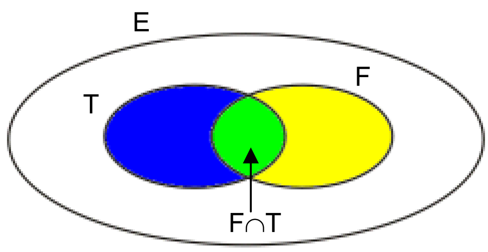
Dénombrement

I Utilisation de diagrammes, de tableaux, d'arbres

Exemple

Un centre de loisirs accueille 100 enfants.
Deux sports sont proposés : le football et le tennis.
A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.
A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.

On peut représenter ces données par un diagramme :
A l'intérieur de l'ensemble E des enfants, on représente en jaune l'ensemble F des enfants qui aiment le football et en bleu l'ensemble T des enfants qui aiment le tennis.
L'intersection $F \cap T$ des deux ensembles F et T apparaît en vert.

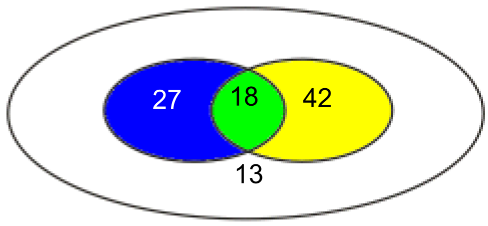


On complète ensuite les effectifs des différentes parties en utilisant les données :

18 enfants aiment à la fois le tennis et le football.
On place le nombre 18 dans la partie verte.

60 enfants aiment le football, mais parmi ces 60 enfants on sait qu'il y en a 18 qui aiment aussi le tennis.
Il y a donc $60 - 18 = 42$ enfants qui aiment le football sans aimer le tennis.
On place le nombre 42 dans la partie jaune.

45 enfants aiment le tennis, mais parmi ces 45 enfants on sait qu'il y en a 18 qui aiment aussi le football.
Il y a donc $45 - 18 = 27$ enfants qui aiment le tennis sans aimer le football.
On place le nombre 27 dans la partie bleue.



Il y a donc $27 + 18 + 42 = 87$ enfants qui aiment le tennis ou le football (ou les deux).
Il reste donc $100 - 87 = 13$ enfants qui n'aiment aucun des deux sports.
On place le nombre 13 dans la partie non coloriée.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
A la question «Consommez vous régulièrement de l'alcool ?», 50 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous fumeur ?», 80 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous un fumeur consommant régulièrement de l'alcool ?», 35 personnes répondent oui.
Représenter ces données par un diagramme.
Combien de personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement de l'alcool ?
Combien de personnes consomment régulièrement de l'alcool et ne sont pas fumeurs ?
Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement de l'alcool ?
Combien de personnes sont fumeurs ou consomment régulièrement de l'alcool ?

Exercice 02 (voir réponses et correction)

On s'intéresse à la présence sur les véhicules d'un parc automobile des trois dispositifs de sécurité suivants : ABS ; Air Bags ; Correcteur de trajectoire.
On sait que :
7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs, alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs.
Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité.
305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins.
298 véhicules disposent de l'ABS, 428 véhicules disposent d'air bags et 122 véhicules disposent des deux.
Enfin 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.
Représenter ces données par un diagramme.
Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ?
Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'au plus un dispositif de sécurité ?

Définition

Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien $E \times F$, l'ensemble des couples $(a ; b)$ avec $a \in E$ et $b \in F$.

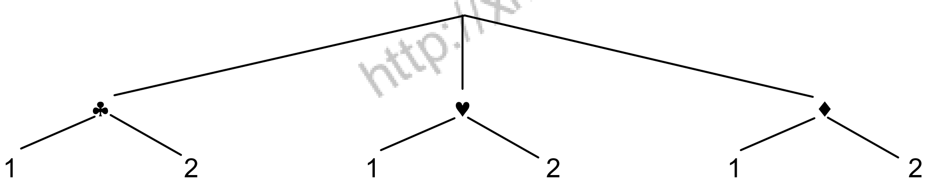
Exemple

Soit $E = \{♣ ; ♥ ; ♦\}$ et $F = \{1 ; 2\}$.
On peut, dans un tableau à double entrée, écrire tous les éléments de $E \times F$.

F \ E	♣	♥	♦
1	(♣ ; 1)	(♥ ; 1)	(♦ ; 1)
2	(♣ ; 2)	(♥ ; 2)	(♦ ; 2)

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est : $\text{card}(E \times F) = 6 = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

On peut utiliser une disposition en forme d'arbre pour retrouver tous ces éléments.



À chaque extrémité d'une branche de l'arbre correspond un élément de l'ensemble $E \times F$:

(♣ ; 1) (♣ ; 2) (♥ ; 1) (♥ ; 2) (♦ ; 1) (♦ ; 2)

Exercice 03 (voir réponses et correction)

La référence d'une cartouche d'encre est composée d'une lettre choisie dans l'ensemble {A ; H ; S ; T } et d'un chiffre de l'ensemble {1 ; 3 ; 5}.
Écrire et dénombrer toutes les références possibles.

Propriété

Si E et F sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de $E \times F$ est égal au nombre d'éléments de E multiplié par le nombre d'éléments de F.
C'est-à-dire que l'on a : $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$
L'ensemble $E \times E$ est noté E^2 et on a $\text{card}(E^2) = [\text{card}(E)]^2$

Remarque

On peut généraliser le produit cartésien à plus de deux ensembles :
$E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_p)$ avec $a_i \in E_i$.
et on a card $(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times ... \times \text{card}(E_p)$

Si les ensembles $E_1 ; E_2 \ ... \ E_p$ sont tous égaux à un même ensemble E, on note $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p = E^p$

et on a $\text{card}(E^p) = [\text{card}(E)]^p$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions auxquelles il doit répondre par "Oui" ou "Non".
Un candidat répond au hasard. En utilisant une disposition en forme d'arbre, faire apparaître et dénombrer toutes les possibilités de répondre au test.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : E_1, E_2, E_3,
- d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : P_1, P_2, P_3, P_4,
- d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : D_1, D_2, D_3, D_4.

Combien un client peut-il composer de menus différents ?
Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Un établissement propose à ses élèves le choix de langues vivantes suivant :
Anglais (A) , Allemand (D) , Espagnol (E) , Italien (I) , Russe (R).
Un élève doit choisir deux langues vivantes : LV_1 et LV_2.
En vous aidant d'un diagramme en arbre ou d'un tableau énumérer et dénombrer tous les choix possibles.
En imaginant un arbre, dénombrer le nombre de choix possibles pour trois langues LV_1, LV_2, LV_3.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

Un enfant possède 5 crayons de couleur : un rouge, un vert, un bleu, un jaune et un marron.
Il dessine un bonhomme et choisit : un crayon pour la tête, un crayon pour le corps et un crayon pour les membres.
Déterminer tous les choix possibles des trois crayons :
1°) En supposant qu'il peut utiliser la même couleur pour différentes parties.
2°) En supposant qu'il utilise toujours trois couleurs distinctes.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

1°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4\}$.

a) Quel est le nombre d'éléments de E^3, c'est-à-dire le nombre de triplets $(a ; b ; c)$ d'éléments de E.

b) On appelle arrangement 3 à 3 des éléments de E, tout triplet $(a ; b ; c)$ d'éléments de E deux à deux distincts.
En utilisant un arbre écrire tous les arrangements 3 à 3 des éléments de E.
Les dénombrer.

2°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4\}$.

a) Quel est le nombre d'éléments de E^4, c'est-à-dire le nombre de quadruplets $(a ; b ; c ; d)$ d'éléments de E.

b) On appelle arrangement 4 à 4 des éléments de E, tout quadruplet $(a ; b ; c ; d)$ d'éléments de E deux à deux distincts.
En utilisant l'arbre de la question précédente, dénombrer tous les arrangements 4 à 4 des éléments de E.

3°) Soit $E = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$.
En imaginant un arbre, dénombrer le nombre d'arrangements 4 à 4 des éléments de E.

Définition

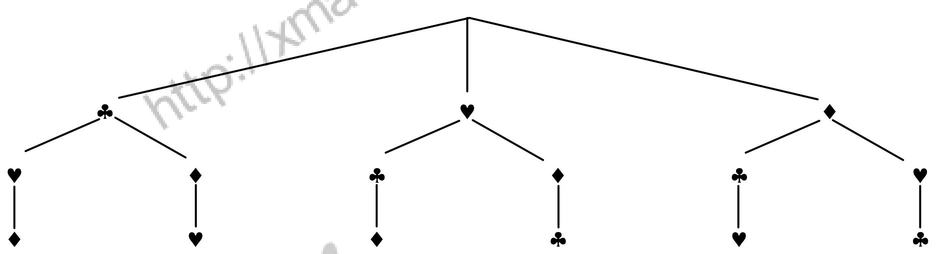
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Une permutation des éléments de E, est un n-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ d'élements de E deux à deux distincts.

Remarque

Un n-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ est une <u>suite</u> d'éléments de E, on tient donc compte de l'ordre dans lequel les éléments sont écrits. Comme il y a dans E n éléments et que les a_i sont deux à deux distincts, le n-uplet $(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n)$ comporte tous les éléments de l'ensemble E.

Exemple

Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} . On peut écrire toutes les permutations des éléments de E en utilisant un arbre :



On obtient 6 permutations : (♣ ; ♥ ; ♦) ; (♣ ; ♦ ; ♥) ; (♥ ; ♣ ; ♦) ; (♥ ; ♦ ; ♣) ; (♦ ; ♣ ; ♥) ; (♦ ; ♥ ; ♣).
Une permutation étant un triplet $(a ; b ; c)$ d'éléments de E deux à deux distincts, on peut choisir le premier élément a de 3 façons dans l'ensemble E.
Pour chaque choix de a, on peut choisir le deuxième élément b de 2 façons possibles (puisqu'il doit être différent de a).
On a donc $3 \times 2 = 6$ façons de choisir les deux premiers élements a et b.
Lorsque les deux premiers éléments sont choisis, il ne reste plus qu'une seule possibilité de choix pour le troisième élément c.
Le nombre de permutations des éléments de E est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$

Propriété (voir démonstration 01)

Le nombre de permutations d'un ensemble ayant n éléments est : $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 2 \times 1$.

Définition

Si n est un entier strictement positif, on appelle factorielle de n (ou n factorielle) le nombre noté $n!$ égal au produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n.

$n! = 1 \times \cdots \times n$

Par convention, on posera $0! = 1$.

Remarque

Les calculatrices scientifiques et les logiciels de calcul formel sur ordinateur permettent de calculer $n!$ pour un nombre entier n "raisonnable" (sur TI 89 : Menu Maths-Probabilités).

Exercice 09 (voir réponses et correction)

On considère une classe de 29 élèves.
On s'intéresse à l'ordre dans lequel les élèves sortent de la classe à la fin d'un cours.
En supposant que les élèves sortent tous par la porte, l'un après l'autre, et que toutes les possibilités doivent être envisagées, déterminer le nombre d'ordres de passage possibles.

Exercice 10 (voir réponses et correction)

Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur de :

$5!$; $\dfrac{6!}{5!}$; $\dfrac{9!}{7!}$; $\dfrac{12!}{9!\,3!}$; $\dfrac{1000!}{998!}$

II Combinaisons

Exemple

Dans une classe de 35 élèves, on veut choisir deux élèves délégués de classe et on veut déterminer le nombre de choix possibles.

On peut pour cela imaginer un arbre dans lequel le choix du premier élève correspondra à 35 branches.
Une fois le premier élève choisi, le choix du deuxième élève correspondra à 34 branches (il ne faut pas choisir deux fois le même élève).
On obtiendrait alors $35 \times 34 = 1190$ branches.
Mais en faisant ainsi, on compte deux fois chacune des possibilités. En effet, par exemple, le choix de Mlle X et de M. Y apparaîtra deux fois (X ; Y) et (Y ; X) alors qu'il s'agit du même choix de deux personnes.
Chaque possibilité apparaissant ainsi deux fois dans l'arbre, le nombre de choix possible est $\dfrac{1190}{2} = 595$

Le choix de deux délégués correspond au choix d'une partie de la classe ayant deux éléments.
On dénombre donc dans la classe 595 parties à 2 éléments.

En faisant le même raisonnement pour le choix de 3 élèves, un arbre donnerait $35 \times 34 \times 33$ branches, mais chaque possibilité apparaît 6 fois dans l'arbre (nombre de permutations des 3 éléments choisis : $3! = 6$)
Le nombre de choix possibles de 3 élèves est donc $\dfrac{35 \times 34 \times 33}{6} = 35 \times 17 \times 11 = 6545$

Le choix de trois délégués correspond au choix d'une partie de la classe ayant trois éléments.
On dénombre donc dans la classe 6545 parties à 3 éléments.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle combinaison p à p des éléments de E, toute partie de E ayant p éléments.

Remarque

Pour une combinaison (comme pour un arrangement) les éléments doivents être deux à deux distincts.
Dans une combinaison on ne tient compte de l'ordre des éléments (contrairement à un arrangement).
Un ensemble et une partie d'ensemble sont notés avec des accolades { ; } , l'ordre entre les éléments n'intervient pas.
Ainsi {1 ; 2 ; 3} est une partie à trois éléments de l'ensemble E = { 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } , c'est une combinaison 3 à 3 des éléments de E.
La combinaison {1 ; 2 ; 3} est identique à la combinaison {3 ; 2 ; 1} , à la combinaison {2 ; 3 ; 1} ...
La notation avec des parenthèses (1 ; 2 ; 3) correspond à une suite d'éléments dans laquelle l'ordre intervient. Le triplet (1 ; 2 ; 3) est différent du triplet (2 ; 3 ; 1) , différent du triplet (3 ; 2 ; 1) ...

Exercice 11 (voir réponses et correction)

A l'arrivée d'une course de chevaux le tiercé gagnant dans l'ordre est (7 ; 3 ; 12).
Quels sont les tiercés gagnants dans le désordre ? Combien y-a-t-il de tiercés gagnants ?

Notation

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier naturel non nul.

Le nombre de combinaisons p à p des éléments de E est noté $\dbinom{n}{p}$ ou C_n^p .

Exercice 12 (voir réponses et correction)

On considère l'ensemble $E = \{ a , b , c \}$.

Écrire toutes les combinaisons 2 à 2 des éléments de E. Déterminer $\dbinom{3}{2}$.

Déterminer $\dbinom{3}{1}$; $\dbinom{3}{3}$; $\dbinom{3}{4}$; $\dbinom{3}{0}$.

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Déterminer $\binom{4}{0}$; $\binom{4}{1}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{4}{3}$; $\binom{4}{4}$.

Propriété (voir démonstration 02)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$

Triangle de Pascal (voir démonstration 03)

Les nombres $\binom{n}{p}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$ sont donnés par le triangle de Pascal :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	...
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	

Exercice 14 (voir réponses et correction)

Faire la somme de chacune des lignes du triangle de Pascal. Que remarque-t-on ?

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Dans l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; ... ; 15} , on choisit une suite de 3 éléments deux à deux distincts (c'est-à-dire un arrangement 3 à 3 des éléments de E). Montrer que l'on a $\dfrac{15!}{(15-3)!}$ choix possibles.

On considère la partie { 5 ; 7 ; 14 }, combinaison 3 à 3 des éléments de E.
Combien y-a-t-il de permutations de l'ensemble { 5 ; 7 ; 14 } ?

En déduire une expression de $\binom{15}{3}$ utilisant la notation factorielle.

Propriété (voir démonstration 04)

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et soit p un entier naturel.
Le nombre de combinaisons p à p des éléments de E est :

- $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$
- $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ si $p \leqslant n$

Remarque

Les calculatrices scientifiques permettent de calculer le nombre de combinaisons pour un nombre entier n "raisonnable" (sur TI menu Maths-Probabilités)
Si $n = 15$ et $p = 3$, écrire 15 nCr 3 avec une TI82 ou nCr(15,3) avec une TI89

Exercice 16 (voir réponses et correction)

En utilisant l'expression $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, retrouver le résultat $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Développer $(a+b)^2$; $(a+b)^3$; $(a+b)^4$. Écrire les résultats en utilisant les nombres $\binom{n}{p}$.

Propriété (voir démonstration 05)

Formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Remarque

Cette formule, valable pour des nombres complexes, est bien entendu valable pour des nombres réels.

Exercice 18 (voir réponses et correction)

En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(a+b)^5$.

Exercice 19 (voir réponses et correction)

Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = 1$. Que peut-on en déduire ?

Propriété (voir démonstration 06)

Le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

c'est-à-dire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p} = 2^n$

Exercice 20 (voir réponses et correction)

Écrire et dénombrer toutes les parties de $E = \{\clubsuit ; \blacklozenge ; \heartsuit ; \spadesuit\}$

Exercice 21 (voir réponses et correction)

Un numéro de téléphone portable est formé de 10 chiffres dont les deux premiers sont 0 et 6.
Combien de numéros de téléphone portable sont disponibles ?

Exercice 22 (voir réponses et correction)

Pour remplir une grille de loto, il faut cocher 6 cases sur 49. Sachant que l'on met 10 secondes pour remplir une grille, combien de temps faudrait-il pour remplir toutes les grilles différentes possibles.

Exercice 23 (voir réponses et correction)

Pour choisir le canal d'émission d'un appareil utilisant des ondes radios, on dispose de 8 interrupteurs.
On peut positionner chacun de ces interrupteurs sur 0 ou 1. Combien y-a-t-il de canaux disponibles.