

PCSI
MPSI
PTSI

Électromagnétisme

Tous les exercices

Raphaële Langet

Professeur en classes préparatoires
au lycée Janson-de-Sailly

Sommaire

➤ 1 Distributions de charges	3
➤ 2 Champ électrostatique	9
➤ 3 Circulation et potentiel électrostatique	17
➤ 4 Théorème de Gauss	28
➤ 5 Champ électrostatique	43
➤ 6 Mouvement des particules chargées dans un champ \vec{E} et \vec{B}	57
➤ 7 Distributions de courants	69
➤ 8 Champ magnétostatique	73
➤ 9 Théorème d'Ampère	85
➤ 10 Dipôle magnétique	97

1 – Distributions de charges

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 6

<p>1 Parmi ces distributions, lesquelles ne présentent pas de symétrie cylindrique ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Cylindre d'axe (Oz), de rayon R, de hauteur h, uniformément chargé en volume.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Cylindre d'axe (Oz), de rayon R, infini, uniformément chargé en surface.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Cône d'axe (Oz), de sommet O, d'angle au sommet α, uniformément chargé en volume.</p> <p><input type="checkbox"/> d. Cylindre d'axe (Oz), de rayon R, infini, de densité de charges $\rho(r < R) = \rho_0 \ln \frac{r}{R}$.</p> <p>2 Soit un cube de centre O et d'arrête a, uniformément chargé en surface. Dans la liste suivante, quelles sont les symétries du cube ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Symétrie par rapport à tout plan passant par O.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Symétrie par rapport à tout plan contenant (Oz).</p>	<p><input type="checkbox"/> c. Symétrie par toute rotation autour de O.</p> <p><input type="checkbox"/> d. Symétrie par une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ autour de (Oz).</p> <p>3 Compléter cette phrase : la charge volumique $\rho(M)$ est une grandeur :</p> <p><input type="checkbox"/> a. quantifiée.</p> <p><input type="checkbox"/> b. mésoscopique.</p> <p><input type="checkbox"/> c. discrète.</p> <p><input type="checkbox"/> d. microscopique.</p> <p>4 La distribution surfacique $\sigma(x, y, z) = \sigma(\sqrt{x^2 + y^2})$, $\forall z$ est à symétrie :</p> <p><input type="checkbox"/> a. sphérique.</p> <p><input type="checkbox"/> b. quelconque.</p> <p><input type="checkbox"/> c. cylindrique.</p>
--	---

© Nathan, classe prépa

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 6

<p><i>Donner les symétries des distributions de charges suivantes :</i></p> <p>1 Fil infini, d'axe (Oz), de densité linéique de charge uniforme λ_0.</p>	<p>2 Cylindre infini, d'axe (Oz), de rayon R, uniformément chargé en volume.</p> <p>3 Sphère de centre O, de rayon R, uniformément chargée en surface.</p>
---	--

1 * 5 min

> Corrigé p. 6

Carré de quatre charges

Soient quatre charges réparties au sommet d'un carré :

$$\begin{aligned} A(1, 0, 0) : +q & \quad B(0, -1, 0) : -q \\ D(0, 1, 0) : -q & \quad C(-1, 0, 0) : +q \end{aligned}$$

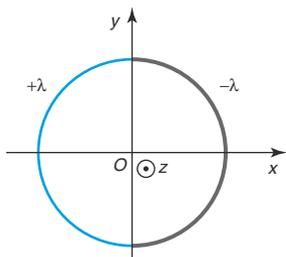
Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution.

2 * 5 min

> Corrigé p. 6

Cercle chargé

On considère un cercle chargé, portant pour $x < 0$ une densité linéique de charges uniforme $+\lambda$, et pour $x > 0$ une densité linéique de charges uniforme $-\lambda$.



Quelles sont les symétries de cette distribution ?

3 * 5 min

> Corrigé p. 6

Droite chargée

On considère une droite (Ox) chargée. Déterminer les invariances et symétries de la distribution de charges dans les cas suivants.

- La densité linéique de charges est uniforme : $\lambda = \lambda_0$.
- La densité linéique de charges est : $\lambda = +\lambda_0$ si $x < 0$ et $\lambda = -\lambda_0$ si $x > 0$.

4 * 5 min

> Corrigé p. 7

Cube chargé

On considère un cube de centre O et de côté a , chargé sur deux de ses faces opposées (en $z = -\frac{a}{2}$ et

en $z = \frac{a}{2}$) avec des densités surfaciques de charges uniformes, mais opposées (respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$). Déterminer les symétries et invariances d'une telle distribution.

5 * 5 min

> Corrigé p. 7

Distribution volumique

On considère la distribution volumique de charges suivante :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{a_0} & \text{si } r \leq a_0 \\ 0 & \text{si } r > a_0 \end{cases}$$

- Quelles sont les invariances et symétries d'une telle distribution ?
- Calculer la charge totale de la distribution.

6 ** 5 min

> Corrigé p. 7

Modélisation d'une densité linéique

Un tube cylindrique à section circulaire de rayon a est chargé uniformément avec la densité volumique ρ . Le rayon a étant petit à l'échelle macroscopique d'étude, on modélise le tube par un fil portant une densité linéique λ . Exprimer λ en fonction de ρ et a .

7 ** 10 min

> Corrigé p. 7

Charge totale d'une distribution surfacique

On considère une sphère de centre O et de rayon R portant en sa surface une densité de charges $\sigma = \sigma_0(1 + \cos\theta)$, où $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$. Calculer la charge totale portée par la distribution.

8 ** 10 min

> Corrigé p. 7

Hélice chargée

On considère une hélice définie par les équations suivantes : $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = -\frac{\rho\theta}{2\pi}$, avec θ variant de θ_{\min} à θ_{\max} .

Cette hélice porte une densité linéique de charges uniforme λ .

1. Donner les éléments de symétrie d'un cylindre infini de même axe (Oz), de même rayon R , et de densité surfacique de charge uniforme.
2. L'hélice infinie ($\theta_{\min} \rightarrow -\infty$ et $\theta_{\max} \rightarrow +\infty$) possède-t-elle les mêmes invariances ?
3. Qu'en est-il de l'hélice finie ?



> Corrigé p. 8

Noyaux atomiques (d'après ENAC)

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes

légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a . On désigne par $\vec{r} = \vec{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace.

Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

où ρ_0 est une constante positive.

1. Donner les symétries de cette distribution de charges.
2. Exprimer la charge totale Q du noyau.

Tester ses connaissances

<p>1 Réponses a. et c. Le cône comme le cylindre de hauteur finie ne présentent pas l'invariance par translation d'axe (Oz) contenue dans la symétrie cylindrique. Ils possèdent tous deux en revanche la symétrie de révolution d'axe (Oz) (invariance par rotation).</p> <p>2 Réponse d. Un plan passant par (Oz) mais non perpendiculaire aux faces du cube ne laisse pas la distribution invariante, de même qu'une rotation</p>	<p>quelconque autour de O. Des 4 propositions, seule la dernière laisse la distribution invariante.</p> <p>3 Réponse b. Il s'agit d'une grandeur continue, définie à l'échelle intermédiaire mésoscopique, contenant un grand nombre d'entités microscopiques.</p> <p>4 Réponse c. En coordonnées cylindriques, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc l'invariance proposée se traduit par $\sigma(r, \theta, z) = \sigma(r), \forall(\theta, z)$.</p>
--	---

Savoir appliquer le cours

<p>1 Une telle distribution est invariante par toute translation d'axe (Oz), puisque la densité de charges λ_0 est uniforme. On a aussi invariance par toute rotation d'axe (Oz). On a donc une symétrie cylindrique. Tous les plans contenant (Oz), ou perpendiculaires à (Oz) sont des plans de symétrie de la distribution.</p> <p>2 Une telle distribution est invariante par toute translation d'axe (Oz), puisque la densité volumique de charges est uniforme. On a aussi invariance par</p>	<p>toute rotation d'axe (Oz). On a donc une symétrie cylindrique. Tous les plans contenant (Oz), ou perpendiculaires à (Oz), sont des plans de symétrie de la distribution.</p> <p>3 La densité de charges est uniforme, la distribution de charges a donc les symétries de la surface qui la porte. On a invariance par toute rotation autour de tout axe passant par O. Il y a symétrie sphérique. Tout plan contenant O est un plan de symétrie.</p>
--	---

© Nathan, classe prépa

S'entraîner

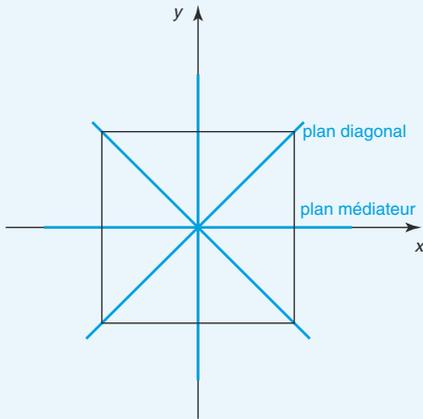
- 1** Le plan contenant les quatre charges (xOy) est plan de symétrie de la distribution, puisque chaque point est sa propre image.
Une symétrie par rapport au plan (xOz) échange les points $B(-q)$ et $D(-q)$ et laisse les points $A(+q)$ et $C(+q)$ invariants. Elle laisse donc invariante la distribution. Le plan (xOz) est plan de symétrie. Il en va de même pour une symétrie par rapport au plan (yOz) , qui échange $A(+q)$ et $C(+q)$ en laissant $B(-q)$ et $D(-q)$ invariants.
Le plan d'équation $y = x$ échange les points $A(+q)$ et $D(-q)$ d'une part et les points $B(-q)$ et $C(+q)$ d'autre part. Il s'agit donc d'un plan d'antisymétrie. Il en va de même pour le plan d'équation $y = -x$ qui échange les points $A(+q)$ et $B(-q)$ d'une part et les points $D(-q)$ et $C(+q)$ d'autre part.
- 2** Le plan (xOy) contient le cercle chargé. Une symétrie par rapport à un tel plan laisse tous les points de la distribution invariants, c'est donc un plan de symétrie de la distribution de charges.
Le plan (xOz) est également un plan de symétrie de la distribution, puisqu'à un point P de densité linéique locale $+\lambda$ il associe un point P' de densité linéique locale $+\lambda$.
Le plan (yOz) est quant à lui un plan d'antisymétrie de la distribution de charges puisqu'à un point P de densité linéique locale $+\lambda$ il associe un point P' de densité linéique locale $-\lambda$.
Il n'y a pas d'invariance par rotation ou translation.
- 3** 1. La densité linéique de charges est uniforme. On a donc invariance par translation d'axe (Ox) et

par rotation d'axe (Ox) . La distribution présente une symétrie cylindrique. Tout plan contenant (Ox) ou perpendiculaire à (Ox) est plan de symétrie.

2. La distribution n'est plus invariante par translation d'axe (Ox) mais elle est toujours invariante par rotation d'axe (Ox) . Tout plan contenant (Ox) est toujours plan de symétrie.

En revanche, le plan perpendiculaire à (Ox) passant par O (plan (yOz)) est plan d'antisymétrie, puisqu'il « échange » un point de densité linéique locale $+\lambda$ avec un point de densité linéique locale $-\lambda$. La distribution de charges ne présente plus de symétrie particulière pour tout autre plan perpendiculaire à (Ox) .

4 Le plan (xOy) , parallèle aux deux faces chargées passant par O , est plan d'antisymétrie de la distribution. Les plans médiateurs, (xOz) et (yOz) , et les plans diagonaux des faces chargées sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Leur intersection avec le plan d'une face chargée est représentée sur la figure ci-dessous.



Plans de symétrie du cube, en coupe dans le plan d'une face chargée.

5 1. La densité volumique de charges est indépendante des coordonnées θ et ϕ , il y a donc invariance par toute rotation autour de O . On a une symétrie sphérique. Tout plan contenant O est plan de symétrie de la distribution.

2. On découpe la sphère en coquilles sphériques comprises entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon $r + dr$. Une telle coquille sphérique a un volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$ et porte donc une charge élémentaire

$$dq = \rho d\tau = 4\pi\rho_0 \frac{r^3}{a_0} dr.$$

Par intégration pour r variant de 0 à a_0 , on obtient la charge totale portée par la distribution :

$$q = \int_0^{a_0} dq = 4\pi \frac{\rho_0}{a_0} \int_0^{a_0} r^3 dr = 4\pi \frac{\rho_0}{a_0} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{a_0}.$$

Donc :

$$q = \pi\rho_0 a_0^3$$

6 Considérons une petite portion, de hauteur h , du cylindre chargé. Cette portion de la distribution a un volume $\tau = \pi a^2 h$. Elle porte donc la charge $q = \rho\tau = \pi\rho a^2 h$.

Il lui correspond dans la description linéique un segment de droite de longueur h . Il porte donc une charge $q' = \lambda h$.

Pour que les deux descriptions soient équivalentes, il faut que $q' = q$, soit :

$$\lambda = \pi\rho a^2$$

7 La distribution présente une symétrie d'axe (Oz) . On la découpe donc en couronnes élémentaires d'axe (Oz) constituées de tous les points de la sphère vus depuis le centre O sous le même angle θ à $d\theta$ près. La surface élémentaire de cette couronne est $dS = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$ et elle porte donc une charge élémentaire $dq = \sigma_0(1 + \cos\theta)2\pi R^2 \sin\theta d\theta$.

En intégrant sur l'ensemble de la sphère, c'est-à-dire pour θ variant de 0 à π , on obtient la charge totale q :

$$\begin{aligned} q &= \int_{\text{sphère}} dq = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^\pi (1 + \cos\theta) d(-\cos\theta) \\ &= -2\pi R^2 \sigma_0 \left[\cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{2} \right]_0^\pi. \end{aligned}$$

D'où $q = -2\pi R^2 \sigma_0 \left[\left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right]$ et enfin :

$$q = 4\pi R^2 \sigma_0$$

Remarque : on reconnaît la charge totale d'une sphère uniformément chargée en surface (σ_0). En effet, la distribution est la somme d'une sphère uniformément chargée en surface (σ_0) et d'une sphère portant une densité $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Cette deuxième partie donne un hémisphère chargé positivement (pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) et un hémisphère chargé négativement (pour $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$), avec la même valeur absolue, ce qui fait que les charges se compensent.

8 1. Le cylindre infini présente une invariance par translation d'axe (Oz) et une invariance par rotation d'axe (Oz) . Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie, de même que tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) .

2. L'hélice infinie présente une invariance par toute translation discrète d'axe (Oz) , d'un nombre entier de pas de l'hélice p . En revanche, elle ne présente pas d'invariance par rotation autour de (Oz) car elle « avance en même temps qu'elle tourne ». Enfin, une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe (Oz) transforme cette hélice gauche en hélice droite, et ne laisse donc pas invariante la distribution.

3. L'hélice finie ne présente aucune symétrie particulière puisque l'invariance par translation n'est plus valable.



9 1. On travaille en coordonnées sphériques. La densité volumique de charges est fonction de la seule variable r . La distribution de charges est donc invariante par toute rotation autour de O : on a une symétrie sphérique.

2. On découpe le volume du noyau atomique en coquilles sphériques élémentaires d'épaisseur dr . Une telle coquille a un volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$, et porte une charge $dq(r) = \rho(r)d\tau = 4\pi\rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)r^2 dr$.

La charge totale portée par le noyau atomique est donc :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a dq(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^a = 4\pi\rho_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{5a^2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$$

2 – Champ électrostatique

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 11

- | | |
|---|---|
| <p>1 Le champ électrostatique créé en un point M par une charge ponctuelle q_0 placée en O est donné par :</p> <p><input type="checkbox"/> a. $\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$</p> <p><input type="checkbox"/> b. $\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{OM}$</p> <p><input type="checkbox"/> c. $\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{OM}$</p> <p>2 Quelle est l'unité SI de la constante diélectrique ϵ_0 ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Le $\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Le $\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^2$.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Le $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$.</p> <p>3 Lorsque deux lignes de champ se croisent en un point M :</p> <p><input type="checkbox"/> a. le champ électrostatique n'est pas défini en M.</p> | <p><input type="checkbox"/> b. il y a une charge ponctuelle positive placée en M.</p> <p><input type="checkbox"/> c. le champ électrostatique en M est nul.</p> <p>4 En un point M d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ créé par cette distribution est :</p> <p><input type="checkbox"/> a. porté par le plan d'antisymétrie.</p> <p><input type="checkbox"/> b. nul.</p> <p><input type="checkbox"/> c. perpendiculaire au plan d'antisymétrie.</p> <p>5 Soit un plan (\mathcal{P}) orthogonal à deux fils illimités parallèles, uniformément chargés avec des densités linéiques opposées λ et $-\lambda$. En un point M de (\mathcal{P}) :</p> <p><input type="checkbox"/> a. le champ $\vec{E}(M)$ appartient à (\mathcal{P}).</p> <p><input type="checkbox"/> b. le champ $\vec{E}(M)$ est orthogonal à (\mathcal{P}).</p> <p><input type="checkbox"/> c. il est impossible de déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ par une simple analyse de symétrie.</p> |
|---|---|

© Nathan, classe prépa

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 11

- | | |
|---|---|
| <p>1 On considère une droite (Oz) chargée, avec la densité linéique de charges suivante : $\lambda = +\lambda_0$ si $x < 0$ et $\lambda = -\lambda_0$ si $x > 0$. De quelles variables dépend le champ électrostatique créé par cette distribution ? Quelle est sa direction ? Étudier le cas des points du plan d'équation $z = 0$.</p> <p>2 On considère une sphère de centre O et de rayon R. On suppose que cette sphère est chargée en surface, avec un hémisphère $z < 0$ portant la densité surfacique de charges uniforme $+\sigma_0$ et l'autre hémisphère $z > 0$ portant la densité surfacique de charges uniforme $-\sigma_0$. De quelles variables dépend le champ électrostatique créé par cette distribution ? Quelle est sa direction ?</p> | <p>Étudier le cas des points du plan d'équation $z = 0$.</p> <p>3 Soient trois charges q_1, q_2, q_3 placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a. Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution au centre de gravité du triangle, sachant que $q_1 = q_2 = q$ et $q_3 = 2q$.</p> <p>4 Tracer approximativement la carte des lignes de champ électrostatique créé par les distributions suivantes. On se placera dans un plan quelconque contenant les deux charges.</p> <p>1. $+q$ placée en $A(x = -a)$ et $+q$ placée en $B(x = +a)$.</p> <p>2. $+q$ placée en $A(x = -a)$ et $-q$ placée en $B(x = +a)$.</p> <p>3. $+4q$ placée en $A(x = -a)$ et $-q$ placée en $B(x = +a)$.</p> |
|---|---|

1 * 10 min

> Corrigé p. 12

Sphère uniforme

Calculer le champ électrostatique créé en son centre O par une sphère de rayon R , portant une densité surfacique de charges uniforme σ_0 .

2 ** 15 min

> Corrigé p. 13

Champ électrique sur l'axe d'un système $-q ; +q$

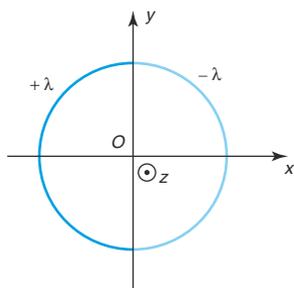
Soient deux charges électriques ponctuelles portées par un axe (Ox) : $+q$ en $B(+a)$ et $-q$ en $A(-a)$. Exprimer le champ électrique créé en $M(x)$ par cette distribution, M appartenant à l'axe (Ox) .

3 ** 15 min

> Corrigé p. 13

Cerceau

Calculer le champ électrostatique créé en un point de l'axe (Oz) par la distribution de charges linéique constituée d'une circonférence chargée pour $x < 0$ avec une densité linéique $+\lambda$ et pour $x > 0$ avec une densité linéique $-\lambda$.



4 ** 15 min

> Corrigé p. 14

Arc de cercle uniformément chargé

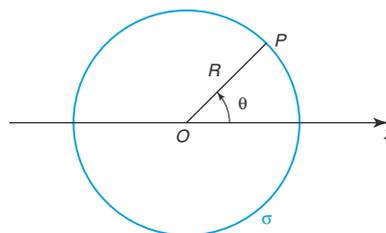
Soit un arc de cercle de centre O de rayon R , vu du point O sous un angle $2\alpha = \frac{2\pi}{3}$, chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$. Déterminer le champ au point O .

5 ** 20 min

> Corrigé p. 15

Sphère $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$

Calculer le champ électrostatique créé en son centre O par une sphère de rayon R , portant la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$.



6 ** 30 min

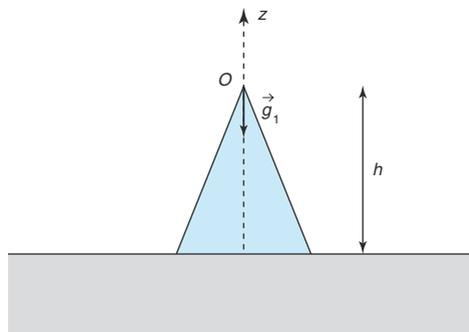
> Corrigé p. 15

Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

1. Calculer le champ électrique créé au sommet d'un cône de révolution de hauteur h , de demi-angle au sommet α , uniformément chargé en volume avec une densité volumique ρ .

2. On considère une montagne modélisée par un cône de révolution de hauteur h , de demi-angle au sommet α , de masse volumique uniforme ρ . On note $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur à l'altitude h du sommet de la montagne, si celle-ci n'existait pas, et $\vec{g}_1 = -g_1 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur au sommet de la montagne.

Exprimer $\Delta g = g_1 - g_0$.



On donne $\rho = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2}$, $h = 1,0 \text{ km}$ et $\alpha = 30^\circ$.
 Calculer Δg .

Tester ses connaissances

1 Réponse b. Seule cette réponse est homogène. En effet, le vecteur \vec{e}_r est défini par $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{\vec{OM}}{r}$.

2 Réponse a. L'unité SI de ϵ_0 se déduit d'une analyse dimensionnelle de la loi de Coulomb :

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]^2}{[r^2][f]}, \text{ avec pour la force } [f] = MLT^{-2},$$

$[r] = L$, et $[q] = [i]T$, où i est une intensité de courant électrique, d'unité l'ampère.

Donc $[\epsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^4[i]^2$. L'unité SI de ϵ_0 est donc le $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$.

3 Réponse c. Le champ électrostatique est par définition tangent aux lignes de champ. Il ne peut être tangent à deux courbes distinctes en un point donné, sauf s'il est nul.

4 Réponse c. Le champ électrostatique créé par une distribution de charges en un point d'un plan d'antisymétrie est perpendiculaire à ce plan. C'est ce qui lui vaut au passage le nom de vecteur polaire.

5 Réponse a. (\mathcal{P}) est un plan de symétrie, il contient \vec{E} .

Savoir appliquer le cours

1 La distribution présente une symétrie de révolution, c'est-à-dire une invariance par rotation autour de l'axe (Oz). Le champ créé par cette distribution ne dépend donc pas de l'angle θ des coordonnées cylindriques. En revanche, il n'y a pas d'invariance par translation d'axe (Oz) donc le champ dépend de z , et il dépend bien entendu de r : $E(r, \theta, z) = E(r, z)$

Le plan (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) est un plan de symétrie de la distribution, donc le champ électrostatique en ce point lui appartient, il n'a pas de composante orthoradiale :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$$

En un point M du plan $z = 0$, on a une information supplémentaire sur le champ électrostatique. En effet, ce plan ($M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) est un plan d'antisymétrie de la distribution, le champ lui est donc normal :

$$\vec{E}(M \in (xOy)) = E_z(r)\vec{e}_z.$$

2 La distribution présente une symétrie de révolution, invariance par rotation autour de l'axe (Oz). Le champ électrostatique créé par cette distribution ne dépend donc pas de l'angle φ des coordonnées sphériques : $E(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta)$

Le plan ($M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) (plan méridien) est plan de symétrie de la distribution, le champ lui appartient, il n'a pas de composante longitudinale :

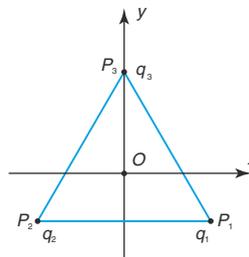
$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_z(r, \theta)\vec{e}_\theta$$

Le plan $z = 0$, c'est-à-dire ($M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) est un plan d'antisymétrie, le champ lui est donc normal :

$$\vec{E}(M \in (xOy)) = E_\theta\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_\theta.$$

Remarque : on peut aussi écrire $\vec{E}(M \in (xOy)) = E(r)\vec{e}_z$, puisque dans cette position, le vecteur \vec{e}_θ s'identifie au vecteur \vec{e}_z . \in

3 La distribution de charges est constituée de trois charges ponctuelles placées en triangle.



On utilise le principe de superposition :

$$\begin{aligned} \vec{E}(O) &= \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O) + \vec{E}_3(O) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{P}_1 \vec{O} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{P}_2 \vec{O} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{P}_3 \vec{O} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{P}_1 \vec{O} + \vec{P}_2 \vec{O} + 2\vec{P}_3 \vec{O}) \end{aligned}$$

avec $r = OP_1 = OP_2 = OP_3 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Or, d'après les positions respectives de P_1 , P_2 et P_3 :

$$\vec{P}_1\vec{O} = r\left(-\cos\frac{\pi}{6}\vec{e}_x + \sin\frac{\pi}{6}\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{P}_2\vec{O} = r\left(+\cos\frac{\pi}{6}\vec{e}_x + \sin\frac{\pi}{6}\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{P}_3\vec{O} = -r\vec{e}_y$$

Il vient $\vec{P}_1\vec{O} + \vec{P}_2\vec{O} + 2\vec{P}_3\vec{O} = -r\vec{e}_y$, car $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

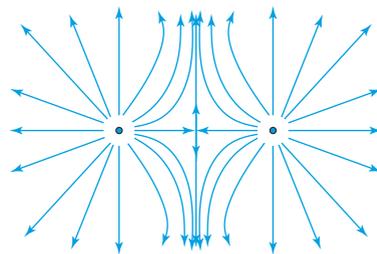
Donc $\vec{E}(O) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_y$.

Avec $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, on obtient $\vec{E} = -\frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\vec{e}_y$

4 Pour tracer les cartes de champ, on utilise le fait que proche d'une charge ponctuelle, le champ est quasiment celui d'une charge ponctuelle supposée seule dans l'espace (champ radial, centrifuge si la charge est positive). Les lignes de champ divergent à partir d'une charge positive et soient divergent vers l'infini soit convergent vers une charge négative.

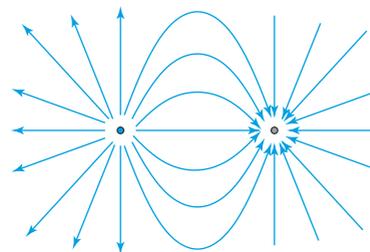
La carte de champ met aussi en évidence les propriétés de symétrie du champ.

1. La carte de champ doit faire apparaître un plan de symétrie (plan médiateur des deux charges). Dans le plan considéré, la médiatrice du segment est donc une ligne de champ. Et la droite portant les deux charges est également axe de symétrie, donc une ligne de champ. L'intersection de ces deux droites (milieu du segment) est le point de champ nul. L'allure des lignes de champ est tracée sur la figure suivante.



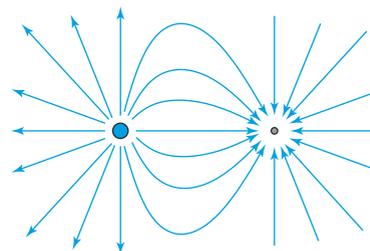
Carte de champ pour la distribution $+q, +q$

2. Le plan médiateur des deux charges est désormais un plan d'antisymétrie. Le champ en un point de ce plan lui est donc perpendiculaire, les lignes de champ sont orthogonales à la médiatrice du segment AB . La droite portant les charges est toujours axe de symétrie.



Carte de champ pour la distribution $+q, -q$

3. Le plan médiateur ne présente pas de symétrie particulière, mais la droite portant les charges est toujours axe de symétrie. La carte de lignes de champ est similaire à la précédente, mais légèrement déformée par le déséquilibre des charges.



Carte de champ pour la distribution $+4q, -q$

S'entraîner

1 Tout plan passant par O est un plan de symétrie de la distribution. Donc le champ électrostatique en O appartient à tous les plans passant par O :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}$$

On peut aussi faire le calcul suivant : on se place en coordonnées sphériques et on découpe la surface de la sphère en petites surfaces élémentaires $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ centrées autour du point P courant de la sphère.

Le champ élémentaire en O , créé par cette surface élémentaire est $\vec{dE}(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{R^2} \frac{\vec{PO}}{PO}$.

$$\text{Donc } \vec{dE}(O) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r,$$

car $\vec{PO} = -R\vec{e}_r$ et $PO = R$.

Par intégration :

$$\vec{E}(O) = \iint_{\text{sphère}} \vec{dE}(O) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{sphère}} \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r.$$

$$\text{Or } \vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z.$$

Donc :

$$E_x(O) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \right) = 0$$

$$\text{car } \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0.$$

De même :

$$E_y(O) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right) = 0$$

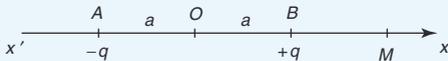
$$\text{car } \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0.$$

$$\text{Et enfin, } E_z(O) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = 0$$

$$\text{car } \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta = 0.$$

L'argument de symétrie, tout aussi convaincant que ce calcul, permet de l'éviter.

2 On considère la distribution de charges représentée sur la figure suivante.



L'axe (Ox) est axe de symétrie de la distribution donc le champ électrostatique en un point de l'axe est porté par celui-ci : $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$.

D'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M).$$

Le champ créé par la charge $-q$ placée en $A(-a)$ est :

$$\vec{E}_A(M) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(x+a)^2} \vec{e}_x & \text{si } x > -a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{(x+a)^2} (-\vec{e}_x) & \text{si } x < -a \end{cases}$$

Le champ créé par la charge $+q$ placée en $B(+a)$ est :

$$\vec{E}_B(M) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} \vec{e}_x & \text{si } x > a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} (-\vec{e}_x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Pour $x < -a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x-a)^2 - (x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= -\frac{qax}{\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Pour $-a < x < a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-(x-a)^2 - (x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= -\frac{q(x^2+a^2)}{2\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Pour $x > a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-(x-a)^2 + (x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= \frac{qax}{\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

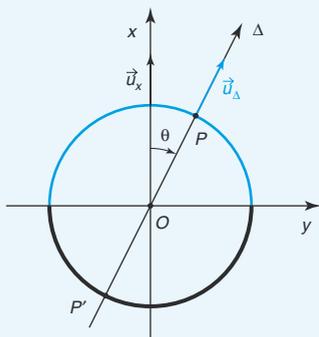
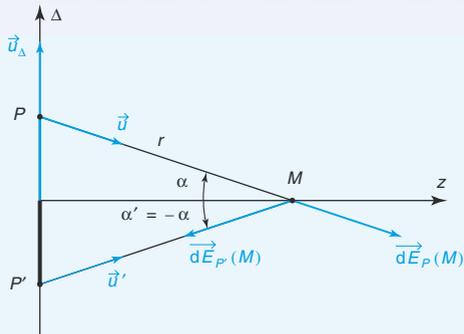
3 On se place en un point M de l'axe (Oz). Un tel point M appartient au plan (yOz), plan d'antisymétrie de la distribution de charges. Par conséquent, le champ électrostatique en M est normal à ce plan d'antisymétrie :

$$\vec{E}(M) = E_x(M)\vec{e}_x.$$

En un point de l'axe (Oz), on a en outre $x = y = 0$,

$$\text{donc } \vec{E}(M) = E_x(z)\vec{e}_x$$

Tous les points P du cerceau se trouvent à la même distance du point M . On note α l'angle sous lequel ils sont vus depuis le point M .



Soit un élément de longueur $d\ell = R d\theta$ centré sur P du demi-cercle chargé négativement ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$). Il porte une charge $dq = -\lambda R d\theta$.

On s'intéresse uniquement à la composante suivant \vec{e}_x du champ élémentaire (les autres donnent une intégrale nulle, d'après l'analyse de symétrie) :

$$dE_{P,x}(M) = \vec{dE}_P(M) \cdot \vec{e}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{avec } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}.$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \vec{u} &= -\sin\alpha \vec{u}_\Delta + \cos\alpha \vec{e}_z \\ &= -\sin\alpha \cos\theta \vec{e}_x - \sin\alpha \sin\theta \vec{e}_y + \cos\alpha \vec{e}_z, \end{aligned}$$

$$\text{on a } \vec{u} \cdot \vec{e}_x = -\sin\alpha \cos\theta.$$

$$\text{Donc } dE_{P,x}(M) = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\alpha \cos\theta. \text{ La composante}$$

suivant \vec{e}_x du champ total créé par ce demi-cercle

s'obtient en intégrant sur θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} E_{-\lambda,x}(M) &= \frac{\lambda R \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{\lambda R \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda R \sin\alpha}{2\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Pour le demi-cercle chargé positivement, on obtient un résultat similaire. On considère un élément de longueur $d\ell = R d\theta$ centré sur P' , portant une charge élémentaire $dq' = \lambda R d\theta$.

$$dE_{P',x}(M) = \vec{dE}_{P'}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{r^2} \vec{u}' \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{avec } \vec{u}' = \frac{\vec{P'M}}{P'M}.$$

On remarque que l'angle θ repère la position de l'axe Δ , il repère donc à la fois le point P (intersection du demi-cercle chargé négativement et de Δ) et le point P' (intersection du demi-cercle chargé positivement et de Δ). Pour décrire tout le cercle, il suffit de faire varier θ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Pour le point P' :

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \sin\alpha \vec{u}_\Delta + \cos\alpha \vec{e}_z \\ &= \sin\alpha \cos\theta \vec{e}_x + \sin\alpha \sin\theta \vec{e}_y + \cos\alpha \vec{e}_z, \end{aligned}$$

$$\text{on a donc } \vec{u}' \cdot \vec{e}_x = \sin\alpha \cos\theta,$$

$$\text{donc } dE_{P',x}(M) = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\alpha \cos\theta,$$

et par intégration pour θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{+\lambda,x}(M) &= \frac{\lambda R \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{\lambda R \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda R \sin\alpha}{2\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

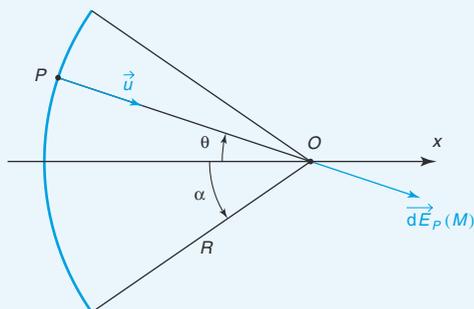
$$\text{Or } \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \text{ et } r^2 = R^2 + z^2.$$

Le champ total est donc :

$$\vec{E}(M) = [E_{+\lambda,x}(M) + E_{-\lambda,x}(M)] \vec{e}_x = \frac{\lambda R^2}{\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

4 On calcule le champ électrostatique créé au centre O d'un arc de cercle chargé uniformément en longueur (λ). L'axe (Ox) est un axe de symétrie de la distribution de charges. Donc le champ en O est porté par la direction (Ox) : $\vec{E}(O) = E_x(O) \vec{e}_x$.

On considère l'élément de longueur $d\ell = R d\theta$ centré autour du point P de l'arc de cercle uniformément chargé. Cet élément de longueur porte une charge élémentaire $dq = \lambda R d\theta$. On le repère par l'angle θ .



On se contente de calculer la composante suivant \vec{e}_x du champ élémentaire, les autres composantes s'annulant par intégration d'après les considérations de symétrie :

$$E_x(O) = \left(\int d\vec{E}(O) \right) \cdot \vec{e}_x = \int (d\vec{E}(O) \cdot \vec{e}_x) = \int dE_x(O).$$

Le champ élémentaire créé en O par la charge dq placée en P est $d\vec{E}_P(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \vec{u}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO}$.

La composante suivant \vec{e}_x du champ élémentaire créé en O par la charge dq placée en P est :

$$\begin{aligned} dE_x(O) &= d\vec{E}_P(O) \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \vec{u} \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO}$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_x = \cos\theta$.

On a une fonction paire à intégrer sur un intervalle symétrique par rapport à θ : $\int_{-\alpha}^{+\alpha} dE_x(O) = 2 \int_0^{+\alpha} dE_x(O)$.

Par conséquent :

$$E_x(O) = 2 \int_0^{+\alpha} dE_x(O) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{+\alpha} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda \sin\alpha}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

On a enfin $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

donc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\vec{E}(O) = \frac{\lambda\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_x$

(Ox) en faisant varier φ de 0 à 2π pour décrire toute la couronne (d'où la valeur de dS).

On se contente de calculer la composante suivant \vec{e}_x du champ élémentaire créé par cette surface chargée élémentaire, les autres composantes s'annulant au cours de l'intégration, par symétrie :

$$E_x(O) = \left(\int d\vec{E}_P(O) \right) \cdot \vec{e}_x = \int \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} dq \vec{u} \cdot \vec{e}_x \right) = \int dE_x(O).$$

Chaque point P de cette couronne est vue depuis O sous le même angle θ . Par conséquent,

$\vec{u} \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$ pour tous les points de la couronne élémentaire considérée :

$$dE_x(O) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0 \cos\theta \times 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{R^2} \cos\theta.$$

On a $dE_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta$

$$= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos^2\theta d(\cos\theta).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour θ variant de 0 à π :

$$E_x(O) = \int dE_x(O) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2\theta d(\cos\theta)$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (-1 - 1).$$

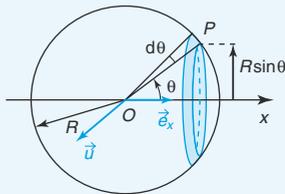
On obtient par conséquent $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$

5 On considère la distribution de charges constituée d'une sphère chargée en surface avec la densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

L'axe (Ox) est axe de symétrie de la distribution car $\cos\theta$ est une fonction paire : $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

Le champ électrostatique en O est donc porté par l'axe de symétrie : $\vec{E}(O) = E_x(O)\vec{e}_x$.

On découpe la surface chargée en surfaces élémentaires, tenant compte de cette symétrie. On la découpe donc en couronnes élémentaires, d'axe (Ox), vues depuis O sous l'angle θ .

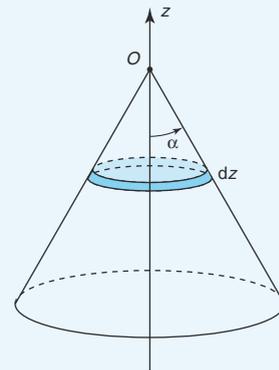


La surface élémentaire de cette petite couronne est : $dS = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$, car le rayon du cercle de la couronne est $R \sin\theta$ et son épaisseur est $R d\theta$.

On peut aussi la voir comme une surface élémentaire $d^2\Sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ que l'on fait tourner autour de

6 On va mener ici une analogie entre le champ électrostatique créé par une distribution de charges et le champ de gravitation créé par une distribution de masses.

1. On demande dans un premier temps de calculer le champ électrostatique créé au sommet d'un cône de révolution, uniformément chargé en volume. On va utiliser le théorème de superposition et décomposer le cône en petits disques élémentaires, de hauteur dz .



Il faut exprimer la densité surfacique équivalente portée par ce disque. Il a une épaisseur dz et une surface $S(z)$. Il a donc un volume $d\tau = S(z)dz$, et porte une charge $dq = \rho d\tau = \rho S(z)dz$. Si on veut lui associer une densité surfacique, en négligeant son épaisseur dz devant ses autres dimensions, alors il aura une densité surfacique σ telle que la charge portée soit la même : $\sigma S(z) = \rho S(z)dz$ soit $\sigma = \rho dz$

Or le champ créé par un disque portant la densité uniforme σ , en un point M de son axe de symétrie, depuis lequel il est vu sous l'angle α est (voir exercice n° 2 de « Savoir résoudre les exercices ») donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha)\vec{e}_z.$$

Le champ élémentaire créé en O par le disque élémentaire d'épaisseur dz est donc :

$$d\vec{E}(O) = \frac{\rho dz}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha)\vec{e}_z.$$

Toutes les tranches du cône étant vues depuis le point O sous le même angle α , l'intégration pour z variant de $-h$ à 0 donne :

$$\vec{E}(O) = \int_{z=-h}^{z=0} dE(O)\vec{e}_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha) \int_{-h}^0 dz\vec{e}_z.$$

On obtient :
$$\vec{E}(O) = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha)\vec{e}_z$$

2. On cherche maintenant à calculer la perturbation du champ de pesanteur due à une montagne, modélisée par un cône de densité volumique de masse uniforme.

La distribution décrite peut être vue comme la superposition du sol d'une part, qui crée le champ de pesanteur \vec{g}_0 , et de la montagne considérée seule d'autre part, qui crée un champ de pesanteur \vec{g}_2 dont on vient de calculer l'équivalent électrostatique (voir figure).

Pour la distribution de masses complète, on observe en O un champ de pesanteur :

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_0 + \vec{g}_2$$

On demande de calculer $\Delta g = g_1 - g_0 = g_2$, c'est-à-dire le champ dû au seul cône de densité ρ .

D'après l'analogie entre électrostatique et gravitation (donc pesanteur), on passe d'une description à l'autre en remplaçant la densité volumique de charges ρ par la masse volumique ρ et la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$, constante de gravitation universelle.

On a par conséquent :

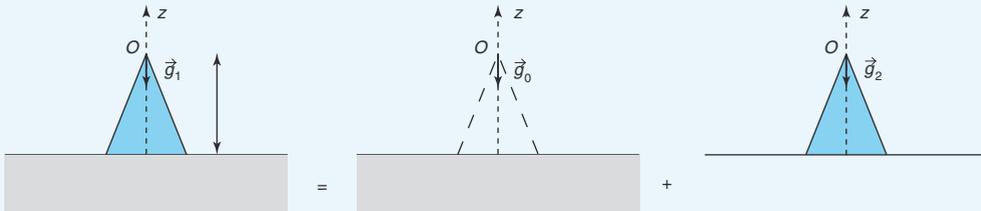
$$\vec{g}_2(O) = -2\pi G\rho h(1 - \cos\alpha)\vec{e}_z,$$

et

$$\Delta g = -2\pi G\rho h(1 - \cos\alpha)$$

A. N. : $\Delta g = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Remarque : en pratique, pour mesurer une anomalie du champ de pesanteur créée par une montagne, on ne peut pas retirer la montagne pour mesurer le champ en son absence. On mesure donc le gramp de gravité « loin » de la montagne, ce qui nous donne le champ de référence \vec{g}_0 .



3 – Circulation et potentiel électrostatique

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 21

1 Donner l'expression du gradient en coordonnées sphériques d'une fonction f :

a.
$$\vec{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta, z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r, z} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r, \theta} \vec{e}_z$$

b.
$$\vec{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta, \varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r, \varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r, \theta} \vec{e}_\varphi$$

c.
$$\vec{\text{grad}}f = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta, \varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r, \varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r, \theta} \vec{e}_\varphi$$

2 Le potentiel électrostatique est défini à une constante près. Quelle est l'affirmation exacte ?

a. Par convention, pour toute distribution, le potentiel est pris nul à l'infini.

b. Pour toute distribution finie, on peut choisir un potentiel nul à l'infini.

c. Pour une distribution infinie, il est impossible de fixer le potentiel nul en un point.

3 On considère une distribution de charges à symétrie sphérique. L'affirmation suivante est-elle exacte ? Le potentiel créé est continu, de même que sa dérivée $\frac{dV}{dr}$.

a. Non.

b. Oui.

4 En tout point d'une même équipotentielle :

a. le module du champ électrostatique est le même.

b. le champ électrostatique est tangent.

c. le potentiel a la même valeur.

5 Deux surfaces équipotentielles peuvent se couper.

a. Non.

b. Oui.

c. Cela dépend.

1 On suppose que la distribution a une symétrie sphérique, le champ électrostatique est donc purement radial :

$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\vec{e}_r$. Comment se simplifie la relation champ-potentiel ?

2 Soit la distribution

$\mathcal{D} \{A(-2, 0) : -3q; B(+1, -1) : +q\}$.

Déterminer l'équation de l'équipotentielle $V = 0$ dans le plan (xOy) . En déduire la nature de la surface équipotentielle $V = 0$.

3 On considère une charge ponctuelle q placée en un point O , origine d'un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Il existe en outre un champ uniforme (créé par une autre distribution) colinéaire à (Ox) : \vec{E}_0 .

1. Déterminer les composantes en coordonnées polaires du champ électrostatique résultant \vec{E} au point $M(r, \theta)$.

2. En déduire l'expression du potentiel $V(r, \theta)$ en M .

4 Soit la distribution de charges constituée d'un fil infini portant la densité linéique de charges uniforme λ . On donne l'expression du champ électrostatique créé par cette distribution : $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.

Calculer le potentiel V dont dérive ce champ électrostatique.

1 * 15 min

> Corrigé p. 23

Système à deux charges

On considère deux charges $Q = +15e$ et $q = -2e$ placées respectivement aux points $O(0, 0, 0)$ et $A(a, 0, 0)$ de l'axe (Ox) .

- Déterminer le point P de l'axe où le champ électrostatique s'annule.
- Déterminer les deux points de l'axe où le potentiel électrostatique s'annule.

2 ** 30 min

> Corrigé p. 23

Disque uniformément chargé

Soit un disque de centre O , de rayon R , compris dans le plan (xOy) et portant une densité surfacique uniforme σ .

- Donner l'expression du potentiel $V(M)$ créé en un point M de (Oz) par cette distribution.
- Retrouver l'expression du champ électrostatique qui dérive de ce potentiel.

3 ** 30 min

> Corrigé p. 24

Circonférence chargée

Soit un cercle d'axe (Oz) , de rayon R , portant la densité linéique de charges uniforme λ .

- Calculer le potentiel électrostatique créé par cette distribution sur l'axe (Oz) .
- Calculer indépendamment le champ électrostatique créé en un point de l'axe (Oz) par cette distribution.
- Vérifier la relation champ-potential.
- Déterminer le maximum du champ électrostatique et représenter l'allure du module $E(z)$ du champ ainsi que celle du potentiel $V(z)$.

4 ** 30 min

> Corrigé p. 25

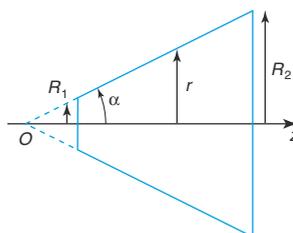
Tronc de cône

On considère un tronc de cône d'axe (Oz) , de sommet O , d'angle au sommet α , de rayon minimum R_1 et de rayon maximum R_2 .

Il est chargé avec une densité surfacique non

uniforme $\sigma = \sigma_0 \frac{a}{r}$, où

a est une constante, homogène à une longueur, et r le rayon local du cône.



- Exprimer le potentiel électrostatique créé au point O par cette distribution de charges.
- Exprimer également le champ électrostatique en O .

5 ** 30 min

> Corrigé p. 25

Demi-sphère uniformément chargée en surface

On considère une demi-sphère de centre O et de rayon R portant une densité surfacique de charges uniforme σ .

- Exprimer le potentiel au point O , par un calcul direct.
- Calculer le potentiel en tout point M de l'axe (Oz) de symétrie de la distribution.
- Par un développement limité au voisinage de $z = 0$, retrouver l'expression, trouvée à la première question, du potentiel en O .

6 ** 30 min

> Corrigé p. 26

Surfaces équipotentielles d'une ligne bifilaire

Soient deux fils rectilignes infinis, parallèles à l'axe (Oz) , passant par $O_1(a, 0, 0)$ et $O_2(-a, 0, 0)$, portant respectivement les densités linéiques de charges $+\lambda$ et $-\lambda$, avec $\lambda > 0$.

On travaille en coordonnées cartésiennes. On note r_1 et r_2 , les distances respectives de M aux deux fils.

On choisit O comme référence des potentiels : $V(O) = 0$.

- Discuter des symétries de la distribution.
- Donner les équations des surfaces équipotentielles.

3. Tracer dans le plan (xOy) l'allure des lignes de champ et de l'intersection des surfaces équipotentielles avec le plan (xOy) .



► Corrigé p. 27

Interaction d'un disque (σ) et d'une charge ponctuelle q

On considère un disque (O, R) de densité surfacique uniforme $\sigma > 0$. Soit (Ox) un axe perpendiculaire en O au disque.

1. Donner en fonction de x le potentiel V en tout point de l'axe (Ox) .

2. Soit une charge ponctuelle $-q$ (avec $q > 0$) mobile sur (Ox) . Le disque est supposé percé en O de façon que la charge puisse éventuellement le traverser, mais sans que cela modifie le potentiel V calculé précédemment.

Calculer en fonction de x l'énergie potentielle E_p de la charge.

En déduire la position d'équilibre de la charge (on néglige la pesanteur). Celle-ci est-elle stable ou instable ?

Tester ses connaissances

1 Réponse **b**. L'expression **a**. correspond à des coordonnées cylindriques. L'expression **c**. n'est pas homogène.

2 Réponse **b**. La réponse **a**. est fausse car pour une distribution infinie, il est impossible d'imposer un potentiel nul à l'infini (il y existe des charges). En revanche, on peut tout à fait choisir un autre point pour imposer un potentiel nul. La réponse **c**. est donc également fausse.

3 Réponse **a**. Cette affirmation est fausse, car pour une sphère uniformément chargée en surface, qui est bien à symétrie sphérique, le champ électrostatique

(et donc la dérivée du potentiel par rapport à r) est discontinu à la traversée de la sphère.

En revanche, la proposition est exacte dans le cas d'une boule uniformément chargée en volume.

4 Réponse **c**. Par définition d'une surface équipotentielle, le potentiel a la même valeur en tout point de la surface. Ce n'est pas le cas du champ dont l'intensité dépend de la façon dont les équipotentielles sont rapprochées (gradient), et bien entendu, le champ est normal aux surfaces équipotentielles, pas tangent.

5 Réponse **a**. Deux surfaces équipotentielles différentes correspondent à deux valeurs distinctes du potentiel, elles ne peuvent donc se croiser.

Savoir appliquer le cours

1 En coordonnées sphériques, la relation champ-potentiel s'écrit :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta, \varphi} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r, \varphi} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{r, \theta} \vec{e}_\varphi.$$

Si le champ est purement radial :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r) \vec{e}_r, \text{ donc } E_\theta = E_\varphi = 0.$$

Par conséquent : $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, le potentiel ne dépend donc ni de θ ni de φ :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r)$$

La relation champ-potentiel s'écrit donc :

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

2 D'après le principe de superposition :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M).$$

La distribution étant finie, on peut prendre une référence de potentiel à l'infini.

On a alors :

$$V_A(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 AM} \text{ et } V_B(M) = \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 BM}.$$

$$\text{Donc } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3}{AM} + \frac{1}{BM} \right).$$

L'équipotentielle $V = 0$ correspond donc à la surface d'équation $\frac{-3}{AM} + \frac{1}{BM} = 0$.

$$AM = 3BM$$

$$AM^2 = 9BM^2$$

$$(x+2)^2 + (y-0)^2 = 9[(x-1)^2 + (y+1)^2]$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 + 18y + 9$$

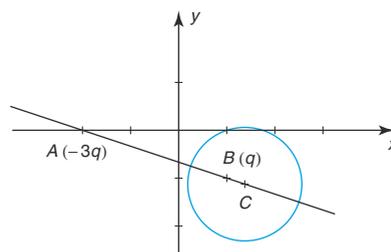
$$0 = 8x^2 - 22x + 8y^2 + 18y + 14.$$

L'équation de la trace de l'équipotentielle $V = 0$ dans le plan (xOy) est donc :

$$4x^2 + 4y^2 - 11x + 9y + 7 = 0$$

Il s'agit d'un cercle, de centre $C\left(\frac{11}{8}; -\frac{9}{8}\right)$, et de rayon $R = \frac{\sqrt{90}}{8}$.

La surface équipotentielle d'équation $V = 0$ est donc une sphère de centre C et de rayon R .



Remarque : on aurait pu voir avant calculs que l'équation $AM = 3BM$ détermine un cercle dont le centre C est sur la droite (AB) pour des raisons de symétrie.

3 1. Le champ électrostatique créé en M par la charge ponctuelle placée en O est :

$$\vec{E}_q(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

D'après le théorème de superposition, le champ total en M est donné par : $\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

Or $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x = E_0 \cos\theta \vec{e}_r - E_0 \sin\theta \vec{e}_\theta$.

En coordonnées polaires, le champ total est donc :

$$\vec{E}(M) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + E_0 \cos\theta \right) \vec{e}_r - E_0 \sin\theta \vec{e}_\theta$$

2. D'après la relation locale champ-potential :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r \vec{e}_\theta.$$

Par identification, on obtient :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 \cos\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r = E_0 r \sin\theta.$$

On intègre la seconde équation par rapport à θ , à r constant, on obtient $V(r, \theta) = -E_0 r \cos\theta + f(r)$. La constante d'intégration est *a priori* une fonction de r , puisqu'on a intégré à r constant.

On dérive cette expression par rapport à r , en maintenant θ constant :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta = E_0 \sin\theta + \frac{df}{dr}.$$

Par identification, on en déduit $\frac{df}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Par intégration par rapport à r , on obtient la fonction $f(r)$ à une constante près (et c'est cette fois-ci une

vraie constante) : $f(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + k$.

Le potentiel total est donc :

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \cos\theta + k.$$

On ne peut pas choisir de prendre la référence de potentiel (potentiel nul) à l'infini, puisqu'il y existe des charges (de la distribution qui crée un champ uniforme dans tout l'espace). Pour fixer k , il faut choisir un point $M_0(r_0, \theta_0)$ où annuler le potentiel,

on a alors $V(r_0, \theta_0) = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} - E_0 r_0 \cos\theta_0 + k$,

soit $k = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} + E_0 r_0 \cos\theta_0$.

et $V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - E_0 (r \cos\theta - r_0 \cos\theta_0)$

4 On donne le champ d'un fil infini uniformément chargé : $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.

D'après la relation champ-potential en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = -\vec{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta, z} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r, z} \vec{e}_\theta - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r, \theta} \vec{e}_z.$$

Ici, le champ a uniquement une composante radiale :

$E_\theta = E_z = 0$ donc $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Le potentiel ne

dépend donc ni de θ ni de z :

$$V(r, \theta, z) = V(r)$$

Remarque : on aurait pu déduire cela immédiatement des propriétés d'invariance de la distribution. En effet, la distribution de charges est invariante par toute translation d'axe (Oz) et par toute rotation d'axe (Oz) (symétrie cylindrique) donc le potentiel ne peut dépendre des coordonnées θ et z .

La relation locale champ-potential se résume donc à :

$$\frac{dV}{dr} = -E_r = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Par intégration entre r_0 et r , on obtient :

$$V(r) - V(r_0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r}.$$

On ne peut prendre une référence de potentiel à l'infini, car il y existe des charges (fil infini), on choisit donc de prendre une référence de potentiel en r_0 :

$$V(r_0) = 0 \quad \text{et} \quad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

S'entraîner

1. On cherche le point P de l'axe pour lequel le champ est nul.

L'axe (Ox) est axe de symétrie de la distribution donc le champ électrostatique en un point de l'axe est porté par celui-ci : $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$.

D'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_Q(M) + \vec{E}_q(M).$$

Le champ créé par la charge Q placée en $O(0, 0, 0)$ est :

$$\vec{E}_Q(M) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} (-\vec{e}_x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le champ créé par la charge q placée en $A(a, 0, 0)$ est :

$$\vec{E}_q(M) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} \vec{e}_x & \text{si } x > a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} (-\vec{e}_x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

• Entre $x = 0$ et $x = a$ les champs dus aux deux charges sont dans le même sens. Le point de champ nul ne peut s'y trouver.

• Pour $x < 0$, le module du champ E_Q est toujours supérieur au module du champ E_q . On ne peut donc trouver un point de champ nul dans cette zone.

• Pour $x > a$, on trouve une équation du second degré pour l'abscisse du point de champ nul :

$$E(x) = 0 \text{ implique } \frac{Q}{x^2} + \frac{q}{(x-a)^2} = 0.$$

On cherche les solutions de cette équation :

$$Q(x-a)^2 = -qx^2. \text{ En développant, on obtient :}$$

$$(Q+q)x^2 - 2aQx + Qa^2 = 0.$$

$$\text{Le discriminant vaut } \Delta = 4a^2Q^2 - 4a^2Q(Q+q).$$

Les solutions sont donc

$$x_{\pm} = \frac{2aQ \pm \sqrt{4a^2Q^2 - 4a^2Q(Q+q)}}{2(Q+q)} = \frac{Qa}{Q+q} \left(1 \pm \sqrt{\frac{-q}{Q}} \right).$$

Avec les valeurs numériques proposées, on obtient deux solutions positives : $x_- = 0,73a$ et $x_+ = 1,57a$.

Seule la deuxième solution est supérieure à a et donc

$$\text{acceptable : } x_P = 1,57a$$

2. On cherche maintenant les éventuels points où le potentiel s'annule.

Le potentiel créé sur l'axe par la charge Q placée en O

$$\text{est } V_Q(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|x|}.$$

Le potentiel créé sur l'axe par la charge q placée en A est

$$V_q(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|x-a|}.$$

D'après le principe de superposition, le potentiel total

$$\text{est donc : } V(x) = V_Q(x) + V_q(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|x|} + \frac{q}{|x-a|} \right)$$

Le potentiel s'annule en x si $\frac{Q}{|x|} + \frac{q}{|x-a|} = 0$,

$$\text{c'est-à-dire } \frac{Q}{|x|} = -\frac{q}{|x-a|}.$$

On élève cette relation au carré : $\frac{Q^2}{x^2} = \frac{q^2}{(x-a)^2}$. Cela

donne $Q^2(x-a)^2 = q^2x^2$, ou bien encore :

$$(Q^2 - q^2)x^2 - 2aQ^2x + Q^2a^2 = 0.$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = 4a^2Q^4 - 4a^2Q^2(Q^2 - q^2) = 4a^2Q^2q^2.$$

Les solutions sont :

$$x_{\pm} = \frac{2aQ^2 \pm 2aQq}{2(Q^2 - q^2)} = \frac{Q(Q \pm q)a}{(Q - q)(Q + q)} = \frac{Qa}{Q \mp q}.$$

L'application numérique donne :

$$x_+ = 0,88a \quad \text{et} \quad x_- = 1,2a$$

2 1. On travaille en coordonnées cylindriques.

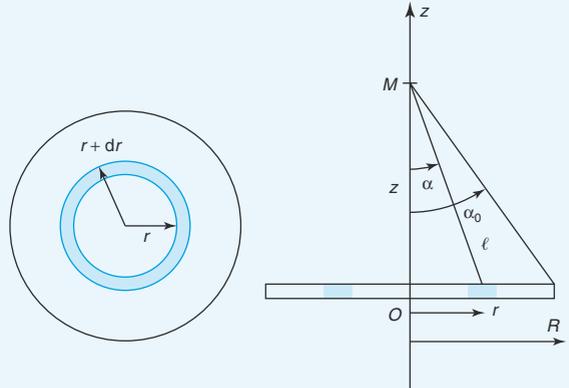
L'axe (Oz) est un axe de symétrie de la distribution, le champ électrostatique en un point M de l'axe est donc porté par celui-ci. Et comme en outre $x = y = 0$ sur

l'axe, on a $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$.

Par conséquent $E_r = E_{\theta} = 0$, donc $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, le

potentiel ne dépend que de z et $E_z(z) = -\frac{dV}{dz}$.

On découpe le disque en couronnes élémentaires de rayon r et d'épaisseur dr . La couronne a donc une surface $dS = 2\pi r dr$ et porte par conséquent une charge $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$.



Tous les points de la couronne sont vus depuis le point M sous le même angle α et sont situés à la même distance ℓ de M . On choisit d'utiliser la variable angulaire α pour repérer la couronne.

On a $\cos \alpha = \frac{z}{\ell}$, donc $\ell = \frac{z}{\cos \alpha}$, et par ailleurs $\sin \alpha = \frac{r}{\ell}$ donc $r = \ell \sin \alpha = z \tan \alpha$ et par différentiation $dr = \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Le potentiel élémentaire créé en M par la couronne de rayon r est :

$$\begin{aligned} dV_r(M) &= \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 \ell} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \tan \alpha \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos \alpha}{z} \\ &= \frac{\sigma z \sin \alpha d\alpha}{2\epsilon_0 \cos^2 \alpha} = -\frac{\sigma z d(\cos \alpha)}{2\epsilon_0 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Il reste à intégrer ce potentiel élémentaire, pour r variant de 0 à R ou, en variable angulaire, pour α variant de 0 à α_0 :

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_0^R dV_r(M) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_0} -\frac{d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\cos \alpha} \right]_0^{\alpha_0} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\cos \alpha_0} - 1 \right). \end{aligned}$$

Or $\cos \alpha_0 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$ donc :

$$V(M) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Ce résultat est obtenu pour la partie $z > 0$. Or le plan (xOy) contenant le disque est un plan de symétrie, donc $V(-z) = V(z)$.

On a donc $V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$

2. On obtient le champ en dérivant le potentiel par rapport à z : $E_z(z) = -\frac{dV}{dz}$.

Donc pour $z > 0$:

$$E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{2z}{2\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right).$$

Et pour $z < 0$: $E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$.

On constate que :

$$\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

On retrouve la discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée avec la densité surfacique σ .

dans la région $z > 0$, on en déduit le potentiel dans la région $z < 0$ par symétrie : $V(-z) = V(z)$.

Tous les points de la circonférence sont situés à la même distance $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ de M . Si on considère un élément de longueur $d\ell = R d\theta$ du cercle, il porte une charge $dq = \lambda R d\theta$ et crée en M un potentiel élémentaire $dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$.

Pour obtenir le potentiel total créé par la circonférence, il suffit de faire varier θ entre 0 et 2π , les autres paramètres étant fixés, l'intégration conduit simplement à :

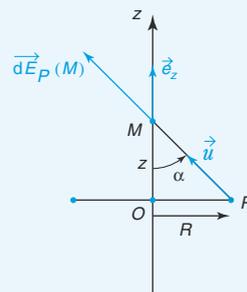
$$V(M) = \int_{\Gamma} dV(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$V(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

2. Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution donc le champ électrostatique en un point de l'axe est porté par l'axe (intersection de tous les plans de symétrie) : $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$.

On se contente donc d'exprimer la composante dE_z du champ élémentaire créé par un élément de longueur de la circonférence. Les autres composantes seront nulles une fois intégrées.

$\vec{dE}_P(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$, où r est la distance du point M au point P de la circonférence portant la charge dq et $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$.



$$dE_z(M) = \vec{dE}_P(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}},$$

car $\vec{u} \cdot \vec{e}_z = \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$.

L'intégration sur θ variant de 0 à 2π donne le champ total créé en M par la circonférence chargée :

$$\vec{E}(M) = \left(\int_{\Gamma} dE_z(M) \right) \vec{e}_z = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3. Si on dérive l'expression du potentiel par rapport à z , on obtient :

$$\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left(-\frac{2z}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \right).$$

En comparant avec l'expression calculée du champ, on vérifie bien la relation champ-potential : $E_z(z) = -\frac{dV}{dz}$

4. Pour trouver les extrema de la fonction $E(z)$, il faut chercher les zéros de sa dérivée par rapport à z :

$$\frac{dE}{dz} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } & \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2z^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \\ & = \frac{z^2 + R^2 - 3z^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} = \frac{R^2 - 2z^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} = 0. \end{aligned}$$

Cette expression s'annule pour $z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$, et le champ

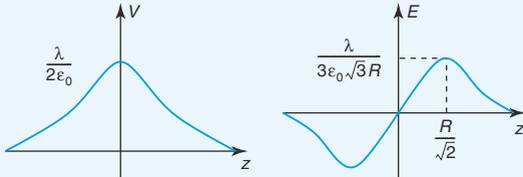
$$\text{vaut alors } E(z) = \frac{\lambda}{3\sqrt{3}\epsilon_0 R}.$$

On a également $E(0) = 0$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = 0$.

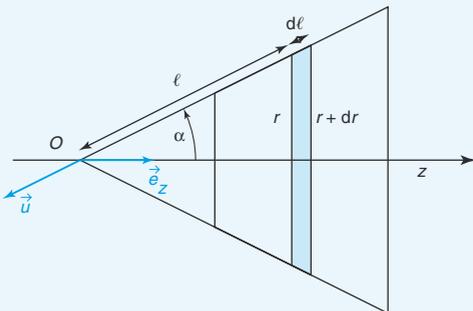
De plus, par symétrie : $E(-z) \stackrel{z \rightarrow -\infty}{\approx} -E(z)$, on a une fonction impaire.

Le potentiel est quant à lui une fonction paire, il est maximum quand le champ est nul, et vaut $V(0) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$.

On a donc les allures représentées sur la figure ci-après pour les variations du potentiel et de la norme du champ :



4.1. La distribution présente une symétrie de révolution. Elle est invariante par toute rotation autour de l'axe de révolution (Oz). On va donc mettre à profit cette symétrie pour découper la distribution de charges en bandelettes d'épaisseur $d\ell$.



La surface ainsi découpée sur le cône est $dS = 2\pi r d\ell$.

$$\text{Or } \ell = \frac{r}{\sin \alpha}, \text{ donc } d\ell = \frac{dr}{\sin \alpha}.$$

La bandelette porte ainsi une charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma_0 \frac{a}{\sin \alpha} dr$.

Tous les points de cette surface élémentaire sont à la même distance ℓ du sommet O du cône, elle crée donc un potentiel élémentaire :

$$dV_r(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \ell} = \frac{\sigma_0 a dr}{2\epsilon_0 \ell \sin \alpha} = \frac{\sigma_0 a dr}{2\epsilon_0 r}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ce potentiel élémentaire pour r variant de R_1 à R_2 , puisque toutes les surfaces élémentaires sont vues sous le même angle α depuis le sommet du cône.

On obtient par conséquent :

$$V(O) = \int_{R_1}^{R_2} dV_r(O) = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}.$$

$$V(O) = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2. Calculons le champ en O à présent. L'axe (Oz) étant un axe de symétrie de la distribution, le champ en un point de cet axe est porté par celui-ci : $\vec{E}(O) = E(O)\vec{e}_z$. On se contentera donc de calculer la composante dE_z du champ élémentaire créé par la surface élémentaire précédente, les autres composantes conduisant à une intégration nulle par symétrie.

Tous les points P de la bandelette sont vus depuis O sous le même angle α et sont à la même distance ℓ de O . La composante $dE_z(O)$ du champ élémentaire est donc :

$$\begin{aligned} dE_z(O) &= d\vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = -\frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \ell^2} \cos \alpha \\ &= -\frac{\sigma_0 a \sin \alpha \cos \alpha dr}{2\epsilon_0 r^2}, \end{aligned}$$

car $\frac{\vec{PM}}{PM} \cdot \vec{e}_z = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ pour tout point P

de la surface élémentaire choisie.

L'intégration donne donc :

$$\begin{aligned} E_z(O) &= \int_{R_1}^{R_2} dE_z(O) = \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \sin \alpha \cos \alpha \int_{R_1}^{R_2} -\frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(O) = \frac{\sigma_0 a}{4\epsilon_0} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \vec{e}_z$$

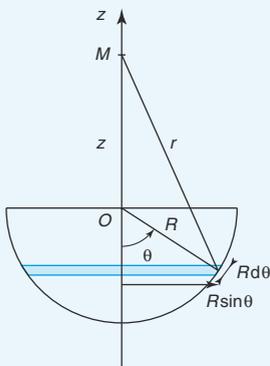
5.1. Au point O il est facile de calculer le potentiel créé par la distribution puisque tous les points de celle-ci por-

tent la même densité surfacique de charges et qu'ils sont tous distants de R :

$$V(O) = \int_{\frac{1}{2}\text{sphère}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{1}{2}\text{sphère}} dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Or $Q = \sigma \times \frac{1}{2} 4\pi R^2 = 2\pi R^2 \sigma$, donc $V(O) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$

2. On utilise les symétries de la distribution pour choisir habilement le découpage de celle-ci. La distribution présente une symétrie de révolution d'axe (Oz) . On découpe la sphère en petites couronnes de rayon $R \sin \theta$ et de largeur $R d\theta$. Chaque couronne a une surface $dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, et porte donc une charge élémentaire $dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta$.



Tous les points de cette surface sont situés à la même distance r de M , ils y créent donc un potentiel élémentaire :

$$dV_{\theta}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(R \sin \theta)^2 + (z + R \cos \theta)^2}}$$

Posons $u = (R \sin \theta)^2 + (z + R \cos \theta)^2$
 $= z^2 + R^2 + 2zR \cos \theta$,

on a alors $du = -2zR \sin \theta d\theta$.

Le potentiel total créé en M est donné par :

$$V(M) = \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=\pi} dV_{\theta}(M) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{zR} \right) \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

avec $u_1 = u(\theta = 0) = z^2 + R^2 + 2zR = (z + R)^2$

et $u_2 = z^2 + R^2$.

On a donc :

$$V(M) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} [\sqrt{u}]_{u_1}^{u_2}$$

$$= -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} (\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{(z + R)^2}).$$

On trouve finalement :

$$V(M) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} (|z + R| - \sqrt{z^2 + R^2})$$

3. Pour retrouver l'expression de $V(O)$, il faut faire un développement limité de l'expression précédente. On fait tendre z vers 0 par valeurs positives :

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{R}{z} - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} \right)$$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$V(z) \approx \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{R}{z} - \frac{R}{z} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} \right) \right]$$

$$V(z) \approx \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{2R} \right)$$

En $z = 0$, on retrouve donc $V(O) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$

6 1. Le plan (xOz) contenant les deux fils est un plan de symétrie de la distribution. Le plan (yOz) est un plan d'antisymétrie de la distribution puisque les deux fils s'échangent dans cette transformation, et ils portent des charges opposées. Enfin, tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) des fils est plan de symétrie. La distribution est en outre invariante par toute translation d'axe (Oz) .

Le potentiel et le champ électrostatiques créés par cette distribution doivent refléter ces propriétés de symétrie.

2. On a calculé à l'exercice n° 4 de « Savoir appliquer le cours » le potentiel dû à un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique constante λ . En coordonnées cylindriques d'axe celui du fil, on a $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$,

où r_0 est la distance au fil à laquelle le potentiel est choisi nul.

On choisit ici de prendre un potentiel nul en O soit à la distance $r_1 = a$ du premier fil et $r_2 = a$ du deuxième fil.

Pour le premier fil, on obtient $V_1(r_1) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{a}$.

Pour le deuxième fil : $V_2(r_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{a}$.

D'après le principe de superposition, on obtient le potentiel créé par la réunion des deux fils :

$$V(M) = V_1(r_1) + V_2(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Les surfaces équipotentielles de cette distribution sont donc données par $V(M) = V_0$,

soit ici $\frac{r_2}{r_1} = k$, où $k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$ est une constante.

Or $r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$ et $r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$. L'équation d'une équipotentielle s'écrit donc :

$$r_2 = kr_1$$

$$r_2^2 = k^2 r_1^2$$

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2[(x-a)^2 + y^2]$$

$$(1-k^2)x^2 + 2ax(1+k^2) + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0$$

$$x^2 + 2a \frac{1+k^2}{1-k^2} x + a^2 + y^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 + y^2 = \left[\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1\right] a^2$$

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2$$

Ce sont des cylindres d'axe parallèle à (Oz) . Leurs traces dans le plan (xOy) sont des cercles de centre

$$\Omega\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2} a, 0\right) \text{ et de rayon } \frac{2ka}{1-k^2}.$$

La surface de potentiel nul est le plan médiateur des deux fils, (yOz) .

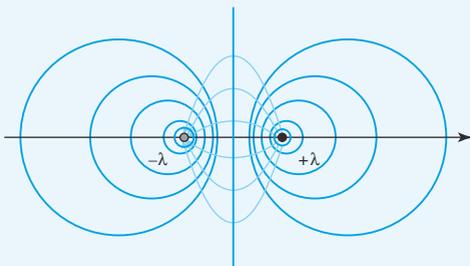
Les cylindres de potentiel V_0 et $-V_0$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan médiateur (yOz) . Passer de l'un à l'autre revient à changer k en $\frac{1}{k}$.

Lorsque k (et donc V_0) tend vers l'infini, le cylindre équipotentiel tend vers le fil lui-même, et lorsque k tend vers 0, le cylindre équipotentiel tend vers le plan médiateur des deux fils.

3. Les traces dans le plan (xOy) des cylindres équipotentiels sont des cercles entourant chaque fil respectivement, selon le signe de V_0 . Si V_0 est positif, le cylindre entoure le fil chargé positivement, et si V_0 est négatif, le cylindre équipotentiel entoure alors le cylindre chargé négativement.

Les lignes de champ leur sont perpendiculaires en tout point, et se dirigent dans le sens des potentiels décroissants, donc du fil chargé avec la densité $+\lambda$ vers le fil chargé avec la densité $-\lambda$.

On a l'allure représentée sur la figure suivante :



7 1. On a déjà mené ce calcul dans l'exercice n° 2 « Disque uniformément chargé ». Le potentiel créé en un point de son axe de symétrie par un disque uniformément chargé en surface est :

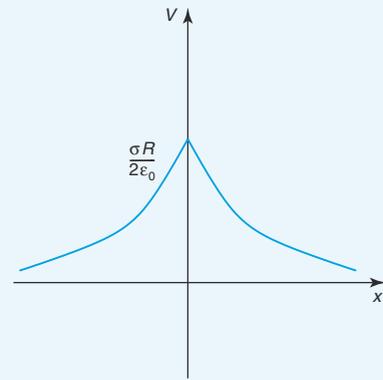
$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2})$$

2. L'énergie potentielle $E_p(x)$ de la charge ponctuelle $-q$ placée en x est : $E_p(x) = (-q)V(x)$.

On en déduit :

$$E_p(x) = -\frac{\sigma q}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2})$$

Le potentiel est maximum en $x = 0$, où il présente un point anguleux du fait de la discontinuité du champ électrostatique à la traversée de la surface chargée.



L'énergie potentielle est donc minimum pour $x = 0$ et

$$\text{vaut } E_p(0) = -\frac{\sigma q R}{2\epsilon_0}.$$

La position d'équilibre de la charge ponctuelle négative est donc au plus près des charges positives, c'est-à-dire au centre du disque. Il s'agit d'un équilibre stable puisque l'énergie potentielle y est minimale.

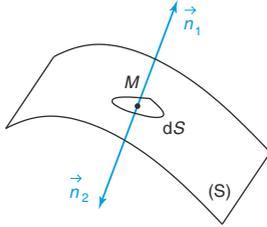
4 – Théorème de Gauss

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 33

- 1 Sur le schéma suivant, quelle normale doit-on choisir pour orienter la surface ?



- a. Les deux choix sont possibles.
 b. Il faut choisir la normale \vec{n}_1 .
 c. Il faut choisir la normale \vec{n}_2 .

- 2 Soit une charge q_i placée à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Comment est modifié le flux du champ électrostatique créé par la charge q_i à travers la sphère de rayon R lorsqu'on déplace la charge q_i ?

- a. Le flux n'est pas modifié, quel que soit le déplacement imposé à la charge q_i .
 b. Le flux du champ dépend de la position de la charge q_i , il est notamment plus important si la charge est placée près de la surface.
 c. Le flux ne dépend pas de la position de la charge, tant que celle-ci reste intérieure à la sphère considérée.
 d. Le flux du champ d'une charge ponctuelle à travers une sphère de rayon R est nul si celle-ci lui est intérieure.

- 3 Quelles sont les affirmations correctes ?

- a. Un champ électrostatique nul se traduit par un flux nul.
 b. Si le champ est non nul, alors le flux ne peut pas être nul.
 c. Un flux nul suppose un champ nul.

- 4 Il existe une analogie entre champ électrostatique et champ de gravitation. Comment s'exprime-t-elle ?

- a. $Q \rightarrow M$ et $\epsilon_0 \rightarrow -\frac{1}{4\pi G}$
b. $Q \rightarrow M$ et $\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi G}$
c. $Q \rightarrow M$ et $4\pi\epsilon_0 \rightarrow -G$

- 5 Compléter cette phrase. Le potentiel électrostatique ne peut pas admettre d'extremum :

- a. dans une région dénuée de charges.
 b. sur une surface équipotentielle.
 c. à l'intérieur d'une surface fermée.
 d. sauf en un point où se trouve une charge négative.

- 6 Considérons un tube de champ électrostatique dont la section droite varie de s à $S > s$ dans une région vide de charges. Soient φ et Φ les flux respectifs du champ électrostatique à travers la section s et à travers la section S . D'après le théorème de Gauss :

- a. $\varphi > \Phi$.
 b. $\varphi = \Phi$.
 c. $\varphi < \Phi$.

- 7 Considérons un tube de champ électrostatique dans une région vide de charges, tel que le champ soit uniforme sur une section droite du tube. Considérons deux sections s et $S > s$ de ce tube. Que peut-on dire de la norme $E(s)$ du champ sur la section s et de la norme $E(S)$ du champ sur la section S ?

- a. $E(s) < E(S)$
 b. $E(s) = E(S)$
 c. $E(s) > E(S)$

<p>● 8 Soit une distribution \mathcal{D} de charges qui crée un champ électrostatique \vec{E}. Soit une surface Σ qui découpe \mathcal{D} en deux zones intérieure et extérieure à Σ. On s'intéresse au flux Φ de \vec{E} à travers Σ. Quelles sont les affirmations qui sont exactes ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Seule la charge intérieure à Σ contribue au champ électrostatique \vec{E}.</p>	<p><input type="checkbox"/> b. Seule la charge intérieure à Σ contribue au flux Φ du champ électrostatique total \vec{E} à travers Σ.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Toutes les charges (intérieure et extérieure) contribuent au flux Φ du champ électrostatique \vec{E} à travers Σ.</p> <p><input type="checkbox"/> d. Toutes les charges (intérieure et extérieure) contribuent au champ électrostatique \vec{E}.</p>
--	---

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 33

<p>● 1 Calculer le champ électrostatique \vec{E} créé en un point M quelconque de l'espace par un fil uniformément chargé, de densité linéique λ. En déduire le potentiel V.</p> <p>● 2 Calculer le champ électrostatique \vec{E} créé en un point M quelconque de l'espace par un plan de densité surfacique uniforme σ. En déduire le potentiel V.</p> <p>● 3 Calculer le champ électrostatique \vec{E} créé en un point M quelconque de l'espace par une</p>	<p>sphère de rayon R uniformément chargée en surface, avec la densité surfacique σ. En déduire le potentiel V.</p> <p>● 4 Calculer le champ de gravitation terrestre en un point M quelconque de l'espace. On supposera la planète sphérique de rayon R_T, de masse volumique uniforme ρ. On exprimera le résultat en faisant intervenir la masse totale de la Terre M_T. Calculer également le potentiel dont dérive le champ de gravitation terrestre.</p>
---	--

1 * 15 min

► Corrigé p. 36

Cylindre chargé en volume

On considère un cylindre infini d'axe (Oz) , de rayon R portant une charge uniformément répartie en volume, avec une densité de charge volumique ρ .

1. Par une analyse de symétrie, déterminer la direction du champ électrostatique ainsi que les variables dont il dépend réellement.
2. Calculer le champ électrostatique \vec{E} en tout point de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique V en tout point de l'espace.
4. Représenter graphiquement la norme du champ $\|\vec{E}\|$ ainsi que le potentiel V .

2 ** 20 min

► Corrigé p. 37

Charge uniformément répartie entre deux plans

On considère deux plans d'équations respectives $z = -a$ et $z = a$ entre lesquelles il existe une distribution de charges volumique uniforme de densité ρ . Il n'y a pas de charge dans les régions $z < -a$ et $z > a$.

1. Déterminer par une analyse de symétrie la direction du champ électrostatique ainsi que les variables dont il dépend réellement.
2. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace et tracer le graphe représentant sa norme.
3. Calculer le potentiel électrostatique associé, en prenant comme référence de potentiel le plan d'équation $z = 0$.
4. On fait tendre a vers 0 tout en gardant le produit ρa constant. Définir une densité surfacique de charges équivalente et retrouver pour le champ électrostatique un résultat classique.

3 ** 30 min

► Corrigé p. 38

Atome d'hydrogène

On s'intéresse au modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène. Celui-ci est constitué d'un électron

supposé ponctuel, de charge négative $-e$ et d'une charge positive $+e$ (représentant le proton) répartie uniformément en volume dans une sphère de rayon a_0 . C'est le modèle « historique » : Thomson inversait le rôle du proton et celui de l'électron.

1. Déterminer en tout point M de l'espace le champ électrostatique \vec{E} créé par le proton seul. On distinguera les cas $r < a_0$ et $r > a_0$.
2. Calculer le potentiel V de ce champ électrique en prenant une référence de potentiel à l'infini.
3. Représenter la norme du champ ainsi que le potentiel.
4. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de l'électron soumis à un tel champ.
5. Déterminer la position d'équilibre de l'électron et en discuter la stabilité.

Le potentiel d'ionisation de l'électron est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome pris dans son état fondamental. Il s'exprime en électronvolts ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) et vaut 13,6 eV. En déduire la valeur de a_0 .

On donne : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ SI}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

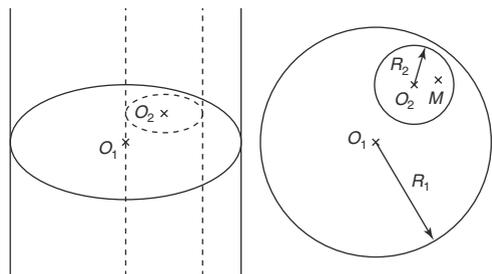
4 ** 20 min

► Corrigé p. 38

Cavité cylindrique

Un cylindre de rayon R_1 et d'axe (O_1z) uniformément chargé en volume, avec une densité ρ est percé d'une cavité cylindrique de rayon $R_2 < R_1$ et d'axe (O_2z) .

Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de la cavité.



5 >> ** 30 min

> Corrigé p. 39

Retour sur la distribution de charges surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$

On considère les deux distributions suivantes :
– une sphère de centre O et de rayon R portant la charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$;

– deux boules de même rayon R et de centres légèrement décalés O_1 et O_2 avec $\overrightarrow{O_1O_2} = a\vec{e}_x$, chargées uniformément en volume avec les densités volumiques respectives $-\rho$ et $+\rho$.

1. Montrer que la première distribution peut être obtenue comme limite de la seconde lorsqu'on fait tendre a vers 0.
2. En déduire le champ à l'intérieur de la sphère de la première distribution.

6 >> ** 40 min

> Corrigé p. 39

Trois sphères concentriques

On considère la distribution de charges volumique à symétrie sphérique constituée d'une charge Q uniformément répartie dans le volume $r \leq R_1$ et d'une charge $-Q$ uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.

Déterminer l'expression du potentiel et du champ électrostatiques créés par cette distribution en tout point de l'espace. On prendra la référence de potentiel à l'infini.

7 >> ** 15 min

> Corrigé p. 40

Relation locale au voisinage de l'axe de symétrie

On considère une distribution de charge à symétrie cylindrique, par exemple un disque de rayon R de centre O contenu dans le plan (xOy) , uniformément chargé en surface.

1. En utilisant les symétries du problème, déterminer la direction du champ ainsi que les variables dont il dépend, en un point quelconque de l'espace.
2. En appliquant le théorème de Gauss à une surface ayant la forme d'un petit cylindre d'axe $(z'z)$, de rayon r et de hauteur dz , montrer que la

composante radiale du champ électrostatique est liée à la valeur du champ sur l'axe $E_z(r = 0, z)$ par la relation :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}.$$

8 >> *** 45 min

PCSI
PTSI

> Corrigé p. 41

Condensateur (d'après Banque PT)

1. Exprimer le champ créé par une plaque infinie dans le plan (yOz) uniformément chargée en surface avec la densité $\sigma > 0$.

Calculer $\|\vec{E}\|$ pour $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. On rappelle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ SI}$.

On considère maintenant deux plaques infinies parallèles : A dans le plan (yOz) uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charges $\sigma > 0$ et B , dans le plan d'équation $x = \ell$, chargée avec la densité surfacique de charges $-\sigma$.

2. Exprimer les champs \vec{E}_A et \vec{E}_B créés en tout point de l'espace par les plaques A et B .
3. En utilisant le théorème de superposition, exprimer le champ \vec{E} à l'intérieur et à l'extérieur des deux plaques. Dessiner quelques lignes de champ.
4. Déterminer l'expression de la différence de potentiel $V_A - V_B$. Calculer $V_A - V_B$ pour $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\ell = 5,0 \mu\text{m}$.
5. Sur chacun des plans, isolons deux régions identiques d'aire S en regard. En déduire la capacité C du condensateur ainsi formé.

6. Exprimer la force électrostatique \vec{F} qui s'exerce sur la surface S d'une plaque en fonction de σ , ϵ_0 et S . On en précisera le sens et la direction.

7. En déduire alors l'expression de la pression électrostatique P_{el} , celle-ci étant la force qui s'exerce sur l'unité de surface. Calculer P_{el} pour $\sigma = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$.

9 >> *** 45 min

> Corrigé p. 42

Accrétion

Une sphère de rayon R porte la charge Q uniformément répartie en volume. On définit l'énergie

de constitution de cette sphère comme le travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

1. Calculer le potentiel créé en un point de sa surface par une boule de rayon r , uniformément chargée en volume.

2. Calculer la variation d'énergie potentielle lorsqu'on rajoute une pellicule sphérique d'épaisseur dr à la boule de rayon r .

3. En déduire l'énergie de constitution de la sphère de rayon R .

4. Par une analogie entre champ électrostatique et de gravitation, en déduire l'énergie d'accrétion d'une étoile de rayon R et de masse M , uniformément répartie.

Tester ses connaissances

- 1 Réponse **a.** La surface considérée est une surface ouverte, le choix de la normale est donc une convention arbitraire. Les deux choix sont possibles.
- 2 Réponse **c.** La réponse **d.** est fausse, de même que la réponse **b.** et la réponse **a.** est fausse dans la mesure où si on déplace la charge q_i à l'extérieur de la sphère, le flux devient nul.
- 3 Réponse **a.** Seule la première affirmation est correcte. Les deux autres affirmations disent la même chose, qui est contredite par la conservativité du flux en une région dépourvue de charge. Le champ peut très bien être non nul, si la surface fermée à travers laquelle on calcule le flux ne contient pas de charge, alors le flux est nul d'après le théorème de Gauss.
- 4 Réponse **a.** Attention au changement de signe. Deux masses (de même signe) s'attirent alors que deux charges de même signe se repoussent.
- 5 Réponse **a.** C'est le théorème de l'extremum du potentiel. Sur une surface équipotentielle, le poten-

tiel est constant, mais il peut s'agir de sa valeur maximale, ou minimale. La réponse **c.** est insuffisante, si la surface fermée en question contient une charge ponctuelle, le potentiel peut admettre un extremum. Quand à la réponse **d.**, elle est elle aussi incomplète, car le potentiel peut aussi admettre un extremum pour une charge positive par exemple.

- 6 Réponse **b.** D'après le théorème de Gauss, dans une région vide de charge, il y a conservativité du flux électrostatique. Le flux est le même à travers toute section droite d'un même tube de champ, en l'absence de charges.
- 7 Réponse **c.** On vient de voir que $\varphi = \Phi$. Or $\varphi = E(s)s$ et $\Phi = E(S)S$. Comme $s < S$, il faut que $E(s) > E(S)$ pour assurer la conservativité du flux. Le champ est donc plus intense lorsque les lignes de champ se resserrent, comme pour le courant dans une rivière.
- 8 Réponses **b.** et **d.** Toutes les charges contribuent au champ, mais seules les charges intérieures contribuent au flux du champ.

Savoir appliquer le cours

- 1 On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z.$$

La distribution est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz) et par toute rotation autour de ce même axe, le champ est donc indépendant des coordonnées θ et z . Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie, de même que celui passant par M et perpendiculaire au fil. Le champ électrostatique est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, il est donc porté par le vecteur \vec{e}_r .

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss un cylindre passant par M , (donc de rayon r) et de hauteur arbitraire h , refermé par deux disques perpendiculaires à (Oz). Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = E(r) \times 2\pi r h$ pour la surface latérale du cylindre et $\Phi = 0$ pour les deux disques perpendi-

culaires à (Oz), sur lesquels le champ électrostatique est tangent (flux nul).

La charge intérieure à cette surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \lambda h$.

Le théorème de Gauss donne donc :

$$E(r) \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

La relation champ-potential donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Au vu des symétries du champ $E_\theta = E_z = 0$ donc $V(r, \theta, z) = V(r)$.

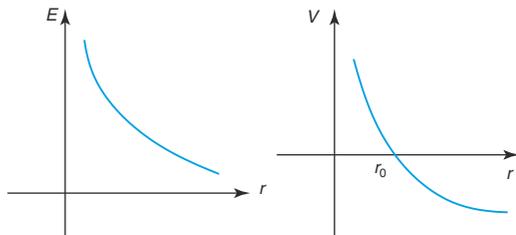
On a donc $E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$.

L'intégration donne $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$

La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit de prendre un potentiel nul pour $r = r_0$.

Remarque : le champ n'est pas défini en $r=0$ (lieu des sources).

La figure suivante présente les courbes de la norme du champ et du potentiel.



2 On travaille en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(r, y, z)\vec{e}_z.$$

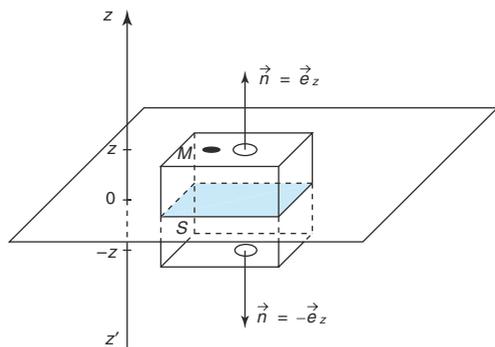
Soit (Oz) la normale au plan chargé.

La distribution étant invariante par toute translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y , le champ ne dépend que de la coordonnée z . Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan (xOy) est plan de symétrie, le champ électrostatique en M est donc contenu dans l'intersection de tous ces plans, il est porté par l'axe (Mz) .

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$$

Le plan chargé est plan de symétrie de la distribution. Au point $M'(x, y, -z)$ symétrique de $M(x, y, z)$ par rapport à (xOy) , le champ $\vec{E}(M')$ est le symétrique du champ $\vec{E}(M)$. La fonction $E(z)$ est donc impaire : $E(-z) = -E(z)$.

On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède dont deux faces sont parallèles au plan (xOy) (le champ leur est donc normal), de surface S , l'une placée en $M(z)$ et l'autre en $M'(-z)$, et les quatre autres faces normales au plan (le champ leur est donc tangent) comme sur la figure suivante :



Le flux à travers cette surface de Gauss est :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot dS\vec{n} = E(z)S + E(-z)(-S) = 2SE(z),$$

car le vecteur normal est \vec{e}_z en M et $-\vec{e}_z$ en M' .

La charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \sigma S$.

Le théorème de Gauss donne donc : $2SE(z) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ et par conséquent :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Le champ est discontinu en $z = 0$, à la traversée de la distribution surfacique :

$$E(z=0^+) - E(z=0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

D'après la relation champ-potential :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Ici $E_x = E_y = 0$ donc $V(x, y, z) = V(z)$ et

$$E(z) = -\frac{dV}{dz}.$$

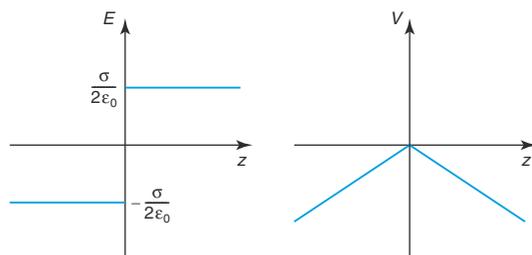
L'intégration donne :

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + k_1 & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + k_2 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Le potentiel est continu en $z = 0$, donc $k_1 = k_2$. On ne peut pas prendre la référence de potentiel à l'infini car la distribution de charges n'est pas finie, on choisit donc par exemple de prendre un potentiel nul en $z = 0$. Par conséquent, on obtient $k_1 = k_2 = 0$ et

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

La figure suivante présente les courbes de la norme du champ et du potentiel.



3 On travaille en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi.$$

La distribution étudiée est invariante par toute rotation autour du centre O de la sphère, donc le champ est indépendant des coordonnées θ et φ . L'axe (OM) est axe de symétrie de la distribution, donc le champ électrostatique en M est porté par cet axe.

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$$

La relation champ-potentiel donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Au vu des symétries du champ, $E_\theta = E_\varphi = 0$ donc

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) \text{ et } E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O passant par le point M (donc de rayon r).

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$.

Lorsque $r < R$, la charge intérieure est nulle puisque la sphère est uniquement chargée en surface.

Le théorème de Gauss donne : $E(r) \times 4\pi r^2 = 0$ soit $E(r) = 0$.

On trouve le potentiel par intégration : $V(r) = k_1$.

Lorsque $r > R$, la charge intérieure est désormais égale à la charge totale portée par la sphère $Q = 4\pi R^2\sigma$ puisque celle-ci est entièrement incluse dans la surface de Gauss.

Le théorème de Gauss donne :

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma}{\epsilon_0}, \text{ soit :}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

Par intégration, on trouve le potentiel :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + k_2.$$

On peut prendre la référence de potentiel à l'infini puisque la distribution de charges est finie. Donc $k_2 = 0$.

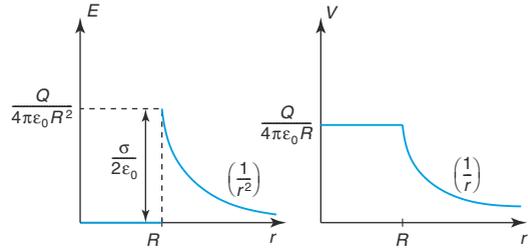
Remarque : à l'extérieur, on retrouve le champ et le potentiel d'une charge ponctuelle Q placée à l'origine des coordonnées.

La continuité du potentiel en $r = R$ donne la valeur de la constante $k_1 = V(R^-) = V(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$.

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

La figure suivante présente les courbes de la norme du champ et du potentiel.



Remarque :

$E(R^+) - E(R^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - 0 = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. On retrouve la discontinuité du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée.

4 On travaille en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r + \mathcal{G}_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\theta + \mathcal{G}_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi.$$

La distribution étudiée est invariante par toute rotation autour du centre O de la sphère, donc le champ est indépendant des coordonnées θ et φ . L'axe (OM) est axe de symétrie de la distribution, donc le champ gravitationnel en M est porté par cet axe.

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r)\vec{e}_r$$

La relation champ-potentiel donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathcal{G}} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Au vu des symétries du champ $\mathcal{G}_\theta = \mathcal{G}_\varphi = 0$ donc

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) \text{ et } \mathcal{G}(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O passant par le point M (donc de rayon r).

Le flux du champ gravitationnel à travers cette surface est $\Phi = \mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2$.

Pour $r < R_T$, la masse intérieure est :

$$M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = M_T\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = -4\pi G M_{\text{int}}$$

$$\mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho$$

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho r = -G M_T \frac{r}{R^3}.$$

Par intégration, on trouve le potentiel :

$$V(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho r^2 + k_1 = \frac{1}{2}GM_T \frac{r^2}{R^3} + k_1.$$

Pour $r > R_T$, la masse intérieure est cette fois la masse de la Terre $M_{\text{int}} = M_T$.

Le théorème de Gauss donne :

$$\mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi GM_T$$

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{M_T}{r^2}.$$

Par intégration, on trouve le potentiel :

$$V(r) = -G \frac{M_T}{r} + k_2.$$

On peut prendre la référence de potentiel à l'infini, ce qui donne $k_2 = 0$. On trouve la constante k_1 par continuité du potentiel en $r = R$:

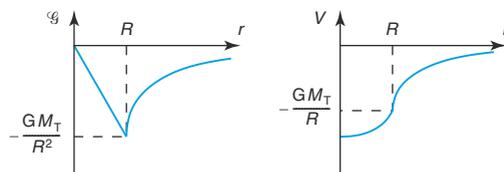
$$V(R^-) = \frac{1}{2}GM_T \frac{R^2}{R^3} + k_1 = V(R^+) = -G \frac{M_T}{R} \text{ donc}$$

$$k_1 = -\frac{3GM_T}{2R}.$$

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = \begin{cases} -GM_T \frac{r}{R^3} \vec{e}_r & \text{si } r < R_T \\ -G \frac{M_T}{r^2} \vec{e}_r & \text{si } r > R_T \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{GM_T}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) & \text{si } r < R_T \\ -G \frac{M_T}{r} & \text{si } r > R_T \end{cases}$$

La figure suivante présente les courbes de la norme du champ de gravitation et du potentiel associé.



Remarque : à l'extérieur, on retrouve le champ et le potentiel d'une masse ponctuelle M_T placée à l'origine des coordonnées.

S'entraîner

1. On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

La distribution est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz) et par toute rotation autour de ce même axe, le champ est donc indépendant des coordonnées θ et z . Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie, de même que celui passant par M et perpendiculaire au fil. Le champ électrostatique est par conséquent contenu dans l'intersection de ces deux plans, il est donc porté par le vecteur \vec{e}_r .

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

2. On choisit comme surface de Gauss un cylindre passant par M (donc de rayon r) et de hauteur arbitraire h , refermé par deux disques perpendiculaires à (Oz).

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = E(r) \times 2\pi r h$ pour la surface latérale du cylindre et $\Phi = 0$ pour les deux disques perpendiculaires à (Oz), sur lesquels le champ électrostatique est tangent (flux nul).

Pour $r < R$, la charge intérieure est $Q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 h$. La surface de Gauss n'intercepte qu'une partie de la distribution.

L'application du théorème de Gauss conduit à :

$$E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}, \text{ soit } E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Pour $r > R$, la charge intérieure est $Q_{\text{int}} = \rho \pi R^2 h$, où R est le rayon du cylindre chargé en volume.

L'application du théorème de Gauss conduit à :

$$E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}, \text{ et donc } E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

On constate que le champ électrostatique est continu en $r = R$.

3. La relation champ-potential donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Vu les symétries du champ $E_\theta = E_z = 0$ donc

$$V(r, \theta, z) = V(r) \text{ et } E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

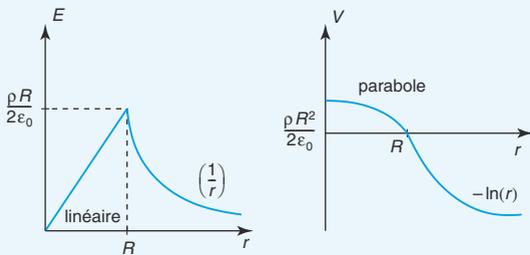
Par intégration, on trouve le potentiel :

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + k_1 \text{ pour } r < R; \text{ et } V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + k_2 \text{ pour } r > R.$$

La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit $V(R) = 0$, ce qui donne $k_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$ et $k_1 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$. Au passage, on a bien assuré la continuité du potentiel en $r = R$.

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0}(R^2 - r^2) & \text{si } r < R \\ -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{si } r > R \end{cases}$$

4. La figure suivante présente les courbes de la norme du champ et du potentiel.



2 1. L'axe (Oz) est axe de symétrie de cette distribution donc \vec{E} est porté par cet axe. L'invariance par toute translation perpendiculaire à (Oz) se traduit par une indépendance du champ électrostatique par rapport à x et y .

On a donc $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

En outre, le plan (xOy) est plan de symétrie de la distribution, on en déduit que la fonction $E(z)$ est impaire : $E(-z) = -E(z)$.

2. On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède dont deux faces sont parallèles au plan (xOy) (le champ leur est donc normal), de surface S , l'une placée en $M(z)$ et l'autre en $M'(-z)$, et les quatre autres faces normales à ce plan (le champ leur est donc tangent et le flux est donc nul).

Le flux à travers la surface passant par M' est égal au flux à travers la surface passant par M car le vecteur normal est \vec{e}_z en M et $-\vec{e}_z$ en M' . Le flux à travers la surface de Gauss est donc :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z) \cdot S + E(-z) \cdot (-S) = 2SE(z).$$

Lorsque $|z| < a$, la charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = 2zS\rho$. Donc on obtient :

$$\vec{E}(-a < z < a) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Lorsque $z > a$, la charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = 2aS\rho$, car il n'y a pas de charge dans la zone

$$z > a. \text{ On a par conséquent } \vec{E}(z > a) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

La fonction $E(z)$ est représentée sur la figure ci-après (a). Elle est continue en $z = -a$ et en $z = a$.

3. D'après la relation champ-potential :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Ici $E_x = E_y = 0$ donc $V(x, y, z) = V(z)$ et $E(z) = -\frac{dV}{dz}$.

Par intégration, on obtient :

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + k_1 & \text{si } 0 < z < a \\ -\frac{\rho a}{\epsilon_0}z + k_2 & \text{si } z > a \end{cases}$$

On a choisi de prendre un potentiel nul en $z = 0$ donc $k_1 = 0$. On détermine k_2 par continuité du potentiel en $z = 0$:

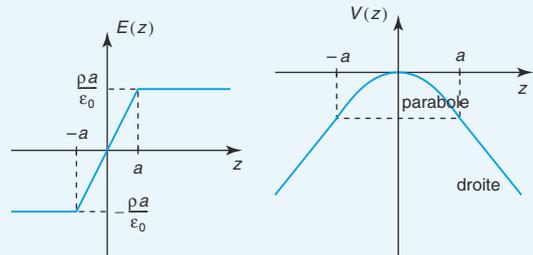
$$V(a^-) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} = V(a^+) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}a + k_2.$$

On en déduit $k_2 = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$.

Par symétrie, on a également $V(-z) = V(z)$.

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} & \text{si } -a < z < a \\ -\frac{\rho a}{\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right) & \text{si } z > a \\ \frac{\rho a}{\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right) & \text{si } z < -a \end{cases}$$

Le potentiel est représenté sur la figure suivante (b).



(a) Norme du champ

(b) Potentiel

4. On définit une densité surfacique équivalente en considérant la charge portée par un petit cylindre de hauteur $2a$ et de surface S . Dans le cas de la distribution volumique, la charge de ce cylindre est $q = 2aS\rho$. Lorsqu'on fait tendre a vers 0 ce cylindre tend vers un disque de surface S et de densité surfacique σ cherchée. Il porte donc la charge $q = \sigma S$.

On en déduit que $\sigma = 2\rho a$, qui reste constant d'après l'énoncé lorsqu'on fait tendre a vers 0.

On retrouve alors le champ d'un plan uniformément chargé en surface :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Le champ présente alors une discontinuité en $z = 0$, ce qui se voit lorsqu'on fait tendre a vers 0 sur le graphe représentant la norme du champ en fonction de z .

3. 1. Pour le proton seul, on a une sphère uniformément chargée en volume. La distribution est invariante par toute rotation autour de O donc le champ est indépendant de θ et φ . L'axe (OM) est axe de symétrie de la distribution, le champ est donc radial :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

La densité volumique de charge ρ est telle que $+e = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho$.

On choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O passant par M (donc de rayon r). Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$.

Pour $r < a_0$, la charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = e \frac{r^3}{a_0^3}$. Elle ne contient en effet qu'une partie de la charge $+e$ du proton.

Le champ est donc $\vec{E}(r < a_0) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r \vec{e}_r$

Pour $r > a_0$, la charge intérieure à la surface de Gauss est désormais $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho = e$.

On obtient le champ d'une charge ponctuelle $+e$ placée en O : $\vec{E}(r > a_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

2. Comme $E_\theta = E_\varphi = 0$, le potentiel dépend de la seule variable r et $E(r) = -\frac{dV}{dr}$.

Pour $r > a_0$, l'intégration conduit à $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} + k_1$.

On choisit une référence de potentiel à l'infini

($\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$) donc $k_1 = 0$ et $V(r > a_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$

Pour $r < a_0$, l'intégration conduit à :

$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + k_2 = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a_0^3} r^2 + k_2$. On détermine

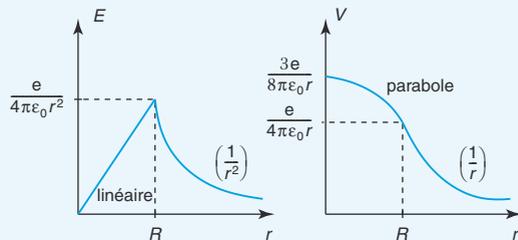
k_2 par continuité du potentiel en $r = a_0$.

$$V(a_0^+) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} = V(a_0^-) = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 a_0} + k_2.$$

On en déduit $k_2 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 a_0}$

$$\text{et } V(r < a_0) = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(3 - \frac{r^2}{a_0^2} \right)$$

3. La norme du champ électrostatique et le potentiel ont l'allure suivante :



4. L'électron est soumis au potentiel $V(r)$ calculé précédemment. Son énergie potentielle est donc $E_p(r) = (-e)V(r)$. Son graphe se déduit immédiatement de celui de $V(r)$.

En particulier, pour $r = 0$, on obtient :

$$E_p(0) = -\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$$

Et pour $r = a_0$, on a $E_p(a_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$.

5. La position $r = 0$ correspond donc à un minimum d'énergie potentielle pour l'électron, c'est une position d'équilibre stable.

Le potentiel d'ionisation de l'atome correspond à l'énergie à fournir pour arracher l'électron à l'atome, c'est-à-dire pour le faire passer de sa position d'équilibre stable à l'infini :

$$\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(0) = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = e V_i.$$

On en déduit $a_0 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 V_i}$

A.N. : $a_0 = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

4 Cette distribution, sans symétrie particulière, peut être vue comme la superposition de deux distributions à symétrie cylindrique : un premier cylindre d'axe (O_1z) et de rayon R_1 , portant la densité volumique de charge uniforme ρ et un deuxième cylindre d'axe (O_2z) et de rayon R_2 , portant la densité volumique de charge uniforme $-\rho$. On va donc appliquer le principe de superposition.

Champ dû au premier cylindre

Vu les symétries du problème, le champ est radial et ne dépend que de la coordonnée cylindrique r_1 :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(r_1) \vec{e}_{r_1}.$$

On choisit comme surface de Gauss un cylindre passant par M , donc de rayon r_1 , et de hauteur arbitraire h . Le flux de \vec{E}_1 s'écrit : $\Phi_1 = E_1(r_1) \times 2\pi r_1 h$.

Le point M étant intérieur au cylindre, la surface de Gauss ne contient qu'une partie de la charge : $Q_{\text{int}} = \pi r_1^2 h \rho$.

Le théorème de Gauss donne :

$$E_1(r_1) \times 2\pi r_1 h = \frac{\pi r_1^2 h \rho}{\epsilon_0} \text{ soit :}$$

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho r_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_{r_1} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_1 M}, \text{ où } H_1 \text{ est le projeté de } M \text{ sur l'axe de symétrie du premier cylindre } (O_1 z).$$

De la même façon, on obtient pour le **champ dû au deuxième cylindre** en un point intérieur :

$$\vec{E}_2(M) = \frac{(-\rho) r_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_{r_2} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_2 M}, \text{ où } H_2 \text{ est le projeté de } M \text{ sur l'axe de symétrie du second cylindre } (O_2 z).$$

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_1 H_2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Ce champ est uniforme, identique en tout point de la cavité.

On choisit comme surface de Gauss une sphère passant par M intérieure à la boule. Le flux à travers cette surface est $\Phi_1 = E_1(r) \times 4\pi r^2$ et la charge intérieure n'est qu'une portion de la charge totale :

$$Q_{\text{int}} = (-\rho) \times \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\vec{E}_1(M) = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M}.$$

On obtient de même pour la deuxième boule de densité de charge $+\rho$: $\vec{E}_2(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M}$.

Et d'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2} = -\frac{\rho a}{3\epsilon_0} \vec{e}_x.$$

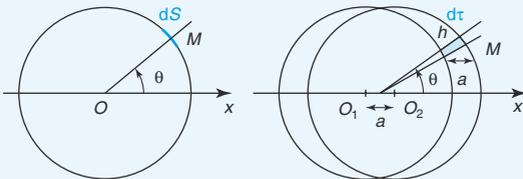
Or d'après l'équivalence vue à la question précédente, on obtient la sphère chargée non uniformément en faisant tendre a vers 0 dans la configuration des deux boules chargées uniformément, en maintenant le produit $\rho a = \sigma_0$ constant.

Le champ à l'intérieur de la sphère de charge surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ est donc uniforme et vaut :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$$

5.1. Considérons un élément de surface dS autour d'un point $M(R, \theta, \varphi)$ de la sphère chargée avec la densité surfacique $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Il porte une charge $dq = \sigma dS = \sigma_0 \cos\theta dS$.

Considérons ensuite un élément de volume $d\tau$ entourant le même point $M(R, \theta, \varphi)$ dans la distribution volumique associée, comme sur la figure suivante. Il porte la charge $dq' = \rho d\tau$. Or, dans la mesure où $R \gg a$, on a $d\tau = h dS$ avec $h = a \cos\theta$.



Pour la partie commune aux deux boules (équivalente à l'intérieur de la sphère dans la distribution surfacique), la charge est bien nulle puisque les deux boules portent des charges uniformes opposées.

On en déduit que les deux distributions sont équivalentes si $dq = dq'$ soit si $\sigma_0 = \rho a$, en gardant le produit ρa constant lorsque a tend vers 0.

2. On applique le théorème de Gauss aux deux boules uniformément chargées en volume, en travaillant avec les coordonnées sphériques.

Pour la première boule, de densité de charge $-\rho$, le champ est radial vu les symétries : $\vec{E}_1(M) = E_1(r) \vec{e}_r$.

6 La distribution est invariante par toute rotation autour de O , on a une symétrie sphérique :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) \text{ et } \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r,$$

$$\text{avec } E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

On choisit donc comme surface de Gauss la sphère (de rayon r) passant par M , le flux de \vec{E} à travers cette surface vaut $\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$.

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut distinguer 4 cas, selon la position de r par rapport à R_1 , R_2 et R_3 .

$$\text{On aura alors } E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

La partie $r < R_1$ a une densité volumique de charge uni-

forme $\rho_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$. La partie $R_2 < r < R_3$ a une densité

$$\text{volumique de charge uniforme : } \rho_2 = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi R_3^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3}.$$

- pour $r > R_3$, $Q_{\text{int}} = Q - Q = 0$, donc

$$E(r > R_3) = 0 \text{ et par intégration}$$

$$V(r > R_3) = \text{cte} = 0 \text{ (on prend la référence de potentiel à l'infini).}$$

- pour $R_2 < r < R_3$,

$$Q_{\text{int}} = Q + \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3 \right) \frac{(-Q)}{\frac{4}{3}\pi R_3^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3}$$

$$Q_{\text{int}} = Q \left(1 - \frac{r^3 - R_2^3}{R_3^3 - R_2^3} \right) = Q \frac{R_3^3 - r^3}{R_3^3 - R_2^3}$$

Donc :

$$E(R_2 < r < R_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_3^3}{r^2} - r \right) = -\frac{dV}{dr}$$

Par intégration :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_3^3}{r} + \frac{r^2}{2} \right) + k_1$$

La constante k_1 est fixée par continuité du potentiel en $r = R_3$:

$$V(r = R_3^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(R_3^2 + \frac{1}{2}R_3^2 \right) + k_1$$

$$= V(r = R_3^+) = 0$$

$$\text{d'où } k_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(-\frac{3}{2}R_3^2 \right)$$

$$\text{et } V(R_2 < r < R_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_3^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{2}R_3^2 \right)$$

- pour $R_1 < r < R_2$, $Q_{\text{int}} = Q$

$$\text{donc } E(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et par intégration,}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + k_2$$

La continuité du potentiel en $r = R_2$ donne la valeur de k_2 :

$$V(r = R_2^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + k_2 = V(r = R_2^+)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_3^3}{R_2} + \frac{R_2^2}{2} - \frac{3}{2}R_3^2 \right)$$

$$\text{d'où } k_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \frac{3}{2}(R_2^2 - R_3^2)$$

$$V(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \times \left(\frac{R_3^3 - R_2^3}{r} + \frac{3}{2}(R_2^2 - R_3^2) \right)$$

- pour $r < R_1$, $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$. On a donc :

$$E(r < R_1) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}$$

$$\text{Par intégration } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} \left(\frac{-r^2}{2} \right) + k_3$$

La continuité du potentiel en $r = R_1$ donne la valeur de k_3 :

$$V(r = R_1^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} \left(\frac{-R_1^2}{2} \right) + k_3 = V(r = R_1^+)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{R_3^3 - R_2^3}{R_1} + \frac{3}{2}(R_2^2 - R_3^2) \right)$$

$$\text{D'où } k_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \left(\frac{3(R_3^3 - R_2^3)}{2R_1} + \frac{3}{2}(R_2^2 - R_3^2) \right)$$

$$V(r < R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_3^3 - R_2^3)} \times \left(\frac{3(R_3^3 - R_2^3)}{2R_1} + \frac{3}{2}(R_2^2 - R_3^2) - \frac{r^2(R_3^3 - R_2^3)}{2R_1^3} \right)$$

7 1. On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

La distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) , le champ est donc indépendant de la coordonnée θ . Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie, le champ électrostatique est par conséquent contenu dans ce plan, il est donc porté par les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_z .

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$$

2. On considère comme surface de Gauss un petit cylindre d'axe (Oz) passant par M et de hauteur dz .

Calculons le flux d'un tel champ à travers cette surface :

$$\Phi = \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

À travers la surface latérale, seule la composante radiale intervient dans le calcul du flux, puisque la composante verticale est tangente à la surface. En supposant que sur toute la surface latérale, de hauteur élémentaire dz , la composante radiale ne dépend que très faiblement de la cote z , on aura :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{\text{lat}} (E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_r dS)$$

$$= E_r(r, z) \times 2\pi r dz$$

À travers le disque inférieur refermant le cylindre (de cote z), le flux ne fait intervenir que la composante axiale du champ car la normale sortante est $\vec{n} = -\vec{e}_z$. On a donc, en supposant que la composante axiale du champ est uniforme sur ce disque, de norme $E_z(0, z)$:

$$\Phi_{\text{inf}} = \iint_{\text{inf}} (E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z) \cdot (-\vec{e}_z dS)$$

$$= -E_z(0, z) \times \pi r^2$$

À travers le disque supérieur, de cote $z + dz$, la normale sortante est $\vec{n} = +\vec{e}_z$. On a donc avec les mêmes hypothèses :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{sup}} &= \iint_{\text{sup}} (E_r(r, z + dz)\vec{e}_r + E_z(r, z + dz)\vec{e}_z) \cdot (+\vec{e}_z dS) \\ &= E_z(0, z + dz) \times \pi r^2.\end{aligned}$$

Le cylindre est dans une région dépourvue de charges ($Q_{\text{int}} = 0$), l'application du théorème de Gauss donne par conséquent :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{lat}} + \Phi_{\text{inf}} + \Phi_{\text{sup}} = 0 \\ E_r(r, z) \times 2\pi r dz - E_z(0, z) \times \pi r^2 \\ &\quad + E_z(0, z + dz) \times \pi r^2 = 0 \\ 2E_r(r, z) + r \frac{E_z(0, z + dz) - E_z(0, z)}{dz} &= 0\end{aligned}$$

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

8 1. On travaille en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z.$$

La distribution étant invariante par toute translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z , le champ ne dépend que de la coordonnée x . Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan (yOz) est plan de symétrie, le champ électrostatique en M est donc contenu dans l'intersection de tous ces plans, il est porté par l'axe (Mx) .

$$\vec{E}(M) = E_x(x)\vec{e}_x$$

Le plan chargé est plan de symétrie de la distribution. Au point $M'(-x, y, z)$ symétrique de $M(x, y, z)$ par rapport à (yOz) , le champ $\vec{E}(M')$ est le symétrique du champ $\vec{E}(M)$. La fonction $E(x)$ est donc impaire : $E(-x) = -E(x)$.

On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède dont deux faces sont parallèles au plan (yOz) (le champ leur est donc normal), de surface S , l'une placée en $M(x)$ et l'autre en $M'(-x)$, et les quatre autres faces normales au plan (le champ leur est donc tangent).

Le flux à travers cette surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot dS \vec{n} = E(x) \cdot S + E(-x) \cdot (-S) = 2SE(x)$$

car le vecteur normal est \vec{e}_x en M et $-\vec{e}_x$ en M' .

La charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \sigma S$.

Le théorème de Gauss donne donc : $2SE(x) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

soit $E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A.N. : $\|\vec{E}\| = 4,0 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2. On obtient dans cette configuration :

$$\vec{E}_A(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et}$$

$$\vec{E}_B(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > e \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < e \end{cases}$$

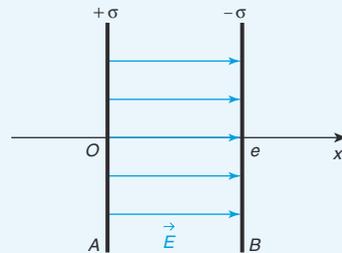
3. D'après le théorème de superposition, le champ créé par la distribution $A \cup B$ est égal à la somme vectorielle des champs créés par les deux distributions séparées : $\vec{E}_{A \cup B}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$.

On obtient donc :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } 0 < x < e \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > e \end{cases}$$

Soit $\vec{E}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > e \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } 0 < x < e \end{cases}$

Le champ est nul en dehors des armatures et uniforme entre les armatures : les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques.



4. On a la relation locale entre champ et potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Or $E_y = E_z = 0$ donc $E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ entre les armatures.

En intégrant cette relation entre $A(x=0)$ et $B(x=e)$,

on obtient :
$$V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

A.N. : $V_A - V_B = 40 \text{ V}$.

5. La charge portée par la région de surface S isolée par la pensée sur l'armature A est $Q = S\sigma$.

La différence de potentiel entre les deux armatures du condensateur, $U = V_A - V_B = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$ est liée à la capacité du condensateur par la relation :

$$Q = CU = C \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \sigma S.$$

On en déduit que
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

6. La charge portée par la surface S isolée sur l'armature B est $Q_B = -\sigma S$. Elle est soumise à un champ électrostatique $\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ dû à l'armature A . Cette portion d'armature subit donc une force électrostatique $\vec{F} = Q_B \vec{E}_A = -\sigma S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{e}_x = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

7. La pression électrostatique est la force électrostatique par unité de surface donc

$$P_{\text{el}} = \frac{\|\vec{F}\|}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

A.N. : $P_{\text{el}} = 2,9 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

9 1. Calculons dans un premier temps le potentiel créé en sa surface par une sphère de rayon r . On calcule le potentiel en un point M extérieur à la sphère, à une distance $\rho > r$ du centre O .

La distribution est invariante par toute rotation autour de O donc $V(\rho, \theta, \phi) = V(\rho)$.

Donc $\vec{E} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{d\rho} \vec{e}_\rho$. Le champ est radial.

On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon ρ , passant donc par M . Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = 4\pi\rho^2 E(\rho)$.

On applique le théorème de Gauss. La charge intérieure à la surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_q$, avec ρ_q la densité volumique de charges (à ne pas confondre avec la coordonnée ρ repérant la position de M).

On a donc $\Phi = 4\pi\rho^2 E(\rho) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

d'où $E(\rho) = \frac{\rho_q r^3}{3\epsilon_0 \rho^2}$.

Par intégration, on en déduit le potentiel en un point extérieur à la sphère : $V(\rho) = \frac{\rho_q r^3}{3\epsilon_0 \rho} + 0$. (On prend la référence de potentiel à l'infini.)

À la surface de la sphère, on a donc $V(\rho=r) = \frac{\rho_q r^2}{3\epsilon_0}$.

2. On apporte maintenant une pellicule supplémentaire à la sphère, pour augmenter son épaisseur de dr . Cela correspond à lui ajouter un volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$. Il faut donc apporter une charge $dq = \rho_q d\tau$ depuis l'infini jusqu'à la surface de la sphère où règne un potentiel $V(r)$. Cela correspond à un travail de l'opérateur (égal à la variation d'énergie potentielle) $dE_\rho = dqV(r)$.

On a
$$dE_\rho = 4\pi\rho_q r^2 dr \frac{\rho_q r^2}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_q^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$$

3. Pour constituer l'ensemble de la sphère, il aura donc fallu apporter l'énergie :

$$E_\rho = \int dE_\rho = \frac{4\pi\rho_q^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho_q^2 R^5}{3\epsilon_0 \cdot 5}$$

Or $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_q$ donc $\rho_q^2 = \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6}$.

Par conséquent, on obtient
$$E_\rho = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

4. L'analogie avec la gravitation s'obtient en remplaçant Q par M et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$. On obtient par conséquent l'énergie de constitution d'une étoile :

$$E_\rho = -\frac{3GM^2}{5R}$$

5 – Dipôle électrostatique

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 47

- | | |
|--|---|
| <p>1 Donner l'unité du moment dipolaire \vec{p}.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Le newton-mètre : $N \cdot m$.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Le coulomb-mètre : $C \cdot m$.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Le debye : D.</p> | <p>4 La force exercée sur un dipôle par un champ extérieur est nulle.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Faux.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Pas toujours.</p> |
| <p>2 Que vaut le moment dipolaire d'un atome d'hydrogène (noyau $+e$, électron $-e$, rayon a_0) ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. $p = ea_0$.</p> <p><input type="checkbox"/> b. $p = 0$.</p> <p><input type="checkbox"/> c. $p = -ea_0$.</p> | <p>5 Comment s'écrit la relation des moments pour l'action d'un champ extérieur sur un dipôle ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. $\vec{\Gamma}_O = \vec{\Gamma}_{O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{F}$.</p> <p><input type="checkbox"/> b. $\vec{\Gamma}_O = \vec{\Gamma}_{O'}$.</p> <p><input type="checkbox"/> c. $\vec{\Gamma}_O = \vec{\Gamma}_{O'} + \vec{O'O} \wedge \vec{F}$.</p> |
| <p>3 Les lignes de champ d'un dipôle sont orthogonales aux courbes d'équation polaire $r^2 = K_0 \cos \theta$.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Faux.</p> | <p>6 On considère une distribution de charges telle que la charge totale soit nulle.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Elle peut toujours être assimilée à un dipôle.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Ce n'est pas nécessairement une distribution dipolaire.</p> |

© Nathan, classe prépa

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 47

- | | |
|--|---|
| <p>1 Redémontrer l'expression du potentiel créé par une distribution dipolaire : $\{A(-q) ; B(+q)\}$ avec $AB = a$, et $\vec{p} = q\vec{AB}$.</p> | <p>3 Un dipôle est constitué de deux charges opposées situées sur l'axe (Ox) aux abscisses $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.</p> <p>1. En un point de l'axe (Ox) d'abscisse x, rappeler la valeur $\vec{E}_0(x)$ du champ électrostatique dans l'approximation dipolaire.</p> <p>2. Exprimer la valeur exacte du champ électrostatique sous la forme $\vec{E}(x) = f(x)\vec{E}_0(x)$.</p> <p>3. Pour quelles valeurs de x ces deux expressions du champ sont-elles identiques à 1 % près ?</p> |
|--|---|

4 On considère la molécule de dioxyde de carbone.

1. En étudiant la structure de la molécule, proposer une distribution de charge équivalente.

2. Déterminer le potentiel créé par cette molécule en un point éloigné.

3. En déduire le champ électrostatique créé par cette molécule en un point éloigné.

1 ** 20 min

> Corrigé p. 50

Sphère $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$: dipôle équivalent

Soit une sphère de centre O et de rayon R , chargée en surface avec une densité σ_P non uniforme, de la forme $\sigma_P = \sigma_0 \cos \theta$, avec $\sigma_0 > 0$, en posant $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OP})$.

1. Montrer (par des arguments de symétrie) que la charge totale de cette distribution (\mathcal{D}) est nulle.
2. Calculer la charge portée par chaque hémisphère et situer les barycentres G_- et G_+ des charges respectivement négatives et positives de (\mathcal{D}).
3. En déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$ produit en un point M éloigné ($OM \gg R$).

2 ** 20 min

> Corrigé p. 51

Distribution discrète de charge

On considère une distribution \mathcal{D} de charge constituée de N charges ponctuelles q_i , placées respectivement aux points P_i . La charge totale de \mathcal{D} est nulle :

$$Q_T = \sum_i q_i = 0. \text{ Les charges } q_i \text{ sont réparties}$$

autour de l'origine O du repère, dans un volume dont la dimension caractéristique est a .

On se place en un point M éloigné de \mathcal{D} , tel que $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ avec $r \gg a$.

1. Exprimer le potentiel $V(M)$ créé au point M par la distribution de charge \mathcal{D} . On choisira la référence de potentiel à l'infini.
2. En identifiant ce potentiel à celui d'un doublet de charges $(-q, +q)$, définir le vecteur moment dipolaire \vec{p} de la distribution.
3. Vérifier que \vec{p} est indépendant du choix de l'origine O .
4. On note G_+ et G_- les barycentres respectivement des charges positives et des charges négatives, et q_0 la somme des charges positives. Exprimer le vecteur moment dipolaire \vec{p} en fonction de q_0 et de $\vec{G_-G_+}$.

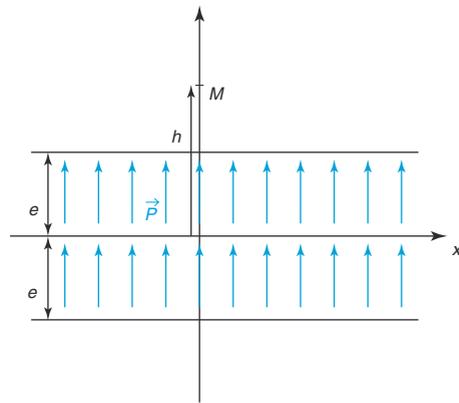
5. On considère à présent une tige chargée, placée le long d'un axe (Ox) , entre les abscisses $-a$ et $+a$. Sa densité linéique de charge est fonction de x : $\lambda(x) = kx$, où k est une constante positive. Calculer son moment dipolaire.

3 ** 20 min

> Corrigé p. 52

Distribution uniforme de dipôles entre deux plans

L'espace compris entre deux plans d'équation $z = -e$ et $z = +e$ est rempli de dipôles microscopiques régulièrement répartis. Un volume élémentaire mésoscopique $d\tau$ possède donc un moment dipolaire élémentaire, que l'on exprime par $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$. Le vecteur \vec{P} est appelé vecteur polarisation. Il s'agit de la densité volumique de moment dipolaire. Il est ici supposé uniforme : $\vec{P} = P \vec{e}_z$.



On considère un point A situé dans l'espace polarisé, repéré par ses coordonnées cylindriques $A(r, \theta, z)$.

1. Exprimer le potentiel élémentaire dV créé, en un point $M(z = h)$ de l'axe (Oz) , par les dipôles situés dans le volume mésoscopique $d\tau$ centré sur A .
2. En déduire le potentiel et le champ électrostatique créés en M par cette distribution de charge.
3. Montrer que cette distribution de dipôles est équivalente à une autre distribution de charge.

4 >> ** 20 min

> Corrigé p. 53

Modèle de Thomson de l'atome et polarisabilité

On modélise un atome par un nuage électronique, de charge totale $-Ze$ répartie uniformément en volume à l'intérieur d'une sphère de rayon a , auquel on associe une charge ponctuelle $+Ze$ représentant le noyau, libre de se déplacer à travers la sphère chargée négativement.

1. Quelle est la position d'équilibre en l'absence de champ extérieur ?

On applique un champ électrostatique extérieur $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$.

2. Déterminer, une fois l'équilibre atteint, le moment dipolaire induit \vec{p} de l'atome. On se limitera au cas où le noyau reste à l'intérieur du nuage électronique.

3. Calculer la polarisabilité de l'atome α définie par $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0$.

On en précisera la dimension.

5 >> ** 20 min

> Corrigé p. 54

Oscillations d'un dipôle dans le champ créé par un anneau (λ)

Un anneau de centre O , de rayon R et d'axe (Oz) est chargé avec la densité linéique λ . Un dipôle de moment $\vec{p} = q\vec{a} = p\vec{e}_z$, se déplace librement sur (Oz) .

1. Déterminer les positions d'équilibre de ce dipôle. Discuter la stabilité.

2. Appelons z_e la position d'équilibre stable du dipôle. À $t = 0$, on déplace le dipôle, de masse m , de $z_0 - z_e \ll z_e$.

Exprimer la pulsation des petites oscillations qui en résultent.

6 >> *** 30 min

> Corrigé p. 55

Étude d'un quadripôle

On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On place les charges ponctuelles $+q$ en $A(a, 0, 0)$, $+q$ en $B(-a, 0, 0)$, $-q$ en $C(0, a, 0)$ et $-q$ en $D(0, -a, 0)$.

1. On se propose d'étudier le potentiel en un point $P(x, y, 0)$ du plan (xOy) , très voisin de O . On suppose $OP \ll a$. Montrer que le potentiel en P est de la forme $V(P) = \alpha x^2 + \beta y^2$.

Quelle relation lie α et β ?

2. On se propose d'étudier le potentiel en un point M du plan (xOy) , très éloigné de O . On utilise désormais les coordonnées polaires : $M(r, \theta)$ avec $OM = r \gg a$ et $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$.

a. Montrer que le potentiel est de la forme $V(M) = k \frac{\cos(2\theta)}{r^3}$.

b. En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ électrique.

c. Établir l'équation des lignes de champ et représenter leur allure dans le plan (xOy) .

Tester ses connaissances

1 Réponses **b. et c.** La réponse **a.** est bien l'unité d'un moment, mais du moment d'une force. Le moment dipolaire étant défini par $\vec{p} = q\vec{AB}$, il s'agit d'une charge multipliée par une distance, qui s'exprime donc en C · m dans le système international d'unités. Le debye est aussi une unité de moment dipolaire, plus adaptée aux molécules rencontrées en chimie : 1 D = $3 \cdot 10^{-30}$ C · m.

2 Réponse **b.** Dans un atome d'hydrogène, la charge négative est répartie uniformément en volume dans une sphère centrée sur le noyau, la densité de charge ne dépendant que de r . Le barycentre des charges positives (le proton, ponctuel) et celui des charges négatives sont donc confondus, et le moment dipolaire est nul.

3 Réponse **a.** Le potentiel créé par un dipôle est de la forme $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Les surfaces d'équation

$r^2 = K_0 \cos \theta$ sont donc des équipotentielles de cette distribution. Le champ leur est normal.

4 Réponse **c.** Cette affirmation est exacte lorsque le champ extérieur appliqué au dipôle est uniforme, au moins à l'échelle du dipôle, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

5 Réponse **a.** La relation générale des moments est la première, mais on peut ajouter que, dans le cas d'un champ uniforme, la réponse **b.** est valable également, puisque la résultante de force \vec{F} est nulle.

6 Réponse **b.** Pour une distribution de charge dont la charge totale est nulle, on peut parler de distribution dipolaire uniquement dans le cas où les barycentres des charges positives et négatives ne sont pas confondus. Sinon, il faut pousser le développement multipolaire un cran plus loin.

Remarque : Le cas d'un quadripôle est traité dans l'exercice n° 6 de la rubrique « S'entraîner ».

Savoir appliquer le cours

1 On repère le point M en coordonnées sphériques de centre O le milieu du segment $[AB]$. On note $\theta = (\vec{AB}, \vec{OM})$. On a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, et on se place « loin » du dipôle, c'est-à-dire pour $r \gg a$.

Le moment dipolaire $\vec{p} = q\vec{AB}$ est porté par l'axe (Oz) .

La distribution de charge est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) , le potentiel qu'elle crée au point $M(r, \theta, \varphi)$ est donc indépendant de la coordonnée φ :

$$V(M) = V(r, \theta)$$

On choisit de prendre la référence de potentiel à l'infini, ce qui est possible puisqu'il n'y existe pas de charge. D'après le théorème de superposition :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q}{AM} + \frac{q}{BM} \right).$$

Il reste à exprimer AM et BM :

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$AM^2 = OM^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OA} + OA^2$$

$$AM^2 = r^2 - 2r\frac{a}{2} \cos(\pi - \theta) + \frac{a^2}{4}$$

$$AM^2 = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$\vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB}$$

$$BM^2 = OM^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OB} + OB^2$$

$$BM^2 = r^2 - 2r\frac{a}{2} \cos \theta + \frac{a^2}{4}$$

$$BM^2 = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

Le point M est « loin » du dipôle, on peut donc effectuer un développement limité en $\frac{a}{r}$:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right).$$

De la même façon :

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right).$$

Il vient par conséquent :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{a}{2r} \cos \theta + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Et pour finir
$$V(r, \theta) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2 On peut calculer le champ électrostatique créé par le dipôle. On l'obtient à partir du potentiel calculé ci-avant grâce à la relation locale champ-potential :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V, \text{ avec } V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Comme V est indépendant de la variable φ , alors

$E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. Le champ n'a pas de composante suivant \vec{e}_φ , ce qui était prévisible puisque le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution et contient donc le champ électrostatique.

On trouve pour les composantes suivant \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} & E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_r &= \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} & E_\theta &= \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Vectoriellement :
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3},$$

avec $\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta &= 3p \cos \theta \vec{e}_r - (p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= 3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}. \end{aligned}$$

On en déduit l'expression intrinsèque du champ, avec $\vec{r} = r \vec{e}_r$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{p} r^2}{r^5}$$

On cherche la norme et la direction du champ sur un cercle de rayon arbitraire D , pour les quatre positions de Gauss.

On a :

$$\begin{aligned} \|\vec{E}\| &= \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \end{aligned}$$

On pose $E_0 = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 D^3}$.

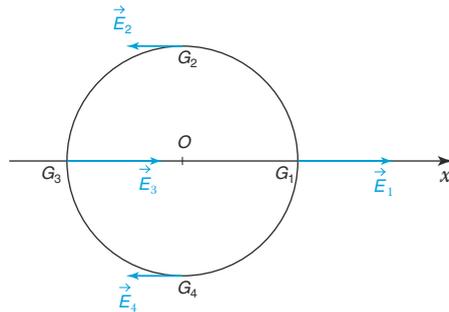
Au point $G_1(D, \theta_1 = 0)$, on a $E_{r1} = E_0$, et $E_{\theta1} = 0$.

Au point $G_2(D, \theta_2 = \frac{\pi}{2})$, on a $E_{r2} = 0$, et $E_{\theta2} = \frac{E_0}{2}$.

Au point $G_3(D, \theta_3 = \pi)$, on a $E_{r3} = -E_0$, et $E_{\theta3} = 0$.

Au point $G_4(D, \theta_4 = \frac{3\pi}{2})$, on a $E_{r4} = E_0$, et $E_{\theta4} = -\frac{E_0}{2}$.

Le champ du dipôle aux quatre positions de Gauss est représenté sur la figure suivante.



3 1. En un point de l'axe (Ox) , avec $x > 0$, on a $r = x$, $\theta = 0$, $\vec{e}_r = \vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y$.

L'expression du champ électrostatique dans l'approximation dipolaire est donc :

$$\vec{E}_0(x) = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$$

2. L'expression exacte du champ est obtenue en additionnant les champs créés par les deux charges ponctuelles. On rappelle que pour une charge

ponctuelle : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

On a donc ici :

$$\vec{E}(x) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \vec{e}_x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \vec{e}_x.$$

$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ax}{\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}(x) = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 x^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)^2} \vec{e}_x$$

On trouve bien la forme souhaitée :

$$\vec{E}(x) = f(x) \vec{E}_0(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = \left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)^{-2}$$

3. Ces deux expressions seront identiques au pour-cent près si $f(x) = 1$ à 1 % près. Comme $f(x) > 1$, il faut que $f(x) < 1 + 0,01$.

On effectue un développement limité de la fonction f au voisinage de 0 :

$$f(x) = \left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)^{-2}$$

$$f(x) \approx 1 - (-2) \frac{a^2}{4x^2}$$

$$f(x) \approx 1 + \frac{a^2}{2x^2}$$

La condition recherchée est donc $\frac{a^2}{2x^2} < 0,01$. On en déduit que x doit vérifier $x > \frac{a}{\sqrt{0,02}}$.

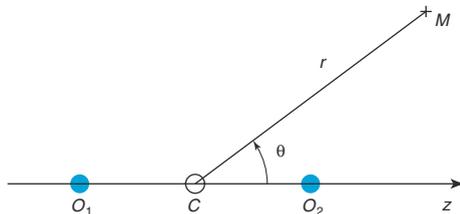
Numériquement $x > 7,1a$

Remarques : On obtient bien entendu la même condition pour les x négatifs.

On constate également que l'approximation dipolaire est valable même assez proche du dipôle, en supposant bien entendu qu'on puisse extrapoler ce résultat dans toutes les directions de l'espace.

4 1. L'oxygène étant plus électronégatif que le carbone, il apparaît une charge partielle $-\delta$ sur chacun des atomes d'oxygène, et une charge partielle positive $+2\delta$ sur l'atome de carbone, assurant l'électroneutralité de la molécule. La méthode VSEPR suggère en outre que cette molécule est linéaire, les trois atomes sont donc alignés (figure suivante). Le barycentre des charges négatives est confondu avec le barycentre des charges positives. La molécule ne peut donc pas être modélisée par un dipôle. En

revanche, le raisonnement suivi pour un dipôle est entièrement reproductible ici.



2. On se place dans un système de coordonnées sphériques d'axe celui de la molécule. La distribution de charge étant invariante par toute rotation autour de cet axe, le potentiel est indépendant de la variable φ : $V(M) = V(r, \theta)$.

D'après le théorème de superposition, le potentiel créé par cette distribution de charge est la somme des potentiels créés par les trois atomes pris séparément :

$$\begin{aligned} V(M) &= V_{O_1}(M) + V_C(M) + V_{O_2}(M) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-\delta}{O_1M} + \frac{2\delta}{CM} + \frac{-\delta}{O_2M} \right) \end{aligned}$$

On a $CM = r$.

Et pour O_1M et O_2M :

$$\vec{O_1M} = \vec{CM} - \vec{CO_1}$$

$$O_1M^2 = CM^2 - 2\vec{CM} \cdot \vec{CO_1} + CO_1^2$$

$$O_1M^2 = r^2 - 2ra \cos(\pi - \theta) + a^2$$

$$O_1M^2 = r^2 \left(1 + \frac{2a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\vec{O_2M} = \vec{CM} - \vec{CO_2}$$

$$O_2M^2 = CM^2 - 2\vec{CM} \cdot \vec{CO_2} + CO_2^2$$

$$O_2M^2 = r^2 - 2ra \cos\theta + a^2$$

$$O_2M^2 = r^2 \left(1 - \frac{2a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

On cherche le potentiel en un point éloigné, on va donc effectuer un développement limité en $\frac{a}{r}$, à l'ordre 2.

On s'attend en effet à ce que l'ordre 1 s'annule puisque les barycentres des charges positives et négatives sont confondus.

On rappelle que, au deuxième ordre :

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

$$\frac{1}{O_1 M} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{O_1 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{O_1 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \times \frac{4a^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right]$$

$$\frac{1}{O_1 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \times \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right]$$

De la même façon :

$$\frac{1}{O_2 M} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{O_2 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{O_2 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \times \frac{4a^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right]$$

$$\frac{1}{O_2 M} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \times \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right]$$

Par conséquent, pour le potentiel total :

$$V(M) = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-1 + \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2 3 \cos^2 \theta - 1}{r^2} \right) + 2 - 1 - \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2 3 \cos^2 \theta - 1}{r^2}$$

$$\text{Il reste } V(M) = \frac{-\delta a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

3. On en déduit le champ électrostatique créé par la distribution, grâce à la relation locale $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

On a vu que le potentiel était indépendant de φ , donc le champ n'a pas de composante suivant \vec{e}_φ , ce qu'on pouvait d'ailleurs déduire immédiatement du fait que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie, et contient donc le champ électrostatique.

Par dérivation, on obtient :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-3\delta a^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (3 \cos^2 \theta - 1), \text{ et}$$

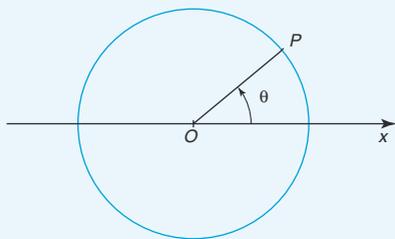
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\delta a^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (-6 \sin \theta \cos \theta).$$

D'où :

$$\vec{E}(M) = -\frac{3\delta a^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} [(3 \cos^2 \theta - 1)\vec{e}_r + 2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta]$$

S'entraîner

1. On utilise les coordonnées sphériques pour repérer les points P à la surface de la sphère. La distribution est indépendante de φ , et donc invariante par rotation autour de l'axe (Ox) .



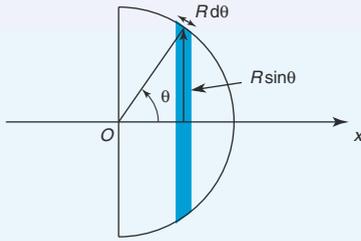
Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos \theta > 0$, et pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on a $\cos \theta < 0$. La sphère est donc découpée en deux hémisphères, l'un, correspondant à $x > 0$, portant une charge

positive et l'autre, correspondant à $x < 0$, portant une charge négative.

Si on considère un élément de surface dS , centré sur $P(R, \theta, \varphi)$, portant la charge $dq = \sigma_p dS$, alors l'élément de surface dS' , centré sur le point $P'(R, \pi - \theta, \varphi)$, symétrique de P par rapport au plan (yOz) , porte une charge $dq' = \sigma_{p'} dS' = -\sigma_p dS = -dq$. En effet, $\sigma_{p'} = \sigma_0 \cos(\pi - \theta) = -\sigma_0 \cos \theta = -\sigma_p$.

Il en résulte que la charge totale de la sphère est nulle, puisqu'à tout élément de surface dS on associe un autre élément de surface portant la charge opposée.

2. Déterminons la charge portée par l'hémisphère $x > 0$, repérée en coordonnées sphériques par un angle θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On découpe la surface en couronnes élémentaires reflétant la symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) .



Tous les points de la couronne sont vus depuis le point O sous le même angle θ à $d\theta$ près. La surface de la couronne élémentaire est $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$. Elle porte donc une charge $dq = \sigma_p dS = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin\theta \cos\theta d\theta$
 $= 2\pi R^2 \sigma_0 \sin\theta d(\sin\theta)$.

On obtient la charge totale de l'hémisphère en intégrant pour θ variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$q_+ = \int dq = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d(\sin\theta) \\ = 2\pi R^2 \sigma_0 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

On a donc

$$q_+ = \pi R^2 \sigma_0$$

Pour l'hémisphère $x < 0$, repérée en coordonnées sphériques par un angle θ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , on obtient de la même façon :

$$q_- = -\pi R^2 \sigma_0$$

On vérifie bien au passage que $q_+ + q_- = 0$, comme on avait pu le voir à la question précédente.

On cherche maintenant la position du barycentre G_+ des charges positives, portées par l'hémisphère $x > 0$. D'après la relation barycentrique, on a :

$$q_+ \overrightarrow{OG_+} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dq \overrightarrow{OP} \text{ avec } \overrightarrow{OP} = R \cos\theta \vec{e}_x + R \sin\theta \vec{e}_y.$$

On remarque que par symétrie, G_+ est suivant \vec{e}_x . On se contente donc de calculer $\overrightarrow{OG_+} \cdot \vec{e}_x$:

$$q_+ \overrightarrow{OG_+} \cdot \vec{e}_x = 2\pi R^3 \sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$\pi R^2 \sigma_0 \overrightarrow{OG_+} \cdot \vec{e}_x = 2\pi R^3 \sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d(\cos\theta)$$

$$\overrightarrow{OG_+} \cdot \vec{e}_x = 2 \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{OG_+} = \frac{2}{3} R \vec{e}_x$$

Pour le barycentre des charges négatives, il faut intégrer θ entre $\frac{\pi}{2}$ et π . On obtient alors

$$\overrightarrow{OG_-} = -\frac{2}{3} R \vec{e}_x$$

3. Cette distribution de charges est donc équivalente à un dipôle constitué d'une charge $q_- = -\pi R^2 \sigma_0$ placée en G_- et d'une charge $q_+ = +\pi R^2 \sigma_0$ placée en G_+ . Le moment dipolaire équivalent est donc :

$$\vec{p} = q_+ \overrightarrow{G_- G_+} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{e}_x$$

Le champ créé par la sphère en un point M éloigné, avec $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, est le champ d'un dipôle :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

2. 1. D'après le principe de superposition, le potentiel créé en M par la distribution est la somme discrète des potentiels créés par les différentes charges ponctuelles qui la constituent : $V(M) = \sum_i V_i(M)$.

Le potentiel $V_i(M)$ créé en M par la charge q_i placée en P_i est : $V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$.

$$\text{Or : } \overrightarrow{P_i M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_i}$$

$$P_i M^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} - 2 \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{OP_i}$$

$$P_i M^2 = OM^2 - 2 \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i} + OP_i^2$$

$$P_i M^2 = r^2 - 2r \vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OP_i} + OP_i^2$$

$$P_i M^2 = r^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r} + \frac{OP_i^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{P_i M} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r} + \frac{OP_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Puisqu'on se place loin de la distribution de charges, on peut effectuer un développement limité au premier ordre. Ainsi :

$$V_i(M) \approx \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r} \right).$$

On obtient donc pour le potentiel total créé par la distribution :

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \sum_i \frac{q_i \vec{e}_r \cdot \overrightarrow{OP_i}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\vec{e}_r \cdot \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \right)$$

En effet, on a $\sum_i q_i = 0$ d'après l'énoncé.

2. On reconnaît le potentiel créé par un doublet de charges de moment dipolaire \vec{p} :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ avec } \vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

3. On a $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$. Effectuons un changement d'origine :

$$\begin{aligned} \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} &= \sum_i q_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) \\ &= \left(\sum_i q_i \right) \overrightarrow{O'O} + \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \end{aligned}$$

Là encore, on obtient cette expression parce que $\sum_i q_i = 0$. La charge totale étant nulle, l'expression du moment dipolaire de la distribution est indépendante de l'origine choisie.

4. On sépare les charges positives, repérées par les indices m et les charges négatives, repérées par les indices k . On note $q_0 = \sum_m q_m$ la charge totale positive et

$$-q_0 = \sum_k q_k \text{ la charge totale négative.}$$

Le moment dipolaire s'exprime par :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_m q_m \overrightarrow{OP_m} + \sum_k q_k \overrightarrow{OP_k}$$

Par définition, le barycentre des charges positives G_+

$$\text{est tel que : } q_0 \overrightarrow{OG_+} = \sum_m q_m \overrightarrow{OP_m}$$

De même, le barycentre G_- des charges négatives est

$$\text{tel que : } -q_0 \overrightarrow{OG_-} = \sum_k q_k \overrightarrow{OP_k}$$

$$\text{Par conséquent, } \vec{p} = q_0 \overrightarrow{OG_+} - q_0 \overrightarrow{OG_-}$$

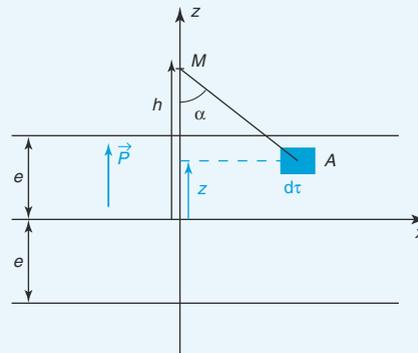
$$\text{On a donc } \vec{p} = q_0 \overrightarrow{G_- G_+}$$

5. On considère maintenant une distribution continue de charges, avec une densité linéique non uniforme. Le principe du calcul est le même, on remplace simplement les sommes discrètes par des intégrations. L'élément de longueur $d\ell = dx$, centré sur le point P d'abscisse x porte une charge élémentaire $dq = \lambda dx = kx dx$. Le moment dipolaire de la tige est donc défini par l'intégrale suivante :

$$\vec{p} = \int_{\text{tige}} dq \overrightarrow{OP} = \int_{-a}^{+a} kx dx \cdot x \vec{e}_x = k \int_{-a}^{+a} x^2 dx \vec{e}_x = k \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} \vec{e}_x$$

$$\text{On en déduit } \vec{p} = \frac{2}{3} ka^3 \vec{e}_x$$

3 1. Le volume mésoscopique $d\tau$ centré sur A peut être assimilé à un dipôle élémentaire $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$. Il crée donc au point M le potentiel $dV = \frac{d\vec{p} \cdot \overrightarrow{AM}}{4\pi\epsilon_0 AM^3}$. Il reste à exprimer \overrightarrow{AM} et AM^3 .



On introduit l'angle α (voir figure). On a alors, sachant que $\vec{P} = P\vec{e}_z$, $d\vec{p} \cdot \overrightarrow{AM} = Pd\tau AM \cos \alpha$ et $AM = \frac{r}{\sin \alpha}$. Par conséquent, le potentiel élémentaire s'écrit :

$$dV = \frac{Pd\tau \cos \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2. Le volume $d\tau$ est décrit en coordonnées cylindriques, on a $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz = r dr d\theta dz$. Il faut distinguer trois cas selon la position de M par rapport aux deux plans $z = -e$ et $z = e$.

On suppose $h > e$: on a $\tan \alpha = \frac{r}{h-z}$, d'où

$$r = (h-z) \tan \alpha \text{ et } dr = \frac{h-z}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \text{ Le potentiel s'écrit donc :}$$

$$\begin{aligned} dV &= \frac{P \cos \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0 (h-z)^2 \tan^2 \alpha} \times (h-z) \tan \alpha \\ &\quad \times \frac{h-z}{\cos^2 \alpha} d\alpha \times d\theta \times dz. \end{aligned}$$

$$\text{Il reste } dV = \frac{P \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta dz.$$

Pour obtenir le potentiel total, il faut intégrer sur la répartition de dipôles, c'est-à-dire pour α variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, pour θ variant de 0 à 2π et pour z variant de $-e$ à $+e$:

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-e}^e \frac{P \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta dz \\ &= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-e}^e dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $h > e$, le potentiel créé par

l'espace polarisé, d'épaisseur $2e$ est $V(M) = \frac{Pe}{\epsilon_0}$

Le champ électrostatique est donc nul puisque le potentiel est constant :

$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

On suppose maintenant $h < e$. Par symétrie, on

obtient immédiatement $V(M) = -\frac{Pe}{\epsilon_0}$ et $\vec{E}(M) = \vec{0}$.

Si le point M est situé dans l'espace polarisé

$-e < h < e$, on peut utiliser le calcul précédent en remarquant que la portion d'espace polarisé située au-dessous de M , d'épaisseur $h+e$, crée en M un potentiel $V_1(M) = \frac{P(h+e)}{2\epsilon_0}$, et que la portion d'espace polarisé

située au-dessus de M , d'épaisseur $e-h$, crée en M un potentiel $V_2(M) = -\frac{P(e-h)}{2\epsilon_0}$.

Le potentiel total créé en M est donc :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = \frac{P}{2\epsilon_0} [(h+e) - (e-h)].$$

Le champ électrostatique est donné par le gradient du potentiel, donc ici, la dérivée par rapport à h :

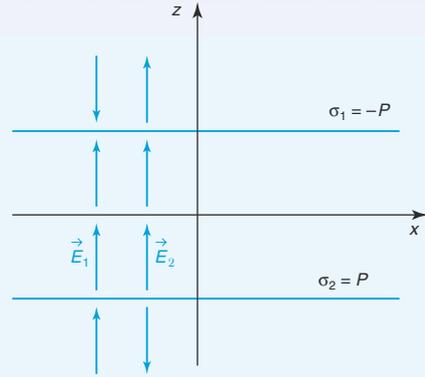
$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dh} \vec{e}_z.$$

On a $V(M) = \frac{Ph}{\epsilon_0}$ et $\vec{E}(M) = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_z$

Le champ électrostatique est nul en dehors de l'espace polarisé, et uniforme dans celui-ci.

3. On peut penser au champ créé par un plan perpendiculaire à (Oz) , uniformément chargé en surface, avec la densité σ , qui crée un champ uniforme de part et d'autre du plan : $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$.

En combinant deux plans, l'un d'équation $z = e$, portant la charge surfacique $\sigma_1 = -P$ et l'autre d'équation $z = -e$, portant la charge surfacique uniforme $\sigma_2 = +P$, comme sur la figure suivante, le champ créé est bien nul si $|h| > e$ et uniforme égal à $\vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ si $|h| < e$.



4 1. On commence par exprimer le champ électrostatique \vec{E}_1 créé par le nuage électronique. On le calcule en un point intérieur au nuage puisqu'on suppose que le noyau ne peut pas en sortir.

Calculons le champ électrostatique créé en un point intérieur par une sphère uniformément chargée en volume. Une telle distribution présente une symétrie sphérique, et le champ électrostatique est donc radial $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss. On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O passant par M , donc de rayon $r < a$ (le point M est intérieur à la sphère). Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est $\Phi = E_r(r) \times 4\pi r^2$.

La charge intérieure à cette surface de Gauss est $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho$, où ρ est la densité volumique de charge. La charge totale $-Ze$ étant répartie uniformément sur tout le volume du nuage électronique, de rayon a , on a $\rho = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Par conséquent $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi a^3} = -Ze \frac{r^3}{a^3}$.

L'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{-Ze}{\epsilon_0} \times \frac{r^3}{a^3} = E_r(r) \times 4\pi r^2,$$

d'où $E_r(r) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} r$ et $\vec{E}_1(M) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{e}_r$

Le noyau, charge ponctuelle $q_2 = Ze$, est donc soumis à l'action d'une force coulombienne $\vec{F} = q_2 \vec{E}_1$. La position d'équilibre du noyau est telle que la force s'annule, c'est-à-dire au point de champ nul, ici obtenu en $r = 0$.

En l'absence de champ extérieur, la position d'équilibre du noyau est le centre du nuage électronique.

2. Si on applique un champ extérieur $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$, le champ total ressenti par le noyau est désormais $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{e}_r$.

Il existera un point de champ nul P_e (qui sera la position d'équilibre du noyau) si $E_0 \vec{e}_x = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{e}_r$. Un tel point P_e est donc situé sur l'axe (Ox) , et son abscisse vérifie :

$$x = r = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3 E_0}{Ze}$$

Il faut, pour que le noyau reste à l'intérieur du nuage électronique que E_0 vérifie $\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 E_0}{Ze} < a$, soit $E_0 < \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^2}$.

Le barycentre des charges positives est donc désormais placé en P_e tandis que le barycentre des charges négatives reste en O . On voit donc apparaître un moment dipolaire induit par le champ extérieur \vec{E}_0 :

$$\vec{p} = Ze \overrightarrow{OP_e} = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \vec{e}_x.$$

On a donc :

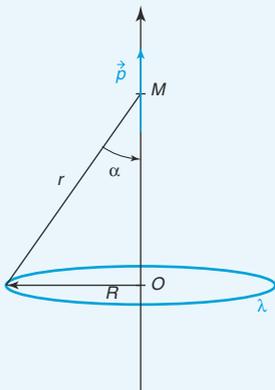
$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0$$

3. La polarisabilité de l'atome, obtenue dans le cadre de ce modèle de Thomson est $\alpha = 4\pi a^3$

La dimension de la polarisabilité est donc celle d'un volume : $[\alpha] = L^3$. Son ordre de grandeur est celui du volume de l'atome, et on remarque qu'elle est indépendante de la charge totale.

5 1. On commence par calculer le champ électrostatique créé par l'anneau au point M de l'axe (Oz) où se trouve le dipôle.

L'axe (Oz) est axe de symétrie, donc $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$. On se contente de calculer dE_z .



Tous les points P de l'anneau sont vus depuis M sous le même angle α .

L'élément de longueur $d\ell = R d\theta$ centré sur P porte la charge élémentaire $dq = \lambda R d\theta$. La composante axiale du champ élémentaire créé en M par dq est donc :

$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \cos\alpha.$$

On a $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$, et $\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$. Il vient

$$\text{donc } dE_z = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)} \times \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

et en intégrant pour θ variant de 0 à 2π :

$$E_z = \frac{\lambda R z \times 2\pi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

La force exercée par ce champ extérieur non uniforme sur le dipôle \vec{p} placé en M est donc

$$\vec{F} = q \Delta \vec{E} = q (\vec{E}(G_+) - \vec{E}(G_-)) = q \frac{dE}{dz} a \vec{e}_z = \vec{p} \frac{dE}{dz}$$

puisque $\vec{p} = qa \vec{e}_z = q dz \vec{e}_z$.

On calcule :

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[1 \times (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + z \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 2z \times (R^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2 + z^2} \right)$$

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (R^2 + z^2 - 3z^2)$$

Par conséquent
$$\vec{F} = \frac{p \lambda R}{2\epsilon_0} \times \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_z$$

Le dipôle est à l'équilibre lorsque la force électrostatique s'annule, c'est-à-dire pour $R^2 - 2z^2 = 0$.

Les positions d'équilibre sont donc données par :

$$z_e = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

La force s'écrit $p \frac{dE}{dz} \vec{e}_z = -\text{grad}(-pE)$. Elle dérive donc d'une énergie potentielle d'interaction :

$$E_p = -pE = -\frac{p \lambda R}{2\epsilon_0} \times \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dE_p}{dz} = -F = -\frac{p \lambda R}{2\epsilon_0} \times \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Les positions d'équilibre $z_e = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$ sont des extrema de l'énergie potentielle.

On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle pour étudier la stabilité des équilibres :

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2} = -\frac{p\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[-4z(R^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} + (R^2 - 2z^2) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times 2z \times (R^2 + z^2)^{-\frac{7}{2}} \right]$$

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2} = -\frac{p\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} [-4z(R^2 + z^2) - 5z(R^2 - 2z^2)]$$

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2} = -\frac{p\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} (6z^2 - 9R^2)$$

En $z = +\frac{R}{\sqrt{2}}$, $\frac{d^2 E_p}{dz^2} > 0$, la position d'équilibre est stable, le dipôle est dans le sens de \vec{E} .

En $z = -\frac{R}{\sqrt{2}}$, $\frac{d^2 E_p}{dz^2} < 0$, la position d'équilibre est instable, le dipôle est dans le sens opposé à \vec{E} .

2. On se place au voisinage de la position d'équilibre stable : $z_e = +\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Faisons un développement limité de $F(z)$ au voisinage de z_e :

$$F(z) = F(z_e) + (z - z_e) \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_e}.$$

Or $\frac{dF}{dz} = -\frac{d^2 E_p}{dz^2}$, donc :

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_e} = \frac{p\lambda R z_e}{2\varepsilon_0 (R^2 + z_e^2)^{\frac{7}{2}}} (6z_e^2 - 9R^2)$$

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_e} = \frac{p\lambda R^2}{2\sqrt{2}\varepsilon_0 \left(R^2 + \frac{R^2}{2} \right)^{\frac{7}{2}}} \left(6\frac{R^2}{2} - 9R^2 \right)$$

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_e} = -\frac{6p\lambda R^4}{2\sqrt{2}\varepsilon_0 \left(\frac{3R^2}{2} \right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_e} = -\frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_0 R^3} = -K$$

Donc $F(z) = 0 - K(z - z_e)$, car $F(z_e) = 0$ (position d'équilibre).

On pose $\varepsilon = z - z_e$, on a $\dot{\varepsilon} = \dot{z}$ et $\ddot{\varepsilon} = \ddot{z}$.

L'application du principe fondamental de la dynamique au dipôle de masse m , soumis à la seule force électrostatique, donne, en projection sur \vec{e}_z :

$$m\ddot{z} = F(z)$$

$$m\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{K}{m}\varepsilon = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. La pulsation des petites oscillations du dipôle au voisinage de sa position d'équilibre est donc :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{8p\lambda}}{\sqrt{9\sqrt{3}R^3m}}$$

6.1. On remarque avant toute chose que $\sum_{i=1}^4 q_i = 0$, mais que G_+ et G_- sont confondus. Il ne s'agit donc pas d'un dipôle.

D'après le principe de superposition, le potentiel créé en un point P du plan (xOy) est donné par :

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{BP} - \frac{1}{CP} - \frac{1}{DP} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } AP^2 &= (x-a)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \\ &= a^2 \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

On suppose que le point P est très proche de l'origine, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$.

On rappelle que $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$.

On a :

$$\frac{1}{AP} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{AP} \approx \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2x}{a} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right)}{2} \left(-\frac{2x}{a} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{AP} \approx \frac{1}{a} \left[1 + \frac{x}{a} - \frac{x^2 + y^2}{2a^2} + \frac{3x^2}{2a^2} \right]$$

$$\frac{1}{AP} \approx \frac{1}{a} \left[1 + \frac{x}{a} + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right]$$

De la même façon, en changeant x en $-x$, on obtient :

$$\frac{1}{BP} \approx \frac{1}{a} \left[1 - \frac{x}{a} + \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} \right].$$

En changeant x en y dans $\frac{1}{AP}$, on obtient :

$$\frac{1}{CP} \approx \frac{1}{a} \left[1 + \frac{y}{a} + \frac{2y^2 - x^2}{2a^2} \right].$$

En changeant y en $-y$ dans $\frac{1}{CP}$, on obtient :

$$\frac{1}{DP} \approx \frac{1}{a} \left[1 - \frac{y}{a} + \frac{2y^2 - x^2}{2a^2} \right].$$

Il vient finalement :

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[2 \frac{2x^2 - y^2}{2a^2} + 2 \frac{2y^2 - x^2}{2a^2} \right] = \frac{3q(x^2 - y^2)}{4\pi\epsilon_0 a^3}.$$

On a donc $V(P) = \frac{3q(x^2 - y^2)}{4\pi\epsilon_0 a^3}$

C'est bien la forme demandée avec $\alpha = -\beta = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^3}$

2. On se place maintenant loin de la distribution de charges, et on repère le point M où on calcule le champ par ses coordonnées polaires $M(r, \theta)$. On a $r \gg a$.

a. Toujours d'après le théorème de superposition :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} - \frac{1}{CM} - \frac{1}{DM} \right).$$

On a :

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$$

$$AM^2 = r^2 - 2ar \cos \theta + a^2$$

$$AM^2 = r^2 \left(1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(-2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right)}{2} \left(-2 \frac{a \cos \theta}{r} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \cos \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2 \cos^2 \theta}{2r^2} \right]$$

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

On obtient, en changeant θ en $\pi - \theta$:

$$\frac{1}{BM} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right].$$

En changeant θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$ dans $\frac{1}{AM}$, on obtient :

$$\frac{1}{CM} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a \sin \theta}{r} + \frac{a^2}{2r^2} (3 \sin^2 \theta - 1) \right].$$

En changeant θ en $\frac{\pi}{2} + \theta$ dans $\frac{1}{AM}$, on obtient :

$$\frac{1}{DM} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a \sin \theta}{r} + \frac{a^2}{2r^2} (3 \sin^2 \theta - 1) \right]$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[2 \frac{a^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) - 2 \frac{a^2}{2r^2} (3 \sin^2 \theta - 1) \right] \\ &= \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

On a donc $V(M) = \frac{3qa^2 \cos(2\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

On retrouve bien la forme demandée avec $k = \frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0}$

b. Le champ électrostatique dérive du potentiel :

$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V$. Soit, en coordonnées polaires :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

On en déduit par dérivation de l'expression précédente :

$$E_r = \frac{3k \cos(2\theta)}{r^4} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{2k \sin(2\theta)}{r^4}$$

c. Les lignes de champ sont telles que l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ est colinéaire au champ électrostatique \vec{E} .

On a par conséquent :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

$$\frac{dr}{3 \cos(2\theta)} = \frac{rd\theta}{2 \sin(2\theta)}$$

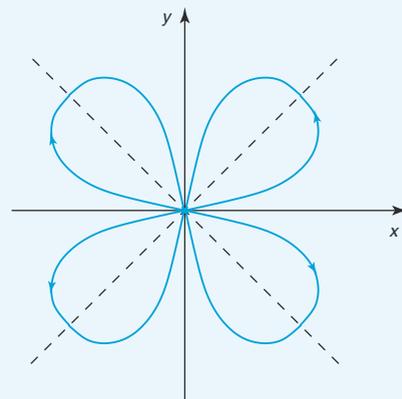
$$\frac{dr}{r} = \frac{3d[\sin(2\theta)]}{4 \sin(2\theta)}$$

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{3}{4} \ln |\sin(2\theta)|$$

L'équation des lignes de champ de cette distribution, en

un point éloigné, est $r = r_0 |\sin(2\theta)|^{3/4}$

Leur allure est représentée sur la figure suivante.



6 – Mouvement des particules chargées dans un champ \vec{E} et \vec{B}

Avant la colle

Tester ses connaissances

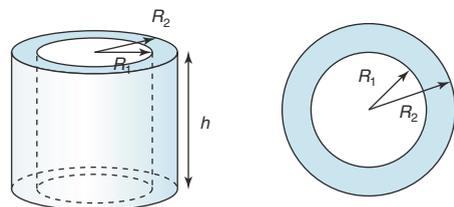
► Corrigés p. 62

- 1 Un électron traverse un appareil dans lequel le champ électrique est nul, sans subir de déviation. On en déduit que :
- a. le champ magnétique est nul dans l'appareil.
- b. la vitesse initiale de l'électron est perpendiculaire au champ magnétique.
- c. la vitesse initiale de l'électron est parallèle au champ magnétique.
- 2 Un proton ($m, q = +e$), de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, se déplace dans un champ magnétique uniforme $B_0\vec{e}_z$. Une particule α (noyau d'Hélium ${}^4\text{He}$), de même vitesse initiale \vec{v}_0 , placée dans un champ $\vec{B} = 2B_0\vec{e}_z$, décrit une trajectoire quasiment identique à celle du proton précédent.
- a. Vrai. b. Faux.
- 3 On considère une particule soumise à une déviation électrostatique par un condensateur.
- a. La déviation de la particule est inversement proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur.
- b. La déviation de la particule est inversement proportionnelle à son énergie cinétique.
- c. La déviation de la particule est proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur.
- 4 Les électrons de conduction d'un métal sont en perpétuel mouvement d'agitation thermique, mais en l'absence de champ extérieur, leur vitesse moyenne est nulle.
- a. Vrai. b. Faux.

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 62

- 1 Une particule chargée (q), de masse m et de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ pénètre dans une zone de champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Comparer les valeurs à l'entrée et à la sortie de la zone de :
- son énergie cinétique,
 - sa quantité de mouvement,
 - son moment cinétique par rapport au centre de la trajectoire.
- 2 On considère un électron et un proton, de même énergie cinétique initiale, soumis à un même champ magnétostatique uniforme, normal à la vitesse initiale. Ils décrivent des trajectoires circulaires. Comparer :
- leur vitesse,
 - le rayon de leur trajectoire,
 - leur période.
- 3 Soit un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E_0\vec{e}_x$ avec $E_0 > 0$. Un proton de charge $q = +e$, d'énergie cinétique initiale $E_{c,0}$ est émis au point O (de potentiel nul) avec une vitesse \vec{v}_0 telle que $(\vec{e}_x, \vec{v}_0) = \alpha$.
Atteint-il l'équipotentielle $V = \frac{E_{c,0}}{e}$?
- 4 Calculer la résistance pour les conducteurs suivants, de conductivité σ . On supposera les courants radiaux : $\vec{j} = j\vec{e}_r$.



1. Conducteur cylindrique de hauteur h et d'axe (Oz) , compris entre deux rayons R_1 et R_2 (figure de gauche).

2. Conducteur sphérique de centre O , compris entre deux rayons R_1 et R_2 (figure de droite).

5 On considère un bloc métallique à la surface de la Terre dans lequel les électrons sont en

équilibre sous l'action de leur poids et d'une force électrique. Calculer la différence de potentiel électrique constatée entre les pieds et le sommet de la tour Eiffel (de hauteur 324 m). On rappelle que la masse de l'électron est $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et sa charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

1 * 10 min

► Corrigé p. 64

Champs électrostatique et magnétostatique parallèles

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à l'action simultanée d'un champ électrostatique uniforme et constant $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$, et d'un champ magnétostatique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.

La particule est initialement à l'origine du repère et sa vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{e}_x + v_{0,z}\vec{e}_z$. Étudier le mouvement.

2 * 10 min

► Corrigé p. 65

Faisceau cylindrique

On considère un faisceau cylindrique d'électrons de vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ constante et portée par l'axe (Ox) du cylindre. On suppose que la répartition de charges reste uniforme dans le cylindre de rayon R au cours du temps. On note N le nombre d'électrons par unité de longueur du cylindre.

1. Calculer le champ électrostatique créé par le faisceau d'électrons. En déduire la force électrique qui s'exerce sur un électron du faisceau.

2. On donne le champ magnétique créé par cette distribution en un point intérieur au faisceau :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 N e v r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta, \text{ où } \mu_0 \text{ est la perméabilité}$$

magnétique du vide (cette notion sera vue dans les chapitres suivants).

Quelle est la force magnétique qui s'exerce sur un électron du faisceau ?

3. Est-il alors possible d'avoir un faisceau d'électrons de section constante ? On donne la relation entre μ_0 et ϵ_0 : $\mu_0\epsilon_0c^2 = 1$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

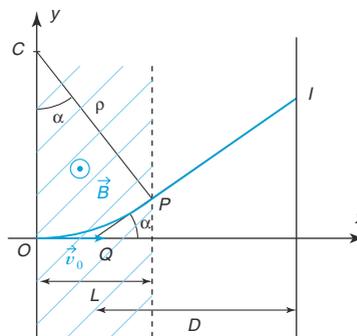
3 * 15 min

► Corrigé p. 65

Déflexion magnétique

On considère un faisceau d'électrons, de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, qui pénètrent en O dans une zone

de largeur L suivant (Ox) dans laquelle règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.



On suppose que le champ magnétique est nul en dehors de ce domaine. On suppose également que $L \ll \frac{mv_0}{eB} = \rho$.

On place à la distance $D + \frac{L}{2}$ de O un écran fluorescent.

1. Déterminer l'ordonnée y_P du point P où l'électron quitte le domaine où règne \vec{B}_0 , ainsi que l'angle $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v}_P)$.

2. En déduire la position du point d'impact I sur l'écran.

3. Vérifier que le support du vecteur \vec{PI} passe très près du point Q d'abscisse $\frac{L}{2}$ dans les hypothèses d'étude.

Données : $L = 1,0 \text{ cm}$, $B = 3,0 \text{ mT}$, $D = 20 \text{ cm}$, et la tension accélératrice qui confère aux électrons la vitesse v_0 est $V = 10 \text{ kV}$.

On rappelle également la masse de l'électron :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg et sa charge :}$$

$$q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

4 ** 15 min

► Corrigé p. 66

Mouvement avec frottements

On considère une particule chargée positivement (q), de masse m , en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. La particule se situe initialement en O , avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{e}_x + v_{0,y}\vec{e}_y$.

Elle est en outre soumise à une force de frottement de la forme $\vec{F} = -k\nu^2 \frac{\vec{v}}{\nu}$ où k est une constante positive.

Montrer que la norme de la vitesse de la particule décroît au cours du temps.

Atteint-on la vitesse nulle au bout d'un temps fini ?

5 ** 30 min

► Corrigé p. 66

Séparation isotopique

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. La particule se trouve initialement au point $M_0(a, 0, 0)$ et a la vitesse :

$$\vec{v}_0 = -a\omega_0 \vec{e}_y + \gamma a\omega_0 \vec{e}_z, \text{ avec } \omega_0 = \frac{qB_0}{m}.$$

1. Décrire la trajectoire de la particule.
2. Étudier le cas où $\gamma = 0$.
3. On superpose à ce champ magnétique un champ électrique permanent $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{e}_x$.

Comment est modifiée la trajectoire, dans le cas général où $\omega \neq \omega_0$?

4. On s'intéresse maintenant au cas où $\omega = \omega_0$. Montrer qu'il se produit un phénomène de résonance, et donner la nature de la trajectoire.
5. Montrer que ce dispositif permet d'effectuer une séparation isotopique.

6 * 10 min PCSI PTSI

► Corrigé p. 67

Conductivité de l'argent

On considère que les électrons de conduction de l'argent (ou électrons libres) de vitesse \vec{v} sont soumis à un champ électrique local \vec{E} et à une force de frottement $\vec{F}_\tau = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

1. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un électron.
2. En donner la solution en régime permanent. En déduire la mobilité μ des électrons.
3. Donner la solution générale $\vec{v}(t)$. Proposer une interprétation graphique de τ , et justifier

qu'on l'appelle « temps de relaxation ». Calculer τ pour $\mu = -5,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$. On rappelle la masse d'un électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et sa charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

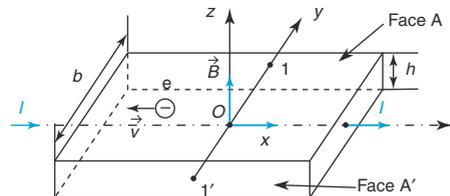
4. Déduire en régime permanent le vecteur densité volumique de courant \vec{j} puis la conductivité σ de l'argent si la densité particulaire d'électrons est $n = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ e}^- \cdot \text{cm}^{-3}$.

7 ** 30 min PCSI PTSI

► Corrigé p. 68

Effet Hall (d'après CCP)

On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur h et de largeur b , représentée sur la figure suivante. Elle est réalisée dans un semi-conducteur de type N où la conduction électrique est assurée par des électrons mobiles dont le nombre par unité de volume est n . On notera par e la charge élémentaire égale à $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. La plaque est parcourue par un courant électrique d'intensité I , uniformément réparti sur la section de la plaque avec la densité volumique $\vec{j} = J \vec{e}_x$, $J > 0$. Elle est alors placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$ avec $B > 0$, créé par des sources extérieures. Le champ magnétique créé par le courant dans la plaque est négligeable devant \vec{B} . On suppose qu'en présence du champ magnétique \vec{B} , le vecteur densité de courant est toujours égal à $\vec{j} = J \vec{e}_x$.



1. a. Exprimer le vecteur vitesse \vec{v} des électrons dans la plaque en fonction de \vec{j} , n et e .
b. Montrer qu'en présence du champ magnétique \vec{B} en régime permanent, il apparaît un champ électrique appelé champ électrique de Hall $\vec{E}_H = \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B}$.
- c. Exprimer les composantes de \vec{E}_H .

2. On considère deux points 1 et 1' en vis-à-vis des faces A et A' de la plaque.

a. Calculer la différence de potentiel $U_H = V(1) - V(1')$ appelée tension de Hall.

b. Montrer que U_H peut s'écrire : $U_H = \frac{C_H}{h} IB$.
Expliciter la constante C_H .

c. Application numérique : pour l'antimoniure d'indium InSb $C_H = 375 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$,
 $I = 0,1 \text{ A}$, $h = 0,3 \text{ mm}$ et $B = 1,0 \text{ T}$.
Calculer U_H ainsi que la densité volumique n , en électrons/ m^3 .

3. On veut établir la loi d'Ohm locale, c'est-à-dire la relation entre le champ électrique \vec{E} dans la plaque et la densité du courant \vec{J} en présence du champ magnétique \vec{B} . Soit $\vec{E}' = E' \vec{e}_x$ la partie

du champ électrique colinéaire à \vec{J} . On pose $\vec{J} = \sigma \vec{E}'$, σ étant une grandeur positive.

a. Quelle caractéristique du matériau de la plaque σ représente-t-elle ?

b. Montrer qu'en présence du champ magnétique, on a $\vec{J} = \sigma(\vec{E} - C_H \vec{J} \wedge \vec{B})$.

4. Tracer dans un plan (xOy) de la plaque les vecteurs $\frac{\vec{J}}{\sigma}$, \vec{E} et $C_H \vec{J} \wedge \vec{B}$ et les lignes équipotentielles en présence puis en absence de champ magnétique. Faire deux figures en vue de dessus par rapport à la figure précédente.

5. Soit θ l'angle entre les vecteurs \vec{J} et \vec{E} .
Montrer que l'angle θ ne dépend que de B et du semi-conducteur.

Tester ses connaissances

1 Réponse **c**. Il n'est pas nécessaire que le champ magnétique soit nul pour qu'il n'y ait pas de déviation. Il suffit que la force magnétique le soit, ce qui est le cas si la vitesse initiale est parallèle au champ magnétique.

2 Réponse **a**. Les masses du proton et du neutron sont quasiment identiques donc :

$m_\alpha = 2m_N + 2m_p \approx 4m_p$. D'autre part $q_p = +e$ et $q_\alpha = +2e = 2q_p$. Leurs mouvements respectifs sont des mouvements circulaires uniformes, de pulsations

$$\omega_p = \frac{eB_0}{m_p} \text{ et } \omega_\alpha = \frac{2e \times 2B_0}{4m_p} = \omega_p, \text{ et de rayons}$$

$$R_p = \frac{m_p v_0}{eB_0} \text{ et } R_\alpha = \frac{4m_p v_0}{2e \times 2B_0} = R_p.$$

3 Réponses **b**. et **c**. La déflexion électrostatique par un condensateur est directement proportionnelle à la différence de potentiel imposée aux bornes de celui-ci. Elle fait en outre intervenir l'inverse de l'énergie cinétique de la particule déviée, puisque l'équation de la trajectoire, dans le condensateur, est :

$$y = \frac{e}{2mv_0^2} \frac{U}{d} x^2$$

4 Réponse **a**. C'est vrai, les électrons de conduction d'un métal ont une vitesse moyenne nulle, en l'absence de champ extérieur. En revanche, si on les soumet à un champ électrostatique, on observe un mouvement d'ensemble, dit de « dérive », la valeur moyenne de la vitesse des électrons de conduction devient alors non nulle.

Savoir appliquer le cours

1 1. D'après le théorème de la puissance cinétique, la norme de la vitesse n'est pas modifiée par un champ magnétique, puisque la force magnétique est de puissance nulle. Par conséquent, l'énergie cinétique d'une particule chargée est la même à l'entrée et à la sortie d'une zone de champ magnétique.

2. En revanche, la direction du vecteur vitesse varie, la quantité de mouvement peut donc varier, même si son module reste constant.

3. La trajectoire de la particule est circulaire, de centre O , le moment cinétique est $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, avec $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ et $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta$. On a donc $\vec{L}_O = mR^2\omega\vec{e}_z$. Le moment cinétique calculé au centre de la trajectoire est constant.

2 1. Le proton a une masse plus grande que celle de l'électron : $m_p > m_e$, donc s'ils ont même énergie cinétique $\frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}m_e v_e^2$, la vitesse de l'électron est plus grande que celle du proton : $v_e > v_p$

2. Les rayons des trajectoires circulaires sont :

$$R_e = \frac{m_e v_e}{eB} \text{ et } R_p = \frac{m_p v_p}{eB}. \text{ On a donc :}$$

$$\frac{R_e}{R_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = \frac{E_{ce}}{v_e} \cdot \frac{v_p}{E_{cp}} = \frac{v_p}{v_e}.$$

Le rayon de la trajectoire de l'électron est plus petit :

$$R_e < R_p$$

3. Les pulsations cyclotrons sont données par :

$$\omega_p = \frac{eB}{m_p} \text{ et } \omega_e = \frac{eB}{m_e}, \text{ et par conséquent } \omega_p < \omega_e.$$

Les périodes sont $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e}$ et $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$. Par consé-

quent, la période du mouvement de l'électron est inférieure à la période du mouvement du proton :

$$T_e < T_p$$

3 Le proton est dévié selon une trajectoire parabolique. En effet, l'application du principe fondamental de la dynamique donne

$$m\vec{a} = q\vec{E} = -eE_0\vec{e}_x.$$

La projection sur \vec{e}_z donne $\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z} = \dot{z}_0 = 0$, et donc $z = z_0 = 0$.

La projection sur \vec{e}_y donne $\ddot{y} = 0$, donc

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha, \text{ et donc}$$

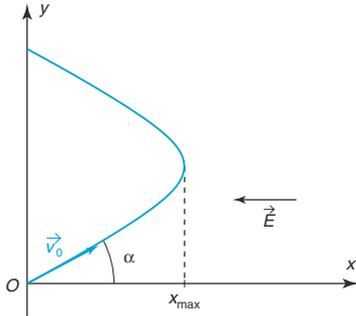
$$y = v_0 t \sin \alpha + y_0 = v_0 t \sin \alpha.$$

La projection sur \vec{e}_x donne enfin $m\ddot{x} = -eE_0$, donc $\dot{x} = -\frac{eE_0}{m}t + \dot{x}_0 = -\frac{eE_0}{m}t + v_0 \cos \alpha$, et donc :

$$x = -\frac{eE_0}{2m}t^2 + v_0 t \cos \alpha + x_0 = -\frac{eE_0}{2m}t^2 + v_0 t \cos \alpha.$$

Par élimination du temps entre les deux équations paramétriques, $t = \frac{y}{v_0 \sin \alpha}$, on obtient :

$x = -\frac{eE_0}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. La trajectoire est parabolique.



Le proton va rebrousser chemin lorsque sa vitesse suivant \vec{e}_x s'annule : $v_x = -\frac{eE_0}{m}t_{\max} + v_0 \cos \alpha = 0$.

On a donc $t_{\max} = \frac{mv_0 \cos \alpha}{eE_0}$.

Il est alors à la position

$$\begin{aligned} x_{\max} &= -\frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} t_{\max}^2 + v_0 t_{\max} \cos \alpha \\ &= -\frac{eE_0}{2m} \left(\frac{mv_0 \cos \alpha}{eE_0} \right)^2 + v_0 \frac{mv_0 \cos \alpha}{eE_0} \\ &= \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2eE_0}. \end{aligned}$$

Le champ $\vec{E} = -E_0 \vec{e}_x$ étant uniforme, la relation locale champ-potential $\vec{E} = -\text{grad}V$ s'intègre simplement en $V(x) = V(0) + E_0 x = E_0 x$.

Le proton rebrousse donc chemin au niveau de l'équipotentielle.

$$V = E_0 x_{\max} = \frac{1}{2} \frac{mv_0^2}{e} \cos^2 \alpha = \frac{E_{c,0}}{e} \cos^2 \alpha$$

Il n'atteint donc l'équipotentielle $V = \frac{E_{c,0}}{e}$ que si $\cos \alpha = 1$, c'est-à-dire si $\alpha = 0$.

4 On part de la définition de la résistance :

$$R = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\sigma \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

1. La distribution est à symétrie cylindrique, le champ électrostatique créé est donc radial : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

La circulation de ce champ d'une armature à l'autre donne donc $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr$.

Mais la norme du champ dépend de r et par conséquent, le vecteur densité volumique de courant dépend aussi de r . On va donc calculer la résistance d'un cylindre compris entre r et $r + dr$, et on obtiendra la résistance globale par intégration.

L'intensité I est égale au flux du vecteur densité volumique de courant \vec{j} à travers la surface latérale du cylindre de rayon r .

D'après la loi d'Ohm locale, $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma E(r)\vec{e}_r$ et par conséquent, on a $I = 2\pi r h j(r) = 2\pi \sigma h r E(r)$.

La circulation élémentaire du champ électrostatique entre ces deux cylindres de rayon r et $r + dr$ est $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV = E(r) dr$. La résistance de cette portion du conducteur est telle que $-dV = I dR$.

On a donc $dR = \frac{E(r) dr}{2\pi \sigma h r E(r)}$. Par intégration pour r variant de R_1 à R_2 ,

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi \sigma h r} = \frac{1}{2\pi \sigma h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi \sigma h} [\ln r]_{R_1}^{R_2}$$

Il vient $R = \frac{1}{2\pi \sigma h} \ln \frac{R_2}{R_1}$

2. Le champ est ici radial au sens des coordonnées sphériques, donc $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma E(r)\vec{e}_r$. Pour trouver l'intensité qui traverse une sphère de rayon r , on calcule le flux à travers cette surface du vecteur densité de courant volumique. On a donc $I(r) = 4\pi r^2 \sigma E(r)$.

La circulation du champ électrostatique entre la sphère de rayon r et celle de rayon $r + dr$ donne :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r) dr.$$

La résistance élémentaire de cette portion de conducteur est donc :

$$dR = \frac{E(r) dr}{I(r)} = \frac{E(r) dr}{4\pi r^2 \sigma E(r)} = \frac{dr}{4\pi r^2 \sigma}.$$

Pour avoir la résistance de l'ensemble du conducteur ohmique, il reste à intégrer pour r variant de R_1 à R_2 :

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi r^2 \sigma} = \frac{1}{4\pi \sigma} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{1}{4\pi \sigma} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Il vient $R = \frac{R_2 - R_1}{4\pi \sigma R_1 R_2}$

5 Il s'agit ici de comparer l'influence relative du poids et de la force électrique.

Les électrons sont en équilibre sous l'effet de leur poids et d'une force électrique. L'application du principe fondamental de la dynamique donne donc $\vec{0} = m\vec{g} - e\vec{E}$. Si on multiplie scalairement cette équation par $\vec{d\ell} = dz\vec{e}_z$, on obtient les travaux des forces : $-mgdz - e\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$, ce qui s'intègre, entre les pieds et le sommet de la Tour Eiffel (en notant H sa hauteur), en $-mgH + e\Delta V = 0$.

On obtient alors la différence de potentiel entre ces

deux points : $\Delta V = \frac{mgH}{e}$

L'application numérique donne $\Delta V = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ V}$. En conclusion, la différence de potentiel électrique qui est mise en jeu pour compenser l'action du poids lors d'un dénivelé de 324 m est tout à fait négligeable devant les différences de potentiel usuelles. Il est donc tout à fait légitime de négliger l'action du poids d'une particule chargée, lorsque celle-ci est soumise à une force de Lorentz.

S'entraîner

1 On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. La particule est soumise à la force de Lorentz et à son poids, négligeable devant la force électromagnétique.

L'application du principe fondamental de la dynamique donne donc $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Vu la direction des champs et de la vitesse initiale, on utilise un repère cartésien.

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc par projection
$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \\ m\ddot{z} = qE_0 \end{cases}$$

La troisième équation s'intègre aisément en

$$\dot{z} = \frac{qE_0}{m}t + v_{0,z}, \text{ qui s'intègre à nouveau en}$$

$$z(t) = \frac{qE_0}{2m}t^2 + v_{0,z}t + 0.$$

On peut intégrer la deuxième équation par rapport au temps : on obtient alors $\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x + \text{cte}$.

Vu les conditions initiales (il n'y a pas de vitesse initiale suivant \vec{e}_y et la position initiale est l'origine du repère), la constante d'intégration est nulle. On peut alors reporter ce résultat dans la première équation, ce qui nous donne finalement :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} = \frac{qB_0}{m}\left(-\frac{qB_0}{m}x\right) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x. \text{ On a donc une équation différentielle de type oscillateur harmonique : } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \frac{qB_0}{m}.$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$.

D'après les conditions initiales : $x(t=0) = \alpha = 0$ et $\dot{x}(t=0) = \beta \omega_0 = v_{0,x}$. Par conséquent, on trouve que

$$x(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

On reporte ensuite cette solution dans l'équation sur \dot{y} :

$$\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x = -\frac{v_{0,x}qB_0}{\omega_0 m} \sin \omega_0 t = -v_{0,x} \sin \omega_0 t.$$

Par intégration, on en déduit $y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \gamma$. On détermine la constante d'intégration grâce aux conditions initiales : $y(t=0) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} + \gamma = 0$.

Il vient $y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1)$.

On obtient les équations paramétriques de la trajectoire :

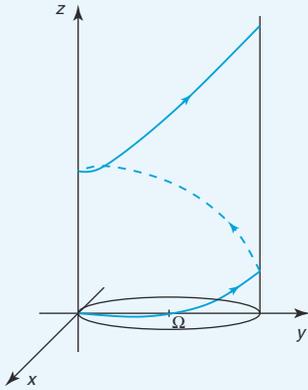
$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ y(t) = \frac{v_{0,x}}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1) \\ z(t) = \frac{qE_0}{2m} t^2 + v_{0,z} t \end{cases}$$

La projection dans le plan horizontal de la trajectoire a pour équation :

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{0,x}}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{v_{0,x}}{\omega_0}\right)^2.$$

Il s'agit d'un cercle de centre $\Omega\left(0, \frac{v_{0,x}}{\omega_0}\right)$, et de rayon $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_0}$.

L'ensemble de la trajectoire est une hélice d'axe (Oz) dont le pas n'est pas constant car la fonction $z(t)$ n'est pas affine. Elle est représentée sur la figure suivante.



2 1. Le faisceau d'électrons correspond à une distribution de charges, qui crée donc un champ électrostatique. La distribution est à symétrie cylindrique, le champ est donc radial : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

On s'intéresse à l'effet de ce champ sur les électrons du faisceau, on calcule donc le champ créé en un point intérieur au faisceau ($r < R$).

On applique le théorème de Gauss sur une surface cylindrique passant par M de hauteur arbitraire h . Le flux du champ électrique à travers cette surface est $\Phi = 2\pi r h E(r)$.

La charge intérieure au cylindre est $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho$. La densité volumique de charges dans le faisceau est donnée par le nombre de charges, rapporté au volume considéré.

On a donc $\rho = \frac{N(-e)h}{\pi r^2 h}$, puisque N est le nombre d'électrons par unité de longueur du faisceau. On a donc $Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \frac{N(-e)h}{\pi r^2 h} = -\frac{Ner^2 h}{R^2}$.

L'application du théorème de Gauss donne $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, et par conséquent $E(r) = -\frac{Ner}{2\pi\epsilon_0 R^2}$.

La force électrostatique ressentie par un électron du faisceau est donc $\vec{F}_e = -e\vec{E} = \frac{Ne^2 r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r$

2. Cette distribution de charges en mouvement peut être vue comme une distribution de courant, et à ce titre, crée un champ magnétique, comme il sera vu dans les chapitres ultérieurs. On donne ici l'expression du champ magnétique créé : $\vec{B} = -\frac{\mu_0 N e v r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta$.

La force magnétique ressentie par un électron du faisceau est donc $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = (-e)v\vec{e}_z \wedge \left(-\frac{\mu_0 N e v r}{2\pi R^2}\right) \vec{e}_\theta$

Par conséquent $\vec{F}_m = -\frac{\mu_0 N e^2 v^2 r}{2\pi R^2} \vec{e}_r$

3. La résultante des forces électrique et magnétique s'exerçant sur un électron du faisceau est donc :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_e + \vec{F}_m \\ \vec{F} &= \left(\frac{Ne^2 r}{2\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\mu_0 N e^2 v^2 r}{2\pi R^2} \right) \vec{e}_r \\ \vec{F} &= \frac{Ne^2 r}{2\pi\epsilon_0 R^2} (1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Or $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$, d'où $\vec{F} = \frac{Ne^2 r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{e}_r$

On voit que la force résultante ne s'annule que si $v = c$. Pour une particule non relativiste, on a $v \ll c$, la force magnétique est négligeable devant la force électrique, le faisceau a tendance à s'élargir.

3 1. La trajectoire dans la zone magnétique est circulaire, de centre $C\left(0, \frac{v_0}{\omega_0}\right)$, et de rayon $\rho = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{m v_0}{e B}$.

L'angle α que fait la vitesse en P avec l'axe (Ox) est également l'angle sous laquelle est vue, depuis C , la portion de trajectoire circulaire de l'électron. On a donc $L = \rho \sin \alpha$, et $y_P = \rho(1 - \cos \alpha)$.

Or d'après les hypothèses de travail $L \ll \rho$ et donc $\sin \alpha \approx \alpha$. Il vient $\alpha = \frac{L e B}{m v_0}$

Un développement limité au deuxième ordre du cosinus donne $y_P = \rho \frac{\alpha^2}{2} = \frac{L \alpha}{2} = \frac{m v_0}{e B} \frac{L^2 e^2 B^2}{2 m^2 v_0^2}$.

On a donc $y_P = \frac{L^2 e B}{2 m v_0}$

Pour faire l'application numérique, il faut déjà calculer v_0 , sachant que cette vitesse est obtenue grâce à une tension accélératrice V . L'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = (-e)(0 - V) = eV, \text{ d'où } v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

L'application numérique donne

$v_0 = 59,3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et par conséquent :

$y_P = 0,45 \text{ mm}$ et $\alpha = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 5,1^\circ$.

2. La trajectoire de l'électron, une fois sorti de la zone magnétique est rectiligne, de pente α . On a donc :

$$y_I = y_P + \left(D - \frac{L}{2}\right) \tan \alpha \approx \frac{L \alpha}{2} + D \alpha - \frac{L \alpha}{2} \approx D \alpha.$$

Par conséquent $y_I = D \frac{L e B}{m v_0}$

L'application numérique donne $y_I = 1,8 \text{ cm}$.

3. Soit Q' le point d'intersection de la droite (PI) avec l'axe des abscisses. On a alors $OQ' = L - \frac{y_P}{\tan \alpha}$, avec

$$y_P \approx \frac{L^2 e B}{2 m v_0} \text{ et } \tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{L e B}{m v_0}, \text{ il vient donc :}$$

$$OQ' \approx L - \frac{L^2 e B}{2 m v_0} \cdot \frac{m v_0}{L e B} \approx \frac{L}{2}.$$

Le point Q' est donc quasiment confondu avec Q et ce dernier appartient donc à la droite (PI) , dans la limite des hypothèses effectuées dans cette étude.

4 La particule considérée est soumise à la force magnétique ainsi qu'à la force de frottement quadratique exercée par le milieu. L'application du principe fondamental

$$\text{de la dynamique donne : } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{k}{m} v \vec{v}.$$

On multiplie scalairement cette équation par \vec{v} . Il vient

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt} = 0 - \frac{k}{m} v^3 \text{ et par conséquent } \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^2.$$

Par intégration en séparant les variables, on obtient

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} dt, \text{ et donc } \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m} t.$$

$$\text{On en déduit } \frac{1}{v} = \frac{k}{m} t + \frac{1}{v_0} = \frac{1 + \frac{k}{m} v_0 t}{v_0}.$$

$$\text{Finalement, } v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m} v_0 t}$$

La vitesse de la particule décroît au cours du temps. Ce résultat était prévisible, puisque la seule force qui travaille est une force dissipative de frottement.

Il faut attendre un temps infini pour que la vitesse s'annule totalement.

5 1. L'équation du mouvement est donnée par le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On obtient par projection sur les axes cartésiens :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_0 \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

L'intégration de la dernière équation donne $\dot{z} = \dot{z}_0 = \gamma a \omega_0$ ce qui s'intègre à nouveau en $z(t) = \gamma a \omega_0 t + K_1$.

D'après les conditions initiales $z(t=0) = K_1 = 0$.

$$\text{On a donc } z(t) = \gamma a \omega_0 t$$

La deuxième équation s'intègre par rapport au temps en $\dot{y} = -\omega_0 x + K_2$. D'après les conditions initiales $\dot{y}(t=0) = -\omega_0 a + K_2 = -\omega_0 a$, donc $K_2 = 0$.

En reportant dans la première équation, on obtient

$\ddot{x} = \omega_0 \dot{y} = -\omega_0^2 x$. Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants s'intègre en $x(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$. D'après les conditions initiales, on a $x(t=0) = \alpha = a$ et $\dot{x}(t=0) = \omega_0 \beta = 0$

$$\text{donc } x(t) = a \cos \omega_0 t$$

En reportant dans la deuxième équation intégrée, on a

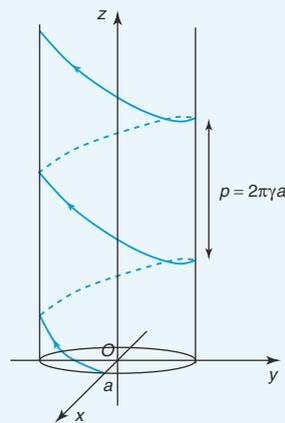
$\dot{y} = -\omega_0 x = -\omega_0 a \cos \omega_0 t$. Par intégration, on obtient $y(t) = -a \sin \omega_0 t + K_3$. D'après les conditions initiales

$$y(t=0) = K_3 = 0, \text{ donc } y(t) = -a \sin \omega_0 t$$

La trajectoire est donc une hélice d'axe (Oz) , dont la projection dans le plan (xOy) est un cercle de centre O et de rayon a , d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Elle est représentée sur la figure suivante. Le pas de l'hélice est constant :

$p = \Delta z = z(t+T_0) - z(t) = \gamma a \omega_0 T_0$, où T_0 est la période du mouvement circulaire horizontal $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$\text{On a donc } p = 2\pi \gamma a$$



2. Si $\gamma = 0$, la trajectoire est simplement circulaire, dans le plan (xOy) , d'équation $x^2 + y^2 = a^2$.

3. On superpose un champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{e}_x$.

L'équation du mouvement devient $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Par projection sur les axes cartésiens, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_0 \dot{y} + \frac{qE_0}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} = -\omega_0 \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

On obtient les mêmes équations, sauf sur x . L'équation de l'oscillateur harmonique libre devient celle d'un oscillateur harmonique forcé : $\ddot{x} + \omega_0 x = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t$.

La solution complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée :

$$x_{SG}(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$$

et d'une solution particulière, qu'on recherche sous la forme $x_{SP}(t) = \lambda \cos \omega t$, avec la même dépendance temporelle que le second membre.

En reportant cette expression dans l'équation différentielle,

$$\text{on obtient } -\omega^2 \lambda \cos \omega t + \omega_0^2 \lambda \cos \omega t = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t,$$

ce qui donne $\lambda = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. On a donc :

$$x(t) = x_{SG}(t) + x_{SP}(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Il reste à déterminer α et β grâce aux conditions initiales.

$$\text{On a d'une part } x(t=0) = \alpha + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = a,$$

$$\text{donc } \alpha = a - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

D'autre part $\dot{x}(t=0) = \beta \omega_0 = 0$, donc $\beta = 0$.

Par conséquent :

$$x(t) = \left(a - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Il reste à trouver $y(t)$ en intégrant l'équation $\dot{y} = -\omega_0 x$.

Il vient :

$$y(t) = -\omega_0 \left(a - \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \omega_0 \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{1}{\omega} \sin \omega t + K.$$

On a $y(t=0) = K = 0$, donc :

$$y(t) = \left(\frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - a \right) \sin \omega_0 t - \frac{qE_0 \omega_0}{m\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

On voit apparaître des phénomènes de battements, pour les composantes x et y . On peut en effet écrire que :

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

$$x(t) = a \cos \omega_0 t - \frac{2qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)$$

De la même façon pour y :

$$y(t) = -a \sin \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\sin \omega_0 t - \sin \omega t)$$

$$y(t) = -a \sin \omega_0 t - \frac{2qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right)$$

4. Lorsque $\omega = \omega_0$, on a :

$$x(t) = a \cos \omega_0 t - \frac{2qE_0}{m(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} \times \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right).$$

Un développement limité au premier ordre donne

$$\sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \approx \frac{\omega - \omega_0}{2} t. \text{ De plus, } \omega + \omega_0 = 2\omega_0.$$

L'expression de $x(t)$ se simplifie alors en :

$$x(t) \approx a \cos \omega_0 t + \frac{qE_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

De même, l'expression de $y(t)$ se simplifie alors en :

$$y(t) \approx -a \sin \omega_0 t + \frac{qE_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

La projection sur le plan (xOy) de la trajectoire a un rayon qui croît avec le temps. La trajectoire est toujours hélicoïdale mais l'hélice n'est plus circulaire.

5. La pulsation pour laquelle on a résonance est $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$. Elle dépend donc de la masse de la particule. Si on se place à la bonne fréquence pour le champ électrique, on pourra sélectionner les particules qui s'écartent de l'hélice initiale, et ainsi réaliser une séparation isotopique.

6. 1. On applique le principe fondamental de la dynamique : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$. L'équation différentielle

$$\text{du mouvement de l'électron est donc } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

2. En régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, il reste donc uni-

$$\text{quement } \vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

La mobilité des électrons étant définie par $\vec{v} = \mu \vec{E}$, on

$$\text{obtient aisément } \mu = -\frac{e\tau}{m}$$

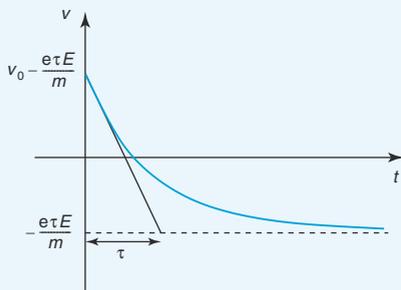
3. La solution générale de l'équation différentielle du mouvement de l'électron est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée, de la forme

$\vec{v}_{SG} = \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, et d'une solution particulière, \vec{v}_{SP} , qui correspond ici au régime permanent décrit à la question précédente :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

Le temps τ qui apparaît est donc un temps caractéristique du régime transitoire. On l'appelle également temps de relaxation. Graphiquement, c'est l'abscisse de

l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote. L'évolution de la vitesse avec le temps, dans le cas d'un vecteur vitesse initiale colinéaire au champ électrostatique, est représentée sur la figure suivante.



A.N. : $\tau = 3,0 \cdot 10^{-14}$ s.

4. Le vecteur densité volumique de courant est lié à la vitesse des particules chargées par la relation $\vec{j} = nq\vec{v}$, où n est le nombre de particules par unité de volume. On a ici des électrons $q = -e$, et leur vitesse en régime permanent est $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$. On en déduit que $\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$

La conductivité locale étant définie par $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, il vient immédiatement $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$

A.N. : $\sigma = 6,2 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Remarque : l'énoncé fournit une densité particulière exprimée en électrons par cm^3 , il faut bien penser à faire la conversion.

7 1. a. Le vecteur densité volumique de courant \vec{j} est relié à la vitesse des particules par la relation $\vec{j} = nq\vec{v}$, où q est la charge des particules considérées et n la densité volumique de particules libres. On considère ici des électrons ($q = -e$), par conséquent $\vec{v} = -\frac{1}{ne}\vec{j}$

b. On suppose que le courant électronique n'est pas perturbé par l'introduction d'un champ magnétique. Cela suppose l'apparition d'une force électrostatique qui vient compenser la force magnétique subie par les électrons.

On doit avoir $\vec{F} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$. Par conséquent $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ et $\vec{E}_H = \frac{1}{ne}\vec{j} \wedge \vec{B}$

c. On a $\vec{j} = J\vec{e}_x$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Il vient donc :

$$\vec{E}_H = -\frac{JB}{ne}\vec{e}_y$$

2. a. On obtient la différence de potentiel entre les deux extrémités de la plaque en faisant circuler le champ électrique de Hall sur la largeur de la plaque :

$$\begin{aligned} U_H &= V(1) - V(1') = \int_1^{1'} -dV = \int_1^{1'} -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{y}\vec{e}_y \\ &= \int_1^{1'} \vec{E}_H \cdot d\vec{y}\vec{e}_y = \int_1^{1'} -\frac{JB}{ne} dy = -\frac{JB}{ne} \times (-b). \end{aligned}$$

Il vient $U_H = \frac{JBb}{ne}$

b. Le courant I total qui parcourt le milieu est le flux de \vec{j} à travers une section droite de la plaque, de surface bh .

On a donc $I = Jbh$ et $U_H = \frac{IBb}{bhne} = \frac{1}{neh}IB$. On

reconnait la forme demandée, avec $C_H = \frac{1}{ne}$

c. L'application numérique donne $n = 1,6 \cdot 10^{22} \text{ e}^- \cdot \text{m}^{-3}$ et $U_H = 0,125 \text{ V}$.

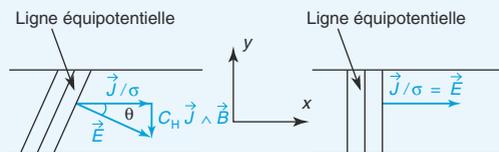
3. a. La grandeur σ représente la conductivité du milieu.

b. On écrit $\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}'$, on a alors : $\vec{j} = \sigma\vec{E}' = \sigma(\vec{E} - \vec{E}_H)$, avec $\vec{E}_H = \frac{1}{ne}\vec{j} \wedge \vec{B}$.

Comme $C_H = \frac{1}{ne}$, il vient immédiatement :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - C_H\vec{j} \wedge \vec{B})$$

4. La figure suivante représente les vecteurs demandés ainsi que les équipotentielles du champ électrostatique, en présence d'un champ magnétique extérieur (à gauche) ou en son absence (à droite).



5. D'après les figures précédentes, $\tan \theta = \frac{C_H JB}{J\sigma}$. On

obtient donc $\theta = C_H B \sigma$. L'angle θ ne dépend donc que du champ appliqué B et du semi-conducteur étudié, par l'intermédiaire de C_H et σ qui sont des caractéristiques de ce dernier.

Remarque : on peut, en mesurant la tension U_H créée, connaître la valeur du champ magnétique B . Cela est mis en application dans les sondes à effet Hall.

7 – Distributions de courants

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 71

- | | |
|--|---|
| <p>1 On a vu que la charge se conserve, en régime stationnaire. Que peut-on en déduire sur le vecteur densité de courant \vec{j} ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. \vec{j} a un flux conservatif.</p> <p><input type="checkbox"/> b. \vec{j} est uniforme.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un tube de courant.</p> | <p>2 Quel est le lien entre l'intensité du courant I et le vecteur densité volumique de courant ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. $I = \iiint \vec{j} \cdot \vec{d}\tau$ <input type="checkbox"/> b. $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{d}\vec{S}$</p> <p><input type="checkbox"/> c. $I = \int \vec{j} \cdot \vec{d}\ell$</p> <p>3 La densité volumique de charges mobiles ρ_m est égale à la densité volumique de charges ρ.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai. <input type="checkbox"/> b. Faux.</p> |
|--|---|

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 71

- | | |
|--|--|
| <p>1 On considère les distributions de courant suivantes, donner dans chaque cas leurs symétries et invariances.</p> <p>1. Fil infini, d'axe (Oz), parcouru par un courant I.</p> <p>2. Deux fils infinis parallèles, d'axe (Oz), d'équations respectives $x = -a$ et $x = a$, parcourus par le même courant I.</p> <p>3. Même distribution, mais les fils sont parcourus par des courants opposés I et $-I$.</p> <p>2 Soit une spire d'axe (Oz) contenue dans le plan (xOy), de rayon R et parcourue par un courant I. Donner les symétries et invariances de cette distribution de courants.</p> <p>3 Le cuivre est un métal conducteur qui peut être modélisé par un réseau solide de cations</p> | <p>cuivre, de densité volumique de charges ρ_+ et d'un gaz d'électrons de densité volumique de charges ρ_-.</p> <p>Un fil de cuivre parcouru par un courant se déplace dans le référentiel du laboratoire. Dans ce référentiel, la vitesse du solide en M est $\vec{V}(M)$, et la vitesse moyenne des électrons est $\vec{V}(M) + \vec{v}(M)$, où $\vec{v}(M)$ est la vitesse relative des électrons par rapport au solide.</p> <p>1. Le cuivre étant un matériau neutre, quelle relation lie ρ_+ et ρ_- ?</p> <p>2. Comment s'exprime la densité volumique de courant \vec{j} en fonction des vitesses et des densités volumiques de charges ?</p> |
|--|--|

1 > * 5 min

> Corrigé p. 72

Cavité cylindrique

Un cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon R est parcouru par un courant volumique uniforme de densité $\vec{j} = j\vec{e}_z$. Ce cylindre est percé d'une cavité cylindrique, d'axe (O_1z) et de rayon $R_1 < R$. Quelles sont les invariances et symétries d'une telle distribution ?

2 > * 5 min

> Corrigé p. 72

Circuit carré

Considérons un circuit carré $\{A_1(0, a, 0) ; A_2(0, 0, a) ; A_3(0, -a, 0) ; A_4(0, 0, -a)\}$, parcouru par un courant I . Déterminer les symétries et invariances d'une telle distribution.

3 > * 5 min

> Corrigé p. 72

Tronc de cône

On enroule conjointement un fil de cuivre sur un tronc de cône d'axe (Oz) , de sommet S et de demi-angle au sommet α . Les rayons extrêmes de l'enroulement sont R_1 et R_2 . Ce circuit est parcouru par un courant I . Quelles sont les invariances et symétries de cette distribution de courant ?

4 > * 5 min

> Corrigé p. 72

Hélice

On considère une hélice définie par les équations suivantes : $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = -\frac{p\theta}{2\pi}$, avec θ variant de θ_{\min} à θ_{\max} .

Cette hélice est parcourue par un courant filiforme d'intensité I .

1. Donner les éléments de symétrie d'un cylindre infini de même axe (Oz) , de même rayon R , et de

vecteur densité surfacique de courant uniforme $\vec{j}_s = j_s\vec{e}_\theta$.

2. L'hélice infinie ($\theta_{\min} \rightarrow -\infty$ et $\theta_{\max} \rightarrow +\infty$) possède-t-elle les mêmes invariances ?

3. Qu'en est-il de l'hélice finie ?

5 > ** 10 min

> Corrigé p. 72

Sphère de Rowland

Une boule de polystyrène (matériau non conducteur), de centre O et de rayon R , a été chargée uniformément en surface, et porte la densité surfacique σ . Elle est mise en rotation autour d'un de ses diamètres, noté (Oz) , avec la vitesse angulaire ω constante.

1. Étudier les symétries de la nappe de courant obtenue.

2. Calculer le vecteur densité surfacique de courant \vec{j}_s .

3. Calculer l'intensité de cette distribution relative à un demi-cercle méridien.

6 > ** 10 min

> Corrigé p. 72

Boule de Rowland

Une boule de polystyrène (matériau non conducteur), de centre O et de rayon R , a été chargée uniformément en volume, et porte la densité volumique ρ . Elle est mise en rotation autour d'un de ses diamètres, avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ constante.

1. Étudier les symétries de cette distribution de courant.

2. Calculer le vecteur densité volumique de courant \vec{j} associé à cette distribution.

3. Calculer l'intensité de cette distribution relative à un demi-disque dont le diamètre s'appuie sur (Oz) .

Tester ses connaissances

1 Réponses **a.** et **c.** En régime stationnaire, la charge contenue à travers une surface fermée se conserve, l'intensité qui traverse cette surface est donc nulle, le flux sortant du vecteur densité volumique de courant est donc nul. Il est à flux conservatif. On en déduit que le flux à travers une section droite d'un tube de courant, c'est-à-dire l'intensité, est une constante.

2 Réponse **b.** Attention, l'intensité est le flux du vecteur élément de courant volumique à travers une **surface**. On « compte » le nombre de charges passant par unité de temps à travers cette surface, pas le nombre de charges contenues dans le volume.

3 Réponse **b.** C'est *a priori* faux. La densité volumique de charges mobiles ne fait intervenir que les charges mobiles, et qui participent donc au courant électrique. S'il existe des charges fixes (réseau d'ions dans un cristal par exemple), elles n'interviennent pas dans l'intensité du courant.

Cela étant, il se peut que toutes les charges de la distribution soient animées du même mouvement d'ensemble (courant de convection par exemple), auquel cas, il n'y a pas lieu de distinguer entre charges mobiles et charges « tout court ».

Savoir appliquer le cours

1 Dans les trois différents cas, les distributions présentent une invariance par translation le long de l'axe (Oz) .

1. Pour un fil infini unique, il y a en outre invariance par rotation autour de (Oz) . Tout plan contenant (Oz) contient le fil et est donc plan de symétrie pour la distribution. En revanche, tout plan perpendiculaire à (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution.

2. Pour deux fils parcourus par un même courant, il n'y a plus d'invariance par rotation autour de (Oz) , mais on conserve certains plans de symétrie. Les plans (yOz) et (xOz) sont tous deux plans de symétrie de la distribution, et les plans perpendiculaires à (Oz) sont toujours plans d'antisymétrie.

3. Lorsque les deux fils sont parcourus par des courants de sens opposés, le plan (xOz) qui contient les fils demeure un plan de symétrie de la distribution, mais le plan (yOz) , médiateur des deux fils, devient plan d'antisymétrie. Les plans perpendiculaires à (Oz) restent plans d'antisymétrie de la distribution.

2 Le plan (xOy) contenant la spire est évidemment un plan de symétrie de la distribution de courant. La distribution est en outre invariante par toute rotation

autour de l'axe (Oz) . Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution.

3 1. Puisque le cuivre est un matériau neutre, il faut que la charge totale portée par le solide soit nulle. Cela impose que les densités volumiques de charges des cations et des électrons soient opposées :

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

2. Il y a deux types de porteurs de charges, les cations, de densité volumique ρ_+ et de vitesse \vec{V} , liés au solide, et les électrons, de densité volumique ρ_- et de vitesse $\vec{V} + \vec{v}$. La densité volumique de courant est donc :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \rho_+ \vec{V} + \rho_- (\vec{V} + \vec{v}) \\ &= (\rho_+ + \rho_-) \vec{V} + \rho_- \vec{v} = \rho_- \vec{v}. \end{aligned}$$

Seuls les électrons, donc la vitesse relative par rapport au solide est non nulle, participent à la conduction du courant électrique. La densité volumique de courant est donc :

$$\vec{j} = \rho_- \vec{v}$$

S'entraîner

1 Cette distribution présente une invariance par translation d'axe (Oz) . En l'absence de cavité, on aurait en outre une invariance par rotation qui n'est pas vérifiée ici. Tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution. Mais des plans contenant (Oz) , un seul présente une propriété intéressante du point de vue de la distribution, c'est le plan contenant aussi l'axe (O_1z) de la cavité. Il s'agit d'un plan de symétrie de la distribution.

2 Le plan (yOz) contenant le circuit est évidemment plan de symétrie de la distribution. Le circuit carré est également invariant par rotation discrète autour de l'axe (Ox) d'angle un nombre entier de fois $\frac{\pi}{2}$.

Le carré lui-même présente 4 plans de symétrie, que sont les plans (xOz) , (xOy) , et les plans bissecteurs, d'équations respectives $y = z$ et $y = -z$. Tous ces plans sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de courant.

3 Une telle distribution de courant présente une invariance par rotation autour de l'axe (Oz) . Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie. Il n'y a pas d'autre symétrie remarquable.

4 1. Cette distribution présente une invariance par translation d'axe (Oz) , et une invariance par rotation autour de (Oz) . On a une distribution de courant à symétrie cylindrique. Tout plan contenant (Oz) est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant et tout plan perpendiculaire à (Oz) est quant à lui plan de symétrie.

2. Pour une hélice infinie, l'invariance par rotation est perdue de même que l'invariance par toute translation d'axe (Oz) . Subsiste une invariance par translation discrète d'axe (Oz) , d'un nombre entier de pas de l'hélice.

3. L'hélice finie ne présente aucune symétrie particulière, puisque même l'invariance par translation discrète est perdue.

5 1. Le support est à symétrie sphérique, mais pas la distribution de courant. Les charges sont mises en mouvement dans des plans parallèles au plan équatorial de la sphère, on a donc seulement un axe de symétrie de révolution, l'axe (Oz) . Il y a invariance par toute rotation autour de (Oz) . Les plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie de la distribution, et le plan équatorial, normal à (Oz) , est un plan de symétrie.

2. Un point P de la sphère est repéré par ses coordonnées sphériques (R, θ, φ) . Il est animé d'un mouvement

circulaire uniforme dans le plan de normale \vec{e}_z , de centre la projection de P sur l'axe (Oz) et de rayon $r = R \sin \theta$. Sa vitesse est longitudinale :

$$\vec{v}(P) = R \sin \theta \omega \vec{e}_\varphi.$$

Le vecteur densité surfacique de courant \vec{j}_s est donc

$$\vec{j}_s = \sigma \vec{v}(P) = \sigma \omega R \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

3. L'intensité de cette distribution de courant est le « flux » du vecteur densité surfacique de courant à travers un demi-cercle méridien. Il faut donc intégrer le résultat précédent, pour θ variant de 0 à π :

$$I = \int \vec{j}_s \cdot (d\ell \vec{e}_\varphi) = \int_0^\pi \sigma \omega R \sin \theta \cdot R d\theta,$$

où $d\ell = R d\theta$ est l'élément de longueur du demi-méridien.

$$I = \sigma \omega R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \sigma \omega R^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 2\sigma \omega R^2.$$

$$I = 2\sigma \omega R^2$$

6 1. Le support est à symétrie sphérique, mais pas la distribution de courant. Les charges sont mises en mouvement dans des plans parallèles au plan équatorial de la sphère, on a donc seulement un axe de symétrie de révolution, l'axe (Oz) . Il y a invariance par toute rotation autour de (Oz) . Les plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie de la distribution, et le plan équatorial, normal à (Oz) , est un plan de symétrie.

2. Un point P de la sphère est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Il est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan de normale \vec{e}_z , de centre la projection de P sur l'axe (Oz) et de rayon $d = r \sin \theta$. Sa vitesse est longitudinale : $\vec{v}(P) = r \sin \theta \omega \vec{e}_\varphi$.

Le vecteur densité volumique de courant \vec{j} est donc :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}(P) = \rho \omega r \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

3. L'intensité de cette distribution de courant est le flux du vecteur densité volumique de courant à travers un demi-disque méridien. Il faut donc intégrer le résultat précédent, pour θ variant de 0 à π et r variant de 0 à R :

$$I = \iint \vec{j} \cdot (dS \vec{e}_\varphi) = \int_0^\pi \int_0^R \rho \omega r \sin \theta \cdot r dr d\theta,$$

où $dS = r dr d\theta$ est l'élément de surface du demi-disque méridien. Il vient :

$$I = \rho \omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \rho \omega [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{3} \rho \omega R^3.$$

$$I = \frac{2\rho\omega R^3}{3}$$

8 – Champ magnétostatique

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 77

<p>1 Parmi ces affirmations, laquelle est fausse ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Les lignes de champ magnétostatique sont des courbes fermées.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Deux lignes de champ magnétostatique peuvent se couper.</p> <p><input type="checkbox"/> c. Les lignes de champ magnétostatique divergent à partir des sources du champ.</p> <p>2 La perméabilité magnétique du vide μ_0 est un coefficient sans dimension.</p> <p><input type="checkbox"/> a. Vrai.</p> <p><input type="checkbox"/> b. Faux, son unité est le $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$.</p>	<p><input type="checkbox"/> c. Faux, son unité est le $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{A}^{-2}$.</p> <p>3 Quelle est l'unité du champ magnétostatique ?</p> <p><input type="checkbox"/> a. Le tesla (T).</p> <p><input type="checkbox"/> b. L'ampère par mètre ($\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$).</p> <p><input type="checkbox"/> c. Le gauss (G).</p> <p>4 Le champ magnétostatique en un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de courant est :</p> <p><input type="checkbox"/> a. normal au plan.</p> <p><input type="checkbox"/> b. contenu dans le plan.</p>
--	---

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 77

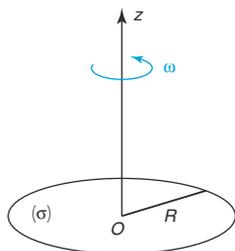
<p>1 Calculer le champ magnétostatique créé par une spire d'axe (Oz), de centre O, de rayon R, parcourue par un courant I,</p> <ol style="list-style-type: none">1. au centre O de la spire.2. en un point M de l'axe (Oz).3. en déduire le champ magnétostatique créé en un point M de son axe (Oz) par une bobine circulaire constituée de N spires accolées, dont l'épaisseur e reste négligeable devant le rayon R des spires. <p>2 Un solénoïde est une nappe cylindrique de courant, d'axe (Oz), de longueur ℓ et de rayon R. La densité surfacique de courant \vec{j}_S est orthoradiale : $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_\theta$.</p>	<ol style="list-style-type: none">1. Calculer le champ magnétostatique créé en un point M de l'axe (Oz) par cette distribution.2. En déduire le champ magnétostatique créé en un point M de l'axe (Oz) intérieur à un solénoïde de longueur infinie.3. Pratiquement, on réalise un solénoïde grâce à N spires jointives d'axe (Oz). On note $n = \frac{N}{\ell}$ le nombre de spires par unité de longueur. Comment s'exprime \vec{j}_S en fonction du courant I qui circule dans les spires ?
---	---

1 * 15 min

► Corrigé p. 79

Disque de Rowland

Un disque de centre O et de rayon R , chargé uniformément ($\sigma > 0$) est mis en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe de révolution (Oz).



1. Rappeler le vecteur densité surfacique de courant ainsi créé en un point $P(r)$ du disque.

2. En décomposant le disque en spires de courant élémentaires d'épaisseur dr exprimer le champ élémentaire $d\vec{B}$ créé au point M de l'axe Oz . En déduire le champ résultant au point M .

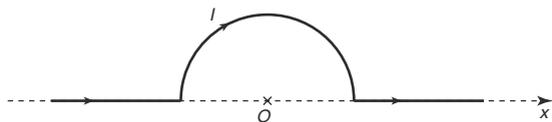
Cas particulier : que vaut le champ \vec{B} en $z = 0$?

2 * 15 min

► Corrigé p. 79

Circuit semi-circulaire

On considère le circuit représenté sur la figure ci-après constitué de deux fils semi-infinis reliés par une semi-spire circulaire de centre O et de rayon R . Le circuit est contenu dans le plan (xOy) et est parcouru par un courant I . Calculer le champ magnétostatique \vec{B} au point O .

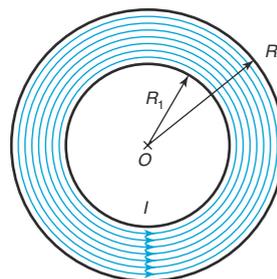


3 * 15 min

► Corrigé p. 79

Bobine plate

Considérons une bobine plate comportant N spires jointives concentriques dont le rayon évolue entre R_1 et R_2 .



Déterminer le champ magnétostatique produit en un point M de l'axe (Oz) de cette bobine, en fonction de I (intensité du courant parcourant les spires), R_1 , R_2 , θ_1 et θ_2 (angles sous lesquels les rayons R_1 et R_2 sont vus du point M).

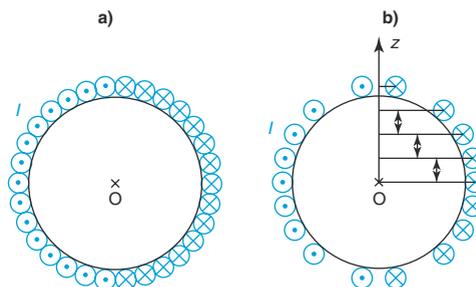
Nota : on donne $\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.

4 ** 15 min

► Corrigé p. 80

Sphère bobinée

Une sphère de rayon R et de centre O est recouverte d'un grand nombre de spires N parcourues par un même courant d'intensité I . Calculer le champ magnétostatique créé au centre O de la sphère par cette distribution de courant dans les deux cas suivants :



1. les spires sont jointives (figure **a**) ;
2. les plans des N spires sont équidistants suivant (Oz), et les spires ne sont plus jointives (figure **b**).

5 ** 40 min

► Corrigé p. 81

Circuit carré

Considérons un circuit carré $A_1 \left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$;

$A_2\left(0, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; $A_3\left(0, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$; $A_4\left(0, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, de côté a , de centre O , situé dans le plan (yOz) et parcouru par un courant I allant de A_1 vers A_2 .

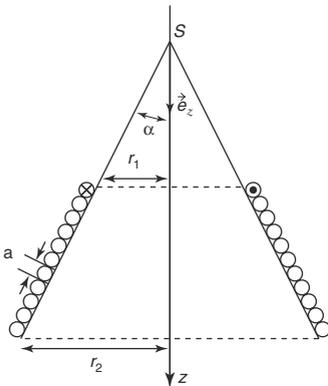
- Déterminer le champ magnétostatique \vec{B} créé au point O .
- Déterminer le champ magnétostatique \vec{B} créé en un point M de l'axe du carré.
- Calculer le champ sur l'axe (Ox) d'un polygone régulier à N côtés. On notera R la distance OA_1 . Considérer le cas où N tend vers l'infini.

6 ** 30 min

► Corrigé p. 83

Cône bobiné (d'après ENAC)

On réalise un bobinage en enroulant sur un tronç de cône, jointivement suivant la génératrice, N spires d'un fil de cuivre de diamètre a et de résistivité ρ . Le tronç de cône de sommet S , de demi-angle au sommet α , est caractérisé par les rayons r_1 et $r_2 > r_1$ de ses deux bases.



Chaque spire est repérée par sa cote z qui mesure la distance qui sépare son centre de S . On désigne par r le rayon de la spire située à la cote z

- Exprimer le nombre N de spires qui constituent le bobinage en fonction de r_1 , r_2 , a et α .
- On désigne par dN le nombre de spires dont la cote est comprise entre z et $z + dz$. On considère que ces dN spires ont la même circonférence et qu'elles créent le même champ magnétique. Exprimer dN .
- La résistance R d'un fil de résistivité ρ , de section s et de longueur ℓ est donnée par la relation :

$$R = \frac{\rho \ell}{s}$$

Calculer R pour l'ensemble du cône bobiné.

- Le bobinage est parcouru par un courant I dans le sens représenté sur la figure. On désigne par μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Calculer le champ magnétique \vec{B} créé en S par la totalité du bobinage.

7 *** 30 min

► Corrigé p. 83

Champ d'une hélice (d'après ENS Cachan)

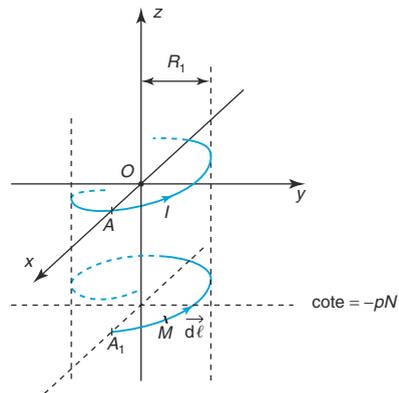
Soit un circuit dont la forme est celle d'une hélice circulaire d'axe (Oz) . Elle est parcourue par un courant I , et comporte $2N$ tours complets. Le pas de l'hélice est noté p et elle est rapportée à un repère (O, x, y, z) .

Son équation paramétrique (paramètre : θ) est :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases}$$

Les spires sont réparties entre la cote $z_1 = -pN$ et la cote $z_2 = +pN$. On recherche la composante du champ magnétostatique $B_z(O)$ suivant l'axe (Oz) au point O (origine) créée par les $2N$ spires de cette hélice.

- Exprimer $dB_z(O)$, composante axiale du champ élémentaire $\vec{dB}(O)$ créé en O par l'élément de courant $\vec{dC} = I \vec{d\ell}$ en fonction de R , θ , μ_0 , I et p .



2. Calculer $B_z(O)$ composante axiale du champ magnétostatique résultant au point O , par l'intégration de l'expression précédente. On pourra faire le changement de variable suivant : $u = \frac{\rho}{2\pi R}\theta$.

Exprimer $B_z(O)$ en fonction de μ_0 , I , ρ , N et R .

3. Si on remarque que la longueur du circuit hélicoïdal est $L = 2\rho N$, montrer que l'expression de

$B_z(O)$ peut se mettre sous la forme : $B_z(O) = B_0 f(R, N, \rho)$ où B_0 est le champ magnétostatique au centre d'un solénoïde de longueur infinie. Préciser $f(R, N, \rho)$.

4. Pour quelle valeur de R peut-on considérer que f est égal à 1 à 10^{-2} près ?

A.N. : $N = 150$; $L = 0,50$ m.

Tester ses connaissances

1 Réponses **c**. Les lignes de champ magnétiques peuvent en effet se couper, il suffit qu'en ce point, le champ soit nul, mais en revanche, les lignes de champ ne peuvent diverger à partir des sources, ce qui impose qu'elles soient fermées (éventuellement à l'infini), on reviendra sur cette propriété au chapitre suivant.

2 Réponse **b**. μ_0 a une dimension, il s'exprime dans le système international en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$.

3 Réponses **a**. et **c**. Le champ magnétique s'exprimerait en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ si μ_0 était sans dimension, ce qui est faux. L'unité du système international est le tesla, mais on utilise parfois le gauss, qui est plus adapté à décrire des champs de l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre. On a $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$.

4 Réponse **b**. Le champ magnétique est contenu dans un plan d'antisymétrie de la distribution qui le crée, et est normal à un plan de symétrie de la distribution qui le crée.

Savoir appliquer le cours

1 Analysons les symétries de la distribution de courant étudiée. L'axe (Oz) est axe de symétrie de révolution de la distribution, par conséquent, on va travailler en coordonnées cylindriques, et le champ magnétique ne peut dépendre de la coordonnée θ .

On a $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z)$.

En un point M de l'axe de révolution, comme tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétostatique en M appartient à l'intersection de ces plans, il est donc

porté par \vec{e}_z : $\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z$.

Comme en outre en un point de l'axe $r = 0$, il reste :

$$\vec{B}(M) = B_z(z) \vec{e}_z$$

1. D'après la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \rightarrow O}}{PO^2}$$

Puisqu'on calcule le champ \vec{B} au centre O de la spire, tous les points de la spire sont situés à la même distance R de O : $r = PO = R$.

On a de plus $\vec{u}_{P \rightarrow O} = -\vec{e}_r$, et $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{e}_\theta$, de telle sorte que $d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{P \rightarrow O} = d\ell \vec{e}_z$.

Par conséquent :

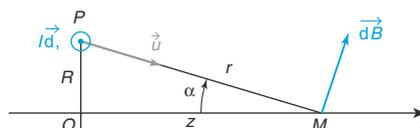
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \left(\oint_{\text{spire}} d\ell \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} (2\pi R) \vec{e}_z$$

On obtient : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$

2. On cherche maintenant le champ en un point de l'axe. D'après l'analyse de symétrie, le champ magnétostatique en un point de l'axe de symétrie de la distribution de courant est porté par celui-ci. Il nous suffit donc de calculer la composante axiale du champ élémentaire dB_z :

$$B_z(z) = \vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z = \left(\int d\vec{B} \right) \cdot \vec{e}_z = \left(\int d\vec{B} \cdot \vec{e}_z \right) = \int dB_z$$

On a $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$, avec $d\vec{\ell}$ et \vec{u} orthogonaux.



Champ d'une spire en un point de son axe

D'après la figure ci-dessus, $(d\vec{B}, \vec{e}_z) = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Par conséquent :

$$d\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \|d\vec{B}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|d\vec{B}\| \sin \alpha$$

On a donc $dB_z = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \sin \alpha$. r et α sont les mêmes pour tous les points de la spire, la sommation ne porte donc que sur $d\ell$, et :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} \left(\int_0^{2\pi R} d\ell \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} 2\pi R \vec{e}_z$$

Comme en outre, $r = \frac{R}{\sin \alpha}$,

il vient $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \vec{B}(O) \sin^3 \alpha$

1. Si la bobine est constituée de N spires accolées et si son épaisseur totale est négligeable devant le rayon des spires, cela veut dire que du point M on voit toutes les spires sous le même angle α et que l'on peut considérer que toutes les spires ont pour centre commun O . D'après le principe de superposition, on a donc en un point de l'axe de la bobine $\vec{B}(M) = N \vec{B}_{1\text{spire}}(M)$.

En appelant $\vec{B}(O)$ le champ créé par la bobine en son centre, il vient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \vec{B}(O) \sin^3 \alpha$$

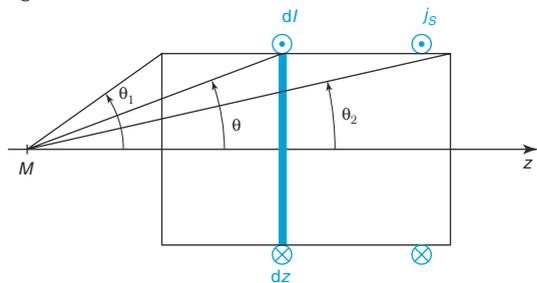
1 Le solénoïde circulaire présente un axe de révolution, ici (Oz) . Le champ en un point de cet axe est donc porté par l'axe, et ne dépend pas de la coordonnée θ (invariance par rotation autour de (Oz)), il est axial : $\vec{B}(M \in (Oz)) = B_z(z) \vec{e}_z$.

1. Pour calculer le champ résultant de cette distribution de courant, on va découper le solénoïde en portions élémentaires, d'épaisseur dz , que l'on va assimiler à une bobine plate (voir figure).

Cette bobine élémentaire est parcourue par un courant $dI = \vec{j}_s \cdot (dz \vec{e}_\theta)$.

Elle crée donc, d'après l'exercice précédent, un champ magnétostatique en M :

$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$, θ étant l'angle sous lequel est vue la bobine élémentaire depuis le point M (voir figure).



Champ d'un solénoïde fini

On a $z = \frac{R}{\tan \theta}$, donc $dz = R \left(\frac{-d\theta}{\sin^2 \theta} \right)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vec{dB}(M) &= \frac{\mu_0 j_s}{2R} \cdot R \left(\frac{-d\theta}{\sin^2 \theta} \right) \sin^3 \theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 j_s}{2} (-\sin \theta) d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 j_s}{2} d(\cos \theta) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Il vient finalement $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_s}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$,

où θ_1 et θ_2 sont les angles sous lesquels les faces d'entrée et de sortie du solénoïde sont vues depuis le point M .

Remarque : le champ du solénoïde est pratiquement uniforme à l'intérieur de celui-ci, et ce d'autant plus que le solénoïde est long.

2. Pour un solénoïde très long, en un point intérieur au solénoïde, l'angle θ_1 sous lequel on voit la face d'entrée tend vers π et l'angle θ_2 sous lequel on voit la face de sortie tend vers 0.

On a donc $B_{\text{int}}(M) = \frac{\mu_0 j_s}{2} (\cos 0 - \cos \pi)$

et $B_{\text{int}}(M) = \mu_0 j_s$

Cette propriété est mise à profit lorsqu'on cherche à créer expérimentalement un champ magnétostatique quasiment uniforme.

3. Le solénoïde est composé de N spires jointives, avec une densité $n = \frac{N}{\ell}$, parcourues par un courant I .

Pour une tranche d'épaisseur dz , il y a donc $dN = n dz$ spires. On peut assimiler cette portion de solénoïde à une bobine plate unique, parcourue par un courant $dI = I dN = n I dz$.

On fait le lien avec la modélisation de la distribution par une nappe surfacique en écrivant que les courants sont équivalents. On a par conséquent $dI = j_s dz = n I dz$, et :

$$j_s = n I$$

On retrouve alors, pour le solénoïde fini un champ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$, et pour le solénoïde infini le résultat classique : $B_{\text{int}}(M) = \mu_0 n I$.

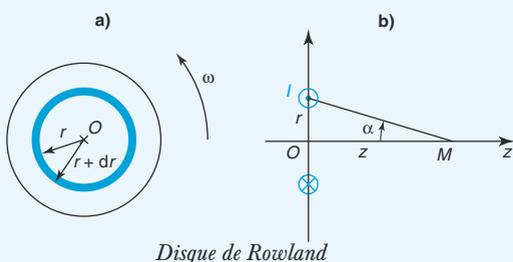
S'entraîner

1. On a déjà calculé le courant équivalent à cette distribution : $\vec{j}_s = \sigma \vec{v} = \sigma \omega r \vec{e}_\theta$

Remarque : se reporter pour le calcul à l'exercice n° 1 de « Savoir résoudre les exercices » du chapitre 7.

2. On décompose le disque en spires élémentaires d'épaisseur dr (figure a). Chaque spire élémentaire est alors parcourue par un courant élémentaire dI donné par le « flux » du vecteur densité de courant surfacique à travers une « section » dr .

On a $dI = \vec{j}_s \cdot d\vec{r} \vec{e}_\theta = \sigma \omega r dr$.



On a déjà calculé le champ d'une spire de courant en un point de son axe : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$, où r est le rayon de la spire considérée et α l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point où l'on calcule le champ (figure b).

On a ici $\tan \alpha = \frac{r}{z}$, donc $r = z \tan \alpha$ et $dr = \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 \sigma \omega r}{2r} \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \frac{\sin \alpha d\alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

On reconnaît que $\sin \alpha d\alpha = -d(\cos \alpha)$, et donc :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) d(\cos \alpha) \vec{e}_z.$$

L'intégration sur r variant de 0 à R se traduit par une intégration sur α variant entre $\alpha_1 = 0$ et α_2 tel que

$$\cos \alpha_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left([\cos \alpha]_0^{\alpha_2} + \left[\frac{1}{\cos \alpha} \right]_0^{\alpha_2} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(\cos \alpha_2 + \frac{1}{\cos \alpha_2} - 2 \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

On a donc, en un point de l'axe (Oz),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} - 2 \right) \vec{e}_z$$

Au point O , on a :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \sqrt{z^2 + R^2} - 2z \right) \vec{e}_z, \text{ avec}$$

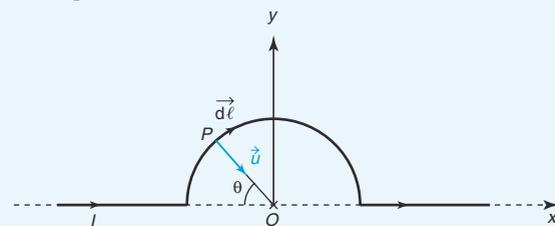
$$z = 0, \text{ donc } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \vec{e}_z$$

2 La distribution de courant proposée ne présente aucune invariance particulière. En revanche, le plan du circuit, c'est-à-dire le plan (xOy), est un plan de symétrie de la distribution. Par conséquent, le champ magnétostatique créé en un point de ce plan, et notamment au point O , est normal au plan de symétrie. Il est donc porté par \vec{e}_z .

On remarque aussi que les deux fils semi-infinis ne participent pas au champ créé au point O . En effet, d'après la loi de Biot et Savart, le champ élémentaire créé en O par une portion élémentaire de courant $I d\vec{\ell}$ centrée sur P est donné par $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$, où $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO}$.

Ici, pour tout point P du fil, $d\vec{\ell}$ et \vec{u} sont colinéaires, donc le champ élémentaire créé est nul.

Il nous reste simplement à calculer le champ créé par la demi-spire.



L'élément de courant peut s'écrire en coordonnées polaires : $d\vec{C} = I d\vec{\ell} = IR d\theta \vec{e}_\theta$.

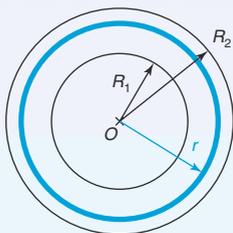
On a également $PO = R$ et $\vec{u} = -\vec{e}_r$.

$$\text{Donc } d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R d\theta \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta \vec{e}_z.$$

Il reste à intégrer pour θ variant de 0 à π :

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta \vec{e}_z \text{ donc } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4R} \vec{e}_z$$

3 On va décomposer cette distribution de courant en couronnes élémentaires d'épaisseur dr :

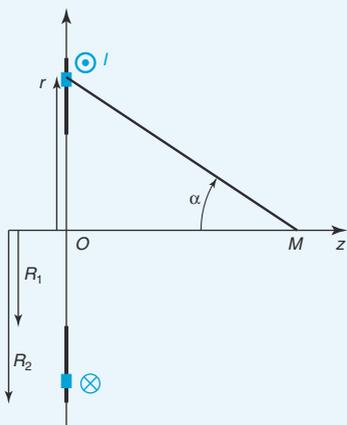


Comme on a N spires réparties uniformément sur un rayon $R_2 - R_1$, la densité linéique de spires est de

$n = \frac{N}{R_2 - R_1}$. Une couronne d'épaisseur dr est donc équivalente à dN spires avec $dN = \frac{N}{R_2 - R_1} dr$.

Une telle couronne élémentaire crée en un point M de l'axe (Oz) de la bobine un champ élémentaire

$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 dNI}{2r} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$, où r est le rayon de la couronne et α l'angle sous lequel elle est vue depuis le point M :



On a $\tan \alpha = \frac{r}{z}$ donc $r = z \tan \alpha$ et $dr = \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \vec{dB}(M) &= \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)} \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{1}{z \tan \alpha} \sin^3 \alpha \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)} \frac{(1 - \cos^2 \alpha) d\alpha}{\cos \alpha} \vec{e}_z \end{aligned}$$

L'intégration se fait pour α variant entre θ_1 et θ_2 .

On obtient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) d\alpha \vec{e}_z.$$

Par conséquent :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)} \left(\ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right| + \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \right) \vec{e}_z$$

4 1. Dans cette première question, les N spires sont jointives, et réparties uniformément selon la coordonnée angulaire θ variant entre 0 et π . La densité angulaire de spires est donc $\frac{N}{\pi}$, et on a $dN = \frac{N}{\pi} d\theta$ spires vues sous l'angle $d\theta$.

On découpe la distribution de courant en couronnes élémentaires vues sous l'angle $d\theta$ depuis le centre de la spire. On cherche à calculer le champ magnétostatique élémentaire créé en O par cette couronne, vue sous l'angle θ depuis O , d'épaisseur angulaire $d\theta$, et de rayon $\rho = R \sin \theta$.

Le champ élémentaire créé en O par cette couronne élémentaire, constituée de dN spires parcourues par un courant I est :

$$\begin{aligned} \vec{dB}(O) &= \frac{\mu_0 dNI}{2\rho} \sin^3 \theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R \sin \theta} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \sin^2 \theta d\theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

Il reste ensuite à intégrer ce champ élémentaire pour θ variant entre 0 et π afin de décrire l'ensemble de la distribution de courant. On remarque en outre que :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$$

L'intégration donne donc :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} \int_0^\pi (1 - \cos(2\theta)) d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} (\pi - 0) \vec{e}_z,$$

$$\text{car } \int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta = 0.$$

On a par conséquent : $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 NI}{4R} \vec{e}_z$

2. Dans cette deuxième question, les N spires sont réparties uniformément suivant le diamètre $2R$ vertical. La densité linéique verticale de spires est donc $\frac{N}{2R}$ et sur une hauteur dz , on a $dN = \frac{N}{2R} |dz|$ spires.

On a $\cos \theta = \frac{z}{R}$ donc $z = R \cos \theta$ et $dz = -R \sin \theta d\theta$.

La tranche d'épaisseur dz est équivalente à dN spires de rayon $\rho = R \sin \theta$, vues depuis le point O sous l'angle θ . Le champ élémentaire qu'elle crée en O est donc :

$$\begin{aligned} \vec{dB}(O) &= \frac{\mu_0 dNI}{2\rho} \sin^3 \theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{4R} \times \frac{1}{R \sin \theta} |-R \sin \theta d\theta| \sin^3 \theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{4R} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

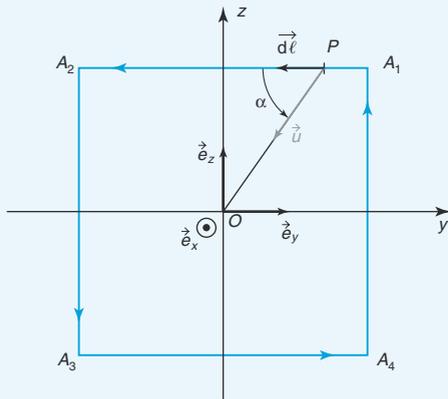
Or $\sin^3 \theta d\theta = (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta)$, donc l'intégration pour θ variant de 0 à π donne :

$$\begin{aligned}\vec{B}(O) &= \frac{\mu_0 N I}{4R} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 N I}{4R} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_0^\pi \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 N I}{4R} \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

On a donc dans ce cas-là $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{3R} \vec{e}_z$

5 1. Le circuit est représenté sur la figure ci-après. Cette distribution de courant est invariante par rotation discrète d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (Ox) . Le plan (yOz) du circuit est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétostatique en un point de ce plan (et notamment en O) lui est donc normal :

$$\vec{B}(O) = B_x(O) \vec{e}_x.$$



On remarque que les 4 côtés du circuit carré vont créer en O le même champ magnétostatique, à cause de l'invariance par rotation discrète d'un quart de tour autour de (Ox) .

D'après le théorème de superposition, on aura donc : $\vec{B}(O) = 4\vec{B}_{A_1A_2}(O)$. On se contente de calculer le champ créé en O par le segment A_1A_2 . On utilise la loi de Biot et Savart : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{u}$.

L'élément de longueur est $d\vec{\ell} = dy\vec{e}_y$. On introduit la variable angulaire $\alpha = \overrightarrow{(A_1A_2, \vec{u})}$, où $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{PO}$.

On a alors $\vec{u} = -\cos\alpha\vec{e}_y - \sin\alpha\vec{e}_z$,

d'où $d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = -dy\sin\alpha\vec{e}_x$.

En outre, $\tan\alpha = \frac{a}{2y}$ donc $y = \frac{a}{2\tan\alpha}$

et $dy = -\frac{a d\alpha}{2\sin^2\alpha}$.

Enfin, $\sin\alpha = \frac{a}{2PO}$ donc $\frac{1}{PO} = \frac{2\sin\alpha}{a}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{d}B_{A_1A_2}(O) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{2\sin\alpha}{a} \right)^2 \frac{a d\alpha}{2\sin^2\alpha} \sin\alpha \vec{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sin\alpha d\alpha \vec{e}_x\end{aligned}$$

L'intégration sur A_1A_2 se traduit par une intégration sur α variant de $\frac{\pi}{4}$ (en A_1) à $\frac{3\pi}{4}$ (en A_2).

On a :

$$\begin{aligned}\vec{B}_{A_1A_2}(O) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d(\cos\alpha) \vec{e}_x \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} \right) \vec{e}_x \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} (-\sqrt{2}) \vec{e}_x\end{aligned}$$

D'après le principe de superposition, on a donc

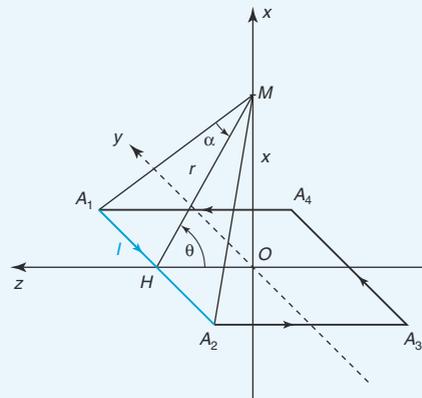
$$\vec{B}(O) = 4\vec{B}_{A_1A_2}(O), \text{ donc } \vec{B}(O) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \vec{e}_x$$

2. On cherche maintenant à calculer le champ magnétique en un point quelconque de l'axe (Ox) (voir figure ci-après). On remarque que les plans (xOy) et (xOz) sont plans d'antisymétrie de la distribution, le champ magnétostatique leur appartient, et donc appartient à leur intersection :

$$\vec{B}(M) = B_x(x) \vec{e}_x.$$

Les quatre côtés du carré ont la même contribution, d'après l'invariance par rotation discrète d'angle $\frac{\pi}{2}$

autour de (Ox) . On calcule $\vec{B}_{A_1A_2}(M)$, et même plus précisément, on se contente de calculer $\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x$, d'après les symétries.

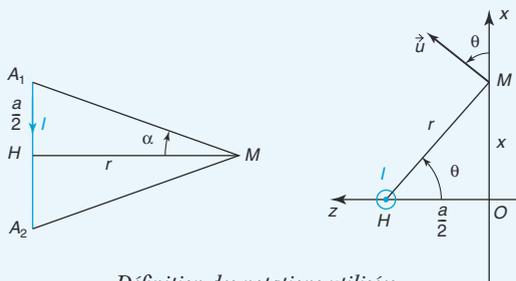


On a vu que pour un segment parcouru par un courant I , le champ magnétique créé s'écrit :

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire, perpendiculaire au plan contenant le segment et le point M , r la distance de M au segment, et α_1 et α_2 les angles algébriques sous lesquels sont vus les points A_1 et A_2 depuis le point M .

Remarque : voir exercice n° 1 de « Savoir résoudre les exercices »

Ici, le point M est situé à égale distance de A_1 et A_2 , donc $\alpha_1 = -\alpha_2$, et $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha \vec{u}$.



Définition des notations utilisées

On a en outre, comme on peut le voir sur la figure

$$\text{ci-dessus : } \sin \alpha = \frac{a}{2A_1M}, \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2},$$

$$A_1M = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2},$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \cos \theta = \frac{a}{2r}.$$

On a par conséquent :

$$\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{a}{2A_1M} \frac{a}{2r}$$

$$\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{8\pi} \frac{1}{\frac{a^2}{4} + x^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}}$$

$$\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{(a^2 + 4x^2)\sqrt{a^2 + 2x^2}}$$

Au total :

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_x = 4(\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4x^2)\sqrt{a^2 + 2x^2}}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4x^2)\sqrt{a^2 + 2x^2}} \vec{e}_x$$

3. On va refaire ce calcul pour un polygone à N côtés. Les symétries de la distribution sont similaires, il existe une invariance par rotation discrète d'angle $\frac{2\pi}{N}$ autour de (Ox) . Le champ en un point de l'axe (Ox) est donc porté par cet axe. Chaque côté du

polygone y contribue de la même façon. On aura $\vec{B}(M) = N(\vec{B}_{A_1A_2} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x$.

On calcule donc d'abord la contribution du seul segment A_1A_2 (voir figure ci-après).

Comme dans la question précédente, on utilise le champ magnétique créé par un segment :

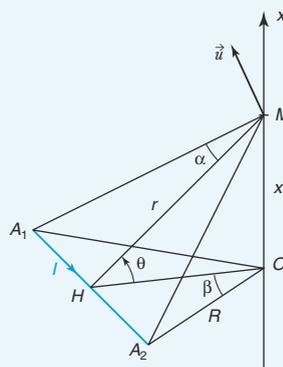
$$\vec{B}_{A_1A_2} \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha \cos \theta.$$

On a ici $\sin \alpha = \frac{A_1A_2}{2A_1M}$, avec $A_1M^2 = R^2 + x^2$,

et $A_1A_2 = 2R \sin \beta$, où $\beta = \frac{\pi}{N}$.

D'autre part, $\cos \theta = \frac{HO}{r}$, avec :

$$HO = R \cos \beta = R \cos \frac{\pi}{N}, \quad \text{et } r = \sqrt{R^2 \cos^2 \frac{\pi}{N} + x^2}.$$



Par conséquent, on obtient :

$$\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R \sin \frac{\pi}{N}}{\sqrt{R^2 + x^2}} \frac{R \cos \frac{\pi}{N}}{x^2 + R^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}}$$

$$\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R^2 \sin \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi}{N}}{\left(x^2 + R^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}\right) \sqrt{R^2 + x^2}}$$

Pour l'ensemble du circuit, on trouve :

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_x = N(\vec{B}_{A_1A_2}(M) \cdot \vec{e}_x), \quad \text{donc :}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \frac{R^2 \sin \frac{\pi}{N} \cos \frac{\pi}{N}}{\left(x^2 + R^2 \cos^2 \frac{\pi}{N}\right) \sqrt{R^2 + x^2}} \vec{e}_x$$

Lorsque N tend vers l'infini, $\sin \frac{\pi}{N} \rightarrow \frac{\pi}{N}$ et $\cos \frac{\pi}{N} \rightarrow 1$, donc :

$$\vec{B}(M) \rightarrow \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \frac{R^2 \frac{\pi}{N}}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

On trouve donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)^3 \vec{e}_x$.

On reconnaît le champ créé en un point de son axe par une spire de courant de centre O et de rayon R , parcourue par un courant I , vue sous l'angle φ depuis M , avec $\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, On pouvait s'y attendre, puisqu'un polygone régulier tend vers un cercle lorsque le nombre de ses côtés tend vers l'infini.

6 1. Notons L la longueur de la génératrice, le nombre de spires bobinées sur le cône est $N = \frac{L}{a}$ puisque le diamètre du fil utilisé est a . Or on a $\sin \alpha = \frac{r_2 - r_1}{L}$,

d'où $N = \frac{r_2 - r_1}{a \sin \alpha}$

2. Une hauteur dz correspond à une longueur dL le long de la génératrice, avec $\cos \alpha = \frac{dz}{dL}$.

La longueur dL contient $dN = \frac{N}{L} dL$ spires donc on a :

$$dN = \frac{1}{a \cos \alpha} dz.$$

On a donc $dN = \frac{dz}{a \cos \alpha} = \frac{dr}{a \sin \alpha}$, car $\tan \alpha = \frac{dr}{dz}$.

3. Le fil a pour diamètre a et donc pour section $s = \frac{\pi a^2}{4}$. La résistance élémentaire des dN spires de rayon r , et donc de périmètre $2\pi r$ est par conséquent donnée par $dR = dN \rho \frac{\ell}{s} = \rho \frac{dr}{a \sin \alpha} \frac{8\pi r}{\pi a^2}$. La résistance totale pour l'ensemble du bobinage est donc :

$$R = \int_{r_1}^{r_2} dR = \frac{8\rho}{a^3 \sin \alpha} \int_{r_1}^{r_2} r dr.$$

On obtient : $R = \frac{4\rho}{a^3 \sin \alpha} (r_2^2 - r_1^2)$

4. Une tranche élémentaire de cône d'épaisseur dz , constitué de dN spires de rayon r , parcourues par un courant I , crée au sommet du cône un champ élémentaire $\vec{dB}(S) = \frac{\mu_0 dNI}{2r} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$, où α est l'angle sous lequel est vue la spire depuis le point S .

Toutes les spires sont vues sous le même angle, le demi-angle au sommet du cône, l'intégration se fait donc simplement :

$$\vec{B}(S) = \int \vec{dB}(S) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2r} \frac{dr}{a \sin \alpha} \sin^3 \alpha \vec{e}_z.$$

Le champ créé au sommet du cône par ce bobinage est

donc $\vec{B}(S) = \frac{\mu_0 I \sin^2 \alpha}{2a} \ln \frac{r_2 \vec{e}_z}{r_1 \vec{e}_z}$

7 L'hélice finie ne présente pas d'invariance particulière, ni de symétrie intéressante du point de vue du calcul du champ magnétostatique en O . On se contente donc du calcul direct.

1. D'après l'expression de la loi de Biot et Savart,

on a $\vec{dB}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^2} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{PO}}{PO}$.

On travaille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{OP} = R\vec{e}_r + \frac{\rho\theta}{2\pi}\vec{e}_z, \text{ donc } \|\vec{PO}\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\rho\theta}{2\pi}\right)^2}.$$

Attention le vecteur \vec{e}_r voit sa direction varier lorsque l'on parcourt l'hélice : $d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta$.

$$d\vec{\ell} = R d\theta \vec{e}_\theta + \frac{\rho d\theta}{2\pi} \vec{e}_z \text{ et } \frac{\vec{PO}}{PO} = \frac{1}{PO} \left(-R\vec{e}_r - \frac{\rho\theta}{2\pi} \vec{e}_z \right).$$

On a donc :

$$d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{PO}}{PO} = \frac{1}{PO} \left(R^2 d\theta \vec{e}_z - \frac{R\rho\theta d\theta}{2\pi} \vec{e}_r - \frac{R\rho d\theta}{2\pi} \vec{e}_\theta \right).$$

On s'intéresse uniquement à la composante axiale du champ créé en O , soit $dB_z(O)$.

On a alors $dB_z(O) = \vec{dB}(O) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PO^3} R^2 d\theta$.

Par conséquent :

$$dB_z(O) = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \left(R^2 + \left(\frac{\rho\theta}{2\pi} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} d\theta$$

2. On pose $u = \frac{\rho\theta}{2\pi R}$. On en déduit $du = \frac{\rho d\theta}{2\pi R}$.

Exprimons $dB_z(O)$ en fonction de u . On a :

$$\begin{aligned} dB_z(O) &= \frac{\mu_0 I R^2 d\theta}{4\pi \left(R^2 + \left(\frac{\rho\theta}{2\pi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2 \frac{2\pi R du}{\rho}}{4\pi R^3 \left(1 + \left(\frac{\rho\theta}{2\pi R} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\rho} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Il reste à intégrer cette expression. On remarque que

$$\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ est une primitive de } \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right)' &= u \left(-\frac{1}{2} \frac{2u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-u^2 + (1+u^2)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

On a donc $dB_z(O) = \frac{\mu_0 I}{2p} d \left[\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$.

L'intégration se fait pour z variant entre

$z_1 = \frac{p\theta_1}{2\pi} = -pN$ et $z_2 = \frac{p\theta_2}{2\pi} = +pN$, donc pour θ variant entre $\theta_1 = -2\pi N$ et $\theta_2 = +2\pi N$, soit pour u variant entre $u_1 = \frac{p\theta_1}{2\pi R} = -\frac{pN}{R}$ et $u_2 = \frac{p\theta_2}{2\pi R} = +\frac{pN}{R}$.

$$\begin{aligned} B_z(O) &= \frac{\mu_0 I}{2p} \int_{u_1}^{u_2} d \left[\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2p} \left[\frac{\frac{pN}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{pN}{R}\right)^2}} - \frac{\left(-\frac{pN}{R}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{pN}{R}\right)^2}} \right] \end{aligned}$$

Il vient :

$$B_z(O) = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{R^2 + (pN)^2}}$$

3. La longueur de l'hélice est $L = 2pN$ et elle comporte au total $2N$ spires. La densité linéique de spires associée à cette distribution est donc $n = \frac{2N}{L} = \frac{1}{p}$. Le champ magnétostatique créé en un point intérieur

par un solénoïde infini parcouru par un courant I est $B_0 = \mu_0 n I$ où n est le nombre de spires par unité de longueur.

Pour la distribution étudiée ici, on a donc $B_0 = \frac{\mu_0 I}{p}$, et la composante axiale du champ créé par l'hélice au point O est $B_z(O) = B_0 \frac{pN}{\sqrt{R^2 + (pN)^2}}$.

On reconnaît la forme demandée :

$$B_z(O) = B_0 f(R, N, p) \text{ avec :}$$

$$f(R, N, p) = \left[1 + \left(\frac{R}{pN} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

4. Si R est suffisamment petit ($R \ll pN$) alors, on peut effectuer un développement limité de la fonction f au voisinage de zéro :

$$f(R, N, p) = \left[1 + \left(\frac{R}{pN} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{pN} \right)^2.$$

On aura donc $f = 1$ à 10^{-2} près si $\frac{1}{2} \left(\frac{R}{pN} \right)^2 = \frac{1}{100}$

soit $R = \frac{pN\sqrt{2}}{10}$.

Or $L = 2pN$ donc la valeur maximale de R à choisir pour que $f = 1$ est $R = \frac{L}{10\sqrt{2}}$

L'application numérique donne $R = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Remarque : le champ créé en O par l'hélice a alors une composante axiale égale à celle créée par un solénoïde infini. Cependant, le champ magnétostatique de l'hélice présente en plus des composantes radiale et orthoradiale, qui sont nulles dans le cas du solénoïde infini du fait de la symétrie cylindrique.

9 – Théorème d'Ampère

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 89

1 Considérons un tube de champ magnétostatique, tel que le champ soit uniforme sur une section droite du tube. Considérons deux sections s et $S > s$ de ce tube. Que peut-on dire de la norme $B(s)$ du champ sur la section s et de la norme $B(S)$ du champ sur la section S ?

- a. $B(s) < B(S)$.
 b. $B(s) = B(S)$.
 c. $B(s) > B(S)$.

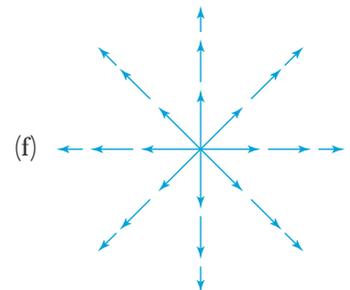
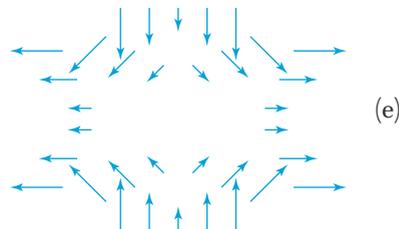
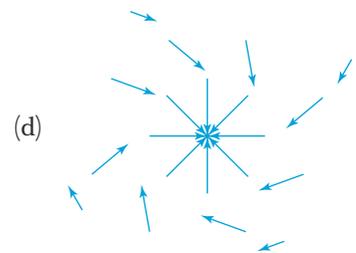
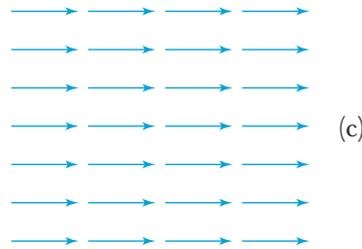
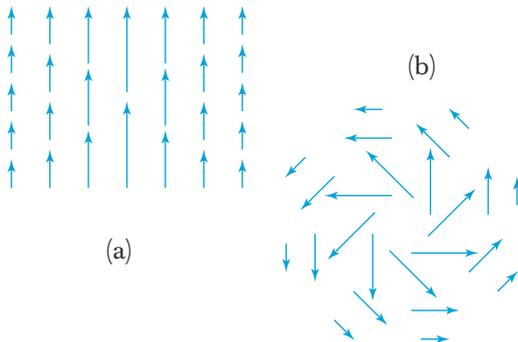
2 Le théorème d'Ampère n'est valable que si :

- a. le contour d'Ampère enlace des courants de la distribution.
 b. le contour d'Ampère est fermé.
 c. le contour d'Ampère présente les symétries de la distribution de courant.

3 Le théorème d'Ampère est au calcul de champ magnétostatique ce que le théorème de Gauss est au calcul de champ électrostatique.

- a. Vrai.
 b. Faux.

4 On considère les cartes de lignes de champ suivantes, quelles sont celles qui peuvent représenter des lignes de champ magnétostatique ?



- a. Il s'agit des cartes (a), (b), (d) et (f).
 b. Il s'agit des cartes (a), (b), (c) et (e).
 c. Il s'agit des cartes (a), (c), (d) et (e).
 d. Il s'agit des cartes (a), (c), (e) et (f).

- 1** On considère un fil infini, d'axe (Oz) , parcouru par un courant I . Calculer le champ magnétostatique créé par cette distribution en appliquant le théorème d'Ampère.
- 2** Soit une spire de courant de centre O , d'axe (Oz) , de rayon R , parcourue par un courant I . Calculer la circulation du champ magnétostatique créé par cette spire, le long de l'axe (Oz) (pour z variant de $-\infty$ à $+\infty$).
- 3** Tracer l'allure, dans le plan (xOy) des lignes du champ magnétostatique créé par les distributions suivantes :
- Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz) , distants de d , parcourus par des courants de même intensité I et de même sens.
 - Deux fils infinis parallèles d'axe (Oz) , distants de d , parcourus par des courants de même intensité I mais de sens opposés.
 - Trois fils infinis parallèles d'axe (Oz) , placés au sommet d'un triangle équilatéral, parcourus par des courants de même sens et intensité.
- 4** Le plan infini (xOy) est supposé parcouru par un courant électrique constant de densité surfacique $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_y$. Soit M un point de cote z
- Donner, en la justifiant, l'expression vectorielle du champ magnétique \vec{B} en M .
 - Montrer que ce champ présente une discontinuité à la traversée du plan et vérifier que cette discontinuité peut s'écrire :

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z.$$

1 * 20 min

► Corrigé p. 91

Conducteur métallique uniformément chargé en volume

On considère un cylindre infini, d'axe (Oz) , de rayon R , uniformément chargé en volume, avec la densité volumique $\rho > 0$. Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe, à la vitesse angulaire constante ω .

1. Exprimer le vecteur densité volumique de courant \vec{j} de cette distribution.
2. Déterminer le champ magnétostatique créé en un point de l'axe (Oz) par cette distribution de courants. On pourra découper la distribution en cylindres élémentaires, compris entre r et $r + dr$, assimilés à des solénoïdes.
3. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.

2 ** 15 min

► Corrigé p. 92

Bobine torique carrée

Soit un circuit torique, comprenant N spires enroulées jointivement sur un tore d'axe (Oz) à section carrée, de côté a . Le rayon moyen du tore est noté R . Chaque spire est parcourue par un courant d'intensité I .

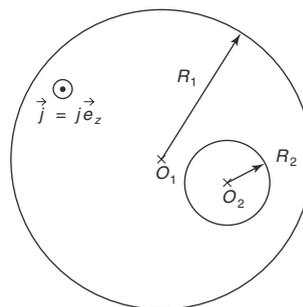
1. Calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.
2. Calculer le flux de \vec{B} à travers la bobine torique.

3 ** 15 min

► Corrigé p. 93

Cavité cylindrique

Considérons un cylindre conducteur d'axe (O_1z) , et de rayon R_1 , parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j\vec{e}_z$. On perce ce cylindre d'une cavité d'axe (O_2z) , et de rayon R_2 , et on suppose que la distribution volumique de courant en dehors de la cavité reste inchangée.



Déterminer le champ magnétostatique en tout point de la cavité.

4 ** 30 min

► Corrigé p. 93

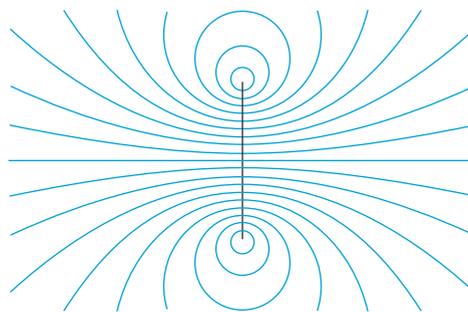
Champ au voisinage de l'axe d'une spire (d'après ENSTIM)

On s'intéresse au champ créé par une spire de rayon R , parcourue par un courant I , en un point proche de son axe (Oz) . On utilise les coordonnées cylindriques : $M(r, \theta, z)$.

On rappelle l'expression du champ magnétostatique en un point $P(0, 0, z)$ de l'axe :

$$\vec{B}(P) = B(0, z)\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

1. Montrer, par des arguments de symétrie très précis, qu'en M , \vec{B} n'a pas de composante orthoradiale B_θ . Montrer que la norme de \vec{B} ne dépend que de r et z .
2. Compléter la carte de champ suivante en précisant le sens du courant et en indiquant le sens des lignes de champ.



3. Calculer le flux de \vec{B} à travers une surface fermée cylindrique d'axe (Oz) , de rayon r faible, comprise entre z et $z + dz$.

En déduire que $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB(0, z)}{dz}$.

4. Calculer la circulation de \vec{B} sur un contour rectangulaire passant par $M(r, \theta, z)$, de hauteur dz et de largeur dr .

En déduire que $B_z(r, z) = B(0, z) - \frac{r^2}{4} \times \frac{d^2B(0, z)}{dz^2}$.

5

**

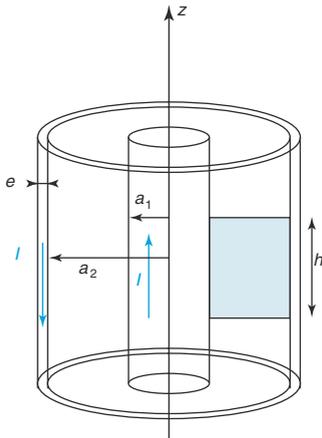
30 min

► Corrigé p. 95

Câble coaxial (d'après CCP)

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de même axe (Oz) :

- l'âme \mathcal{C}_1 est un cylindre conducteur de rayon a_1 ;
- l'armature externe, ou gaine est un cylindre de rayon intérieur a_2 et d'épaisseur $e \ll a_2$;
- le volume entre l'âme et la gaine est rempli par un matériau isolant.



Ce câble est utilisé dans un circuit électrique : l'âme est alors parcourue par un courant I réparti uniformément dans son volume, tandis que la gaine est parcourue par un courant $-I$ réparti sur sa surface (l'épaisseur de la gaine étant négligée).

1. Donner les vecteurs courants dans l'âme et la gaine.

2. Calculer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette répartition de courants. Représenter la norme de \vec{B} .

3. On considère la surface verticale de hauteur h , découpée dans l'isolant ($a_1 < r < a_2$), représentée sur la figure ci-contre. Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers cette surface.

4. On appelle coefficient d'auto-induction la quantité $L = \frac{\Phi}{I}$. Exprimer L , ainsi que Λ le coefficient d'auto-induction par unité de longueur.

5. On peut montrer que la capacité par unité de longueur Γ de ce câble coaxial est donnée par

$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$. En déduire que le produit $\Gamma\Lambda$ est constant.

Tester ses connaissances

1 Réponse c. Le flux de \vec{B} est conservatif, donc $\varphi = B(s)s = \Phi = B(S)S$, il en résulte que $B(s) > B(S)$. C'est le phénomène de canalisation du flux magnétique, qui est mis à profit dans les solénoïdes, ou encore dans certains accélérateurs de particules.

2 Réponse b. Le contour doit être fermé pour qu'on puisse appliquer le théorème d'Ampère. En revanche, il n'est pas nécessaire qu'il entoure une partie de la distribution de courant, ni qu'il en possède les symétries. Cela étant, pour que son application conduise à un résultat intéressant, on choisit toujours un contour qui respecte ces symétries.

3 Réponse a. C'est vrai. Le flux de \vec{E} n'est pas conservatif en présence de sources, et est lié à ces dernières par le théorème de Gauss. De la même façon, la circulation de \vec{B} n'est pas conservative en présence de sources, et est liée à ces dernières par le théorème d'Ampère.

4 Réponse b. Sur les cartes (d) et (f), les lignes de champ convergent (ou divergent) vers un point. Le flux d'un tel champ à travers une sphère (surface fermée) centrée sur ce point est donc non nul, ce qui est contraire à la propriété fondamentale de conservativité du flux magnétostatique.

Savoir appliquer le cours

1 On commence par analyser les symétries. On se place en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z.$$

La distribution est invariante par toute translation selon (Oz) et par toute rotation autour de (Oz) . Par conséquent, le champ magnétostatique qu'elle crée est indépendant des coordonnées θ et z .

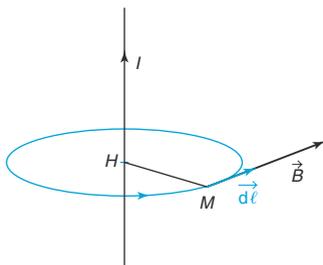
Le plan contenant M et (Oz) est plan de symétrie de la distribution, le champ magnétostatique lui est donc normal, il est porté par \vec{e}_θ .

On a donc $\vec{B}(r, \theta, z) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$.

On choisit ensuite le contour d'Ampère. On choisit la ligne de champ passant par M . Il s'agit d'un cercle de centre H , projeté orthogonal de M sur (Oz) , contour sur lequel le déplacement élémentaire s'écrit :

$$\vec{dl} = r d\theta \vec{e}_\theta.$$

On a donc $\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 2\pi r B_\theta(r)$.



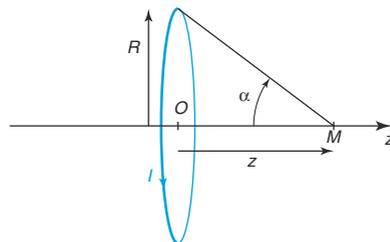
On applique enfin le théorème d'Ampère, le contour choisi enlaçant une unique fois le fil parcouru par l'intensité I , dans le sens direct : $\mathcal{C} = \mu_0 I = 2\pi r B_\theta(r)$.

Par conséquent :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Remarque : On retrouve le résultat qu'on avait obtenu au chapitre précédent grâce à la loi de Biot Savart pour le champ d'un segment de courant, dont on fait tendre la longueur vers l'infini.

2 Le champ créé par une spire de courant en un point de son axe est donné par $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$, où α est l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M de l'axe (on se reportera au chapitre précédent pour l'établissement de cette expression). Le schéma du circuit est représenté sur la figure suivante.



La circulation du champ magnétostatique le long de l'axe (Oz) s'écrit :

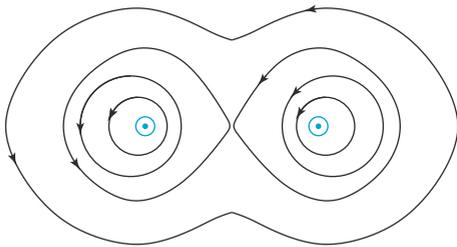
$$\mathcal{C} = \int_{(Oz)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(z) dz.$$

Or z et α sont liés par la relation $z = \frac{R}{\tan \alpha}$, donc $dz = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$. Et lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$, α varie de π à 0 . On a par conséquent :

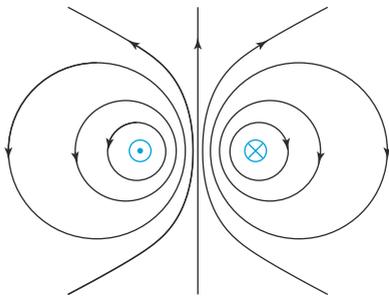
$$\mathcal{C} = -\int_{\pi}^0 \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \times \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2R} [\cos \alpha]_0^{\pi} = \mu_0 I.$$

$$\mathcal{C} = \mu_0 I$$

3 1. Dans le cas de deux fils infinis parallèles, les champs magnétiques sont de sens opposés entre les deux fils, ce qui conduit à l'apparition d'un point de champ nul, à la distance $\frac{d}{2}$ des deux fils. La carte de champ est représentée sur la figure suivante.

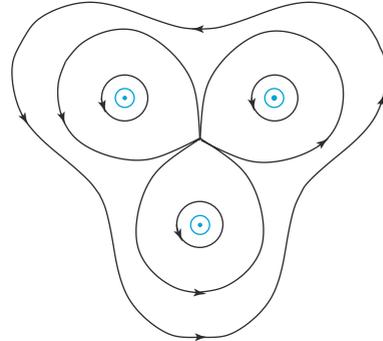


2. Lorsque les deux fils sont parcourus par des intensités opposées, les champs magnétostatiques créés dans l'espace entre les deux fils sont de même sens, ce qui conduit à la carte de champ représentée sur la figure suivante.



3. La distribution de courant est invariante par rotation discrète d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe (Gz) , où G est le centre du triangle équilatéral. Là encore, les intensités étant de même sens, on voit apparaître en G

un point de champ nul (figure ci-dessous). Plus généralement, par invariance par translation d'axe (Oz) , le champ magnétostatique est nul sur l'axe (Gz) .



4 1. On se place en coordonnées cartésiennes :

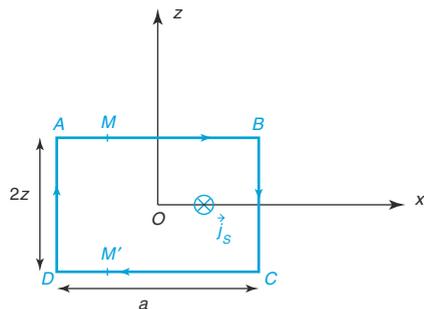
$$\vec{B}(x, y, z) = B_x(x, y, z)\vec{e}_x + B_y(x, y, z)\vec{e}_y + B_z(x, y, z)\vec{e}_z.$$

La distribution est invariante par toute translation parallèlement à (Ox) ou (Oy) , donc le champ magnétostatique est indépendant des coordonnées x et y .

Le plan contenant $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique en ce point lui est normal : on a pour finir $\vec{B}(M) = B_x(z)\vec{e}_x$.

De plus, d'après les règles d'orientation du champ magnétostatique, il est dirigé suivant $+\vec{e}_x$ pour $z > 0$ et suivant $-\vec{e}_x$ pour $z < 0$.

Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit une ligne de champ passant par M , et donc parallèle à (Ox) . Comme elle n'est pas fermée, on prend un segment AB de longueur arbitraire a auquel on adjoint, pour refermer le contour, deux segments BC et DA parallèles à (Oz) sur lesquels la circulation est nulle, et un segment CD passant par le symétrique $M'(x, y, -z)$ de $M(x, y, z)$.



Les contributions non nulles apportées par les deux segments passant par M et M' sont identiques : on a $\vec{d\ell}' = dx(-\vec{e}_x) = -dx\vec{e}_x = -\vec{d\ell}$ et

$B_x(z') = B_x(-z) = -B_x(z)$, et par conséquent

$$\vec{B}(z') \cdot \vec{d\ell}' = -\vec{B}(z) \cdot (-\vec{d\ell}) = \vec{B}(z) \cdot \vec{d\ell} = B(z) d\ell.$$

La circulation totale sur le contour est :

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCD} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = 2 \int_{AB} B_x(z) dx = 2aB_x(z).$$

L'intensité enlacée par ce contour est :

$$I_{\text{enlacée}} = \int \vec{j}_S \cdot (dx \vec{e}_y) = a j_s.$$

L'application du théorème d'Ampère conduit donc à

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = 2aB_x(z).$$

On en déduit :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

2. On observe une discontinuité du champ magnétostatique à la traversée de la surface de courant, valant :

$$\Delta \vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 j_s \vec{e}_x.$$

On reconnaît, puisque $\vec{j}_S = j_s \vec{e}_y$ et $\vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z$ l'expression générale d'une telle discontinuité :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_z \quad \text{où } \vec{n} = \vec{e}_z \text{ est la normale à la surface de courant.}$$

S'entraîner

1. Chaque point $P(r, \theta, z)$ du cylindre conducteur est en mouvement circulaire uniforme de vitesse $\vec{v}(P) = r\omega \vec{e}_\theta$. Il porte la densité volumique locale de charge ρ ; le vecteur densité volumique de courant est donc $\vec{j}(P) = \rho \vec{v}$ donc $\vec{j} = \rho \omega r \vec{e}_\theta$. Le courant de convection créé est orthoradial.

2. Comme l'énoncé nous invite à le faire, on découpe cette distribution volumique de courant en solénoïdes élémentaires de rayon r et d'épaisseur dr . On décrit ce solénoïde comme une nappe de courants surfaciques élémentaires orthoradiaux : $d\vec{j}_s = dj_s \vec{e}_\theta$. Il reste à faire l'équivalence entre ces deux densités (volumique et surfacique) de courant.

Pour déterminer l'intensité dI portée par la tranche d'épaisseur dr , dans la description volumique, il faut calculer le flux du vecteur densité volumique de courant \vec{j} à travers une surface rectangulaire de largeur dr et de longueur h arbitraire. Le vecteur normal à cette surface est \vec{e}_θ , donc $dI = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{n} = j \times h dr$.

Dans la description surfacique, pour trouver l'intensité dI portée par une longueur h arbitraire de solénoïde, il faut calculer le « flux » du vecteur densité surfacique de courant élémentaire $d\vec{j}_s$ à travers un segment de longueur h . Le vecteur normal à cette courbe étant là aussi \vec{e}_θ . Par conséquent $dI = \int d\vec{j}_s \cdot (d\ell \vec{n}) = dj_s \times h$.

Les deux distributions seront équivalentes si $dj_s = j dr$

On a vu qu'un solénoïde, décrit comme une nappe de courants surfaciques orthoradiaux ($j_s \vec{e}_\theta$) crée en un point de son axe un champ magnétostatique $\vec{B} = \mu_0 j_s \vec{e}_z$.

La tranche élémentaire d'épaisseur dr crée par conséquent un champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \mu_0 dj_s \vec{e}_z = \mu_0 j dr \vec{e}_z \quad \text{avec } j = \rho \omega r.$$

Il reste à intégrer cette expression pour r variant de 0 à R :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} = \int_0^R \mu_0 \rho \omega r dr \vec{e}_z = \mu_0 \rho \omega \int_0^R r dr \vec{e}_z \\ &= \mu_0 \rho \omega \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \vec{e}_z \end{aligned}$$

On obtient en un point de l'axe (Oz) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{2} \vec{e}_z$$

3. On commence par analyser les invariances et symétries de la distribution : la distribution de courant est invariante par toute translation suivant (Oz) et par toute rotation d'axe (Oz). Le champ magnétostatique au point $M(r, \theta, z)$ ne dépend donc que de la variable r .

Le plan contenant M et perpendiculaire à (Oz) (plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$) est un plan de symétrie de la distribution, le champ magnétostatique lui est donc normal, il est porté par \vec{e}_z :

$$\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z$$

On applique le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire, de longueur h arbitraire suivant \vec{e}_z , et de largeur r , afin de calculer le champ magnétostatique au point $M(r, \theta, z)$.

Sur les deux portions du contour perpendiculaires à (Oz) , la circulation du champ magnétostatique est nulle, puisque le champ est normal au déplacement élémentaire.

Sur le segment confondu avec l'axe $\vec{d\ell} = dz\vec{e}_z$ alors que sur le segment passant par M , on a $\vec{d\ell} = -dz\vec{e}_z$.

La circulation de \vec{B} sur ce contour fermé est donc : $\mathcal{C} = B(0)h + 0 - B(r)h + 0$.

Si $r < R$, le point M_i est intérieur au cylindre, de même que le contour ; l'intensité enlacée est le flux du vecteur densité volumique de courant à travers la surface rectangulaire s'appuyant sur le contour. On a $\vec{dS} = drdz\vec{e}_\theta$ et

$$\text{donc } I_{\text{enlacée}} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho\omega h \int_0^r r' dr' = \rho\omega h \frac{r^2}{2}.$$

L'application du théorème d'Ampère donne par conséquent $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = B(0)h - B(r)h = \mu_0 \rho\omega h \frac{r^2}{2}$.

On en déduit $\vec{B}(M_i) = \left(B(0) - \mu_0 \rho\omega \frac{r^2}{2} \right) \vec{e}_z$, avec

$$B(0) = \frac{\mu_0 \rho\omega R^2}{2}, \text{ et par conséquent :}$$

$$\vec{B}(M_i) = \frac{\mu_0 \rho\omega}{2} (R^2 - r^2) \vec{e}_z$$

Si $r > R$, le point M_e est extérieur au cylindre, l'intensité totale enlacée est :

$$I_{\text{enlacée}} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho\omega h \int_0^R r' dr' = \rho\omega h \frac{R^2}{2},$$

car au-delà de $r = R$, le vecteur densité volumique de courant est nul.

L'application du théorème d'Ampère conduit à :

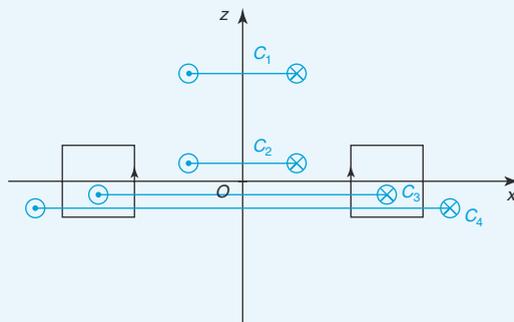
$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = B(0)h - B(r)h = \mu_0 \rho\omega h \frac{R^2}{2}, \text{ avec}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 \rho\omega R^2}{2} \text{ et donc :}$$

$$\vec{B}(M_e) = \vec{0}$$

On retrouve, comme pour un solénoïde infini, un champ magnétostatique nul à l'extérieur.

le vecteur champ magnétique lui est donc perpendiculaire, il est porté par \vec{e}_θ : $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$



On choisit comme contour d'Ampère la ligne de champ magnétostatique passant par M . Il s'agit de la courbe colinéaire à \vec{e}_θ , sur laquelle r et z sont constants. C'est donc un cercle d'axe (Oz) , et de rayon r . La circulation de \vec{B} sur ce contour est :

$$\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot (rd\theta) \vec{e}_\theta = B(r, z) \times 2\pi r.$$

La figure suivante représente les différents contours d'Ampère utilisés par la suite.

Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut calculer l'intensité enlacée par le contour. Pour cela, il convient de distinguer deux cas selon la valeur de z :

- Si $|z| > a$, alors le contour d'Ampère (C_1) n'enlace aucune intensité, il est au-dessus du tore. Le théorème d'Ampère donne donc :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = 0 = 2\pi r B(r, z)$$

et par conséquent $\vec{B} = \vec{0}$ si $|z| > a$

- Si $|z| < a$, alors il faut distinguer à nouveaux plusieurs cas, selon la valeur de r :

- Si $r < R - a$, alors le contour d'Ampère (C_2) n'enlace toujours aucune intensité, et on a encore $\vec{B} = \vec{0}$ si $r < R - a$.

- Si $R - a < r < R + a$, le point M est à l'intérieur du tore, et le contour d'Ampère (C_3) enlance les intensités montantes de la paroi intérieure du tore. L'intensité totale enlacée par le contour est alors $I_{\text{enlacée}} = NI$, et l'application du théorème d'Ampère donne :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = \mu_0 NI = 2\pi r B(r, z),$$

et par conséquent :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ si } R - a < r < R + a$$



2.1. Le circuit est invariant par toute rotation d'axe (Oz) . Le champ magnétostatique ne dépend donc pas de la coordonnée cylindrique θ . Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant,

- Si $r > R + a$, le point M est à l'extérieur du tore, le contour d'Ampère (C_4) enlace les intensités montantes de la paroi intérieure du tore ainsi que les intensités descendantes de sa partie extérieure. L'intensité enlacée est donc $I_{\text{enlacée}} = NI - NI = 0$, et l'application du théorème d'Ampère conduit à

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{si } r > R + a$$

Remarque : la seule région de l'espace pour laquelle le champ magnétostatique n'est pas nul est l'intérieur du tore, les lignes de champ magnétostatique sont parfaitement canalisées.

2. Le flux de \vec{B} à travers le tore est le flux du vecteur \vec{B} à travers la section carrée du tore, dont l'élément de surface est $dS = dr dz$, avec r variant de $R - \frac{a}{2}$ à $R + \frac{a}{2}$ et z variant de $-\frac{a}{2}$ à $+\frac{a}{2}$.

$$\Phi = \iint_{\text{section}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dr dz$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \left(\int_{z=-\frac{a}{2}}^{z=\frac{a}{2}} dz \right) \times \left(\int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{dr}{r} \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \times a \times [\ln r]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}}$$

On obtient par conséquent :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \right)$$

3 Cette distribution de courant est la superposition de deux distributions cylindriques, l'une d'axe (O_1z), de rayon R_1 et de vecteur densité volumique de courant $\vec{j}_1 = +j\vec{e}_z$, et la deuxième d'axe (O_2z), de rayon R_2 et de vecteur densité volumique de courant $\vec{j}_2 = -j\vec{e}_z$. D'après le théorème de superposition, le champ magnétostatique total $\vec{B}_T(M)$ créé en M par la réunion des deux cylindres est la somme des champs $\vec{B}_1(M)$ et $\vec{B}_2(M)$ créés en M respectivement par les deux cylindres.

On cherche à calculer le champ magnétostatique en un point de la cavité, ce point est intérieur aux deux cylindres.

On a calculé dans le premier exercice de la rubrique « Savoir résoudre les exercices » le champ créé par une distribution cylindrique de courants volumiques axiaux $\vec{j} = j\vec{e}_z$. Pour un point intérieur au cylindre, il s'écrit :

$\vec{B}(M_i) = \frac{\mu_0 j}{2} r \vec{e}_\theta$, avec $r = OM$, et \vec{e}_θ le vecteur orthoradial pour les coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Il faut l'exprimer de façon intrinsèque, on a :

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_z \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Donc on trouve pour le champ créé par le premier cylindre en un point intérieur, $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 j}{2} O_1M \vec{e}_z \wedge \frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}$,

$$\text{soit } \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

et pour le champ créé par le deuxième cylindre, toujours pour un point intérieur, on trouve

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 (-j)}{2} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Le champ total est donc :

$$\vec{B}_T(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{e}_z \wedge (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M})$$

On obtient finalement :

$$\vec{B}_T(M) = \frac{\mu_0 j}{2} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$$

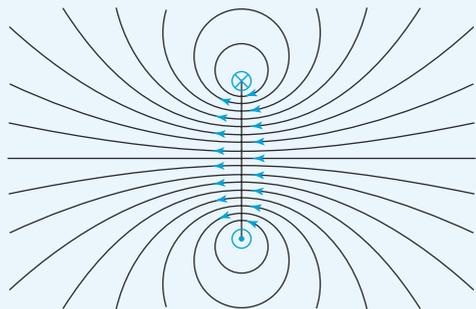
Le champ magnétostatique est uniforme dans la cavité.

4 1. La distribution est invariante par toute rotation autour de (Oz), donc le champ magnétostatique est indépendant de la coordonnée θ . Le plan (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z), passant par M et contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie de la distribution ; le champ magnétostatique en M lui appartient. On en déduit que :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

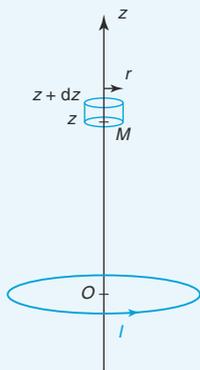
Le champ n'a pas de composante orthoradiale. On va chercher par les questions suivantes à déterminer les composantes radiale et axiale du champ en un point proche de l'axe (Oz).

2. On choisit d'abord l'orientation du courant dans la spire. L'orientation des lignes de champ nous est alors donnée par la règle du « tire-bouchon » ou de la main droite.



3. Le flux de \vec{B} à travers la surface fermée du cylindre (représenté sur la figure ci-après) est $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$, où $d\vec{S} = \rho d\rho d\theta \vec{e}_z$ sur la face supérieure du cylindre, de cote $z + dz$, et $d\vec{S} = -\rho d\rho d\theta \vec{e}_z$ sur la face inférieure du cylindre, de cote z (normale sortante).

Sur la surface latérale, $d\vec{S} = r d\theta dz \vec{e}_r$.



Puisque le rayon r est faible, on considère que la composante axiale $B_z(r, z)$ est uniforme sur les faces du cylindre de cote z (ou $z + dz$): $B_z(r, z) \approx B_z(0, z)$. Ceci est vrai au second ordre près en r . En effet, le développement limité de la fonction $B_z(r, z)$ donne :

$$B_z(r, z) = B_z(0, z) + r \left(\frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} \right)_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial^2 B_z(r, z)}{\partial r^2} \right)_{r=0},$$

et la fonction $B_z(r, z)$ étant paire en r par symétrie, le terme de premier ordre est nul.

De même, on suppose que la composante radiale $B_r(r, z)$ est uniforme sur la face latérale du cylindre, de hauteur dz .

Le flux de \vec{B} à travers cette surface est donc :

$$\Phi = \iint_{\text{inf}} \vec{B} \cdot (-\rho d\rho d\theta \vec{e}_z) + \iint_{\text{sup}} \vec{B} \cdot (\rho d\rho d\theta \vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} \vec{B} \cdot (r d\theta dz \vec{e}_r).$$

$$\Phi = -B(0, z) \times \pi r^2 + B(0, z + dz) \times \pi r^2 + B_r(r, z) \times 2\pi r dz.$$

Or le champ magnétostatique est à flux conservatif, son flux à travers une surface fermée est donc nul : $\Phi = 0$.

On en déduit que :

$$-B(0, z) \times \pi r^2 + B(0, z + dz) \times \pi r^2 + B_r(r, z) \times 2\pi r dz = 0$$

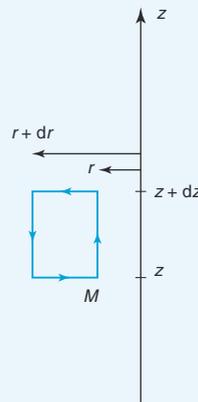
$$-rB(0, z) + rB(0, z + dz) + 2B_r(r, z) dz = 0$$

$$-rB(0, z) + r \left[B(0, z) + dz \frac{dB(0, z)}{dz} \right] + 2B_r(r, z) dz = 0.$$

Il vient par conséquent $B_r(r, z) = \frac{r}{2} \frac{dB(0, z)}{dz}$.

4. On s'intéresse à la circulation du champ magnétique le long d'un contour qui n'enlace aucune intensité. D'après le théorème d'Ampère, la circulation sur ce contour est donc nulle : $\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

Le contour est représenté sur la figure suivante.



Le vecteur déplacement élémentaire est égal à $dz \vec{e}_z$ ou $-dz \vec{e}_z$ sur les deux segments parallèles à (Oz) , sur lesquels le champ magnétique est supposé uniforme, et il vaut $dr \vec{e}_r$ ou $-dr \vec{e}_r$ sur les deux segments perpendiculaires à (Oz) , sur lesquels, là encore, on suppose les variations du champ magnétique négligeables.

On en déduit :

$$\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$$0 = B_z(r, z) dz + B_r(r, z + dz) dr - B_z(r + dr, z) dz - B_r(r, z) dr$$

$$0 = B_z(r, z) dz + \left(B_r(r, z) + \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} dz \right) dr - \left(B_z(r, z) + \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} dr \right) dz - B_r(r, z) dr$$

$$0 = \left(\frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} \right) dr dz$$

On a donc $\frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r}$.

Or on a calculé à la question précédente que $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB(0, z)}{dz}$, donc en dérivant cette expression par rapport à z , on obtient :

$$\frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B(0, z)}{dz^2}.$$

On a donc la relation :

$$\frac{\partial B_z(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial B_r(r, z)}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B(0, z)}{dz^2}.$$

En intégrant cette relation entre 0 et r , on obtient :

$$\int_0^r \frac{\partial B_z(r', z)}{\partial r'} dr' = \int_0^r \left(-\frac{r'}{2} \frac{d^2 B(0, z)}{dz^2} \right) dr'.$$

$$[B_z(r', z)]_0^r = -\frac{d^2 B(0, z)}{dz^2} \times \int_0^r \frac{r' dr'}{2}$$

$$B_z(r, z) - B_z(0, z) = -\frac{d^2 B(0, z)}{dz^2} \times \frac{r^2}{4}$$

Et par conséquent :

$$B_z(r, z) = B_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \times \frac{d^2 B(0, z)}{dz^2}$$

Ceci est bien l'expression demandée puisque sur l'axe, le champ est porté par \vec{e}_z et donc $B(0, z) = B_z(0, z)$.

5.1. Dans l'âme, on a un courant volumique de densité \vec{j} . Le lien avec l'intensité totale I parcourant l'âme est $I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times \pi a_1^2$.

On a donc :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a_1^2} \vec{e}_z$$

La gaine voit son épaisseur négligée, la répartition de courant est donc surfacique, de vecteur densité surfacique de courant \vec{j}_s porté par \vec{e}_z . L'intensité totale parcourant la gaine, $-I$, est donnée par le « flux » de \vec{j}_s à travers une section horizontale de la gaine, c'est-à-dire un cercle d'axe (Oz) et de rayon a_2 : $-I = j_s \times 2\pi a_2$. On a donc :

$$\vec{j}_s = -\frac{I}{2\pi a_2} \vec{e}_z$$

2. La distribution de courant est invariante par toute translation parallèle à (Oz) et par toute rotation d'axe (Oz) . Le champ magnétostatique créé au point $M(r, \theta, z)$ ne dépend donc ni de z ni de θ .

Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution, le champ lui est donc normal : le champ magnétostatique est orthoradial :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

On choisit comme contour d'Ampère le cercle d'axe (Oz) passant par M qui est bien une ligne de champ, au vu des symétries de la distribution.

La circulation du champ magnétique le long de ce contour est $\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot (rd\theta \vec{e}_\theta) = B(r) \times 2\pi r$.

Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut calculer l'intensité enlacée par ce contour, c'est-à-dire le flux du vecteur densité de courant à travers le disque d'axe (Oz) et de rayon r . Plusieurs cas se présentent :

• $r < a_1$, le point M est intérieur à l'âme, le contour d'Ampère n'enlace qu'une partie de l'intensité I :

$$I_{\text{enlacée}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times \pi r^2 = I \times \frac{r^2}{a_1^2}$$

L'application du théorème d'Ampère donne donc

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = \mu_0 I \times \frac{r^2}{a_1^2} = 2\pi r B(r), \text{ et}$$

$$B(r < a_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a_1^2} r.$$

• $a_1 < r < a_2$, le point M est dans le milieu isolant, le contour d'Ampère enlance la totalité de l'intensité de l'âme : $I_{\text{enlacée}} = I$.

L'application du théorème d'Ampère donne donc $\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} = \mu_0 I = 2\pi r B(r)$, et

$$B(a_1 < r < a_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

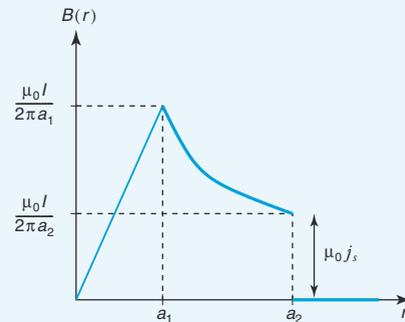
• $r > a_2$, le point M est extérieur au câble coaxial, le contour d'Ampère enlance à la fois l'intensité de l'âme et celle de la gaine, qui se compensent mutuellement, donc $I_{\text{enlacée}} = I - I = 0$.

L'application du théorème d'Ampère conduit à $B(r > a_2) = 0$.

Pour résumer :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi a_1^2} r \vec{e}_\theta & \text{si } r < a_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } a_1 < r < a_2 \\ \vec{0} & \text{si } r > a_2 \end{cases}$$

La norme $B(r)$ du champ magnétostatique est représentée sur la figure suivante :



On constate une discontinuité de $B(r)$ à la traversée de la distribution surfacique de courant, qui vaut :

$$B(r = a_2^+) - B(r = a_2^-) = 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi a_2} = -\mu_0 j_s.$$

3. Le flux de \vec{B} à travers la surface donnée est $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$, avec $\vec{dS} = (drdz)\vec{e}_\theta$.

On a donc :

$$\Phi = \iint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) \cdot (drdz\vec{e}_\theta)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_0^h dz \right) \times \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r} \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} [\ln r]_{a_1}^{a_2}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

4. Les coefficients d'auto-induction L et d'auto-induction par unité de longueur Λ étant définis respectivement par

$$L = \frac{\Phi}{I} \text{ et } \Lambda = \frac{L}{h}, \text{ on trouve :}$$

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \text{ et } \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

5. L'énoncé donne la capacité par unité de longueur de ce câble coaxial : $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a_1}{a_2}}$. On constate que :

$$\Gamma \times \Lambda = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right)} \times \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Le produit de ces deux coefficients linéiques est constant

$$\Gamma \Lambda = \frac{1}{c^2} \text{ où } c \text{ est la célérité de la lumière dans le vide.}$$

Remarque : ce résultat permettra, en seconde année, d'étudier le phénomène de propagation des ondes électromagnétiques dans ce type de câble.

10 – Dipôle magnétique

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 100

- 1 Le vecteur surface associé à un contour orienté est indépendant de la surface s'appuyant sur ce contour.
- a. Vrai.
- b. Faux.
- 2 Le vecteur surface associé à un cercle d'axe (Oz) , de centre O et de rayon R est donné par :
- a. $\vec{S} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{e}_z$
- b. $\vec{S} = 4\pi R^2 \vec{e}_z$
- c. $\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$
- d. $\vec{S} = 2\pi R^2 \vec{e}_z$
- 3 Le vecteur moment magnétique \vec{M} est l'analogue du vecteur moment dipolaire \vec{p} . Ils ont les mêmes propriétés de symétrie, et sont tous deux des vecteurs polaires.
- a. Vrai.
- b. Faux.
- 4 Le champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique et le champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique :
- a. ont le même comportement en tout point de l'espace.
- b. ont le même comportement proche du dipôle, mais se comportent différemment loin du dipôle.
- c. ont le même comportement loin du dipôle, mais se comportent différemment proche du dipôle.
- 5 Le champ magnétique terrestre peut être assimilé au champ d'un dipôle magnétique situé au centre de la Terre, presque aligné avec l'axe des pôles géographiques. Ce moment magnétique est dirigé :
- a. du sud vers le nord géographique.
- b. du nord vers le sud géographique.

1 On considère un cube $ABCD A' B' C' D'$ d'arrête a .
Sur ce cube, un circuit $ABB' C' D' DA$ est parcouru par un courant I . Quel est le moment magnétique de ce circuit ?

2 On admet que l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} soumis à un champ magnétique \vec{B} est donnée par $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

1. Par analogie avec le dipôle électrostatique, exprimer la force et le couple auxquels est soumis un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique \vec{B} .

2. On considère un aimant, de moment magnétique M_0 , pouvant se déplacer sans frottement dans un plan horizontal (xOy) . Un fil rectiligne, parallèle à (Ox) , est situé dans le plan d'équation $z = h$. Il est parcouru par un courant d'intensité I .

L'aimant a-t-il des positions d'équilibre ? Discuter de leur stabilité éventuelle.

3. On dispose deux boussoles proches l'une de l'autre, chacune étant constituée d'une aiguille aimantée montée sur pivot. Déterminer les positions d'équilibre des aiguilles et préciser leur stabilité.

3 1. Montrer que le champ magnétique créé par un fil infini d'axe (Oz) , parcouru par un courant I , peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(r).$$

2. Une ligne bifilaire est composée de deux fils parallèles à l'axe (Oz) , distants de a et parcourus par des courants opposés $-I$ et $+I$, respectivement pour le fil d'abscisse $-\frac{a}{2}$ et pour le fil d'abscisse $+\frac{a}{2}$.

Déterminer le champ magnétique en tout point suffisamment éloigné des fils ($r \gg a$).

3. Quelle est la forme des lignes de champ ?

1 * 15 min

► Corrigé p. 102

Champ magnétique dans le plan d'un disque de Rowland

Soit un disque conducteur de centre O et de rayon R , tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe (Oz) . Ce disque porte une charge totale q répartie avec une densité surfacique

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}, \text{ avec } r = OP, \text{ la distance d'un}$$

point P du disque à son centre.

1. Trouver la valeur de σ_0 en fonction de q et R .
2. Quelle est l'expression du champ magnétique créé par une telle distribution en un point M situé dans le plan du disque, mais très éloigné de celui-ci ($r \gg R$) ?

2 * 15 min

► Corrigé p. 103

Superposition de deux champs (d'après CCP)

On considère la superposition d'un champ uniforme $\vec{B}_a = B_a \vec{e}_x$ et du champ \vec{B}_M créé par un dipôle magnétique de moment \vec{M} placé à l'origine des coordonnées.

\vec{M} et \vec{B}_a sont reliés par $\vec{M} = -\left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a \vec{e}_x$, où R est une longueur donnée.

1. Expliciter, pour cette valeur de \vec{M} , le champ $\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M$, créé au point $P(r, \theta, \varphi)$, en fonction de B_a , \vec{e}_x , \vec{r} et R . On utilisera les coordonnées polaires.
2. En déduire que \vec{B}_R est tangent à la sphère de rayon R et de centre O en chacun de ses points. Où l'intensité du champ au voisinage de la sphère est-elle maximale ?
3. Donner un tracé approximatif des lignes de champ de \vec{B}_R à l'extérieur de cette sphère.

3 * 15 min

► Corrigé p. 103

Force sur un dipôle

On considère une spire circulaire d'axe (Ox) , de centre O et de rayon R , parcourue par un courant I . On place au point $A(x, 0, 0)$ un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = M \vec{e}_x$.

1. Calculer la force qui agit sur le dipôle.
2. Vers quelle position d'équilibre stable le dipôle tend-il ?

4 * 20 min

► Corrigé p. 104

Latitude géographique et inclinaison du champ magnétique terrestre

Le champ géomagnétique créé par la Terre, \vec{B}_T est caractérisé en tout point de la Terre par sa norme B_T , sa déclinaison, c'est-à-dire l'angle que sa composante horizontale forme avec le nord géographique, et son inclinaison, c'est-à-dire l'angle qu'il forme avec le plan horizontal.

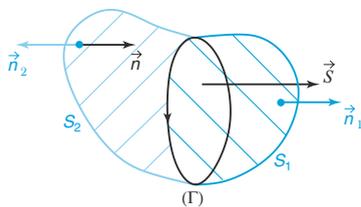
Gauss a montré que le champ magnétique terrestre peut, en première approximation, être considéré comme le champ d'un dipôle, de moment magnétique \vec{M} , placé au centre O de la Terre et dirigé selon l'axe des pôles magnétiques, assimilé ici à l'axe des pôles géographiques.

1. Exprimer \vec{B} en fonction de la latitude λ du point M .
2. En déduire l'inclinaison en fonction de la latitude.
3. À Paris ($\lambda = 49^\circ \text{N}$), on mesure une composante horizontale du champ magnétique de $2,05 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. En déduire la norme du moment magnétique \vec{M} et l'inclinaison I en ce point.
4. Quel est le sens du moment magnétique ?
5. Commenter la valeur obtenue sachant qu'on mesure en réalité une inclinaison de 64° .

Tester ses connaissances

1 Réponse a. C'est vrai. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre deux surfaces (S_1) et (S_2) orientées s'appuyant sur le même contour (Γ). La réunion de ces deux surfaces est une surface fermée (Σ) :

$(\Sigma) = (S_1) \cup (S_2)$. Or $\oiint_{\Sigma} \vec{n} dS = 0$, où \vec{n} est le vecteur unitaire de la normale sortante en tout point de Σ . Comme on le voit sur la figure suivante, $\vec{n}_1 = \vec{n}$ sur la surface (S_1), l'orientation imposée par le contour est bien celle de la normale sortante, tandis que sur la surface (S_2), $\vec{n}_2 = -\vec{n}$, l'orientation imposée par le contour correspond à la normale entrante de Σ .



$$\begin{aligned} \text{Donc } \oiint_{\Sigma} \vec{n} dS &= \iint_{S_1} \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \vec{n}_1 dS - \iint_{S_2} \vec{n}_2 dS = 0, \end{aligned}$$

$$\text{et par conséquent } \iint_{S_1} \vec{n}_1 dS = \iint_{S_2} \vec{n}_2 dS = \vec{S}.$$

Le vecteur surface est indépendant de la surface choisie pour le calculer.

2 Réponse c. Le vecteur surface associé à un contour ne dépend pas de la surface choisie, pour autant qu'elle s'appuie bien sur ce contour. On choisit donc ici le disque de rayon R , qui a pour surface πR^2 . Le vecteur surface est donc $\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$, ou éventuellement $\vec{S} = -\pi R^2 \vec{e}_z$ selon l'orientation du contour.

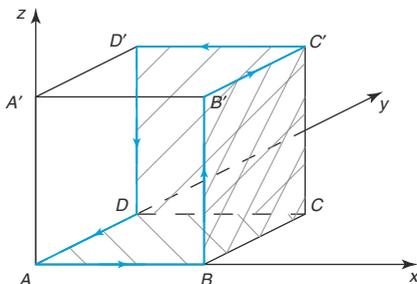
3 Réponse b. C'est faux, les deux vecteurs moment dipolaire électrostatique et moment dipolaire magnétique ont beau être analogues, ils n'ont pas les mêmes propriétés de symétrie, \vec{p} est un vecteur polaire, comme \vec{E} , alors que \vec{M} est un vecteur axial, comme \vec{B} .

4 Réponse c. Les cartes de champ sont identiques loin du dipôle, mais proche du dipôle, la différence entre le caractère fermé des lignes de champ magnétique, et ouvert des lignes de champ électrostatique, font que les comportements de ces deux champs sont différents.

5 Réponse b. Le dipôle magnétique est dirigé vers le sud géographique, et une aiguille aimantée voit son nord pointer vers le sud du dipôle, c'est-à-dire le nord géographique.

Savoir appliquer le cours

1 Le circuit est représenté sur la figure suivante.



On choisit comme surface fermée s'appuyant sur ce contour la réunion de trois faces du cube, la face 1 ($ABCD$), la face 2 ($BCC'B'$) et la face 3 ($CC'D'D$).

Chaque face a une aire a^2 et d'après l'orientation du contour, elles sont de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 = \vec{e}_z$, $\vec{n}_2 = -\vec{e}_x$ et $\vec{n}_3 = -\vec{e}_y$.
Le moment magnétique de ce circuit est donc :

$$\vec{M} = I a^2 (-\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

2 1. L'expression de l'énergie d'un dipôle dans un champ magnétique étant $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, on peut faire l'analogie avec l'énergie d'un dipôle électrostatique \vec{p} dans un champ électrostatique \vec{E} : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.
Un dipôle magnétique rigide plongé dans un champ magnétique uniforme ressent donc une force résultante

nulle : $\vec{F} = \vec{0}$. Si le champ n'est pas uniforme, on obtient l'expression de la force suivante :

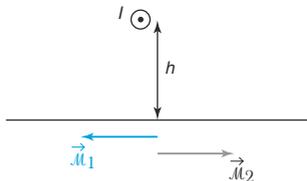
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})$$

Enfin, un dipôle magnétique rigide plongé dans un champ magnétique \vec{B} est soumis à un couple $\vec{\Gamma}$:

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

2. Le fil rectiligne parcouru par un courant I crée un champ magnétique orthoradial $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, dans le système de coordonnées cylindriques d'axe celui du fil. **Remarque :** On se reportera au chapitre sur le théorème d'Ampère pour l'établissement de cette expression.

Par analogie avec l'énergie potentielle électrostatique d'un dipôle, on a ici $E_p = -\vec{M}_0 \cdot \vec{B}$. Cette énergie sera extrémale lorsque les deux vecteurs seront colinéaires, à l'endroit où \vec{B} est le plus intense. Il faut donc ici que l'aimant soit placé à la verticale du fil. On aura alors une position d'équilibre. Il sera stable si \vec{M}_0 est dans le sens de \vec{B} (position \vec{M}_2) et instable (position \vec{M}_1) si leurs sens sont opposés.



Positions d'équilibre du dipôle magnétique dans le champ d'un fil infini

3. Chaque aiguille agit comme un dipôle magnétique et crée un champ magnétique. L'énergie potentielle d'interaction des deux aiguilles est donnée par

$$E_p = -\vec{M}_1 \cdot \vec{B}_2 = -\vec{M}_2 \cdot \vec{B}_1.$$

Le système sera à l'équilibre lorsque le moment magnétique de l'une sera aligné avec le champ magnétique créé par l'autre. Cet équilibre sera stable si les deux vecteurs sont dans le même sens, et instable s'ils sont de sens opposés.

3.1. Le champ magnétique créé par un fil infini d'axe (Oz) est donné par $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, exprimé en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Or $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$, et $\frac{\vec{e}_r}{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\ln \frac{r}{r_0}\right)$, où r_0 est une constante homogène à une distance.

Il en découle que $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\left(\ln \frac{r}{r_0}\right)$, ou

encore $\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(r)$ avec $f(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$

2. Le point M se situe à la distance r_1 du fil d'abscisse $\frac{a}{2}$ parcouru par le courant I et à la distance r_2 du fil d'abscisse $-\frac{a}{2}$, parcouru par le courant $-I$.

D'après le principe de superposition,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M), \text{ on a donc :}$$

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(r_1) - \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(r_2)$$

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge \left[\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}\right) - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_0}\right) \right]$$

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}\right).$$

$$\text{Or } r_1^2 = r^2 - ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right).$$

On cherche le champ magnétique en un point éloigné des fils, donc on peut faire un développement limité :

On obtient, au premier ordre, $r_1 \approx r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$.

De la même façon, un développement limité au premier ordre donne $r_2 \approx r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$.

$$\text{Par conséquent, } \frac{r_1}{r_2} \approx \frac{1 - \frac{a}{2r} \cos \theta}{1 + \frac{a}{2r} \cos \theta} \approx 1 - \frac{a}{r} \cos \theta.$$

On en déduit que $\ln \frac{r_1}{r_2} \approx \ln \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right) \approx -\frac{a}{r} \cos \theta$,

car au premier ordre $\ln(1+x) \approx x$.

Il reste à calculer le gradient de cette fonction pour trouver le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\ln \frac{r_1}{r_2}\right) \approx \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\ln \frac{r_1}{r_2}\right) \approx \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{a}{r} \cos \theta\right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{a}{r} \cos \theta\right) \vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\ln \frac{r_1}{r_2}\right) \approx +\frac{a}{r^2} \cos \theta \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{a}{r} (-\sin \theta) \vec{e}_\theta.$$

Finalement,

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a}{r^2} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{a}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\theta\right), \text{ et :}$$

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi r^2} \sin \theta \vec{e}_r + \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^2} \cos \theta \vec{e}_\theta$$

3. Les lignes de champ sont les courbes tangentes en tout point au champ. Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$ est donc colinéaire à $\vec{B}(M)$.

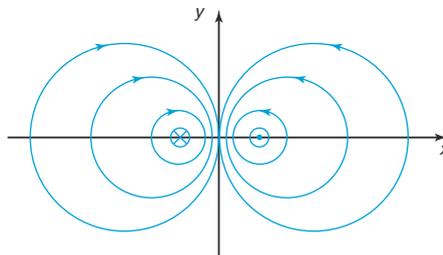
Comme $B_z(M) = 0$, on en déduit que les lignes de champ sont dans un plan horizontal. Leur équation est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{B_r} &= \frac{rd\theta}{B_\theta} \\ -\frac{dr}{\sin\theta} &= \frac{rd\theta}{\cos\theta} \\ \frac{dr}{r} &= -\frac{\sin\theta d\theta}{\cos\theta}. \end{aligned}$$

Cette équation s'intègre entre le point $M_0(r = R_0, \theta = 0)$ et le point $M(r, \theta)$. On a alors :

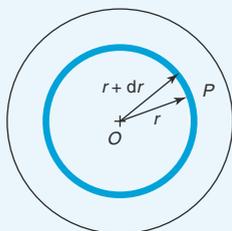
$$\ln \frac{r}{R_0} = \ln \cos\theta, \text{ ou encore } \boxed{r = R_0 \cos\theta}$$

Les lignes de champ sont des cercles, tangents en O à l'axe (Oy) .



S'entraîner

1. On cherche l'expression de σ_0 en fonction de q . Il faut donc relier la densité surfacique locale au point P à la charge totale. Il suffit de réaliser l'intégration suivante : on découpe le disque en couronnes élémentaires, comprises entre r et $r + dr$. La surface de cette couronne élémentaire est $dS = 2\pi r dr$.



Tous les points de cette couronne portent la même densité surfacique $\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$. La charge élémentaire

est donc $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma_0 \frac{r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$.

Il reste à intégrer cette expression pour r variant de 0 à R :

$$q = \int dq = \int_0^R 2\pi\sigma_0 \frac{r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}.$$

On pose le changement de variable $u = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$. On a alors $du = -\frac{2r dr}{R^2}$, et l'intégration pour r variant de 0 à R se traduit par une intégration pour u variant de 1 à 0.

On a donc :

$$q = -\pi\sigma_0 R^2 \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = -\pi\sigma_0 R^2 [2\sqrt{u}]_1^0.$$

On obtient donc $q = 2\pi\sigma_0 R^2$ et par conséquent :

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{q}{2\pi R^2}}$$

2. On se place très loin des sources, on pourra donc utiliser l'approximation dipolaire. Il faut calculer le moment magnétique équivalent à la distribution de courants de convection.

On reprend le découpage précédent. Chaque couronne élémentaire peut être assimilée à une spire parcourue par un courant élémentaire dI . Un point P de la couronne élémentaire de largeur dr est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$. Le vecteur densité surfacique de courant en ce point est donc :

$$\vec{j}_s(P) = \sigma_P \vec{v}_P = \frac{\sigma_0 r \omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \vec{e}_\theta.$$

Le courant élémentaire dI qui circule dans la couronne est le « flux » du vecteur densité surfacique de courant à travers un élément de rayon dr :

$$dI = \vec{j}_s \cdot d\vec{r} \vec{e}_\theta = \sigma_0 \omega \frac{r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}.$$

Le moment magnétique élémentaire de cette spire est donc $d\vec{M} = dI \vec{S}$, où $\vec{S} = \pi r^2 \vec{e}_z$ est le vecteur surface associé à ce contour orienté.

Par conséquent, le moment magnétique total de cette distribution est :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \int d\vec{M} = \int_0^R \sigma_0 \omega \frac{r dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \pi r^2 \vec{e}_z \\ &= \pi \sigma_0 \omega \int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale, on fait le changement de variable $u = \frac{r^2}{R^2}$, avec u variant de 0 à 1. On a $du = \frac{2}{R^2} r dr$ et

$$\int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{R^2}{2} R^2 \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{1 - u}}.$$

On fait alors un nouveau changement de variable $u = \sin^2 \alpha$, avec α variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

On a $du = 2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha$. L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\frac{R^4}{2} \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{1 - u}} &= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \alpha \times 2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \\ &= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha d\alpha \\ &= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \alpha) d(-\cos \alpha) \\ &= R^4 \left[-\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= R^4 \left(-0 + 1 + 0 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} R^4.\end{aligned}$$

Le moment magnétique du disque est donc :

$$\vec{M} = \frac{2}{3} \pi \sigma_0 \omega R^4 \vec{e}_z = \frac{1}{3} q \omega R^2 \vec{e}_z$$

Le champ magnétique créé en un point M éloigné du disque est alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{OM} \cdot \vec{M})\vec{OM} - OM^2 \vec{M}}{OM^5}.$$

On s'intéresse à un point M situé dans le plan du disque, donc \vec{OM} et \vec{M} sont perpendiculaires, il reste :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}}{OM^3}$$

2 1. Le champ \vec{B}_M créé par le dipôle magnétique au point P est donné par l'expression suivante en coordonnées polaires :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}$$

On a ici $\vec{M} = -\left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a \vec{e}_x$, donc :

$$\begin{aligned}\vec{B}_M(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a \frac{2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3} \\ &= -\frac{R^3}{2r^3} B_a (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).\end{aligned}$$

Pour avoir le champ total, on lui ajoute le champ

$$\vec{B}_a = B_a \vec{e}_x :$$

$$\vec{B}_R(P) = B_a \vec{e}_x - B_a \frac{R^3}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

2. En un point de la sphère de rayon R , on aura alors

$$\vec{B}_R \cdot r \vec{e}_r = B_a R \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{R^3}\right) = 0.$$

Le champ en un point de la sphère de rayon R n'a pas de composante radiale, il est donc tangent à la sphère. Au niveau de la sphère, on a $r = R$ et par conséquent :

$$\vec{B}_R = B_a \vec{e}_x - B_a \cos \theta \vec{e}_r - \frac{B_a}{2} \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

Or $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$.

Il vient donc

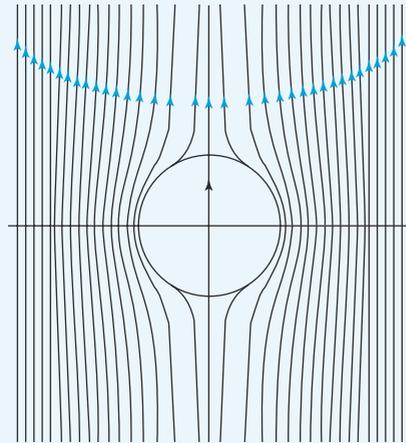
$$\vec{B}_R = B_a \cos \theta \vec{e}_r - B_a \sin \theta \vec{e}_\theta - B_a \cos \theta \vec{e}_r - \frac{B_a}{2} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}_R = -\frac{3}{2} B_a \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

La norme du champ total est donc $\|\vec{B}_R\| = \frac{3}{2} B_a \sin \theta$.

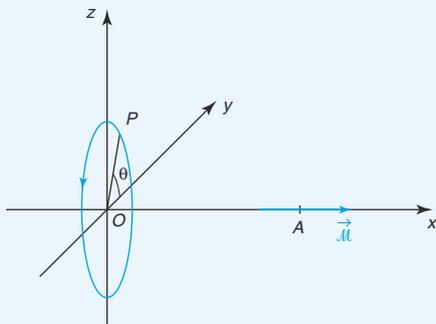
La norme du champ est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

3. La figure suivante représente les lignes de champ au voisinage de la sphère. Loin de la sphère, les lignes de champ ne sont pas perturbées par la présence du dipôle, tandis que proche de la sphère, les lignes de champ tendent à lui être tangentes. On obtient donc cette allure, qui n'est pas sans rappeler un écoulement fluide autour d'une sphère solide.



3 1. On cherche à évaluer la force ressentie par le dipôle à cause de la spire. Il s'agit de l'opposée de la force ressentie par la spire à cause de la présence du dipôle. Cette dernière étant plus facile à calculer, grâce à l'expression de la force de Laplace, on procède de cette façon.

Commençons par calculer le champ magnétostatique créé par le dipôle en un point P de la spire, repéré par ses coordonnées polaires dans le plan (yOz) .



Interaction d'un dipôle magnétique et d'une spire de courant

D'après l'expression intrinsèque du champ d'un dipôle magnétique, on a :

$$\vec{B}_M(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{A}\vec{P} \cdot \vec{M})\vec{A}\vec{P} - AP^2\vec{M}}{AP^5}$$

On a ici :

$$\vec{A}\vec{P} = \vec{A}\vec{O} + \vec{O}\vec{P} = -x\vec{e}_x + R\cos\theta\vec{e}_y + R\sin\theta\vec{e}_z$$

Par conséquent, $AP = \sqrt{x^2 + R^2}$ et $\vec{A}\vec{P} \cdot \vec{M} = -xM$.

Il vient donc :

$$\vec{B}_M(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \times [-3x(-x\vec{e}_x + R\cos\theta\vec{e}_y + R\sin\theta\vec{e}_z) - (x^2 + R^2)\vec{e}_x]$$

L'expression de la force élémentaire de Laplace ressentie par l'élément de courant $I d\vec{\ell}$ centré sur P est $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_M(P)$.

On a ici $d\vec{\ell} = R d\theta \vec{e}_\theta = R d\theta (-\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z)$. On obtient donc l'expression suivante pour la force élémentaire de Laplace :

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 M I R d\theta}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2x^2 - R^2 \\ -3xR\cos\theta \\ -3xR\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 M I R d\theta}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} +3xR \\ (2x^2 - R^2)\cos\theta \\ (2x^2 - R^2)\sin\theta \end{pmatrix}$$

Il reste à intégrer cette expression pour θ variant de 0 à 2π .

On voit immédiatement que les composantes F_y et F_z de la force de Laplace seront nulles puisque :

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

Il ne reste plus que la composante suivant l'axe de la spire :

$$F_x = \frac{3x\mu_0 M I R^2}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3x\mu_0 M I R^2}{4\pi(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \times 2\pi$$

$$= \frac{3x\mu_0 M I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}$$

La force exercée par la spire sur le dipôle est donc :

$$\vec{F} = -\frac{3x\mu_0 M I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_x$$

2. Si le dipôle est dirigé comme sur la figure dans le sens des x croissants, la force qu'il ressent tend à le rapprocher de la spire. Il se dirige alors vers la position d'équilibre correspondant à une force nulle, c'est-à-dire à $x = 0$

Il s'agit alors d'un équilibre stable, puisque le dipôle magnétique est orienté dans le sens du champ magnétique créé par la spire.

Remarque : si le dipôle est orienté dans le sens des x décroissants, la position d'équilibre, correspondant toujours au centre de la spire, est désormais une position d'équilibre instable. Si le dipôle s'écarte de l'axe, le couple de force qu'il subit tend à le retourner, pour le placer dans le sens du champ magnétique créé par la spire.

© Nathan, classe prépa

4 1. En coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos\theta \vec{e}_r + M \sin\theta \vec{e}_\theta}{r^3}$$

Or latitude λ et colatitude θ sont liées par la relation $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$, et par conséquent :

$$\cos\theta = \sin\lambda \quad \text{et} \quad \sin\theta = \cos\lambda$$

Par conséquent, à la surface de la Terre, où $r = R$, on a :

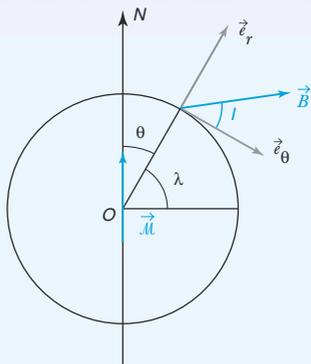
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} (2 \sin\lambda \vec{e}_r + \cos\lambda \vec{e}_\theta)$$

2. L'inclinaison I est l'angle formé avec le plan horizontal. On a donc $B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = B \cos I$, et :

$$B_r = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = B \sin I$$

On a donc $\tan I = \frac{B_r}{B_\theta} = \frac{2 \sin\lambda}{\cos\lambda}$. Par conséquent :

$$\tan I = 2 \tan \lambda$$

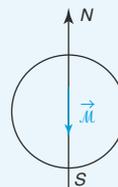


3. À Paris, on a $\lambda = 49^\circ\text{N}$, donc $I = 66,5^\circ$.
La composante horizontale du champ est :

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \cos \lambda. \text{ On en déduit donc } \mathcal{M} = \frac{4\pi R^3 B_\theta}{\mu_0 \cos \lambda}$$

A.N. : $\mathcal{M} = 8,19 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

4. Le moment magnétique est dirigé vers le sud géographique. En effet, on a appelé nord la direction indiquée par le nord magnétique d'une aiguille aimantée, qui est attirée par le sud magnétique du dipôle terrestre.



5. On obtient ici une inclinaison de $66,5^\circ$, qui est assez proche de la valeur mesurée. Bien entendu, il faut raffiner un peu ce modèle si on veut expliquer les valeurs expérimentales, mais en première approximation, le champ magnétique observé à la surface de la Terre est bien modélisable par un simple dipôle, aligné selon l'axe des pôles géographiques.