geq 0$; $z(t)=k\,e^{-at}+1$; $z(0)=k+1=\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{1}{0,5}=2$; $k=1$: la solution particulière *z* de l'équation différentielle (2) qui vérifie $z(0)=\dfrac{1}{f(0)}$ est définie pour tout $t\geq 0$ par : $z(t)=e^{-at}+1$.

e) En déduisons que pour tout $t\geq 0$, $f(t)=\dfrac{1}{e^{-at}+1}$.

Pour tout $t\geq 0$, $z(t)=\dfrac{1}{f(t)}$; $f(t)=\dfrac{1}{z(t)}=\dfrac{1}{e^{-at}+1}$.

2) On observe qu'au bout de 30 jours, la plante mesure 80 cm de haut.
Calculons la valeur de *a* (on arrondira à 10^{-2} près).

On a $f(30)=\dfrac{1}{e^{-30a}+1}=0,8$ on obtient $30a=2\ln 2=1,4$; donc $a=0,05=\dfrac{1}{20}$.

3) Dans cette partie on pose $a=\dfrac{1}{20}$

a) Étudions la limite de la fonction f en + ∞.

On a donc pour tout $t \geq 0$, $f(t)=\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{20}t}+1}$; $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{20}t}+1}\right)=1$.

b) Précisons son sens de variation.

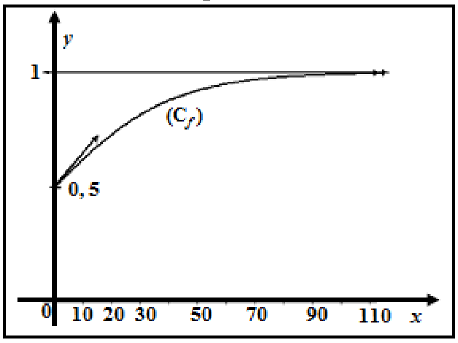
La fonction f est dérivable et $f'(t)=\dfrac{\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}t}}{\left(e^{-\frac{1}{20}t}+1\right)^2}$; $f'(t)>0$ pour tout t ; donc la fonction f est strictement croissante sur [0, + ∞ [.

c) En admettant que Monsieur Bala entretienne régulièrement sa plante.
Déterminons dans combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?
Il s'agit de déterminer t pour que $f(t) > 0,9$.

$f(t) > 0,9$ équivaut à $\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{20}t}+1}>0,9$; $0,9e^{-\frac{1}{20}t}+0,9<1$; ... ; $e^{-\frac{1}{20}t}<\dfrac{1}{9}$

$\ln 3 \approx 1,1$; $-\dfrac{1}{20}t<-2,2$; donc $t>44$; Au bout de 44 jours, la plante dépassera 90 cm de haut.

d) Représentons graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$
(1cm pour dix jours en abscisse et 8 cm pour 1m en ordonnées.)



Exercice 7-14

1) *Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle ; Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle ; définition de continuité, de dérivabilité d'une fonction en un point.*
2) *Encadrement dans ℝ ; Plan d'étude d'une fonction numérique.*
3) *Construction d'une courbe de fonction.*
4) 5) *Calcul pratique de primitives de fonctions ; Application du calcul intégral au calcul d'aire d'un domaine.*
6) *Propriétés de l'intégrale.*

Solution

Le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+8\sqrt{x}\ ;\ \text{si } x\in[0,1]\\ \ln x-x+7\ ;\ \text{si } x\in[1,5]\end{cases}$$

(C_f), désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm).
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce

nombre d'appels est donné, en milliers, par : $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$.

1) Etudions la continuité puis la dérivabilité de *f* sur [0, 5].

Sur [0, 1], *f* est la somme de deux fonctions usuelles : $x \longmapsto -2x^2$ et $x \longmapsto 8\sqrt{x}$ qui sont continues sur [0, 1] et dérivables sur] 0, 1] ; donc *f* est continue sur [0, 1] et dérivable sur] 0, 1].

Sur [1, 5], *f* est la somme de deux fonctions usuelles : $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto -x+7$ qui sont continues et dérivables sur [1, 5] ; donc *f* est continue et dérivable sur [1, 5].

$f(1) = 6$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-2x^2+8\sqrt{x}) = 6$; et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x - x + 7) = 6$;

donc *f* est bien continue en 1.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2x^2+8\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-2x+\frac{8}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$; donc *f* n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-2x^2+8\sqrt{x}-6}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-2x^2+2}{x-1}+\frac{8\sqrt{x}-8}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-2(x^2-1)}{x-1}+\frac{8\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(-2(x+1)+\frac{8}{\sqrt{x}+1}\right) = 0$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-6}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln x - x+7-6}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{-(x-1)}{x-1}\right) = 0$

Donc *f* est dérivable en 1 et *f'*(1) = 0

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-\ln 5-2}{x-5} = \lim_{x\to 5}\left(\frac{\ln x - x+7-\ln 5-2}{x-5}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{\ln x-\ln 5}{x-5}+\frac{-(x-5)}{x-5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$\left(car\ \lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{\ln x-\ln 5}{x-5}\right) = \ln'5 = \frac{1}{5}\right)$

Donc *f* est dérivable en 5 et $f'(5) = -\frac{4}{5}$.

En conclusion, *f* est continue sur [0, 5] et dérivable sur]0, 5].

2) a) Montrons que pour tout *x* vérifiant : $0 \le x \le 1$, alors $-x\sqrt{x}+1 \ge 0$.

Si $0 \le x \le 1$, alors $0 \le \sqrt{x} \le 1$ (en prenant les racines carrées) et $0 \le x\sqrt{x} \le 1$ (en multipliant membre à membre les deux inégalités entre réels positifs) ; donc $-x\sqrt{x}+1 \ge 0$

b) Etudions le sens de variations de *f* et dressons son tableau de variations.

- *f* est définie sur l'intervalle [0, 5]
- *f* (0) = 0 ; *f* (1) = 6 et *f* (5) = ln5 +2.
- Sur] 0, 1], $f'(x) = -4x+\frac{4}{\sqrt{x}} = 4\frac{-x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; d'après la question 2) a),

$f'(x) \ge 0$ sur]0, 1] ; donc *f* est croissante sur] 0, 1]

Sur [1, 5], $f'(x) = \frac{1}{x}-1 = \frac{1-x}{x}$; $f'(x) \le 0$ sur [1, 5] ; donc *f* est décroissante sur [1, 5].

- Tableau de variations

x	0		1		5
$f'(x)$		+	0	−	$-\frac{4}{5}$
$f(x)$	0	↗	6	↘	2 + ln 5

3) Traçons la courbe (C_f) dans le repère.
(Voir la courbe à la fin du corrigé)

4) a) Donnons une primitive de la fonction f sur [0, 1].
Sur [0, 1] $f(x) = -2x^2 + 8\sqrt{x}$; donc une primitive de f sur [0, 1] est de la forme :
$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + k = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{3}x\sqrt{x} + k$;avec $k \in \mathbb{R}$.

b) Calculons l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
L'aire du domaine est : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-2x^2 + 8\sqrt{x}\right)dx = F(1) - F(0) = \frac{14}{3}$.

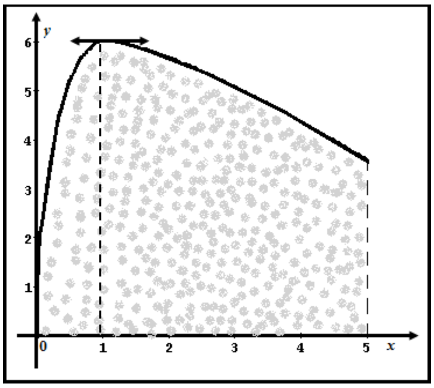
5) Soient g et G les fonctions définies sur [1, 5] par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x \ln x - x$.

a) Montrons que G est une primitive de g sur [1, 5].
Pour tout $x \in [1, 5]$, $G'(x) = \ln x = g(x)$; donc G est une primitive de g sur [1, 5].

b) Calculons l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
L'aire du domaine est :

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (\ln x - x + 7)dx = \left[x\ln x - x - \frac{1}{2}x^2 + 7x\right]_1^5 = 5\ln 5 + 12$$

6) Donnons le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.
D'après les données de l'énoncé le nombre d'appels est donné, en milliers, par : $\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx$; Or $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \frac{14}{3} + 5\ln 5 + 12 \approx 24{,}72$;
donc le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes est $\frac{24\,720}{5} = 4\,944$.



Exercice 7-15

1) Plan d'étude d'une fonction numérique
2) Equation de tangente à une courbe de fonction en un point ; construction de courbe de fonction
3) Définition de la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle [a, b] ; Calcul d'aire ; Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances.
4) Définition de primitive d'une fonction ; Définition de l'intégrale de fonction.
5) Application du calcul intégral au calcul d'aire et de volume.

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = xe^{1-x}$; et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) Etudions le sens de variations de f et dressons son tableau de variations.

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{1-x} = -\infty$; (car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e\left(xe^{-x}\right) = 0$; $\left[\text{car } \lim\limits_{x \to +\infty}\left(xe^{-x}\right) = 0\right]$.

- f est dérivable sur ℝ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur ℝ ; et pour tout réel x, $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
- Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$; donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(1 - x)$; d'où $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty, 1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$. Alors f est croissante sur $]-\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

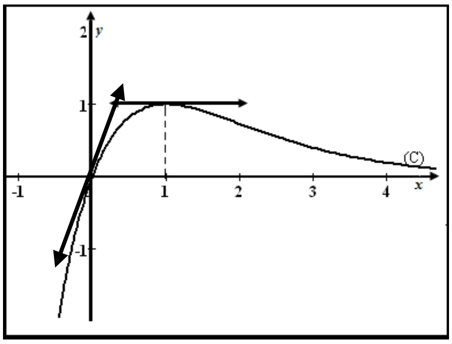
2) a) Donnons l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
La tangente a pour équation $y = e\,x$.
b) Traçons la tangente et la courbe (C) dans le repère.
(Voir la courbe en fin de corrigé)
3) Soit α un réel strictement positif ; (D) le domaine plan délimité par la courbe (C), les deux axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.
a) Calculons la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \alpha]$.
La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \alpha]$ est $\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} x e^{1-x}\,dx$; en intégrant par parties on a $\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} x e^{1-x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\left(-\alpha e^{1-\alpha} - e^{1-\alpha} + e\right)$
b) Calculons en cm², l'aire $A(\alpha)$ du domaine (D) en fonction de α.
L'unité de longueur est 2 cm, donc l'unité d'aire est 4 cm² ; l'aire $A(\alpha)$ en cm² du domaine (D) est : $4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 4\int_0^{\alpha} x e^{1-x}\,dx$ (car $\alpha > 0$ et $f(x) \geq 0$ sur $[0, \alpha]$.
On a donc $A(\alpha) = 4\int_0^{\alpha} x e^{1-x}\,dx = 4\left(-\alpha e^{1-\alpha} - e^{1-\alpha} + e\right)$ cm².
c) Déterminons la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
$$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[4\left(-\alpha e^{1-\alpha} - e^{1-\alpha} + e\right)\right] = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[4\left(-e(\alpha e^{-\alpha}) - e^{1-\alpha} + e\right)\right] = 4e$$
4) Soient g et G les fonctions définies sur ℝ par :
$g(x) = x^2 e^{2-2x}$ et $G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2-2x}$.
a) Montrons que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0, \alpha]$
Pour tout $x \in [0, \alpha]$,
$$G'(x) = \left(-x - \frac{1}{2}\right)e^{2-2x} - 2\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2-2x} = x^2 e^{2-2x} = g(x).$$
Donc G est bien une primitive de g sur l'intervalle $[0, \alpha]$.
b) Calculons $V_e = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}[f(x)]^2\,dx$ la valeur efficace de la fonction f sur $[0, \alpha]$.
$$V_e = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}[f(x)]^2\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} x^2 e^{2-2x}dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}[G(\alpha) - G(0)]$$
$$V_e = \frac{1}{\alpha}\left[\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\right)e^{2-2\alpha} + \frac{e^2}{4}\right] = \frac{e^2}{4\alpha}\left[1 - e^{-2\alpha}(2\alpha^2 + 2\alpha + 1)\right]$$
5) Le domaine (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).
a) Calculons en cm³, le volume $V(\alpha)$ en fonction de α, du solide engendré par cette rotation.
L'unité de volume est 8 cm³ ; donc le volume du solide en cm³ est :

$$V(\alpha)=8\int_0^{\alpha}\pi\left[f(x)\right]^2 dx=8\pi\int_0^{\alpha} g(x)\,dx=8\pi\left[G(\alpha)-G(0)\right]$$

$$V(\alpha)=8\pi\left[\left(-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\right)e^{2-2\alpha}+\frac{e^2}{4}\right]=2\pi e^2\left[1-e^{-2\alpha}(2\alpha^2+2\alpha+1)\right]\text{ cm}^3$$

b) Donnons la valeur de ce volume en cm^3 pour α = 3.

On a $e^{-6}\approx 0{,}0025$; $\pi\approx 3{,}14$ et $e^2\approx 7{,}4$; donc $V(3)=43{,}5675$ cm^3.



Exercice 7-16

1) *Plan d'étude d'une fonction numérique*
2) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; Théorème des valeurs intermédiaires ; Principe de localisation ; Positions relatives de deux courbes dans le plan.*
3) *Théorème de la bijection ; Propriétés des applications bijectives.*
4) *Construction de courbe de fonction et de la courbe de la bijection réciproque dans un repère.*
5) *Calcul d'aire ; Calcul pratique de dérivée de fonction ; Calcul de volume.*
6) *Définition de fonction croissante ; Encadrement dans ℝ ; Inégalité de la moyenne.*

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par $f(x)=1+\ln(1+x)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité 1 cm)

1) Etudions le sens de variations de *f* et dressons son tableau de variations.

- D_f =] –1, + ∞[(car 1 + *x* > 0 équivaut à *x* > –1).
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(1+\ln(1+x)\right)=-\infty$; $\left[\text{car }\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)=0^+\right]$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\ln(1+x)\right)=+\infty$; $\left[\text{car }\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+x\right)=+\infty\right]$.

- *f* est dérivable sur] –1, + ∞[en tant que somme de fonction constante et de fonction composées dérivables. Et, pour tout *x* > – 1, on a $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
- Pour tout *x* > – 1, $\dfrac{1}{1+x}>0$; donc $f'(x)>0$; d'où *f* est strictement croissante sur] –1, + ∞[.
  - Tableau de variation de *f*.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par : $\varphi(x)=\ln(1+x)-x+1$

a) Etudions le sens de variations de φ et dressons son tableau de variations.

- D_φ =] –1, + ∞[(car 1 + *x* > 0 équivaut à *x* > –1).
- $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(1+\ln(1+x)-x\right)=-\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln(1+x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=-\infty.$$

$$\left[\text{car } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\times\frac{1+x}{x}\right)=0\right]$$

- $\varphi(x) = f(x) - x$; donc φ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables. Et, pour tout $x > -1$, on a $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$.
- Pour tout $x \in]-1, 0]$, $\frac{-x}{1+x}\geq 0$; $\varphi'(x)\geq 0$; donc φ est croissante sur $]-1, 0]$.

  Sur $[0, +\infty[$, $\frac{-x}{1+x}\leq 0$; $\varphi'(x)\leq 0$; donc φ est décroissante sur $[0, +\infty[$.
- Tableau de variation de φ.

x	-1		0		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0		$-$		
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) En déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0, +\infty[$.

L'équation $f(x) = x$ équivaut à $\varphi(x) = 0$. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ φ est continue (car dérivable) et strictement décroissante d'après son tableau de variations et 0 est contenu dans $\varphi([0, +\infty[) =]-\infty, 1]$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha\in[0, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha)=0$; c'est-à-dire $f(\alpha)-\alpha = 0$; donc l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0, +\infty[$.

c) Montrons que $\alpha\in]2, 3[$.

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ φ est continue et strictement décroissante ; donc également sur $[2, 3]$; de plus $\varphi(2) = \ln(3) - 1 = 0,1$ et $\varphi(3) = 2\ln(2) - 2 = -0,6$; on a alors $\varphi(2)\times\varphi(3) < 0$; donc d'après le principe de localisation l'équation $\varphi(x) = 0$ c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha\in]2, 3[$.

d) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$; donnons les positions relatives de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

D'après les réponses aux questions 2) a) et 2) b), l'équation $\varphi(x) = 0$ c'est-à-dire l'équation $f(x) - x = 0$ admet une solution unique $\alpha\in[0, +\infty[$; de plus $\varphi([0, \alpha]) = [0, 1]$ et $\varphi([\alpha, +\infty[=]-\infty, 0]$. Par conséquent $\varphi(x)\geq 0$ sur $[0, \alpha]$ et $\varphi(x)\leq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$; alors :

- $f(x) - x \geq 0$ c'est-à-dire $f(x) \geq x$ sur $[0, \alpha]$; donc la courbe (C_f) est au dessus de la droite (Δ) sur $[0, \alpha]$.
- $f(x) - x \leq 0$ c'est-à-dire $f(x) \leq x$ sur $[\alpha, +\infty[$; donc la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur $[\alpha, +\infty[$.

3) a) Montrons que f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

D'après le tableau de variations de f, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$; donc d'après le théorème de la bijection appliqué à f sur cet intervalle, f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ vers l'intervalle $J =]-\infty, +\infty[$.

b) Vérifions que la bijection réciproque f^{-1} est définie par $f^{-1}(x)=-1+e^{x-1}$.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=-1+e^{(1+\ln(1+x))-1}=-1+e^{\ln(1+x)}=x$ et pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=1+\ln\left[1+(-1+e^{x-1})\right]=1+\ln\left[e^{x-1}\right]=x$. On a bien $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$; donc f^{-1} est bien définie par $f^{-1}(x)=-1+e^{x-1}$.

4) Construisons dans le repère, la droite (Δ), la courbe (C_f) et la courbe $(C_{f^{-1}})$ représentant la bijection réciproque f^{-1}.

(Voir la figure en de fin de corrigé de l'exercice)

5) (D) désigne le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe (*Ox*), l'axe (*Oy*) et la droite d'équations $x = 3$. (D) subit une rotation autour de l'axe (*Ox*) et engendre un solide (S).

a) Calculons l'aire *A* en cm^2 du domaine (D).

L'aire *A* en cm^2 du domaine (D) est :

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 [1+\ln(1+x)]dx = 3 + \int_0^3 \ln(1+x)\,dx$$

Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x)$; alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; alors :

$$\int_0^3 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(1+x)]_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{1+x}dx = 6\ln 2 - \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= 6\ln 2 - 3 + 2\ln 2 = 8\ln 2 - 3$$

(On pourrait constater que $-\varphi$ est une primitive de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$; en effet,

$\varphi'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$; donc $-\varphi'(x) = \dfrac{x}{1+x}$).

Donc $A = 8 \ln 2$ cm^2 = 5, 6 cm^2.

b) Soit *g* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie par :

$g(x) = x + (1+x)\ln^2(1+x)$. Calculons $g'(x)$

$g'(x) = 1 + \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) = [1+\ln(1+x)]^2 = [f(x)]^2$.

c) calculons en u.v. le volume *V* du solide (S) engendré par cette rotation.

$$V = \int_0^3 \pi[f(x)]^2 dx = \pi\int_0^3 [f(x)]^2 dx = \pi[g(3) - g(0)] = \pi\left[3 + 16(\ln 2)^2\right] = 10{,}84\,\pi\,\text{cm}^3.$$

6) a) Montrons que pour tout $x \in [2, 3]$, $f(x) \in [2, 3]$.

Sur [2, 3], la fonction *f* est strictement croissante ; donc, si $2 \le x \le 3$, alors $f(2) \le f(x) \le f(3)$; or d'après les réponses à la question 2) d), $f(2) \ge 2$ et $f(3) \le 3$ (car $\alpha \in]2, 3[$). Donc $2 \le f(x) \le 3$; par conséquent pour tout $x \in [2, 3]$, $f(x) \in [2, 3]$.

b) Montrons que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{3}$.

On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et par encadrement, si $2 \le x \le 3$; $3 \le 1 + x \le 4$, donc

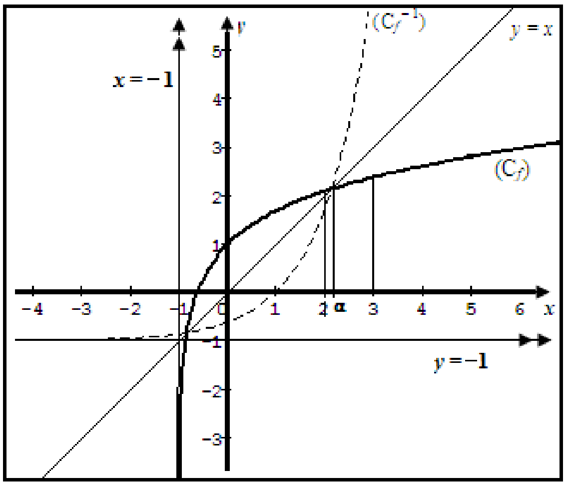
$\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{1+x} \le \dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{1}{3}$; donc pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{3}$.

c) En déduisons que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{3}|x - \alpha|$.

On a *f'* qui est continue sur [2, 3] ; $\alpha \in]2, 3[$ et pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{3}$.

Pour tout $x \in [2, 3]$, $[\alpha, x] \subset [2, 3]$ et sur $[\alpha, x] \subset [2, 3]$ $|f'(t)| \le \dfrac{1}{3}$; donc d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction *f'* sur $[\alpha, x] \subset [2, 3]$, on a

$|f(x) - f(\alpha)| \le \dfrac{1}{3}|x - \alpha|$; $[f(\alpha) = \alpha]$. D'où pour tout $x \in [2, 3]$, $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{3}|x - \alpha|$.



Outils possibles pour l'exercice 7-28 et quelques indications

Partie A

1) *Définition de la continuité, de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point.*
2) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; Asymptotes à une courbe de fonction ; construction de la courbe représentative d'une fonction.*

Partie B

1) *Primitive d'une fonction s'annulant en un point donné ; Définition de primitive ; Tableau de variation d'une fonction.*
2) *Calcul pratique d'intégrale par intégration par parties ; Construction de courbe de fonction ; Application du calcul intégral au calcul d'aire.*

Partie C

1) *Interprétation géométrique ou graphique de l'intégrale (définie) ; Définition de fonction décroissante; Inégalité de la moyenne.*
2) *Propriétés algébriques des intégrales ; Ordre et opérations dans ℝ.*

Partie A

- Tableau de variation de *f*.

x	$-\infty$		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 \| 1$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

Partie B

Tableau de variation de F sur $[1, +\infty[$.

x	1		$+\infty$
$F'(x)$	0	$+$	
$F(x)$	0	↗	1

Partie C

1) c) Montrons que pour tout naturel $n \geq 2$, on a : $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} f(t)\,dt < \frac{\ln(n)}{n^2}$.

D'après la question 1) b) ci-dessus, pour tout $a, b \in [2, +\infty[$, on a :

$f(b)(b-a) < \int_a^b f(t)\,dt < f(a)(b-a)$; donc pour tout naturel $n \geq 2$, $(n+1 > n)$

on a $f(n+1)(1) < \int_n^{n+1} f(t)\,dt < f(n)(1)$; donc $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} f(t)\,dt < \frac{\ln(n)}{n^2}$.

2) a) Utilisons la question C) 1) c) pour montrer que pour tout $n \geq 2$,

$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} < \int_2^n \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx < S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$.

D'après la question C) 1) c), pour tout naturel $n \geq 2$, on a :

$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} f(t)\,dt < \frac{\ln(n)}{n^2}$. Autrement dit :

$$\frac{\ln(3)}{3^2} < \int_2^3 f(t)\,dt < \frac{\ln(2)}{2^2}$$

$$\frac{\ln(4)}{4^2} < \int_3^4 f(t)\,dt < \frac{\ln(3)}{3^2}$$

$$\frac{\ln(5)}{5^2} < \int_4^5 f(t)\,dt < \frac{\ln(4)}{4^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\ln(n)}{n^2} < \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt < \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}$$

En additionnant membres à membres ces inégalités et en utilisant la propriété de linéarité des intégrales on obtient :

$$\frac{\ln(3)}{3^2}+\frac{\ln(4)}{4^2}+\cdots+\frac{\ln(n)}{n^2} < \int_2^n f(x)\,dx < \frac{\ln(2)}{2^2}+\frac{\ln(3)}{3^2}+\frac{\ln(4)}{4^2}+\cdots+\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}$$

$$S_n-\frac{\ln 2}{2^2} < \int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx < S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$$

b) En déduisons que : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} < S_n < \frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$

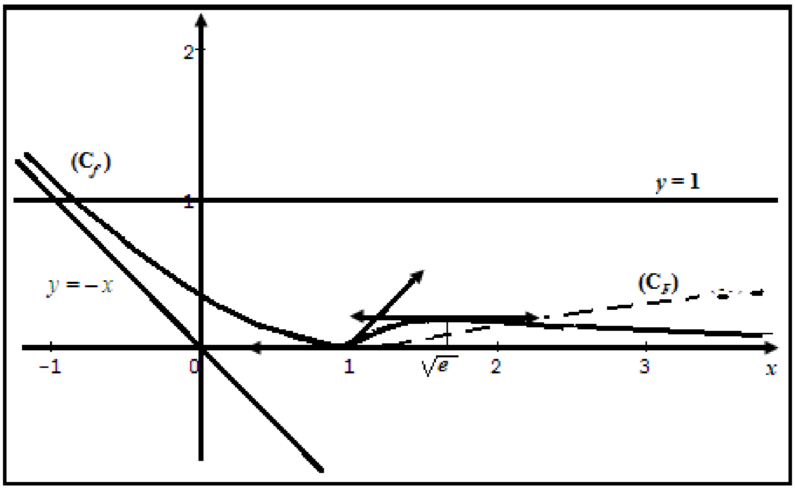
On a pour tout $n \geq 2$, $S_n-\frac{\ln 2}{2^2} < \int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx < S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$; en ajoutant $-S_n$ puis ensuite $-\int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$ à chaque membre de ces inégalités, on obtient :

$-\frac{\ln 2}{2^2}-\int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx \leq -S_n \leq -\int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx-\frac{\ln(n)}{n^2}$; soit en multipliant par membre par – 1 on a : $\frac{\ln(n)}{n^2}+\int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx \leq S_n \leq \int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx+\frac{\ln 2}{2^2}$; mais

$\int_2^n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \frac{-\ln(n)-1}{n}+\frac{\ln 2+1}{2}$; alors :

$\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{-\ln(n)-1}{n}+\frac{\ln 2+1}{2} \leq S_n \leq \frac{-\ln(n)-1}{n}+\frac{\ln 2+1}{2}+\frac{\ln 2}{2^2}$; soit

$$\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$$



CHAPITRE 8

SUITES NUMERIQUES

La notion de suite était présente dès l'apparition des procédés illimités de calcul :

- Archimède a défini dans les années 220 avant JC d'une façon précise deux suites u et v croisées (c'est-à-dire que u_n est définie en fonction de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est définie aussi en fonction de u_{n-1} et v_{n-1}) et dont la limite est commune $\frac{2}{\pi}$.
- Pour résoudre un problème sur la reproduction des lapins, le mathématicien italien Leonardo Fibonacci (appelé aussi Léonard de Pise) introduit dès 1202 la notion de suite.
- Nicolas Oresme Français du 14$^{\text{ème}}$ siècle a exposé des suites particulières que l'on appelle désormais suite arithmétique et suite géométrique.
- Dans la mathématique babylonienne, Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) l'a introduite pour des calculs d'aires et de volumes :
- En Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ et plus récemment au 1$^{\text{er}}$ siècle après Jésus-Christ les suites sont utilisées dans le procédé d'extraction d'une racine carrée :
- Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval (à partir du XVII$^{\text{e}}$ siècle) avec la méthode des indivisibles ;
- Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis utilisaient les suites pour approcher des valeurs numériques.

C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle.

Dans la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières en économie.

- Les suites jouent un rôle essentiel, en informatique notamment et d'une manière générale dans toutes les procédures itératives. En particulier les suites arithmétiques et les suites géométriques interviennent dans de nombreux domaines tels l'économie ou les sciences physiques ; ces suites s'appliquent en effet aux placements de capitaux à intérêts simples ou composés, aux désintégrations de substances radioactives, etc…
- Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

CE Q'IL FAUT RETENIR

A) RAPPELS

I) Définitions ; Modes de générations

(*Outil pour retrouver le terme général, le terme de rang donné d'une suite*)

1) Définition

- Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- Une suite est souvent notée (u_n) ou u ou $(u_n)_{n\in I}$ ou (v_n) ou v ou $(v_n)_{n\in I}$;…

2) Modes de générations

Une suite (u_n) peut être définie par :

- la donnée de son terme général u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$; (où f est une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$)

- la donnée d'un de ses termes (généralement son terme initial) et une relation, dite relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$; (où f est une fonction numérique laissant stable tout intervalle contenant le terme initial).

II) Suite monotone ; suite bornée ; suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique de terme général u_n .

1) Suite monotone

(*Outil pour étudier la monotonie d'une suite, ou pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante*)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \geq u_n$; c'est à dire pour tout $n \in I$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \leq u_n$; c'est à dire pour tout $n \in I$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si et seulement si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = u_n$; c'est à dire pour tout $n \in I$, $u_{n+1} - u_n = 0$.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si et seulement si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Exemple : Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{n+2}{n}$

Solution : Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)+2}{n+1} - \dfrac{n+2}{n} = -\dfrac{2}{n(n+1)}$; pour tout $n \geq 1$,

$-\dfrac{2}{n(n+1)} < 0$ donc $\forall\, n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est alors (strictement) décroissante.

2) Suite bornée

(*Outil pour montrer qu'une suite est bornée ou majorée ou minorée*)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$ c'est à dire $u_n - M \leq 0$.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que pour tout $n \in I$, $u_n \geq m$ c'est à dire $u_n - m \geq 0$.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement si il existe deux réels m et M tels que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n \leq M$ c'est à dire si et seulement si $(u_n)_{n\in I}$ est majorée et minorée .

Propositions :

- Si la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante, alors elle est minorée par son premier terme.
- Si la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante, alors elle est majorée par son premier terme.

Exemple : Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{-n+2}{n}$ est bornée.

Solution : Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{-n+2}{n} = -1 + \dfrac{2}{n}$; or $\dfrac{2}{n} > 0$; donc $-1 + \dfrac{2}{n} > -1$; d'où $\forall\, n \geq 1$, $u_n > -1$. D'autres parts $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-n-1)+2}{n+1} - \dfrac{-n+2}{n} = -\dfrac{2}{n(n+1)}$; pour tout $n \geq 1$, $-\dfrac{2}{n(n+1)} < 0$; donc $\forall\, n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$; la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) décroissante, alors $\forall\ n \geq 1,\ u_n \leq u_1$; $u_1 = 1$. En définitive $\forall\ n \geq 1,\ -1 < u_n \leq 1$; la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est alors bornée.

3) Suite convergente

(*Outil pour étudier la convergence d'une suite ; ou montrer qu'une suite est convergente ou divergente par exemple*)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie.
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente ; c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe mais est infinie, ou n'existe pas.

En particuliers :

- les suites de terme général $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^3}$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$; a^n $(|a|<1)$ sont convergentes et convergent vers 0 ;
- les suites de terme général n ; n^2 ; n^3 ; $\sqrt{n}$; $a^n\ (a>1)$; $n^\alpha\ (\alpha>0)$; ln(n) sont divergentes et divergent vers $+\infty$.

Exemple : Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1-\sqrt{1+n}}{n}$.

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{1+n}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{1+n}}\right) = 0$; donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et converge vers 0.

III) Cas des suites arithmétiques et des suites géométriques.

(*Outils pour étudier les suites arithmétiques, géométriques*)

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$ (où r est un réel)	$u_{n+1} = q\ u_n$ (où q est un réel)
Raison	r	q
Terme général u_n en fonction de n	$u_n = u_0 + nr$; ou $u_n = u_p + (n-p)r$; $\forall n,\ p \in \mathbb{N}$	$u_n = q^n u_0$; ou $u_n = q^{n-p} u_p$; $\forall n,\ p \in \mathbb{N}$
Somme $S_n = u_p + \ldots + u_n$	$S_n = (u_p + u_n)\dfrac{n-p+1}{2}$	$S_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$
Monotonie	$u_{n+1} - u_n = r$ (u_n) est croissante si $r > 0$ (u_n) est décroissante si $r < 0$ (u_n) est constante si $r = 0$	$\boldsymbol{u_p > 0}$; $u_{n+1} - u_n = (q-1)\ q^{n-p}\ u_p$ (u_n) est croissante si $q > 1$ (u_n) est décroissante si $0 < q < 1$ (u_n) est constante si $q = 1$ si $q < 0$, (u_n) est dite alternée
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } r>0 \\ -\infty & \text{si } r<0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } \lvert q\rvert<1 \\ +\infty & \text{si } q>1 \end{cases}$; n'existe pas si $q \leq -1$
Moyenne *a, b, c* sont des réels quelconques	a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \dfrac{a+c}{2}$; b est la moyenne arithmétique de a et c.	a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = ac$; b est la moyenne géométrique de a et c.

B) ENONCES ADMIS

I) Limites par comparaisons

(*Outil pour calculer la limite d'une suite ou étudier sa convergence*)

(u_n), (v_n), (a_n) et (b_n) sont des suites numériques de termes généraux respectifs u_n, v_n, a_n et b_n.

Si à partir d'un certain rang :

- $a_n \le u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- $u_n \le b_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;
- $a_n \le u_n \le b_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; (Théorème des gendarmes)
- $|u_n - l| \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; $l \in \mathbb{R}$.
- $u_n \le v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors $l \le l'$; $l, l' \in \mathbb{R}$.

Exemple : Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n+1}$.

Solution : $\forall\, n \ge 0$, $-1 \le \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) \le 1$; $(n + 1 > 0)$; donc $\forall\, n \ge 0$,

$1 - \dfrac{1}{n+1} \le 1 + \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n+1} \le 1 + \dfrac{1}{n+1}$; c'est-à-dire, $\forall\, n \ge 0$, $1 - \dfrac{1}{n+1} \le u_n \le 1 + \dfrac{1}{n+1}$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$; donc (d'après le théorème des gendarmes)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$; alors la suite (u_n) est convergente et converge vers 1.

II) Condition de convergence d'une suite monotone.

(*Outil pour montrer qu'une suite est convergente*)

Soit (u_n) une suite numérique de terme générale u_n.

- Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
- Si la suite (u_n) est monotone et bornée, alors elle est convergente.

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \ge 0$, par $u_{n+1} = 1 + \ln(1 + u_n)$.

1) Montrer que $\forall\, n \ge 0$, $1 \le u_n \le 3$
2) On admet l'outil suivant « Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et pour tout $n \ge 0$, par $u_{n+1} = f(u_n)$; si f est croissante sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est monotone »

   Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Solution : 1) Montrons que $\forall\, n \ge 0$, $1 \le u_n \le 3$. Utilisons le raisonnement par récurrence.

- Pour $n = 0$; on a $u_0 = 1$; or $1 \le 1 \le 3$; donc $1 \le u_0 \le 3$
- Supposons que pour un $n \ge 0$, $1 \le u_n \le 3$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le 3$. On a

$1 \leq u_n \leq 3$; donc $\ln 2 \leq \ln(1+u_n) \leq 2\ln 2$ et alors $1+\ln 2 \leq 1+\ln(1+u_n) \leq 1+2\ln 2$ or $1 \leq 1+\ln 2$ et $1+2\ln 2 \leq 3$ d'où $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

- Par conséquent $\forall\ n \geq 0,\ 1 \leq u_n \leq 3$. Autrement dit la suite (u_n) est bornée.

2) Montrons que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, par $u_{n+1} = 1+\ln(1+u_n) = f(u_n)$ avec $f(x) = 1+\ln(1+x)$ pour tout $x \geq 1$. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} > 0$ sur $[1, +\infty[$; donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et d'après l'outil ci-dessus admis, la suite (u_n) est monotone.

La suite (u_n) est monotone et bornée, (d'après la 3ème propriété), la suite (u_n) est alors convergente.

III) <u>Etude d'une suite (u_n) définie par son terme général u_n en fonction de n.</u>

(*Outil pour étudier une suite définie par son terme général en fonction de n*)

Soit (u_n) une suite définie par son terme général u_n en fonction de n, $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

- Si la fonction f est croissante sur $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si la fonction f est majorée sur $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est majorée.
- Si la fonction f est minorée sur $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est minorée.
- Si la fonction f est bornée sur $[a, +\infty[$, alors la suite (u_n) est bornée.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (l fini ou non).

<u>Exemple</u> : Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-1}-1}{n}$

<u>Solution</u> : La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-1}-1}{n}$; elle est de la forme $u_n = f(n)$

avec $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{x}$ pour tout $x \geq 1$.

- $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x} = 1$

- $f'(x) = \dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}+1}{x^2} = \dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{x^2}$; $f'(x) > 0$ sur $[1, +\infty[$; donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

- On a donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, $-1 \leq f(x) < 1$.

  On en déduit alors : la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante (strictement) ; pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq u_n < 1$ (elle est bornée) et elle est convergente et converge vers 1.

IV) <u>Suite (u_n) définie par son premier terme u_0 (ou u_p) et par la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ dite relation de récurrence.</u>

(*Outil pour « étudier » une suite « récurrente » ; pour représenter des termes d'une suite récurrente et faire une conjecture*)

Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 (ou u_p) et par la relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$; où f est une fonction laissant stable tout intervalle I contenant u_0 (ou u_p).

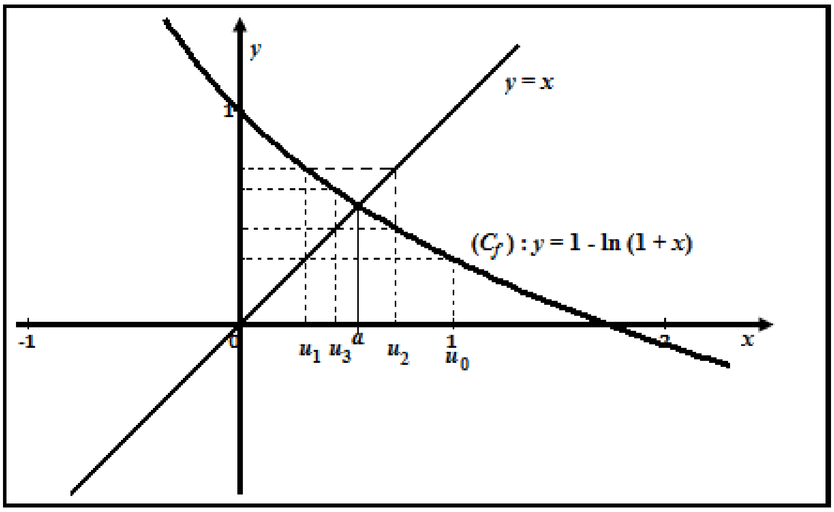
- Si la fonction f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone. (Pour information)°
- Si la suite (u_n) est convergente et si f est une fonction continue, alors la limite l de la suite (u_n) est une solution dans I de l'équation $f(x) = x$. (Pour information)
- Dans un repère donné contenant la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $y = x$, on peut représenter quelques premiers termes de la suite (u_n) (généralement sur l'axe des abscisses) et faire une conjecture sur des propriétés éventuelles de la suite (u_n) c'est-à-dire donner des propriétés éventuelles de la suite (u_n) par simple observation de la figure.

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, par

$$u_{n+1} = 1 - \ln(1 + u_n).$$

Placer les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 sur la figure puis faire une conjecture sur les propriétés éventuelles de la suite (u_n). (monotonie ; encadrement ; convergence).

Solution :



La suite (u_n) ne semble pas être monotone ; elle semble être bornée (par u_0 et u_1) ; elle semble converger vers a, abscisse du point d'intersection de la courbe (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.

C) METHODE DE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE.

(*Outil pour mntrer une propriété par récurrence*)

Soit P(n) une propriété dépendant **d'un entier naturel *n*** ; $n \geq n_0$:

Pour « faire un travail » du genre : « Montrer que pour tout $n \geq n_0$; P(n) (sous-entendu P(n) est vraie), par récurrence :

1) on vérifie que P(n) est vraie pour $n = n_0$; c'est à dire P(n_0) vraie ;

2) on suppose que pour un n (fixé), $n \geq n_0$, P(n) est vraie et on montre alors que P(n +1) est vraie :

3) on conclut alors que pour tout naturel $n \geq n_0$, P(n) est vraie.

(Voir des exemples dans exercice 8-4)

.

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 8-1

Etudier chacune des suites (U_n), $(V_n)_{n\geq 1}$ et (W_n) suivantes définies respectivement par :

1) $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$; 2) $V_n = n^{-\frac{2}{3}} + e^{\frac{1}{n}}$; 3) $W_n = (n-3)e^{4-n} + 1$.

(Monotonie ; encadrement ; convergence).

Exercice 8-2

On considère la suite numérique u définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$.

Soit v la suite définie pour tout n, par : $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Calculer les trois premiers termes de la suite v.
2) Montrer que la suite v est une suite géométrique ; préciser la raison et le premier terme.
3) a) Exprimer v_n en fonction de n.
   b) En déduire que pour tout n, $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.
4) a) Montrer que la suite u peut s'écrire sous la forme $u = t + w$ où t est une suite géométrique et w une suite arithmétique.
   b) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 8-3

Trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 sont tels que :

- leur produit est égal à $4\sqrt{2}(-1+i)$;
- leurs modules respectifs R_1, R_2, R_3 constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison 2 ;
- leurs arguments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ constituent dans cet ordre une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Montrer que $R_2{}^2 = R_1 \times R_3$.
   b) Montrer que $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$.
   c) En déduire les nombres complexes z_1, z_2, z_3.
2) Soit $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_2\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $M_3\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ trois points dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.
   a) Représenter les points M_1, M_2, M_3 dans le repère.
   b) Montrer que $z_3 = -4\ z_1$.
   c) Montrer que la droite $(O\,M_2)$ est perpendiculaire à la droite (M_2M_3).

Exercice 8-4 :**Exercices sur le raisonnement par récurrence.**

- **1ère situation** : **Pour démontrer que si *p* (*n*) est vraie, alors *p* (*n*+1) est vraie, on pourrait partir de la supposition *p* (*n*) vraie.**

I) Démontrer **par récurrence** que pour tout n, $(1+x)^n \geq 1+nx$; ($x \in \mathbb{R}^+$).

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (3-2x)e^{2x}$

Montrer **par récurrence** que pour tout n, $f^{(n)}(x) = 2^n(3-n-2x)e^{2x}$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f)

III) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) a) Montrer **par récurrence** que pour tout n, $0 \leq u_n < 2$.

b) Montrer **par récurrence** que la suite(u_n) est croissante.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = 2 - u_n$.

a) Donner le signe de v_n pour tout n.

b) Montrer que, pour tout n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

- **2ère situation** : **Pour démontrer que si p (n) est vraie, alors p (n+1) est vraie, on pourrait partir d'une « partie » de la proposition p (n+1).**

I) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

II) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1+x+x^2+x^3+...+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$; $\forall x \neq 1$.

III) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

- **3ère situation** : **Pour démontrer que si p (n) est vraie, alors p (n+1) est vraie, on pourrait partir d'une autre proposition**:
(Situation souvent difficile pour les élèves de TD)

I) Même énoncé que l'exercice III) de la 1ère situation jusqu'en 2) b). Et maintenant :

c) Montrer **par récurrence** que, pour tout n, $v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

II) Soit $(a_n), (b_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{cases} \quad \forall n \geq 0$$

On suppose que pour tout $n \geq 0$, on a $0 < b_n < a_n$ et que $a_{n+1}{}^2 - b_{n+1}{}^2 \leq \left(\dfrac{a_n - b_n}{2}\right)^2$

Démontrer **par récurrence** que pour tout $n \geq 0$, $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$

(partir de : si $0 \leq x \leq y$, alors $(y-x)^2 \leq y^2 - x^2$. Car $(y-x)^2 \leq (y-x)(y+x)$.)

Exercice 8–5

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher, dont deux verts et trois blancs. On effectue des tirages successifs d'un jeton de l'urne de la façon suivante :

- si l'on obtient un jeton blanc, ce jeton est remis dans l'urne avant de procéder au tirage suivant :

- ➢ si l'on obtient un jeton vert, ce jeton est remplacé dans l'urne par un autre jeton blanc, avant que l'on ne procède au tirage suivant ; (il y aurait alors un jeton vert et quatre jetons blancs)
- ➢ lorsque les deux jetons verts ont été tirés, on s'arrête.

1) On suppose dans cette question que l'on a effectué deux tirages successifs. On désigne par la lettre B "tirer un jeton blanc" et par V "tirer un jeton vert". Par exemple BV indiquera que l'on a tiré d'abord un jeton blanc puis un jeton vert, VB un jeton vert puis un jeton blanc.
   - ➢ Décrire l'ensemble des résultats possibles, en indiquant la probabilité de chaque résultat.
2) On effectue dans tout ce qui suit une succession de *n* tirages ($n \geq 1$) et on considère les évènements suivants :
   - D_n : « A la fin du *n*-ième tirage l'urne contient deux jetons verts »,
   - U_n : « A la fin du *n*-ième tirage l'urne contient un seul jeton vert ».

   On note d_n la probabilité de l'évènement D_n, u_n la probabilité de l'événement U_n.

   a) Utiliser la question 1) pour calculer d_1, u_1, d_2 et u_2 .

   b) Exprimer en fonction de *n* la probabilité d_n de D_n.

   c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $u_{n+1} = \dfrac{2}{5}d_n + \dfrac{4}{5}u_n$.
3) On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

   a) Montrer que l'on a $v_1 = \dfrac{8}{5}$ et que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique ; préciser la raison.

   b) En déduire l'expression de v_n , puis celles de u_n en fonction de *n*.

Exercice 8-6

Soit *f* la fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur ℝ par : $f(x) = (3-2x)e^{2x}$

1) Calculer $f'(x)$; $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2) Montrer par récurrence que pour tout *n*, $f^{(n)}(x) = 2^n(3-n-2x)e^{2x}$

   (où $f^{(n)}$ désigne la dérivée *n*-ième de *f*)
3) Pour tout entier naturel non nul *n*, la courbe représentative (C_n) de la fonction $f^{(n)}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en un point $M_n(x_n, y_n)$.

   a) Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point M_n en fonction de *n*.

   b) Montrer que pour tout *n* > 0, M_n appartient à la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{e^{2x}}{4^{x-1}}$.

   c) Vérifier que la suite (x_n) de terme général x_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

   d) Etudier la convergence de la suite (x_n).

   e) Vérifier que la suite (y_n) de terme général y_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   f) Etudier la convergence de la suite (y_n).

Exercice 8–7

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_1 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right)$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$.

2) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{U_n}$

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n > \sqrt{2}$.

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente (on ne demande pas de calculer ici la limite).

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$; puis déterminer la limite de (U_n).

Exercice 8-8

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 1 + \ln(x+1)$
   a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   b) Construire la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) On considère la fonction h définie par $h(x) = -x + 1 + \ln(x+1)$.
   a) Etudier le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions uniques dont l'une est négative et l'autre α appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$.
3) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n + 1)$
   a) Placer les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 sur la figure.
   b) Faire une conjecture sur les propriétés éventuelles de la suite (u_n). (monotonie ; encadrement ; convergence).
   c) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
   d) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$; $1 \leq u_n \leq 3$.
   e) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   f) On admet que la limite de la suite l est solution de l'équation $f(x) = x$; montrer alors que $l = \alpha$.

Exercice 8–9

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante :

$Z_0 = 1$ et pour tout naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$.

1) Calculer Z_1 et Z_2.
2) Pour tout naturel n, on pose $U_n = Z_n - i$.
   a) Calculer U_0 ; U_1 et U_2.
   b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   c) Montrer que pour tout n, $U_n = (1 - i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3) On pose $Z_n = X_n + i\,Y_n$.
   a) Exprimer X_n et Y_n en fonction de n.
   b) Etudier la convergence des deux suites (X_n) et (Y_n) de terme génral respectif X_n et Y_n.
   c) On admet le résultat suivant : « Si $Z_n = X_n + i\,Y_n$ et si les suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes, alors la suite (Z_n) est convergente et on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n + i\left(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\right)$ ». Donner alors la limite de la suite (Z_n) s'il y a lieu.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On désigne par A_n le point d'affixe U_n, par B_n le point d'affixe Z_n et par B le point d'affixe i.
   a) Placer les points A_0, A_1, A_2 et B_0, B_1, B_2 dans le repère.
   b) Calculer le module d_n de U_n et un argument θ_n de U_n.
   c) Montrer que les points $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont alignés.
   d) Montrer que pour tout n, B_n est l'image de A_n par une transformation du plan dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
   e) Montrer que les points $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont alignés.
   f) Donner les positions limites des points (B_n) et (A_n) lorsque n devient de plus en plus grand.

Exercice 8–10 (Bac D)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2} - x + e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{3}{2} - x + \ln(2x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité puis la dérivabilité de f en 1. En déduire une conséquence graphique sur la dérivabilité de f en 1.
   b) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   c) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère. On précisera son allure au voisinage du point d'abscisse 1, et on tracera son asymptote oblique que l'on précisera.
   d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à]3, 4[
   e) Montrer que $\alpha = \dfrac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur [1, + ∞ [par : $g(x) = \dfrac{3}{2} + \ln(2x-1)$.
   a) Calculer $g(\alpha)$.
   b) Montrer que si $x \in [3, 4]$, alors $g(x) \in [3, 4]$.
   c) Montrer que si $x \in [3, 4]$, alors $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$. En déduire que pour tout $x \in [3, 4]$,
   $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{2}{5}|x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.
   a) Montrer que pour tout naturel n, $3 \leq U_n \leq 4$.
   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante, puis en déduire sa convergence.
   c) Montrer que pour tout naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{5}|U_n - \alpha|$.
   d) En déduire que pour tout n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$; puis déterminer la limite de (U_n).
   e) Déterminer la plus petite valeur p de n pour laquelle U_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

N.B. On donne ln 2 ≈ 0, 7 ; ln 5 ≈ 1, 6 ; ln 7 ≈ 1, 9.

Exercice 8–11

Partie A :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x - 1$.

1) Etudier le sens de variations de g.
2) En déduire le signe de $g(x)$; puis celui de $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) a) Etudier la continuité de f en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; puis en donner une interprétation géométrique.
2) a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   b) Préciser le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.
3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
   b) Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère.

Partie C :

On pose pour tout $x \geq 0$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$; on ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

On désigne par (C_F) sa courbe représentative dans le repère.

1) a) Que représente F pour la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
   b) Préciser le sens de variations de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2) a) En utilisant la fonction g, montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $]0, 1]$, on a : $-1 \leq f(t) \leq t - 1$.
   b) Vérifier que cette double inégalité est encore vraie pour $t = 0$.
   c) En déduire que $\dfrac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$; puis donner une valeur approchée de $F(0)$.
3) a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a : $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t)$
   b) Calculer $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t}\,dt$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
   c) Dresser le tableau de variations de F.
   d) Proposer une construction de la courbe (C_F) dans le repère.
4) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.
   a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t) \leq t - 1$.
   b) En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ (en cm^2) du domaine (D).
5) On définit la suite (U_n) par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ pour tout naturel $n \geq 1$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $f(n + 1) \leq U_n \leq f(n)$. (On pourrait utiliser le sens de variations de f).
   b) En déduire la convergence de la suite (U_n).
   c) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$;
      exprimer S_n en fonction de F ; puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$.

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 8-12

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall\ n \geq 0,\ n! \geq 2^{n-1}$
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) $\forall\ n \geq 0,\ 3^{2n} - 2^n = 7k$ où k est un entier naturel.
4) Pour tout $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$.
5) Pour tout $n \geq 1$,

   a) $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$; b) $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(Où $\sin^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de sinus et $\cos^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de cosinus.)

Exercice 8-13

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n}$, $\forall\ n \geq 0$.

1) Calculer les termes u_1 et u_2.
2) a) Représenter graphiquement les quatres premiers termes de la suite (u_n) dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
   b) Quelles conjectures peut-on émettre ?
3) a) Montrer par récurrence que $\forall\ n \geq 0,\ u_n > 0$.
   b) Montrer que $\forall\ n \geq 0,\ u_n \leq 1$.
4) a) Etudier le sens de variations de la fonction *f* définie sur [0, +∞[par $f(x) = \dfrac{2x}{2+3x}$.
   b) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que (u_n) est convergente.
   d) On admet que sa limite *l* est une solution de l'équation $x = \dfrac{2x}{2+3x}$; préciser alors la valeur de *l*.
5) On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{u_n + 2}{u_n}$ $\forall\ n \geq 0$.
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   b) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
   c) Exprimer v_n en fonction de *n*.
   d) En déduire u_n en fonction de *n*.
   e) Vérifier que la valeur de *l* trouvée en 4) b) est bien la limite de la suite (u_n).
6) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{u_k}\right)$; exprimer S_n en fonction de *n*.

Exercice 8-14

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$, $\forall\ n \geq 1$

1) Calculer les termes u_2 et u_3.
2) a) Montrer par récurrence que $\forall\ n \geq 0,\ u_n < 2$

b) Montrer par récurrence que $\forall\ n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par $v_n = u_n - u_{n-1}\ \forall\ n \geq 1$.

a) Calculer v_1 et v_2.

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.

4) a) Montrer que $\forall\ n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k = u_n$.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

<u>Exercice 8-15</u>

Une urne contient 3 boules rouges ; 3 boules blanches et 2 boules jaunes toutes indiscernables au toucher.

1) On tire une boule de l'urne une fois et on la remet dans l'urne.
   Calculer la probabilité de l'évènement *A* : «obtenir une boule jaune».
2) On répète *n* fois $(n \geq 2)$ l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. Les *n* tirages se déroulent dans les mêmes conditions et sont indépendants.
   Soit *k*, un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
   Calculer la probabilité de tirer exactement *k* boules jaunes à l'issue des *n* tirages.
3) On désigne par p_n la probabilité de tirer exactement une boule jaune lors des *n* –1 premiers
   tirages et une boule jaune lors du *n*-ième tirage.
   a) Calculer p_2, p_3, p_4.
   b) Calculer p_n et montrer que $p_n = \dfrac{n-1}{9}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
4) On définit la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ par : $U_n = p_2 + p_3 + p_4 + ... + p_n$.
   a) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 2}$.
   b) On admet que pour tout $(n \geq 2)$, $U_n \leq 1$; en déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ est convergente : (on ne demande pas de calculer ici la limite).
   c) Montrer par récurrence que pour tout $(n \geq 2)$, $U_n = 1 - \left(1 + \dfrac{n}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   d) Calculer alors la limite de U_n.

<u>Exercice 8-16</u>

1) Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité de longueur 2 cm)
   a) Etudier le sens de variations de *f* et dresser son tableau de variations.
   b) Démontrer que pour tout $x \in [1, e]$, $0 \leq \ln x \leq \dfrac{x}{e}$.
   c) Préciser s'il y a lieu les équations des asymptotes à la courbe (C_f).
   d) Construire les asymptotes s'il y a lieu et la courbe (C_f) dans le repère.
   e) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$. Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de (D), puis $\lim_{\alpha\to 0} A(\alpha)$.

2) On définit la suite (U_n) par : $U_0 = \int_1^e x\,dx$ et pour tout naturel n, $U_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$.

a) Calculer U_0 et U_1.
b) Montrer que pour tout $n > 0$, $2U_n + nU_{n-1} = e^2$
c) Calculer U_2.
d) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
e) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

3) a) Démontrer en utilisant la question 1) b) que pour tout naturel n,

$$0 \le U_n \le \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n}.$$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 8-17

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(x) = x\,e^{-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
b) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
c) Construire la courbe (C_f) dans le repère.

2) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_n = \frac{1}{e^1} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
b) Montrer que pour tout $n \ge 2$, et si $n \le x \le n+1$, alors : $\frac{n+1}{e^{n+1}} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \frac{n}{e^n}$.
c) Donner une interprétation graphique de ces inégalités. On pourra accompagner l'explication d'un schéma.
d) Montrer que pour tout naturel $n \ge 2$, on a :

$$\frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \dots + \frac{n+1}{e^{n+1}} \le \int_2^{n+1} f(x)\,dx \le \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}.$$

e) En déduire que pour tout naturel $n \ge 2$, on a : $U_n - U_2 \le \int_2^{n+1} f(x)\,dx \le U_n - U_1$

et que $\left| U_n - \int_2^{n+1} f(x)\,dx \right| \le U_2$.

3) Calculer $\int_2^{n+1} f(x)\,dx$, puis donner un encadrement de U_{10}.

On donne : $e^{-11} \approx 0{,}17 \times 10^{-4}$; $e^{-2} \approx 0{,}14$.

Exercice 8-18

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x + 2 - e^x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

(C_f), sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; (unité 2cm)

Partie A :

1) a) Etudier la continuité de f en 0.
b) Montrer que la courbe (C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0, dont on précisera les équations.
c) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
d) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.
e) Préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D) sur $]-\infty, 0]$.

f) Déterminer les équations de tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse $\frac{1}{e}$ et 1.

g) Tracer les asymptotes (s'il y a lieu), les demi-tangentes au point d'abscisse 0, les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse $\frac{1}{e}$ et 1 ainsi que la courbe (C_f) dans le repère.

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, 0]$. vers un intervalle J à déterminer.

b) Tracer en justifiant, la courbe représentative (C') de h^{-1} dans le repère.

Partie B :

Soit a l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe (Ox) sur $]-\infty, 0]$.

1) Montrer que $a \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right[$.

2) On désigne par ($\mathcal{D}$) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$. ($\mathcal{D}$) subit une rotation autour de l'axe (Ox).

a) Calculer sous forme de polynôme en a, l'aire $\mathcal{A}(a)$ du domaine ($\mathcal{D}$) en cm^2.

b) Calculer en cm^3 et sous forme de polynôme en a le volume $\mathcal{V}(a)$ du solide engendré par cette rotation.

Partie C :

1) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $\varphi(x) = -x \ln x + x + 1$.

a) Etudier le sens de variations de φ et dresser son tableau de variations.

b) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que $\alpha \in]3, 4[$.

d) Préciser le signe de $\varphi(x)$ sur $]0, +\infty[$.

e) Montrer que pour tout $x \in [3, 4]$, $|\varphi(x)| \leq 0,7$.

2) On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur$]1, +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{x+1}{\ln x}$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = -x$ sur $]1, +\infty[$.

b) En déduire la solution unique de l'équation $g(x) = x$ sur $]1, +\infty[$.

c) Calculer $g'(x)$, puis montrer que $g'(x) = \frac{-\varphi(x)}{x(\ln x)^2}$.

d) Montrer que pour tout $x \in [3, 4]$, $g(x) \in [3, 4]$.

e) Montrer que pour tout x vérifiant $3 \leq x \leq 4$, on a $\frac{1}{x(\ln x)^2} \leq 0,3$.

f) En déduire que pour tout $x \in [3, 4]$, $|g'(x)| \leq 0,21 \leq \frac{1}{4}$.

g) Montrer que pour tout $x \in [3, 4]$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Montrer que pour tout n, $u_n \in [3, 4]$.

b) Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{2n}}$, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\frac{1}{e} \approx 0,4$.

Exercice 8-19

Pour tout entier naturel $n > 0$ on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$; on note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(2 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées).

Partie A

1) Comparer pour tout $x \in [1, e]$ $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
2) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points A et B fixes dont on précisera les coordonnées qui sont indépendantes de n. ($x_A < x_B$).
3) **Etude de la fonction pour $n = 1$.**
   a) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.
   b) En déduire une conséquence pour la courbe représentative (C_1) de f_1 ?
   c) Etudier le sens de variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.
   d) Déterminer les équations des tangentes à (C_1) aux points A et B.
   e) Tracer les tangentes et la courbe (C_1) dans le repère.
4) **Etude de la fonction pour $n = 2$.**
   a) Déterminer les limites de f_2 aux bornes de son ensemble de définition.
   b) En déduire une conséquence pour la courbe représentative (C_2) de f_2 ?
   c) Etudier le sens de variations de la fonction f_2 et dresser son tableau de variations.
   d) Déterminer les équations des tangentes à (C_2) aux points A et B.
   e) Préciser les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2).
   f) Tracer les tangentes et la courbe (C_2) dans le repère.

Partie B

Pour tout naturel $n > 0$, on pose $U_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$.

1) On pose $g(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.
   a) Calculer $g'(x)$
   b) En déduire U_1
2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $U_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)U_n$
   b) Calculer U_2.
3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq U_n \leq 1$.
   b) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$. (On pourrait utiliser les réponses à la question 1) partie A)
   c) En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.
   d) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \times U_n = 1 - \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right)$.
   e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{n!}\right)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}\right)$.

On donne $e \approx 2{,}7$; $\sqrt{e} \approx 1{,}4$.

Exercice 8-20

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

(C_f), sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; (unité 2 cm)

Partie A

1) a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Montrer que la courbe (C_f) possède des asymptotes que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à]0, 1[.

d) Préciser le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Montrer que la restriction h de f à l'intervalle]0, e[réalise une bijection de]0, e[vers un intervalle J à déterminer.

c) Tracer la tangente (T), les asymptotes, la courbe (C_f), ainsi que la courbe représentative (C') de labijection réciproque h^{-1} de h dans le repère.

3) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de (D) en fonction de α ; puis montrer que $A(\alpha) = 4 - 4\alpha - 2\alpha^2$ cm^2

b) Calculer la dérivée de la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}.$$

c) Calculer en fonction de α, le volume $V(\alpha)$ en cm^3 du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses ; puis exprimer $V(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle en α.

Partie B

On définit la fonction numérique g sur]0, e[par : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Calculer $g(\alpha)$.

2) a) Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle]0, e[, et que pour tout $x \in]0, e[$, $g'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$.

b) Calculer $f''(x)$ et en déduire le signe de $g'(x)$ sur]0, e[.

c) En déduire le sens de variations de la fonction g sur]0, e[.

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, e[$, $g(x) = \dfrac{x - x^2 - 2x\ln x}{1 - \ln x}$.

b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$, $g(x)$ appartient à $]0, \alpha]$.

c) Tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction g dans le repère.

4) Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq \alpha$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) On admet que sa limite l est solution de l'équation $g(x) = x$; déterminer alors en justifiant, la limite l.

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$.

__Exercice 8-21__ :

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$;

1) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = a\,x\,e^{-2x}$ ($a \in \mathbb{R}$).
Déterminer a pour que f_1 soit une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - f_1$ est solution de (E')

b) Résoudre l'équation (E'), puis l'équation (E).

c) Préciser la solution h de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)e^{-2x} \ ; \ \text{si} \ x \leq 0 \\ 1 - x\ln x \ ; \quad \text{si} \ x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité 3 cm).

1) a) Etudier la continuité de f en 0.
   b) Montrer que la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0, deux demi-tangentes dont on précisera les équations.
2) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3) a) Montrer que la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptotes.
   b) Calculer $f(-1)$ et montrer que la courbe (C_f) recoupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $\beta \in]1, 2[$.
   c) Construire les demi-tangentes et la courbe (C_f) dans le repère.
4) On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0, \beta]$ par : $F(x) = \int_x^\beta f(t)\,dt$
   a) Calculer $F(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$; Interpréter géométriquement le résultat.
5) Soit γ un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1]$. On considère (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \gamma$ et $x = 1$. Ce domaine (D) subit une rotation autour de l'axe des abscisses.
   a) Donner en fonction de γ l'aire $A(\gamma)$ du domaine (D) en cm^2. Que vaut $\lim\limits_{\gamma \to 0} A(\gamma)$?
   b) Calculer $\varphi'(x)$ où $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln^2 x - \dfrac{2}{3}\ln x + \dfrac{2}{9}\right)$ pour tout $x > 0$.
   c) En déduire en cm^3 en fonction de γ le volume $V(\gamma)$ du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.
   d) Calculer $\lim\limits_{\gamma \to 0} V(\gamma)$.
6) a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$
   b) Montrer que $\alpha = e^{2\alpha} - 1$.

Partie C

1) On considère g la fonction numérique définie sur ℝ par : $g(x) = e^{2x} - 1$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$, $g(x) \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{4}{5}$.
   c) En déduire que pour tout $x \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$, $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{4}{5}|x - \alpha|$.
2) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = -1$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.
   a) Montrer que pour tout n, $U_n \in \left[-1, \dfrac{-1}{2}\right]$.
   b) Montrer que pour tout n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{4}{5}|U_n - \alpha|$.
   c) En déduire que pour tout n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$, puis déterminer la limite de (U_n).

d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

N.B. On donne $e^{-1} \approx 0,4$; $e^{-2} \approx 0,1$; $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 5 \approx 1,6$.

Exercice 8-22 :

Partie A

Sur une droite (D) munie d'un repère $\left(O, \vec{i}\right)$, (unité 6 cm), on considère les points A_0 d'abscisse 2 et B_0 d'abscisse 1 ; le point A_1 milieu du segment $\left[B_0A_0\right]$ et le point B_1 vérifiant $OA_1 \times OB_1 = 2$; puis pour tout entier naturel *n*, A_{n+1} le milieu du segment $\left[B_nA_n\right]$ et B_n le point vérifiant $OA_n \times OB_n = 2$.

1) a) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 sur la droite (D).

   e) Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quant *n* devient de plus en plus grand ?

2) Soit x_n et y_n les abscisses respectives des points A_n et B_n.

   Justifier que pour tout entier naturel *n*, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ et $y_n = \dfrac{2}{x_n}$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel *n*, :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{2}{u_n}$.

1) a) Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3 en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible.

   b) La calculatrice affiche les résultats suivants :

Valeur	$\dfrac{17}{12}$	$\dfrac{24}{17}$	$\dfrac{577}{408}$	$\dfrac{816}{577}$
Affichage de la calculatrice	1, 41666667	1, 41176471	1, 41421569	1, 41421144

   Donner alors des valeurs approchées à 10^{-6} près de u_2, v_2, u_3 et v_3.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq v_n \leq 2$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $(u_n + v_n)^2 - 8 = (u_n - v_n)^2$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

4) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq v_n$.

5) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

6) a) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n - v_n \leq 1$.

   b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $(u_n - v_n)^2 \leq (u_n - v_n)$

7) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$.

   b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{4^n}$.

8) a) Déterminer la limite de $u_n - v_n$ quand *n* tend vers + ∞.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont une même limite *l*.

c) Déterminer en justifiant cette limite commune *l*.

Partie C

La calculatrice affiche $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$

1) a) Vérifier que u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 2×10^{-6} près.

b) Donner un rationnel approchant le mieux $\sqrt{2}$.

2) Soit *a* un réel quelconque positif.

a) Proposer une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$.

b) Donner dans ce cas une valeur approchée de $\sqrt{5}$ sous forme de fraction irréductible.

(Historiquement le mathématicien grec Héron au 1^er siècle (après Jésus Christ) utilisait cette méthode pour déterminer une valeur approchée des racines carrées).

Outils possibles

Partie A

1) *Abscisse du milieu d'un bipoint ; Calcul de distance sur une droite ; Propriétés éventuelles d'une famille de points par lecture graphique.*
2) *Abscisse du milieu d'un bipoint ; Calcul de distance sur une droite.*

Partie B

1) *Règles de calcul algébrique dans* $\mathbb{R}$ *; Définition de valeur approchée d'un réel à* ε *près.*
2) *Raisonnement par récurrence.*
3) *Définition des deux suites en question* (u_n) *et* (v_n)*.*
4) *Comparaison dans* $\mathbb{R}$*.*
5) *Définition de suite décroissante ; Définition de suite croissante ; Condition de convergence de suite monotone.*
6) *Ordre et opérations dans* $\mathbb{R}$*.*
7) *Comparaison de deux réels ; Ordre et opérations dans* $\mathbb{R}$ *(ou raisonnement par récurrence).*
8) *Calcul de limite par comparaison ; Opération sur les limites de suite ; Propriétés des limites de suites.*

Partie C

1) *Définition de valeur approchée d'un réel à* ε *près ;*
2) *Définition des deux suites en question* (u_n) *et* (v_n) *ainsi données ; application pratique*

Des outils possibles pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 8-1

Propriétés sur les suites définies par leur terme général en fonction de n.

Solution

Etudions chacune des suites (U_n), $(V_n)_{n\geq 1}$ et (W_n) suivantes définies respectivement par :

1) $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$; 2) $V_n = n^{-\frac{2}{3}} + e^{\frac{1}{n}}$; 3) $W_n = (n-3)e^{4-n} + 1$.

(Monotonie ; encadrement ; convergence).

1) (U_n) définie par : $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$:

a) soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$;

- $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right) = 0$.
- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$; pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
-

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 0$

- D'après le tableau de variation de f, on a pour tout $x \geq 0$, $-1 \leq f(x) < 0$.

b) De l'étude de la fonction f on déduit alors que :

- La suite (U_n) est croissante, convergente vers 0 et bornée : pour tout n, $-1 \leq U_n < 0$

2) $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par $V_n = n^{-\frac{2}{3}} + e^{\frac{1}{n}}$:

a) Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} + e^{\frac{1}{x}}$;

- $f(1) = 1 + e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{-\frac{2}{3}} + e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + e^{\frac{1}{x}}\right) = 1$.
- f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
-

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-(2/3) - e$ $\quad -$
$f(x)$	$1 + e \searrow 1$

- D'après le tableau de variation de f, on a pour tout $x \geq 1$, $1 < f(x) \leq 1 + e$.

b) De l'étude de la fonction f on déduit alors que :

- La suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, convergente vers 1 et bornée : pour tout $n \geq 1$, $1 < V_n \leq 1 + e$

3) (W_n) définie par : $W_n = (n-3)e^{4-n} + 1$:

a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-3)e^{4-x} + 1$;

- $f(0) = 1 - 3e^4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-3)e^{4-x} + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^4(xe^{-x} - 3e^{-x}) + 1\right) = 1$.

- f est dérivable sur $[0, +\infty[$ car les fonctions $x \longmapsto x-3$ et $x \longmapsto e^{4-x}$ sont dérivables et pour tout $x \geq 0$ $f'(x) = (4-x)e^{4-x}$; $f'(x) \geq 0$ sur $[0, 4]$ donc f est croissante sur $[0, 4]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[4, +\infty[$, donc f est décroissante sur $[4, +\infty[$.
-

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	$4e^4$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1-3e^4$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

- D'après le tableau de variation de f, on a pour tout $x \geq 0$, $1-3e^4 \leq f(x) \leq 2$.

b) De l'étude de la fonction f on déduit alors que :

- La suite (W_n) n'est pas monotone, elle convergente vers 1 et est bornée : pour tout n, $1-3e^4 \leq W_n \leq 2$.

Exercice 8-2

1) *Définition de suites numériques*
2) *Définition de suite géométrique*
3) *Terme général d'une suite géométrique en fonction de n ; Règles de calcul algébrique dans* $\mathbb{R}$.
4) *Somme des n+1 premiers termes consécutifs d'une suite géométrique ; d'une suite arithmétique*

Solution

u est la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$.

Et v la suite définie par : pour tout n, $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1) a) Calculons u_1, u_2 et u_3.
   - $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 1 = -\frac{2}{9}$; $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 1 = \frac{25}{27}$.

   b) Calculons les trois premiers termes de la suite v.
   - $v_0 = 4u_0 + 15 = 19$; $v_1 = 4u_1 - 6 + 15 = \frac{19}{3}$; $v_2 = 4u_2 - 12 + 15 = \frac{19}{9}$.

2) Montrons que la suite v est une suite géométrique ; précisons la raison et le premier terme.

   Pour tout n, $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6(n+1) + 15 = \frac{4}{3}u_n - 2n + 5$;

   $v_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}v_n$. Donc pour tout n, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. D'où v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 19$.

3) a) Exprimons v_n en fonction de n.

   v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 19$; donc pour tout n,

   $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \frac{19}{3^n}$.

   b) En déduisons que pour tout n, $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.

   Pour tout n, $v_n = 4u_n - 6n + 15$; donc $u_n = \frac{1}{4}v_n + \frac{6n-15}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

4) a) Montrons que la suite u peut s'écrire sous la forme $u = t + w$ où t est une suite géométrique et w une suite arithmétique.

   On a pour tout n, $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$; posons pour tout n, $u_n = t_n + w_n$ avec

$t_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n}$ et $w_n = \frac{6n-15}{4}$.

On a $t_{n+1} = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}t_n$ et $w_{n+1} = \frac{6(n+1)-15}{4} = \frac{6n-15}{4} + \frac{3}{2} = w_n + \frac{3}{2}$.

Donc t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = \frac{19}{4}$ et w est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = -\frac{15}{4}$.

b) Calculons la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

On a pour tout n, $u_n = t_n + w_n$; donc $S_n = (t_0 + w_0) + (t_1 + w_1) + \cdots + (t_n + w_n)$.

$$S_n = (t_0 + t_1 + \cdots + t_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) = \left[\frac{19}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)\right] + \left[\frac{n+1}{2}\left(-\frac{15}{4} + \frac{6n-15}{4}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{19}{8}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{3}{4}(n-5)(n+1).$$

Exercice 8-3

1) *Définition de suite géométrique ; Définition de suite arithmétique ; Egalité de deux nombres complexes donnés sous formes exponentielles.*
2) *Plusieurs outils dont par exemples : opérations sur les nombres complexes ; Interprétation de l'argument d'un nombre complexe…*

Solution

Trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 sont tels que :

- leur produit est égal à $4\sqrt{2}(-1+i)$;
- leurs modules respectifs R_1, R_2, R_3 constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison 2 ;
- leurs arguments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ constituent dans cet ordre une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$.

1) a) Montrons que $R_2^{\ 2} = R_1 \times R_3$.

Les modules respectifs R_1, R_2, R_3 constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison 2 signifie que : $R_2 = 2R_1$, $R_3 = 2R_2$, donc $R_2 = \frac{R_3}{2}$. Et finalement $R_2^{\ 2} = 2R_1 \times \frac{R_3}{2} = R_1 \times R_3$.

b) Montrons que $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$.

Les arguments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ constituent dans cet ordre une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ signifie que : $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$, donc $\alpha_2 = \alpha_3 - \frac{\pi}{2}$. Et finalement

$2\alpha_2 = \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\alpha_3 - \frac{\pi}{2}\right) = \alpha_1 + \alpha_3$.

c) En déduisons les nombres complexes z_1, z_2, z_3.

Le produit de ces trois nombres complexes est égal à $4\sqrt{2}(-1+i)$ c'est-à-dire que :

$z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$; posons d'après l'énoncé :

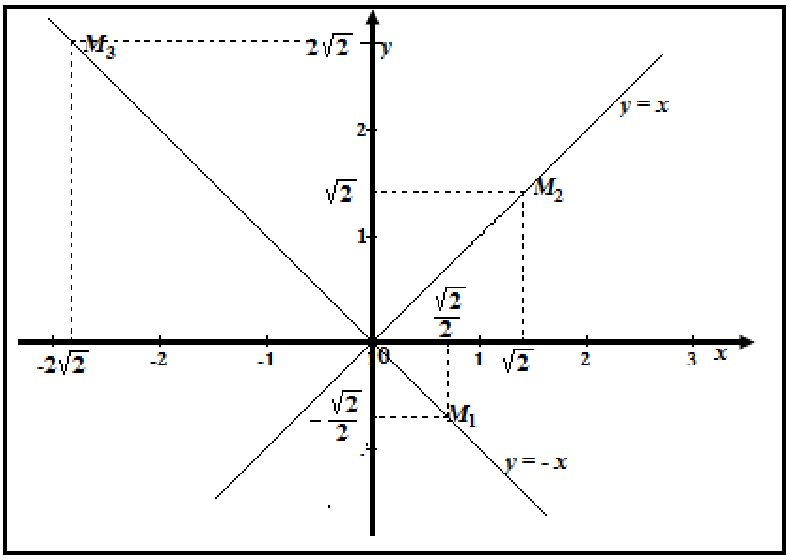
$z_1 = R_1 e^{i\alpha_1}$, $z_2 = R_2 e^{i\alpha_2}$, $z_3 = R_3 e^{i\alpha_3}$; on sait que $4\sqrt{2}(-1+i) = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$; donc :

$z_1 \times z_2 \times z_3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ équivaut à $(R_1 \times R_2 \times R_3)e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$. On en déduit que $\begin{cases} R_1 \times R_2 \times R_3 = 8 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$ et d'après les questions 1) a) b), on a : $\begin{cases} {R_2}^3 = 8 \\ 3\alpha_2 = \dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$ ce qui donne : $R_2 = 2$ et $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$; on obtient alors :

$R_1 = 1$, $R_2 = 2$ et $R_3 = 4$; $\alpha_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$ et $\alpha_3 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$

($k \in \{0, 1, 2\}$). Donc : $z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $z_3 = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$;
(avec $k \in \{0, 1, 2\}$). En prenant successivement $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, on obtient tous les nombres complexes satisfaisant aux conditions.

2) Soit $M_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_2\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $M_3\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ trois points dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.
M_1, M_2, M_3 sont les images des nombres complexes z_1, z_2, z_3 correspondant à $k = 0$ respectivement : Représentons les points M_1, M_2, M_3 dans le repère.



a) Montrons que $z_3 = -4\ z_1$.

On a $z_3 = -2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}\,(1-i) = -4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4z_1$.

b) Montrons que la droite (OM_2) est perpendiculaire à la droite (M_1M_3).

- Outils des nombres complexes :

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2} = \frac{-5z_1}{z_2} = \frac{-5\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{5}{2}i\ ;\ \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2}\right) = \left(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$; donc

la droite (OM_2) est perpendiculaire à la droite (M_1M_3).

- Outils de vecteurs :

$\overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \frac{-5\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 0$; donc la droite (OM_2) est perpendiculaire à la droite (M_1M_3) .

<u>Exercice 8-4</u> : **<u>Exercices corrigés sur le raisonnement par récurrence.</u>**

- **<u>1^{ère}situation</u>** : **<u>Pour démontrer que si *p* (*n*) est vraie, alors *p* (*n*+1) est vraie, on pourrait partir de la supposition *p* (*n*).vraie.</u>**

I) Démontrons **par récurrence** que pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$; ($x \in \mathbb{R}^+$).

Soit p(n) la propriété : Pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- Vérifions que p(0) est vraie ; c'est-à-dire (pour $n = 0$) que $(1 + x)^0 \geq 1 + 0\,x$.
  $(1 + x)^0 = 1$ et $1 + 0\,x = 1$, $1 \geq 1$, donc $(1 + x)^0 \geq 1 + 0\,x$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$ (n fixé), $(1+x)^n \geq 1+nx$ et montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
  (Partant de p(n)). On a $(1+x)^n \geq 1+nx$; en multipliant chaque membre de l'inégalité par $(1 + x)$ qui est positif (car $x \in \mathbb{R}^+$), on obtient : $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$;
  $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$; (car $nx^2 \geq 0$)
  donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
- On conclut alors que pour tout n, $(1+x)^n \geq 1+nx$; ($x \in \mathbb{R}^+$).

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3-2x)e^{2x}$

Montrons **par récurrence** que pour tout $n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = 2^n\,(3-n-2x)e^{2x}$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f)

- Pour $n = 0$; on a $f^{(0)}(x) = f(x) = (3-2x)e^{2x}$; or $2^0 = 1$; donc :
  $f^{(0)}(x) = 2^0\,(3-0-2x)e^{2x}$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$ (n fixé), $f^{(n)}(x) = 2^n\,(3-n-2x)e^{2x}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\,(3-(n+1)-2x)e^{2x}$.
  (Partant de la supposition vraie). On a $f^{(n)}(x) = 2^n\,(3-n-2x)e^{2x}$; en dérivant une fois $f^{(n)}$ on a : $f^{(n)}{}'(x) = -2^{n+1}e^{2x} + 2^{n+1}(3-n-2x)e^{2x} = 2^{n+1}e^{2x}\left(-1+3-n-2x\right)$
  Donc $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}{}'(x) = 2^{n+1}\left(3-(n+1)-2x\right)e^{2x}$.
- On conclut alors que si $f(x) = (3-2x)e^{2x}$, alors pour tout n, $f^{(n)}(x) = 2^n\,(3-n-2x)e^{2x}$

III) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) a) Montrons **par récurrence** que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n < 2$.
   - Pour $n = 0$; on a $u_0 = 0$; or $0 \leq 0 < 2$; donc : $0 \leq u_0 < 2$.
   - Supposons que pour un $n \geq 0$ (n fixé), $0 \leq u_n < 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} < 2$.
     (Partant de $0 \leq u_n < 2$ vraie). On a $0 \leq u_n < 2$; en ajoutant 2 à chaque membre de cette inégalité on a : $2 \leq 2+u_n < 4$; en prenant la racine carrée on obtient :
     $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} < 2$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$) ; ce qui donne $0 \leq u_{n+1} < 2$. (car $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ par définition et $0 \leq \sqrt{2}$).
   - On conclut que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$.

   b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
   Il s'agit de montrer par récurrence, la propriété p(n) : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$

- Pour $n = 0$; on a $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$; or $\sqrt{2} \geq 0$; donc $u_1 - u_0 \geq 0$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$ (n fixé), $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$. (Partant de $u_{n+1} - u_n \geq 0$ vraie). On a $u_{n+1} - u_n \geq 0$; autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$; en ajoutant 2 à chaque membre de cette inégalité on a : $2 + u_{n+1} \geq 2 + u_n$; en prenant la racine carrée on obtient : $\sqrt{2 + u_{n+1}} \leq \sqrt{2 + u_n}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$) ; ce qui donne $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. (car $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ par définition) ; donc $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$
- On conclut que pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = 2 - u_n$.

   a) Donnons le signe de v_n pour tout n.

   On sait que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$ d'après la question 1) a) ; donc $2 - u_n > 0$ par conséquent pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

   b) Montrons que, pour tout n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

   Pour tout n, $v_n > 0$; on a donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 - u_{n+1}}{2 - u_n} = \dfrac{2 - \sqrt{2 + u_n}}{2 - u_n} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$. Or $2 + \sqrt{2 + u_n} \geq 2$; (car $\sqrt{2 + u_n} \geq 0$); donc $\dfrac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq \dfrac{1}{2}$. d'où $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

➢ **2ère situation** : **Pour démontrer que si *p* (*n*) est vraie, alors *p* (*n*+1) est vraie, on pourrait partir d'une « partie »de *p* (*n*+1).**

I) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Appelons p(n), la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; donc $S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.
- Supposons que pour un $n \geq 1$, (n fixé), on a $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons alors que $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Partant de $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)$ (une « partie de p(n+1)), on a :

  $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = S_n + (n+1)$; or $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; donc

  $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. D'où :

  $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
- En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

  (On pouvait ici aussi partir de p(*n*) et ajouter *n* + 1).

II) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$.

Appelons p(n), la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$.

- Pour $x = 0$, l'égalité $S_n = 1 + 0 + 0^2 + 0^3 + ... + 0^n = \dfrac{1 - 0^{n+1}}{1 - 0} = 1$ est vraie ; par la suite supposons $x \neq 0$.
- Pour $n = 0$, on a $S_0 = x^0 = 1$ ($x \neq 1$) et $\dfrac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = 1$; donc $S_0 = 1 = \dfrac{1 - x^{0+1}}{1 - x}$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé), on a

  $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$. et montrons alors que

  $S_{n+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \dfrac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$. (On pouvait ici aussi partir de p(n)). Partant de $S_{n+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1}$ (une « partie de p (n+ 1)), on a : $S_{n+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = S_n + x^{n+1}$ or $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; donc

  $S_{n+1} = S_n + x^{n+1} = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \dfrac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$. D'où :

  $S_{n+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1} = \dfrac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$.
- En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; $\forall x \neq 1$.

III) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

- Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$, et 0 est divisible par 3. ($0 = 3 \times 0$)
- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé), on a $4^n - 1$ divisible par 3 c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $4^n - 1 = 3k$ et montrons que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3 ; autrement dit qu'il existe un entier k' tel que $4^{n+1} - 1 = 3k'$. On a :
  $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4\left(4^n - 1\right) + 3 = 4 \times 3k + 3 = 3(4k + 1) = 3k'$; avec
  $k' = 4k + 1$ qui est un entier ; donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
- En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

➢ **<u>3ère situation</u> : <u>Pour démontrer que si *p* (*n*) est vraie, alors *p* (*n*+1) est vraie, on pourrait partir d'une autre proposition</u>**:

I) Même énoncé que l'exercice III) de la 1ère situation jusqu'en 2) b). Et maintenant :

c) Montrons **par récurrence** que, pour tout $n \geq 0$, $v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

- Pour $n = 0$, $v_0 = 2 - u_0 = 2$; or $2 \leq 2$ et $2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0-1}$; donc $v_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0-1}$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé), on a $v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ et montrons alors que

  $v_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{(n+1)-1}$ soit $v_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

(Partir de $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ou d'une « partie » de $v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ne semble pas facile ; partons alors de la relation 2) b) qui dit que « pour tout n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ »).

D'après la question 2) b) on a pour tout n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ autrement dit $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$.

Or $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; donc on a : $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ce qui donne $v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

- En conclusion, pour tout $n \geq 0$, $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3) a) Montrons que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée (par 2) ; donc elle est convergente.

b) Déterminons la limite de la suite (u_n).

On a d'après la question 2) c) que pour tout $n \geq 0$, $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; or pour tout n, $v_n = 2 - u_n > 0$; donc pour tout $n \geq 0$, $2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ c'est-à-dire $\left| u_n - 2 \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$; donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

II) Soit $(a_n), (b_n)$ les suites définies par : $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{cases} \quad \forall n \geq 0$

On suppose que pour tout $n \geq 0$, on a $0 < b_n < a_n$ et que $a_{n+1}{}^2 - b_{n+1}{}^2 \leq \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2$

Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$

(partir de si $0 \leq x \leq y$, alors $(y - x)^2 \leq y^2 - x^2$. Car $(y - x)^2 \leq (y - x)\,(y + x)$.)

- Pour $n = 0$, on a $a_0 - b_0 = a - b$; or $a - b \leq \frac{a-b}{1}$ c'est-à-dire $a - b \leq \frac{a-b}{2^0}$; donc $a_0 - b_0 \leq \frac{a-b}{2^0}$.

- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé), on a $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$ et montrons que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$. (Là aussi partir de $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$ ou d'une « partie » de $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a-b}{2^{n+1}}$ ne semble pas aisé). On sait que pour tout $n \geq 0$, on a $0 < b_n < a_n$ et que $a_{n+1}{}^2 - b_{n+1}{}^2 \leq \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2$. On sait que pour tous nombres x, y vérifiant $0 \leq x \leq y$, alors on a : $(y - x)^2 \leq y^2 - x^2$; donc comme pour tout $n \geq 0$; $0 < b_n < a_n$, on a alors $0 < b_{n+1} < a_{n+1}$ et donc $\left(a_{n+1} - b_{n+1}\right)^2 \leq a_{n+1}{}^2 - b_{n+1}{}^2$; or

$a_{n+1}{}^2 - b_{n+1}{}^2 \leq \left(\dfrac{a_n - b_n}{2}\right)^2$; d'où $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 \leq \left(\dfrac{a_n - b_n}{2}\right)^2$. En prenant les racines carrées, (tous les termes étant strictement positifs) on obtient $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$. De plus $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$ (supposition de la récurrence) ; alors on a

$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}(a-b)$ ce qui donne $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{(a-b)}{2^{n+1}}$.

- En conclusion pour tout $n \geq 0$, $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$.

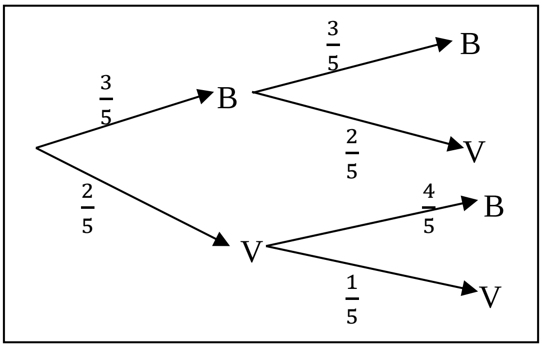
Exercice 8–5

1) *Probabilité conditionnelle ; arbre pondéré.*
2) *Probabilité conditionnelle ; Propriétés de probabilité.*
3) *Définition de suite géométrique ; Terme général d'une suite géométrique en fonction de n ; Calcul algébrique.*

Solution

1) On suppose dans cette question que l'on a effectué deux tirages successifs. On désigne par la lettre B "tirer un jeton blanc" et par V "tirer un jeton vert". Par exemple BV indiquera que l'on a tiré d'abord un jeton blanc puis un jeton vert, VB un jeton vert puis un jeton blanc.

➢ Décrivons l'ensemble des résultats possibles, en indiquant la probabilité de chaque résultat. Représentons les résultats de l'épreuve sur un arbre pondéré.



D'après l'arbre pondéré les résultats possibles sont : BB ; BV ; VB et VV et on a :

$p(\text{BB}) = \dfrac{9}{25}$; $p(\text{BV}) = \dfrac{6}{25}$; $p(\text{VB}) = \dfrac{8}{25}$ et $p(\text{VV}) = \dfrac{2}{25}$.

2) On effectue dans tout ce qui suit une succession de *n* tirages ($n \geq 1$) et on considère les évènements suivants :

- D_n : « A la fin du *n*-ième tirage l'urne contient deux jetons verts »,
- U_n : « A la fin du *n*-ième tirage l'urne contient un seul jeton vert ».

On note d_n la probabilité de l'évènement D_n, u_n la probabilité de l'événement U_n.

a) Utilisons la question 1) pour calculer d_1, u_1, d_2 et u_2.

D'après les résultats de la question 1) on a :

$$d_1 = p(\text{B}) = \frac{3}{5}; \quad u_1 = p(\text{V}) = \frac{2}{5}; \quad d_2 = p(\text{BB}) = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\text{et} \quad u_2 = p(\text{BV}) + p(\text{VB}) = \frac{6}{25} + \frac{8}{25} = \frac{14}{25}$$

b) Exprimons en fonction de *n* la probabilité d_n de D_n.

Pour avoir D_n il faudrait tirer que des jetons blancs pendant ces *n* tirages ; alors

$d_n = p(\mathrm{D}_n) = p(\mathrm{BBB}\cdots\mathrm{B}) = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

c) Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a : $u_{n+1} = \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n$.

L'évènement U_{n+1} est l'union des évènements disjoints suivants :
(VBB…B) ; (BVB…B) ; (BBVB….B),…, (BB…BVB), (BBB…BV) où il y a 1 seul V et *n* B. On a au total C_{n+1}^1 évènements disjoints. La probabilité de l'évènement (BBB…BV) où le jeton vert est tiré au *n* + 1-ème tirage est $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{2}{5}d_n$; la probabilité de tous les autres évènements où le jeton vert n'a pas été tiré au *n*+1-ème tirage est :

$\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}$; donc

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{2}{5}$$

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}\left[\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\times\frac{2}{5}\right] + \left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{2}{5}$$

Le terme entre crochets n'est autre que *p* (U_n) c'est-à-dire u_n, (car la probabilité de l'évènement (VBB…B) ∪ (BVB…B) ∪ (BBBVB…B) ∪ … ∪ (BBB…BV) où il y a 1 seul V et *n* – 1 B.) donc : *p* (U_{n+1}) = $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{2}{5}d_n = \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n$.

Autre méthode ; le *n* + 1-ème tirage peut être réalisé de deux façons différentes :

- Soit au *n*-ème tirage, aucun jeton vert n'a été tiré : (D_n), et alors il faut tirer un jeton vert au *n* + 1-ème tirage, ce qui donne une probabilité égale à $\frac{2}{5}d_n$,
- Soit 1 jeton vert a été déjà tiré au cours des *n* tirages précédents : (U_n), et alors au *n* + 1-ème tirage il faut tirer un jeton blanc, ce qui donne une probabilité égale à $\frac{4}{5}u_n$.
- Donc on a $p(\mathrm{U}_{n+1}) = u_{n+1} = \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n$.

3) On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

a) Montrons que l'on a $v_1 = \frac{8}{5}$ et que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique ; précisons la raison.

On a $v_1 = u_1 + 2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$; d'autres parts : $v_{n+1} = u_{n+1} + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$;

$$v_{n+1} = \frac{2}{5}d_n + \frac{4}{5}u_n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{4}{5}\left[v_n - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n\right] + \frac{6}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n \; ; \; v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $v_1 = \frac{8}{5}$

b) En déduisons l'expression de v_n, puis celles de u_n en fonction de *n*.

$(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $v_1 = \frac{8}{5}$; donc pour tout

$n \geq 1$, on a $v_n = \frac{8}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ et comme $v_n = u_n + 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$, alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$u_n = \frac{8}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Exercice 8-6

1) *Calcul pratique de dérivées successives de fonction*
2) *Raisonnement par récurrence*
3) *Pente d'une tangente horizontale à une courbe de fonction en un point ; Condition pour qu'un point appartienne à une courbe de fonction ; Définition de suite géométrique ; Définition de suite arithmétique ; Limites de ces suites.*

Solution

f est la fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur ℝ par : $f(x) = (3-2x)e^{2x}$

1) Calculons $f'(x)$; $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

   f est en effet *n* fois dérivables sur ℝ en tant que produit de fonctions dérivables sur ℝ.

   $f'(x) = -2e^{2x} + 2(3-2x)e^{2x} = 2e^{2x}(2-2x)$;

   $f^{(2)}(x) = f''(x) = 4e^{2x}(2-2x) - 4e^{2x} = 4(1-2x)e^{2x} = 2^2(1-2x)e^{2x}$.

   $f^{(3)}(x) = f^{(2)}{}'(x) = -8e^{2x} + 8(1-2x)e^{2x} = 8(-2x)e^{2x} = 2^3(-2x)e^{2x}$.

2) Montrons par récurrence que pour tout *n*, $f^{(n)}(x) = 2^n(3-n-2x)e^{2x}$

   (où $f^{(n)}$ désigne la dérivée *n*-ième de *f*)

   (Voir le corrigé de II) dans la première situation de l'exercice 8-4)

3) Pour tout entier naturel non nul *n*, la courbe représentative (C_n) de la fonction $f^{(n)}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en un point $M_n(x_n, y_n)$.

   a) Déterminons les coordonnées x_n et y_n du point M_n en fonction de *n*.

   L'abscisse x_n du point M_n vérifie $f^{(n)}{}'(x_n) = f^{(n+1)}(x_n) = 0$ c'est-à-dire :

   $f^{(n+1)}(x_n) = 2^{n+1}\left[3-(n+1)-2x_n\right]e^{2x_n} = 0$; pour tout x_n, $e^{2x_n} > 0$; donc $x_n = \frac{2-n}{2}$

   $y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(3-n-2x_n)e^{2x_n}$. En remplaçant x_n par sa valeur en fonction de *n*, on a : $y_n = 2^n e^{2-n}$; le point M_n a donc pour coordonnées : $x_n = \frac{2-n}{2}$ et $y_n = 2^n e^{2-n}$.

   b) Montrons que pour tout $n > 0$, M_n appartient à la courbe (C) d'équation $y = \frac{e^{2x}}{4^{x-1}}$.

   Il s'agit de trouver une relation entre les cordonnées de M_n indépendamment de *n*.

   De $x_n = \frac{2-n}{2}$, on a $n = 2-2x_n$ et alors $y_n = 2^{2-2x_n}e^{2x_n} = 4^{1-x_n}e^{2x_n} = \frac{e^{2x_n}}{4^{x_n-1}}$.

   Ce qui traduit que le point M_n appartient à la courbe (C) d'équation $y = \frac{e^{2x}}{4^{x-1}}$.

   c) Vérifions que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Pour tout *n*, $x_n = \frac{2-n}{2} = 1 - \frac{1}{2}n$; $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{1}{2}(n+1) - 1 + \frac{1}{2}n = -\frac{1}{2}$; $x_0 = 1$; donc (x_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $x_0 = 1$.

   d) Etudions la limite de la suite (x_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}n\right) = -\infty$.

e) Vérifions que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Pour tout n, $y_n = 2^n e^{2-n} = e^2\, 2^n e^{-n} = e^2\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$; donc

$y_{n+1} = e^2\left(\dfrac{2}{e}\right)^{n+1} = \dfrac{2}{e}\left[e^2\left(\dfrac{2}{e}\right)^n\right] = \dfrac{2}{e}y_n$; d'où (y_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{e}$ et de premier terme $y_0 = e^2$.

f) Etudions la limite de la suite (y_n).

La raison $q = \dfrac{2}{e}$ et $0 < \dfrac{2}{e} < 1$; donc la suite (y_n) a pour limite 0.

<u>Exercice 8–7</u>

1) *Raisonnement par récurrence.*
2) *Règles de calcul algébrique dans* $\mathbb{R}$
3) *Propriétés de suite monotone et majorée ou minorée*
4) *Règles de calcul algébrique dans* $\mathbb{R}$ *; Comparaison dans* $\mathbb{R}$ *; Ordre et opérations dans* $\mathbb{R}$ *(ou raisonnement par récurrence) ; Limites par comparaison.*

<u>Solution</u>

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_1 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right)$.

1) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$.
   Utilisons l'outil de « raisonnement par récurrence »
   - Pour $n = 1$, on a $U_1 = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{3}{2} > 0$; donc $U_1 > 0$.
   - Supposons que pour un $n \geq 1$, (n fixé) $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.
     $U_n > 0$ alors $\dfrac{2}{U_n} > 0$ et par conséquent $\dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right) > 0$; $U_{n+1} > 0$
   - On conclut alors que pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$.

2) a) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{U_n}$.

$$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n^{\,2} - 2U_n\sqrt{2} + 2}{U_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{U_n}.$$

   b) En déduisons que pour tout $n \geq 1$, $U_n > \sqrt{2}$.
   On sait que pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$; $\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2 > 0$; donc $U_{n+1} - \sqrt{2} > 0$ pour tout $n \geq 1$; autrement dit pour tout $n \geq 1$, $U_n > \sqrt{2}$.

3) Montrons que la suite (U_n) est convergente (on ne demande pas de calculer ici la limite).
   Etudions la monotonie de la suite (U_n).
   $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right) - U_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{U_n^{\,2} - 2U_n^{\,2} + 2}{U_n}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\sqrt{2} - U_n\right)\left(\sqrt{2} + U_n\right)}{U_n}$;
   $U_n > \sqrt{2} > 0$; donc $\sqrt{2} + U_n > 0$ *et* $\sqrt{2} - U_n < 0$.
   D'où pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - U_n < 0$; alors la suite (U_n) est décroissante.
   (U_n) est une suite décroissante et minorée ($U_n > \sqrt{2}$) donc elle est convergente.

4) a) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a d'après la question 2) a) $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{U_n}$. En développant le 2ème terme, on obtient : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(U_n^{\ 2} - 2U_n\sqrt{2} + 2\right)}{U_n} = \frac{U_n^{\ 2} - U_n\sqrt{2} - U_n\sqrt{2} + 2}{2U_n}$;

$U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{U_n^{\ 2} - U_n\sqrt{2} - U_n\sqrt{2} + 2}{2U_n} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{U_n} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; donc pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$.

D'après la question 4) a) pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; or

$\left(U_n - \sqrt{2}\right) > 0$ et $\left(\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - U_n}{U_n\sqrt{2}} < 0$; $\left(U_n > \sqrt{2} > 0\right)$; donc pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$.

c) En déduisons que pour tout $n \geq 1$, $U_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$; puis déterminons la limite de (U_n).

Utilisons l'outil de « Ordre et opérations dans ℝ ».

D'après la question 4) b), pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$.

En faisant varier n de 1 à $n - 1$, on obtient :

$$U_2 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_1 - \sqrt{2}\right)$$
$$U_3 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_2 - \sqrt{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$U_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(U_{n-1} - \sqrt{2}\right)$$

Toutes ces $(n - 1)$ inégalités sont entre réels positifs ; donc en multipliant membre à membre ces inégalités et en simplifiant, on obtient :

$U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(U_1 - \sqrt{2}\right)$; $U_1 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{2}$ (car $3 - 2\sqrt{2} \leq 1$) ;

Donc $U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$; pour tout $n \geq 1$, $U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

On a $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$; donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}$.

Exercice 8–8

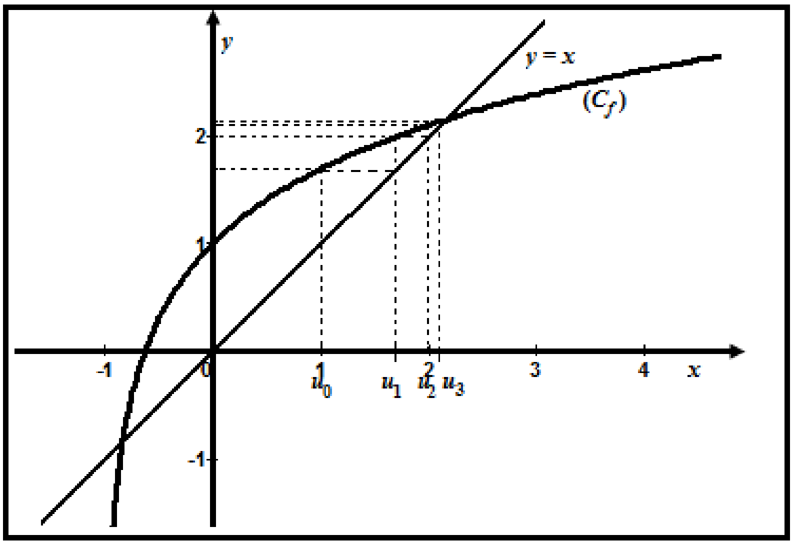
1) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; construction d'une courbe de fonction*
2) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; Théorème des valeurs intermédiaires.*
3) *Représentation des termes d'une suite (u_n) définie de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. ; Raisonnement par récurrence ; Condition de convergence d'une suite monotone ; Propriété des limites.*

Solution

1) *f* est la fonction numérique définie par $f(x)=1+\ln(x+1)$

a) Etudions le sens de variations de *f* et dressons son tableau de variations. (Voir solution de l'exercice 7-16 ; 1))

b) Construisons la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



2) On considère la fonction *h* définie par $h(x)=-x+1+\ln(x+1)$.

a) Etudions le sens de variations de *h* et dressons son tableau de variations.

- *h* est définie pour tout $x > -1$; donc $D_h =]-1, +\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left[-x+1+\ln(x+1)\right] = -\infty$;

  $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[-x+1+\ln(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left[-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right] = -\infty$

  $\left(\text{car } \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x}\right] = 0\right)$
- *h* est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x > -1$; $h'(x) = -1+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1}$.
- Pour tout $x > -1$, $x + 1 > 0$; donc $h'(x) \geq 0$ sur $]-1, 0]$ et alors *h* est croissante sur $]-1, 0]$; $h'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$ et alors *h* est décroissante sur $[0, +\infty[$.
- Tableau de variations de *h*.

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) En déduisons que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions uniques dont l'une est négative et l'autre α appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$.

L'équation $f(x) = x$ équivaut à $f(x) - x = 0$, c'est-à-dire $h(x) = 0$.

D'après le tableau de variations de *h*, *h* est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $]-1, 0]$ et $h\left(]-1, 0]\right) =]-\infty, 1]$ contenant 0 ; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à *h* sur l'intervalle $]-1, 0]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]-1, 0]$ et $\beta < 0$.

De même *h* est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur l'intervalle

$[0, +\infty[$ et $h([0, +\infty[) =]-\infty, 1]$ contenant 0 ; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à h sur l'intervalle $[0, +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\alpha > 0$.

Et comme $h(x) = 0$ équivaut à $f(x) = x$, alors l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions uniques dont l'une β est négative et l'autre α appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n + 1)$

a) Plaçons les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 sur la figure.

(Voir la figure ci-dessus ; les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 sont sur l'axe des abscisses.)

b) Faisons une conjecture sur les propriétés éventuelles de la suite (u_n). (monotonie ; encadrement ; convergence).

En observant la figure, la suite (u_n) semble être croissante, elle semble être minorée par 1 et majorée ; elle semble également être convergente.

c) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Il s'agit de montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$.

- Pour $n = 0$, on a $u_1 - u_0 = (1 + \ln 2) - 1 = \ln 2$; $\ln 2 \geq 0$; donc $u_1 - u_0 \geq 0$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé) on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$; donc si $u_{n+1} \geq u_n$ en ajoutant 1 à chaque membre, on a $u_{n+1} + 1 \geq u_n + 1 > 0$; la fonction ln étant (strictement) croissante on a $\ln(u_{n+1} + 1) \geq \ln(u_n + 1)$ et en ajoutant encore 1 à chaque membre on obtient $1 + \ln(u_{n+1} + 1) \geq 1 + \ln(u_n + 1)$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$; ou $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.
- En conclusion, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$; la suite (u_n) est alors croissante.

d) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 3$.

- Pour $n = 0$, $u_0 = 1$; or $1 \leq 1 \leq 3$; donc $1 \leq u_0 \leq 3$.
- Supposons que pour un $n \geq 0$, (n fixé) on a $1 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

  Pour tout entier naturel, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n + 1) = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée à la question 1) ; f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$; donc si $1 \leq u_n \leq 3$, on a $f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$; $f(1) = 1 + \ln 2$ et $1 \leq 1 + \ln 2$; $f(3) = 1 + \ln 4 = 1 + 2\ln 2 \approx 2,4$.

  Donc $1 \leq f(1)$ et $f(3) \leq 3$; donc $1 \leq f(u_n) \leq 3$ c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.
- On peut alors conclure que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 3$.

e) En déduisons la convergence de la suite (u_n).

D'après les résultats des questions 3) c) d), la suite (u_n) est croissante et majorée (par 3) donc elle est convergente.

f) Montrons que $l = \alpha$.

L'équation $f(x) = x$ admet deux racines uniques dont l'une α est positive et l'autre négative. On a pour tout $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 3$ c'est dire que la suite (u_n) est positive et comme elle est convergente, sa limite l est positive et est solution de l'équation $f(x) = x$; alors $l = \alpha$.

Exercice 8–9

1) *Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$*
2) *Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$; Terme général d'une suite géométrique en fonction de n.*
3) *Egalité de deux nombres complexes ; Convergence d'une suite.*
4) *Interprétation géométrique des nombres complexes ; Module et argument d'un nombre complexe ;*

Condition d'alignement de trois points dans le plan d'affixes données ; Transformations et nombres complexes ; Propriété de translation.

Solution

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante :

$Z_0 = 1$ et pour tout naturel n, $Z_{n+1} = \dfrac{1}{3}Z_n + \dfrac{2}{3}i$.

1) Calculons Z_1 et Z_2.

$$Z_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \ ; \ \ Z_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right) + \frac{2}{3}i = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}i \ .$$

2) Pour tout naturel n, on pose $U_n = Z_{n-i}$.

a) Calculons U_0 ; U_1 et U_2.

$$U_0 = Z_0 - i = 1 - i \ ; \ \ U_1 = Z_1 - i = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \ ; \ \ U_2 = Z_2 - i = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}i \ .$$

b) Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n.

$$U_{n+1} = Z_{n+1} - i = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i - i = \frac{1}{3}(Z_n - i) = \frac{1}{3}U_n \ ; \quad U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n \ .$$

c) Montrons que pour tout n, $U_n = (1 - i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n$; donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = 1 - i$; donc pour tout $n \geq 0$, $U_n = U_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = (1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3) On pose $Z_n = X_n + i\,Y_n$.

a) Exprimons X_n et Y_n en fonction de n.

Pour tout $n \geq 0$, $U_n = Z_{n-i} = (1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; donc $Z_n = U_n + i = (1-i)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + i$;

$$Z_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n + i = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]i = X_n + Y_n\,i$$; on en déduit que :

$$X_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } Y_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \ .$$

b) Etudions la convergence des 2 suites (X_n) et (Y_n).

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \ ; \ \left(\text{car } \ 0 < \frac{1}{3} < 1\right) \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} Y_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 \ .$$

Donc la suite (X_n) est convergente et converge vers 0 et la suite (Y_n) est convergente et converge vers 1.

c) On admet le résultat suivant : « Si $Z_n = X_n + Y_n\,i$.et si les suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes, alors la suite (Z_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n + i\left(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\right)$ ».

Donnons alors la limite de la suite (Z_n) s'il y a lieu.

Les deux suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes et convergent respectivement vers 0 et 1, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} X_n + i\left(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\right) = i$.

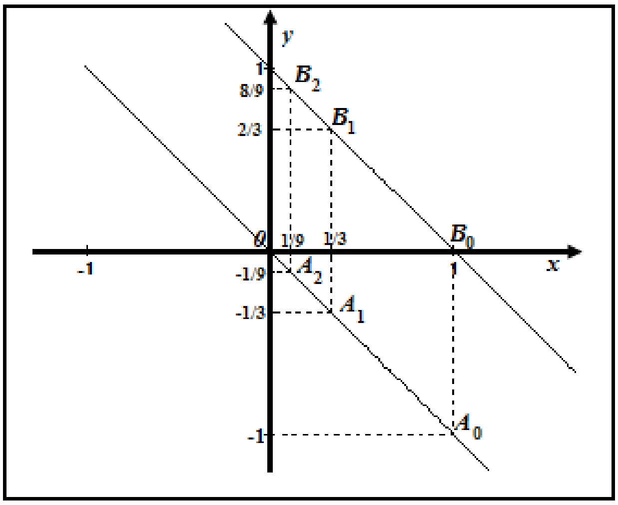
4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité 3 cm).

On désigne par A_n le point d'affixe U_n, par B_n le point d'affixe Z_n et par B le point d'affixe i.

a) Plaçons les points A_0, A_1, A_2 et B_0, B_1, B_2 dans le repère.

D'après les résultats des questions précédentes, on a :

$A_0(1,-1)$; $A_1\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ et $A_2\left(\frac{1}{9},-\frac{1}{9}\right)$; $B_0(1,0)$; $B_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ et $B_2\left(\frac{1}{9},\frac{8}{9}\right)$.



b) Calculons le module d_n de U_n et un argument θ_n de U_n.

Pour tout $n \geq 0$,

$$d_n = |U_n| = \left|(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{\sqrt{2}}{3^n} \text{ et } \theta_n = \arg(U_n) = \arg\left[(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$$

c) Montrons que les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ sont alignés.

- Pour tout $n \geq 0$, $\theta_n = \arg(U_n) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$; θ_n est constant, or

  $\theta_n = \left(\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_n}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$; donc on a $\left(\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_n}\right) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$ quelque soit $n \geq 0$; ce qui prouve que tous les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ sont sur la droit (OA_0) avec $A_0(1, -1)$.
- On pourrait aussi utiliser l'outil des nombres complexes en interprétant géométriquement l'argument du nombre complexe $\frac{U_{n+1}-U_n}{U_{n+2}-U_n} = \frac{3}{4}$ quelque soit $n \geq 0$; $\arg\left(\frac{U_{n+1}-U_n}{U_{n+2}-U_n}\right) = \left(\overrightarrow{A_nA_{n+2}},\ \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = 0(2\pi)$; ce qui traduit que les points A_n, A_{n+1} et A_{n+2} sont alignés quelque soit $n \geq 0$. Donc tous les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ sont alignés.

d) Montrons que pour tout n, B_n est l'image de A_n par une transformation du plan dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

Pour tout $n \geq 0$, $U_n = Z_{n-i}$; donc pour tout $n \geq 0$, $Z_n = U_n + i$, ce qui traduit que le point B_n est l'image du point A_n par la translation de vecteur d'affixe i.

e) Montrons que les points $B_0,\ B_1,\ B_2, \cdots, B_n$ sont alignés.

Pour tout $n \geq 0$, B_n est l'image de A_n par la translation de vecteur d'affixe i ; or tous les points $A_0,\ A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ sont sur la droit (OA_0) ; donc tous les points $B_0,\ B_1,\ B_2, \cdots, B_n$ appartiennent à l'image de la droite (OA_0) par la translation de vecteur d'affixe i et comme l'image d'une droite par une translation est une droite, alors les points $B_0,\ B_1,\ B_2, \cdots, B_n$ sont tous situés sur une même droite ; donc tous les points $B_0,\ B_1,\ B_2, \cdots, B_n$ sont alignés.

f) Donnons les positions limites des points (B_n) et (A_n) lorsque n devient de plus en plus grand.

D'après les résultats de la question 3) c), on a $\lim_{n\to+\infty} Z_n = \lim_{n\to+\infty} X_n + i\left(\lim_{n\to+\infty} Y_n\right) = i$. Donc lorsque n devient de plus en plus grand, B_n s'approche du point d'abscisse i ; d'où la position limite des points (B_n) lorsque n devient de plus en plus est le point B d'affixe i.

De même, on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc la position limite des points (A_n) lorsque n devient de plus en plus grand est l'origine O du repère.

<u>Exercice 8–10</u>

1) *Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point ; plan d'étude d'une fonction numérique ; Construction de courbe de fonction ; Principe de localisation.*
2) *Encadrements dans $\mathbb{R}$; Inégalité de la moyenne.*
3) *Raisonnement par récurrence ; Condition de convergence d'une suite monotone ; Limites de suites par comparaison ; Propriétés algébriques de ln.*

<u>Solution</u>

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} - x + e^{x-1} & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = \frac{3}{2} - x + \ln(2x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases} ;$$

(C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudions la continuité puis la dérivabilité de f en 1.

- $f(1) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{2} - x + e^{x-1}\right) = \frac{1}{2} = f(1)$ et

  $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{3}{2} - x + \ln(2x-1)\right) = \frac{1}{2} = f(1)$; donc f est continue en 1.

- $$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\left(\frac{1}{2} - x + e^{x-1}\right) - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-x+e^{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1} - 1\right) = 1-1 = 0$$

  $$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\left(\frac{3}{2} - x + \ln(2x-1)\right) - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{1-x+\ln(2x-1)}{x-1}$$

  $$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\ln(2x-1)}{x-1} - 1\right) = \lim_{X\to1^+}\left(2\frac{\ln(X)}{X-1} - 1\right) = 2-1 = 1$$

  f est dérivable à gauche et à droite de 1, mais $f'_g(1) = 0 \neq 1 = f'_d(1)$; donc f n'est pas dérivable en 1.

  En donnons une conséquence graphique.

  f n'est pas dérivable en 1 mais l'est à gauche et à droite de 1, avec $f'_g(1) = 0$; $f'_d(1) = 1$; donc la courbe (C_f) de f admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes de pentes respectives 0 à gauche et 1 à droite.

b) Etudions le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

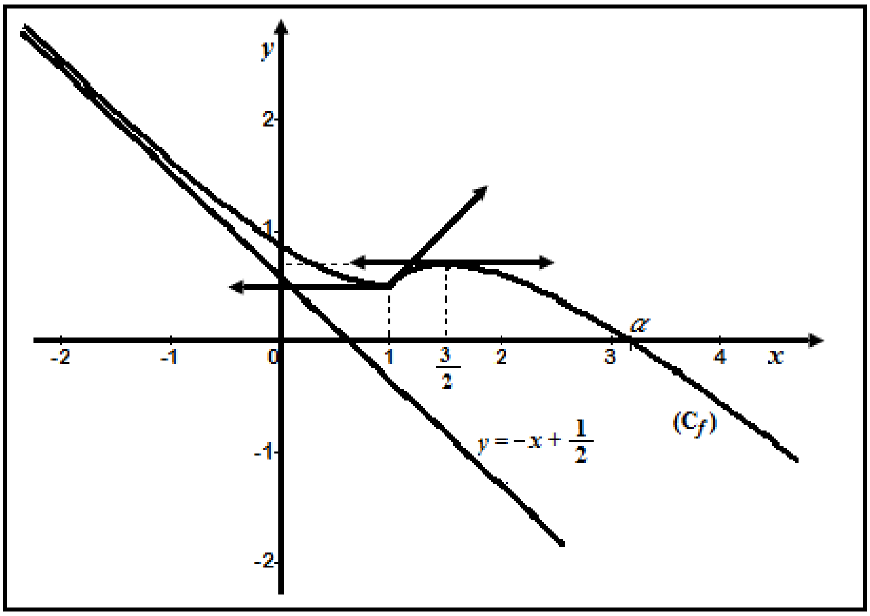
- f est définie sur $\mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - x + e^{x-1}\right) = +\infty$, $\left(\text{car } \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - x + \ln(2x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{2x} - 1 + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \times \frac{2x-1}{x}\right) = -\infty$$

- f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (car f est dans chaque cas, la somme d'une fonction polynôme et de fonctions composées dérivables) ;
  Sur $]-\infty, 1[$, $f'(x) = -1 + e^{x-1}$; $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 1$ et sur $]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$.
  Sur $]1, +\infty[$, $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{3-2x}{2x-1}$; $f'(x) = 0$ équivaut $x = \dfrac{3}{2}$; $f'(x) \geq 0$ sur $\left]1, \dfrac{3}{2}\right]$ donc f est croissante sur $\left]1, \dfrac{3}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$, donc f est décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
- Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 \Vert 1$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

c) Traçons la courbe représentative (C_f) dans le repère. On précisera son allure au voisinage du point d'abscisse 1, et on tracera son asymptote oblique.
On a effectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$; ce qui traduit que la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) à $-\infty$.



d) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]3, 4[$.
D'après le tableau de variation de f, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur l'intervalle $[3, 4]$; de plus $f(3) = -\frac{3}{2} + \ln 5 \approx -1{,}5 + 1{,}6 = 0{,}1 > 0$ et $f(4) = -\frac{5}{2} + \ln 7 \approx -2{,}5 + 1{,}9 = -0{,}6 < 0$; $f(3) \times f(4) < 0$; donc d'après le principe de localisation appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[3, 4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]3, 4[$.

e) Montrons que $\alpha = \dfrac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$.

On a $f(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in \left]3, 4\right[$; c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} - \alpha + \ln(2\alpha - 1) = 0$; donc

$\alpha = \dfrac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$.

2) Soit g la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{3}{2} + \ln(2x - 1)$.

a) Calculons $g(\alpha)$.

$g(\alpha) = \dfrac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$ or $\alpha = \dfrac{3}{2} + \ln(2\alpha - 1)$; donc $g(\alpha) = \alpha$.

b) Montrons que si $x \in [3, 4]$, alors $g(x) \in [3, 4]$.

Pour tout $x \in [3, 4]$ c'est-à-dire $3 \leq x \leq 4$, on a $5 \leq 2x - 1 \leq 7$ $(2 > 0)$; donc $\ln 5 \leq \ln(2x - 1) \leq \ln 7$ (car la fonction ln est croissante sur [3, 4]) et enfin on a :

$\dfrac{3}{2} + \ln 5 \leq \dfrac{3}{2} + \ln(2x - 1) \leq \dfrac{3}{2} + \ln 7$ or $\dfrac{3}{2} + \ln 5 \approx 3,1$ et $\dfrac{3}{2} + \ln 7 \approx 3,4$;

$g(x) = \dfrac{3}{2} + \ln(2x - 1)$; donc $3 \leq g(x) \leq 4$.

Par conséquent si $x \in [3, 4]$, alors $g(x) \in [3, 4]$.

c) Montrons que si $x \in [3, 4]$, alors $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.

g est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 1$; $g'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$ donc si $x \in [3, 4]$ c'est-à-dire $3 \leq x \leq 4$, on a $5 \leq 2x - 1 \leq 7$

$(2 > 0)$; $\dfrac{2}{7} \leq \dfrac{2}{2x - 1} \leq \dfrac{2}{5}$; soit $-\dfrac{2}{5} \leq 0,3 \leq g'(x) \leq \dfrac{2}{5}$; donc si $x \in [3, 4]$, alors $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.

En déduisons que pour tout $x \in [3, 4]$, alors $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{2}{5}|x - \alpha|$.

Comme pour tout $x \in [3, 4]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$; alors d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction g' sur l'intervalle $[\alpha, x] \subset [3, 4]$, on a : $\left|\int_{\alpha}^{x} g'(x)\,dx\right| \leq \dfrac{2}{5}|x - \alpha|$ c'est-à-dire

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \dfrac{2}{5}|x - \alpha|$ ou $|g(x) - \alpha| \leq \dfrac{2}{5}|x - \alpha|$; $(g(\alpha) = \alpha)$.

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrons que pour tout naturel n, $3 \leq U_n \leq 4$.

- $U_0 = 3$ et $3 \leq 3 \leq 4$; donc $3 \leq U_0 \leq 4$
- Supposons que pour un n donné $n \geq 0$, $3 \leq U_n \leq 4$ et montrons que $3 \leq U_{n+1} \leq 4$.

  Si $3 \leq U_n \leq 4$, alors d'après la question 2) b) $3 \leq g(U_n) \leq 4$; c'est-à-dire $3 \leq U_{n+1} \leq 4$
- En conclusion pour tout naturel n, $3 \leq U_n \leq 4$.

b) Montrons que la suite (U_n) est croissante.

Utilisons le raisonnement par récurrence : pour montrer que pour tout $n \geq 0$,
$U_{n+1} - U_n \geq 0$

- Pour $n = 0$, $U_1 - U_0 = \dfrac{3}{2} + \ln 5 - 3 = 3,1 - 3 = 0,1 \geq 0$; donc $U_1 - U_0 \geq 0$;
- Supposons que pour un n donné $n \geq 0$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et montrons que $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$; $U_{n+1} - U_n \geq 0$ équivaut à $U_{n+1} \geq U_n$ ce qui donne

$2U_{n+1}-1\geq 2U_n-1$; (ln étant croissante) on a $\frac{3}{2}+\ln\left(2U_{n+1}-1\right)\geq\frac{3}{2}+\ln\left(2U_n-1\right)$; soit $U_{n+2}\geq U_{n+1}$; donc $U_{n+2}-U_{n+1}\ \geq 0$.

(On pouvait ici étudier le sens de variation de g sur [3, 4] et l'utiliser)

- En conclusion pour montrer que pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1}-U_n\ \geq 0$.

En déduisons la convergence de la suite (U_n).

Comme la suite (U_n) est majorée (par 4) (car pour tout naturel n, $3\leq U_n\leq 4$), et qu'elle est croissante, alors elle est convergente.

c) Montrons que pour tout naturel n, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\left|U_n-\alpha\right|$.

On sait que pour tout naturel n, $3\leq U_n\leq 4$ et donc d'après la question 2) c) on a $\left|g\left(U_n\right)-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\left|U_n-\alpha\right|$ c'est-à-dire $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\left|U_n-\alpha\right|$; donc pour tout naturel n, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\left|U_n-\alpha\right|$.

d) En déduisons que pour tout naturel n, $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- Pour n = 0, $\left|U_0-\alpha\right|=\left|3-\alpha\right|\leq 4-3$; $\left|U_0-\alpha\right|\leq 1$ or $1=\left(\frac{2}{5}\right)^0$ donc $\left|U_0-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^0$
- Supposons que pour un n, $n \geq 0$, $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et montrons que $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.

  On a pour tout naturel n, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\left|U_n-\alpha\right|$; donc $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$; c'est-à-dire $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.
- En conclusion, pour tout n, $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Déterminons la limite de la suite (U_n).

Pour tout n, $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$; $\left(\text{car } 0<\frac{2}{5}<1\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

e) Déterminons la plus petite valeur p de n pour laquelle U_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Pour tout n, $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n$; U_n serait une valeur approchée de α à 10^{-4} près lorsque $\left(\frac{2}{5}\right)^n\leq 10^{-4}$ (comme ln est croissante (strictement) sur]0, + ∞[) on a :

n (ln 2 – ln 5) $\leq -$ 4 (ln 2 + ln 5) ; ce qui donne $n \geq$ 10, 22 ; donc la plus petite valeur p de n pour laquelle U_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près est 11.

Exercice 8–11

Partie A

1) *Dérivabilité et monotonie d'une fonction numérique*
2) *Définition d'extremum d'une fonction*

Partie B

1) *Définition de la continuité ; de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquence graphique*

de la dérivabilité d'une fonction en un point.

2) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; Principe de localisation (par exemple)*
3) *Equation de tangente à une courbe de fonction en un point d'abscisse donné ; Construction de courbe de fonction*

Partie C

1) *Définition de primitive d'une fonction s'annulant en un point*
2) *Comparaison de deux réels ; Propriétés algébriques de l'intégrale*
3) *Comparaison de réels ; Calcul d'intégrale par primitivation ; Limites de fonction par comparaison ; tableau de variation d'une fonction ; Construction d'une courbe de fonction.*
4) *Comparaison de réels ; Propriétés algébrique des intégrales.*
5) *Inégalités de la moyenne ; Théorème des gendarmes ; Propriétés algébriques des intégrales.*

Solution

Partie A :

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x - 1$.

1) Etudions le sens de variations de g.
   - g est définie sur $]0, +\infty[$.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1-\ln x) = +\infty$;

     $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x-1-\ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.
   - g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et pour tout $x > 0,\ g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
   - Pour tout $x \in\ ]0, 1],\ g'(x) \leq 0$; donc g est décroissante sur $]0, 1]$. Pour tout $x \in [1, +\infty[,\ g'(x) \geq 0$; donc g est croissante sur $[1, +\infty[$.
2) En déduisons le signe de $g(x)$; puis celui de $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   - La fonction g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$; donc elle présente un minimum absolu en 1 de valeur $g(1) = 0$; ce qui se traduit par : pour tout $x > 0$, $g(x) \geq g(1)$ donc pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
   - Pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$ équivaut à $x-\ln x-1 \geq 0$; donc $x-\ln x \geq 1$ par conséquent pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$ $x - \ln x > 0$

Partie B :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité 2 cm).

1) a) Etudions la continuité de f en 0.

   $f(0) = -1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x-\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\dfrac{x}{\ln x}-1}\right) = \dfrac{1}{0-1} = -1 = f(0)$; donc f est continue en 0.

   b) Etudions la dérivabilité de f en 0 ; puis en donnons une interprétation géométrique.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x-\ln x}\right) = 0$; donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_g(0) = 0$
   - On en déduit que la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0, une demi tangente horizontale d'équation $y = -1$.
2) a) Etudions le sens de variations de f et dressons son tableau de variations.
   - f est définie sur $[0, +\infty[$; $f(0) = -1$

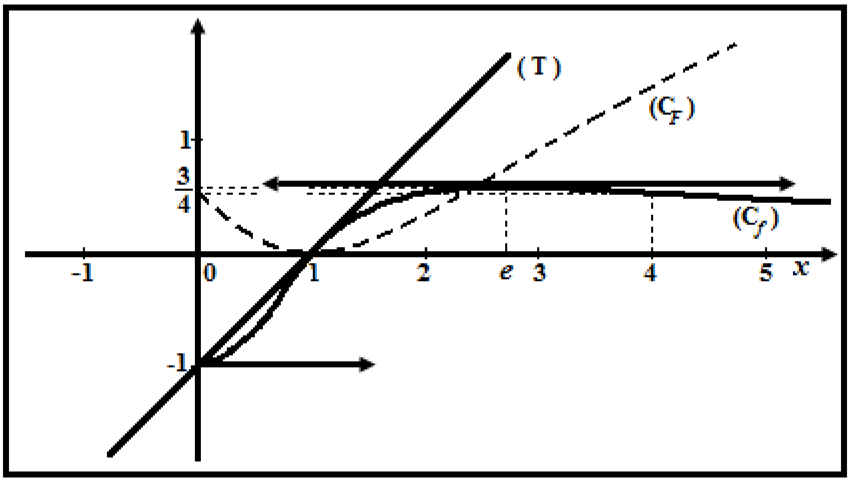
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x-\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{x}{\ln x}-1}\right) = 0\ ;\ \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = +\infty\right)$$

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$.
- Pour tout $x \in]0, e]$, $f'(x) \geq 0$; donc f est croissante sur $]0, e]$. Pour tout $x \in [e, +\infty[$, $f'(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$.
- Tableau de variations de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

b) Précisons le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.
D'après le tableau de variation de f, f est continue et strictement croissante sur $[0, e]$ et $f(0) = -1$; $f(e) = \dfrac{1}{e-1} > 0$; donc d'après le principe de localisation, il existe une seule solution $\alpha \in]0, e[$ de l'équation $f(x) = 0$; or $f(1) = 0$; donc $\alpha = 1$. Par conséquent $f(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[1, e]$; de plus sur $[e, +\infty[$, on a $f(x) > 0$ puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. En définitive $f(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$,

3) a) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.
b) Construisons la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le repère.



Partie C :

On pose pour tout $x \geq 0$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$; on ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

On désigne par (C_F) sa courbe représentative dans le repère.

1) a) Ce que représente F pour la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
Par définition la fonction F représente la primitive de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
b) Précisons le sens de variations de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
On a $F'(x) = f(x)$ or d'après les résultats à la question 2) b) de la partie B) ;
$f(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$; donc :

F est décroissante sur [0, 1] et croissante sur $[1, +\infty[$.

2) a) En utilisant la fonction g, montrons que, pour tout t appartenant à l'intervalle] 0, 1], on a : $-1 \leq f(t) \leq t-1$.

- Pour tout $t \in]0, 1]$, on a $f(t)+1 = \dfrac{t}{t-\ln t}$; or d'après les résultats de la question 2) de la partie A, $t - \ln t > 0$ pour tout $t > 0$; donc $f(t) + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $f(t) \geq -1$.
- De même pour tout $t \in]0, 1]$, on a $f(t)-t+1 = \dfrac{t(-t+1+\ln t)}{t-\ln t} = \dfrac{t[-g(t)]}{t-\ln t}$; or $g(t) \geq 0$ (question partie A, 2)) et, $t - \ln t > 0$ pour tout $t > 0$; donc pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t)-t+1 \leq 0$ c'est-à-dire $f(t) \leq t-1$.
- Par conséquent pour tout $t \in]0, 1]$, $-1 \leq f(t) \leq t-1$.

b) Vérifions que cette double inégalité est encore vraie pour $t = 0$.
On a $f(0) = -1$ et $-1 \leq -1 \leq -1$; donc $-1 \leq f(0) \leq 0 - 1$.

c) En déduisons que $\dfrac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$; puis donnons une valeur approchée de $F(0)$.

- On a pour tout $t \in]0, 1]$, $-1 \leq f(t) \leq t-1$; en intégrant ces inégalités entre 0 et 1, on obtient : $-1\int_0^1 dt \leq \int_0^1 f(t)\, dt \leq \int_0^1 (t-1)dt$, ou encore $-1[t]_0^1 \leq -F(0) \leq \left[\dfrac{1}{2}t^2 - t\right]_0^1$.

  C'est-à-dire $-1 \leq -F(0) \leq -\dfrac{1}{2}$. Donc $\dfrac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$.
- Une valeur approchée de $F(0)$ est : $F(0) = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{2} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

3) a) Montrons que pour tout $t \geq 1$, on a : $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t)$.

Pour tout $t \geq 1$, $t - \ln t > 0$; $\dfrac{\ln t}{t} - f(t) = \dfrac{-(\ln t)^2}{t(t-\ln t)} \leq 0$; donc pour tout $t \geq 1$,

$\dfrac{\ln t}{t} - f(t) \leq 0$ c'est-à-dire $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t)$.

b) Calculons $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t} dt$; en déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

- $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t} dt = \int_1^x \dfrac{1}{t} \times \ln t\ dt = \left[\dfrac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$.
- On a pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t)$; donc pour tout $x \geq 1$, on a $\int_1^x \dfrac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x f(t)\, dt$; c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x)$. On a ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right] = +\infty$; donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

c) Dressons le tableau de variations de F.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Proposons une construction de la courbe (C_F) dans le repère.
(Voir la courbe (C_F) en pointillés sur la figure en 3) b))

4) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

a) Montrons que pour tout $t \geq 1$, on a $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

- D'après la question 3) a) de la partie C on a pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t)$;
- D'autres parts pour tout $t \geq 1$, $f(t) - t + 1 = \dfrac{t\,(-t+1+\ln t)}{t - \ln t} = \dfrac{t\left[-g(t)\right]}{t-\ln t}$ or $g\,(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$ (question partie A, 2)), et $t - \ln t > 0$ pour tout $t > 0$; donc pour tout $t > 0$, $f(t) - t + 1 \leq 0$ c'est-à-dire $f(t) \leq t-1$.
- En conclusion pour tout $t \geq 1$, on a $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

b) En déduisons un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ (en cm^2) du domaine (D).

L'aire $\mathcal{A}$ (en cm^2) du domaine (D) est $\mathcal{A} = 4\int_1^4 f(t)\,dt$ et comme pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\ln t}{t} \leq f(t) \leq t-1$, on a alors $4\int_1^4 \dfrac{\ln t}{t}dt \leq 4\int_1^4 f(t)\,dt \leq 4\int_1^4 (t-1)\,dt$;

$$4\int_1^4 \frac{\ln t}{t}dt = 4\int_1^4 \frac{1}{t}\times \ln t\ dt = 4\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^4 = 2\ln^2 4 = 8(\ln 2)^2$$

$$4\int_1^4 (t-1)\,dt = 4\left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^4 = 4\left(4 + \frac{1}{2}\right) = 18$$

En conclusion un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine (D) est :

$8(\ln 2)^2 \leq \mathcal{A} \leq 18$

5) On définit la suite (U_n) par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ pour tout naturel $n \geq 1$.

a) Montrons que pour tout $n \geq 3$, $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.

La fonction f est d'après les résultats de la question partie B 2) a) strictement décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$, donc sur $[n, n+1]$ ($n \geq 3$), f est strictement décroissante ; par conséquent quelque soit $t \in [n, n+1]$, $f(t) \in [f(n+1), f(n)]$ c'est-à-dire $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$; en appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur l'intervalle $[n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$; ($n + 1 - n = 1$) donc pour tout $n \geq 3$, $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.

b) En déduisons la convergence de la suite (U_n).

On a pour tout $n \geq 3$, $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$; d'après les résultats de la partie B) 2) a) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$; donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ la suite (U_n) est alors convergente et converge vers 0.

c) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$; exprimons S_n en fonction de F; puis calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

- Par définition $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} = \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt$ donc $S_n = \int_1^n f(t)\,dt = F(n)$
- D'après Partie C) 3) b) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$.

__CHAPITRE 9__

COURBES PARAMETREES DU PLAN

L'idée de courbe est connue depuis bien longtemps des mathématiciens du $13^{\text{ème}}$ siècle.
Plusieurs courbes furent découvertes et construites :

- **__Les courbes cycloïdales__** :(la cycloïde ; l'épicycloïde ; l'hypocycloïde ; la cardioïde ; la néphroïde ; l'astroïde):

  En 1599, Galilée aurait été le premier à étudier une courbe particulière qu'il nomma cycloïde. Mais, sa construction aurait été mentionnée par Charles de Bovelles.
- **__Les courbes isochrones__** :
- **__Les courbes spirales__** : **__les courbes sinusoïdales__** ; **__La strophoïde__ …** ;

Plusieurs de ces courbes ont fait l'objet de nombreuses études en Physiques, notamment en cinématique, après l'introduction des coordonnées polaires.
Les mathématiciens s'en sont servis pour les besoins de la construction de ces courbes.
En 1684 Leibniz « dans un manuscrit de *1684* », pour indiquer toute quantité qui varierait d'un point à un autre d'une *courbe*: par exemple la longueur de la tangente, etc… a employé le mot « fonction » C'est encore Leibniz qui introduisit les termes «constante», « variable» et enfin «*paramètre*», ce dernier ayant été employé dans le développement d'une famille de *courbes*.
Des scientifiques plus récemment ont créé des courbes qui portent encore leur nom :

- **Les courbes de Lissajous ;** créées par Jules Antoine Lissajous, physicien français (1822-1880).
- **Les courbes de Bézier ;** créées par Pierre Bézier vers 1962….

Les courbes paramétrées véritables fusion entre les fonctions vectorielles : fonction $\vec{f}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, par $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$ et les courbes planes ont été récemment introduites dans l'enseignement au $18^{\text{ème}}$ siècle. Elles sont beaucoup utilisées en cinématique, en optique, en médecine….

__CE QU'IL FAUT RETENIR__

A) __DEFINITIONS__

I) __Courbes paramétrées du plan.__

1) __Définition__

(*Outil pour déterminer les coordonnées d'un point mobile par exemple*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ du plan tels que : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in I$

est appelé courbe paramétrée de paramètre t ; le point M est noté $M(t)$ et ses coordonnées sont notées $x(t)$ et $y(t)$: $M(t)\big(x(t), y(t)\big)$.

2) __Exemples__.

1) L'ensemble (D) des points $M(x, y)$ du plan tels que : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1)$ et passant par le point $A(1, 3)$. La relation $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite (D).

2) L'ensemble (C) des points $M\,(x, y)$ du plan tels que : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

est le cercle de centre O (0, 0) et de rayon 1. (Car on a $x^2 + y^2 = 1$)

II) Vecteur dérivé.

Soit (Γ) : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$: $t \in$ I ; une courbe paramétrée.

1) Définition.

(*Outil pour déterminer les coordonnées du vecteur dérivé ou d'un vecteur directeur d'une tangente à la courbe en un point donné*)

Si les fonctions $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ sont dérivables sur I, alors pour tout $t_0 \in$ I,

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$ est un vecteur appelé vecteur dérivé au point $M(t_0)\big(x(t_0), y(t_0)\big)$. Il est un vecteur directeur de la tangente à (Γ) au point $M(t_0)\big(x(t_0), y(t_0)\big)$.

2) Tangente à la courbe (Γ) au point $M(t_0)\big(x(t_0), y(t_0)\big)$.

(*Outil pour déterminer une équation de tangente à la courbe en un point donné*)

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$ est le vecteur dérivé au point $M(t_0)$; (Δ) est la tangente à (Γ) au point $M(t_0)$.

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$		**Tangente (Δ) à la courbe (Γ) au point** $M(t_0)\big(x(t_0), y(t_0)\big)$
Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$	alors	(Δ) a pour pente : $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$; (Δ) est oblique
Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$	alors	(Δ) a pour équation : $x = x(t_0)$ (Δ) est verticale
Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$	alors	(Δ) a pour équation : $y = y(t_0)$ (Δ) est horizontale
Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$	alors	(Δ) est souvent précisée dans l'énoncé

III) Etude des fonctions *x* et *y*.

L'étude des deux fonctions *x* et *y* se fait conjointement comme des fonctions numériques à une variable.

Un tableau de variations conjoint est alors dressé comportant en première ligne, les valeurs particulières de *t* (bornes (finies) de l'ensemble d'étude des deux fonctions, valeurs de *t* qui annulent *x'* (*t*), celles qui annulent *y'* (*t*) …).

Il est souvent conseillé d'avoir les lignes *x* (*t*) et *y* (*t*) côte à côte pour avoir une meilleure idée de l'allure de la courbe (Γ).

Exemple : On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par $\begin{cases} x(t) = -2t^2 + t \\ y(t) = -4t^2 + 4t \end{cases}$; $t \in [0, 1]$.

Etudier les fonctions coordonnées *x* et *y* et dresser un tableau de variations conjoint.

Solution : Les fonctions *x* et *y* sont dérivables sur [0, 1] en tant que fonctions polynômes et pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$x'(t) = -4t + 1$ et $y'(t) = -8\,t + 4$. $x'(t) = 0$ équivaut à $t = \dfrac{1}{4}$ et *x* est croissante sur

$\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{4},\ 1\right]$; $y'(t) = 0$ équivaut à $t = \frac{1}{2}$ et y est croissante sur $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$.

Tableau de variations conjoint des fonctions x et y.

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-3
$y'(t)$	4	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

B) INTERPRETATION CINEMATIQUE

I) Trajectoire d'un point mobile

(*Outil pour déterminer une équation de la trajectoire d'un point mobile dans un repère*)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point $M(t)\big(x(t), y(t)\big)$ désigne un point mobile avec t appartenant à un intervalle de temps I.

La courbe (Γ) définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in$ I, est appelée la trajectoire du point mobile $M(t)$.

Son équation cartésienne de la forme $y = \varphi(x)$ s'obtient en « se débrouillant » pour trouver une relation entre x et y. Dans certains cas, on tire généralement t dans l'expression de $x(t)$ en fonction de x et on le remplace dans $y(t)$.

Exemple : Un point $M(t)\big(x(t),\ y(t)\big)$ est considéré comme un point mobile sur une courbe

(Γ) définie par $\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} + 1 \end{cases}$; $t > 0$.

Déterminer une équation cartésienne de trajectoire (Γ) du mobile.

Solution : On a $x = e^t - 1$; donc $t = \ln(x + 1)$ (t étant strictement positif, $x > 0$) et alors $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x} + 1$; une équation cartésienne de (Γ) est $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x} + 1$; avec $x > 0$.

II) Vecteur vitesse du mobile ; Vecteur accélération

(*Outil pour déterminer les coordonnées du vecteur vitesse et accélération d'un mobile*)

Le vecteur dérivé $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$ est appelé vecteur vitesse du mobile à l'instant t_0.

Le vecteur $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)\big(x''(t_0),\ y''(t_0)\big)$ est appelé vecteur accélération du mobile à l'instant t_0.

C) CONSTRUCTION D'UNE COURBE PARAMETREE DU PLAN.

(*Outil pour construire une courbe paramétrée dans un repère*)

Soit (Γ) : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in$ I ; une courbe paramétrée ; $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ désignent les fonctions coordonnées.

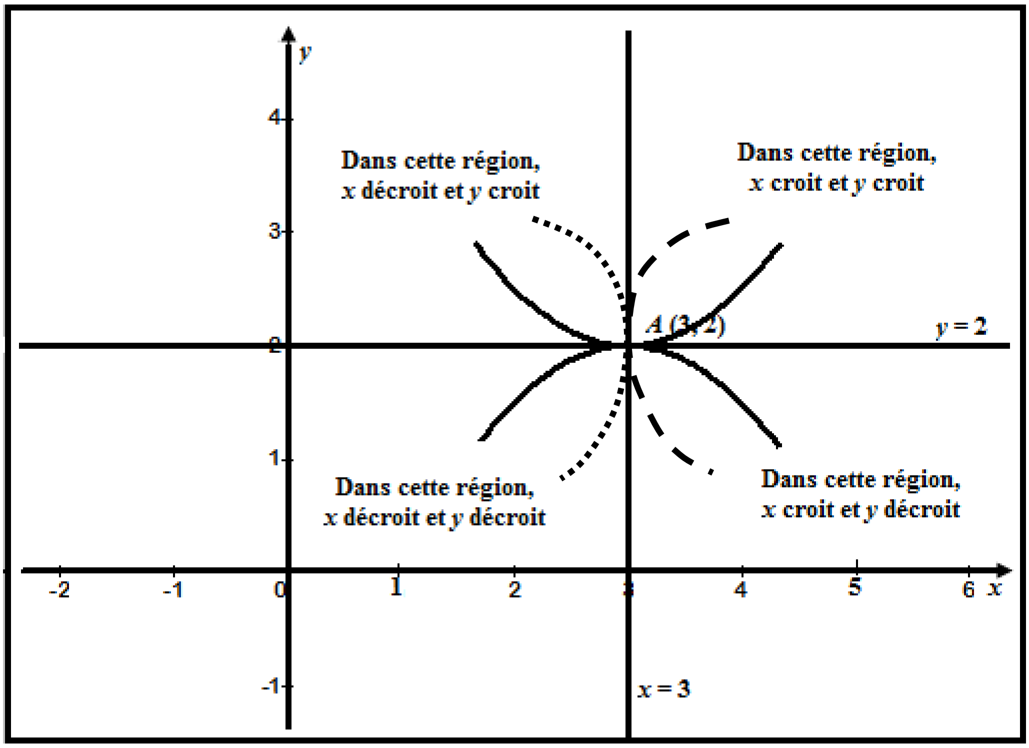
<u>Eléments de symétries de</u> (Γ).

Propriétés des fonctions *x* et *y*.	**Relations entre les points**	**Conséquence graphique**	**Intervalle d'études des fonctions *x* ; *y***
Si $\begin{cases} x(t+p)=x(t) \\ y(t+p)=y(t) \end{cases}$	$M(t+p)=M(t)$	(Γ) est complète sur $I \cap \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$	sur $I \cap \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$
Si $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$	$M(-t)=M(t)$	(Γ) est complète sur $I \cap [0, +\infty[$	sur $I \cap [0, +\infty[$
Si $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$	$M(-t)=S_{(Ox)}(M(t))$	l'axe (Ox) est axe de symétrie de (Γ)	sur $I \cap [0, +\infty[$
Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$	$M(-t)=S_{(Oy)}(M(t))$	l'axe (Oy) est axe de symétrie de (Γ)	sur $I \cap [0, +\infty[$
Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$	$M(-t)=S_O(M(t))$	le point O est centre de symétrie de (Γ)	sur $I \cap [0, +\infty[$

Enfin pour tracer une courbe paramétrée, dans un repère complet :

- ✓ placer ses points particuliers,
- ✓ tracer les tangentes (verticales, horizontales ou obliques) en chacun de ses points,
- ✓ puis commencer à partir d'un point du plan (généralement le premier point mis en évidence dans le tableau de variation conjoint), à tracer la courbe en suivant son allure sur le tableau de variations.

La figure ci-dessous pourrait vous aider. Pour joindre un autre point à partir d'un point, faite attention à la position de la tangente à la courbe en ces points.
Par exemple à partir du point $A(3, 2)$, on a dans chaque région que les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2$ ont délimitées, les situations suivantes : des positions possibles de la courbe.



EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

Exercice 9-1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$. (Unité 2 cm)

On considère la courbe (C) définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$; $t \in [-4,\ 4]$.

1) Etudier conjointement les variations sur [–4, 4] des fonctions *x* et *y*.
2) Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
3) a) Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes (*Ox*) et (*Oy*).
   b) Donner un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus s'il y a lieu.
4) Placer les différents points obtenus en 2) et en 3), tracer les tangentes en ces points, puis tracer la courbe (C) dans le repère.

Exercice 9-2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (C) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$; $t \in [-2,\ 2]$.

On note *M* (*t*) le point de coordonnées $(x(t),\ \ y(t))$.

1) Comparer les positions des points *M* (– *t*) et *M* (*t*). Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
2) Soit (C') la partie de la courbe (C) correspondant à $t \geq 0$.
   a) Etudier le sens de variations de chacune des fonctions *x* et *y* ; et dresser un tableau de variations conjoint pour *x* et *y* pour tout $t \geq 0$.
   b) Déterminer les équations de tangentes à (C') aux points *M* (0) et *M* (1).
3) Tracer la courbe (C') ; puis en justifiant, tracer la courbe (C) dans le repère.

Exercice 9-3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \cos\ t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note *M* (*t*) le point de coordonnées $(x(t),\ \ y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points *M* ($t + 2\pi$) et *M* (*t*) ; des points *M* (– *t*) et *M* (*t*) et celles des points *M* ($\pi - t$) et *M* (*t*).

   b) En déduire que les fonctions *x* et *y* peuvent être étudiées sur l'intervalle $\left[\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\ \right]$.

2) a) Etudier les variations des fonctions *x* et *y* sur l'intervalle $\left[\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\ \right]$.

   b) Dresser un tableau de variations conjoint de *x* et *y*.

3) a) Préciser les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points *M* (0), $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,

   $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Tracer ces tangentes ainsi que la partie (Γ_1) de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; puis construire en justifiant la courbe (Γ) dans le repère.

Exercice 9-4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), \ y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$; des points $M(-t)$ et $M(t)$ et celles des points $M(\pi - t)$ et $M(t)$.

   b) En déduire que les fonctions x et y peuvent être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.

3) a) Préciser les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points $M(0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   b) Tracer ces tangentes ainsi que la partie (Γ_1) de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; puis construire en justifiant la courbe (Γ) dans le repère.

Exercice 9-5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), \ y(t))$.

1) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   a) Comparer les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$; des points $M(-t)$ et $M(t)$ et celles des points $M(\pi - t)$ et $M(t)$.

   b) Expliquer comment obtenir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1) ?

2) a) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.

3) On suppose que $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; soit (T) la tangente à (Γ_1) au point $M(t)$.

   a) Montrer que le vecteur $\vec{u} = \cos 2t \, \vec{i} + \sin 2t \, \vec{j}$ est un vecteur directeur de (T).

On rappelle que : $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ et que

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

b) On admet que le résultat démontré au 3) a) est encore valable pour $t = 0$. Que peut-on dire de la tangente (T) à (Γ_1) au point M (0) correspondant à $t = 0$?

4) Tracer la courbe (Γ_1) puis la courbe (Γ) dans le repère.

Exercice 9-6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos^2 t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t),\ y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$; des points $M(-t)$ et $M(t)$ et celles des points $M\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

b) En déduire des conséquences graphiques pour la courbe (Γ).

2) a) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.

3) a) On suppose que $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; soit (T) la tangente à (Γ) au point $M(t)$.

Montrer que le vecteur $\vec{u} = 4\sin t\,\vec{i} + 3(2\cos 2t - 1)\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de (T).

b) On admet que le résultat montré au 3) a) est encore valable pour $t = \frac{\pi}{2}$.

Préciser les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points M (0), $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Montrer que la courbe (Γ) est inscrite dans un carré dont on précisera les dimensions.

d) Tracer ces tangentes ainsi que la courbe (Γ) dans le repère.

4) a) Montrer que pour tout réel t, $\sin(3t) = \sin t\,(4\cos^2 t - 1)$.

b) En utilisant la relation $x = 3 - 2\cos^2 t$; montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin t = \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

c) Exprimer y en fonction de x.

5) Soit f et F les fonctions numériques définies pour tout $x \in [1, 3]$ par :

$$f(x) = (5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}} \quad\text{et}\quad F(x) = \frac{4}{3}(5-2x)\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^3} + \frac{32}{15}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{x-1}{2}}.$$

a) Montrer que la courbe représentative (C) de f dans le repère est une partie de (Γ) que l'on précisera.

b) Calculer $F'(x)$; que représente F pour f sur [1, 3] ?

6) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \frac{5}{2}$. (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).

a) Calculer l'aire A(D) en cm^2 du domaine (D).

b) Calculer en cm^3, le volume V(D) du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe (Ox).

Exercice 9-7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. (Unité de longueur 1, 5 cm)

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = 3\sin t \\ y(t) = 2\cos t \end{cases}$; $t \in [-\pi, \pi]$.

On note *M* (*t*) le point de coordonnées $\left(x(t),\ \ y(t)\right)$.

1) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   a) Pour tout *t*, comparer les positions des points *M* (– *t*) et *M* (*t*) ; puis celles des points $M\,(\pi - t)$ et *M* (*t*).

   b) Expliquer comment obtenir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1) ?

2) a) Etudier les variations des fonctions *x* et *y* sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b) Dresser un tableau de variations conjoint de *x* et *y*.

3) Montrer que la courbe (Γ) est inscrite dans un rectangle de longueur 6 et de largeur 4.

4) a) Déterminer les équations des tangentes à (Γ) aux points d'intersection de (Γ) avec les axes de coordonnées.

   b) Tracer ces tangentes ; la courbe (Γ_1) ainsi que la courbe (Γ) dans le repère.

5) Soit (D) le domaine plan contenant le point *O* et délimité par la courbe (Γ). (D) subit une rotation autour de l'axe (*Ox*).

   a) Montrer que *x* et *y* vérifient la relation : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

   La courbe (Γ) ainsi tracée est appelée ellipse ; la relation $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ est son équation cartésienne ; l'axe (*Ox)* est appelé axe focal ; 3 est le demi-grand axe ou grand rayon et 2 est le demi-petit axe ou petit rayon. L'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en unité d'aire est $\pi\, a\, b$.

   b) Donner l'aire *A*(D) en cm^2 du domaine (D).

   c) Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe (C), la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ est : $y = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{9 - x^2}$.

   d) Calculer le volume *V*(D) en cm^3 du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe (*Ox*).

Exercice 9-8

Partie A)

On considère la fonction numérique *f* de la variable réelle *x* définie par :

$f(x) = 2\,x\sqrt{\left|\,x^2 - 1\right|}$.

(C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (unité 2 cm).

1) a) Montrer qu'on peut étudier *f* sur E = [0, $+\infty$[.

   b) Etudier la dérivabilité de *f* en 1. En déduire une conséquence graphique.

   c) Etudier le sens de variations de *f* sur E et dresser son tableau de variations.

2) a) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 0.

   b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).

   c) Placer le point d'abscisse $\sqrt{2}$; tracer la courbe (C_f) et la droite (D) dans le repère.

Partie B)

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

1) a) Montrer que la courbe complète (Γ) s'obtient pour $t \in [-\pi, \pi]$.

b) Comparer les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$, puis celles des points $M\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$.

c) En déduire un intervalle d'études pour x et y.

2) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in [0, \pi]$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ_1).

b) Comparer (Γ_1) à la courbe (C_f).

c) En déduire la construction de la courbe (Γ).

Exercice 9-9

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + 1\,; & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 - x\ln x\,; & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. (Unité 2cm)

Partie A)

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0, dont on précisera les équations.

2) a) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Préciser s'il y a lieu les asymptotes à la courbe (C_f).

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse $\alpha \in]3, 4[$.

d) Tracer l'asymptote (ou les asymptotes) (s'il y a lieu), les demi-tangentes au point d'abscisse 0, ainsi que la courbe (C_f) dans le repère.

3) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x) = -x - 1 + x\ln x$ pour tout $x > 0$ et (C_h) sa courbe représentative dans le repère.

a) Sans étudier la fonction h, montrer comment déduire la courbe (C_h) de (C_f).

b) Tracer dans le repère la courbe représentative (C_h) de h.

4) On considère le domaine plan (D) délimité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. (Avec $3 < \alpha < 4$).

a) Déterminer en u.a. l'aire $A(\alpha)$ du domaine (D) sous forme de polynôme en α.

b) (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).
Calculer en u.v. le volume $V(\alpha)$ en fonction de α du solide engendré par cette rotation.

Partie B)

On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies par : $\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = e^t + (1-e^t)\left[t + \ln\left(1-e^{-t}\right)\right] \end{cases}$; pour tout $t > 0$.

1) Vérifier que (Γ) est une partie de (C_f) que l'on précisera.

2) Le point $M(t)$ est considéré comme un point mobile dont les coordonnées sont définies à tout instant t ($t > 0$) par : $x(t)$ et $y(t)$. On admet qu'à l'instant $t = 0$, le point mobile est au point de coordonnées (0, 1) considéré comme point de départ.

a) Indiquer sur la courbe (Γ) le sens de parcours du mobile.

b) A quel instant t le mobile passera-t-il par le point de coordonnées (1, 2) ?

c) Préciser les coordonnées du vecteur vitesse à cet instant.
d) Quelle est la position du mobile à l'instant t = ln (α + 1) ?

<u>Exercice 9-10</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité de longueur 4 cm).

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1+\cos t}{2} \\ y(t) = \dfrac{1+\cos t}{4} \sin t \end{cases}$; $t \in [-\pi, \pi]$.

On note M (t) le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

Partie A :

1) a) Etudier les parités des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
b) En déduire la transformation qui transforme le point M (t) en le point M ($-t$).

2) a) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et montrer que $y'(t) = \dfrac{1}{4}(\cos t + 1)(2\cos t - 1)$.
b) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle [0, π].
c) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.

Partie B :

1) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in [0, \pi]$.
a) Montrer que (Γ_1) a pour équation $y = x\sqrt{x - x^2}$.
b) Montrer que (Γ) est l'union de deux courbes (Γ_1) et (Γ_2).
c) Donner une équation de la courbe (Γ_2).

2) a) Déterminer une équation de la tangente à (Γ_1) au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
b) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$ en 0 et en 1.
c) En déduire une équation de la tangente à (Γ_1) au point M (π).
d) Placer les points M (0), $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, M (π) ; tracer les tangentes à (Γ_1) en ces points et construire la courbe (Γ_1) puis (Γ) dans le repère.

3) Le point M (t) est considéré comme un point mobile dont les coordonnées x (t) et y (t) sont définies à tout instant t de l'intervalle [0, 2π] par :
$x(t) = \dfrac{1+\cos t}{2}$ et $y(t) = \dfrac{1+\cos t}{4} \times \sin t$.
a) Montrer que la trajectoire de M (t) est la courbe (Γ).
b) À quel instant t le mobile passe-t-il par le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$?
c) Préciser les coordonnées du vecteur vitesse à cet instant.
d) En se servant de la figure, indiquer sur la courbe (Γ) le sens de parcours du mobile.

<u>EXERCICES NON CORRIGES</u>

<u>Exercice 9-11</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité 8 cm)

On considère la courbe paramétrée (C) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note M (t) le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$.
   b) En déduire une conséquence analytique pour l'étude des fonctions x et y et une conséquence graphique pour la courbe (C).
2) Etudier alors conjointement les variations des fonctions x et y.
3) a) Déterminer les équations de tangentes à (C) aux points $M(-1)$, $M(0)$ et $M(1)$.
   b) Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[-5, 5]$.

<u>Exercice 9-12</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\cos t} \\ y(t) = \tan t \end{cases}$; $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$.
   b) En déduire s'il y a lieu un élément de symétrie de la courbe (Γ).
2) a) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   b) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.
3) Montrer que x et y vérifient la relation : $x^2 - y^2 = 1$.
4) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) obtenue lorsque t décrit l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ_1) sous la forme $y = f(x)$.
   b) Etudier le sens des variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   c) Construire la courbe (Γ_1) puis (Γ) dans le repère.

<u>Exercice 9-13</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \sin 3t + 3\sin t \\ y(t) = \cos 2t + 2\cos t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ et celles des points $M(-t)$ et $M(t)$.
   b) En déduire qu'on peut étudier les fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.
2) a) Vérifier que $x'(t) = 6\cos 2t \times \cos t$ et que $y'(t) = -2\sin t \times (2\cos t + 1)$.
   b) Dresser le tableau des variations de x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.
3) Tracer la partie (Γ_1) de la courbe (Γ) correspondant à $t \in [0, \pi]$; puis construire en justifiant la courbe (Γ) dans le repère.

<u>Exercice 9-14</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = t - \ln(1+t) \\ y(t) = t\,e^{-t} \end{cases}$; $t \in [0, +\infty[$.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1) a) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   b) Dresser un tableau de variations conjoint de x et y.
2) a) Déterminer les équations des tangentes à (Γ) aux points $M(0)$ et $M(1)$.
   b) L'unité étant 2 cm, tracer les tangentes et la courbe (Γ) dans le repère.
      (On admettra que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (Γ)).
3) La courbe (Γ) représente la trajectoire d'un projectile $M(t)$ lâché à l'instant $t = 0$.

a) Donner les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du projectile $M(t)$ à l'instant t.
b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(0)}$ à l'instant $t = 0$.
c) À partir de quel instant t_1 le projectile M (t) commence à redescendre ?
d) Donner les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du projectile $M(t)$ à cet instant t_1.
e) Indiquer sur la courbe (Γ) le sens de parcours du projectile.

Exercice 9-15 : (BAC – D B.F.)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

Partie A :

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   b) Quelle conséquence graphique peut-on déduire de la dérivabilité de f en 0 ?
2) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :
   $h(x) = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2}$.
   a) Montrer que $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$.
   b) En déduire le signe de $h(x)$ puis la limite de h en $+\infty$.
   c) Déduire des questions précédentes que la droite (D) d'équation $4x - 2y + 1 = 0$ est asymptote à la courbe (C_f).
   d) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).
4) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) en illustrant la conséquence géométrique au point d'abscisse 0 dans le repère.

Partie B :

1) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
   b) Vérifier que sa bijection réciproque g est définie sur K par : $g(x) = \frac{x^2}{2x+1}$.
   c) Construire la courbe (C'_g) de g sans étudier les variations de g. Expliquer la construction.
2) On considère les intégrales I et J suivantes :
   $I = \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} x\ln(-x)\,dx$ et $J = \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} x^2\left[\ln(-x)\right]^2 dx$.
   a) Calculer I par une intégration par parties.
   b) Calculer J par une double intégration par parties.
   c) Vérifier que $8I - 27J = \frac{17}{e^3} - \frac{6}{e^2}$.
3) a) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie (D) du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = -\frac{1}{e}$.
   b) L'espace orienté étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le solide (S) engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{i})$ de la partie (D) du plan.
   Déterminer le volume V de (S) en cm^3.

Partie C :
On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points M (t) dont les coordonnées x (t) et y (t) sont définies par : $\begin{cases} x(t) = -e^t \\ y(t) = -2te^t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1) Vérifier que (Γ) est une partie de (C_f).
2) Montrer qu'en tout point M (t) , (Γ) admet une tangente.
3) En déduire une équation de la tangente à (Γ) au point A de paramètre t = 0.

Exercice 9-16 :
Partie A
On considère l'équation différentielle $y''+4y = 2\cos x$ (1).

1) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2}{3}\cos x$ est solution de l'équation (1).
2) a) Résoudre l'équation différentielle $y''+4y = 0$ (2).
   b) Déterminer la solution f de l'équation (2) qui vérifie f (0) = 0 et $f\,'(0) = \dfrac{2}{3}$.
3) a) Démontrer qu'une fonction g est solution de l'équation (1) si et seulement si la fonction $g - h$ est solution de l'équation (2).
   b) En déduire toutes les solutions de l'équation (1).
   c) Déterminer la solution g de l'équation (1) qui vérifie g (0) = 1 et $g\,'(0) = 0$.

Partie B
Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 9 cm), on considère les points A, B, M, N, Q d'affixes respectives 1, -1, z, z^2, $\dfrac{1}{z}$, z étant un nombre complexe de module 1 et d'argument t, t réel : $z = e^{it}$.

1) Soit S le point d'affixe $Z = z^2 + z + \dfrac{1}{z}$. Montrer que les points B, M et S sont alignés.
2) a) Calculer en fonction t l'affixe du point G tel que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{O}$.
   b) Préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
   c) Préciser la nature de la courbe décrite par le point G lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Partie C

On considère le point G (t) de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}\left(\cos 2t + 2\cos t\right) \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\left(\sin 2t\right) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1) Etudier les positions respectives des points $G\left(t + 2\pi\right)$ et G (t), puis des points G ($-t$) et G (t).
2) En déduire que l'on peut étudier les fonctions x et y sur l'intervalle [0, π].
3) Etudier alors les fonctions x et y sur l'intervalle [0, π] et dresser un tableau de variations conjoint de x et y.
4) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$), ensemble des points G (t), t décrivant $\mathbb{R}$. En particulier préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées.

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 9-1

1) *Sens de variations de fonctions numériques et construction de tableau de variations conjoint.*
2) *Tangentes à une courbe paramétrée en un point.*
3) *Coordonnées des points d'intersection d'une courbe avec les axes de coordonnées d'équation $x = 0$ et $y = 0$; Vecteur directeur d'une droite.*
4) *Construction de courbe paramétrée.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2 cm)

On considère la courbe (C) définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = t - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$; $t \in [-4, 4]$.

1) Etudions conjointement les variations sur [–4, 4] des fonctions x et y.
   - x et y sont définies sur $[-4, 4]$. Aucune des fonctions x et y n'est paire ou impaire.
   - x et y sont dérivables sur $[-4, 4]$ en tant que fonctions polynômes ; et, pour tout t $x'(t) = 1 + t$ et $y'(t) = 1 - t$.
   - $x'(t) \leq 0$ sur $[-4, -1]$ et $x'(t) \geq 0$ sur $[-1, 4]$; donc x est décroissante sur $[-4, -1]$ et croissante sur $[-1, 4]$.
   - $y'(t) \leq 0$ sur $[1, 4]$ et $y'(t) \geq 0$ sur $[-4, 1]$; donc y est décroissante sur $[1, 4]$ et croissante sur $[-4, 1]$.
   - Tableau de variation conjoint :

t	-4		-1		1		4
$x'(t)$	-3	$-$	0	$+$	2	$+$	5
$y'(t)$	5	$+$	2	$+$	0	$-$	-3
$x(t)$	4	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$3/2$	$\nearrow$	12
$y(t)$	-12	$\nearrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	-4

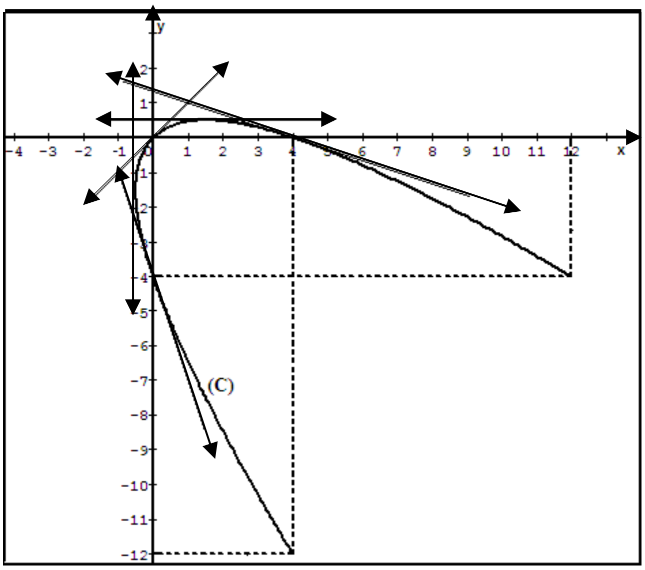
2) Précisons les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
   - Les points de (C) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x(t),\ y(t))$ telles que $y'(t) = 0$. Ainsi au point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ la tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est parallèle à l'axe des abcisses.
   - De même, au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ la tangente d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
3) a) Précisons les points d'intersection de (C) avec chacun des axes (Ox) et (Oy).
   - Points d'intersection de (C) avec l'axe (Ox) : on aura $y(t) = 0$ c'est-à-dire $t - \dfrac{1}{2}t^2 = 0$; soit $t(2 - t) = 0$; $t = 0$ ou $t = 2$; les points d'intersection de (C) avec l'axe (Ox) sont les points de coordonnées (0, 0) et (4, 0) ($x(2) = 4$).
   - De même, les points d'intersection de (C) avec l'axe (Oy) sont tels que $x(t) = 0$; c'est-à-dire $t + \dfrac{1}{2}t^2 = 0$; soit $t(2 + t) = 0$; $t = 0$ ou $t = -2$; les points

d'intersection de (C) avec l'axe (Oy) sont les points de coordonnées (0, 0) et (0, −4) (y (−2) = −4).

b) Donnons un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus s'il y a lieu.

- Au point O (0, 0) la tangente a pour vecteur directeur (1, 1) = (x' (0), y' (0)) ;
- Au point de coordonnées (4, 0) la tangente a pour vecteur directeur (3, −1), (x' (2), y' (2)).
- Au point de coordonnées (0, −4) la tangente a pour vecteur directeur (−1, 3), (x' (−2), y' (−2)).

4) Plaçons les différents points obtenus en 2) et en 3), traçons les tangentes en ces points, puis traçons la courbe (C) dans le repère.



Exercice 9-2

1) *Définition de la parité d'une fonction ; conséquence graphique de la parité*
2) *Sens de variation de fonction numérique et construction de tableau de variations conjoint ; Equation de tangente à une courbe paramétrée en un point.*
3) *Construction de courbe paramétrée.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère la courbe paramétrée (C) définie par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$; $t \in [-2, 2]$.

On note M (t) le point de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

1) Comparons les positions des points M (– t) et M (t). Puis en déduisons une conséquence pour la courbe (C) s'il y a lieu.

   M (– t) a pour coordonnées (x (−t), y (−t)) ; $x(-t) = \dfrac{1-(-t)^2}{1+(-t)^2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = x(t)$ et

   $y(-t) = (-t)^3 - 3(-t) = -t^3 + 3t = -y(t)$; la fonction x est paire et y est impaire ;

   $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$; donc M (– t) est le symétrique de M (t) par rapport à l'axe des abscisses.

   On peut en déduire que la courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe (Ox).

2) Soit (C') la partie de la courbe (C) correspondant à $t \geq 0$.

   a) Etudions le sens de variations de chacune des fonctions x et y ; et dressons un tableau de variations conjoint pour x et y pour tout $t \geq 0$.

   - x et y sont dérivables sur [0, 2] en tant que fonctions rationnelle et polynôme :

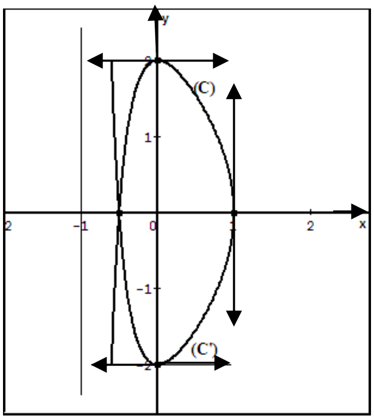
- $x'(t) = \dfrac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$; et $y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$
- $x'(t) = 0$ pour $t = 0$; $x'(t) \leq 0$ sur [0, 2] donc x est décroissante sur [0, 2].
  $y'(t) = 0$ pour $t = 1$ ou $t = -1$; donc sur $[0,\ 1]$, $y'(t) \leq 0$; et sur $[1,\ 2]$, $y'(t) \geq 0$; alors y est décroissante sur $[0,\ 1]$ et croissante sur $[1,\ 2]$.
- Tableau de variations conjoint :

t	0		1		2
$x'(t)$	0	−	−1	−	−8/25
$y'(t)$	−3	−	0	+	9
$x(t)$	1 ↘		0		↘ −3/5
$y(t)$	0 ↘		−2		↗ 2

b) Déterminons les équations de tangentes à (C') aux points M (0) et M (1).

- Au point M (0), la tangente a pour équation $x = 1$ (car x' (0) = 0 et y' (0) ≠ 0)
- Au point M (1), la tangente a pour équation $y = -2$ (car x' (1) ≠ 0 et y' (1) = 0)

3) Traçons la courbe (C') ; puis en justifiant, traçons la courbe (C) dans le repère.
Pour avoir la courbe entière (C), il suffit d'après les résultats de la question 1) de tracer le symétrique de la courbe (C') par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 9-3

1) *Périodicité des fonctions trigonométriques ; parité des fonctions cosinus et sinus ; formules d'angles supplémentaires ; conséquences graphiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.*
2) *Etude du sens de variations des fonctions numériques x et y ; construction du tableau de variations conjoint.*
3) *Tangente à une courbe paramétrée en un point M(t) ; Construction d'une courbe paramétrée et du symétrique de courbe par rapport à une droite.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \cos\ t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note M (t) le point de coordonnées $(x(t),\ y(t))$.

1) a) Comparons les positions des points M ($t + 2\pi$) et M (t) ; des points M ($-t$) et M (t) et celles des points M ($\pi - t$) et M (t).

- Comparons les positions des points M ($t + 2\pi$) et M (t) :

$\begin{cases} x(t+2\pi) = \sin\big(3t + 2(3\pi)\big) = \sin(3t) = x(t) \\ y(t+2\pi) = \cos\big(t+2\pi\big) = \cos(t) = y(t) \end{cases}$; car sinus et cosinus sont périodiques de période 2 π ; donc pour tout réel t, les points M (t + 2 π) et M (t) sont confondues.

- Comparons les positions des points M ($-t$) et M (t) :
  $\begin{cases} x(-t) = \sin\big(3(-t)\big) = \sin(-3t) = -\sin(3t) = -x(t) \\ y(-t) = \cos\big(-t\big) = \cos(t) = y(t) \end{cases}$; car la fonction sinus est impaire et cosinus est paire ; le point M ($-t$) est donc le symétrique de M (t) par rapport à l'axe (Oy).
- Comparons les positions des points M (π $-t$) et M (t) :
  $\begin{cases} x(\pi - t) = \sin\big(3\pi - 3t\big) = \sin(3t) = x(t) \\ y(\pi - t) = \cos\big(\pi - t\big) = -\cos(t) = -y(t) \end{cases}$; (car sin (3 π) = 0 et sin (π) = 0) ; le point M ($\pi-t$) est donc le symétrique de M (t) par rapport à l'axe (Ox).

b) En déduisons que les fonctions x et y peuvent être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a d'après ce qui précède que :

- Pour tout réel t, M (t + 2 π) =M (t) ; donc la courbe (Γ) est complète sur [$-\pi$, π].
- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, M ($-t$) est le symétrique de M (t) par rapport à l'axe (Oy) ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur [0, π] que l'on complètera par symétrie orthogonale, c'est dire que l'on peut étudier les fonctions x et y sur [0, π].
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, M (π $-t$) est le symétrique de M (t) par rapport à l'axe (Ox) ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ que l'on complètera par symétrique orthogonale, c'est dire que l'on peut étudier les fonctions x et y sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions x et y peuvent donc être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Les fonctions x et y sont dérivables en tant que fonctions trigonométriques et pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 3\cos(3t)$ et $y'(t) = -\sin(t)$.
- $x'(t) = 0$ équivaut à $t = \dfrac{\pi}{6}$; donc $x'(t) \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$et $x'(t) \leq 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; $y'(t) \leq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; donc la fonction x est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; et la fonction y est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Dressons un tableau de variations conjoint de x et y.

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$	1	+	0	−	0
$y'(t)$	0	−	$-1/2$	−	-1
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
$y(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

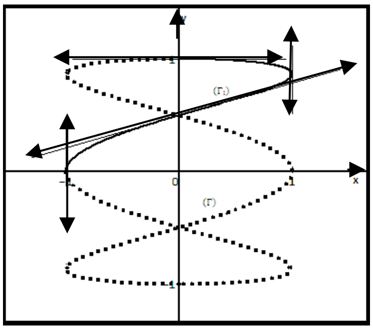
3) a) Précisons les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points M (0), $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Au point M (0) (0, 1), x' (0) = 1 et y' (0) = 0, donc la tangente à (Γ) en ce point a pour équation $y = 1$.
- Au point $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $x'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$; donc la tangent à (Γ) en ce point a pour équation $x = 1$.
- Au point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $x'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-3$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc la tangent à (Γ) en ce point a pour équation $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{1}{2}$.
- Au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)(-1,\ 0)$, $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$; donc la tangent à (Γ) en ce point a pour équation $x = -1$.

b) Traçons ces tangentes ainsi que la partie (Γ_1) de la courbe (Γ) correspondant à $t\in\left[\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\ \right]$; puis construisons en justifiant la courbe (Γ) dans le repère.

Pour tracer la courbe complète (Γ) ; on trace le symétrique de (Γ_1) par rapport à l'axe des abscisses (Ox) ; puis le symétrique de tout l'ensemble par rapport à l'axe des ordonnées.



Exercice 9-4

1) *Périodicité des fonctions trigonométriques ; parité des fonctions cosinus et sinus ; formules d'angles supplémentaires ; conséquences graphiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.*
2) *Etude du sens de variations des fonctions numériques x et y ; construction du tableau de variations conjoint.*
3) *Tangente à une courbe paramétrée en un point M(t) ; Construction d'une courbe paramétrée et du symétrique de courbe par rapport à une droite.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t)=\sin^3 t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

On note M (t) le point de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

1) a) Comparons les positions des points M (t + 2π) et M (t) ; des points M (– t) et M (t) et celles des points M (π – t) et M (t).

- Comparons les positions des points M (t + 2π) et M (t) :

$\begin{cases} x(t+2\pi) = \sin^3(t+2\pi) = \sin^3 t = x(t) \\ y(t+2\pi) = \sin 2(t+2\pi) = \sin(2t+4\pi) = \sin(2t) = y(t) \end{cases}$; car sinus est périodique de période 2π ; donc pour tout réel t, les points $M(t+2\pi)$ et $M(t)$ sont confondues.

- Comparons les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$:
  $\begin{cases} x(-t) = \sin^3(-t) = (\sin(-t))^3 = -\sin^3 t = -x(t) \\ y(-t) = \sin 2(-t) = -\sin(2t) = -y(t) \end{cases}$; car la fonction sinus est impaire ; le point $M(-t)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine O du repère.
- Comparons les positions des points $M(\pi - t)$ et $M(t)$:
  $\begin{cases} x(\pi - t) = \sin^3(\pi - t) = \sin^3 t = x(t) \\ y(\pi - t) = \sin 2(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -y(t) \end{cases}$; le point $M(\pi - t)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox).

b) En déduisons que les fonctions x et y peuvent être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a d'après ce qui précède que :

- Pour tout réel t, $M(t+2\pi) = M(t)$; donc la courbe (Γ) est complète sur $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine O du repère ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $[0, \pi]$ que l'on complètera par symétrie centrale, autrement dit on peut étudier les fonctions x et y sur $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on complètera par symétrique orthogonale, c'est dire que l'on peut étudier les fonctions x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions x et y peuvent donc être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Les fonctions x et y sont dérivables en tant que fonctions trigonométriques et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 3\cos t \sin^2 t$ et $y'(t) = 2\cos(2t)$.
- Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) \geq 0$ et $y'(t) = 0$ équivaut à $t = \frac{\pi}{4}$; donc $y'(t) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $y'(t) \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc la fonction x est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction y est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dressons un tableau de variations conjoint de x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

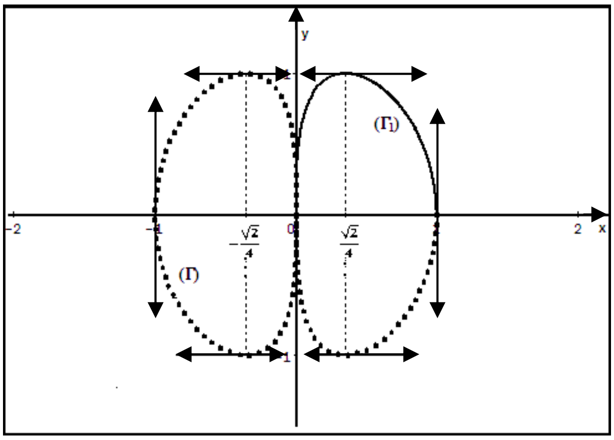
t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	$(3\sqrt{2})/4$	$+$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/4$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) a) Précisons les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le tableau de variations des fonctions x et y, on a :

- Au point $M(0)$ (0, 0) ; la tangente a pour équation $x = 0$; car $x'(0) = 0$ et $y'(0) \neq 0$.
- Au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right)$, la tangente a pour équation $y = 1$; car $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$.
- Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (1, 0), la tangente a pour équation $x = 1$; car $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$.

b) Traçons ces tangentes ainsi que la partie (Γ_1) de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; puis construisons en justifiant la courbe entière (Γ) dans le repère.

Pour construire la courbe entière (Γ), on trace le symétrique de (Γ_1) par rapport à l'axe (Ox) ; puis le symétrique de toute la partie de (Γ) qui est tracée, par rapport à l'origine O du repère.



Exercice 9-5

1) *Périodicité des fonctions trigonométriques ; parité des fonctions cosinus et sinus ; formules d'angles supplémentaires ; conséquences graphiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.*
2) *Etude du sens de variations des fonctions numériques x et y ; construction du tableau de variations conjoint.*
3) *Tangente à une courbe paramétrée en un point M(t) ; Vecteur directeur d'une droite ; Construction d'une courbe paramétrée et du symétrique de courbe par rapport à une droite.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(3\cos t - \cos 3t) \\ y(t) = \frac{1}{2}(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Comparons les positions des points $M\,(t+2\pi)$ et $M\,(t)$; des points $M\,(-t)$ et $M\,(t)$ et celles des points $M\,(\pi-t)$ et $M\,(t)$.

- Comparons les positions des points $M\,(t+2\pi)$ et $M\,(t)$:

$$\begin{cases} x(t+2\pi)=\dfrac{1}{2}\big(3\cos(t+2\pi)-\cos\big(3t+2(3\pi)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(3\cos t-\cos(3t)\big)=x(t) \\ y(t+2\pi)=\dfrac{1}{2}\big(3\sin(t+2\pi)-\sin\big(3t+2(3\pi)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(3\sin t-\sin(3t)\big)=y(t) \end{cases}$$; car

sinus et cosinus sont périodiques de période 2π ; donc pour tout réel t, les positions des points $M\,(t+2\pi)$ et $M\,(t)$ sont confondues.

- Comparons les positions des points $M\,(-t)$ et $M\,(t)$:

$$\begin{cases} x(-t)=\dfrac{1}{2}\big(3\cos(-t)-\cos\big(3(-t)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(3\cos t-\cos(3t)\big)=x(t) \\ y(-t)=\dfrac{1}{2}\big(3\sin(-t)-\sin\big(3(-t)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(-3\sin t+\sin(3t)\big)=-y(t) \end{cases}$$; car la fonction

sinus est impaire et cosinus est paire ; le point $M\,(-t)$ est donc le symétrique de $M\,(t)$ par rapport à l'axe (Ox).

- Comparons les positions des points $M\,(\pi-t)$ et $M\,(t)$:

$$\begin{cases} x(\pi-t)=\dfrac{1}{2}\big(3\cos(\pi-t)-\cos\big(3(\pi-t)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(-3\cos t+\cos(3t)\big)=-x(t) \\ y(\pi-t)=\dfrac{1}{2}\big(3\sin(\pi-t)-\sin\big(3(\pi-t)\big)\big)=\dfrac{1}{2}\big(3\sin t-\sin(3t)\big)=y(t) \end{cases}$$; (car

$\sin(3\pi)=0$ et $\sin(\pi)=0$) ; le point $M\,(\pi-t)$ est donc le symétrique de $M\,(t)$ par rapport à l'axe (Oy).

b) Expliquons comment obtenir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1) ?
Pour avoir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1), on trace le symétrique de (Γ_1) tracée sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, par rapport à l'axe des ordonnées pour avoir la partie de (Γ) sur $[0, \pi]$; puis on retrace le symétrique de cette partie par rapport à l'axe des abscisses pour avoir (Γ).

2) a) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Les fonctions x et y sont dérivables en tant que somme de fonctions trigonométriques et pour tout $t\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x'(t)=\dfrac{3}{2}(-\sin t+\sin 3t)=\dfrac{3}{2}(2\sin t\ \cos 2t)=3\sin t\ \cos 2t$

et $y'(t)=\dfrac{3}{2}(\cos t-\cos 3t)=\dfrac{3}{2}(-2\sin 2t\ \sin(-t))=3\sin t\ \sin 2t=6\cos t\ \sin^2 t$.

- $x'(t)=0$ sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ équivaut à $t=0$ ou $t=\dfrac{\pi}{4}$; donc $x'(t)\geq 0$ sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $x'(t)\leq 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; $y'(t)\geq 0$ sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Donc la fonction x est croissante sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; et la fonction y est croissante sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Dressons un tableau de variations conjoint de x et y.

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-3
$y'(t)$	0	$+$	$3\sqrt{2}/2$	$+$	0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/2$	$\nearrow$	2

3) a) On suppose que $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; soit (T) la tangente à (Γ_1) au point $M(t)$.

Montrons que le vecteur $\vec{u} = \cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de (T).

Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente (T) à (Γ_1) au point $M(t)$ a pour composantes $(x'(t), y'(t))$; or $x'(t) = 3\sin t\ \cos 2t$ et $y'(t) = 3\sin t\ \sin 2t$:

$\vec{v} = (3\sin t \cos 2t)\vec{i} + (3\sin t \sin 2t)\vec{j}$; mais sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $3\sin t \neq 0$; donc

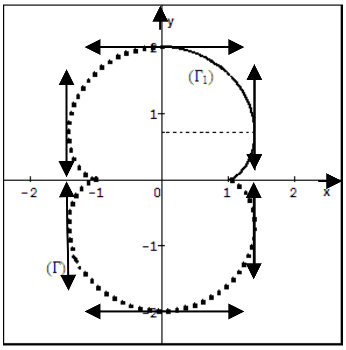
$\vec{u} = \dfrac{1}{3\sin t}\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de la tangente (T) au point $M(t)$ et

$\vec{u} = \cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j}$.

b) On admet que le résultat démontré au 3) a) est encore valable pour $t = 0$.

Ce que l'on peut dire de la tangente (T) à (Γ_1) au point $M(0)$ correspondant à $t = 0$, c'est qu'elle est alors horizontale ; car un vecteur directeur de cette tangente est le vecteur $\vec{i}$ correspondant à $t = 0$.

4) Traçons la courbe (Γ_1) puis la courbe (Γ) dans le repère.



Exercice 9-6

1) *Périodicité des fonctions trigonométriques ; Parité des fonctions cosinus et sinus ; formules trigonométriques ; conséquences graphiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.*
2) *Etude du sens de variations des fonctions numériques x et y ; construction du tableau de variations conjoint.*
3) *Tangente à une courbe paramétrée en un point M(t) ; Formules trigonométriques, encadrement dans ℝ ; Construction d'une courbe paramétrée et du symétrique de courbe par rapport à une droite.*
4) *Formules trigonométriques ; Equations algébriques*
5) *Egalité de deux fonctions ; Calcul pratique de dérivée ; Définition de primitive de fonction*
6) *Application du calcul intégral au calcul d'aire et de volume.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos^2 t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

1) a) Comparons les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$; des points $M(-t)$ et $M(t)$ et celles des points $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

- Comparons les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$:
$\begin{cases} x(t+2\pi) = 3 - 2\cos^2(t+2\pi) = 3 - 2\cos^2 t = x(t) \\ y(t+2\pi) = \sin(3t + 2(3\pi)) = \sin(3t) = y(t) \end{cases}$; car sinus et cosinus sont périodiques de période 2π ; donc pour tout réel t, les positions des points $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont confondues.
- Comparons les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$:
$\begin{cases} x(-t) = 3 - 2\cos^2(-t) = 3 - 2\cos^2 t = x(t) \\ y(-t) = \sin(3(-t)) = -\sin(3t) = -y(t) \end{cases}$; car la fonction sinus est impaire et cosinus est paire ; le point $M(-t)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox).
- Comparons les positions des points $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$:

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3 - 2\sin^2 t \\ y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\cos(3t) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 3 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 3 - 2\sin^2 t \\ y\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin\left(3\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\cos(3t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \\ y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \end{cases}.$$

Les points $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ sont confondus.

b) En déduisons des conséquences graphiques pour la courbe (Γ).
On a d'après ce qui précède que :
- Pour tout réel t, $M(t + 2\pi) = M(t)$; donc la courbe (Γ) est complète sur $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) ; donc, (Γ) est symétrique par rapport à l'axe (Ox) ; il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $[0, \pi]$ que l'on complètera par symétrie orthogonale.
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ sont confondus ; donc la partie de (Γ) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est la partie complète de (Γ) sur $[0, \pi]$.

2) a) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Les fonctions x et y sont dérivables en tant que fonctions trigonométriques et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 4\sin t \cos t$ et $y'(t) = 3\cos 3t$.

- Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sin $t \geq 0$ et cos $t \geq 0$; donc $x'(t) \geq 0$.

  $y'(t) = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ équivaut à $t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = \frac{\pi}{2}$; donc $y'(t) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et $y'(t) \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Par conséquent la fonction *x* est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction *y* est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dressons un tableau de variations conjoint de *x* et *y*.

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	0
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$3/2$	$\nearrow$	3
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3) a) On suppose que $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; soit (T) la tangente à (Γ) au point *M* (*t*).

Montrons que le vecteur $\vec{u} = 4\sin t\,\vec{i} + 3(2\cos 2t - 1)\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de (T).

Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la tangente (T) à (Γ) au point *M* (*t*) a pour composantes ($x'(t)$, $y'(t)$) ; or $x'(t) = 4\sin t\,\cos t$ et $y'(t) = 3\cos 3t$; 3 cos (3*t*) = 3 cos (2*t* +*t*) = 3[cos2*t* cos *t* – sin2*t* sin *t*] = 3(cos2*t* cos *t* – 2cos *t* sin^2*t*) = 3 cos *t* (2cos2*t* – 1) ; donc $\vec{v} = (4\sin t\cos t)\vec{i} + (3\cos t\,(2\cos 2t - 1))\vec{j}$; mais sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ cos $t \neq 0$; alors le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\cos t}\vec{v} = 4\sin t\,\vec{i} + 3(2\cos 2t - 1)\,\vec{j}$ est aussi un vecteur directeur de la tangente (T) à (Γ) au point *M* (*t*).

b) On admet que le résultat démontré au 3) a) est encore valable pour $t = \frac{\pi}{2}$.

Précisons les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points *M* (0), $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$

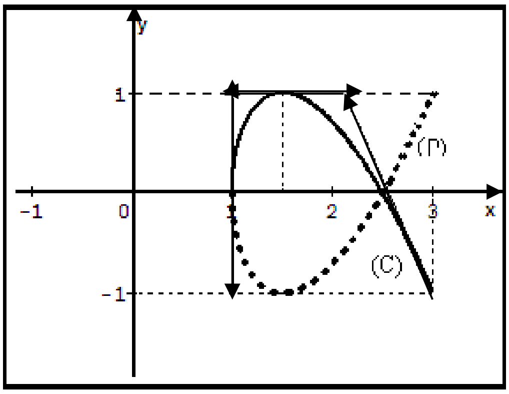
- Au point *M* (0), la tangente a pour équation *x* = 1 ; (car $x'(0) = 0$ et $x(0) = 1$).
- Au point $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, la tangente a pour équation *y* = 1 ;

  $\left[\text{car } y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ et } y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\right]$.
- Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, la tangente a pour vecteur directeur $\vec{u} = 4\,\vec{i} - 9\,\vec{j}$; donc la tangente a pour équation 9 *x* + 4 *y* – 23 = 0. $\left[\text{car } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \text{ et } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\right]$.

c) Montrons que la courbe (Γ) est inscrit dans un carré dont on précisera les dimensions.

- On a $x(t) = 3 - 2\cos^2 t$; or $0 \leq \cos^2 t \leq 1$; $1 \leq 3 - 2\cos^2 t \leq 3$; c'est-à-dire pour tout t, $1 \leq x(t) \leq 3$; donc x appartient à un intervalle de longueur 2.
- D'autres parts ; $y(t) = \sin 3t$; or $-1 \leq \sin 3t \leq 1$; c'est-à-dire pour tout t, $-1 \leq y(t) \leq 1$; donc y appartient à un intervalle de longueur 2.
- En conclusion $1 \leq x(t) \leq 3$ et $-1 \leq y(t) \leq 1$ pour tout t, donc la courbe (Γ) est inscrite dans un carré de côté 2 unités de longueur ; soit 4 cm.

d) Traçons ces tangentes ainsi que la courbe (Γ) dans le repère.



4) a) Montrons que pour tout réel t, $\sin(3t) = \sin t\,(4\cos^2 t - 1)$.

$\sin(3t) = \sin(2t + t) = \sin(2t)\cos(t) + \sin(t)\cos(2t)$

$\sin(3t) = 2\sin t\cos^2 t + \sin t\,(2\cos^2 t - 1)$; $\sin(3t) = \sin t\,(4\cos^2 t - 1)$.

b) En utilisant la relation $x(t) = 3 - 2\cos^2 t$; montrons que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\sin t = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

On a $x = 3 - 2\cos^2 t = 3 - 2(1 - \sin^2 t) = 1 + 2\sin^2 t$; donc $\sin^2 t = \frac{x-1}{2}$; et comme

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geq 0$; alors $\sin t = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

c) Exprimons y en fonction de x pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

on a $y = \sin(3t) = \sin t\,(4\cos^2 t - 1)$; d'où

$y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}\left(4\left(\frac{x-3}{-2}\right) - 1\right) = (5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}}$. On a donc $y = (5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

5) Soit f et F les fonctions numériques définies pour tout $x \in [1, 3]$ par :

$f(x) = (5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}}$ et $F(x) = \frac{4}{3}(5-2x)\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^3} + \frac{32}{15}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{x-1}{2}}$.

a) Montrons que la courbe représentative (C) de f dans le repère est une partie de (Γ) que l'on précisera.

D'après les résultats des question 4), pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ et

$y = (5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}}$. Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \in [0, 1]$ ou $\sin^2 t \in [0, 1]$; donc on a :

$0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$, soit $0 \leq x - 1 \leq 2$; et enfin $1 \leq x \leq 3$. Alors la relation

$y=(5-2x)\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$ est l'équation de la courbe (C) sur [1, 3] ; donc (C) est la partie de (Γ) correspondant à $t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculons *F'* (*x*) ; que représente *F* pour *f* sur [1, 3] ?

$$F(x)=\frac{4}{3}(5-2x)\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^3}+\frac{32}{15}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{x-1}{2}}=\frac{4}{3}(5-2x)\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{32}{15}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$F'(x)=\frac{-8}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+(5-2x)\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=(5-2x)\sqrt{\frac{x-1}{2}}=f(x).$$

Donc *F* est une primitive de *f* sur [1, 3].

6) Soit (D) le domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (*Ox*) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{5}{2}$. (D) subit une rotation autour de l'axe (*Ox*).

a) Calculons l'aire *A*(D) en cm^2 du domaine (D).

L'unité d'aire est 4 cm^2 ; donc *A*(D) = $4\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx = 4\left[F\left(\frac{5}{2}\right)-F(1)\right]=\frac{12\sqrt{3}}{5}$;

A(D) = $\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ cm^2.

b) Calculons en cm^3, le volume *V*(D) du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe (*Ox*).

L'unité de volume est 8 cm^3 ; donc en cm^3,

V(D) = $8\ \pi\int_1^{\frac{5}{2}}[f(x)]^2\,dx = 4\pi\int_1^{\frac{5}{2}}\left(4x^3-24x^2+45x-25\right)dx$;

V(D) = $4\pi\left[x^4-8x^3+\frac{45}{2}x^2-25x\right]_1^{\frac{5}{2}}=\frac{27}{4}\pi$;

V(D) = $\dfrac{27}{4}\pi$ cm^3.

Exercice 9-7

1) *Parité des fonctions cosinus et sinus ; formules trigonométriques ; conséquences graphiques de la parité des fonctions x et y.*
2) *Etude du sens de variations des fonctions numériques x et y ; construction du tableau de variations conjoint.*
3) *Formules trigonométriques, encadrements dans $\mathbb{R}$.*
4) *Tangente à une courbe paramétrée en un point M (t) ; Construction d'une courbe paramétrée et du symétrique de courbe par rapport à une droite.*
5) *Formules trigonométriques ; calcul algébrique ; Application du calcul intégral au calcul de volume.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i}, \vec{j})$. (Unité de longueur 1, 5 cm)

(Γ) est la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t)=3\sin t \\ y(t)=2\cos t \end{cases}$; $t \in [-\pi, \pi]$.

On note *M* (*t*) le point de coordonnées $(x(t),\ y(t))$.

1) (Γ_1) est la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Pour tout *t*, comparons les positions des points *M* (– *t*) et *M* (*t*) ; puis celles des points

$M(\pi - t)$ et $M(t)$.

- Comparons les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$:
$\begin{cases} x(-t) = 3\sin(-t) = -3\sin t = -x(t) \\ y(-t) = 2\cos(-t) = 2\cos(t) = y(t) \end{cases}$; car la fonction sinus est impaire et cosinus est paire ; le point $M(-t)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
- Comparons les positions des points $M(\pi - t)$ et $M(t)$:
$\begin{cases} x(\pi - t) = 3\sin(\pi - t) = 3\sin t = x(t) \\ y(\pi - t) = 2\cos(\pi - t) = -2\cos(t) = -y(t) \end{cases}$; (car sin (π) = 0) ; le point $M(\pi - t)$ est donc le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox).

b) Expliquons comment obtenir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1) ?
Pour avoir la courbe (Γ) à partir de (Γ_1), on trace le symétrique de (Γ_1) tracée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à l'axe des abscisses pour avoir la partie de (Γ) sur $[0, \pi]$; puis on retrace le symétrique de cette partie par rapport à l'axe des ordonnées pour avoir (Γ).

2) a) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Les fonctions x et y sont dérivables en tant que fonctions trigonométriques et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 3\cos t$ et $y'(t) = -2\sin t$.
- Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geq 0$ et $\cos t \geq 0$; donc $x'(t) \geq 0$ et $y'(t) \leq 0$.
- Par conséquent la fonction x est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction y est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dressons un tableau de variations conjoint de x et y.

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	3	+	0
$y'(t)$	0	−	−2
$x(t)$	0	↗	3
$y(t)$	2	↘	0

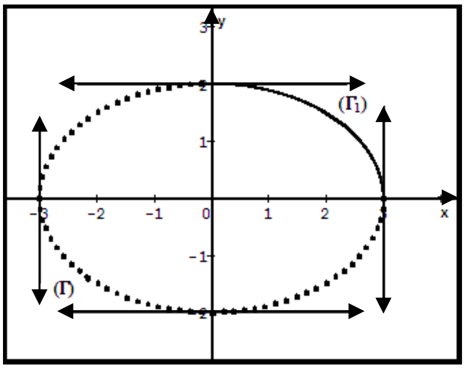
3) Montrons que la courbe (Γ) est inscrite dans un rectangle de longueur 6 et de largeur 4.
Pour tout réel t, on a : $-1 \leq \sin t \leq 1$ et $-1 \leq \cos t \leq 1$; ce qui donne $-3 \leq 3\sin t \leq 3$ c'est-à-dire $-3 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq 2\cos t \leq 2$ c'est-à-dire $-2 \leq y \leq 2$. Donc la courbe (Γ) est telle que $-3 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq 2$; d'où (Γ) est inscrite dans le rectangle de longueur 6 unités et de largeur 4 unités.

4) a) Déterminons les équations des tangentes à (Γ) aux points d'intersection de (Γ) avec les axes de coordonnées.
Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, (Γ) coupe l'axe (Ox) au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)(3, 0)$ et l'axe (Oy) au point $M(0)\ (0, 2)$ et en utilisant les éléments de symétries à la question 1) a), (Γ) recoupe l'axe (Ox) au point $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-3, 0)$ et l'axe (Oy) au point $M(\pi)\ (0, -2)$.

Les équations des tangentes à (Γ) en ces points sont :

- Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)(3, 0)$; $x = 3$; au point $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-3, 0)$; $x = -3$.
- Au point M (0) (0, 2) ; $y = 2$ et au point M (π) (0, −2) ou M ($-\pi$) (0, −2) ; $y = -2$.

b) Traçons ces tangentes ; la courbe (Γ_1) ainsi que la courbe (Γ) dans le repère.



5) Soit (D) le domaine plan contenant le point O et délimité par la courbe (Γ). (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).

a) Montrons que x et y vérifient la relation : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

On sait que pour tout réel t, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; or $\sin t = \frac{x}{3}$ et $\cos t = \frac{y}{2}$; donc $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$ c'est-à-dire $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

b) Donnons l'aire A(D) en cm^2 du domaine (D).

D'après la relation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; on a $a = 3$ et $b = 2$; de plus l'unité d'aire est $\frac{9}{4}$ cm^2 donc l'aire A(D) en cm^2 du domaine (D) est $\frac{9}{4}\pi\times 3\times 2=\frac{27}{2}\pi$ cm^2.

c) Montrons qu'une équation cartésienne de la courbe (C), la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est : $y=\frac{2}{3}\times\sqrt{9-x^2}$.

On a $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $y^2=\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)$; mais si $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \in [0, 1]$ et alors $y \in [0, 2]$; ($y \geq 0$) donc $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

d) Calculons le volume V(D) en cm^3 du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe (Ox).

L'unité de volume est $\frac{27}{8}$ cm^3 ; donc V(D) = $\frac{27}{8}\times 2\times\pi\int_0^3\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)dx=54\pi$ cm^3.

Exercice 9-8

Partie A

1) *Conséquence analytique de la parité d'une fonction ; Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Plan d'étude d'une fonction numérique.*
2) *Equation de tangente à une courbe de fonction en un point ; Position relative d'une droite et d'une courbe dans le plan ; Construction de courbe de fonction.*

Partie B

1) *Périodicité des fonctions x et y ; Parité/imparité des fonctions x et y ; Formules d'angles supplémentaires ; Conséquence analytique de la parité.*
2) *Equation de tangente à une courbe paramétrée en un point ; Comparaison de deux courbes*

du plan ; Construction du symétrique d'une courbe par rapport à une droite.

<u>Solution</u>

Partie A)

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2x\sqrt{|x^2-1|}$.

(C_f) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) a) Montrons qu'on peut étudier f sur E = $[0, +\infty[$.

- La fonction f est définie sur ℝ ; car pour tout réel x, $|x^2-1| \geq 0$
- Pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = 2(-x)\sqrt{|(-x)^2-1|} = -2x\sqrt{|x^2-1|} = -f(x)$
- Donc f est impaire et par conséquent on peut l'étudier sur E = $[0, +\infty[$.

b) Etudions la dérivabilité de f en 1. Puis en déduisons une conséquence graphique.

- $f(1) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x\sqrt{|x^2-1|}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x|x+1||x-1|}{(x-1)\sqrt{|x^2-1|}}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x|x+1|}{\sqrt{|x^2-1|}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-2x|x+1|}{\sqrt{|x^2-1|}} = -\infty$$

  Donc f n'est pas dérivable en 1.
- La courbe (C_f) admet alors au point d'abscisse 1, une demi-tangente verticale d'équation $x = 1$.

c) Etudions le sens de variations de f sur E et dressons son tableau de variations.

- $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\sqrt{|x^2-1|} = +\infty$
- f est dérivable sur E \ {1} en tant que produit de fonctions dérivables ;
  Sur [0, 1], $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ et sur $[1, +\infty[$, $f(x) = 2x\sqrt{x^2-1}$.

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur } [0, 1[\text{ et}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2-1} + 2x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} \text{ sur }]1, +\infty[.$$

- Sur $[0, 1[$, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et

  $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$; sur $]1, +\infty[$ $f'(x) > 0$.

- f est alors croissante sur $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $]1, +\infty[$; et décroissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

- Tableau de variations.

x	0		$\sqrt{2}/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$	2	+	0	−	||	+	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

2) a) Déterminons une équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 0.

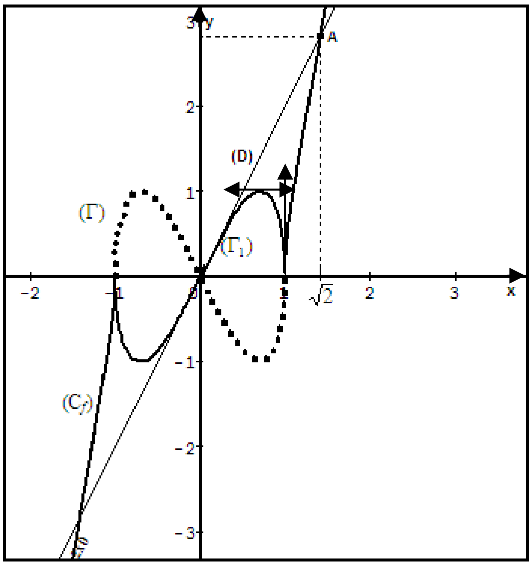
   La tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = 2x$.

b) Précisons la position de (C_f) par rapport à (D).

$f(x)-2x = 2x\left(\sqrt{|x^2-1|}-1\right)=\dfrac{2x\left(|x^2-1|-1\right)}{\sqrt{|x^2-1|}+1}$; $f(x)-2x=0$ équivaut à $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$; donc :

- Sur $\left]-\infty,\ -\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[0,\ \sqrt{2}\right]$, $f(x)-2x\le 0$; sur $\left[-\sqrt{2},\ 0\right]$ et sur $\left[\sqrt{2},\ +\infty\right[$ $f(x)-2x\ge 0$; par conséquent la courbe (C_f) est en dessous de (D) sur $\left]-\infty,\ -\sqrt{2}\right]$ et sur $\left[0,\ \sqrt{2}\right]$ et au dessus de (D) sur $\left[-\sqrt{2},\ 0\right]$ et sur $\left[\sqrt{2},\ +\infty\right[$.

c) Plaçons le point d'abscisse $\sqrt{2}$; traçons la courbe (C_f) et la droite (D) dans le repère.



Partie B)

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

On note M (t) le point de coordonnées $\big(x(t),\ y(t)\big)$.

1) a) Montrons que la courbe complète (Γ) s'obtient pour $t\in\ [-\pi,\pi]$.

Pour tout t ; $\begin{cases} x(t+2\pi)=\cos(t+2\pi)=\cos t=x(t) \\ y(t+2\pi)=\sin 2(t+2\pi)=\sin(2t+4\pi)=\sin 2t=y(t) \end{cases}$; car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2 π. Donc pour tout réel t, les positions des points M (t + 2 π) et M (t) sont confondues. Par conséquent la courbe est complète sur $[-\pi,\pi]$ c'est-à-dire que la courbe complète (Γ) s'obtient pour $t\in[-\pi,\pi]$.

b) Comparons les positions points M ($-t$) et M (t), puis des points $M\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$.

- Comparons les positions des points M ($-t$) et M (t) :

  $\begin{cases} x(-t)=\cos(-t)=\cos(t)=x(t) \\ y(-t)=\sin\big(2(-t)\big)=-\sin(2t)=-y(t) \end{cases}$; car la fonction sinus est impaire et cosinus est paire ; le point M ($-t$) est donc le symétrique de M (t) par rapport à l'axe (Ox).

- Comparons les positions des points $M\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$:

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin(\pi-2t)=\sin(2t) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t \\ y\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin(\pi+2t)=-\sin(2t) \end{cases};\quad \begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-x\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-y\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \end{cases}$$

Les points $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

c) En déduisons un intervalle d'études pour x et y.

On a d'après ce qui précède que :

- Pour tout réel t, $M(t+2\pi)=M(t)$; donc la courbe (Γ) est complète sur $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $[0, \pi]$ que l'on complètera par symétrie orthogonale, c'est dire donc que l'on peut étudier les fonctions x et y sur $[0, \pi]$.

  Pour tout $t \in [0, \pi]$, les points $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère ; donc, il suffit d'avoir la partie de (Γ) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que l'on complètera par symétrique centrale, c'est dire donc que l'on peut étudier les fonctions x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les fonctions x et y peuvent donc être étudiées sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in [0, \pi]$.

a) Déterminons une équation cartésienne de (Γ_1).

Sur $[0, \pi]$, $\sin t \geq 0$; et $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ donc

$y = 2\cos t \sin t = 2x\sqrt{1-x^2}$; une équation cartésienne de (Γ_1) est $y = 2x\sqrt{1-x^2}$

b) Comparons (Γ_1) à la courbe (C_f).

Une équation cartésienne de (Γ_1) est $y = 2x\sqrt{1-x^2}$; avec $x \in [-1, 1]$ (car $t \in [0, \pi]$) ; donc (Γ_1) est la partie de (C_f) sur $[-1, 1]$.

c) En déduisons la construction de la courbe (Γ).

La courbe (Γ) s'obtient en traçons le symétrique de (Γ_1) par rapport à l'axe (Ox) du repère. ((Γ_1) étant la partie de (C_f) sur $[-1, 1]$)

(Voir la courbe sur la figure de la question partie A) 2) c)).

<u>Exercice 9-9</u>

Partie A)

1) *Continuité de fonction en un point ; Conséquence graphique de la dérivabilité de fonction en un point.*
2) *Plan d'étude d'une fonction numérique ; asymptotes à une courbe de fonction ; Principe de localisation ; Construction de courbe de fonction.*
3) *Comparaison de deux fonctions ; Construction du symétrique d'une courbe par rapport à une droite.*
4) *application du calcul intégral au calcul d'aire et de volume.*

Partie B)

1) *Calcul algébrique comportant ln et exponentielle.*
2) *Sens de variation de la fonction exponentielle ; Résolution d'équations avec exponentielle dans* $\mathbb{R}$ *; Définition du vecteur vitesse ; Calcul algébrique comportant ln et exponentielle.*

Solution

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\begin{cases} xe^x+1\,; & \text{si } x\le 0 \\ x+1-x\ln x\,; & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$). (Unité 2cm)

Partie A)

1) a) Etudions la continuité de f en 0.

$f(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(xe^x+1\right)=1= f(0)$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+1-x\ln x\right)=1= f(0)$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$) ; on a

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; donc f est continue en 0.

b) Montrons que la courbe (C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0, dont on précisera les équations.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left(xe^x+1\right)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$; donc f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = 1$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1-x\ln x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty$; donc f n'est pas dérivable à droite de 0.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} = -\infty$; donc la courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0, deux demi-tangentes, d'équations respectives $y = x + 1$ à gauche et $x = 1$ à droite.

2) a) Etudions le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

- f est définie sur $\mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(xe^x+1\right)=1$ (car $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0$).

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1-x\ln x\right)= \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x}-\ln x\right) = -\infty$.
- f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (car les fonctions $x\mapsto x$; $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto 1$ le sont) et pour tout $x < 0$, $f'(x) = e^x(x+1)$; de même, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car les fonctions $x \mapsto x + 1$; $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ le sont) et pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = -\ln x$.
- Sur $]-\infty, 0[$, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = -1$ (car pour tout x, $e^x > 0$) ; donc $f'(x)\le 0$ sur $]-\infty, -1]$ et $f'(x)\ge 0$ sur $[-1, 0[$;

  Sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 1$; alors sur $]0, 1]$, $f'(x)\ge 0$ et sur $[1, +\infty[$, $f'(x)\le 0$.
- La fonction f est alors croissante sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$ et f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.
- Tableau de variations De f.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$1 \parallel$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$(e-1)/e$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

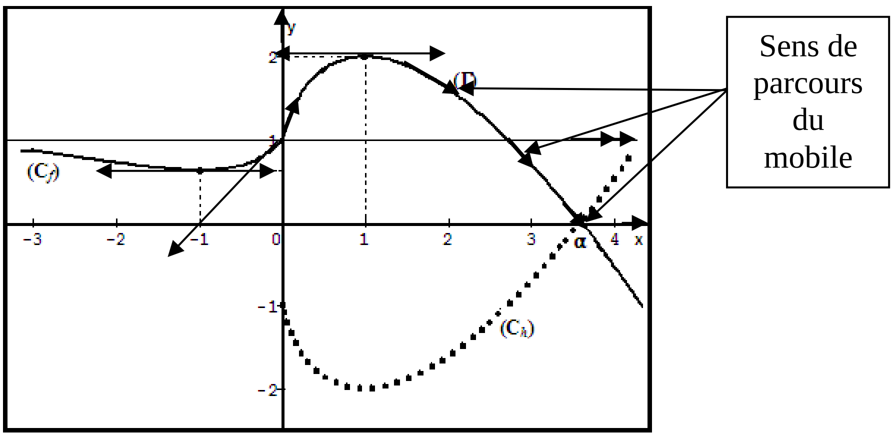
b) Précisons s'il y a lieu les asymptotes à la courbe (C_f).

- On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x+1\right)=1$; donc la courbe (C_f) admet la droite d'équation $y = 1$, comme asymptote à $-\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1-x\ln x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\ln x\right) = -\infty$; donc à $+\infty$, la courbe (C_f) n'admet pas d'asymptote.

c) Montrons que la courbe (C_f) coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse $\alpha \in]3, 4[$.

D'après le tableau de variations de f, sur $[3, 4] \subset [1, +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; de plus $f(3) = 4 - 3\ln 3 \approx 0,7$ et $f(4) = 5 - 4\ln 4 \approx -0,6$; $f(3) \times f(4) < 0$, donc d'après le principe de localisation appliqué à f sur $[3, 4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]3, 4[$; autrement dit la courbe (C_f) traverse l'axe (Ox) au point de coordonnées $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \in]3, 4[$.

d) Traçons l'asymptote (ou les asymptotes) (s'il y a lieu), les demi-tangentes au point d'abscisse 0, ainsi que la courbe (C_f) dans le repère.



3) Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x) = -x-1+x\ln x$ pour tout $x > 0$ et (C_h) sa courbe représentative dans le repère.

a) Sans étudier h, montrons comment déduire la courbe (C_h) de la courbe (C_f).

On a $h(x) = -x-1+x\ln x = -(x+1-x\ln x) = -f(x)$; donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h(x) = -f(x)$; donc la courbe (C_h) est le symétrique de (C_f) par rapport à l'axe (Ox) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Traçons dans le repère la courbe représentative (C_h) de h dans le repère.

(Voir la courbe (C_h) en pointillés sur le graphique : question 2) d) de la partie A).

4) On considère le domaine plan (D) délimité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. (Avec $3 < \alpha < 4$).

a) Déterminer en u.a. l'aire $A(\alpha)$ du domaine (D) sous forme de polynôme en α.

L'unité d'aire est 4 cm^2 et les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; donc $A(\alpha) = 2\times 4\int_1^\alpha f(x)\,dx = 8\int_1^\alpha (x+1-x\ln x)\,dx$;

$$A(\alpha) = 8\int_1^\alpha (x+1)\,dx - 8\int_1^\alpha (x\ln x)\,dx = 8\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^\alpha - 8\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^\alpha ;$$

$$A(\alpha) = 4\alpha^2+8\alpha-12-4\alpha^2\ln\alpha+2\alpha^2-2 = 6\alpha^2+8\alpha-14-4\alpha(\alpha+1)$$

$$A(\alpha) = 2\alpha^2+4\alpha-14 \text{ cm}^2.$$

(Car $\alpha+1-\alpha\ln\alpha = 0$; $\alpha\ln\alpha = \alpha+1$)

b) (D) subit une rotation autour de l'axe (Ox).

Calculons en u.v. le volume $V(\alpha)$ en fonction de α du solide engendré par cette rotation.

L’unité de volume est 8 cm^3 ; donc :

$V(\alpha)=8\pi\int_1^{\alpha}[f(x)]^2\,dx=8\pi\int_1^{\alpha}(x+1-x\ln x)^2\,dx$;

$V(\alpha)=8\pi\int_1^{\alpha}\left[\left(x^2+2x+1\right)-2\left(x^2+x\right)\ln x+\left(x^2\ln^2 x\right)\right]dx$; En développant et en intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$V(\alpha)=8\pi\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_1^{\alpha}-16\pi\left[\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\ln x\right]_1^{\alpha}+16\pi\left[\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\alpha}+$$

$$8\pi\left[\frac{1}{3}x^3\ln^2 x\right]_1^{\alpha}-\frac{16\pi}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\right]_1^{\alpha}$$

$V(\alpha)=\dfrac{4\pi}{27}\left(4\alpha^3+15\alpha^2+18\alpha-169\right)$ cm^3.

Partie B)

On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies par : $\begin{cases} x(t)=e^t-1 \\ y(t)=e^t+(1-e^t)\left[t+\ln\left(1-e^{-t}\right)\right] \end{cases}$; pour tout $t>0$.

1) Vérifions que (Γ) est une partie de (C_f) que l’on précisera.
   Si $t>0$, $e^t>1$ et $e^t-1>0$; c'est-à-dire $x>0$; de plus
   $y(t)=e^t+(1-e^t)\left[t+\ln\left(1-e^{-t}\right)\right]=e^t+(1-e^t)\ln(e^t-1)=x+1-x\ln x$; avec $x>0$.
   Donc (Γ) est la partie de (C_f) correspondant à $x>0$.
2) Le point $M(t)$ est considéré comme un point mobile dont les coordonnées sont définies à tout instant t ($t>0$) par $x(t)$ et $y(t)$. On admet qu’à l’instant $t=0$, le point mobile est au point de coordonnées (0, 1) considéré comme point de départ.
   a) Indiquons sur la courbe (Γ) le sens de parcours du mobile.
      Le mobile part du point de coordonnées (0, 1) et se déplace sur la courbe (Γ), la partie de (C_f) sur $]0,+\infty[$ dans le sens de roulement des aiguilles d’une montre ; voir alors le sens de parcours matérialisé sur la figure.
   b) Déterminons l’instant t quand le mobile passe par le point de coordonnées (1, 2) ?
      Lorsque le mobile est au point de coordonnées (1, 2), cela voudrait dire que $x=1$ et $y=2$ or $x=1$ équivaut à $e^t-1=1$; donc $t=\ln 2$; effectivement si $t=\ln 2$; $y=2$.
      Par conséquent à l’instant $t=\ln 2$, le mobile passe par le point de coordonnées (1, 2).
   c) Précisons les coordonnées du vecteur vitesse à cet instant.
      Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ en un point $M(t)$ si il existe a pour coordonnées $\left(x'(t),\ y'(t)\right)$; or $x'(t)=e^t$ et $y'(t)=-e^t\ln(e^t-1)$; ainsi les coordonnées du vecteur vitesse à l’instant $t=\ln 2$ sont 2 et 0.
   d) Position du mobile à l’instant $t=\ln(\alpha+1)$.
      On a $x=e^t-1$, si $t=\ln(\alpha+1)$, alors $x=\alpha$ et par suite $y=\alpha+1-\alpha\ln\alpha=0$ (d’après les résultats de la question partie A) 2) c). Donc à l’instant $t=\ln(\alpha+1)$, le mobile est au point de coordonnées (α, 0) c'est-à-dire sur l’axe des abscisses.

Exercice 9-10

Partie A)

1) *Définition de fonction paire, de fonction impaire ; Conséquence graphique de la parité, d’une*

fonction.

2) *Calcul pratique de dérivées de fonction ; Formules trigonométriques ; Sens de variation de fonctions numériques ; Construction de tableau de variations conjoint.*

Partie B)

1) *Equation d'une courbe (expression de y en fonction de x) ; Egalité de deux ensembles (par exemple) ; Définition d'une courbe de fonction.*
2) *Equation de tangente à une courbe paramétrée en un point ; Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point ; Construction de courbe paramétrée et de tangente à la courbe en un point.*
3) *Equation d'une trajectoire (expression de y en fonction de x) ; Equation trigonométrique ; Définition du vecteur vitesse.*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$. (Unité de longueur 4 cm).

On considère la courbe paramétrée (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1+\cos t}{2} \\ y(t)=\dfrac{1+\cos t}{4}\sin t \end{cases}$; $t\in[-\pi,\ \pi]$.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $\left(x(t),\ y(t)\right)$.

Partie A) :

1) a) Etudions les parités des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$.

On sait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire ; de plus pour tout $t\in[-\pi,\pi]$, $-t\in[-\pi,\pi]$; $x(-t)=\dfrac{1+\cos(-t)}{2}=\dfrac{1+\cos t}{2}=x(t)$;

$y(-t)=\dfrac{1+\cos(-t)}{4}\sin(-t)=-\dfrac{1+\cos t}{4}\sin t=-y(t)$; la fonction x est paire et la fonction y est impaire.

b) En déduisons la transformation qui transforme le point $M(t)$ en le point $M(-t)$.

On a $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$; on en déduit que le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) ; la transformation qui transforme le point $M(t)$ en le point $M(-t)$ est la symétrie orthogonale d'axe (Ox).

2) a) Calculons $x'(t)$ et $y'(t)$ et montrons que $y'(t)=\dfrac{1}{4}(\cos t+1)(2\cos t-1)$.

Les fonctions x et y sont dérivables pour tout t comme composées (somme et produit) de fonctions trigonométriques et on a :

- $x'(t)=-\dfrac{1}{2}\sin t$; $y'(t)=-\dfrac{1}{4}\sin^2 t+\dfrac{1+\cos t}{4}\cos t$.
- $y'(t)=-\dfrac{1}{4}\sin^2 t+\dfrac{1+\cos t}{4}\cos t=\dfrac{1}{4}\left[\cos t(\cos t+1)+\left(\cos^2 t-1\right)\right]$

$y'(t)=\dfrac{1}{4}(\cos t+1)(2\cos t-1)$.

b) Etudions les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi]$.

- Sur $[0,\pi]$ $\sin t\geq 0$; donc $x'(t)\leq 0$ sur $[0,\pi]$; alors la fonction x est décroissante sur $[0,\pi]$
- Sur $[0,\pi]$, $y'(t)=0$ équivaut à $(\cos t+1)(2\cos t-1)=0$ ce qui donne $t=\pi$ ou $t=\dfrac{\pi}{3}$. Donc $y'(t)\geq 0$ sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ et $y'(t)\leq 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right]$. Alors la fonction y est croissante sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right]$.

c) Dressons un tableau de variations conjoint de x et y.

t	0		$\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$	$-\sqrt{3}/2$	$-$	0
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$3/4$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$(3\sqrt{3})/16$	$\searrow$	0

Partie B :

1) On note (Γ_1) la partie de la courbe (Γ) correspondant à $t \in [0,\pi]$.

   a) Montrons que (Γ_1) a pour équation $y = x\sqrt{x-x^2}$.

   On a $\cos t = 2x - 1$; donc $y = \dfrac{1}{2}x\sin t$; mais sur $[0, \pi]$ $\sin t \geq 0$; donc $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ pour tout $t \in [0, \pi]$; alors $y = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-(2x-1)^2}$; $y = x\sqrt{x-x^2}$.

   Donc la courbe (Γ_1) a bien pour équation $y = x\sqrt{x-x^2}$.

   b) Montrons que (Γ) est l'union de deux courbes (Γ_1) et (Γ_2).

   D'après les résultats de la question partie A) 1) b), la courbe (Γ) est symétrique par rapport à l'axe (Ox) ; autrement dit la courbe (Γ) s'obtient en traçant la courbe (Γ_1) et son symétrique (Γ_2) par rapport à l'axe (Ox). La courbe (Γ) est alors l'union de (Γ_1) et de son symétrique (Γ_2) par rapport à l'axe (Ox).

   c) Donnons une équation de la courbe (Γ_2).

   La courbe (Γ_2) est le symétrique (Γ_1) par rapport à l'axe (Ox) ; d'où une équation de (Γ_2) est $y = -x\sqrt{x-x^2}$.

2) a) Déterminons une équation de la tangente à (Γ_1) au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   Le point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées, $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$; les coordonnées du vecteur vitesse sont $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$; une équation de la tangente à (Γ_1) en ce point est alors : $-x + 2y = 0$.

   b) Etudions la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ en 0 et en 1.

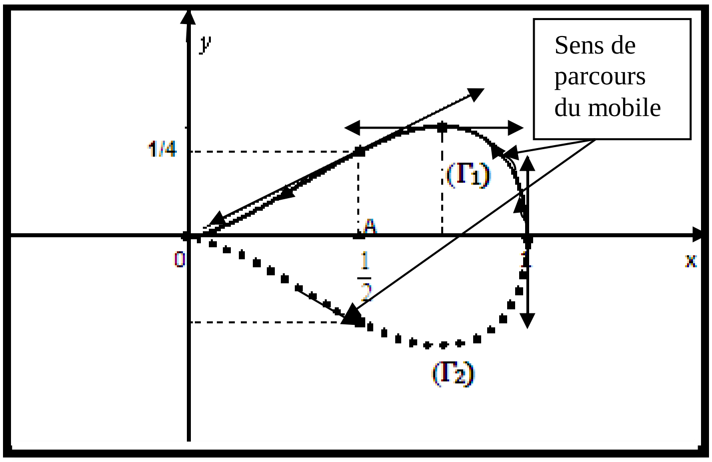
   La fonction f est définie sur $[0, 1]$; elle est donc définie en 0 et en 1 ; $f(0) = f(1) = 0$.

   - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-x^2} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   - $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2}{\sqrt{x-x^2}} = -\infty$; donc f n'est pas dérivable en 1.

   c) En déduisons une équation de la tangente à (Γ_1) au point $M(\pi)$.

   Le point $M(\pi)$ a pour coordonnées $(0, 0)$; c'est-à-dire $x = 0$ et $y = 0$; la courbe représentative de la fonction f définie dans la question précédente est (Γ_1) ; $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$; donc la tangente à (Γ_1) au point de coordonnées $(0, 0)$ c'est-à-dire au point $M(\pi)$ a pour équation $y = 0$: (tangente horizontale)

d) Plaçons les points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M(\pi)$; traçons les tangentes à (Γ_1) en ces points et construisons la courbe (Γ_1) puis (Γ) dans le repère.



3) Le point $M(t)$ est considéré comme un point mobile dont les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont définies à tout instant t de l'intervalle $[0, 2\pi]$ par :

$x(t) = \frac{1+\cos t}{2}$ et $y(t) = \frac{1+\cos t}{4} \times \sin t$.

a) Montrons que la trajectoire de $M(t)$ est la courbe (Γ).
La trajectoire de $M(t)$ a pour équation cartésienne $y^2 = x^2\left(x - x^2\right)$ avec $x \in [0, 1]$
De même la courbe (Γ) a pour équation cartésienne $y^2 = x^2\left(x - x^2\right)$ avec $x \in [0, 1]$.
La trajectoire de $M(t)$ n'est alors autre chose que la courbe (Γ).

b) Déterminons l'instant t quand le mobile passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$x(t) = \frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}$; $\cos t = 0$ ce qui donne $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$; (sur $[0, 2\pi]$) ; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; alors à l'instant $t = \frac{3\pi}{2}$ le mobile passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

c) Précisons les coordonnées du vecteur vitesse à cet instant.
On a $x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \frac{3\pi}{2}$ sont alors $x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

d) En se servant de la figure, indiquons sur la courbe (Γ) le sens de parcours du mobile.
Le point de départ du mobile est au point $M(0)$ $(1, 0)$; à l'instant $t = \frac{\pi}{2}$, il est au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $(y > 0)$; à l'instant $t = \pi$ il est au point $O(0, 0)$; le mobile parcourt la trajectoire dans le sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre ; voir le sens de parcours du mobile sur la figure.

CHAPITRE 10

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

La géométrie est définie comme étant la science des propriétés de l'étendue.

Le mot espace est entré en géométrie vers 1800. La géométrie de l'espace s'est peu à peu développée ; l'espace lui–même était l'objet des discussions métaphysiques– sur la controverse **espace** absolu ou **espace** relationnel –

La situation change dans la deuxième moitié du 18ème siècle. Riemann a soutenu sa célèbre habilitation « Sur les hypothèses qui sous-tendent la ***géométrie*** » en ***1854*** et a présenté le concept de variété de dimension *n*. Le concept d'***espace*** de dimension élevée commençait à s'épanouir.

La géométrie dans l'espace consiste donc à étudier dans un espace à trois dimensions, les objets définis dans la géométrie plane et à y ajouter des objets qui ne sont pas contenus dans des plans : surfaces (plans et surfaces courbes) ; volumes fermés... Il s'agit donc de géométrie dans un espace à trois dimensions.

Le produit vectoriel prend naissance avec "l'invention" des quaternions (un quaternion est un nombre de la forme $h = a + bi + cj + dk$ où a, b, c et d sont des réels et i, j et k sont tels que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$; l'ensemble des quaternions est noté .ℍ et on a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset$.ℍ) en 1843, par le mathématicien irlandais **HAMILTON William Rowan (1805-1865)**. Le mathématicien américain **GIBBS Josiah Willard (New Haven 1839 - 1903)** simplifie cet outil et définit le produit scalaire et le produit vectoriel dans une théorie appelée l'analyse vectoriel.

Depuis fort longtemps, cette discipline mathématique a été la partie dominante des programmes de l'enseignement au lycée. La géométrie en général, mais la géométrie dans l'espace en particulier a été la branche des mathématiques par laquelle s'est élaborée l'idée de démonstration ; c'est elle qui pose le mieux la question du rapport entre les mathématiques et la réalité de la vie.

L'utilité de la géométrie est très variée :

- ✓ Longtemps, géométrie et astronomie ont été liées. À un niveau élémentaire, le calcul des tailles de la lune, du Soleil et de leurs distances respectives à la Terre fait appel au théorème de Thalès ;
- ✓ La géométrie intervient en ingénierie dans l'étude de la stabilité d'un système mécanique. Mais elle intervient encore plus naturellement dans le dessin industriel.
- ✓ Le calcul vectoriel est aussi utilisé dans l'imagerie informatique pour calculer la longueur des ombres sur les surfaces plates.
- ✓ La géométrie euclidienne intervient en optique pour traiter par exemple de la diffraction de la lumière.
- ✓ La géométrie est également à l'origine du développement de la navigation maritime…….

CE QU'IL FAUT RETENIR

A) RESULTATS ADMIS

I) Résultats admis relatifs aux vecteurs dans l'espace.

(*Outils pour montrer qu'un quadrilatère dans l'espace est un parallélogramme ; pour effectuer des calculs vectoriels dans l'espace*)

- ➢ Soit A, B, C et D quatre points de l'espace ; alors :
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.
- ➢ Soit O un point fixé de l'espace ; alors pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un seul point M

de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace ; *k* un réel ; alors : la somme de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$; le produit d'un vecteur par un réel $k\vec{u}$, se font de la même façon dans l'espace comme dans le plan ; et obéissent aux mêmes règles de calculs. La relation de Chasles reste valable dans l'espace.

Exemple : Soient *A*, *B*, *C* et *D* quatre points quelconques de l'espace ; simplifier au maximum l'expression vectoriel suivante : $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{AC}$.

Solution : $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{AC} = 3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + 2\overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right)$

$\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 3\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\overrightarrow{CC} = \vec{O}$.

II) Résultats admis relatifs au plan dans l'espace.

(*Outil pour déterminer un plan dans l'espace ; pour montrer que trois points ou trois vecteurs sont coplanaires…*)

- Trois points *A*, *B*, *C* non alignés de l'espace déterminent un plan : le plan (*ABC*).
- Un point *A* et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, déterminent un plan : le plan défini par *A* et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Et pour tout point *M* de ce plan, il existe un couple de réels (*x*, *y*) unique tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ou trois points *A*, *B*, *C* sont coplanaires si et seulement si ils sont dans un même plan. C'est à dire si et seulement si il existe un couple de réels (*x*, *y*) unique tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ou $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ par exemple.

Exemple : On considère un tétraèdre *ABCD* ; *E*, *F* et *G* sont des points de l'espace définis respectivement par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$

1) Justifier que les points *A*, *B*, *C* et *E* sont coplanaires
2) Justifier que les droites (*FC*) et (*AD*) sont coplanaires.
3) Montrer que les droites (*FC*) et (*AD*) sont sécantes en *G*.

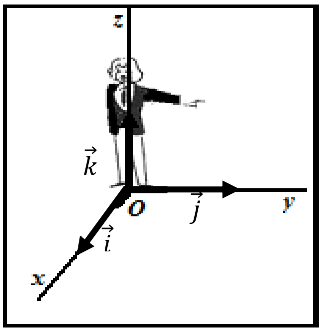
Solution

1) Justifions que les points *A*, *B*, *C* et *E* sont coplanaires.
   Les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés (*ABCD* étant un tétraèdre) donc ils définissent un plan : le plan *ABC*, plan passant par *A* et de vecteurs directeurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Par définition du point *E*, on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc $E \in (ABC)$ autrement dit les points *A*, *B*, *C* et *E* sont coplanaires.
2) Justifions que les droites (*FC*) et (*AD*) sont coplanaires.
   Le point *F* est défini par ; $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; donc *F* appartient au plan passant par le point *A* et de vecteurs directeurs $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$: le plan (*ADC*) ; par conséquent les droites (*FC*) et (*AD*) sont coplanaires.
3) Montrons que les droites (*FC*) et (*AD*) sont sécantes en *G*.
   D'après la définition du point *G* : $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$; donc $G \in (AD)$.
   D'autres parts, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{9}\overrightarrow{AD}$;
   $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} - \frac{2}{9}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} - \frac{2}{9}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ donc
   $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$; alors $G \in (FC)$.
   Le point *G* appartient à la droite (*AD*) et à la droite (*FC*) ; donc les droites (*FC*) et (*AD*) sont sécantes en *G*.

III) Résultats admis relatifs aux bases et aux repères dans l'espace.

(*Outil pour déterminer une base ; un repère de l'espace*)

- Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non nuls et non coplanaires détermine une base de l'espace.
- Tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace, ou tout quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires de l'espace, détermine un repère de l'espace.
- Pour tout point M de l'espace, il existe un triplet de réels (x, y, z) unique tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$.
- Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit direct si un homme (règle du bonhomme d'Ampère), traversé par le vecteur $\vec{k}$ des pieds à la tête et regardant le vecteur $\vec{i}$ a le vecteur $\vec{j}$ à sa gauche.



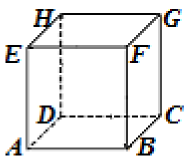
B) PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE.

I) Règles de calculs.

(*Outil pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace ; pour montrer que deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux*)

- Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace ; alors : le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
  Il est calculé dans un plan qui contient A, B, C : le plan (ABC), de la même façon que le produit scalaire dans le plan.
- Le produit scalaire dans l'espace obéit aux mêmes règles de calculs que le produit scalaire dans le plan.
- Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple : *ABCDEFGH* est un cube d'arête 1 cm.



1) Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{FA}$.
2) Vérifier les résultats en considérant le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$

Solution : 1) calculons : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD})^2 = 1$ et $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AF} = -(\overrightarrow{DG})^2 = -2$

2) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, on a : $A\,(1, 0, 0)$; $B\,(1, 1, 0)$; $D\,(0, 0, 0)$; $E\,(1, 0, 1)$; $F\,(1, 1, 1)$; $G\,(0, 1, 1)$. Donc : $\overrightarrow{EF}(0, 1, 0)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 0, 0)$; $\overrightarrow{FG}(-1, 0, 0)$; $\overrightarrow{FA}(0, -1, -1)$

et $\overrightarrow{FB}(0, 0, -1)$; donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG} = 1$ et $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{FA} = -2$.

II) Vecteur normal à un plan.

(*Outil pour déterminer un vecteur mormal à un plan ; pour montrer qu'un point appartient à un plan de l'espace ; pour déterminer une équation cartésienne de plan dans l'espace*)

- Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan défini par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$), si et seulement si pour tout point M de ce plan, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
- Soit (P) un plan de l'espace muni d'un repère orthonrmal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; A un point de (P) ; $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) : alors un point M de l'espace appartient au plan (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Si dans le repère, on a $A\,(x_A,\ y_A,\ z_A)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix}$; alors tout point M (x, y, z) appartient au plan (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$; c'est-à-dire $\alpha\,(x - x_A) + \beta\,(y - y_A) + \gamma\,(z - z_A) = 0$; $\alpha\,(x - x_A) + \beta\,(y - y_A) + \gamma\,(z - z_A) = 0$ qui est de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, est une équation du plan (P).

Exemple : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

A (−2, 1, 1) ; B (−1, 2, 0) et C (0, −1, 1) et le vecteur $\vec{u}(1, 1, 2)$

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2) Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :

1) Montrons que les points A, B et C déterminent un plan.
   $\overrightarrow{AB}(1, 1, -1)$; $\overrightarrow{AC}(2, -2, 0)$; les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. En effet supposons qu'ils sont colinéaires, alors il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$; on a donc 1 = 2 k et 1 = −2 k et aussi −1 = 0 ce qui est impossible. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés ; ils définissent donc un plan : le plan (ABC).
2) Vérifions que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
   On a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 1 - 2 = 0$ (on a aussi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 = 0$) donc le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
3) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC).
   Soit M (x, y, z) ∈ (ABC) on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 1(x+2) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0$; $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = x + y + 2z - 1 = 0$; donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + 2z - 1 = 0$

C) PRODUIT VECTORIEL DANS L'ESPACE.

L'espace est orienté positivement. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.

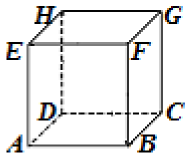
I) Définition du produit vectoriel.

(*Outil pour déterminer le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace*)

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de l'espace ; alors le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (dans cet ordre) est le vecteur :
  - $\vec{o}$ (vecteur nul) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = [\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})] \times \vec{n}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit une base directe de l'espace.

➢ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$



Exemple : *ABCDEFGH* est un cube d'arête *a* cm :
Exprimons en fonction de *a* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{HE} \wedge \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AE}$; $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left|\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = |k|a$; donc $|k| = a$ et alors $k = a$ ou $k = -a$; mais $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ est une base directe les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc de même sens ; $k = a$ et par conséquent

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{HE} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ car les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

II) Propriétés du produit vectoriel.

(*Outil pour déterminer un produit vectoriel*)

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace ; *k* est un réel.

➢ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

➢ $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

➢ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

➢ $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

➢ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$ (vecteur nul) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III) Coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

(*Outil pour déterminer les coordonnées d'un produit vectoriel*)

Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors :

➢ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ $(y z' - y' z, z x' - z' x, x y' - x' y)$.

➢ $\vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right)$.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, vérifions les résultats en considérant le repère $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$

Dans ce repère on a : A $(a, 0, 0)$; B $(a, a, 0)$; C $(0, a, 0)$; E $(a, 0, a)$ et H $(0, 0, a)$.

$\overrightarrow{AB}(0, a, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-a, a, 0)$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\left(0, 0, a^2\right)$ et $\overrightarrow{AE}(0, 0, a)$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{HE}(a, 0, 0)$ et $\overrightarrow{BC}(-a, 0, 0)$; donc $\overrightarrow{HE} \wedge \overrightarrow{BC}(0, 0, 0) = \vec{0}$.

D) APPLICATIONS DU PRODUIT VECTORIEL.

L'espace est orienté positivement. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.

I) Aire d'un parallélogramme ; aire d'un triangle.

(*Outils pour calculer l'aire d'un parallélogramme ; d'un triangle*)

➢ L'aire d'un parallélogramme *ABCD* est : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

➢ L'aire d'un triangle ABC est : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$.

II) Distance d'un point à une droite ; distance d'un point à un plan.

(*Outil pour calculer la distance d'un point à une droite ; la distance d'un point à un plan*)

➢ La distance d'un point *M* à une droite (*AB*) de l'espace est :

$$d\left(M;(AB)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

➢ La distance d'un point *M* à un plan (*ABC*) de l'espace est :

$$d\left(M;(ABC)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}.$$

Exemple 1

On considère dans l'espace une droite (*AB*) et *M* un point de l'espace ; *H* son projeté orthogonal sur la droite (*AB*) (*MH* est la distance de *M* à la droite (*AB*)).

1) a) Démontrer que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$

   b) Démontrer que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

2) En déduire que : $d\left(M,(AB)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

Solution 1 : 1) a) Démontrons que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HA}\wedge\overrightarrow{AB}$; or les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; donc $\overrightarrow{HA}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ et alors $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$.

b) Démontrons que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|$ or les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc $\left\|\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$; par conséquent $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

2) En déduisons que : $d\left(M,(AB)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

On a d'après b) $MH=\dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$; or $d\left(M,(AB)\right)=MH$, donc $d\left(M,(AB)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$

Exemple 2 :

On considère dans l'espace un plan (P) et trois points non alignés *A*, *B* et *C* de ce plan. Soit *M* un point de l'espace ; *H* son projeté orthogonal sur le plan (P). (*MH* est la distance de *M* au plan (P)).

3) a) Démontrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$.

   b) Démontrer que $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

4) En déduire que : $d\left(M,(ABC)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

<u>Solution 2</u> : 1) a) Démontrons que $\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{HA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$; or le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est un vecteur du plan (P) et $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ est orthogonal au plan (P) = (*ABC*) ; donc $\overrightarrow{HA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ et alors $\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Démontrons que $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ donc $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|$ or les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ sont colinéaires donc $\left|\overrightarrow{MH}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$; par conséquent $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|=MH\times\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

2) En déduisons que : $d\left(M,(ABC)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

On a d'après b) $MH=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$; or $d\left(M,(ABC)\right)=MH$, donc

$$d\left(M,(ABC)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$$

III) <u>Volume d'un parallélépipède ; volume d'un tétraèdre.</u>

(*Outil pour calculer le volume d'un parallélépipède ; d'un tétraèdre*)

- Le volume d'un parallélépipède *ABCDEFGH* est : $\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|$
- Le volume d'un tétraèdre *ABCD* est : $\dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{6}$.

EXERCICES

EXERCICES CORRIGES

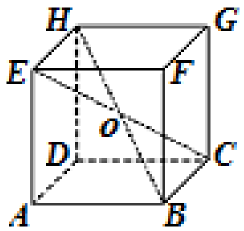
Exercice 10-1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points : A (1, 3, 1) ; B (−1, 2, 2) et C (2, −2, 5).

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Les points A, B et C déterminent – ils un plan ? Justifier la réponse.
2) a) Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadruplet $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b) Déterminer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments [BC] et [AC].
3) On considère les points E (1, −1, 2) et F(5, 5, −1):
   a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) Les points A, B, C et E sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.
   c) Les points A, B, C et F sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

Exercice 10-2

ABCDEFGH est un cube de centre O et d'arête a : $AB = AD = AE = a$.



1) Calculer en fonction de a :
   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$; b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}$; c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$; d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OE}$.
   e) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BF}$; f) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{GE}$.
2) On considère le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ orthonormal direct et on pose $a = 1$.
   a) Donner dans ce repère les coordonnées des points A, B, C, E, F, G, H et O.
   b) Déterminer dans ce repère les coordonnées des vecteurs suivants :
   $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{DH}$.

Exercice 10-3

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1) Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$
2) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(3, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 4) et D(−5, 0, 1).

1) a) Vérifier que le vecteur $\vec{\pi}(4,\ 2,\ 3)$ est normal au plan (ABC).
   b) Soit M (x, y, z) un point de l'espace ; donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que le point M appartienne au plan (ABC).
   c) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2) Soit (Δ), la droite passant par le point *D* et orthogonale au plan (*ABC*) ; *M* (*x*, *y*, *z*) un point quelconque de la droite (Δ) et différent de *D*.

a) Montrons que : $\begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}^*$.

b) En déduire les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal de *D* sur le plan (*ABC*).

c) Calculer la distance du point *D* au plan (*ABC*).

d) Démontrer que le point *H* appartient à l'ensemble (*E*) défini dans la partie *A*.

<u>Exercice 10-4</u>

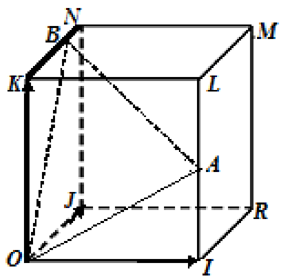
L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1) *A*, *B* et *C* sont trois points non alignés de l'espace.
   a) Montrer que pour tout point *M* de l'espace, n'appartenant pas à la droite (*AB*) : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$.
   b) En déduire l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) (*D*) et (*D*') sont deux droites distinctes et parallèles de l'espace ; *A* est un point de la droite (*D*) ; *A*' le projeté orthogonal de *A* sur la droite (*D*').
   a) Montrer en utilisant la question 1) que pour tout point *B* de (*D*) et pour tout point *M* de (*D*') on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$.
   b) En déduire que : $d(M, (D)) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$.
3) Application numérique : On donne *A*(–1, 1, 2) ; *B*(1, 2, 4) ; *M*(–2, −5, –3) et *A*'(2, –3, 1).
   a) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux.
   b) Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$.
   c) Calculer la distance du point *M* à la droite (*AB*).

<u>Exercice 10-5</u>

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

On considère le cube de sommet *O*, *I*, *R*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N*. On pose *A* le milieu de l'arête [*IL*] et *B* le point défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On désigne par (P) le plan passant par les points *O*, *A* et *B*.



1) a) Préciser les coordonnées des points *R*, *L*, *M*, *N*, *A*, et *B* dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

2) a) En déduire que l'aire du triangle *OAB* vaut $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

b) Soit le point $C\left(1, \dfrac{1}{3}, 1\right)$ dans le repère ;

le point C appartient-il au plan (P) ? Justifier la réponse.

3) On considère le tétraèdre $OABK$

a) Montrer que son volume vaut $\dfrac{1}{9}$

b) En déduire la distance du point K au plan (P).

4) On pose D milieu de $[OB]$ et E milieu de $[KL]$

a) Donner la nature du quadrilatère $ACBD$.

b) Le point E appartient-il au plan (P) ? Justifier la réponse.

c) Calculer le volume de la pyramide de sommet E et de base $ACBD$.

Exercice 10-6

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A (1, 2, 3) ; B (3, 0, 3) ; C (3, 2, 1).

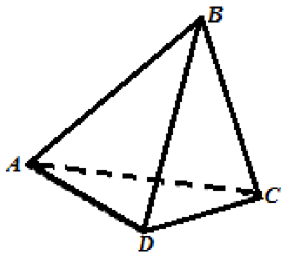
1) Calculer les distances AB et BC.
2) a) Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   b) Calculer la distance du point O au plan (ABC).
3) Soit D le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et I le milieu du segment $[AC]$.
   a) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$.
   b) Déterminer les coordonnées du point D.
   c) Calculer la distance OI.
   d) En déduire que I est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
4) Montrer que les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux.
5) a) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.
   b) Calculer le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet O.

Exercice 10-7 (sujet de Bac)

On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre (voir cours de 2nd) des points A, B, C et D.



1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
   (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).
2) a) Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$?
   b) Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.
   c) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales.
   On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3) a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
   b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$?
   c) En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).
   d) Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
   e) On rappelle que dans l'espace le **plan médiateur** d'un segment est constitué des

points équidistants des extrémités de ce segment. Il s'agit du plan passant par le milieu du segment et orthogonal à ce segment.
Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

f) Démontrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 10-8 (Bac – D)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne A, B, et C de coordonnées respectives (2, 0, 1), (3, –2, 0) et (2, 8, – 4). Aucune figure n'est demandée.

1) Un point M étant de coordonnées (x, y, z), exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

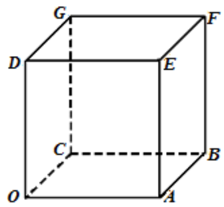
2) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système suivant : $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ x+y+z=11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$

On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.

3) Montrer qu'il existe un point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N.

4) On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $\mathrm{V} = \frac{1}{3}\mathrm{B} \times \mathrm{h}$ où B représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
   a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$.
   b) En utilisant les résultats du 1), et en prenant $M = C$, calculer l'aire du triangle ABC.
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

Exercice 10-9



Soit le cube $OABCDEFG$ représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

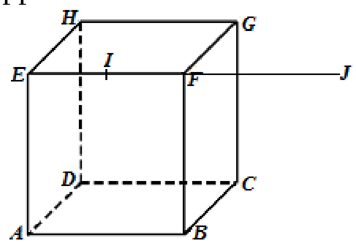
1) a) Calculer en fonction de a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
   b) En déduire l'aire du triangle DLM.
   c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
   a) Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
   b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\,\overrightarrow{OK}$.
      ✓ Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$.
      ✓ En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
   c) Déterminer en fonction de a les coordonnées de H.
   d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

e) En déduire que $HK = \dfrac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.

3) A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre *DLMK* en fonction de *a*.

Exercice 10-10

On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête de longueur 1. On désigne par *I* le milieu de [*EF*] et par *J* le symétrique de *E* par rapport à *F*.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points *I* et *J*.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (*BGI*).
   c) Calculer la distance du point *F* au plan (*BGI*).
2) On note (Δ) la droite passant par *F* et orthogonale au plan (*BGI*).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre *K* de la face *ADHE*.
   c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (*BGI*) sont sécants en un point, noté *L*, de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$.
   d) Le point *L* est-il l'orthocentre du triangle *BGI* ?

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 10-11

Dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points *A* (−2, 3, 1) ; *B* (−1, 2, 2) et *C* (1, 1, 2) et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$

1) Montrer que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan.
2) Déterminer les coordonnées du point *D* pour que *ABCD* soit un parallélogramme.
3) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
4) Déterminer une équation du plan (*ABC*)

Exercice 10-12

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points *A* (−1, 2, 1) ; *B* (1, −1, 3) ; *C* (2, 3, −1) ; *D* (0, 6, −3) et *E* (1, 0, 1).

1) a) Montrer que le quadruplet *ABCD* est un parallélogramme.
   b) Calculer son aire.
2) a) Montrer que le point *E* n'appartient pas au plan (*ABC*).
   b) Calculer la distance de *E* au plan (*ABC*).
   c) Calculer le volume du tétraèdre *ABCE*.

Exercice 10-13

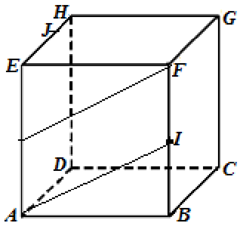
L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points *A* (3, 2, −1) et *H* (1, −1, 3).

1) Calculer la longueur *AH*.
2) Soit *M* (x, y, z) un point de l'espace.
   a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient orthogonaux.
   b) En déduire une équation du plan (P) passant par *H* et orthogonal à la droite (*AH*).
3) On donne les points $B(-6, 1, 1)$; $C(4, -3, 3)$ et $D(-1, -5, -1)$.
   a) Démontrer que les points *B*, *C* et *D* appartiennent au plan (P).
   b) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   c) Calculer l'aire du triangle *BCD*.
   d) Calculer le volume du tétraèdre *ABCD*.
   e) Calculer la distance de *D* au plan (*ABC*).

Exercice 10-14

On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête 1.



On note *I* le milieu du côté [*BF*] et *J* le point défini par $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

On désigne par (P) le plan (*AIJ*).

1) a) Faire une figure et compléter au fur et à mesure.
   b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{JA} \wedge \overrightarrow{JE}$, puis le réel $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
2) L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ par la suite.
   a) Préciser les coordonnées de tous les points de la figure.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$
   c) Vérifier les résultats de la question 1) b) par le calcul avec les coordonnées.
   b) Calculer l'aire du triangle *AIJ*.
3) On considère le point $K\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ dans le repère.
   a) Placer *K* sur la figure.
   b) Calculer la distance de *K* au plan (*AIJ*). *K* appartient-il à ce plan ? Pourquoi ?
   c) Calculer le volume du tétraèdre *AIJK*.
4) On considère le point $L\left(\dfrac{2}{3}, 1, 1\right)$ dans le repère.
   a) Placer *L* sur la figure.
   b) Montrer que *L* appartient à $(GF) \cap (AIJ)$.
   c) Donner la nature du quadrilatère *AILJ*.
   d) Calculer le volume de la pyramide *AILJK*.

Exercice 10-15

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les plans (P_1), (P_2) et (P_3)
Les plans (P_1) et (P_2) ont pour équations cartésiennes respectives $x - z = 0$ et
$x + 2y + z - 2 = 0$ et le plan (P_3) est défini par le point *A* (3, 2, 1) et les vecteurs $\vec{u}(-1, 0, 1)$ et $\vec{v}(2, -1, 0)$.

1) Montrer que pour tout point M (x, y, z) de l'espace ; $M \in (P_3)$ si et seulement si il existe un couple de réels (k, t) unique tel que : $\begin{cases} x = -k + 2t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = k + 1 \end{cases}$.
2) Déterminer un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ normal au plan (P_3).
3) Donner une équation cartésienne du plan (P_3).
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection (notés respectivement B, C et D) du plan (P_3) avec les axes du repère (Ox), (Oy) et (Oz). (On rappelle que l'axe (Oz) par exemple a pour équation cartésienne dans l'espace : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$)
5) Montrer que les plans (P_2) et (P_3) sont strictement parallèles.
6) a) Vérifier que le vecteur $\vec{w}(1, 0, -1)$ est normal au plan (P_1).
   b) En déduire que les plans (P_1) et (P_3) sont perpendiculaires.
7) Vérifier que la droite (Δ) intersection des plans (P_1) et (P_3) passe par le point B $(1, 3, 1)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{s}(-1, 1, -1)$.

Exercice10-16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A, B,C et D de coordonnées respectives $(3, 2, 1)$, $(5, 1, -1)$, $(-1, 4, -1)$ et $(1, -2, 1)$. Aucune figure n'est demandée.

1) a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
   b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   c) Montrer qu'un point M (x, y, z) de l'espace appartient au plan (ABC) si et seulement si x, y et z vérifient : $x + 2y - 7 = 0$.
2) On désigne par (P) le plan de l'espace passant par le point D et de vecteur normal le vecteur $\vec{u}(-2, 1, 5)$.
   a) Déterminer une équation du plan (P).
   b) Vérifier que les points A et C appartiennent aussi à (P) ; ainsi (P) = (ACD).
3) On rappelle les théorèmes (« outils ») suivants :
   - « Soit (P) et (P') deux plans de l'espace. (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul de l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul de l'autre. »
   - « Soit (P) et (P') deux plans de l'espace. Si (P) et (P') sont sécants, alors leur intersection est une droite. »

   a) Montrer que les plans (ABC) et (ACD) sont perpendiculaires.
   b) Préciser l'intersection de ces deux plans ; on la notera (Δ).
4) Soit E le point de coordonnées $(5, -2, -1)$. Soit t un réel, on considère le point M de coordonnées $(1 + 2t, 3 - t, t)$.
   a) Vérifier que le point E n'appartient ni à (ABC), ni à (ACD), ni à (Δ).
   b) Déterminer la distance de E au plan (ABC) ; la distance de E au plan (ACD) puis la distance de E à (Δ).
   c) Déterminer en fonction de t, EM^2.
5) On considère la fonction numérique f définie par : $f(t) = t^2 - 4t + 7$.
   a) Etudier le sens des variations de f et dresser son tableau de variations.
   b) Pour quel point M, la distance EM est-elle minimale ?
6) Soit I le point de coordonnées $(5, 1, 2)$.
   a) Vérifier que $I \in (\Delta)$.
   b) Démontrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur (Δ).

Des outils pour traiter les exercices corrigés et solutions

Exercice 10-1

1) *Coordonnées d'un vecteur défini par deux points ; Plan défini par 3 points.*
2) *Définition d'un parallélogramme ; Coordonnées du milieu d'un bipoint.*
3) *Coordonnées d'un produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *; Conditions pour que trois points de l'espace soient coplanaires.*

Solution

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : A (1, 3, 1) ; B (−1, 2, 2) et C (2, −2, 5).

1) a) Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, 1)$; $\overrightarrow{AC}(1, -5, 4)$.

b) Vérifions si les points A, B et C déterminent un plan ? Justifions la réponse.

On sait que trois points non alignés déterminent un plan ; or trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ où k est un réel non nul. On a ici $-2 = (-2) \times 1$; mais $-1 \neq (-2) \times (-5)$ et aussi $1 \neq (-2) \times 4$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; donc les points A, B et C ne sont pas alignés ; ils déterminent alors un plan.

2) a) Déterminons les coordonnées du point D pour que le quadruplet $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; soit D (x, y, z) ;

$\overrightarrow{DC}(2-x,\ -2-y,\ 5-z)$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ entraine que $x = 4$; $y = -1$; $z = 4$. Alors le point D aura pour coordonnées (4, −1, 4).

b) Déterminons les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

$I\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{7}{2}\right)$ et $J\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

3) On considère les points E (1, −1, 2) et F(5, 5, −1) :

a) Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\right)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,\ 9,\ 11)$.

b) Vérifions si les points A, B, C et E sont coplanaires ; Justifions la réponse.

Les points A, B, C et E sont coplanaires si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AE} = 0$;

$\overrightarrow{AE}(0, -4, 1)$ et $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AE} = -25 \neq 0$; donc les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

c) Vérifions si les points A, B, C et F sont coplanaires ? Justifions la réponse.

$\overrightarrow{AF}(4,\ 2,\ -2)$ et $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AF} = 0$; donc les points A, B, C et F sont coplanaires.

Exercice 10-2

1) *Définition, Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs ; Définition, Propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs ;*
2) *Coordonnées d'un point dans l'espace muni d'un repère ; Coordonnées d'un produit vectoriel.*

Solution

$ABCDEFGH$ est un cube de centre O et d'arête a : $AB = AD = AE = a$.

1) Calculons en fonction de a :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = a^2$; ou :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\times AC\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\times\sqrt{2}\,a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$$

b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=-DE^2=-a^2$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=-a\times a\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-a^2$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}a^2$; *ou* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\right)=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}a^2$;

d) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}AC^2=-a^2$;

e) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BF}=k(-\overrightarrow{BC})=k\overrightarrow{CB}$; avec $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BF}\right\|=a^2=|k|a$; $k=-a$

ou $k = a$; mais $\left(-\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BF},\ -\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BF}\right)$ est une base directe ; donc $k = a$ et alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{CB}$.

f) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{GE}=\vec{0}$; car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires.

2) On considère le repère $(D,\ \overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ orthonormal direct et on pose $a = 1$.

a) Donnons dans ce repère les coordonnées des points A, B, C, E, F, G, H et O.
$A\,(1, 0, 0)$; $B\,(1, 1, 0)$; $C\,(0, 1, 0)$; $D\,(0, 0, 0)$; $E\,(1, 0, 1)$; $F\,(1, 1, 1)$; $G\,(0, 1, 1)$; $H\,(0, 0,1)$; $O\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

b) Déterminons dans ce repère les coordonnées des vecteurs suivants :
$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DH}(0,\ 0,\ 1)$; $\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DH}(0,\ 0,\ 1)$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DB}\,(0,\ 0,\ -2)$;
$\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DG}\,(0, -1, 1)$; $\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{DC}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{DH}\,(1, 0, 0)$.

Exercice 10-3

Partie A)

1) *Propriétés du produit scalaire ; Relation de Chasles.*
2) *Définition d'une sphère de l'espace*

Partie B)

1) *Définition de vecteur normal à un plan dans l'espace.*
2) *Définition de vecteurs colinéaires ; Coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan ; Définition de la distance d'un point à une droite ; Propriété caractéristique d'un ensemble.*

Solution

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1) Démontrons que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$
$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=MI^2+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IA}=MI^2-IA^2$; $\left(\text{car } \overrightarrow{ID}=-\overrightarrow{IA}\right)$.

2) En déduisons l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$
On a donc : $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$ équivaut à $MI^2-IA^2=0$; c'est-à-dire $MI=IA$;
ce qui veut dire que l'ensemble considéré est la sphère de centre I et de rayon IA, ou encore la sphère de centre I passant par A.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 4)$ et $D(-5, 0, 1)$.

1) a) Vérifions que le vecteur $\vec{\pi}(4,\ 2,\ 3)$ est normal au plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (−3, 6, 0) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (−3, 0, 4) donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et le plan (*ABC*) est bien défini.

Le vecteur $\vec{\pi}$ est normal à ce plan si seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Or $\vec{\pi} \cdot \overrightarrow{AB} = -12 + 12 = 0$ et $\vec{\pi} \cdot \overrightarrow{AC} = -12 + 12 = 0$.

Donc $\vec{\pi}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, d'où $\vec{\pi}$ est normal au plan (*ABC*).

b) Soit *M* (*x*, *y*, *z*) un point de l'espace ; donnons une condition nécessaire et suffisante sur *x*, *y* et *z* pour que le point *M* appartienne au plan (*ABC*).

Le point *M* (*x*, *y*, *z*) appartient au plan (*ABC*) si et seulement si $\vec{\pi} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$; c'est-à-dire si :4 (*x* – 3) + 2 (*y*) + 3 (*z*) = 0 ; soit 4 *x* +2 *y* + 3 *z* – 12 = 0.
4 *x* +2 *y* + 3 *z* – 12 = 0 une équation du plan (*ABC*).

c) Vérifions que le point *D* n'appartient pas au plan (*ABC*).
D'après la réponse à la question b) ci-dessus, un point *M* (*x*, *y*, *z*) appartient au plan (*ABC*) si et seulement si 4 *x* +2 *y* + 3 *z* – 12 = 0 ; pour *D* (−5, 0, 1), on a −20 +3 – 12 = −29 ; −29 ≠ 0 ; donc *D* n'appartient pas au plan (*ABC*).

2) Soit (Δ), la droite passant par le point *D* et orthogonale au plan (*ABC*) ; *M* (*x*, *y*, *z*) un point quelconque de la droite (Δ) et différent de *D*.

a) Montrons que : $\begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}^*$.

La droite (Δ) est orthogonale au plan (*ABC*) donc elle admet $\vec{\pi}$ comme vecteur directeur. Comme elle passe par *D*, alors quelque soit un point *M* (*x*, *y*, *z*) de (Δ), le vecteur $\vec{\pi}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{DM}$; autrement dit il existe un réel non nul *t* tel que $\overrightarrow{DM} = t\vec{\pi}$; c'est-à-dire $\begin{cases} x + 5 = 4t \\ y = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases}$; donc $\begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$:

b) En déduisons les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal de *D* sur le plan (*ABC*).
Le point *H* est l'intersection de (Δ) et de (*ABC*). Ses coordonnées vérifient donc la relation 4 *x* +2 *y* + 3 *z* – 12 = 0 et il existe un réel *t* tel que : $\begin{cases} x = 4t - 5 \\ y = 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases}$; alors on a :

4 (4 *t* – 5) + 2 (2 *t*) + 3 (3 *t* + 1) – 12 = 0 ; ce qui donne 29 *t* – 29 = 0 ; *t* = 1. Donc *H* a pour coordonnées (−1, 2, 4).

c) Calculons la distance du point *D* au plan (*ABC*).
La distance de *D* au plan (*ABC*) n'est autre chose que la distance *DH*.
Et $DH = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$.

d) Démontrons que le point *H* appartient à l'ensemble (*E*) défini dans la partie *A*.
On a *H* ∈ (*ABC*) ∩ (Δ). Or (Δ) est orthogonale à ce plan. Donc en particulier, (*HA*) et (*HD*) sont perpendiculaires. On en déduit que $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$ et donc que *H* appartient à cet ensemble (*E*) (sphère de rayon *IA*).

<u>Exercice 10-4</u>

1) Propriétés du produit vectoriel : relation de Chasles ; Propriété du produit vectoriel :
2) Propriété du produit vectoriel ; Distance d'un point à une droite ; Propriété du produit scalaire :

3) *condition d'orthogonalité de deux vecteurs ; Coordonnées d'un produit vectoriel ; Application du produit vectoriel au calcul de distance.*

Solution

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1) *A*, *B* et *C* sont trois points non alignés de l'espace.

a) Montrons que pour tout point *M* de l'espace, n'appartenant pas à la droite (*AB*) :

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ équivaut à (en utilisant la relation de Chasles)

$\overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ équivaut alors à

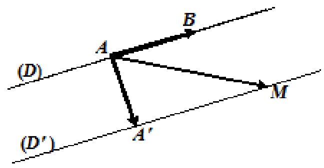
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$.

b) En déduisons l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$; or $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires ; donc l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{O}$ est la droite passant par le point *C* et parallèle à la droite (*AB*). D'où l'ensemble des points *M* tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est la droite passant par le point *C* et parallèle à la droite (*AB*).

2) (*D*) et (*D*') sont deux droites distinctes et parallèles de l'espace ; *A* estun point de la droite (*D*) ; *A*' le projeté orthogonal de *A* sur la droite (*D*').

a) Montrons en utilisant la question 1) que pour tout point *B* de (*D*) et pour tout point *M* de (*D*') on a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$.



$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$ car

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'M} = \vec{O}$ la droite (*AB*) étant parallèle à (*D'*).

b) En déduisons que : $d\left(M, (D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

Par définition d(*M*, (*D*)) = *AA'* ; de la relation $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$, on a :

$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AA'}\right\| \times \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AA'}\right\|$; donc

$\left\|\overrightarrow{AA'}\right\| = AA' = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$; autrement dit $d\left(M, (D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

3) Application numérique : *A*(–1, 1, 2) ; *B*(1, 2, 4) ; *M*(–2, −5, –3) et *A*'(2, –3, 1).

a) Vérifions que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2, 1, 2) et le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées (3, −4, −1) et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}$ = 6 – 4 – 2 = 0 ; donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux.

b) Vérifions que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées (7, 8, −11) et le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées (7, 8, −11) ; donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AA'}$.

c) Calculons la distance du point *M* à la droite (*AB*).

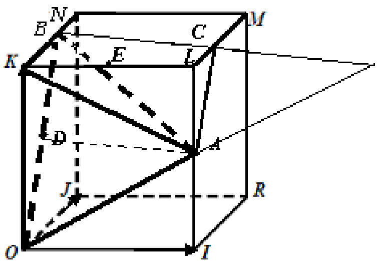
D’après la question 2) b), $d\left(M,(AB)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\dfrac{\sqrt{234}}{3}=\sqrt{26}$.

Exercice 10-5

1) *Coordonnées d’un point dans un repère de l’espace ; Coordonnées du milieu d’un bipoint ; Coordonnées d’un produit vectoriel.*
2) *Application du produit vectoriel au calcul d’aire d’un triangle ; Condition pour qu’un point appartienne à un plan. (ou application du produit vectoriel au calcul de la distance d’un point à un plan)*
3) *Application du produit vectoriel au calcul de volume ; application du produit vectoriel au calcul de la distance d’un point à un plan.*
4) *Définition d’un parallélogramme ; Application du produit vectoriel au calcul de la distance d’un point à un plan ; Application du produit vectoriel au calcul de volume.*

Solution

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.
On considère le cube de sommet O, I, R, J, K, L, M, N. On pose A le milieu de l'arête $[IL]$ et B le point défini par $\overrightarrow{KB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On désigne par (P) le plan passant par les points O, A et B.



1) a) Précisons les coordonnées des points R, L, M, N, A, et B dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

$R\,(1, 1, 0)$; $L\,(1, 0, 1)$; $M\,(1, 1, 1)$; $N\,(0, 1, 1)$;

A est milieu de $[IL]$; $I\,(1, 0, 0)$ et alors $A\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$;

B est tel que $\overrightarrow{KB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$; $\begin{cases} x_B=0 \\ y_B=\dfrac{2}{3} \\ z_B=1 \end{cases}$; donc $B\left(0, \dfrac{2}{3}, 1\right)$.

b) Déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.

$\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}, -1, \dfrac{2}{3}\right)$

2) a) En déduisons que l'aire du triangle OAB vaut $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

L’aire du triangle OAB est $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{9}+1+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

b) Le point C est tel que $\overrightarrow{LC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{LM}$. (Voir la position de C sur la figure)

Voyons si le point C appartient au plan (P) et justifions la réponse.

Le point C appartient au plan (P) car, par exemple $\overrightarrow{OB}\left(0, \dfrac{2}{3}, 1\right)=2\overrightarrow{AC}\left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

et comme O, A et B appartiennent au plan (P), alors C appartient aussi au plan (P).

Remarque : On pourrait aussi utiliser l'outil « *application du produit vectoriel au calcul de la distance d'un point à un plan* » ; on aura :

$$d\left(C,\left(P\right)\right)=d\left(C,\left(OAB\right)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{OC}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}=0.$$

3) On considère le tétraèdre *OABK*

a) Montrons que le volume du tétraèdre *OABK* vaut $\frac{1}{9}$

Le volume du tétraèdre *OABK* est : $\frac{\left|\overrightarrow{OK}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right|}{6}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

b) En déduisons la distance du point *K* au plan (P).

Le volume d'un tétraèdre est V $=\frac{1}{3}$B $\times$h où B représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante. Donc h = $\frac{3\text{V}}{\text{B}}=\frac{1}{3}\times\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$. Par conséquent

$$d\left(K,\left(P\right)\right)=d\left(K,\left(OAB\right)\right)=\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

4) On pose *D* milieu de [*OB*] et *E* milieu de [*KL*]

a) Donnons la nature du quadrilatère *ACBD*.

Le point *D* a pour coordonnées $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ et le point *E* a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},0,1\right)$; On a $\overrightarrow{DB}\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\overrightarrow{AC}\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$; donc le quadrilatère *ACBD* est un parallélogramme.

b) Vérifions si le point *E* appartient au plan (P) ? Justifions la réponse.
Le point *E* n'appartient pas au plan (P) ; car :

$$d\left(E,\left(P\right)\right)=d\left(E,\left(OAB\right)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}=\frac{3\sqrt{14}}{28}\neq0.$$

c) Calculons le volume de la pyramide de sommet *E* et de base *ACBD*.

Le volume de la pyramide *ACBDE* est : $\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right)\right|}{3}$;

$\overrightarrow{AC}\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\left(-1,\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$; et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{AE}\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

Donc le volume de la pyramide de sommet *E* et de base *ACBD* est $\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right)\right|}{3}=\frac{1}{12}$.

Exercice 10-6

1) *Distance de deux points dans l'espace.*
2) *Propriétés du produit vectoriel ; Application du produit vectoriel au calcul de la distance d'un point à un plan.*
3) *Définition d'un parallélogramme ; Coordonnées d'un vecteur défini par deux points :Calculs vectoriels dans l'espace ; Distance de deux points dans l'espace ; Définition de la distance d'un point à un plan.*
4) *Propriétés de plans perpendiculaires dans l'espace «* **Si un plan (P) contient une droite perpendiculaire à un autre plan (P'), alors le plan (P) est perpendiculaire à ce plan (P') »**

5) Application du produit vectoriel au calcul d'aire et de volume.

Solution

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A (1, 2, 3) ; B (3, 0, 3) ; C (3, 2, 1).

1) Calculons les distances AB et BC.

   $\overrightarrow{AB}(2, -2,\ 0)$ donc $AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC}(0, 2,\ -2)$ donc $BC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

2) a) Montrons que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   Les points A, B, C ne sont pas alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires ; autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\neq\vec{O}$; en effet $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right)(4,\ 4,\ 4)\neq\vec{O}(0,\ \ 0,\ 0)$; donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

   b) Calculons la distance du point O au plan (ABC).

$$d\left(O,\ (ABC)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{BO}\cdot\left(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{24}{4\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

3) Soit D le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et I le milieu du segment [AC].

   a) Donnons la nature du quadrilatère $ABCD$.
   Par définition, $ABCD$ est un parallélogramme.

   b) Déterminons les coordonnées du point D.
   On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}(0,\ 2,\ -2)$ et A (1, 2, 3) ; donc D a pour coordonnées (1, 4, 1).

   c) Calculons la distance OI.
   Le point I a pour coordonnées (2, 2, 2) ; donc $OI=\left\|\overrightarrow{OI}\right\|=2\sqrt{3}$

   d) En déduisons que I est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   Le point I est milieu du segment [AC] ; donc le point I appartient au plan (ABC) ; de plus $OI = d$ (O, (ABC)) ; donc par définition de la distance d'un point à un plan, le point I est le projeté du point O sur le plan (ABC).

4) Montrons que les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux.

   Le point O n'appartenant pas au plan (ABC) contenant le point D, (OAC) et (OBD) définissent effectivement deux plans.

   $\overrightarrow{OA}(1,\ 2,\ 3)$ et $\overrightarrow{OC}(3,\ 2,\ 1)$ donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}(-4,\ 8,\ -4)$;

   $\overrightarrow{OB}(3,\ 0,\ 3)$ et $\overrightarrow{OD}(1,\ 4,\ 1)$ donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}(-12,\ 0,\ 12)$;

   Le vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}$ est par définition normal au plan (OAC) ; et il est contenu dans le plan (OBD) car $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OD}$; donc le plan (OBD) contient une droite orthogonale au plan (OAC) ; alors le plan (OBD) est orthogonal au plan (OAC).

   On pourrait aussi montrer que le vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}$ est orthogonal au plan (ODB) et appartient au plan (OAC) ; ($\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{OA}-6\overrightarrow{OC}$)

5) a) Calculons l'aire du quadrilatère $ABCD$.

   L'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|=4\sqrt{3}$

   b) Calculons le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet O.

   Le volume de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet O est :

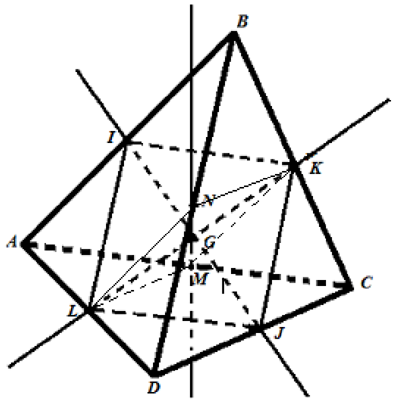
$$\frac{\left|\overrightarrow{BO}\cdot\left(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right)\right|}{3}=\frac{24}{3}=8.$$

Exercice 10-7 :

1) *Propriétés du barycentre d'un système de points pondérés (voir cours de 2nd C).*
2) *Théorème de la droite des milieux et propriétés des losanges ; Propriétés de losange.*
3) *Définition de droite orthogonale à un plan (voir cours de 2nd C) ; Théorème de la droite des milieux et propriétés de deux droites parallèles ; Définition de plan médiateur d'un segment ; Définition de sphère dans l'espace et théorème de Pythagore.*

Solution

On considère un tétraèdre *ABCD*.
On note *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N* les milieux respectifs des arêtes [*AB*], [*CD*], [*BC*], [*AD*], [*AC*] et [*BD*].
On désigne par *G* l'isobarycentre des points *A*, *B*, *C* et *D*.



1) Montrons que les droites (*IJ*), (*KL*) et (*MN*) sont concourantes en *G*.
G est le barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)} or *I* est le milieu de [*AB*] donc le barycentre de {(*A*, 1) (*B*, 1)} et *J* le milieu de [*CD*] donc le barycentre de {(*C*, 1) (*D*, 1)} ; donc, en utilisant les propriétés des barycentres partiels, *G* est le barycentre de {(*I*, 2) (*J*, 2)}. Donc $G \in (IJ)$.
De même *G* barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}, *K* barycentre de {(*B*, 1) (*C*, 1)} et *L* barycentre de {(*A*, 1) (*D*, 1)} donc *G* barycentre de {(*K*, 2) (*L*, 2)} donc $G \in (KL)$.
De même *G* barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}, *M* barycentre de {(*A*, 1) (*C*, 1)} et *N* barycentre de {(*B*, 1) (*D*, 1)} donc *G* barycentre de {(*M*, 2) (*N*, 2)} donc $G \in (MN)$
On a : $G \in (IJ)$ et $G \in (KL)$ et $G \in (MN)$ donc les droites (*IJ*), (*KL*) et (*MN*) sont concourantes en G.
Dans la suite de l'exercice, on suppose que *AB* = *CD*, *BC* = *AD* et *AC* = *BD*.
(Le tétraèdre *ABCD* est dit équifacial, car ses faces sont isométriques).

2) a) Précisons la nature du quadrilatère *IKJL*.
Dans le triangle *BAC*, *K* est milieu de [*BC*] et *I* milieu de [*AB*] donc, d'après le théorème de la droite des milieux (classe de 3ème) : $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
De même, dans le triangle *DAC*, *J* est milieu de [*CD*] et *L* milieu de [*AD*] donc $\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; on a alors $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{JL}$. *IKJL* est un parallélogramme.
Dans le triangle *ABD*, *I* milieu de [*AB*] et *L* milieu de [*AD*] donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; et d'autre part *AC* = *BD*. On a donc $KI = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = IL$.
IKJL est un parallélogramme qui a 2 côtés adjacents de même longueur, donc *IKJL* est un losange.

b) Précisons également la nature des quadrilatères *IMJN* et *KNLM*.
- Nature de *IMJN*.
Dans le triangle *ABC*, *M* est milieu de [*AC*] et *I* milieu de [*AB*] donc, d'après le

théorème de la droite des milieux : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

De même, dans le triangle *BDC*, *J* est milieu de [*CD*] et *N* milieu de [*BD*] donc $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; on a alors $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$. *IMJN* est un parallélogramme.

Dans le triangle *ABD*, *I* milieu de [*AB*] et *N* milieu de [*BD*] donc $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;

et d'autre part *AD* = *BC*. On a donc $IN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = IM$.

IMJN est un parallélogramme qui a 2 côtés adjacents de même longueur, donc *IMJN* est un losange.

- On montre de même que *KNLM* est un losange en considérant les triangles *BCD* et *ADC*, puis le triangle *ABC* et utiliser *AB* = *DC*.

c) En déduisons que (*IJ*) et (*KL*) sont perpendiculaires.

IKJL est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires, d'où (*IJ*) et (*KL*) sont perpendiculaires.

On admet de même que (*IJ*) et (*MN*) sont perpendiculaires et (*KL*) et (*MN*) sont perpendiculaires.

3) a) Montrons que la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*MKN*).

D'après la question précédente, (*IJ*) est perpendiculaire à (*MN*) et (*IJ*) est perpendiculaire à (*KL*). Or *KNLM* étant un losange, les droites (*MN*) et (*KL*) ne sont pas parallèles ; donc (*KNLM*) définit un plan : le plan (*MNK*) ; (*IJ*) est perpendiculaire à deux droites non parallèles du plan (*MNK*). Donc (*IJ*) est perpendiculaire à (*MNK*).

b) Donnons la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$.

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$; car (*IJ*) est orthogonale au plan (*KNM*) et (*MK*) appartient au plan (*MNK*) donc (*IJ*) perpendiculaire à (*MK*).

c) En déduisons que (*IJ*) est orthogonale à la droite (*AB*).

Dans le triangle *ABC*, *M* milieu de [*AC*] et *K* milieu de [*BC*] donc, d'après le théorème de la droite des milieux, on a : $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (*IJ*) est othogonale à (*MK*) et (*MK*) est parallèle à (*AB*). Donc (*IJ*) et (*AB*) sont orthogonales.

d) Montrons de même que (*IJ*) est orthogonale à la droite (*CD*).

On a de même $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{NK} = 0$; car (*IJ*) est orthogonale au plan (*KNM*) et (*NK*) appartient au plan (*MNK*) donc (*IJ*) perpendiculaire à (*NK*). De plus dans le triangle *BCD*, *N* milieu de [*BD*] et *K* milieu de [*BC*] donc, d'après le théorème de la droite des milieux, on a : $\overrightarrow{NK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Donc(*IJ*) et (*DC*) sont orthogonales.

e) Montrons que *G* appartient aux plans médiateurs de [*AB*] et [*CD*].

(*IJ*) est perpendiculaire à [*AB*] en son milieu *I* donc (*IJ*) est dans le plan médiateur de [*AB*]. Or $G \in (IJ)$ donc G appartient au plan médiateur de [*AB*].

(*IJ*) est perpendiculaire à [*CD*] en son milieu *J* donc (*IJ*) est dans le plan médiateur de [*CD*]. Or $G \in (IJ)$ donc *G* appartient au plan médiateur de [*CD*].

D'où *G* appartient aux plans médiateurs des segments [*AB*] et [*CD*].

f) Démontrons que *G* est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *ABCD*.

G appartient au plan médiateur de [*AB*] donc *GA* = *GB*.

G appartient au plan médiateur de [*CD*] donc *GC* = *GD*.

On peut calculer *GA* en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle *AIG* rectangle en *I*, puisque (*GI*) = (*IJ*) et que (*IJ*) est perpendiculaire à (*AB*) en *I* :

$GA^2 = GI^2 + IA^2 = GI^2 + \frac{1}{4}AB^2$

De même, on peut calculer *GC* en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle *CJG* rectangle en *J*, puisque (*GJ*) = (*IJ*) et que (*IJ*) est perpendiculaire à (*CD*) en *J* :

$GC^2 = GJ^2 + JC^2 = GJ^2 + \frac{1}{4}CD^2$

Comme *CD* = *AB* (donnée de l'énoncé), et *GI* = *GJ* car *G* est l'isobarycentre de *I* et *J* (cf. réponse à la question 1.), on obtient :

$GA^2 = GI^2 + \frac{1}{4}AB^2 = GJ^2 + \frac{1}{4}CD^2 = GC^2$; donc *GA* = *GC* et par suite on a :

GA = *GB* = *GC* = *GD*.

G est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre *ABCD*.

<u>Exercice 10-8</u> (Bac – D)

1) *Coordonnées d'un produit vectoriel.*
2) *Résolution d'un système d'équations linéaires (par la méthode de Pivot de Gauss).*
3) *Egalité de deux vecteurs.*
4) *Application du produit vectoriel au calcul de volume ; Au calcul d'aire ; Définition du volume d'un tétraèdre.*

<u>Solution</u>

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne *A*, *B*, et *C* de coordonnées respectives (2, 0, 1), (3, –2, 0) et (2, 8, – 4).

1) Un point *M* étant de coordonnées (*x*, *y*, *z*), exprimons en fonction de *x*, *y* et *z* les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

   On a $\overrightarrow{AM}(x-2,\ y,\ z-1)$, $\overrightarrow{BM}(x-3,\ y+2,\ z)$; $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, le système suivant : $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ x+y+z=11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ x+y+z=11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$; $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1+L_3 \end{matrix}$ on a $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ 2y-z=7 \\ 3y-5z=0 \end{cases}$; $L_3 \leftarrow 3L_2 - 2L_3$

on a $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ 2y-z=7 \\ 7z=21 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} z=3 \\ y=5 \\ x=3 \end{cases}$; $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ = {(3, 5, 3)}.

3) Montrons qu'il existe un point *N* vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donnons les coordonnées du point *N*.

   Soit (*x*, *y*, *z*) les coordonnées du point *N* si il existe. D'après la question 1) ;

   $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ équivaut à $\begin{cases} y-2z+2=x-2 \\ -x-z+3=y-8 \\ 2x+y-4=z+4 \end{cases}$; ce qui

   donne $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ x+y+z=11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$; or d'après les résultats à la question 2) ce système admet une solution unique. Donc il existe un point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et dont les coordonnées sont (3, 5, 3).

4) Le volume d'un tétraèdre est V $= \frac{1}{3}$ B $\times$h ; où B représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

a) Le point N étant défini à la question précédente, montrons que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$. Le volume du tétraèdre $ABCN$ est :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\right\|\right] \times \frac{\left|\overrightarrow{NC} \cdot \left(\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\right\|} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{NC} \cdot \left(\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CN} \cdot \left(\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\right)\right|$$

$$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CN} \cdot \left(\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CN}\right| = \frac{1}{6}CN^2.$$

b) En utilisant les résultats du 1), et en prenant $M = C$, calculons l'aire du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est $\frac{\left\|\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\right)\right\|}{2} = \frac{\sqrt{413}}{2}$

c) Utilisons les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

On sait que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule V $= \frac{1}{3}$ B $\times$h ; où B représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante. Donc dans notre cas,

V $= \frac{1}{3}$ B $\times$h =

$\frac{1}{3}\frac{\left\|\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\right)\right\|}{2} \times d\left(N, (ABC)\right) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{413}}{2} \times d\left(N, (ABC)\right) = \frac{1}{6}CN^2$; on en déduit que $d\left(N, (ABC)\right) = \frac{CN^2}{\sqrt{413}} = \frac{59}{\sqrt{413}}$.

Exercice 10-9

1) *Coordonnées du produit vectoriel ; Application du produit vectoriel au calcul d'aire ; Droite orthogonale à un plan.*
2) *Définition du produit scalaire (par les projections) ; Définition du produit scalaire (par les composantes des vecteurs) ; Calcul algébrique ; Egalité de deux vecteurs ; Relation de Chasles, calculs vectoriels dans l'espace ; Distance de deux points.*
3) *Application du produit vectoriel au calcul de volume.*

Solution

Soit le cube $OABCDEFG$; l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1) a) Calculons en fonction de a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.

On a D (0, 0, 1) ; M (a, 0, 0) ; L (0, a, 0) dans le repère et par suite :

$\overrightarrow{DM}\left(a,\ 0,\ -1\right);\ \overrightarrow{DL}\left(0,\ a,\ -1\right):\ \overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\left(a,\ a,\ a^2\right)$

b) En déduisons l'aire du triangle DLM.

L'aire du triangle DLM est : $\frac{\left\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\right\|}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 2}$

c) Démontrons que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

Le point K a pour coordonnées (1, 1, a) ; la droit (OK) est orthogonale au plan (DLM) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires ; or $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\left(a,\ a,\ a^2\right)$ et $\overrightarrow{OK}$ (1, 1, a) ; on a bien $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL} = a\overrightarrow{OK}$; les vecteurs $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires et donc la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a) Démontrons que $\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} . \overrightarrow{OK}$.

Comme H est le projeté orthogonal de O sur le plan (DLM) ; alors le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MH}$; H est donc le projeté orthogonal du point M sur la droite (OK) et donc d'après la définition du produit scalaire (par les projections), $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.

✓ Démontrons que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$.

Dans le repère donné, $\overrightarrow{OM}(a,\ 0,\ 0)$; $\overrightarrow{OK}(1,\ 1,\ a)$; $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = a$; alors $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK} = \lambda \overrightarrow{OK}^2 = \lambda\left(a^2+2\right)$; donc $\lambda\left(a^2+2\right) = a$; on a par suite que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$.

✓ En déduisons que H appartient au segment [OK].

On a $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$, avec $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. Mais $0 < a < a^2+2$, donc $0 < \dfrac{a}{a^2+2} < 1$ on a alors $0 < \lambda < 1$; par suite H appartient au segment [OK].

c) Déterminons en fonction de a les coordonnées de H.

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{a}{a^2+2}\overrightarrow{OK}$; or $\overrightarrow{OK}(1, 1, a)$; donc les coordonnées de $\overrightarrow{OH}$ sont $\left(\dfrac{a}{a^2+2},\ \dfrac{a}{a^2+2},\ \dfrac{a^2}{a^2+2}\right)$.

d) Exprimons $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

On a $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = (1-\lambda)\overrightarrow{OK} = \left(1 - \dfrac{a}{a^2+2}\right)\overrightarrow{OK} = \left(\dfrac{a^2-a+2}{a^2+2}\right)\overrightarrow{OK}$

e) En déduisons que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

$$HK = \left|\frac{a^2-a+2}{a^2+2}\right| OK = \left(\frac{a^2-a+2}{a^2+2}\right)\sqrt{a^2+2} = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}.$$

3) A l'aide des questions précédentes, déterminons le volume du tétraèdre $DLMK$ en fonction de a.

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\,\frac{\left\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\right\|}{2} \times HK = \frac{a}{6}\sqrt{a^2+2} \times \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{a^3-a^2+2a}{6}.$$

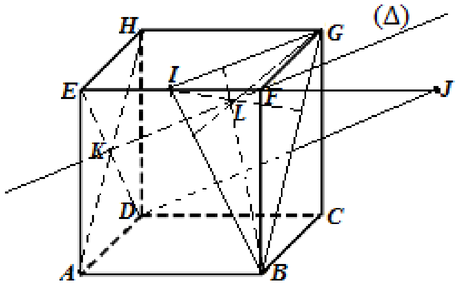
Exercice 10-10

1) *Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace ; Définition de vecteur normal à un plan ; Application du produit vectoriel au calcul de distance.*
2) *Définition de représentation paramétrique d'une droite (voir cours de maths de 2nd C) ; Condition pour qu'un point appartienne à une droite de représentation paramétrique donnée ; Coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan ; Définition de l'orthocentre d'un triangle.*

Solution

On considère un cube *ABCDEFGH* d'arête de longueur 1. *I* désigne le milieu de [*EF*] et *J* le symétrique de *E* par rapport à *F*.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Déterminons les coordonnées des points *I* et *J*.

Dans le repère donné, on a *E* (0, 0, 1) et *F* (1, 0, 1) or *I* est milieu de [*EF*] donc $I\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$.

J symétrique de *E* par rapport à *F* ; donc *F* est milieu de [*EJ*] d'où *J* (2, 0, 1).

b) Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (*BGI*).

Dans le repère, on a *D* (0, 1, 0) ; *B* (1, 0, 0) ; *G* (1, 1, 1) ; donc $\overrightarrow{DJ}(2,\ -1,\ 1)$;

$\overrightarrow{BG}(0,\ 1,\ 1)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$. On sait qu'un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

On a $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}=0$; de plus $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BI}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\neq\vec{O}(0,\ 0,\ 0)$

c'est dire que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires. Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (*BGI*), il est donc normal à ce plan.

c) Calculons la distance du point *F* au plan (*BGI*).

On a $\overrightarrow{BF}$ (0, 0, 1) et $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BI}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; donc

$$d\left(F,\ (BGI)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{BF}\cdot\left(\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BI}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BI}\right\|}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

2) On note (Δ) la droite passant par *F* et orthogonale au plan (*BGI*).

a) Donnons une représentation paramétrique de la droite (Δ).

(Δ) est orthogonale à (*BGI*) de vecteur normal $\overrightarrow{DJ}(2,\ -1,\ 1)$ donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ). Quelque soit *M* (*x*, *y*, *z*) de (Δ), il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{FM}(x-1,\ y,\ z-1)=t\,\overrightarrow{DJ}\left(2,\ -1,\ 1\right)$; on en déduit alors que :

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$; donc une représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrons que la droite (Δ) passe par le centre *K* de la face *ADHE*.

Il s'agit de déterminer *t* s'il existe tel que $\overrightarrow{FK} = t\,\overrightarrow{DJ}$

Le point *K* a pour coordonnées $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; on a

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2t \\ \frac{1}{2} = -t \\ \frac{1}{2} = 1 + t \end{cases} \quad \text{ce qui donne } t = -\frac{1}{2}$$

donc la droite (Δ) passe par le centre *K* de la face *ADHE*.

c) Montrons que la droite (Δ) et le plan (*BGI*) sont sécants en un point, noté *L*, de coordonnées $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$.

(Δ) est la droite passant par *F* et orthogonale au plan (*BGI*) ; or *F* n'est pas dans le plan (*BGI*) (car $d\left(F,\ (BGI)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6} \neq 0$) ; donc la droite (Δ) est orthogonale au plan (*BGI*) en un point qui sera noté *L* (*x*, *y*, *z*).

L∈ (Δ) donc il existe un réel *t* tel que : $x = 1 + 2\,t$; $y = -t$ et $z = 1 + t$.

L∈ (*BGI*) donc le vecteur $\overrightarrow{BL}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{DJ}$; $\overrightarrow{BL}\,(2\,t,\ -t,\ 1 + t)$

on a alors $\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{DJ} = 4t + t + 1 + t = 0$; ce qui donne $t = -\frac{1}{6}$.

Donc $x = 1 + 2\frac{-1}{6} = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{6}$ et $z = \frac{5}{6}$; les coordonnées du point *L* sont effectivement $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$.

d) Vérifions si le point *L* est l'orthocentre du triangle *BGI*.

Si le point *L* est l'orthocentre du triangle *BGI*, on aurait par définition de l'orthocentre d'un triangle que : (*BL*) orthogonale à (*GI*) ; (*GL*) orthogonale à (*BI*) et (*IL*) orthogonal à (*BG*).

On a $\overrightarrow{BL}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$; $\overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2},\ -1,\ 0\right)$ et $\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{GI} = 0$ donc (*BL*) est orthogonale à (*GI*).

$\overrightarrow{GL}\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6}\right)$; $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ et $\overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ donc (*GL*) est orthogonale à (*BI*).

$\overrightarrow{IL}\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right)$; $\overrightarrow{GB}\left(0,\ -1,\ -1\right)$ et $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$ donc (*IL*) est orthogonal à (*BG*).

Par conséquent le point *L* est l'orthocentre du triangle *BGI*.

■

REPERTOIRE NON EXHAUSTIF DE TRAVAUX POSSIBLES EN MATHEMATIQUES (T^{le} D)

- **Nous le disons, nous le réaffirmons et nous le confirmons que** : Résoudre un problème ou traiter un exercice de mathématiques, (ou de toute autre discipline), se présente comme un travail : « le travail intellectuel ». Comme pour tout travail il faut avoir des outils, il faudrait alors donc dans ce cas de travail (travail intellectuel), avoir également des outils que nous appelons des outils intellectuels. Il faudra alors, dans un travail intellectuel donné, bien choisir les « outils » nécessaires et/ou convenables pour faire le travail.
- **Les outils intellectuels** pour le travail intellectuel sont « le savoir » enseigné dans nos classes.
- **En mathématiques particulièrement,** les outils intellectuels ne sont autres choses que les définitions, les propositions, les théorèmes, les règles, les corolaires, les lemmes, les axiomes, etc.….

NOTIONS	TRAVAIL POSSIBLE	OUTILS POSSIBLES	METHODES POSSIBLES	OBSERVATIONS
PROBABILITES	Déterminer card (Ω)	Dénombrement	Comprendre bien l'épreuve et utiliser soit p-liste, soit arrangement, soit permutation, soit combinaison ….	Vérifier les indices pour savoir de quel type de dénombrement il s'agit.
	Calculer la probabilité d'un évènement A	Définition de probabilité	Tirer $p(A)$ à partir de : $p(A)=\sum_{i=1}^{k} p(e_i)$; $A=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ ou $p(A)+p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1$	Les indices montrent qu'on n'est pas dans un cas particulier de probabilité.
		Formule de probabilité uniforme	Dénombrer tous les cas favorables (card (A)) et appliquer la formule : $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$	Vérifier les indices pour savoir si on est dans une situation d'équiprobabilité.
		Probabilité conditionnelle	Repérer l'évènement B dont A dépend et appliquer la formule $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ **Ou** dresser un arbre pondéré	Vérifier les indices pour savoir si on est dans une situation de probabilité conditionnelle.
		Probabilités totales	Repérer les évènements B_i dont la réalisation de A est conditionnée ou recoupe et appliquer la formule $p(A) = p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + p(A\cap B_3) + p(A\cap B_4)$ **Ou** dresser un arbre pondéré.	Vérifier les indices pour savoir si on est dans une situation de probabilités totales

PROBABILITES		Schéma de Bernoulli	Repérer les paramètres (n, p) et appliquer $p(A)=p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	Vérifier les indices si on est dans une situation de schéma de Bernoulli
	Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire	Définition de loi de probabilité d'une variable aléatoire X	Chercher toutes les valeurs prises par X et calculer toutes les probabilités $p(X=x_i)=p_i$ On peut regrouper le tout dans un tableau.	
	Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$	Définition de l'espérance mathématique $E(X)$	Chercher la loi de probabilité de X et appliquer la formule : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X=x_i)$	
	Déterminer la variance $V(X)$; Déterminer l'écart type $\sigma(X)$	Définition de la variance $V(X)$; Définition de l'écart type $\sigma(X)$.	Chercher la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique $E(X)$, puis appliquer les formules : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\times p_i-\left[E(X)\right]^2$; $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$	
	Déterminer la fonction de répartition de X	Définition de la fonction de répartition	Chercher la loi de probabilité de X et déterminer la fonction de répartition en utilisant sa définition	
	Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres	Définition de loi binomiale	Vérifier que X est régie par un schéma de Bernoulli ; avec n épreuves identiques et indépendantes effectuées successivement ; chaque épreuve ayant 2 issues (succès, échecs)	En général p est la probabilité de succès et alors les paramètres sont n, p
STATISTIQUES A DEUX VARIABLES	Représenter un nuage de points dans un repère.	Définition d'un nuage de points	Tracer un repère orthogonal, puis placer les points de coordonnées (x_i, y_i)	
	Déterminer les coordonnées du point moyen	Définition du point moyen	Déterminer l'effectif des valeurs des variables et appliquer la formule pour calculer les coordonnées.	
	Déterminer une équation de la droite d'ajustement de Mayer	Equation de droite définie par deux points dans le plan : $y = m\,x + p$.	Déterminer les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2. Puis (par exemple) déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{G_1G_2}$ et ensuite m et p	

	Donner la forme algébrique d'un nombre complexe	Règles de calcul algébrique dans $\mathbb{C}$.	Effectuer des calculs algébriques et faire ressortir la partie réelle et la partie imaginaire.	
NOMBRES COMPLEXES	Déterminer le module et/ou un argument d'un nombre complexe $z = a + b\,i$	Définition du module ; définition de l'argument d'un nombre complexe	- Appliquer la formule de détermination du module. - Déterminer l'angle dont le cosinus vaut $\frac{a}{\lvert z\rvert}$ et le sinus est $\frac{b}{\lvert z\rvert}$.	
	$z = a + b\,i$; écrire z sous forme trigonométrique	Passage d'une forme à une autre	- Calculer module de z Déterminer θ / $\cos\theta = \frac{a}{\lvert z\rvert}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\lvert z\rvert}$	
	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z	Racines carrées d'un nombre complexe $Z = a + b\,i$	- Poser $z = x + y\,i$ - Résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ (xy) \times b > 0 \end{cases}$	
	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$	Equations du second degré dans $\mathbb{C}$	- Calculer Δ ; déterminer les racines carrées de Δ (selon son signe) puis utiliser les formules pour avoir les solutions.	
	Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation du plan	Transformations affines et nombres complexes	- Donner l'écriture complexe de la transformation et identifier sa nature et ses éléments caractéristiques.	
NOMBRES COMPLEXES	Interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	Interprétation géométrique du nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$	- Passer l'égalité au module puis - Passer l'égalité à l'argument. On obtient : $\lvert Z \rvert = \frac{AC}{AB}$ et $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$	

	Donner la nature exacte d'un triplet de points *ABC*.	Nombres complexes et configurations dans le plan.	- Interpréter géométriquement le module et l'argument du nombre $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ - Utiliser le tableau pour identifier la configuration exacte des points *ABC*	
	Déterminer l'ensemble des points M (z) tel que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$ vérifie une ou des condition(s) données.	Ensembles de points ou lieux géométriques	- Donner l'interprétation géométrique de la ou des condition(s) - Identifier la nature de l'ensemble des points.	
	…………..			
LIMITES ; CONTINUITE	Déterminer l'ensemble de définition de f : (f étant une fonction numérique donnée)	Règles de calcul dans ℝ : contraintes de certaines opérations dans ℝ	- Si $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$, déterminer l'ensemble des x tels que $v(x) \neq 0$ - Si $f(x)$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$, déterminer l'ensemble des x tels que $u(x) \geq 0$ - Si $f(x)$ est de la forme $\ln(u(x))$, déterminer l'ensemble des x tels que $u(x) > 0$	
	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$			
	$x_0 \in D_f$ et f est définie au voisinage de x_0 :	Théorème : Si f est définie en x_0 et si f admet une limite l en x_0, alors l = $f(x_0)$	Calculer $f(x_0)$.	
	$x_0 \notin D_f$ et la limite prend la forme $\frac{l}{0}$ ($l \neq 0$)	Si $l > 0$ et 0^+ alors on a $+\infty$ Si $l > 0$ et 0^- alors on a $-\infty$ Si $l < 0$ et 0^+ alors on a $-\infty$ Si $l < 0$ et 0^- alors on a $+\infty$	Calculer la limite de f à droite puis à gauche de x_0 et conclure:	
	$x_0 \notin D_f$ et la limite	1) Simplification de fraction rationnelle	Factoriser les polynômes numérateurs et dénominateurs par $(x - x_0)$; puis simplifier la fraction.	

	prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$	2) Utilisation de l'expression conjuguée	Transformer $f(x)$ en utilisant l'expression conjuguée du numérateur et/ou du dénominateur ; puis simplifier par $(x-x_0)$	
LIMITES ; CONTINUITE		3) Définition du nombre dérivé	Identifier la fonction u dérivable en x_0 et calculer $u'(x_0)$	(si $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ où u est une fonction dérivable en x_0)
	$x_0 \notin D_f$ et la limite prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$	4) Limites par comparaison.	Chercher à comparer $f(x)$ à d'autres fonctions au voisinage de x_0 et dont on peut calculer la limite en x_0 : $\lvert f(x)-l \rvert \leq u(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v(x)$	
		5) Limite de référence : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et transformations trigonométriques	Transformer l'expression en utilisant les formules de transformation trigonométrique de manière à se placer dans une situation de la forme $\frac{\sin u(x)}{u(x)}$ avec $u(x)$ tendant vers 0 si x tend vers 0.	
LIMITES ; CONTINUITE		6) Croissance comparée de $\ln x$; e^x et x^α	Transformer l'expression de manière à se placer dans une situation de limite usuelle dans les croissances comparées. Faire des changements de variables s'il y a lieu.	
	Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$			
	$x_0 = \infty$ et le résultat n'est pas une forme indéterminée.	Opérations sur les limites de fonctions (cas où on peut conclure)	Utiliser le tableau sur les limites de somme, de produits de quotients … de fonctions.	
	$x_0 = \infty$ et la limite prend une forme indéterminée	1) Limite d'une fonction polynôme à l'infinie	Calculer la limite du monôme de plus haut degré	
		2) Limite d'une	Calculer la limite du rapport des termes de plus	

LIMITES ; CONTINUITE	$x_0 = \infty$ et la limite prend une forme indéterminée	fonction rationnelle en ∞	haut degré	
		3) Factorisation	Mettre en facteur le monôme (sans son coefficient) de plus haut degré	
		4) Expression conjuguée	Transformer $f(x)$ (si elle est sous forme irrationnelle) en utilisant les expressions conjuguées	
		5) Limites par comparaison.	Chercher à comparer $f(x)$ à d'autres fonctions au voisinage de ∞ et dont on peut calculer la limite en ∞ : $\lvert f(x)-l \rvert \leq u(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$ $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to\infty} v(x)$	
		6) Limite de référence : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et transformations trigonométriques	Transformer $f(x)$ de manière à se placer dans une situation de la forme $\frac{\sin u(x)}{u(x)}$ avec $u(x)$ tendant vers 0 si x tend vers ∞ ; Faire des changements de variables s'il y a lieu.	
		7) Croissances comparées de $\ln x$; e^x et x^α	Transformer l'expression de manière à se placer dans une situation de limite usuelle dans les croissances comparées. Faire des changements de variables s'il y a lieu.	
	Préciser les asymptotes parallèles aux axes à la courbe (C_f).	Asymptotes à une courbe de fonction ou conséquences graphiques de limites	Vérifier que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ où a est une borne ouverte d'un intervalle de D_f et conclure. Vérifier que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) et conclure.	
	Montrer que la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à (C_f) à ∞.	Asymptotes à une courbe de fonction ou conséquences graphiques de limites	Vérifier que $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ et conclure.	
	Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) avec la droite (D) d'équation $y = a\,x + b$.	Comparaison de deux réels	Etudier le signe de $f(x) - (a\,x + b)$ et conclure.	
		Définition de la	Vérifier si f est définie en a. Calculer alors $f(a)$	

LIMITES ; CONTINUITE	Etudier la continuité de *f* en *a*.	continuité d'une fonction en un point.	puis vérifier que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	
	Etudier la continuité de *f* sur un intervalle I.	1) Continuité des fonctions de référence	Vérifier si *f* est une fonction de référence.	
		2) Continuité des fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles,….	Vérifier si *f* est une fonction polynôme, ou rationnelle, ou irrationnelle, ou composée de certaines de ces fonctions.	
		3) Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle I	Décomposer *f* en somme, ou produit ou quotient, … de fonctions continues sur I.	
		4) Théorème sur la continuité de fonction dérivable sur I.	Vérifier si *f* est dérivable sur I.	
	Montrer que *f* réalise une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J à préciser	Théorème de la bijection	Vérifier les hypothèses du théorème et conclure. J est l'image de I par *f*.	
	Montrer que l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique α appartenant à I.	Théorème des valeurs intermédiaires.	Vérifier les hypothèses du théorème, vérifier que *m* appartient à *f* (I) et conclure.	
	Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]a, b[$.	Principe de localisation	Vérifier les hypothèses du théorème et conclure. (N'oublier pas de vérifier si $f(a) \times f(b) < 0$)	
	Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α appartenant à $]a, b[$.	Principe de localisation	Poser $g(x) = f(x) - x$ et appliquer le principe de localisation à la fonction *g* sur $]a, b[$.	

	Calculer $f'(x)$; (*f* étant une fonction donnée)	Dérivées de fonctions usuelles ; Opérations sur les fonctions dérivables (calcul pratique de dérivées)	Identifier la forme de $f(x)$ (de la forme $u+v$? ku ? $u\times v$? $\frac{u}{v}$?...) puis appliquer la formule de dérivation.	
	Etudier la dérivabilité d'une fonction *f* en un point *a*	Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.	Vérifier si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (ou $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$) a une limite finie ou non en *a*. (ou en 0).	
		1) Dérivabilité des fonctions de référence	Vérifier si *f* est une fonction de référence.	
DERIVATION	Etudier la dérivabilité de *f* sur un intervalle I.	2) Dérivabilité des fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles, …	Vérifier si *f* est une fonction polynôme, ou rationnelle, ou irrationnelle, ou composée de certaines de ces fonctions.	
		3) Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle I	Décomposer *f* en somme, ou produit ou quotient, … de fonctions dérivables sur I.	
	Donner une conséquence graphique de la dérivabilité de *f* en *a*	Tangente à une courbe (C_f) d'une fonction *f* : (Conséquence graphique de la dérivabilité d'une fonction en un point)	Etudier $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, puis conclure sur l'existence de tangente ou de demi tangente(s) à la courbe (C_f) au point d'abscisse *a*.	
	Préciser le sens des variations de *f* sur E_f.	Théorème sur la dérivation et monotonie.	Vérifier la dérivabilité de *f* sur E_f ; Calculer $f'(x)$; étudier son signe sur E_f puis conclure sur les variations de *f*.	
		1) Méthode algébrique	Résoudre algébriquement $g(x) \geq 0$ ou $g(x) \leq 0$ et conclure.	

DERIVATION	Etudier le signe de $g\ (x)$	2) Méthode analytique	Donner le sens de variations de g, dresser son tableau de variations (s'il y a lieu) repérer le signe de $g\ (x)$ dans la ligne de $g\ (x)$.	
		3) Méthode graphique ou géométrique	Tracer la courbe représentative (C_g) de g dans un repère et repérer l'intervalle ou les intervalles où les parties de la courbe sont au dessus de l'axe des abscisses et ceux où les parties de la courbe sont en dessous de l'axe des abscisses.	
	Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations	Plan d'étude d'une fonction numérique	Déterminer D_f s'il n'est pas donné ; étudier la parité, la périodicité ; étudier les limites de f aux bornes de D_f ou de E_f ; préciser son sens de variations puis dresser son tableau de variations.	
	Construire la courbe représentative (C_f) de f dans un repère donné.	Définition de courbe représentative d'une fonction.	**1ère étape** : Tracer un repère complet (axes orientés, graduations selon l'unité de longueur…) **2ème étape** : Placer les points particuliers de (C_f) points dont les abscisses sont sur la ligne de x. **3ème étape** : Tracer s'il y a lieu les tangentes à (C_f) en ses points particuliers. (ligne de $f\ '(x)$) **4ème étape** : Tracer s'il y a lieu les asymptotes à (C_f). (ligne de $f\ (x)$ dans le tableau de variations) **5ème étape** : Tracer la courbe en suivant son allure dans le tableau de variations de f.	Les travaux suivants : ∗ Tracer une courbe par rapport à sa tangente en un de ses points ; ∗ Tracer une courbe par rapport son asymptote (illustrer graphiquement une limite) devront être maitrisés
ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE DE FONCTION	Montrer que le point I (a, b) est centre de symétrie d'une courbe (C_f)	Eléments de symétrie d'une courbe : (centre de symétrie)	Vérifier si f est impaire (si $a = b = 0$). Sinon, vérifier une de trois méthodes	
	Montrer que la droite (D) d'équation $x = a$ est axe de symétrie d'une courbe (C_f)	Eléments de symétrie d'une courbe : (axe de symétrie)	Vérifier si f est paire (si $a = 0$). Sinon, vérifier une de trois méthodes	
	Montrer que F est une primitive de f sur un intervalle I.	Définition de primitives d'une fonction f.	Vérifier que pour tout $x \in I$, $F'\ (x) = f\ (x)$	

PRIMITIVES	Déterminer une primitive F de f sur I.	Tableau de primitives de fonctions usuelles. Propriétés algébriques de primitives.	Vérifier si f est une fonction usuelle. Identifier la forme de $f(x)$ (de la forme $u'u^r$? $\frac{u'}{u}$? $u'e^u$? $u'\cos u$?...) puis appliquer la formule de primitivation.	
	Déterminer la primitive G de f qui vérifie une condition donnée.	**Si G(x_o) = y_o :** image d'un réel par une fonction	Déterminer la constante k dans l'équation F(x_o) = y_o où F est une primitive quelconque de f ; puis donner G(x).	
		Si (C_G) contient le point A (a, b) : définition d'une courbe de fonction	Déterminer la constante k dans l'équation F(a) = b où F est une primitive quelconque de f puis donner G(x).	
FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN, EXPONENTIELLE ET PUISSANCE	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} \ln\left(u(x)\right)$	Limites de $\ln\left(u(x)\right)$	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$; puis conclure.	
	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)}$	Limites de $e^{u(x)}$	Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$; puis conclure.	
	Calculer une limite de fonction compotant ln, exp ou puissance en x_o	■Limites usuelles ■Croissances comparées	Utiliser les limites usuelles ou les croissances comparées pour lever les formes indéterminées s'il y a lieu.	
	Montrer que toutes les courbes (C_n) ($n \in \mathbb{Z}$) de f_n passent par un point fixe A dont il faut préciser les coordonnées.	Intersection de deux courbes dans le plan.	Déterminer x pour que $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ pour tout naturel n. Puis calculer $y = f_n(x)$.	
	Montrer que toutes les courbes (C_α) (α réel) de f_α passent par un point fixe A dont il faut préciser les coordonnées.	Intersection de deux courbes dans le plan.	Déterminer x pour que $f_\alpha(x) = f_{\alpha'}(x)$ pour tous réels différents α et α'. Puis calculer $y = f_\alpha(x)$.	

	Calculer $\int_a^b f(x)\,dx$	Définition de l'intégrale : Techniques de calcul d'intégrale	**<u>Par primitivation</u>** Identifier la forme de $f(x)$ (de la forme $u'u^r$? $\frac{u'}{u}$? $u'e^u$? $u'\cos u$?...) ; transformer s'il y a lieu l'expression $f(x)$; appliquer la formule de primitivation pour déterminer une primitive F de f ; puis calculer l'intégrale.	
			<u>Intégration par parties</u> Mettre $f(x)$ sous la forme $u'(x) \times v(x)$; ou $u(x) \times v'(x)$; appliquer la formule d'intégration par parties ; calculer la deuxième intégrale puis conclure.	
CALCUL INTEGRAL	Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx$ est existe	Condition d'existence de primitives ou d'une intégrale	Montrer que f est continue sur $[a, b]$	
	Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $\lvert f'(x) \rvert \leq M$	Encadrement	Calculer $f''(x)$; à partir de $a \leq x \leq b$, donner un encadrement de $f''(x)$; puis conclure.	
		Sens de variation.	Donner le sens de variations de f', dresser son tableau de variations s'il y a lieu ; repérer $f'(a)$, $f'(b)$ et s'il y a lieu, les extrema de f' sur $[a, b]$; donner un encadrement de $f'(x)$ sur $[a, b]$; puis conclure.	
	En déduire (ou montrer) que pour tout $x \in [a, b]$, $\lvert f(x) - \alpha \rvert \leq M \lvert x - \alpha \rvert$	Inégalité de la moyenne	Vérifier l'hypothèse du théorème (pour tout $x \in [a, b]$, $\lvert f'(x) \rvert \leq M$) et appliquer la conclusion du théorème à f' sur $[x, \alpha]$ inclus dans $[a, b]$. Remarquer que $f(\alpha) = \alpha$.	
	Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$	Définition de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$	Appliquer la formule.	
	Donner une	Interprétation		

CALCUL INTEGRAL	interprétation géométrique de $I_{a,\,b}. = \int_a^b f(x)\,dx$	géométrique de $\int_a^b f(x)\,dx$	Donner la délimitation du domaine	
	Calculer l'aire en u.a. du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.	Application du calcul intégral au calcul d'aire dans le plan.	Vérifier si $a < b$ et si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$; puis appliquer la formule et calculer : (ne pas oublier l'unité d'aire)	
	Calculer le volume en u.v. du solide engendré par la rotation d'un domaine autour de l'axe des abscisses.	Application du calcul intégral au calcul de volume dans l'espace.	Vérifier si $a < b$; puis appliquer la formule et calculer : (ne pas oublier l'unité de volume)	(domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.)
EQUATIONS DIFFEREN-TIELLES	Résoudre ou intégrer l'équation différentielle : $y' + a\,y = 0$.	Résolution d'équations diff. du 1er degré à c.c.s.m.	Appliquer la règle	
	Déterminer la solution f qui prend la valeur x_o en y_o	Solution qui vérifie une condition donnée; image d'un réel par une fonction	Déterminer la constante dans l'équation $f(x_o) = y_o$	
	Résoudre ou intégrer l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$	Résolution d'équations diff. du 2d degré à c.c.s.m.	Appliquer la règle	
	Déterminer la solution f qui vérifie : $f(x_o) = y_o$ et $f'(x_o) = y_o$'	Solution qui vérifie deux conditions données	Déterminer les constantes dans le système $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$	
EQUATIONS	Démontrer qu'une fonction g, est solution	Condition pour qu'une fonction soit	■ Commencer par la condition que g, est solution de (E) équivaut à … jusqu'à $g - f$	« P si et seulement si Q » est synonyme de

DIFFEREN-TIELLES	de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g-f$ est une solution de l'équation différentielle (E').	solution d'une équation différentielle.	solution de (E') ; ou par la condition que $g-f$ est solution de (E') équivaut à…. jusqu'à g, solution de (E) ■ou encore $\begin{cases} \text{si } g \text{ est solution de (E), alors } \cdots g-f \cdots \text{et} \\ \text{si } g-f \text{ est solution de (E'), alors } \cdots g \cdots \end{cases}$	(« si P, alors Q » et si « Q, alors P »)
SUITES NUMERIQUES	Montrer que $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante (décroissante)	Définition de suite croissante (décroissante)	Montrer que $\forall\ n \geq p,\ u_{n+1}-u_n \geq 0$ $(u_{n+1}-u_n \leq 0)$	
	Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq p}$	Définition de suites monotones	Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n\ \forall\ n \geq p$ et conclure.	
	Montrer que $(u_n)_{n\geq p}$ est majorée (minorée)	Définition de suite majorée (minorée)	■Si le majorant M est donné vérifier que $\forall\ n \geq p,\ u_n - \mathrm{M} \leq 0$; sinon chercher un réel M tel que $\forall\ n \geq p,\ u_n - \mathrm{M} \leq 0$. (■Si le minorant m est donné vérifier que $\forall\ n \geq p,\ u_n - \mathrm{m} \geq 0$; sinon chercher un réel m tel que $\forall\ n \geq p,\ u_n - \mathrm{m} \geq 0$).	
	Montrer que $(u_n)_{n\geq p}$ est bornée	Définition de suite bornée	Si les bornes m et M sont données, vérifier que $\forall\ n \geq p,\ \mathrm{m} \leq u_n \leq \mathrm{M}$; sinon chercher deux réels m et M tels que $\forall\ n \geq p,\ \mathrm{m} \leq u_n \leq \mathrm{M}$	ou trouver $\mathrm{k} > 0$ tel que $\forall\ n \geq p,\ \lvert u_n \rvert \leq \mathrm{k}$.
	Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq p}$	1) Définition de suite convergente	Etudier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	
		2) Condition de convergence d'une suite monotone	Vérifier si $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante et majorée ou décroissante et minorée puis conclure.	
	Montrer que la suite	1) Définition de suite convergente	Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie.	
		2) Condition de convergence d'une	Vérifier que $(u_n)_{n\geq p}$ est croissante et majorée	

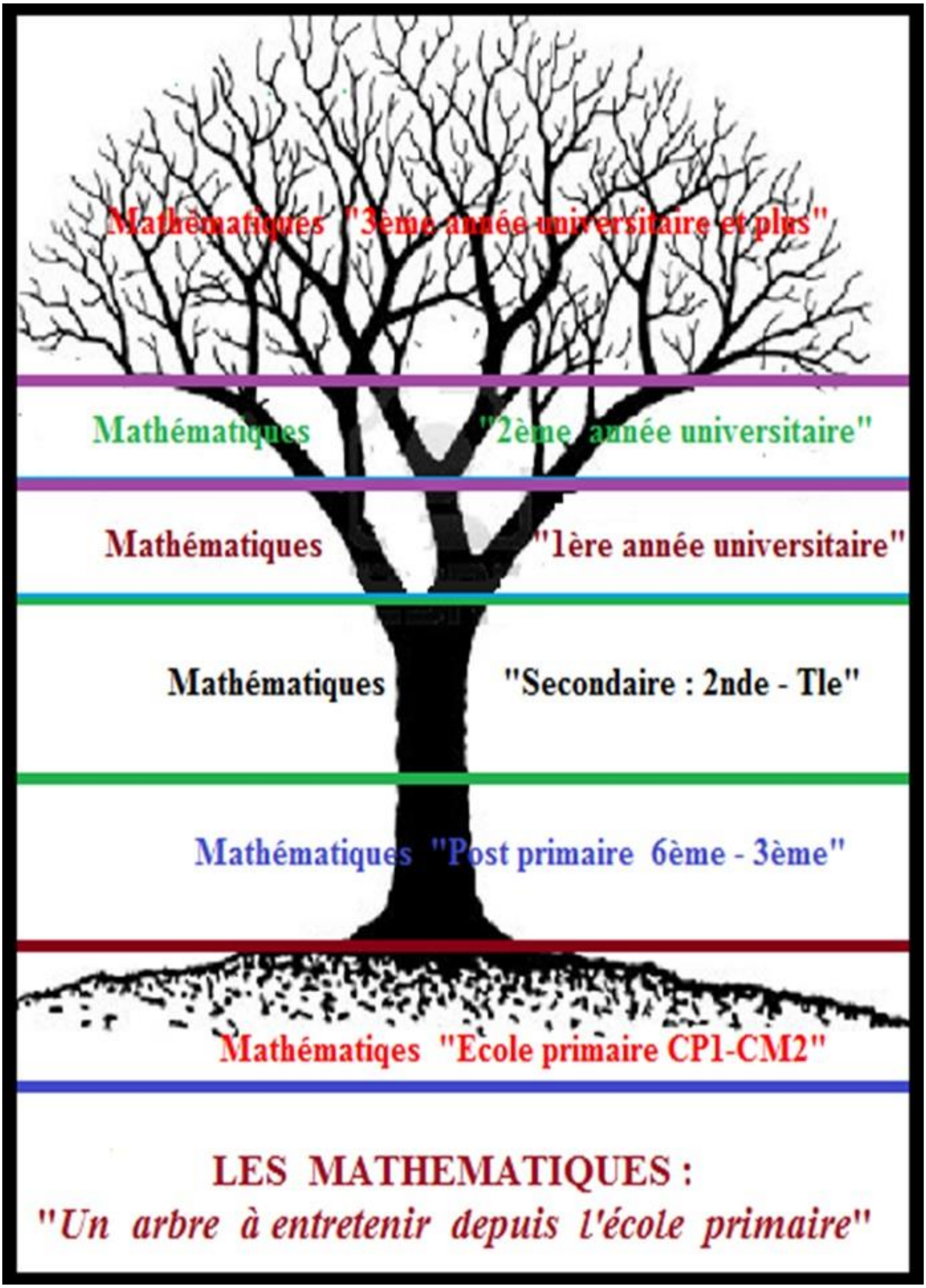
SUITES NUMERIQUES	$(u_n)_{n\geq p}$ définie par $u_n = f(n)$ est convergente	suite monotone	ou décroissante et minorée puis conclure.	
		3) Convergence de suite (u_n) définie par son terme général u_n en fonction de *n*.	Vérifier que *f* admet une limite finie en + ∞	
	Etudier la suite $(u_n)_{n\geq p}$ définie par $u_n = f(n)$	1) Définition de la monotonie ; de suite bornée ; et de la convergence de suite $(u_n)_{n\geq p}$	Etudier la monotonie, l'existence de bornes et la convergence de $(u_n)_{n\geq p}$	
		2) Suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$	Etudier le sens de variations de *f* dresser son tableau d variations puis conclure	
	Montrer que $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique, (géométrique)	Définition de suite arithmétique, (géométrique)	■Exprimer par exemple u_{n+1} en fonction de u_n et conclure. ■Vérifier que $\forall n \geq p,\ u_{n+1} - u_n$ est constant (si $u_n \neq 0$ que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant)	
	Montrer que : $\forall\ n \geq n_0$, p (*n*)	Raisonnement par récurrence (par exemple)	Utiliser les différentes étapes de la récurrence	
	Montrer que pour tout naturel *n*, $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \leq k \lvert u_n - \alpha \rvert$.	1) Définition de la suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	Utiliser le fait que $\lvert f(x) - f(\alpha) \rvert \leq k \lvert x - \alpha \rvert\ \forall x$ et $f(\alpha) = \alpha$.	Si : montrer que ∀ *x* ∈ I $\lvert f(x) - \alpha \rvert \leq k \lvert x - \alpha \rvert$ a été posée plus haut
		2) Raisonnement par récurrence	Utiliser les différentes étapes de la récurrence	
	En déduire que pour tout *n*, $\lvert u_n - \alpha \rvert \leq k^n$	1) Ordre et opérations dans ℝ	Dans l'inégalité $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \leq k \lvert u_n - \alpha \rvert$ faire varier *n*, (de 0 à *n*) faire le produit de ces inégalités membre à membre, puis simplifier.	
SUITES NUMERIQUES		2) Raisonnement par récurrence	Utiliser les différentes étapes de la récurrence	
	Déterminer la plus	Définition de valeur		

	petite valeur p de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-q} près.	approchée à ε près ; variation de la fonction *ln*	A partir de $\lvert u_n - \alpha \rvert \le k^n$, déterminer n pour que $k^n \le 10^{-q}$; puis déterminer p.	
COURBES PARAMETREES	Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point $M\,(t_o)$	Equation de tangente à une courbe paramétrée en un point $M\,(t_o)$	- calculer $x'(t_0)$; $y'(t_0)$; - déterminer une équation de la droite de vecteur directeur $\vec{U}\left(x'(t_0),\ y'(t_0)\right)$ et passant par le point $M\left(x(t_0),\ y(t_0)\right)$	
	Comparer les positions des points : a) $M\,(t + 2\pi)$ et $M(t)$; b) $M\,(-t)$ et $M(t)$ c) $M\,(\pi - t)$ et $M(t)$. Puis d) En déduire que les fonctions x et y peuvent être étudiées sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$	a) Périodicité des fonctions trigonométriques ; b) parité de fonctions cosinus et sinus ; définition de centre de symétrie ; d'axe de symétrie c) formules d'angles supplémentaires ; définition de centre de symétrie ; d'axe de symétrie d) conséquences analytiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.	a) comparer $x(t+2\pi)$ et $x(t)$ d'une part ; puis $y(t+2\pi)$ et $y(t)$ d'autre part puis conclure. b) comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part ; puis $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part puis conclure. c) comparer $x(\pi - t)$ et $x(t)$ d'une part ; puis $y(\pi - t)$ et $y(t)$ d'autre part puis conclure. d) Donner les conséquences analytiques en s'appuyant sur l'existence des éléments de symétrie de la courbe.	
COURBES	Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle I	Sens de variations d'une fonction numérique.	Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$; étudier leur signe sur I puis conclure sur le sens des variations de x et y.	

PARAMETREES	Dresser un tableau de variations conjoint de x et y	Tableau de variations d'une fonction numérique	Construire un tableau à double entrées comportant en première ligne, les valeurs particulières de t (bornes (finies) de l'ensemble d'étude des deux fonctions, valeurs de t qui annulent $x'(t)$, celles qui annulent $y'(t)$ …).	Il est souvent conseillé d'avoir les lignes $x(t)$ et $y(t)$ côte à côte pour une meilleure vision de l'allure de la courbe
	Expliquer comment obtenir la courbe complète (Γ) à partir de (Γ_1) : $((\Gamma_1)$, étant une partie de (Γ)	conséquences graphiques de la périodicité, de la parité des fonctions x et y.	Utiliser les éléments de symétries de la courbe (Γ) pour expliquer le passage de (Γ_1) à (Γ).	
	Tracer la courbe (Γ_1) puis la courbe (Γ) dans le repère	Construction d'une courbe paramétrée	Utiliser le tableau de variations conjoint pour construire la courbe (Γ_1), puis les éléments de symétries de (Γ) pour passer de (Γ_1) à (Γ).	
GEOMETRIE DANS L'ESPACE	Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme	Définition (vectorielle) d'un parallélogramme	Vérifier que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ par exemple	On pourrait vérifier que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
	Déterminer les coordonnées du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.	Définition (vectorielle) d'un parallélogramme	Poser $D(x, y, z)$; puis déterminer x, y, z pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ par exemple	
	Montrer que les points A, B et C déterminent un plan	Détermination d'un plan	Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.	
	Déterminer une équation cartésienne d'un plan (ABC)	Equation d'un plan ; vecteur normal à un plan.	Poser $M(x, y, z)$, $M \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$ Ecrire l'équation en x, y, z	
	Montrer que les points A, B et C sont coplanaires	1) Détermination d'un plan	Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.	
		2) Définition de vecteur normal à un plan	Vérifier par exemple que $\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$	

GEOMETRIE DANS L'ESPACE	Montrer qu'un point D appartient à un plan (ABC)	1) Définition de vecteur normal à un plan	Vérifier par exemple que $\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$	
		2) Condition qu'un point appartienne à un plan d'équation cartésienne donnée	Vérifier que les coordonnées du point D vérifient l'équation du plan (ABC)	
		3) Distance d'un point à un plan	Vérifier que la distance de D au plan (ABC) est égale à zéro.	
	Donner les coordonnées d'un point A dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$	Coordonnées d'un point dans l'espace muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$	Donner dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les coordonnées (x, y) du point A', projeté de A sur le plan (Ox, Oy) parallèlement à l'axe (Oz) ; puis la coordonnée z du point A'', projeté de A sur l'axe (Oz) parallèlement à la droite (OA') : le point A a alors pour coordonnées (x, y, z)	
	Montrer qu'un vecteur $\vec{n}\,(a,b,c)$ est normal à un plan (ABC).	Définition de vecteur normal à un plan	Vérifier que par exemple $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$	
	Déterminer le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$	1) Définition du produit vectoriel.	Calculer $\left\Vert\vec{u}\right\Vert$, $\left\Vert\vec{v}\right\Vert$ et $\sin(\vec{u},\vec{v})$; puis conclure	
		2) Coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$	Utiliser la règle pratique pour déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$	
	Calculer l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ ou l'aire d'un triangle ABC	Application du produit vectoriel au calcul d'aire	Appliquer la formule dans chaque cas. Déterminer par exemple les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; calculer $\left\Vert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\Vert$ et conclure	
	Calculer la distance d'un point M à une droite (AB)	Application du produit vectoriel au calcul de distance d'un point à une	Appliquer la formule. Déterminer par exemple les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}$; calculer	

GEOMETRIE DANS L'ESPACE		droite	$\left\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} \right\rVert$; $\left\lVert \overrightarrow{AB} \right\rVert$ et conclure	
	Calculer la distance d'un point *M* à un plan (*ABC*).	Application du produit vectoriel au calcul de distance d'un point à un plan	Appliquer la formule. Déterminer par exemple les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM}$; calculer ; $\left\lvert \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \right\rvert$; $\left\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\rVert$ et conclure	
	Calculer le volume d'un parallélépipède *ABCDEFGH*	Application du produit vectoriel au calcul de volume.	Appliquer la formule. Déterminer par exemple les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}$; calculer $\left\lvert \overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \right\rvert$ et conclure	
	Calculer le volume d'un tétraèdre *ABCD*	Application du produit vectoriel au calcul de volume	Appliquer la formule. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; calculer $\left\lvert \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \right\rvert$ et conclure (par exemple)	


Mathématiques "3ème année universitaire et plus"
Mathématiques "2ème année universitaire"
Mathématiques "1ère année universitaire"
Mathématiques "Secondaire : 2nde - Tle"
Mathématiques "Post primaire 6ème - 3ème"
Mathématiqes "Ecole primaire CP1-CM2"
LES MATHEMATIQUES :
"Un arbre à entretenir depuis l'école primaire"