Université Cadi Ayyad

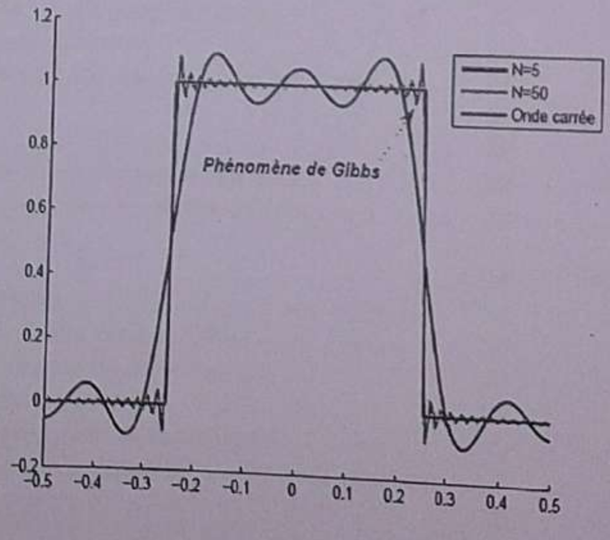
Département Génie Informatique,
Réseaux et Télécommunications

ENSA
Safi

Polycopié de Cours :

Analyse 3

Prof. Abdelghali AMMAR



Niveau : $2^{ème}$ CP

Chapitre 1

Séries numériques

En mathématiques, la série constitue une généralisation de la notion de somme finie. Le but de ce chapitre est de donner un sens à la sommation d'une infinité de termes réels, par exemple :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... =?$$

Le calcul d'une somme infinie n'étant pas toujours simplifiable, un certain nombre de méthodes permettent de déterminer la nature (convergence ou non) d'une série sans réaliser explicitement les calculs. Toutefois, certaines règles de calcul sur les sommes finies ne sont pas nécessairement conservées par cette notion de série, comme la commutativité ou l'associativité, c'est-à-dire la possibilité de permuter les termes de la suite ou de regrouper certains d'entre eux, sans modifier ni la convergence ni la valeur de la somme de la série.

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. Le corps des nombres réels (resp. complexes) est noté $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Les séries numériques sont réelles .

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions et Propriétés élémentaires

Définition 1.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On appelle série numérique de terme général a_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n.$$

La suite (S_n) est aussi appelée suite des sommes partielles de la série et on la note encore $\sum a_n$.

Remarques 1.1 :

1. *Une série n'est autre qu'une suite dont le terme général est la somme des premiers termes d'une autre suite.*
2. *On peut définir des séries à valeurs dans un ensemble E, dès lors que celui-ci est muni d'une « addition », en particulier dans $\mathbb{C}$ ou dans espace vectoriel normé.*

Définition 1.2 *On dit que la série $\sum a_n$ est convergente (ou qu'elle converge) lorsque la suite (S_n) des sommes partielles est convergente, on dira qu'elle est divergente (ou qu'elle diverge) sinon.*

Lorsque la série de terme général a_n est convergente, on appelle somme de la série $\sum a_n$ la limite des sommes partielles. On note $S := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme, c'est-à-dire :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

et on définit le reste de rang n par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Étudier la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou non.

Remarques 1.2 :

1. *On ne modifie pas la nature de la série $\sum a_n$ en changeant un nombre fini de termes : on ajoute une constante à S_n à partir d'un certain rang, par contre, on modifie la somme de cette série en cas de convergence.*
2. *On peut supprimer les termes nuls d'une série sans en modifier ni la nature, ni la somme : $\sum (1 + (-1)^n)/n$ s'écrit aussi $\sum \frac{2}{2p}$. Par contre, regroupement de termes et modification de l'ordre des termes ne peuvent s'effectuer sans précaution.*
3. *Tous les critères de convergence pour les suites restent donc valables.*

Exemples 1.1 :

1. *La série $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente. En effet, pour tout entier naturel n*

$$S_n = \sum_{0}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} = \quad ,$$

et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, *donc*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$

2. *La série* $\sum 1$ *est divergente. En effet, pour tout entier naturel* n, $S_n = n+1$.
3. *La série* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et a pour somme* 1. *En effet, pour tout entier naturel* n

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

d'où le résultat.

Proposition 1.1 *L'ensemble des séries numériques réelles convergente, noté* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *est un espace vectoriel réel muni des lois*

$$\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n), \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. La démonstration se déduit à partir des suites de sommes partielles des séries.

Remarque 1.1 *Attention ! L'égalité*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$$

n'est valable que si au moins deux des trois séries sont convergentes. Par exemple la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (1-1)$, *mais les deux séries* $\sum_{k=0}^{+\infty} 1$ *et* $\sum_{k=0}^{+\infty} -1$ *sont divergentes.*

Théorème 1.1 *(Condition nécessaire de convergence)*
Si la série $\sum a_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, *donc si la suite* (a_n) *ne converge pas vers* 0, *la série* $\sum a_n$ *est divergente.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Remarque 1.2 *Lorsque la suite* (a_n) *ne tend pas vers zéro, on dit que la série* $\sum a_n$ *est grossièrement divergente.*

L'exemple suivant montre que la réciproque du Théorème précédent est fausse.

Exemple 1.1 *La série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge. On raisonne par l'absurde. On a*

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \ \forall n \geq 1.$$

Donc si la série harmonique converge, alors

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = l - l = 0 \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.1.2 Critères de convergence

Théorème 1.2 *(Critère de Cauchy[1])*
Le critère de Cauchy pour une série $\sum a_n$ s'exprime par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \forall q \geq p : |x_{p+1} + ... + x_q| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geq n_0 : |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cauchy

Démonsration. La série $\sum a_n$ est de Cauchy si et seulement si la suite des sommes partielles l'est aussi.

La définition de la convergence de l'intégrale impropre, ou généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)\, dt.$$

L'avantage des intégrales, par rapport aux séries, est que lorsque l'on peut calculer explicitement une primitive F de f, l'on aura

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a),$$

chose qu'il serait difficile à mettre en oeuvre pour le calcul des sommes des séries.

Théorème 1.3 *(Comparaison avec une intégrale)*
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ ont la même nature.
Et si elles convergent, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx.$$

[1] Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 26 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient

Preuve. Remarquons d'abord que, comme $\int_{n_0}^{x} f(t)dt$ est croissante, alors

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ cv} \Longleftrightarrow \left(\int_{n_0}^{p} f(x)dx\right)_p \text{ cv}$$

Comme f décroît sur $[k, k+1]$, $k \geq n_0$, on a $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ et en intégrant,

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

Donc

$$\sum_{k=n}^{p} f(k+1) \leq \int_{n}^{p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(k),$$

i.e :

$$\sum_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leq \int_{n+1}^{p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{p} f(k). \leq \int_{n}^{p} f(t).dt$$

Ce qui assure le résultat.

Exemple 1.2 *Cherchons la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n}$.*
La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est continue positive décroissante sur $[3, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\int_{3}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx &= \frac{1}{2}[\ln(x)^2]_3^{+\infty} \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

donc la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

1.2 Séries géométriques et séries télescopiques

1.2.1 Séries géométriques

Par convention, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$.

Théorème 1.4 *(Série géométrique)*
La série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Preuve. Si $a = 1$, alors la série géométrique $\sum 1$ diverge.
Si $a \neq 1$, alors

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= \frac{1-a^n}{1-a}\end{aligned}$$

donc la série $\sum a^n$ converge si et seulement si la suite (a^n) converge, et donc si et seulement si $|a| < 1$.

Remarque 1.3 *En général, on a :*

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} a^k = \frac{a^{n_0}}{1-a}.$$

Exemples 1.2 :

1. *La série géométrique* $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *est convergente, car* $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, *et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

2. *La série géométrique* $\sum 4^n$ *est divergente, car* $4 > 1$.

1.2.2 Séries télescopiques

Définition 1.3 *Une série réelle* $\sum a_n$ *est dite télescopique lorsque son terme général peut se mettre sous la forme :*

$$a_n = u_{n+1} - u_n, \ \forall n \geq 0,$$

où (u_n) *est une suite de réels.*

Théorème 1.5 *Une série télescopique réelle* $\sum a_n$, *avec :* $a_n = u_{n+1} - u_n$, $\forall n \geq 0$, *converge si et seulement si* (u_n) *est une suite convergente. Et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n - u_0.$$

Preuve. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$. Alors :

$$S_n = u_n - u_0 \ \forall n \geq 0,$$

et l'équivalence ainsi que la valeur de la limite en découle.

Exemple 1.3 *La série* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *est télescopique divergente.*

1.3 Séries à termes réels positifs

1.3.1 Le théorème fondamental

Définition 1.4 *Une série* $\sum a_n$ *réelle est dite à termes positifs si,* $a_n \geq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.6 *Soit $\sum a_n$ une série à termes réels positifs. Elle converge, si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.*

Preuve. La suite (S_n) est croissante puisque :

$$S_{n+1} - S_n = a_n \geq 0, \ \forall n \geq 0.$$

Donc la suite (S_n) converge si et seulement si elle est majorée.

Corollaire 1.1 *Si une série $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Remarques 1.3 :

1. *Le Théorème 1.6 reste valable si la suite (a_n) est positive à partir d'un certain rang.*
2. *Si $\sum a_n$ une série à termes réels positifs, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n \geq 0.$$

1.3.2 Critères de convergence

Théorème 1.7 *(Critère de comparaison)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tel qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 : u_n \leq v_n$. Alors

a) *si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$,*

b) *si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.*

Preuve. La suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ où $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est croissante et majourée par $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$, car

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

Et par passage à la limite, l'égalité des sommes est démontrée.

La deuxième propriété se déduit par la contraposée de la première.

Remarques 1.4 :

1. *Pour montrer la convergence d'une série à termes positifs, on recherche une série majorante convergente.*
2. *Pour montrer la divergence d'une série à termes positifs, on recherche une série minorante divergente.*

Théorème 1.8 *(Comparaison asymptotique)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On a les résultats suivants :

1. *Si $u_n = O(v_n)$ ou bien $u_n = o(v_n)$, alors*
   i) *si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente ;*
   ii) *si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.*
2. *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.*

Démonstration. Utiliser les définitions des relations de comparaison pour déduire des majorations à partir d'un certain rang.

Exemples 1.3 :

1. *Cherchons la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. On sait que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim$, or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.*
2. *La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, car $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.*

Théorème 1.9 *(Comparaison logarithmique)*
Considérons deux séries à termes strictement positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, alors :

1. *la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$;*
2. *la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.*

Démonstration. La suite $(u_n/v_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang n_0, ce qui donne les inégalités

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n,$$

donc $u_n = O(v_n)$ à partir d'un certain rang n_0 et le Théorème des Comparaison asymptotique s'applique.

Exemple 1.4 *Soit la série $\sum x_n$ telle que la suite (x_n) est définie par :*

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(x_n),\ \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On sait que $\forall x \geq 0$, $\arctan x \leq x$, donc

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2} = \frac{V_{n+1}}{V_n}. \qquad V_n = \left(\frac{1}{2}\right.$$

Or $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge donc $\sum x_n$ converge aussi.

Théorème 1.10 *(Séries de Riemann[2])*
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, *avec* $(\alpha \in \mathbb{R})$, *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$ *; si* $\alpha \leq 0$ *la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge grossièrement.*

Riemann

Démonstration. On compare cette série avec $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et le résultat est immédiat. Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\nrightarrow} 0$ et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Exemple 1.5 *La série* $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *est convergente car* $\frac{3}{2} > 1$.

Corollaire 1.2 *(Règle de Riemann)*

i) *S'il existe* $\alpha > 1$ *et* $l \geq 0$ *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*

ii) *S'il existe* $\alpha < 1$ *et* $l > 0$ *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Théorème 1.11 *(Critère de la racine de Cauchy)*
Soit la série $\sum u_n$ *à termes positifs à partir d'un certain rang telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente si* $l < 1$ *et divergente si* $l > 1$.

Démonstration. En exercice.

Remarque 1.4 *Si* $l = 1$, *on ne peut rien dire (cas douteux) :*

- $\sum 1$ *diverge et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1$,

- $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Remarque 1.5 *Si* $\sum u_n$ *une série à termes négatifs à partir d'un certain rang, on peut appliquer les critères de convergence pour la série à termes positifs* $\sum -u_n$ *pour étudier la nature de* $\sum u_n$.

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

1.4 Séries alternées et séries absolument convergentes

Définition 1.5 *On dit qu'une série est alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs (à partir d'un certain rang). Autrement dit, c'est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$ ou $(-1)^{n+1} u_n$ avec $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang.*

Exemples 1.4 :

1. *La série $\sum (-1)^n e^{-n}$ est alternée.*
2. *La série $\sum (-1)^n \sin n$ n'est pas une série alternée, car $\sin n$ oscille entre les valeurs -1 et 1.*

Théorème 1.12 *(Critère de Leibniz[3])*
Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Leibniz

Démonstration. On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0,$$

et

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0.$$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = 0$ et $S_{2n+1} \leq S_{2n}$, donc les deux suites extraites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes et donc ont même limite. Ceci montre que $(S_n)_n$ converge.

Exemple 1.6 *La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est convergente.*

---

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz (prononcer [laibnits] ; parfois von Leibniz ; anciennement francisé en Leibnitz) (Leipzig, 1er juillet 1646 - Hanovre, 14 novembre 1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand qui a écrit en latin, allemand et français.

Théorème 1.13 *(Majoration de la somme) Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente d'après le critère de Leibniz et S sa somme. Alors :*

a) *S est compris entre deux sommes partielles consécutives quelconques ;*

b) *S est du signe de u_0 et $|S| \leq |u_0|$;*

c) *le reste d'ordre n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.*

Preuve. *a*) La proposition résulte de ce que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes.

b) Dans le cas où $u_n = (-1)^n |u_n|$, on a :

$$S_1 \leq S \leq S_0 \implies 0 \leq u_0 + u_1 \leq S \leq u_0$$

et la conclusion.

Dans le cas où $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$, on a :

$$S_0 \leq S \leq S_1 \implies u_0 \leq S \leq u_0 + u_1 \leq 0$$

et la conclusion.

c) On applique *b*) à la série

$$\cancel{|S| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|} \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

de somme R_n.

Définition 1.6 *On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Proposition 1.2 *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ converge et on a*

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| \quad \textit{(Inégalité triangulaire pour les séries).}$$

Preuve. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, donc la série $\sum |u_n|$ converge, et d'après le Théorème de Cauchy, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geq n_0 : \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| < \varepsilon.$$

Or

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|,$$

donc la série $\sum u_n$ est de Cauchy, parconséquent, elle est convergente.

Remarque 1.6 *Ce Théorème montre que la convergence absolue entraine la convergence. L'interêt fondamental de ce théorème est que l'on peut appliquer les propriétés des séries à termes positifs, à la série $\sum |u_n|$ qui est à termes positifs. Mais la réciproque de ce Théorème n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.7 *On dit qu'une série $\sum u_n$ de nombres réels est semi-convergente, si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple 1.7 *La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. En effet, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie les condition de la règle de Leibniz, donc elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.*

Remarque 1.7 *Si $\sum a_n$ est semi-convergente, on ne peut pas calculer la somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ dans le "désordre", on dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Dans le cas où la série est absolument convergente, on peut sommer les a_n dans n'importe quel ordre et avoir la même somme, on dit alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

Le Théorème suivant généralise le critère de Leibniz.

Théorème 1.14 *(Règle d'Abel[4]-Dirichlet[5])*
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels tel que :

i) *la suite (a_n) est positive, décroissante et $\lim a_n = 0$;*

ii) $\exists M > 0, \forall n \geq 0 : |b_0 + b_1 + ... + b_n| \leq M.$

Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente et $\forall n : |R_n| \leq M a_{n+1}$.

Abel

Dirichlet

[4]Niels Henrik Abel, est un mathématicien norvégien, né le 5 août 1802 à Frindoë près de Stavanger et mort le 6 avril 1829 à Froland près d'Arendal. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

[5]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805, Düren - 5 mai 1859, Göttingen) est un mathématicien allemand originaire de Düren en Allemagne où son père, Johann Arnold Lejeune Dirichlet, était maître des postes et commerçant.

Démonstration. Soient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ et } \widetilde{S}_p = \sum_{k=0}^{p} a_k b_k.$$

On démontre par récurrence que

$$\widetilde{S}_p = a_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} S_n (a_n - a_{n+1}), \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Or $|a_p S_p| \leq |a_p| M \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p-1} |S_n| (a_n - a_{n+1}) &\leq M \sum_{n=0}^{p-1} (a_n - a_{n+1}) \\ &\leq M (a_0 - a_p) \\ &\leq M a_0. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente, donc convergente. On déduit que $\widetilde{S}_p$ est convergente ; i.e. $\sum a_n b_n$ converge.

En commençant avec l'indice $n = q+1 \leq p$ (au lieu de $n = 0$), on obtient de la même façon que

$$\left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n b_n \right| \leq |a_p S_p| + M a_{q+1},$$

et avec $p \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$|R_p| \leq M a_{q+1}.$$

Théorème 1.15 *(Règle de d'Alembert[6])*
Soit $\sum u_n$ une série réelle non nulle à partir d'un certain rang, telle que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$.
- *Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.*
- *Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge, (même si $l = +\infty$).*

d'Alembert

[6] Jean le Rond D'Alembert ou Jean Le Rond d'Alembert, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, philosophe et encyclopédiste français.

Démonstration.

– Cas $0 \leq l < 1$.

Soit $l < q < 1$, et pour $\varepsilon = q - l$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ on a

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < q - l,$$

donc

$$|u_{n+1}| < q\,|u_n| \Longrightarrow |u_n| < q^{n-n_0}\,|u_0|\,, \forall n \geq n_0.$$

Ainsi $|u_n| = O\left(q^n\right)$ et $0 < q < 1$, ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge absolument.

– Cas $l > 1$, comme précédemment, soit : $1 < q' < l$. Alors, en adaptant la démonstration précédente.

Si $l = +\infty$, en utilisant la définition, on démotre que $u_n \nrightarrow 0$.

Exemple 1.8 *La série* $\sum \frac{1}{n!}$ *est convergente (vers le nombre e* $\simeq 2,718281828$*), car*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Remarque 1.8 *Si* $l = 1$, *on ne peut rien dire (cas douteux) :*

- $\sum 1$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{1} = 1$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Théorème 1.16 ***(Produit de convolution ou de Cauchy)***

Soient $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries absolument convergentes, alors la série produit de convolution ou de Cauchy, de terme général* c_n *défini par la relation*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l=n}} a_k b_l$$

est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Preuve. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} c_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{0\leq m,l\leq k\\ m+l=k}} a_m b_l - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{0\leq m,l\leq n\\ m+l\leq n}} a_m b_l - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l\leq n}} a_k b_l - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l> n}} a_k b_l\right| \\
&\leq \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l> n}} |a_k|\,|b_l| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \sum_{l=0}^{n} |b_l| - \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l\leq n}} |a_k|\,|b_l|,
\end{aligned}$$

on peut donc se ramener au cas de séries à termes réels positifs. Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k,$$

car si $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq l \leq n$, alors $0 \leq k+l \leq 2n$, ce qui permet de montrer que la série $\sum c_k$ est convergente et par passage aux limites, on a la relation sur les limtes.

Remarque 1.9 *Le mathématicien allemand Franz Mertens*[7] *a prouvé une propriété de convergence plus forte : si l'une des deux séries converge et l'autre converge absolument, alors leur produit de Cauchy converge et la formule de*

[7] Franz Mertens est un mathématicien allemand, né en 20 mars 1840 à Środa Wielkopolska (actuellement en Pologne) et mort en 5 mars 1927 à Vienne (Autriche).

distributivité généralisée a bien lieu.

Mertens

1.5 Applications

1.5.1 La constante d'Euler γ

Euler

On veut montrer la convergence de la suite $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$; on lui associe la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ par les formules :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 = 1, \\ \forall n &\geq 2,\ u_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Un développement limité à la précision n^{-2} donne l'équivalent : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$, ce qui montre la convergence de la série $\sum u_n$ et donc la convergence de la suite $(x_n)_n$ et

$$\gamma = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \right),$$

et on peut écrire

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Numériquement, la constante d'Euler[8] est $\gamma = 0,5772156649...$

[8] Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

1.5.2 La formule de Stirling

Démontrons la formule de Stirling[9] (1730) suivante :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Soit la suite $x_n = n!n^{-(n+\frac{1}{2})}e^n$, on veut montrer que x_n admet une limite $l > 0$. On pose $y_n = \ln x_n = \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln n + n$ et pour $n > 1$, $u_n = y_n - y_{n-1}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n!) - \ln((n-1)!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n-1) + 1 \\
&= \ln n + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln n + 1 \\
&= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum u_n$ converge et la suite $(y_n)_n$ admet une limite λ et $x_n = e^{y_n}$ tend vers $l = e^\lambda > 0$.

Et en déduit que

$$x_n \sim l \Longrightarrow n! \underset{+\infty}{\sim} l \times n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}$$

En utilisant l'intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Cette intégrale vérifie les deux résultat suivants :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ et } I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2},$$

par conséquent

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{l \times (2n)^{(2n+\frac{1}{2})}e^{-2n}}{2^{2n}l^2 \times n^{2(n+\frac{1}{2})}e^{-2n}}\frac{\pi}{2},$$

donc $l = \sqrt{2\pi}$ et on déduit que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

[9] James Stirling est un mathématicien, né en mai 16921,2 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg.

1.5.3 Développement décimal d'un réel

Définition 1.8 *Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On appelle développement décimal propre de x toute suite $(x_n)_n$ telle que ;*

(i) $x_0 \in \mathbb{N}$ *et* $\forall n \geq 1,\ x_n \in [0,9]_{\mathbb{N}}$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} \leq x < \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$.

Remarque 1.10 *La suite des décimaux* $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x_n}{10^n}$ *est convergente vers x,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = x$, *puisque*

$$x - \frac{1}{10^n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} \leq x,\ \forall n \geq 0.$$

et on a $x_0 = E(x)$, la partie entière de x.

Théorème 1.17 *Tout réel positif admet un unique développement décimal propre.*

Démonstration. Unicité : Soit x un réel positif. Supposons que x admette un tel développement et qu'il soit donné par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On déduit de (ii) que

$$x_0 \leq x < x_0 + 1 \text{ et } \forall n \geq 1,\ x_n \leq 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{10^k} \right) < x_n + 1, \tag{1.1}$$

donc $x_0 = E(x)$ et $x_n = E\left(10^n \left(x - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{10^k}\right)\right)$. La suite (x_n) est donc unique.

Existance : Les formules (1.1) permettent de définir par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifions que cette suite détermine bien un développement décimal propre de x c'est-à-dire que les propriétés (i) et (ii) sont satisfaites.

D'après (1.1), on déduit que (ii) est vérifiée et $x_0 \in \mathbb{N}$. Il suffit maintenant de montrer que $\forall n > 0,\ x_n \in [0,9]_{\mathbb{N}}$.

On a

$$x_0 \leq x < x_0 + 1 \Longrightarrow 0 \leq 10(x - x_0) < 10,$$

donc $x_1 = E(10(x - x_0)) \in [0,9]_{\mathbb{N}}$. De même, on a

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k}{10^k} \right) - 10x_n < 10,$$

donc

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} \right) < 10,$$

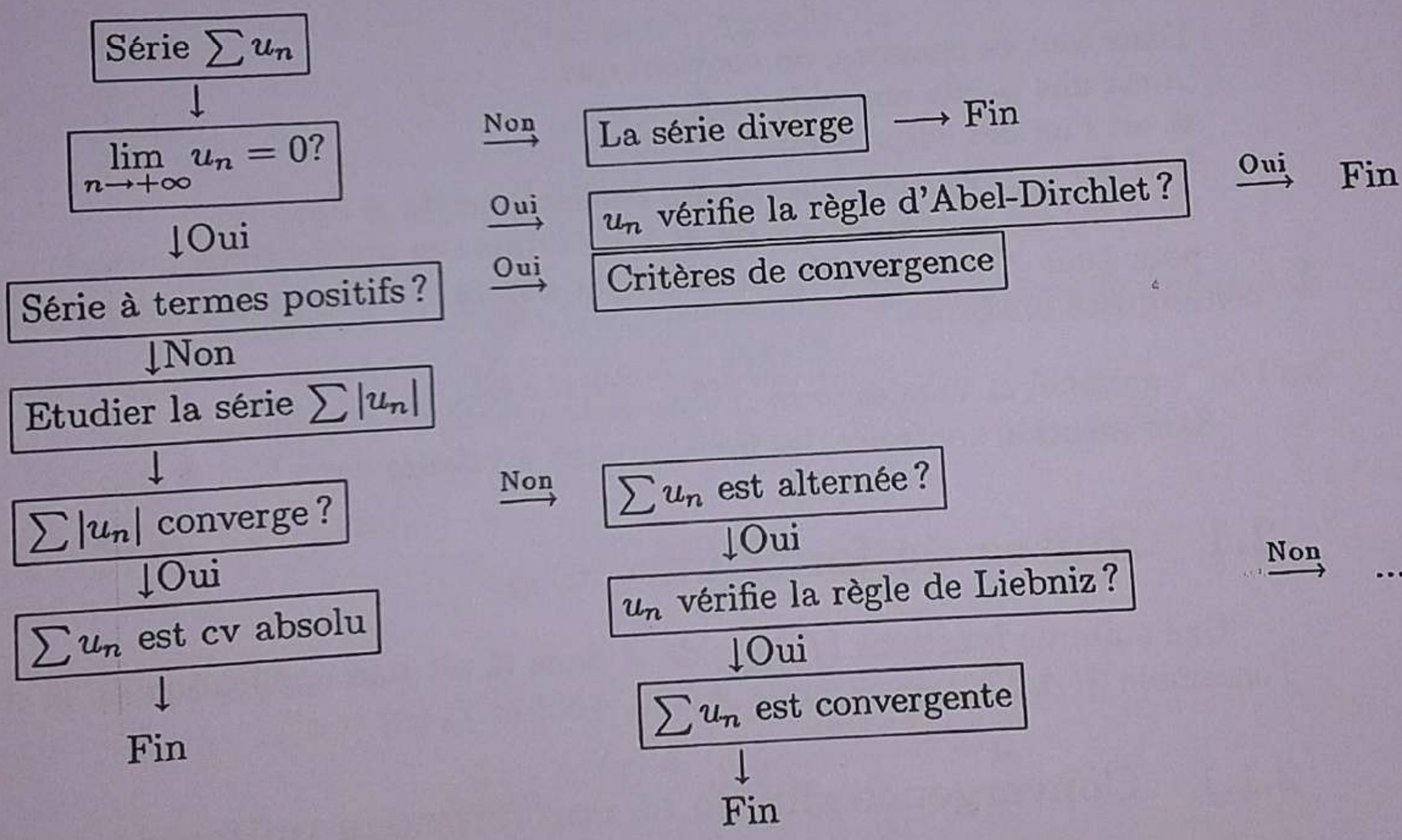
ce qui prouve que $x_{n+1} = E\left(10^{n+1}\left(x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}\right)\right) \in [0,9]_{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.11 *La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas être stationnaire égale à 9 à partir d'un certain rang. En effet, s'il existe N tel que $x_n = 9$ pour tout $n \geq N$,*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{N} \frac{x_k}{10^k} + \frac{9}{10^{N+1}} \times \frac{10}{9} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{x_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}, \end{aligned}$$

ce qui contredit la stricte inégalité dans le développement décimal propre.

Bilan



Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, on convient que :
A est une partie non vide de $\mathbb{R}$;
$\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
$\mathfrak{F}(A, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{K}$;
$\mathfrak{B}(A, \mathbb{K})$ est le sous-espace de $\mathfrak{F}(A, \mathbb{K})$ formé des applications borneés ;
pour tout $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{K})$, on définit la norme qui s'appelle la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Sauf mention contraire, les fonction sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.1 Suites de fonctions

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A dans $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathfrak{F}(A, \mathbb{K})$, par exemple $A =]0, +\infty[$ et $f_n(x) = x^n$.

2.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 2.1 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers la fonction f sur A si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On note $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur A. Dans ce cas, A s'appelle domaine de convergence de la série.*

Si la suite converge simplement, alors la limite est unique.
Quantification : $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} : n \geq N_{\varepsilon,x} \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pour la convergence simple, la limite se calcule point par point pour les suites numériques $(f_n(x))_n$, donc les théorèmes de calucul de la limite de sommes, produits, quotients etc... restent valables. La question qui se pose maintenant ; est ce que les propriétés des fonction f_n se conservent par passage à la limite ?

Proposition 2.1 :

(i) *Si les fonctions f_n sont positives, alors la limite f est positive.*

(ii) *Si les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes), alors la limite est croissante (resp. décroissante).*

Preuve. Immédiate.

Remarque 2.1 *Les propriétés de la continuité, la dérivabilité ou l'intégrabilité ne sont pas nécessairement préservées.*

Exemples 2.1 :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite des fonctions*

$$f_n(x) = x^n, \ \forall x \in [0,1].$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^n = f(x) = \Big\{$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$.
Remarquons que les fonctions f_n sont continues mais la fonction f ne l'est pas.

2. *$\forall n \geq 1$, on définit*

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0,$$

donc $g_n \xrightarrow{C.S} 0$ sur $\mathbb{R}$. Dans cet exemple on a toutes les fonctions g_n sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, mais la suite $(g'_n)_n$ n'a pas de limite car $g'_n(x) = \cos(nx)$.

3. *On considère la suite de fonctions $(h_n)_n$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$h_n(x) = n^2 x^n (1-x), \ \forall x \in [0,1].$$

La suite $(h_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, mais

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx &= \lim_{n \to +\infty} \Big(\qquad - \qquad \Big) \\ &= 1 \neq \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} h_n(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

Ces exemples montrent que la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, intégrabilité et dérivabilité et ils justifient le besoin d'une nouvelle mode de convergence, plus difficile à vérifier, mais valide pour les passages à la limite.

Définition 2.2 *On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A et on écrit $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur A si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0, i.e :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A.$$

Autrement dit, s'il existe une suite numérique $u_n \longrightarrow 0$ telle que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,\ \forall x \in A.$$

Remarques 2.1 :

1. La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f signifie qu'à partir d'un certain rang, la distance entre les fonctions f_n et la fonction f tendra vers 0. Ou bien les graphes des fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ε autour du graphe de f.
2. Pratiquement, pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$, on calcul sa limite simple f, puis en essaie de voir est ce que la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0?

Exemple 2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction nulle. Et on a

$$\|f_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

donc $f_n \xrightarrow{C.U} 0$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2 *La convergence uniforme entraine la convergence simple. La réciproque est fausse en général.*

Preuve. Immédiate.

Proposition 2.3 *La somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes est une suite de fonctions uniformément convergente.*

2.1.2 Critères de convergence uniforme

Théorème 2.1 *(Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)* *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble A. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \forall m > n \geq N_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \forall m > n \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{2.1}$$

donc pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est de Cauchy numérique dans $\mathbb{K}$. Elle est convergente vers une limite notée $f(x)$. On fait tendre $m \longrightarrow +\infty$ dans (2.1), on obtient la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur A.

Réciproquement, supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in A,$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall x \in A, \forall m > n \geq N$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq | \quad - \quad | + | \quad - \quad | \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 2.2 *Soit la suite $(f_n)_n$ convergeant simplement vers f sur A, elle converge uniformément sur A si et seulement si pour toute (x_n) de points de A;*

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0.$$

Preuve. $\Longrightarrow$) Se déduit à partir de l'inégalité

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty .$$

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$, donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N \text{ et } \|f_n - f\|_\infty \geq \varepsilon,$$

donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N,\ \exists x_n \in A \text{ et } |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon,$$

ce qui permet de construire une suite (x_n) telle que

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon,$$

et on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$ on obtient $0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde.

Remarque 2.2 *Pour montrer qu'une suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A, il suffit de trouver une suite numérique a_n d'éléments de A telle que :*

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(a_n) - f(a_n)) \neq 0.$$

Exemples 2.2 :

1. *Soit $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0,1[$, on a $f_n \xrightarrow{C.S} 0$ sur $[0,1[$ et pour $x_n = \quad \in [0,1[$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} |f_n(x_n) - 0| &= \lim_{n \to +\infty} \left(\qquad \right)^n \\ &= \qquad \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la convergence de (f_n) vers 0 n'est pas uniforme sur $[0,1[$.

2. *Soit la suite de fonctions $(g_n)_n$ définie par*

$$g_n(x) = \frac{2}{1 + nx^2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$g(x) = \left\{ \right.$$

Avec la suite $a_n = \quad$, on démontre que la convergence n'est pas uniforme de $(g_n)_n$ vers g sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.1 *Si f est continue en $x \in A$, $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur A et $x_n \longrightarrow x$ dans A ; alors $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = f(x)$.*

Proposition 2.4 *$(\mathfrak{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Preuve. Il est clair que $(\mathfrak{B}(A, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé. Pour montrer qu'il est complet, il suffit de montrer que si f_n est bornée pour tout n; et la suite (f_n) est de Cauchy, alors $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A et que f est bornée. En effet, la suite (f_n) est de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$, donc elle vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, ce qui prouve que $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A. Montrons maintenant que $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{K})$. Pour tout $x \in X$:

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour $\epsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \ |f(x)| &\leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \\ &\leq 1 + |f_{n_0}(x)|, \end{aligned}$$

or f_{n_0} étant bornée, il en est donc de même pour f, donc $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{K})$.

2.1.3 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme préserve la continuité, la dérivabilté et l'intégrabilté des fonctions par passage a la limite.

Théorème 2.3 *(Continuité) Soit (f_n) une suite de fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur A. Alors la limite f est continue sur A.*

Autrement, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Preuve. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur A vers f. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in A.$$

La fonction $f_{N_\varepsilon} : x \longmapsto f_{N_\varepsilon}(x)$ est continue sur A. Donc pour $x_0 \in A$ fixé, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in A$, $|x - x_0| < \eta$ on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)| + |f_{N_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \\ &< 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f est continue en tout point x_0.

Remarque 2.3 *Le résultat précédent est utile si on veut montrer que certaines suites de fonctions ne sont pas uniformément convergentes : si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue, alors la convergence n'est pas uniforme.*

Théorème 2.4 *(Intégration) Soit (f_n) une suite de fonctions continues, convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, alors :*

1. $$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$
2. *la suite de fonctions $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| &= \left| \int_a^x f_n(t) - f(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \\ &\leq |x - a|\, \|f_n - f\|_\infty \\ &\leq |b - a|\, \|f_n - f\|_\infty . \end{aligned}$$

Remarque 2.4 *Le Théorème d'intégration n'est plus vrai si I n'est pas un intervalle fermé borné. On considère la suite de fonctions définient sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & si\ x \in [0, n] \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

On a $f_n \xrightarrow{C.U} 0$ sur $\mathbb{R}^+$, mais $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1 \nrightarrow 0$.

Théorème 2.5 *(Dérivation) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et (f_n) une suite de fonctions de classe $C^1(I)$.*

S'il existe $x_0 \in I$ telle que la suite $(f_n(x_0))$ converge vers l et la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I vers g, alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe $C^1(I)$, qui est la primitive de g prenant la valeur l au point x_0, et on a :

$$\left(\lim_n f_n(x)\right)' = \lim_n f_n'(x);$$

i.e : qu'on peut échanger la dérivation et le passage à la limite.

Preuve. La suite de fonctions (f_n') converge uniformément vers g sur I. De plus comme f_n' est continue sur I, car f_n est de classe $C^1(I)$, d'après le Théorème d'intégration, la suite de fonctions $\int_{x_0}^x f_n'(t)dt$ converge uniformément vers $\int_{x_0}^x g(t)dt$ sur I. Maintenant, on montre que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers $f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t)dt$.

Soit $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - \left(l + \int_{x_0}^x g(t)dt\right) \right| &= \left| \int_{x_0}^x f_n'(t)dt + f_n(x_0) - \left(l + \int_{x_0}^x g(t)dt\right) \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x f_n'(t)dt - \int_{x_0}^x g(t)\,dt \right| + |f_n(x_0) - l| \\ &\leq \left\| \int_{x_0}^x f_n'(t)dt - \int_{x_0}^x g(t)\,dt \right\|_\infty + |f_n(x_0) - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t)dt$.

Remarque 2.5 *La convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite de fonctions dérivées. En effet, La suite de fonctions dérivables $f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $n > 1$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \longmapsto |x|$, qui n'est pas dérivable en 0, puisque*

$$\leq \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad .$$

Les Théorèmes de Dini sont des théorèmes puissants pour prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions quand on ne connait que sa convergence simple.

Théorème 2.6 *(Théorèmes de Dini[1]) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$ qui converge simplement sur I vers une fonction continue f. Alors :*

1. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, i.e. $f_n \le f_{n+1}$ ou , $f_{n+1} \le f_n$, alors la convergence est uniforme sur I.*
2. *Si chaque fonction f_n est monotone, alors la convergence est uniforme sur I.*

Dini

Preuve. Prouvons 2. Il suffit de le démontrer si chaque fonction f_n est croissante. Soit $\varepsilon > 0$, la fonction f étant continue sur le compact $[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$ par le Théorème de Heine. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit alors $S = (a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $< \eta$. Puisque (f_n) converge simplement vers f, et que les a_i sont en nombre fini, il existe un entier $n_0 \in N$, tel que

$$\forall n \ge n_0,\ \forall 0 \le i \le n,\ |f(a_i) - f_n(a_i)| < \varepsilon.$$

Soit $x \in [a,b]$ et $n \ge n_0$, Il existe $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Alors,

$$|f(x) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\le |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f_n(x)| \\
&\le 2\varepsilon + (f_n(x) - f_n(a_i)),\ \text{car } f_n \text{ est croissante} \\
&\le 2\varepsilon + (f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)) \\
&\le 2\varepsilon + |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)| \\
&\le 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

La convergence est donc uniforme.

1. Admis.

[1] Ulisse Dini est un mathématicien et homme politique italien, né le 14 novembre 1845 à Pise et mort dans la même ville le 28 octobre 1918 (à 72 ans).

2.2 Séries de fonctions

De façon analogue aux séries numériques, les séries de fonctions sont définies à partir des suites de fonctions.

2.2.1 Convergence simple

Définition 2.3 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A vers une fonction S définie sur A, si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement vers S sur A. On dit que S est la somme de la série $\sum f_n$ et on écrit*

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

Et dans ce cas, le reste de la série $\sum f_n$ s'écrit

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x), \ \forall x \in A.$$

Exemple 2.2 *La série de fonctions $\sum \frac{\cos x}{2^k}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $S(x) =$.*

Définition 2.4 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur A si la série $\sum |f_n|$ converge simplement sur A.*

Proposition 2.5 *Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur A, alors elle converge simplement sur A.*

Exemple 2.3 *Etudions la nature de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.*
$\forall n \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout réel x.

2.2.2 Convergence uniforme et convergence normale

Définition 2.5 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformement sur A si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformement sur A. Il revient au même de dire que la suite (R_n) converge uniformément vers 0.*

Théorème 2.7 *(Critère de Cauchy) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall x \in A, \ \forall p \geq N_\varepsilon, \ \forall q > p : \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

où encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N_\varepsilon : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Corollaire 2.2 *Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors $f_n \xrightarrow{C.U} 0$ sur A. La réciproque est fausse en général. Donc si (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur A, alors la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur A.*

Théorème 2.8 ***(Critère d'Abel-Dirichlet)*** *Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un ensemble A et vérifiant les conditions suivantes :*

i) *la suite (g_n) est positive, décroissante et converge uniformément vers 0;*

ii) *il existe une constante M telle que :*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq M,\ \forall x \in A.$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ converge uniformément sur A.

Exemple 2.4 *Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$. On a la suite de fonctions $\left(\frac{1}{x^2+n}\right)_n$ est décroissante uniformément vers 0, car $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n} = \frac{1}{n}$, et la condition ii) est vérifié par la suite $(-1)^n$. En appliquant le critère d'Abel-Dirichlet, on déduit que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Pour les séries de fonctions, on peut définir une notion de convergence plus forte que la convergence uniforme ; la convergence normale, qui dans la pratique est souvent facile à vérifier.

Définition 2.6 *Une série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur A, si la série numérique à termes positifs de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 2.6 *La série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement s'il existe une série numérique $\sum u_n$ à termes positifs et convergente telle que*

$$|f_n(x)| \leq u_n,\ \forall x \in A,\ \forall n \geq n_0.$$

Remarque 2.6 *En l'absence d'hypothèses supplèmentaires, toutes les réciproques des implications suivantes sont fausses en général.*

$$\begin{array}{ccc} \text{La convergence normale} & \Longrightarrow & \text{La convergence uniforme} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{La convergence absolue} & \Longrightarrow & \text{La convergence simple} \end{array}$$

Exemples 2.3 :

1. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(kx)}{3k^3-1}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$.

2. *Soit* $f_n(x) = ne^{-x^2\sqrt{n}}$ *définie* $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, *pour tout* $n \geq 0$.
   On a :
   $$0 \leq f_n(x) \leq \qquad , \forall x \in A.$$
   Or la série $\sum$ *converge d'après la règle de Riemann, car*
   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 ne^{-\sqrt{n}} = 0.$$
   D'où la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* A.

2.2.3 Théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions

Les Théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions se déduisent directement à partir des Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions, en utilisant la suite des sommes partielles.

Théorème 2.9 *(Continuité) Si* $\sum f_n$ *est une série de fonctions continues sur* A, *convergeant uniformément sur* A, *alors sa somme est une fonction continue sur* A. *i.e : pour tout* $x_0 \in A$, *on a :*
$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0).$$
C'est-à-dire : on peut permuter lim *et* $\sum$.

Théorème 2.10 *(Intégration) Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions continues, convergeant uniformément sur* $[a, b]$, *alors :*
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$
C'est-à-dire : on peut permuter $\int_a^b$ *et* $\sum$.

Théorème 2.11 *(Dérivation) Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $\sum f_n$ *une suite de fonctions de classe* $C^1(I)$.

S'il existe $x_0 \in I$ *telle que la série numérique* $\sum f_n(x_0)$ *converge et la série des dérivées* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur* I, *alors* $\sum f_n$ *converge uniformément et sa somme* S *est de classe* $C^1(I)$, *et on a :*
$$S'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x);$$
i.e : qu'on peut échanger la dérivation et $\sum$.

Exemples 2.4 *:*

1. *Considérons la série de terme général* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n(1-x)$. *la série converge simplement sur* $[0,1]$, *la fonction somme* S *étant définie par :*
$$S(x) = \Bigg\{$$
Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $[0,1]$, *la non continuité de* S *en* 1 *montre que la convergence n'est pas uniforme sur* $[0,1]$.

2. *On considère la série de fonctions définies sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, *de terme général* $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
La série numérique de terme général $f_n(0)$ *converge (c'est la série nulle) et la série des dérivées de terme général* x^n *converge uniformément sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, *donc la somme*
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ *et*
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ \forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[,$$
donc peut déduire que
$$S(x) = -\ln(1-x),\ \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Chapitre 3

Séries entières

Les séries entières ont beaucoup d'applications, par exemples : prolongement d'une fonction en une fonction de classe C^∞, détermination du terme général d'une suite numérique définie par une relation de récurrence et calcul de sommes de séries numériques convergentes. Elles servent aussi à résoudre des équations différentielles.

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires, réels ou complexes. Une série entière est une série de fonctions de terme général $f_n(x) = a_n x^n$, où $x \in \mathbb{R}$, respectivement $f_n(z) = a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$. On appelle domaine de convergence D de la série entière l'ensemble des x, repectivement z tels que la série converge.*

Pour simplifier, on se place dans le cas d'une variable complexe z, le cas réel s'en déduisant sans peine.

Exemple 3.1 *Cherchons l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série est absolument convergente sur $\mathbb{R}$, donc le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on dispose de plusieurs méthodes pour déterminer la nature d'une série entière en tant qu'une série de fonctions.

Lemme 3.1 *(d'Abel) S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(|a_n z_0|^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Démonstration. Si $z_0 = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, donc la propriété est triviale.

Si $z_0 \neq 0$, or la suite $(|a_n z_0|^n)$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. On a

$$|a_n z^n| = \qquad \times \qquad \leq \qquad .$$

Comme

$$\left|\frac{z}{z_0}\right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1,$$

donc la série géométrique $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ converge, et la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

3.1.1 Rayon de convergence d'une série entière

Définition 3.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre*

$$R = \sup\left\{r \geq 0, \ \ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\right\} \in [0, +\infty]$$

est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Le rayon existe car $0 \in \left\{r \geq 0, \ \ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\right\}$.

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 3.1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors,*

(i) *Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

(ii) *Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.*

Démonstration. Par définition de R, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, car $a_n z^n \nrightarrow 0$.

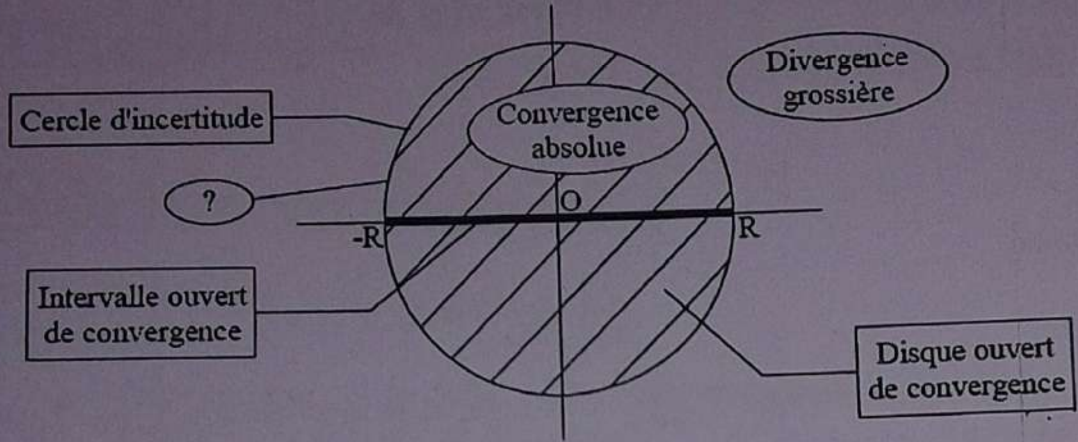
Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $(R \neq 0)$ et $r > 0$ tel que $|z| < r < R$; $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée par une constante M, donc

$$|a_n z|^n = \qquad \times \qquad \leq \qquad .$$

La série géométrique $\sum \left|\frac{z}{r}\right|^n$ étant convergente donc il en est de même pour $\sum a_n z^n$.

Définition 3.3 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le disque ouvert $D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence. S'il s'agit d'une série entière réelle, l'intervalle $]-R, R[$ est l'intervalle de convergence.*

Remarque 3.1 *Si $R=+\infty$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si $R=0$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z=0$ et diverge pour tout $z \neq 0$. A l'intérieur du disque, la série converge absolument mais sur le bord du disque de convergence $|z|=R$, on ne peut rien affirmer à priori.*



Exemple 3.2 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est $R=1$ et la série converge aussi sur le bord du disque de convergence. Si $|z|>1$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \quad ,$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|z|<1$, alors

$$\frac{|z|^n}{n^2} < \quad ,$$

donc la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.

Remarque 3.2 *Le rayon de convergence d'une série entière polynôme est $R=+\infty$.*

Dans la pratique pour calculer le rayon de convergence on utilise la règle de d'Alembert ou de Cauchy suivantes.

Théorème 3.2 *(Règle de d'Alembert) On considère une série entière $\sum a_n z^n$. Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in [0,+\infty]$, alors le rayon de convergence R de la série est donné par $R=\frac{1}{l}$, avec $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$.*

Démonstration. Par application de la règle de d'Alembert à la série $\sum a_n z^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \\
&= l\,|z|.
\end{aligned}$$

- Si $l = 0$, alors la série est convergente sur $\mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.
- Si $l = +\infty$, alors la série est divergente sur $\mathbb{C}^*$, donc $R = 0$.
- Si $l \in]0, +\infty[$, alors la série est convergente pour tout z tel que $l\,|z| < 1$ c'est à dire $|z| < \frac{1}{l}$ et divergente pour tout z tel que $l\,|z| > 1$ c'est à dire$|z| > \frac{1}{l}$. Donc $R = \frac{1}{l}$.

Remarque 3.3 *On peut pas calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{2n}$, mais si on pose $Z = z^2$, on démontre facilement que le rayon de convergence est 1.*

Corollaire 3.1 *Si a_n est une fraction rationnelle (ou un polynôme) non nulle en n, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est 1.*

Théorème 3.3 ***(Règle de Cauchy)*** *On considère une série entière $\sum a_n z^n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence R de la série est donné par $R = \frac{1}{l}$, avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.*

Démonstration. Immédiate.

Exemples 3.1 *:*

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n^\alpha}$ est 1, en particulier, si $\alpha = 1$, le rayon de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge malgré que $|1| = |-1| = 1$.*
2. *Pour $\sum \frac{z^n}{n^{3n}}$. Appliquons le critère de Cauchy, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^{3n}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0,$$

donc $R = +\infty$.

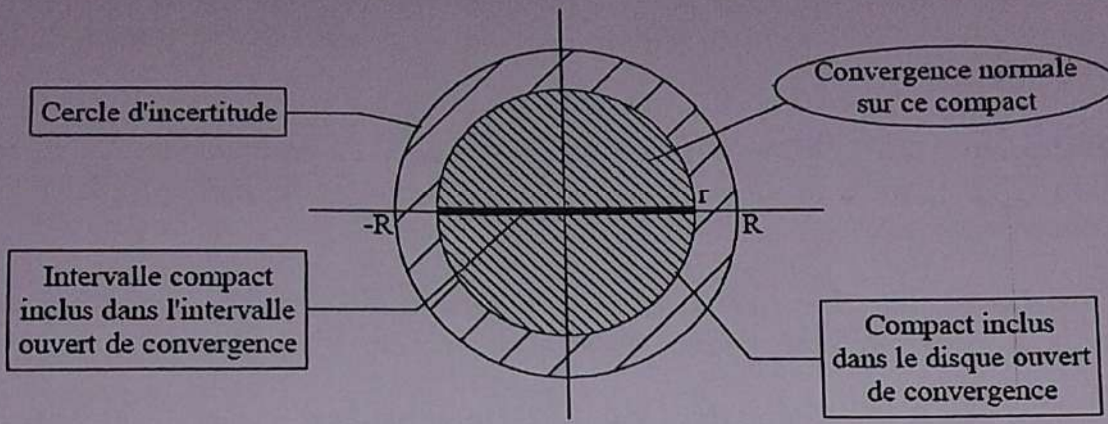
Proposition 3.1 ***(Rayon de convergence et relations de comparaison)*** *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b*

1. *Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.*
2. *Si $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.*
3. *Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.*

Démonstration. Immédiate.

Théorème 3.4 *Une série entière d'une variable complexe – ou réelle – $\sum a_n z^n$ est normalement – donc uniformément – convergente sur tout disque compact*

$\overline{D}_r$ inclus dans le disque ouvert de convergence D_R; $(0 < r < R)$.



Démonstration. Pour tout $z \in \overline{D}_r$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, r^k.$$

La convergente normale de $\sum a_n z^n$ sur $\overline{D}_r$ résulte de la convergence de la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \, r^k$.

Remarque 3.4 *Une série entière de rayon de convergence R n'est pas en général uniformément convergente sur le disque de convergence D_R.*

Soit, par exemple, la série entière d'une variable réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, Ici $D_R =$ $]-1,1[$. On a

$$\sup_{]-1,1[} |x^n| = 1 \nrightarrow 0,$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ n'est pas uniformément convergente.

3.1.2 Étude sur le bord du disque de convergence

Proposition 3.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si*

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| \, R^n \neq 0,$$

alors $\sum a_n z^n$ diverge en tout point du bord du disque de convergence.

Proposition 3.3 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si cette série converge absolument en un point du bord du disque de convergence, alors elle converge absolument en tout point du bord du disque de convergence.*

3.2 Opérations sur les séries entières

3.2.1 Addition et multiplication de séries entières

Théorème 3.5 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et de sommes respectives S_a et S_b.*

i) *La série entière $\sum(a_n + b_n)z^n$ a un rayon de convergence $R_s \geq \min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme la fonction $S_a + S_b$.*

ii) *La série entière produit $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ a un rayon de convergence $R_p \geq \min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme la fonction $S_a S_b$.*

Démonstration. *i)* Pour $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les deux séries sont convergentes, donc $R_s \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout z tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a $\sum(a_n + b_n)z^n = S_a + S_b$.

ii) Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les deux séries sont absolument convergentes, d'après le Théorème du produit de Cauchy pour les séries numérique, la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente, donc $R_p \geq \min\{R_a, R_b\}$ et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \ \forall z, \ \ |z| < \min\{R_a, R_b\}.$$

Remarque 3.5 *Si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = \min(R_a, R_b)$.*

Exemple 3.3 *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n} z^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$. Par contre la série somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^k$, a pour rayon de convergence $R_s = 2$.*

3.2.2 Continuité, dérivation et intégration des séries entières d'une variable réelle

Les théorèmes suivants se déduit directement du Théorème 3.4 et les Théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions, voir Chapitre 2.

Théorème 3.6 *(Continuité) La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière est continue sur l'intérvalle ouvert de convergence I_R.*

Théorème 3.7 *(Dérivation) La somme d'une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction de classe C^∞ sur son intervalle de convergence I_R $(R \neq 0)$ et on a*

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\, a_n x^{n-p}.$$

De plus la série obtenue par dérivation p fois a le même rayon de convergence que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Démonstration. Soit R' le rayon de convergence de la série dérivée. Si $|x| > R$,

$$n|a_n||x|^n \nrightarrow 0,$$

sinon $|a_n||x|^n \longrightarrow 0$, donc $a_n x^n \longrightarrow 0$, ce qui est absurde avec la divergence grossière de la série entière donc $R' \leq R$.

Si $|x| < R$, il existe $r > 0$ tel que $|x| < r < R$, et on a

$$|na_n x^n| = |a_n r^n| .n\left(\frac{|x|}{r}\right)^n \longrightarrow 0,$$

car $|a_n r^n| \longrightarrow 0$ et $n\left(\frac{|x|}{r}\right)^n \longrightarrow 0$. Donc $|na_n x^n|$ est bornée, ce qui implique que $R \leq R'$. Donc la série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence. Par récurrence, en déduire le résultat.

La dérivabilité est évidente.

Théorème 3.8 *(Intégration) On peut intégrer terme à terme une série entière réelle sur son tout intervalle fermé inclu dans I_R.*

Donc pour tout a, $b \in I_R$, on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

De plus la série obtenue par intégration a le même rayon de convergence que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Corollaire 3.2 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 0$ avec :*

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La primitive de f nulle en 0 est la fonction F définie par :

$$\forall x \in]-R, R[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 3.4 *Étudions la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$ *est* 1, *or la série numérique* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, *donc la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$ *converge normalement sur* $[-1, 1]$, *d'où la continuité de la fonction* f *sur* $[-1, 1]$.

3.3 Développement en série entière

3.3.1 Développement en série entière en un point

Définition 3.4 *Soit* $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie au voisinage de* 0. *On dit que* f *est développable en série entière en* 0 *(ou à l'origine) si et seulement si il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *non nul et un voisinage* U *de* 0 *tels que :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \ \forall z \in U \subset D_R.$$

Définition 3.5 *Soit* $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie au voisinage de* z_0. *On dit que* f *est développable en série entière en* z_0 *si et seulement si la fonction* $z \longmapsto f(z_0 + z)$ *est développable en série entière à l'origine, donc si et seulement si il existe une série entière* $\sum a_n (z - z_0)^n$ *de rayon de convergence* R *non nul et un voisinage* U *de* z_0 *tels que :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in U \subset D_R,$$

Exemple 3.5 *La fonction* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ *est développable en série entière à l'origine, car*

$$\forall z \in D_1, \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \quad .$$

La définition 3.5 ramène tout problème de développement en série entière à un problème de développement en série entière à l'origine.

Proposition 3.4 *On considère deux fonctions* f *et* g *développables en série entière en* 0, *de développements respectifs* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

i) *Pour tout,* $\lambda \in \mathbb{C}$, *la fonction* $f + \lambda g$ *est développable en série entière en* 0 *et ce développement est* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n$.

ii) *La fonction* fg *est développable en série entière en* 0 *et son développement est le produit de Cauchy de ceux de* f *et de* g.

Théorème 3.9 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est développable en série entière à l'origine (resp. en x_0), ce développement est unique : c'est la série de Mac-Laurin*[1] *de f (resp. la série de Taylor*[2] *de f en x_0). i.e :*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ au voisinage de } 0 \\
(\text{resp. } f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ au voisinage de } x_0),
\end{aligned}
$$

donc f est de C^∞ au voisinage de 0 au voisinage de x_0).

Mac-Laurin

Taylor

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème de dérivation pour les séries entières.

Remarque 3.6 *La réciproque n'est pas vraie en général, une fonction f possédant des dérivées de tout ordre en x_0, n'est pas nécessairement égale à la série entière. Vérifier, en exercice, que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$
f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}
$$

est de classe C^∞ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0, car elle possède en effet en 0 une série de Mac-Laurin identiquement nulle.

Proposition 3.5 *Si f est développable en série entière avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors*

i) *f est paire $\Longleftrightarrow \forall n \geq 0, \quad = 0.$*

ii) *f est impaire $\Longleftrightarrow \forall n \geq 0, \quad = 0.$*

[1] Colin Maclaurin (Kilmodan (Argyll and Bute), février 1698 - Édimbourg 14 juin 1746) est un mathématicien écossais. Il fut professeur de mathématiques au Marischal College à Aberdeen de 1717 à 1725 et à l'université d'Édimbourg de 1725 à 1745.

[2] Brook Taylor est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.

Théorème 3.10 *(Condition nécessaire et suffisante) Soit $I =]-R, R[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$. Pour que f soit développable en série entière sur I, il faut et il suffit que le reste de Mac-Laurin de f converge simplement vers 0 sur I. i;e :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(x\theta_x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0, \ \forall x \in I$$

avec $\theta_x \in]0, 1[$.

Théorème 3.11 *(Condition suffisante) Soit $I =]-R, R[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$. Pour que f soit développable il suffit que les dérivées successives de f soient bornées sur I. C'est à dire :*

$$\exists M > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in I; \ \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M.$$

Démonstration. On a

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(x\theta_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq M \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

De la convergence de la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n!}$, on déduit que $\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et de même pour le reste de Mac-Laurin de f.

3.3.2 Applications aux fonctions usuelles

1. $\forall x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ et } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

donc

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Et de

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

en déduit que

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ \forall x \in]-1, 1[. \qquad (3.1)$$

On peut remarquer que l'égalité (3.1) reste valable si $|x| = 1$. Voir plus loin, dans la série N° 4.

2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \text{ (Voir Série N° 2)}$$

Or $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, donc

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. La fonction sin est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

donc $\left|\sin^{(n)} x\right| \leq 1$, et on déduit que la fonction sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

De même, on démontre que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Soit la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. f est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall n \geq 0, \ \forall x > -1; \ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

La série de Mac-Laurin de f est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$$

de rayon de convergence $R = 1$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, le reste intégral d'ordre n de la formule de Mac-Laurin sur l'intervalle fermé I de bornes 0 et x, $I = [0, x]$ ou $I = [x, 0]$, est :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} \, dt. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} \, dt = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} \, dt,$$

de $\forall t \in I$, $\frac{x-t}{1+t} \leq |x|$ (étudier le signe de x), on déduit :

$$|R_n(x)| \leq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|x|^n}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|x|^n}{n!}$ est, d'après le critère de d'Alembert, le terme général d'une série convergente, donc il tend vers 0, donc $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
On obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}.$$

Remarques 3.1 :

1. *Pour déterminer la somme d'une série entière, plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple utiliser le Théorème de dérivation ainsi que celui d'intégration. On peut aussi utiliser une équation différentielle ou encore décomposer le terme général de la série en éléments simples et calculer la somme des séries correspondantes, etc.*
2. *De la même façon on définit* $\exp(z)$, $\cos(z)$, $\sin(z)$, $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$, *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *Les développements de ces fonctions donnés dans* $\mathbb{R}$ *sont encore valables dans* $\mathbb{C}$. *Mais la fonction la plus utilisée est l'exponentielle complexe.*

3.4 Résolution des équations différentielles à l'aide des séries entières

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + xy' + y = 0. \tag{E}$$

Cherchons la série entière solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
On montre que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^{2n},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vous verrez d'autres exemples dans le chapitre des fonctions spéciales, cours d'Analyse 4.

Chapitre 4

Séries de Fourier

Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. Il est connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur ou l'étude d'une corde vibrante.

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions d'un type particulier, qui servent à étudier les fonctions périodiques. L'idée est d'exprimer une fonction 2π-périodique quelconque comme une série de fonctions 2π-périodiques simples, de la forme $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Les signaux exponentiels complexes jouent un rôle essentiel en traitement du signal. En effet, tout signal périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de signaux monochromatiques

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega n t}.$$

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

4.1 Séries trigonométriques

Définition 4.1 *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \text{ ou } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \ x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

où $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres complexes.

Remarques 4.1 *:*

1. *Rappelons que* $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (\quad + \quad) \cos(nx) + i(\quad - \quad) \sin(nx)$, *ce qui permet de passer des c_n aux a_n et b_n.*
2. *Comme* $\sin 0 = 0$, *on peut sans restreindre la généralité, poser $b_0 = 0$. En outre, nous avons $a_0 = 2c_0$, donc on peut désigné par $\frac{a_0}{2}$ le terme d'indice 0. Ceci provient du fait que a_0 est choisi de façon à se calculer par la même formule (voir plus loin) que les autres a_n, donc la série (4.1) s'écrit*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \ x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

3. *La série trigonométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.*
4. *La série (4.1) n'est pas nécessairement convergente, par exemple la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n}$ n'est pas convergente pour $x = 2\pi$.*

Proposition 4.1 *Si les séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}$ ou $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (4.1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En outre, sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.*

Démonstration. Immédiate.

Exemple 4.1 *La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.2 *Si la série trigonométrique (4.1) converge vers $f(x)$ sur $[-\pi, \pi]$, alors $f(x)$ est 2π-périodique, c-à-d., $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Proposition 4.3 *Si les séries $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réelles positives, décroissantes, et tendent vers 0 alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi[$. De plus, sa somme est une fonction continue sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. C'est une application directe du Théorème d'Abel-Dirichlet. Pour cela il suffit tout simplement de montrer que les sommes suivantes sont majorées indépendamment de n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \text{ et } C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{(1 - \cos(n+1)x) - i\sin(n+1)x}{(1 - \cos x) - i\sin x} \\
&= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)x}{2} - 2i\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}} \times \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + i\sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times e^{i\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}i} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times e^{i\frac{nx}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cos\frac{nx}{2} \text{ et } S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2}.$$

Et on a

$$|C_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \text{ et } |S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

d'où la convergence simple de la série trigonométrique sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $a \in]0, \pi[$. Pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$, on a

$$\frac{a}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{a}{2}|},$$

d'où la convergence normale, donc uniformément sur $[a, 2\pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi[$. Donc la fonction somme est continue sur $]0, 2\pi[$, est puisque la fonction est 2π-périodique, donc elle est continue sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4.2 *La série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

4.2 Séries de Fourier, Théorème de Dirichlet

4.2.1 Séries de Fourier

Théorème 4.1 *(Unicité de la décomposition) Soit f une fonction définie, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\, dx| < +\infty\right)$ 2π-périodique et développable en série trigonométrique*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Si cette série converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$, ce développement est unique et on a :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \ \forall n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} f(x) \cos(kx) &= \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx), \\ \text{et } f(x) \sin(kx) &= \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx), \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx)\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos($$

On calcule d'abord les intégrales auxiliaires suivantes, dans lesquelles n et k sont des entiers strictement positifs :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)\, dx &= \begin{cases} 0, \text{ si } n \neq k \\ \pi, \text{ si } n = k \end{cases}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx)\, dx &= \begin{cases} 0, \text{ si } n \neq k \\ \pi, \text{ si } n = k \end{cases}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx)\, dx &= 0, \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx)\, dx = 0. \end{aligned}$$

et en traitant le cas $k = 0$, on obtient :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

Ce qui entraine que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \forall n \geq 0 \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \forall n \geq 1.$$

Remarque 4.1 *On peut remplacer l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par un autre intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0, 2\pi]$.*

Définition 4.2 *Soit f une fonction définie, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et 2π-périodique. Les coefficients $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ définis par (4.3) s'appellent les coefficients de Fourier de la fonction f et la série trigonométrique (4.2) est dite série de Fourier de f.*

En utilisant la même technique utilisée dans la démonstration du Théorème 4.1, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique écrite sous forme complexe qui converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers la fonction f, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont aussi appelés coefficients de Fourier de f.

Remarque 4.2 *On peut noter les coefficients de Fourier d'une fonction f par $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$.*

Proposition 4.4 :

(i) *Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$.*

(ii) *Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, $\forall n \geq 1$.*

Pour une fonction f T-périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

est 2π-périodique.

Définition 4.3 *Pour une fonction f, T-périodique, la série de Fourier associée à la fonction f est donnée par :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \text{ où } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi nx}{T}i} \tag{4.4}$$

Théorème 4.3 *(Unicité de la décomposition) Soit f une fonction T-périodique intégrable sur $[0,T]$, et développable en série Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Si cette série converge uniformément sur $[0,T]$, ce développement est unique et on a :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{T})dx, & \forall n \geq 0 \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx, & \forall n \geq 1 \\ c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi nx}{T}i}dx, & \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

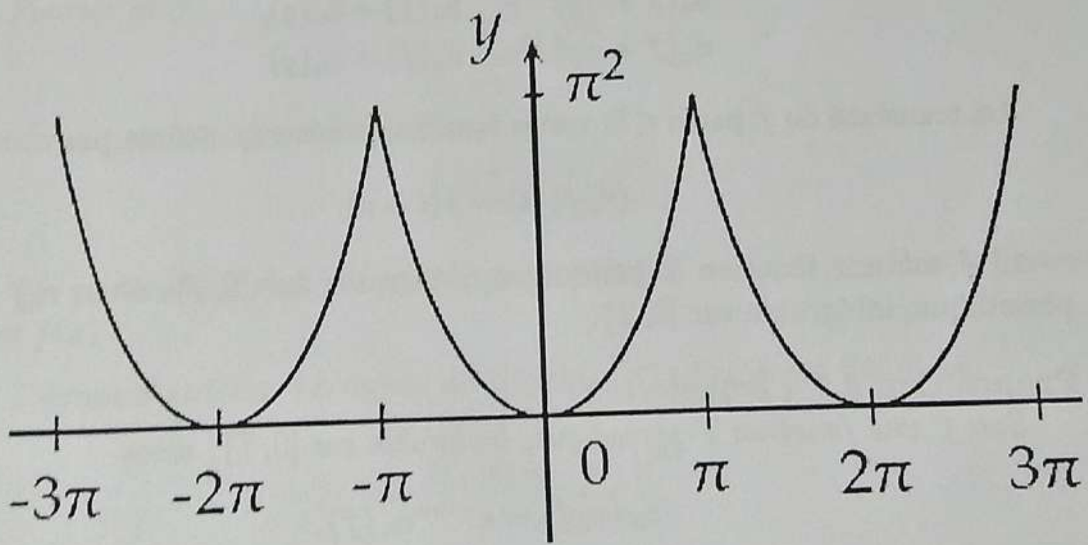
Remarque 4.3 *Si on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la série de Fourier (4.4) devient :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega nx) + b_n \sin(\omega nx) \text{ où } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\omega nxi}.$$

ω s'appelle la fréquence fondamentale de la série de fourier, mais en physique s'appèle la pulsation.

Dans toute la suite, on ne considère que des fonctions 2π-périodiques : Cela ne restreint pas la généralité, on ramènera, si l'on veut, l'étude d'une fonction f, T-périodique, à celle de la fonction 2π-périodique g.

Exemple 4.3 *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x^2$.*



On a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \\ \text{et } b_n &= 0, \text{ car } f \text{ est paire.} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

et

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{\pi^2}{3} \text{ et } c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}dx= \underline{\hspace{2cm}}.$$

Donc la série complexe de Fourier de f est

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\underline{\hspace{2cm}}e^{inx}.$$

Remarque 4.4 *Dans l'exemple précédent, on peut déduire c_n à paritr de a_n et b_n.*

4.2.2 Opérations sur les séries de Fouriers

Les propositions suivantes sont faciles à vérifier.

Proposition 4.6 *(Somme)*
Soient f et g deux fonctions T-périodiques intégrables sur $[0,T]$. Alors pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_n(f+\alpha g) &= a_n(f)+a_n(g),\\ b_n(f+\alpha g) &= b_n(f)+b_n(g),\\ c_n(f+\alpha g) &= c_n(f)+c_n(g). \end{aligned}$$

La translaté de f par $a\in\mathbb{R}$ est la fonction notée $\tau_a f$ définie par

$$(\tau_a f)(t)=f(t-a).$$

Si f est une fonction T-périodique, intégrable sur $[0,T]$, alors $\tau_a f$ est T-périodique, intégrable sur $[0,T]$.

Proposition 4.7 *(Translation)*
Soit f une fonction T-périodique, intégrable sur $[0,T]$, alors

$$c_n(\tau_a f)=e^{-ina}c_n(f).$$

Proposition 4.8 *(Dérivée)*
Si f est une fonction dérivable T-périodique telle que f' et f sont intégrables sur $[0,T]$, alors

$$c_n(f)=\frac{1}{ni\omega}c_n(f').$$

Preuve. La fonction f' est T-périodique et par intégration par parties on retrouve l'égalité.

De façon analogue à ce qui se passe quand on développe une fonction en série entière, étant donnée une fonction f, 2π-périodique dont les coefficients de Fourier sont définis. Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

4.2.3 Conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série de Fourier

Étant une fonction 2π-périodique f, on se demande pour quelles conditions imposées à f, sa série de Fourier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de la fonction aux points considérés ?

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux si elle est continue sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points, en lesquels elle admet une limite finie à droite et à gauche. Une fonction est de C^1 par morceaux si elle est continue par morceaux et admet une dérivée, sauf éventuellement en un nombre fini de point, et si cette dérivée est elle-même continue par morceaux.

Pour simplifier, on pose

$$f\left(x^+\right) := \lim_{t \longrightarrow x^+} f(t) \text{ et } f\left(x^-\right) := \lim_{t \longrightarrow x^-} f(t).$$

Théorème 4.4 *(Dirichlet 1824)*

Soit f une fonction 2π-périodique de C^1 par morceaux $[0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_k e^{inx}$$

converge simplement en tout point x vers

$$\frac{f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)}{2}.$$

En particulier, si f est continue au point x, sa série de Fourier converge vers $f(x)$.

Démonstration. Le noyau de Dirichlet d'indice n est défini par :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} & D_n \text{ est paire et } 2\pi\text{-périodique;} \\ D_n(2k\pi) &= 2n+1, \ \forall k \in \mathbb{Z} \ ; \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1; \\ D_n(t) &= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \ \forall t \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En effet, si $q \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{2n} q^{-n} q^k = q^{-n} \underline{\qquad\qquad} \\
&= \frac{q^{-n-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{-1}{2}}} \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},
\end{aligned}$$

et avec les formules d'Euler, on obtient

$$D_n(t) = \underline{\qquad\qquad}, \ \forall t \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Posons $S_n^f(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
S_n^f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x-u) + f(x+u)\right] D_n(u)\, du.
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\, du = 1$, posons $l = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
S_n^f(x) - l &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x-u) + f(x+u)\right] D_n(u)\, du \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x^+) + f(x^-)\right] D_n(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x-u) - f(x^-) + f(x+u) - f(x^+)\right] D_n(u)\, du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[\frac{f(x-u) - f(x^-) + f(x+u) - f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right] \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x^-) + f(x+u) - f(x^+)}{u} \times \frac{\frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \times \sin\Big((2n+1
\end{aligned}$$

On sait que f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc on déduit l'existence des limites :

$$\begin{aligned}
\lim_{u \longrightarrow 0^+} \frac{f(x-u) - f(x^-)}{u} &= -\lim_{u \longrightarrow 0^-} \frac{f(x+u) - f(x^-)}{u} = -f'(x^-) \\
et \ \lim_{u \longrightarrow 0^+} \frac{f(x+u) - f(x^+)}{u} &= f'(x^+).
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{u\longrightarrow 0^+} \frac{f(x-u)-f(x^-)+f(x+u)-f(x^+)}{u} \times \frac{\frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = f'(x^+) - f'(x^-)$$

La fonction

$$g(u) = \frac{f(x-u)-f(x^-)+f(x+u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)},$$

est continue par morceaux sur $[0,\pi]$, donc elle est intégrable sur $[0,\pi]$.

En appliquant le Lemme de Lebesgue suivant, en déduit le résulat souhaité.

Lemme 4.1 *(Lebesgue[1]) Soient a et b deux réels tel que $a<b$, et $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\, e^{int} dt = 0,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt = 0 \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = 0.$$

Lebesgue

Remarque 4.5 *Le Lemme de Lebesgue indique que les coefficients de Fourier $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ d'une fonction continue par morceaux sur le segment dont sa longueur est la période de f, tendent vers 0 lorsque n tend vers $\pm\infty$.*

Exemples 4.1 :

1. *Dans l'exemple 4.3, la fonctions f vérifie les conditions de Dirichlet et continue, donc*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx),\ \forall x\in[-\pi,\pi].$$

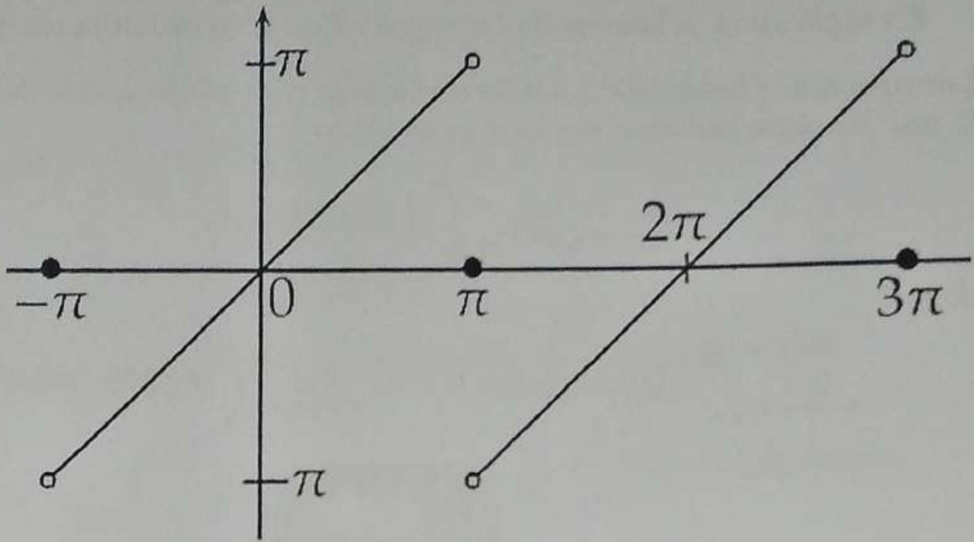
[1] Henri-Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée initialement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à l'université de Nancy en 1902. Il fut l'un des grands mathématiciens français de la première moitié du XXe siècle.

En particulier pour $x = 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \qquad .$$

2. *Soit g la fonction 2π-périodique définie par :*

$$g(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$



Calculons les coefficients de Fourier de g.

$$\begin{aligned} a_n &= 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \qquad , \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

L'égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est nulle.

Proposition 4.9 *Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$. La série de Fourier de f converge normalement (et par suite absolument et uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. En exercice.

4.2.4 Interprétation géométrique des séries de Fourier

Soit $\mathcal{F}=\left\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C},\ 2\pi\text{-periodique tel que } \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx<+\infty\right\}$.
On peut définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ par :

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}dx.$$

Soit $f\in\mathcal{F}$. Sa série de Fourier n'est rien d'autre que sa décomposition suivant la base orthonormée infinie $\mathcal{B}=\left\{x\longmapsto e^{inx};n\in\mathbb{Z}\right\}$ et les composantes de f sont les coefficients de Fourier c_n, la projection orthogonale de f sur e^{inx}, c'est à dire :

$$c_n=(f(x),e^{inx})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}dx.$$

À partir de l'identité de Parseval dans les espaces préhilbertien complet, on déduit le théorème suivant :

Théorème 4.5 ***(Égalité de Parseval[2])*** *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ de carée, alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=\frac{|a_0|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Parseval

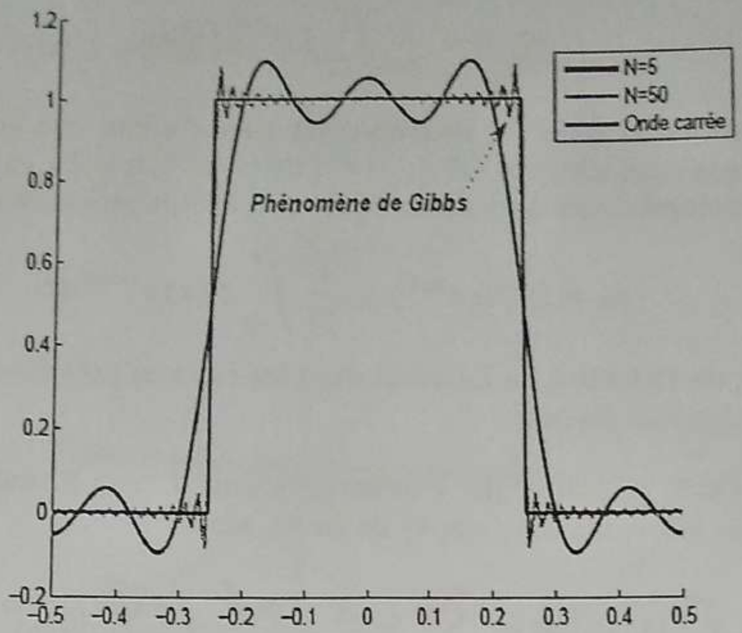
4.2.5 Phénomène de Gibbs[3]

Bien que, sous les hypothèses du Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge ponctuellement vers $\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$ en tout point x, cela ne signifie pas que le graphe de la suite des sommes partielles S_n^f de la série de

[2] Marc-Antoine Parseval des Chênes est un mathématicien français, né en 1755 à Rosières-aux-Salines et mort en 1836 à Paris. Son nom est donné à l'égalité de Parseval, une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

[3] Josiah Willard Gibbs (New Haven, 11 février 1839 - New Haven, 28 avril 1903) est un physico-chimiste américain. En mathématiques, il est aussi un des fondateurs (avec Oliver Heaviside) de l'analyse vectorielle. Et il a redécouvré le phénomène de Gibbs dans la théorie des séries de Fourier (à son insu cependant, ce phénomène ayant été découvert une trentaine d'années auparavant par le mathématicien anglais Henry

Fourier de f converge vers celui de f lorsque $n \longrightarrow +\infty$. En effet, au voisinage des discontinuités du signal : la fonctions S_n^f connaît alors une oscillation d'amplitude non négligeable. Cette oscillation empêche la convergence de S_n^f vers f. Cette problématique connu sous le nom de phénomène de Gibbs.



Gibbs

Plusieurs méthodes existent permettant d'améliorer la convergence de la série de Fourier et de réduire le phénomène de Gibbs. Parmi celles-ci, la méthode de Fejér.

4.3 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesàro

Nous avons vu qu'une série de Fourier est convergente avec certaines conditions suffisantes. La question qui se pose : est-ce que la série de Fourier associée à une fonction continue converge toujours ? La réponse est non. Fejér a montré que la série de Fourier d'une fonction continue pouvait diverger, par contre elle converge vers f au sens de Cesàro[4].

Cesàro

Définition 4.4 *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ une série de nombres réels ou complexes et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles, posons σ_n la moyenne arithmétique de ses n premières sommes partielles*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k.$$

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge au sens de Cesàro (ou en moyenne) et a pour somme σ si et seulement si la suite (σ_n) converge vers σ.

Ernesto Cesàro a démontré qu'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge au sens usuel et a pour somme S, alors elle converge au sens de Cesàro vers la même somme. Inversement, une série peut converger au sens de Cesàro et diverger au sens usuel. Par exemple la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge au sens usuel mais converge au sens de Cesàro vers $\frac{1}{2}$. En effet, on a

$$\begin{cases} S_{2n} = 1 \\ S_{2n+1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_{2n} = \frac{1}{2} \\ \sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \end{cases},$$

d'où le résultat.

Théorème 4.6 *(Fejér[5]) Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Alors, la série de Fourier de f converge au sens de Cesàro vers f, uniformément sur $\mathbb{R}$.*

[4] Ernesto Cesàro est un mathématicien italien, né le 12 mars 1859 à Naples et mort le 12 septembre 1906 à Torre Annunziata, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies.

[5] Lipót Fejér est un mathématicien hongrois, né le 9 février 1880 à Pécs et mort le 15 octobre 1959 à Budapest. Il a publié un théorème de convergence remarquable pour les séries de Fourier.

Fejér

Preuve. Avant de commencer la démonstration, on définit le noyau de Fejér d'indice n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k,$$

où D_k est le noyau de Dirichlet d'indice k. F_n vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} & F_n \text{ est paire et } 2\pi\text{-périodique;} \\ F_n(2k\pi) &= 2n+1,\ \forall k \in \mathbb{Z}\ ;\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1; \\ F_n(t) &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2,\ \forall t \notin 2k\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En effet, pour tout $t \notin 2k\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}\left(e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t}\right) = \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikt}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{t}{2}}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) = \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{int}-1}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nt}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant le Théorème. On a :

$$\begin{aligned} \sigma_n^f(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k^f(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)\,du, \end{aligned}$$

donc
$$\sigma_n^f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-u) - f(x)]\, F_n(u)\, du.$$

et comme F_n est positive, donc
$$\left|\sigma_n^f(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-u) - f(x)|\, F_n(u)\, du.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue et périodique, donc uniformément continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que
$$|u| < \eta \Longrightarrow |f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quitte à remplacer η par $\min(\eta, \pi)$, on peut supposer $\eta < \pi$, et on décompose l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}$ en $\int_{-\eta}^{\eta} + \int_{\eta\leq|u|\leq\pi}$. Et on a
$$\int_{-\eta}^{\eta}|f(x-u) - f(x)|\, F_n(u)\, du \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\eta}^{\eta} F_n(u)\, du \leq \pi\varepsilon. \tag{4.5}$$

Or
$$|f(x-u) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty,$$

donc
$$\int_{\eta\leq|u|\leq\pi}|f(x-u) - f(x)|\, F_n(u)\, du \leq 2\|f\|_\infty \int_{\eta\leq|u|\leq\pi} F_n(u)\, du.$$

Pour tout $\eta \leq |u| \leq \pi$, on a
$$F_n(u) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2 \leq \frac{1}{n\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} \leq \frac{1}{n\sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)},$$

donc $F_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $[-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$, d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$ on a :
$$F_n(u) \leq \frac{\pi\varepsilon}{2\|f\|_\infty} \Longrightarrow \int_{\eta\leq|u|\leq\pi}|f(x-u) - f(x)|\, F_n(u)\, du \leq \pi\varepsilon. \tag{4.6}$$

En utilisant (4.5) et (4.6), on obient
$$\left|\sigma_n^f(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \times 2\pi\varepsilon = \varepsilon, \ \forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

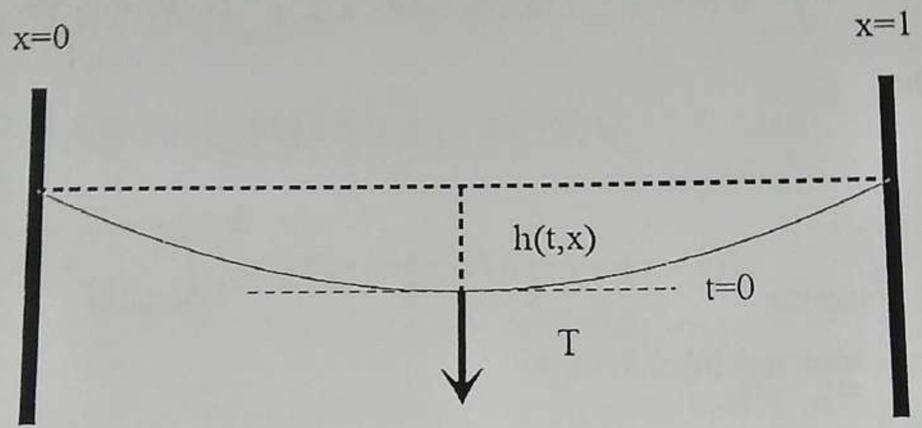
Ce qui fallait démontrer.

4.4 Application : équation des ondes à une dimension

L'étude des vibrations d'une corde, d'une membrane, des oscillations électromagnétiques, barres élastiques, tuyaux sonores ..., conduit à des équations aux dirivées partielles. La plus simple est l'équation des ondes à une dimension (ou équation des cordes vibrantes) à vitesse constante c :

$$(4.7)\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0,\ \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[& \\ h(x,0) = h_0(x),\ \forall x \in [0,1] & \text{(Conditions initiales de Cauchy)} \\ \frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = 0,\ \forall x \in [0,1] & \text{(Conditions initiales de Von Neuman)} \\ h(0,t) = h(1,t) = 0,\ \forall t \geq 0. & \text{(Conditions aux limtes)} \end{cases}$$

Il s'agit d'une corde élastique de longueur $L = 1$ fixée aux extrémités $x = 0$ et $x = 1$. On suppose de plus que la corde est soumise à une tension T et qu'elle est relâchée avec une vitesse initiale nulle. Si on désigne par $h(t,x)$ l'écart par rapport la position au repos d'un point x de la corde à l'instant t.



Méthode de séparation des variables et séries de Fourier

On oublie momentanément les conditions initiales $h(x,0) = h_0(x)$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = 0$ et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0,\ \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[\\ h(0,t) = h(1,t) = 0,\ \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

qui se mettent sous la forme $h(x,t) = U(x)K(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} U(x)K''(t) &= c^2U''(x)K(t) \Longleftrightarrow \frac{K''(t)}{c^2K(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} = \lambda \in \mathbb{R}, \\ h(0,t) &= 0 \Longleftrightarrow U(0) = 0,\ h(1,t) = 0 \Longleftrightarrow U(1) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent le problème (4.7) est équivalent aux deux problèmes suivants

$$\begin{cases} U''(x) - \lambda U(x) = 0,\ \forall x \in]0,1[\\ U(0) = U(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$K''(t) - \lambda c^2 K(t) = 0,\ \forall t > 0. \tag{2}$$

Si $\lambda > 0$, les solutions de l'équation (1) prennent la forme $U(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Les conditions $U(0) = U(1) = 0$ nécessitent d'avoir :

$$a = -b \text{ et } e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}},$$

ce qui est impossible.

Si $\lambda \leq 0$, les solutions s'écrivent sous la forme

$$U(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}ix} + be^{-\sqrt{-\lambda}ix}.$$

Et de même, on a $a = -b$ et $e^{\sqrt{-\lambda}i} = e^{-\sqrt{-\lambda}i}$, donc

$$e^{2\sqrt{-\lambda}i} = 1.$$

Dès lors il apparaît que les seules valeurs convenables pour $\lambda \leq 0$ sont les valeurs pour lesquelles $\sqrt{-\lambda} \in \pi\mathbb{Z}$, soit encore $\lambda = -(n\pi)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la solution est multiple de $U(x) = \sin(n\pi x)$ auquel correspond un facteur temporel oscillant de la forme $K(t) = a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)$. (Solution de (2)). Toute combinaison finie de telles fonctions est réciproquement solution de (4.7). Par conséquent, les solutions de la forme $u(x,t) = K(t)U(x)$ du problème (4.7) sont

$$h_n(x,t) = [\alpha_n \cos(n\pi ct) + \beta_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme le problème (4.7) est linéaire donc, d'après le principe de superposition, les séries

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n \cos(n\pi ct) + \beta_n \sin(n\pi ct)] \sin(n\pi x)$$

sont des solutions du (4.7). Une telle fonction vérifie aussi les conditions initiales $h(x,0) = h_0(x)$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(x,0) = 0$ si et seulement si on a :

$$h_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(n\pi x) \text{ et } \beta_n = 0.$$

On prolonge la fonction h_0 en une fonction $\widetilde{h}$ définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2-périodique par :

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h_0(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ -h_0(-x), & \text{si } x \in [-1,0], \end{cases}$$

On suppose que h_0 est continue vérifiant les conditions de Dirichlet. $\widetilde{h}$ est alors continue satisfaisant les conditions de Dirichlet et d'après l'unicité de la décomposition, on a

$$\alpha_n = b_n\left(\widetilde{h}\right) = 2\int_0^1 h_0(x)\sin(n\pi x)dx, \ \forall n \geq 1 \text{ et } a_n\left(\tilde{h}\right) = 0.$$

Car $T = 2$, et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Finalement, la solution de (4.7) est

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(n\pi ct)\sin(n\pi x),$$

avec $\alpha_n = 2\int_0^1 h_0(x)\sin(n\pi x)dx,\ \forall n \geq 1.$

Chapitre 5

Fonctions d'une variable complexe

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales concernant les fonctions dépendant d'une variable complexe et à valeurs complexes. L'intérêt de "passer en complexe" apparaîtra clairement dans le calcul d'intégrales par la méthode des résidus. L'étudiant doit être bien connaître les propriétés des fonctions élémentaires d'une variable réelle (polynômes et fonctions rationnelles, exponentielle, logarithme, trigonométriques, hyperboliques), les calculs d'intégrales pour les fonctions numériques d'une variable réelle et les séries entières.

5.1 Au tours du plan complexe $\mathbb{C}$

Rappelons qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ possède deux composantes ; une partie réelle $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et une partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et s'écrit donc sous la forme

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z),$$

où i est un nombre imaginaire vérifie $i^2 = -1$.

Donc $(\mathbb{C}+, .)$ est un espace vectoriel réel de dimention 2. Ici "." est la loi de composition externe qui à chaque $(\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, est associé à $\alpha.z \in \mathbb{C}$.

Grace à cette décomposition de chaque nombre complexe, on peut identifier le plan complexe $\mathbb{C}$ et le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, par l'isomorphisme

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy. \end{array}$$

Rappelons que tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut être défini par un système de coordonnées polaires centré à l'origine

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ est la mesure de l'angle que fait l'axe Ox et la droite qui passe par l'origine $(0,0)$ et le point (x,y).

On déduit que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut être défini en fonction des coordonnées polaires par la formule suivante,

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

où $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est le module de z, dite présentation du nombre complexe z en coordonnées polaires ou représentation trigonométrique du nombre complexe z.

Dans la suite, l'angle θ sera noté $\arg(z) \in [0, 2\pi[$ et sera appelé argument du nombre complexe z. Notons aussi que l'expression polaire d'un nombre complexe z peut être s'écrire sous forme exponentielle

$$z = |z|e^{i\arg(z)},$$

où $e^{i\arg(z)} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on définit deux lois de compositions internes additive et multiplicative définies par :

$$\forall a+ib, x+iy \in \mathbb{C}, \begin{cases} (a+ib)+(x+iy) = (a+x)+i(b+y) \\ (a+ib)\times(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx). \end{cases}$$

Il est claire que $\mathbb{C}(+,\times)$ est un corps commutatif où le nombre complexe nul est l'élément neutre pour l'addition tandis que le nombre complexe $1 = 1+0i$ est l'élément neutre pour la multiplication.

Tout nombre complexe non nul, $x+iy \in \mathbb{C}^*$, possède un inverse relativement à la multiplication donnée par l'expression

$$(x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Rappelons aussi que à chaque nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on associe un nombre complexe conjugué définit par

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z),$$

et on a les propriétés suivantes :

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \bar{\bar{z}} = z \\ |z|^2 = z\bar{z} \in \mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ et $\overline{z_1\times z_2} = \overline{z_1}\times\overline{z_2}$;
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;
4. $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$.

5.2 Topologie du plan complexe

Dans ce paragraphe, on va transporter les éléments de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$ sur le plan complexe $\mathbb{C}$ via l'identification $\varphi : \mathbb{C} \to R^2$.

La fonction module, $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ définit sur $\mathbb{C}$ une structure d'espace vectoriel normé réel, puisqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $|z| = 0 \iff z = 0$;
2. $\forall (\alpha, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$, $|\alpha z| = |\alpha|\,|z|$;
3. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

À la norme $|\cdot|$, on peut associer une distance en posant pour tous les éléments $z = x + iy$ et $\omega = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,

$$d(z, \omega) := |z - \omega| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}.$$

Remarquons que la distance $d(z, \omega)$ n'est autre que la distance $d(\varphi(z), \varphi(\omega))$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}$.

Avec la norme $|.|$ on redéfinit sur le plan complexe $\mathbb{C}$ quelques éléments topologiques déjà définis en analyse II sur les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$.

1. Le disque ouvert de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ est défini dans $\mathbb{C}$ par :
$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\};$$
2. Le disque fermé de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ est défini dans $\mathbb{C}$ par :
$$\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq R\};$$
3. La couronne circulaire ouverte de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ est définie dans $\mathbb{C}$ par :
$$C_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R\};$$
4. La couronne circulaire fermée de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ est définie dans $\mathbb{C}$ par :
$$\overline{C}_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - z_0| \leq R\};$$
5. Une suite de nombres complexes $(z_n) \subset \mathbb{C}$ converge vers $a \in \mathbb{C}$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \varepsilon.$$
Le nombre a s'appelle la limite de la suite (z_n) et on écrit $a = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. Notons que la limite si elle existe, elle est unique.
6. On dit qu'une partie non vide $A \subseteq \mathbb{C}$ est fermée dans $(\mathbb{C}, |.|)$ si toute suite d'éléments $z_n \in A$ qui converge vers $a \in \mathbb{C}$ implique que $a \in A$.
7. On dit qu'une partie non vide $O \subseteq \mathbb{C}$ est ouverte dans $(\mathbb{C}, |.|)$ si son complémentaire $O^c = \mathbb{C}\backslash O$ est fermé.

8. On dit que la partie non vide $V \subseteq \mathbb{C}$ est un voisinage du point $z_0 \in V$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que le disque ouvert $D(z_0, r) \subseteq V$.
9. Une partie $O \subseteq \mathbb{C}$ est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.
10. On dit qu'une partie $A \subseteq \mathbb{C}$ est connexe si elle ne peut pas être contenue dans la réunion disjointe de deux ouverts de $\mathbb{C}$. C'est-à-dire, si U_1 et U_2 sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $A \subseteq U_1 \cup U_2$, alors $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$.
11. Un domaine est un ensemble ouvert connexe.
12. Une partie est dite bornée si elle est inclue dans un disque.
13. Une partie est dite compacte si elle est fermée et bornée.

Exemple 5.1 *Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, les disques ouverts (ou fermés), les rectangles, les segments de droites et les droites sont connexes.*

5.3 Limite et continuité des fonctions à une variable complexe

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un sous-ensemble non vide. Étant donnée une fonction $f : D \to \mathbb{C}$, on lui associe deux fonctions réelles $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : D \longmapsto \mathbb{R}$ tel que

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z), \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Définition 5.1 *Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite uniforme ou univoque si chaque $z \in D$ ne correspond qu'une image $f(z)$.*

Exemples 5.1 *On donne deux exemples :*

1. *La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2$ est uniforme.*
2. *Posons $h(z) = \ln(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire $w = h(z)$, avec $e^w = z$. Posons $z = x + iy$ et $w = u(x,y) + iv(x,y)$. Donc*

$$e^{u(x,y)+iv(x,y)} = z = re^{i\theta},$$

d'où

$$r = e^{u(x,y)} \text{ et } e^{i\theta} = e^{iv(x,y)},$$

donc

$$ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui montre que la fonction ln *complexe est multivoque.*

Soit $z_0 \in D$. Supposons que f est uniforme.

Définition 5.2 *On dit que $f(z)$ tend vers une limite l lorsque z tend vers z_0 et on écrit*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l,$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un rapport de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe.

Remarque 5.1 *$f(z)$ tend vers sa limite indépendamment de la manière dont le point z tend vers z_0.*

Le point l'infini ∞ est défini par l'image de l'origine par la transformation $t = \frac{1}{z}$. Par définition :

$$\begin{aligned}\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) &= l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall z \in D : |z| > \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon; \\ \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) &= \infty \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon.\end{aligned}$$

Notons que si $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l$, alors $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{l}$. Il en résulte la proposition suivante :

Proposition 5.1

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \left(\lim_{z \longrightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(l) \ \ et \lim_{z \longrightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}(l) \right).$$

Proposition 5.2 *$\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l$ si et seulement, si pour toute suite $(z_n) \subset \mathbb{C}$ qui converge vers z_0 on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(z_n) = l$.*

Démonstration. En exercice.

Exemple 5.2 *La fonction*

$$z \in \mathbb{C}^* \longmapsto f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$$

n'a pas de limite au point 0 parce que si pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi[$ fixé, on considère la suite de nombres complexes, $z_n = \frac{1}{n} e^{i\theta}$. On aura $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} z_n = 0$, mais $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(z_n) = e^{2i\theta}$ dépend de θ.,

Définition 5.3 *On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.*

La fonction $f(z)$ est continue sur D si et seulement si elle est continue en tout point de D.

Les propriétés classiques concernant la somme, le produit et le rapport de fonctions continues s'étendent du cas réel au cas complexe.

Exemples 5.2 *Les fonction*

$$z \longmapsto \bar{z}, \ z \longmapsto |z| \text{ et } z \longmapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

sont continues sur leurs domaines de définition.

Proposition 5.3 *$f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si toute suite $(z_n) \subset D$ converge vers z_0, la suite $f(z_n)$ converge vers $f(z_0)$.*

Démonstration. Une application de la proposition 5.2 et la définition 5.3.

Proposition 5.4 *Pour qu'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ soit continue il faut et il suffit que l'image inverse par $f(z)$ de tout ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$ soit un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Il suffit de la démontrer soit pour les fermés soit pour les ouverts, puisque

$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c.$$

Soit A une partie ouverte de $\mathbb{C}$. L'implication directe est évidente avec les suites.

Réciproquement, soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$, on a $f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$ est un ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$D(z_0, \eta) \subset f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$$

c'est à dire

$$\forall z \in D \cap D(z_0, \eta) \Longrightarrow f(z) \in D(f(z_0), \varepsilon),$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 5.5 *L'image d'un ensemble compact $H \subset \mathbb{C}$ par une fonction continue $f : H \longmapsto \mathbb{C}$ est un ensemble compact.*

Démonstration. Soit Si $(u_n)_n$ est une suite de points de $f(H)$ et $v_n \in H$ est un point tel que $f(v_n) = u_n$, la suite $(v_n)_n$ admettra une suite partielle convergeant vers un point $v \in H$, donc la suite $(u_n)_n$ admettra une suite partielle convergeant vers un point $u = f(v) \in f(H)$.

Proposition 5.6 *Supposons que $O \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide et f une fonction continue. Si une partie non vide $O' \subseteq O$ est connexe alors son image $f(O')$ est connexe dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. En exercice.

5.4 Fonctions différentiables et fonctions holomorphes

5.4.1 Fonctions différentiables et fonctions holomorphes

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ on peut le voir soit comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux, ou soit comme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ lui même, dans ce cas sa dimension complexe est égale à un. Donc il y a deux catégories d'applications linéaires $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$: les applications $\mathbb{R}$-linéaires et $\mathbb{C}$-linéaires.

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un sous-ensemble non vide et une fonction $f : D \to \mathbb{C}$.

Définition 5.4 *On dit que $f(z)$ est dérivable au point $z \in D$ si et seulement si*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h+z) - f(z)}{h}$$

existe, indépendamment de la façon dont h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Cette limite, notée $f'(z)$ ou $\frac{df}{dz}$, est appelée dérivée de f en z.

Remarque 5.2 *La fonction $f(z)$ est dérivable en $z_0 \in D$, si et seulement si $\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in \mathbb{C}$.*

Définition 5.5 *La fonction f est différentiable en z_0 si et seulement si il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que*

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0).h + o(|h|), \ \forall h \in \mathbb{C}.$$

L'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$df(z_0) : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f'(z_0).z \end{array}$$

s'appelle différentielle de f au point z_0.

Proposition 5.7 *La fonction f est dérivable en z si et seulement si elle est différentiable en z, et $f'(z)$ a le même sens dans les deux définitions précédentes.*

Démonstration. Supposons que f est dérivable en z, donc

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h+z) - f(z)}{h} = f'(z).$$

On peut écrire

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|),$$

car

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{o(|h|)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h+z) - f(z)}{h} - f'(z) = 0.$$

La réciproque est évidente.

Définition 5.6 *La fonction f est dite holomorphe sur D si elle est dérivable en tout point de D. La fonction $f' : D \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto f'(z)$, s'appelle la fonction dérivée de f.*

Remarque 5.3 *Les fonctions dérivées d'ordre $n \geq 0$ d'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ se définient en utilisant la formule de récurrence,*

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}(z)\right)' \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall z \in D,$$

avec la convention $f^{(0)}(z) = f(z)$.

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient et composée) sont les mêmes que celles utilisées en analyse réelle.

Exemple 5.3 *Pour tout entier $n > 0$, fonction $f(z) = z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée au point $z_0 \in \mathbb{C}$ est donnée par*

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{z^n - (z_0)^n}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \longrightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z(z_0)^{n-2} + (z_0)^{n-1}) \\ &= n(z_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Proposition 5.8 *Si la fonction f est dérivable au point $z_0 \in D$, alors elle est continue au point z_0.*

Démonstration. Pour tout $h \neq 0$, on a

$$f(h + z_0) - f(z_0) = \frac{f(h + z_0) - f(z_0)}{h} \times h.$$

Par passage à la limite, on trouve

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(h + z_0) - f(z_0) = f'(z_0) \times 0 = 0.$$

D'où le résultat.

Remarque 5.4 *Toutes les fonctions polynômiales complexes $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. De même, on conclut que toute fraction polynômiale $\frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}(z)$ est holomorphe sur son domaine de définition qui est égal à l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C}; Q(z) \neq 0\}$.*

Énonçons, sans démonstration, un théorème important :

Théorème 5.1 *(Conditions de Cauchy-Riemann). Supposons que $O \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe sur O*

si et seulement si u et v sont différentiables sur O et satisfont aux conditions (ou équations) de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De plus, on a

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exemple 5.4 *La fonction $f(z)=\bar{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$, mais n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ sont*

$$u(x,y)=x \text{ et } v(x,y)=-y$$

ne vérifient pas les conditions de Cauchy-Riemann, puisque

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Remarque 5.5 *Si u et v ne sont pas différentiables, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires mais pas suffisantes.*

Exemple 5.5 *Soit la fonction*

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^2}{z}; z\neq 0\\ 0; z=0\end{cases}$$

On a $\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$ n'admet pas de limite quand z tend vers 0. Ce pendant, puisque la partie réelle $u(x,y)$ et la partie imaginaire $v(x,y)$ de $f(z)=\frac{\bar{z}^2}{z}=\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}$ sont

$$u(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}; (x,y)\neq(0,0)\\ 0; (x,y)=(0,0)\end{cases} \text{ et } v(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}; (x,y)\neq(0,0)\\ 0; (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Et on a

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=1\\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\longrightarrow 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=0\\ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\longrightarrow 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=1\end{cases},$$

donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiés, mais $f(z)$ n'est pas dérivable au point $z_0=0$.

Considérons les deux opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

On a la proposition :

Proposition 5.9 *Les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'égualité*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0.$$

De plus, on a

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Démonstration. Voir TD.

Remarque 5.6 *On désigne par $\mathcal{H}(D)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $D\subset\mathbb{C}$. On montre que : $\mathcal{H}(D)$ est un espace vectoriel, un anneau (car il est stable par la somme et le produit).*

Théorème 5.2 *Soit $\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. La fonction $f(z)$ définie sur le disque ouvert $D(z_0,R)$ par la série entière*

$$z\longmapsto f(z):=\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$$

est holomorphe et sa dérivée première est donnée par la série entière

$$z\longmapsto f'(z):=\sum_{n\geq 1}na_n(z-z_0)^{n-1},$$

la fonction $f(z)$ est de C^∞ et on a $f^{(n)}(z_0)=n!a_n$, $\forall n\in N$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $z_0=0$. Notons aussi que les deux séries entières $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ et $\sum_{n\geq 1}na_nz^{n-1}$ ont le même rayon de convergence $R>0$, donc pour tout réel $0<r<R$ ces deux séries entières convergent normalement et uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0,r)$, de plus la série numérique $\sum_{n\geq 1}n|a_n|r^{n-1}$ converge.

Soit $z_0\in D(0,R)$. Pour tout $z\in D(0,R)\setminus\{z_0\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{n\geq 0}a_n\left(z^n-(z_0)^n\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}a_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\ldots+z(z_0)^{n-2}+(z_0)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Si $z, z_0 \in D(0,r)$, on a $|z| < r$ et $|z_0| < r$, donc

$$\left|a_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots z(z_0)^{n-2}+(z_0)^{n-1}\right)\right| < n\,|a_n|\,r^{n-1},$$

or la série $\sum_{n\geq 1} n\,|a_n|\,r^{n-1}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots z(z_0)^{n-2}+(z_0)^{n-1})$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$, et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\longrightarrow z_0}\sum_{n\geq 0} a_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots z(z_0)^{n-2}+(z_0)^{n-1}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\lim_{z\longrightarrow z_0} a_n\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots z(z_0)^{n-2}+(z_0)^{n-1}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} n a_n\,(z_0)^{n-1} = f'(z_0).
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $f(z)$ est holomorphe sur le disque $D(0,R)$.

Remarque 5.7 *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{C}$ est analytique au point $z_0 \in D$ si elle admet un développement en série entière au voisinage de z_0, dont le rayon de convergence R n'est pas nul.*

Exemple 5.6 *La fonction $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ est analytique sur le disque ouvert $D(0,1)$, et pour tout $z \in D(0,1)$, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{+\infty} z^k\\
&= 1+z+z^2+z^3+\ldots.
\end{aligned}$$

5.4.2 Exemples de fonctions holomorphes

L'exponentielle complexe $z \longmapsto e^z$

Pour tout $z = x+iy$, l'exponentielle complexe est défini par

$$e^z := e^x\cos y + ie^x \sin y.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle complexe e^z sont deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, de plus, comme en tout point de $\mathbb{R}^2$ les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées. Donc la fonction exponentielle $z \longmapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $(e^z)' = e^z$;
2. $\forall z, \zeta \in \mathbb{C}$, $e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta$;
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$;
4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
5. $e^z = 1 \Longleftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$

Les fonctions circulaires

Par extension des définitions dans le cas réel, on pose

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

et de là

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Les relations entre les fonctions trigonométriques réelles s'étendent au cas complexe. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont périodiques, de période 2π. Elles ont les mêmes zéros que les fonctions réelles correspondantes. Signalons que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées.

Les fonctions hyperboliques

Elles sont définies par extension du cas réel,

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

et de là

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Remarque 5.8 *Nous avons les développements en série entière suivantes qui convergent dans tout le plan complexe :*

$$\begin{aligned}
e^{z} &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \\
\cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\
\sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ..
\end{aligned}$$

5.5 Intégration des fonctions holomorphes

Définition 5.7 *Une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ s'appelle chemin.*

1. *On dit que le chemin γ est de classe C^1 par morceaux s'il existe un nombre fini de points (une subdivision) $a = \alpha_1 < \alpha_2 <\cdot\cdot< \alpha_n = b$ telle que la restriction de l'application γ sur chaque intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, pour tout $1 \leq k \leq n-1$ soit de classe C^1 et $f\left(\alpha_i^{\pm}\right)$ et $f'\left(\alpha_i^{\pm}\right)$ existent.*

2. *Le point $\gamma(a)$ s'appelle l'origine du chemin γ et le point $\gamma(b)$ l'extrémité du chemin γ.*
3. *Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que le chemin γ est fermé ou un circuit ou un lacet.*
4. *L'image $\Gamma = \{\gamma(t); t \in [a,b]\}$ s'appelle courbe paramétrée dans le plan complexe par l'application γ.*

Exemples 5.3 *On donne deux exemples : un lacet et un chemin.*

1. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le chemin fermé*

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + re^{it} \end{array}$$

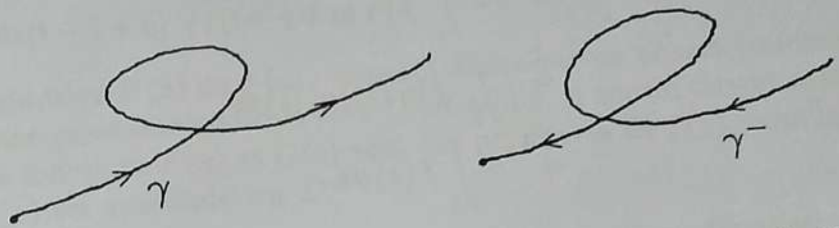
est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r, parcouru dans le sens direct.

2. *Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Le chemin*

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (1-t)u + tv \end{array}$$

est le segment orienté d'origine u et d'extrémité v ; on le note $[u, v]$.

Définition 5.8 *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. L'application continue $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ s'appelle chemin opposé ou chemin inverse du chemin γ.*



Définition 5.9 *Soient $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un chemin C^1 par morceaux. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

L'intégrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ se note aussi par $\int_\Gamma f(z)\,dz$, avec $\Gamma = \gamma([a,b])$. Si γ est fermé, on utilise la notation $\oint_\gamma f(z)\,dz$.

Remarque 5.9 *Cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage, c'est-à-dire que si Φ est un difféomorphisme de $[\alpha, \beta]$ sur $[a,b]$, alors $\gamma_2 = \gamma_1 o \Phi$ est* *un autre paramétrage de* Γ, *et on a*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt \\
& \int_\alpha^\beta f(\gamma_1 o\Phi(t))(\gamma_1 o\Phi)'(t)\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta f(\gamma_1 o\Phi(t))\gamma_1'(\Phi(t))\Phi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)\,ds. \quad (s = \Phi(t)) \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Proposition 5.10 *Soient* $f : D \to \mathbb{C}$ *une fonction continue et* $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ *un chemin* C^1 *par morceaux. On a*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma^-(t))(\gamma^-)'(t)\,dt \\
&= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt \\
&= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \\
&= -\int_\gamma f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Proposition 5.11 *Si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *et* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, *alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\gamma (u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\,(x'(t)+iy'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))\,dt \\
&\quad + i\int_a^b (u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t))\,dt \\
&= \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\gamma (u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx).
\end{aligned}$$

Notons que l'intégrale ci-dessus est une combinaison linéaire d'intégrales curvilignes réelles. Les propriétés de ces derniers sont conservées. De plus, si Γ_1 et Γ_2 deux courbes tel que l'extrémité d'un paramétrage de Γ_1 coïncide avec l'origine d'un paramétrage de Γ_2 alors

$$\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz. \text{ (Relation de Chasles)}$$

Définition 5.10 *Soit D un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $F : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur D. On dit que $F(z)$ est une primitive sur D de la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ si,*

$$F'(z) = f(z),\ \forall z \in D.$$

Une primitive $F(z)$ de $f(z)$, lorsqu'il existe sur un ouvert connexe elle est unique à une constante additive près. C'est-à-dire, si sur un ouvert connexe non vide D les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ sont des primitives de $f(z)$ alors la fonction $F(z) - G(z)$ est constante sur D.

Proposition 5.12 *Si $F : D \to \mathbb{C}$ est une primitive d'une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$, alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

pour tout chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ de classe C^1 par morceaux. En particulier, si γ est fermé, on a

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma F'(z)\,dz \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Remarque 5.10 *Si une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$ tel que, il existe un chemin fermé $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ de classe C^1 tel que*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz \neq 0,$$

alors la fonction f n'admet pas une primitive sur D.

Corollaire 5.1 *Si $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un chemin C^1 par morceaux, alors*

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est fermé, on a

$$\oint_\gamma f'(z)\,dz = 0.$$

Remarque 5.11 *La formule d'intégration par parties reste valable.*

Exemple 5.7 *Calculons $\int_\gamma z^2dz$, où $\gamma = [i, 1+i]$.*

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2dz &= \frac{1}{3}\int_\gamma (z^3)'\,dz \\ &= \frac{1}{3}\left((1+i)^3 - i^3\right) \\ &= \frac{1}{3}(2i(1+i)+i) \\ &= -\frac{2}{3}+i.\end{aligned}$$

La longueur de la courbe $\Gamma = \gamma([a,b])$ est définie par

$$long(\Gamma) := \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Calculons, par exemple, la longueur de l'arc Γ paramétré par l'application $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ avec $t \in [\theta_0, \theta_1]$.

$$\begin{aligned} long(\Gamma) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} |\gamma'(t)|\,dt \\ &= \\ &= \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent, si on prend $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 2\pi$ on déduit que la longueur d'un cercle entier de centre z_0 et de rayon $R > 0$ est égale à $2\pi R$.

Définition 5.11 *Un domaine est simplement connexe si tout chemin fermé inclu dans D peut être réduit à un point par déformation continue, sans quitter D. On pourrait dire aussi que le domaine est sans trou.*

Par exemple un disque est simplement connexe mais une couronne circulaire n'est pas simplement connexe.

Proposition 5.13 *(Formule de majoration). Soient $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux et $\Gamma = \gamma([a,b])$ Alors*

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\ &\leq M.long(\Gamma), \end{aligned}$$

avec $M = \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|$.

Définition 5.12 *On dit que deux chemins γ_1 et γ_2 sont homotopes dans D, si on peut déformer continûment, tout en restant dans D, l'un des chemins en l'autre.*

Exemple 5.8 *Dans un domaine simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à un point.*

Théorème 5.3 *(Cauchy-Gaursat, 1900).*

1. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans D. Alors*

$$\oint_\gamma f\,dz = 0.$$

2. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, \ldots, z_k$ et soit γ un chemin fermé contenu dans D entourant tous ces points. Si γ_j $(1 \leq j \leq k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, alors*

$$\oint_\gamma f dz = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} f dz$$

La démonstration du théorème de Cauchy-Gaursat est basée sur les deux théorèmes suivants.

Théorème 5.4 *(Formule de Green[1]-Riemann 1828). Si u et v sont deux fonctions continues sur un domaine simplement connexe Δ de bord γ, ainsi que leurs dérivées partielles respectivement par rapport à x et y. Alors*

$$\oint_\gamma u dx + v dy = \int\int_\Delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy.$$

Green

Théorème 5.5 *(Gaursat[2], 1900) Si une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D à valeurs complexes, alors $f'(z)$ est continue sur D.*

Goursat

[1] George Green (juillet 1793 - 31 mai 1841) est un physicien britannique. Il est l'auteur d'un Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme paru en 1828.

[2] Jean-Baptiste Édouard Goursat, né le 21 mai 1858 à Lanzac, mort le 25 novembre 1936 à Paris, est un mathématicien français dont le Cours d'analyse a longtemps fait autorité.

Démonstration du théorème de CauchyGaursat.

1. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx).$$

Soit Δ le domaine dont sa frontière est γ. On a $\Delta \subset D$. Comme u et v sont de classe C^1(Gaursat), alors d'après la formule de Green-Riemann on a

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma udx - vdy &= \int\int_\Delta \left(\frac{-\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \\
\text{et } \oint_\gamma vdx + udy &= \int\int_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.
\end{aligned}$$

Or $f(z)$ est holomorphe dans D, donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

par conséquent $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

2. On la démontre à l'aide de k coupures de γ et une coupure à chaque γ_j et on applique le Théorème 1 de Cauchy.

Remarques 5.1 :

1. *Le Théorème reste vrai si, seulement le domaine dont sa frontière γ est simplement connexe.*
2. *Pour un réciproque du Théorème de Cauchy, il y a un Théorème de Morera[3]. (Voir TD)*

Morera

Corollaire 5.2 *Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et si γ_1 et γ_2 sont deux chemins fermés homotopes dans D, alors*

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

[3] Giacinto Morera est un mathématicien italien, né en 18 juillet 1856 à Novare et décédé en 8 février à Turin. Son nom est associé en analyse complexe au théorème de Morera.

Démonstration. On crée le circuit fermé Γ par une coupure dans Γ_1 et une autre dans Γ_2 lié par un segment Δ, d'où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Delta \cup \Delta^- \cup \Gamma_2^-$

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)dz &= 0 \Longleftrightarrow \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_\Delta f(z)dz + \int_{\Delta^-} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2^-} f(z)dz = 0 \\
&\Longleftrightarrow \oint_{\Gamma_1} f(z)dz - \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0 \\
&\Longleftrightarrow \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz.
\end{aligned}$$

Corollaire 5.3 *Soit $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe non vide $D \subset \mathbb{C}$ et si γ un chemin dans D. l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités z_1 et z_2 de γ.*

On pose

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Démonstration. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins ont les mêmes extrémités z_1 et z_2. Le chemin $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ est fermé, donc

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f(z)dz = 0 = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Proposition 5.14 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe non vide D. Pour tout $z_1 \in D$, la fonction $z \longmapsto F(z) = \int_{z_1}^{z} f(u)du$ est holomorphe sur D et c'est une primitive de $f(z)$ sur D.*

Démonstration. Soit $z \in D$ et Δz son acroissement tel que $z + \Delta z \in D$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \\
&= \\
&= \frac{1}{\Delta z}\left(\int_z^{z+\Delta z} f(u) - f(z)\right) du.
\end{aligned}$$

La fonction f est continue en z, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in D : |u - z| < \eta \Longrightarrow |f(u) - f(z)| < \varepsilon.$$

Pour tout $u \in [z, z + \Delta z]$, $\exists t \in [0,1]$ tel que $u - z = t\Delta z$. Donc on a $|\Delta z| < \eta \Longrightarrow |u - z| < \eta$.

Pour Δz suffisament proche de 0, on a

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}|z+\Delta z-z|\varepsilon=\varepsilon.$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{\Delta z\longrightarrow 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\Longleftrightarrow F'(z)=f(z),\ \forall z\in D.$$

Théorème 5.6 *(Formule intégrale de Cauchy) Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D et γ un chemin fermé contenu dans D. Alors pour tout z dans l'intérieur de γ*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

En outre, la fonction f est indéfiniment dérivable dans D et on a

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

γ est parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Soient $z\in D$ tel que z appartient à l'intérieur d'un chemin fermé γ et $C=z+re^{i\theta}$, un cercle de rayon assez petit. La fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ est holomorphe dans $D\backslash\{z\}$. D'après le Théorème 2 de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{f(z+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

Comme f est continue, donc

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= i\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0}f(z+re^{i\theta})d\theta\\ &= 2\pi i f(z).\end{aligned}$$

D'où la formule 1.

La formule 2 se démontre par récurrence.

Théorème 5.7 *Soit $f(z)$ une fonction définie sur un domaine simplement connexe non vide D.*

f est analytique sur D si et seulement si elle est holomorphe sur D.

Démonstration. L'implication directe est déja démontré. Voir le Théorème 5.2.

Réciproquement, supposons que f est holomorphe sur D. Soit $z_0 \in D$, alors il existe un disque ouvert $D(z_0, R) \subset D$.

Soient $r > 0$, $z \in D$ tel que $|z - z_0| < r < R$ et $C_r(z_0)$, le cercle de centre z_0 et de rayon r.

On sait que f est holomorphe sur D, donc d'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma,$$

or

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varsigma - z} &= \frac{1}{\varsigma - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{\quad}{\quad}} \\ &= \frac{1}{\varsigma - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^k, \ \forall \varsigma \in C_r(z_0).\end{aligned}$$

puisque $\left|\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\varsigma - z_0}\right)^k d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k d\varsigma. \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $C_r(z_0)$, donc elle est bornée sur $C_r(z_0)$, c'est-à-dire $\exists M > 0$, tel que

$$|f(\varsigma)| \leq M, \ \forall \varsigma \in C_r(z_0).$$

Donc

$$\left|\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k\right| \leq \frac{M}{r} \times \left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^k,$$

et on a la série numérique $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^k$ converge ($\frac{|z-z_0|}{r}<1$), donc la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k$ converge uniformément, Par conséquent

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k\,d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,
\end{aligned}$$

avec $a_k =$.

5.5.1 Séries de Laurent, points singuliers

Définition 5.13 *La série*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

s'appelle série de Laurent centrée au point $z_0\in\mathbb{C}$.

1. *La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k$ est appelée la partie régulière (ou holomorphe);*
2. *La série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ est appelée la partie principale.*
3. *On dit que la série de Laurent converge si ses parties principale et régulière convergent.*

Théorème 5.8 *(Laurent[4], 1843). Toute fonction holomorphe $f:C_{r;R}(z_0)\longmapsto\mathbb{C}$ se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 ie. :*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k,\ \forall z\in C_{r;R}(z_0),$$

avec

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne. En outre, cette série converge uniformément vers f dans toute couronne ouverte contenue dans $C_{r;R}(z_0)$.

[4] Pierre Alphonse Laurent, né le 18 juillet 1813 à Paris et mort le 2 septembre 1854, est un mathématicien français connu pour la découverte des séries de Laurent.

Démonstration. Dans l'intérieur de la couronne $C_{r,R}(z_0)$, fixons un point z et choisissons deux nombres réels $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$ et C_1, C_2 les deux cercles de centres z_0 et de rayons respectives r_1 et R_1. Avec une coupure dans C_1 et C_2 en évitant le point z.

On applique la formule intégrale de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Or pour tout $\zeta \in C_2$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k,$$

la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$ converge uniformément dans toute couronne ouverte $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z - z_0| < R_1\}$ contenue dans $C_{r;R}(z_0)$, car $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1$, donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta\right)(z - z_0)^k,$$

or C_2 et γ sont homotopes, alors

$$\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta = \int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta.$$

Pour la seconde intégrale, soit $\zeta \in C_1$, on a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{\qquad}{\qquad}} \\ &= \frac{1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\qquad}{\qquad}\right)^k. \end{aligned}$$

car $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$, et la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^k$ converge uniformément dans toute couronne ouverte $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z - z_0| < R_1\}$ contenue dans $C_{r;R}(z_0)$, donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k}}d\zeta\right)(z - z_0)^{-k-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z - z_0)^n \quad (n = -k-1) \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z - z_0)^n, \end{aligned}$$

puisque γ et C_1 sont homotopes.

L'expression des coefficients a_n de la série de Laurent trouvée impliques que les a_n ne dépendent que de f et donc ils sont uniques. Ce qu'il fallait démontrer.

Classification des points : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, sauf peut-être en un certain nombre de points.

1. Un point $z_0 \in D$ est un point régulier pour $f(z)$ si $a_{-k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la série de Laurent est
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^k .$$
2. Tout point qui n'est pas régulier est dit singulier ; on dit que $f(z)$ possède une singularité en tel point. En ce point, la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.
3. Un point singulier est dit isolé s'il existe un disque ouvert centré en ce point ne contenant pas d'autres points singuliers. Dans la cas contraire il est dit non isolé.
4. On distingue deux types de singularités isolées :
   (i) Le point z_0 est un pôle d'ordre $m > 0$, lorsque
   $$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k ,$$
   i.e :
   $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$
   avec $g(z)$ holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.
   (ii) Le point z_0 est un point singulier essentiel s'il existe une infinité de coefficients a_{-k} non nuls.

Exemples 5.4 :

1. *Sur le disque ouvert $D(0,1)$, on a*
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots.$$
2. *Sur la couronne $\{z \in \mathbb{C}/ \ |z| > 0\}$, le développement de Laurent de la fonction $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}$ est*
$$f(z) = 2 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

3. Cherchons le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ dans la couronne $D\left(0, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - z} \\ &= \\ &= \\ &= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots \end{aligned}$$

5.5.2 Calcul des résidus

Définition 5.14 *On dit que la fonction $f(z)$ est méromorphe sur un domaine D, si elle est holomorphe sur D sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles.*

Exemple 5.9 *La fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{2}{z(z-1)^2}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$; 0 est un pôle simple de $f(z)$ et 1 est un pôle double.

Définition 5.15 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, prévu du pôle z_0. On appelle résidu de f au point z_0, le nombre*

$$Rés\,(f(z), z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz.$$

c'est-à-dire le coefficient de $1/(z - z_0)$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0.

Théorème 5.9 *(des résidus, Cauchy 1826). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_1, z_2, ..., z_k \in D$ et $f : D \setminus \{z_1, z_2, ..., z_k\} \longmapsto \mathbb{C}$, une fonction holomorphe. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} Rés\,(f(z), z_k),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans D parcouru dans le sens positif, à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 2 de Cauchy et la définition du résidu.

Calcul des résidus :

a) Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors

$$Rés\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)].$$

b) Lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$ alors

$$Rés\,(f\,(z)\,,z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Exemples 5.5 : *La fonction $f(z) = \frac{3}{z(z-1)^2}$ possède deux pôles : 0 est simple et 1 est d'ordre 2, dont les résidus sont donnés par,*

$$\begin{aligned} Rés\,(f\,(z)\,,0) &= \lim_{z\to 0}\,(zf\,(z)) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{3}{(z-1)^2} = 3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Rés\,(f\,(z)\,,1) &= \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 f(z)\right)' \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{3}{-z^2} = -3. \end{aligned}$$

5.5.3 Applications du Théorème des résidus au calcul d'intégrales

Le Théorème des résidus est particulièrement utile dans le calcul de certaines intégrales réelles définies ou généralisées.

Intégrales de type $\int_0^{2\pi} R\,(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

Le but de cette partie est de calculer les intégrales qui s'écrit sous la forme $I = \int_0^{2\pi} R\,(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$, où R est une fonction rationnelle en cos et sin dont le dénominateur ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Avec le changement de variable $z = e^{i\theta}$, qui transforme $[0, 2\pi]$ en le bord γ du disque unité du plan complexe. Voir FIG. 5.2.

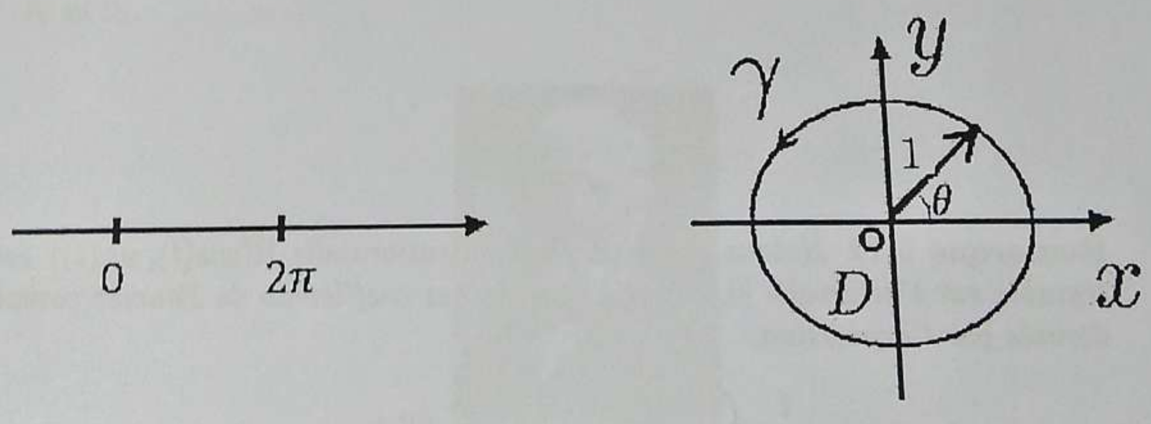


FIG. 5.2

Donc

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

et $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, alors

$$I = \oint_{\gamma} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz},$$

γ étant le cercle unité. D'après le Théorème des résidus, on a

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Rés\left(R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}, |z_k| < 1\right).$$

Exemple 5.10 *Calculons* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt$. *Soit* C_1 *le cercle unité.*
On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= 4\pi \sum_{k=1}^{2} Rés\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, |z_k| < 1\right).
\end{aligned}$$

Or $-2+\sqrt{3}$ *et* $-2-\sqrt{3}$ *sont les pôles simple de la fraction, mais* $|-2-\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3} > 1$ *et* $|-2+\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} < 1$, *donc*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt &= 4\pi Rés\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right) \\
&= \\
&= \\
&= \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Remarque 5.12 *Notons que si la fraction rationnelle* $R(\cos(t), \sin(t))$ *est intégrable sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *elle possède des coefficents de Fourier complexes donnés par l'expression,*

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))e^{int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)z^{n-1}dz, \ \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Intégrales de type $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Soit $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ avec $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. On suppose que $d^{\circ}Q(x)-d^{\circ}P(x)\geq 2$ et $Q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $z\longmapsto\frac{P(z)}{Q(z)}$ à variable complexe associée à la fonction d'une variable réelle $x\longmapsto\frac{P(x)}{Q(x)}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de singularités. On va désigner par $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ les singularités de $f(z)$ qui appartiennent au demi-plan supérieur $H^+=\{z\in\mathbb{C}; \mathrm{Im}(z)>0\}$.

Donc, si pour tout réel $R>max(|z_1|,|z_2|,...,|z_n|)$ on intègre la fonction $f(z)$ sur la courbe $\Gamma=\frac{1}{2}C_R\cup[-R,R]$ parcourue dans le sens trigonométrique, où $\frac{1}{2}C_R$ est le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R, le Théorème des résidus implique que

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\frac{P(z)}{Q(z)}dz &= \int_{-R}^{+R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\int_{\frac{1}{2}C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}Rés\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right).\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a

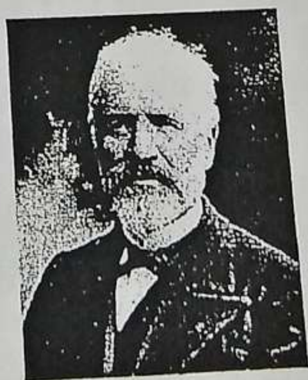
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{2}C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz+2\pi i\sum_{k=1}^{n}Rés\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right)$$

Le lemme 1 de Jordan suivant permet de calculer $\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{2}C_R}f(z)dz$.

Lemme 5.1 *(Jordan[5]) Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $0\leq\theta_1\leq\theta\leq\theta_2\leq 2\pi$. Si $\lim_{|z|\longrightarrow+\infty}zf(z)=0$, alors*

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{\gamma_r}f(z)\,dz=0,$$

où γ_r est l'arc du cercle centré à l'origine et de rayon r compris entre les angles θ_1 et θ_2.



Jordan

[5] Marie Ennemond Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.

D'après le Lemme 1 de Jordan, on a $\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{2}C_R} f(z)dz = 0$. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Rés\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, \operatorname{Im}(z_k)>0\right)$$

Exemple 5.11 *Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$. Posons $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$, $f(z)$ a quatre pôles simples $p_k = e^{i\pi(1+2k)/4}$, $k=0,...,3$, mais seulement $p_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $p_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ qui sont dans le demi plan supérieur H^+. Donc*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx &= 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Rés\left(f(z), \operatorname{Im}(p_k)>0\right)\\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

En outre, on peut déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

Remarque 5.13 *Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est paire, on peut utiliser cette méthode pour calculer $\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$.*

Intégrales de types $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(mx)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(mx)\,dx$

Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(mx)\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(mx)\,dx.$$

On suppose que :
- $d^\circ Q(x) - d^\circ P(x) \geq 1$;
- $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $m \neq 0$.

Si $m>0$ (resp. $m<0$), on choisit un réel $r>0$ strictement supérieur aux modules des racines $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ de $Q(z)$ qui appartiennent au demi-plan supérieur H^+ (resp. au demi-plan inférieur H^-) et puis on calcule $\int_{\gamma_r}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz$ sur la courbe simple fermée $\gamma_r = \frac{1}{2}C_r \cup [-r, r]$ où $r > max(|z_1|, |z_2|, ..., |z_n|)$ et $\frac{1}{2}C_r$ est le demi-cercle inclu dans H^+ (resp. H^-) centré à l'origine et de rayon r.

Le lemme 2 de Jordan suivant permet de calculer $\lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{2}C_r}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz$.

Lemme 5.2 *(de Jordan) Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$. Si $\lim\limits_{|z| \longrightarrow +\infty} f(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, e^{imz} dz = 0,\ m > 0$$

où γ_r est l'arc de cercle centré à l'origine et de rayon r compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Le même resultat reste valable pour le cas $m < 0$ à condition de considérer l'arc de cercle dans le demi plan inférieur $\mathrm{Im}(z) < 0$.

On fait tendre r vers l'infini, en appliquant le Théorème des résidus et le Lemme 2 de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}(z_k)>0} Rés\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, z_k\right);\ m > 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}(z_k)<0} Rés\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, z_k\right);\ m < 0 \end{cases}$$

Exemple 5.12 *Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$ calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx$.*

On a $\deg(x^2 + a^2) - 0 = 2 \geq 1$, $x^2 + a^2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $b > 0$, *donc*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \;= \frac{\pi e^{-ba}}{2a}. \end{aligned}$$

Remarque 5.14 *Si la fonction $f(z)$ possède des pôles simples sur l'axe réel, on raisonne de manière analogue au cas précédent en intégrant la fonction $f(z)e^{imz}$ sur des chemins fermés modifiés de façon à ne pas contenir ces singularités et en utilisant le Lemme suivant :*

Lemme 5.3 *(du petit cercle (Jordan)). Soit $S = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - z_0| \leq R$ et $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$ un secteur non vide. Si $f : S \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que*

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow z_0 \\ z \in S}} (z - z_0) f(z) = a \in \mathbb{C},$$

i.e : z_0 est un pôle simple de $f(z)$, alors $\lim\limits_{r \longrightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = ia(\theta_2 - \theta_1)$, où la courbe $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it} \in S$ avec $t \in [\theta_1, \theta_2]$.

Exemple 5.13 *Calculons* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Considérons $\int_{\gamma_{r,R}}\frac{e^{iz}}{z}dz$ *où* $\gamma_{r,R}=\frac{1}{2}C_r^-\cup[r;R]\cup\frac{1}{2}C_R^+\cup[-R,-r]$ *tels que* $\frac{1}{2}C_r^-$ *et* $\frac{1}{2}C_Rh+$ *sont les demi-cercles de centre* 0 *et de rayons recpectives* r *et* R *situés dans le demi-plan supérieur* H^+. *On a*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{r,R}}\frac{e^{iz}}{z}dz &= 0=\int_{\frac{1}{2}C_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\frac{1}{2}C_R^+}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}dz\\ &= \int_{\frac{1}{2}C_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\frac{1}{2}C_R^+}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx\\ &= \int_{\frac{1}{2}C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\frac{1}{2}C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}dx,\end{aligned}$$

donc

$$2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}dx=-\int_{\frac{1}{2}C_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{\frac{1}{2}C_R^+}\frac{e^{iz}}{z}dz. \qquad (5.1)$$

Or $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{2}C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$, *d'après le Lemme 2 du Jordan et* $\lim\limits_{r\longrightarrow0}\int_{\frac{1}{2}C_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i$, *d'après le Lemme du petit cercle, donc en faisant tendre* $r\longrightarrow0$ *et* $R\longrightarrow+\infty$ *dans (5.1), on obtient*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$