Ch:01

Algebre 03 :

Réduction des endomorphismes et Applications

Applications linéaires, matrices, et quelques propriétés fondamentales.

Applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'ensemble des app linéaire	$f : E \longrightarrow F$, e.v $\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$ $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Rq $\mathcal{L}(E)$ l'ens des endomorphismes de E

1) $f(0_E) = 0_F$ $\quad f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in E$

2) si A est un s.e.v de E, alors $f(A)$ est un s.e.v de F

3) si B est un s.e.v de F, alors $f^{-1}(B)$ s.e.v de E

noyau.	$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$. s.e.v
image.	$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \,/\, \exists x \in E ;\ f(x) = y\}$.
	! f est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ f est surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$ $> f \in \mathcal{L}(E,F)$.
monomorphisme	si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ injective
épimorphisme	si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective
automorphisme	si $E = F$, un endomorphisme bijective
isomorphisme	" " f est bijective

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \in E$

alors $f(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f(x_i)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $S = (x_1, \dots, x_n)$ une famille d'élément de E

1/ si S est liée, alors $f(S)$ est liée

2/ si $f(S)$ est libre, alors S est libre.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{\overline{1,n}}$ une f. de vect de E, alors

1/ Si f est surj et si $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$ engendre E, alors $(f(x_i))_{\overline{1,n}}$ engendre F

2/ Si f est inj et si $(x_i)_{\overline{1,n}}$ est libre de E, alors $(f(x_i))_{\overline{1,n}}$ libre de E

Prp

$f \in \mathcal{L}(\underbrace{E,F}) \rightarrow \dim < \infty$, Les prop suiv sont équi

1. f est bijective
2. pour tout base B de E, $f(B)$ est une base de F
3. Il existe une base B de E / $f(B)$ soit une base de F

Prp

---

rgf	$\underbrace{rg f}_{= \dim(Im f)} = \dim E - \dim(Ker f)$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim < \infty$

1/ f est inj ssi $rg f = \dim E$

2/ f est surj ssi $rg f = \dim F$

$f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim < \infty$, f est bij $\iff$ f est surj $\iff$ f est inj

Matrices et app linéaires

matrice de A l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	$A = (a_{ij})_{i,j=1,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$
matrice carrés	si $p = n$.

$$M : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

qui associe à chaque endomorphisme f une matrice M(f)

cette app est bijective

matrice de passage.	$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ / $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ deux bases d'un même e.v E dim n.

- $P = \text{pass}(\underbrace{B, B'}_{\text{deux base de } E})$ et $f \in \underbrace{\mathcal{L}(E)}_{\text{e.v de dim} = n}$

Soient $A = M(f, B, B)$ et $A' = M(f, B', B')$ Alors $A' = P^{-1}AP$

- A, B semblables s'il existe une matrice carrés n inver P / $B = P^{-1}AP$

Réduction des endomorphismes.

s.e stables	si $f(F) \subset F$ / $\forall x \in E, (x \in F) \Rightarrow (f(x) \in F)$.

On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$. e.v E de dim = n

F s.e.v de E. Les condition suivantes équi

1/ F est un s.e. stable par f

2/ La matrice associé à f par rapport à toute base obtenue par complététion de celle de F de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice en blocs}$$

diagonalisable.	il existe une matrice inv P / $P^{-1}AP$ soit diago
valeur propre.	$\exists x \in E \setminus \{0_E\} / f(x) = \lambda x$.

A tout vecteur propre non nul x, on associe une seule valeur propre λ.

s. esp propre.	$E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_E) = \{x \in E, x \neq 0 / f(x) = \lambda x\} \cup \{0_E\} = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$

Quelque propriétés des élément prop

1/ si x vec.p $\Rightarrow$ αx vect.p asso à va.p λ

2/ si λ va.p de f et $k \in \mathbb{N}^+$ $\Rightarrow$ λ^k est va.p de f^k.

3/ $E_\lambda = \{0_E\}$ sinifie que λ n'est pas v.p de f

4/ Les vec prop associé à $\lambda = 0$ sont les ve $\neq 0$ du noyau de f

5/ si λ, μ sont deux v.p distinctes de f, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \phi$

On considère un end f d'un $\mathbb{K}$ e.v E de dim finie pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les prop sont équi

λ v.p de $f \Leftrightarrow$ l'endomorphisme $(f - \lambda Id_E) \neq \phi$

Soient $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de v.p distinctes d'un end f. Alors
- toute famille de vect.p associée $(\lambda_i)_{i \in I}$ est libre.
- La somme des s.e.p. associés à $(\lambda_i)_{i \in I}$ est direct.

Si $\dim E = n$, $\Rightarrow$ toute base $\mathcal{B}$ de E est à n éléments en plus $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale.

calcul des val. p des end d'espaces vect, dim $< \infty$

polynôme caractérisque	$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} Tr(A) + \dots + \det A$

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

λ v.p d'un endo $f \in \mathcal{L}(E)$ ssi vérifie l'une des conditions équi
e.v dim finie ou infinie
1) il existe au moins un vect $\neq 0$ / $f(x) = \lambda x$.
2) $Ker(f - \lambda Id_E)$ est non réduit au vect nul
3) l'end $(f - \lambda Id_E)$ est non inj

$B = P^{-1} A P$ $\rightarrow$ deux matrices associées à f par rapport à deux base diff.

D'où l'on a $P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$

3_ Diagonalisation des end

Endomorphismes ou mat diagonali

diagonalisation.	s'il existe une matrice carée inver P / $P^{-1}AP$ soit diagonal.

$f \in \mathcal{L}(E)$ → e.v dim < ∞ diag ssi il une base de E formée de vecr propres

ssi   si

1| Son $P_f(\lambda)$ a n-racine dans $\mathbb{K}$.
2| pour chaque v.p λ_i, la dim du sous espace propre associé à l'ordre de multi de la v.p

si un endo f d'un esp vect E sur $\mathbb{K}$ de dim < ∞ possède n v.p distinctes dans $\mathbb{K}$ ⇒ f est diago

4 _ Trigonalisation des endomorphismes.

trigonalisation.	• ssi il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f $M_B(f) = M(f, B)$ par rapport à B est triang. • $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trig ssi $\exists P$ inv / $B = P^{-1}AP$ est trig.

si f est Trig et B est le base de trig de f

alors $P_f(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$

admet n. v.p.

pour tout end f d'un $\mathbb{K}$. e.v de dim $< \infty$ /

$P_f(x)$ ait toutes ces racines dans $\mathbb{K}$, $\exists$ base de E associée à f soit trig

les élément de $M(f, B)$ étant v.p de f

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le $P_A(x)$ a toutes ces racines dans $\mathbb{K}$, $\exists$ B trig semblable à A

Technique de Triangulation. - F. de Jordan.

toute matrice trigonalisable est semblable à matrice trig sup particulièrement simple dite Jordan.

cas

$n = 2$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{Av_2 = v_1 + \lambda v_2}$

$n = 3$

g1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{Av_3 = v_2 + \lambda_2 v_3}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{Av_2 = v_1 + \lambda v_2}$

$\boxed{Av_3 = v_2 + \lambda v_3}$

Remarque : 1/ il n'ya jamais unicité de la matrice de pass

2/

5. polynôme d'endomorphisme et le Théorème de Cayley-Hamilton.

poly. d'endomorphisme.	$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ → e.v sur $\mathbb{K}$ $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_m f^n$
poly de matrice.	$P(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n$

si P, φ sont deux polynômes, on a
$(P \circ \varphi)(f) = \varphi(f) \circ P(f)$.

poly. annulateur.	tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ / $P(f) = 0$
p. A. d'une matrice	$P \in \mathbb{K}[x]$ / $P(A) = 0$
l'ensemble des poly annulateur	$\mathcal{S} = \{ P \in \mathbb{K}[x] \,/\, P(f) = 0 \}$

tout end admet un poly annulateur non nul

poly minimale.	divise tous les poly annulateurs de f. il est unitaire et de degré minimal.

utilisation pratique du poly annulateur.

- f. un end d'un e.v E sur $\mathbb{K}$ de dim $< \infty$ et P est un poly annulateur de f / $P(0) \neq 0$ ⇒ f inver.
- f. un end " " "" inver ssi 0 n'est pas racine de son poly minimal

- f un end admettant un p. annulateur de degré $d \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f^n \in \mathrm{Vect}\{f^k ;\ k \in [0, d-1]\}$

Théorème de Cayley Hamilton et ses applications.

th de Cayley Hamilton.	pour tout end f d'un e.v de dim n sur $\mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ / poly carac aient toutes leurs racines dans $\mathbb{K}$. on a $P_f(f) = 0$ et $P_A(A) = 0$
	$\mathrm{Ker}(P_f(f)) = E$

- Soit f un end d'un e.v de dim $< \infty$ (ou A une matrice d'ordre n), $P_{min\,f}(x)$ ou $P_{min\,A}(x)$ divise $P_f(x)$ ou $P_A(x)$
- le degré du poly minimale est inférieur ou égal à n.

Méthode de calcul du poly minimale

1- calculer poly carac
2- On restrient les possibilités le poly min en faisant la liste de tous les diviseurs du poly carac
3- On élimine ceux qui n'ont pas les mêmes racines que le poly carac
4- On cherche parmi les poly restante les poly annulateurs unitaires et plus précisément celui de plus bas degré

App du th. Cayley-Hamilton au calcul de l'inverse

si $P_A(A) = (-1)^n (A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)$

Alors $P_A(A) = 0 \Rightarrow A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 I$

donc $A^{-1} = (-1/a_0)(A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \cdots + a_1 I_1)$

6- Applications fondamentales de la diagonalisation.

1| Systeme differentiels linéaires du 1 ordre

2| écriture matricielle des sy différentiels

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b$$

3| existence et unicité des solutions des sys différentiele. $\dot{x}(t) = Ax(t) + b \;/\; x(0) = c$

4| Structure de l'ensemble des solution lorsque $b=0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

cas ou A est diagonalisation

$$x(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} V_n$$

v.p

cas ou A est seulement trigonalisation

$A = PTP^{-1}$ on se ramènera au sy diff

$$\left(P^{-1}x(t)\right)' = T\left(P^{-1}x(t)\right)$$

5| Résolution de l'équation avec second membre $b \neq 0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b$$

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow B^k = P^{-1}A^kP \quad / k > 0$$

La puissance d'une mat diagonale est toujours une matrice diago dont les puissances des éléments de la mat de départ

App au calcul de l'exponentielle d'une matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = Pe^DP^{-1} \quad / A = PDP^{-1}$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une mat diag admettant n. v. p $\Rightarrow e^A = P.e^DP^{-1}$ où

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_2} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & e^{\lambda_n} \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix}$$

App aux suites recurrentes

$$x_{n+1} = Ax_n + B, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si $B = 0$ et $x_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$, $x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$ donc.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}^n P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ v.p