Application affines du plan

Définition 1

Soit f une application du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même A ,B et C trois points de $(\mathcal{P})$ dinstincts tels que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha \in R$ .On note

$f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$

On dit que f conserve le coefficient de colinearité si : $A'C' = \alpha A'B'$

On appelle application affine toute application du plan dans lui-même qui conserve le coefficient de colinéarité.

Théorème 1

Soit f une application du plan dans lui-même ; les assertions suivantes sont équivalentes :

f conserve le coefficient de colinéarité.

f conserve les barycentres.

f est une application affine

Exemples :

-Toute projection du plan est une application affine.

-toute Isométrie du plan est une transformation affine du plan.

-Toute homothétie, toute similitude est une transformation affine du plan.

Application Vectorielle associé a une application affine.

Propriété 2

La composé de deux applications affines du plan est une application affine du plan.

La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Remarque :

Toute similitude du plan, composé d'une isométrie et d'une homothétie est une transformation affine du plan.

Application vectorielle associé à une application affine.

Définition 2

Soit f une application affine du plan.On appelle application vectorielle ou application linéaire ou encore endomorphisme associe a f ,l'application φ definie de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ telle que :

$$\forall\, A, B \in (\mathcal{P})\,,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\big(\overrightarrow{AB}\big)$$

Exemples :

L'application linéaire associé a une translation

$$\varphi:\ \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \longmapsto \varphi(\vec{u}) = u$$

L'application linéaire associé a une homothétie de rapport k est :

$$\varphi:\ \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \longmapsto \varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$$

L'endomorphisme φ associé a une rotation d'angle θ est defini par :

$$\varphi:\ \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \longmapsto \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\ ;\ \begin{cases} \|\vec{v}\| = [\![\vec{u}]\!] \\ \big(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\big) = \theta \end{cases}$$

L'endomorphisme φ associé a une similitude directe f de rapport $k > 0$ et d'angle θ est defini par :

$$\varphi: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$\vec{u} \longmapsto \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\ ;\ \begin{cases} \|\vec{v}\| = k[\![\vec{u}]\!] \\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \theta \end{cases}$$

Théorème 2

Soit f une application affine du plan et φ l'application linéaire associé a f .

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2\ ,\qquad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$
$$\forall(\vec{u}, k) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}\ ,\qquad \varphi(k\vec{u}) = k(\vec{u})$$

Remarques

$$,\qquad \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\vec{u}_i)$$

Propriétés caractéristiques d'une application affine.

Théorème 3

Toute application affine du plan est déterminée par la donnée de 3 points non alignés et de leurs images.

Propriétés fondamentales

Si deux applications affines coïncident en 3 points non alignés alors elles sont égales.

Id_p est la seule application affine laissant invariant 3 points non alignés.

Une application affine du plan est bijective si et seulement si l'image d'un repère est un repère c'est-à-dire $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ ou

Points invariants par une application affine.

Soit f une application affine du plan.

L'ensemble $\mathcal{J}_f$ des points invariants par f est soit l'ensemble vide, soit le singleton, soit une droite une droite ou le plan lui-même.

1er cas

S'il existe 3 points non alignés invariants, alors

$\mathcal{J}_f = (\mathcal{P})$

2eme cas

S'il n'existe pas trois points non alignés invariants, mais il existe deux points distincts A et B invariants alors : $\mathcal{J}_f = (AB)$

3eme cas

S'il n'existe pas de point invariant distincts, alors $\mathcal{J}_f = \{\ \ \}$ ou $\mathcal{J}_f = \{I\}\ unique\ point\ fixe$

Image par une application affine d'une configuration géométrique.

Toute application affine transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Deux droites sécantes en deux droites sécantes.

Si f est une application affine du plan, alors l'image du plan est le plan lui-même.

Si f n'est pas une application affine du plan, alors l'image du plan est un singleton ou une droite.

Expression analytique d'une application affine.

Propriétés 3

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit f une application du plan dans lui-même.

f est une application affine du plan si et seulement si elle admet une expression analytique de le forme :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y'' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Avec $\varphi(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$

NB : f est une transformation affine si et seulement si : $det(\varphi(\vec{\imath}); \varphi(\vec{\jmath})) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Pour la recherche des points invariants résolvons l'équation : $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Exemples :

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$ est : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

L'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega\binom{2}{-1}$ et de rapport -2 :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$$

Application 1

Déterminer l'expression analytique de la réflexion S d'axe $(\mathcal{D}) : y = 2x - 1$

Proposition de correction

$M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow y = 2x - 1$ son vecteur directeur est $\vec{u}\binom{1}{2}$ et son vecteur normal est $\vec{n}\binom{2}{-1}$

$$\begin{cases} il\ existe\ un\ réel\ \alpha \in IR^*\ tel\ que\ \overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{n} \\ Imil[MM'] \in (\mathcal{D}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \left(\dfrac{x' + x}{2}; \dfrac{y' + y}{2}\right) \in (\mathcal{D}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x' - x = 2\alpha \\ y' - y = -\alpha \end{cases} (1) \\ \dfrac{2(x' + x)}{2} - \dfrac{(y' + y)}{2} - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = 2\alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ 2(x' + x) - (y' + y) - 2 = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = 2\alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ 2(2\alpha + 2x) - (-\alpha + 2y) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = -\alpha + y \end{cases} (1) \\ \alpha = \dfrac{1}{5}(2y - 4x + 2) \quad (2) \end{cases}$$

En remplaçant $(2)\ dans\ (1)$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{5}(2y - 4x + 2) + x \\ y' = -\dfrac{1}{5}(2y - 4x + 2) + y \end{cases}$$

$$S_{(\mathcal{D})}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-3x + 4y + 4}{5} \\ y' = \dfrac{4x + 3y - 2}{5} \end{cases}$$

Application 2

L'application g d'expression analytique :

$g(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 3x + 2y - 1 \end{cases}$ Dans le repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. justifier que g est une application affine.

2. Définir $\varphi(\vec{\imath})$ et $\varphi(\vec{\jmath})$ ou φ est l'endomorphisme associe a g .

Proposition de correction 2

g est écrit sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y'' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

avec $a, b, c\ , a', b' et\ c'$ des nombres réels

$a = 2\ , b = -1\ \ , c = 1\ ; a' = 3\ , b' = 2\ , c' = -1$

Donc g est une affinité du plan.

2.

Rappel $\varphi(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$

$\varphi(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

Application 2

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit h l'application affine telle que :

$h(A) = A', h(B) = B'\ , h(C) = C'$

$A\binom{1}{1}, A'\binom{3}{4}, B\binom{0}{2}, B'\binom{1}{-1}, C\binom{-1}{2}$ $et\ C'\binom{0}{3}$

1. Déterminer $\varphi(\vec{\imath})$ et $\varphi(\vec{\jmath})$ ou φ est l'endomorphisme de h.

2. Déterminer l'expression analytique de h .

Proposition de correction 2

$$\overrightarrow{BC} = (x_c - x_B)\vec{\imath} + (y_c - y_B)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BC} = -\vec{\imath}$$

$$\varphi(\overrightarrow{BC}) = \varphi(-\vec{\imath})$$

$$\overrightarrow{h(B)h(C)} = -\varphi(\vec{\imath})$$

$$\overrightarrow{B'C'} = -\ \varphi(\vec{\imath})$$

$$\varphi(\vec{\imath}) = \overrightarrow{C'B'} = (x'_B - x'_C)\vec{\imath} + (y'_B - y'_C)\vec{\jmath}$$

$$\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B)\vec{\imath} + (y_A - y_B)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

$$\varphi(\overrightarrow{BA}) = \varphi(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{h(B)h(A)} = \varphi(\vec{\imath}) -\ \varphi(\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{B'A'} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} -\ \varphi(\vec{\jmath})$$

$$d'ou : \ \varphi(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - 9\vec{\jmath}$$

2.

1^er^ méthode

Ecriture analytique de h :

$$\overrightarrow{f(B)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{BM})$$

$$\overrightarrow{B'M'} = \varphi(x\vec{\imath} + (y-2)\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{B'M'} = x\varphi(\vec{\imath}) + (y-2)\varphi(\vec{\jmath})$$

$$(x' - x'_B)\vec{\imath} + (y' - y'_B)\vec{\jmath} = x(\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}) + (y-2)(-\vec{\imath} - 9\vec{\jmath})$$

$$(x' - x'_B)\vec{\imath} + (y' - y'_B)\vec{\jmath} = (x - y + 2)\vec{\imath} + (-4x - 8y + 18)\vec{\jmath}$$

Par identification :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = x - y + 2 \\ y' + 1 = -4x - 8y + 18 \end{cases}$$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 8y + 17 \end{cases}$$

2eme Démarche

$$h(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = ax_A + by_A + c \\ y'_A = a'x_A + b'y_A + c' \end{cases}$$

$$h(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + b + c \\ 4 = a' + b' + c' \end{cases}$$

$$h(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_B = ax_B + by_B + c \\ y'_B = a'x_B + b'y_B + c' \end{cases}$$

$$h(B) = B' \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2b + c \\ -1 = 2b' + c' \end{cases}$$

$$h(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_C = ax_C + by_C + c \\ y'_C = a'x_C + b'y_C + c' \end{cases}$$

$$h(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + 2b + c \\ 3 = -a' + 2b' + c' \end{cases}$$

en prenant une équation dans chaque système nous obtenons le système suivants

$$S_1: \begin{cases} 3 = a + b + c \\ 1 = 2b + c \\ 0 = -a + 2b + c \end{cases} ; \quad S_2: \begin{cases} 4 = a' + b' + c' \\ -1 = 2b' + c' \\ 3 = -a' + 2b' + c' \end{cases} ;$$

On résolvant S_1 $on\ a$: $a = 1$, $b = -1$ et $c = 3$

On résolvant S_2 $on\ a$: $a' = -4$, $b' = -9$ et $c' = 17$

Vu que h est une application affine

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

En remplaçant les réels on a :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = -4x - 8y + 17 \end{cases}$$

Affinités du plan

Définition 3

Soit $(\mathcal{D})$ une droite,δ une direction de droite distinctes de celle de $(\mathcal{D})$ et k un nombre réel. On appelle affinité d'axe $(\mathcal{D})$,de direction δ et de rapport k l'application f qui a tout point M du plan associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ ou H est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction δ .

Lorsque la direction de $(\mathcal{D})$ est orthogonale a δ .f est l'affinité orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ et de rapport k .

Remarques

Si $k = 0$, alors f est la projection sur $(\mathcal{D})$ suivants la direction

Si $k = 1$, alors f est l'application identique du plan.

Si $k = -1$, et si la direction de $(\mathcal{D})$ est orthogonale a δ alors f est la symetrie orthogonale d'axe$(\mathcal{D})$.

L'ensemble des points invariants d'une affinité est son axe.

Expression analytique

Propriété 4

Le plan est muni du repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'expression analytiques de l'affinité d'axe $(\mathcal{D})$ d'équation $y = b$, de direction elle de $\vec{\jmath}$ et de rapport k.

$$: \begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$$

Application 3(BAC Blanc jean hilaire OBAME 2023)

Le plan est muni du repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=\frac{1}{2}x$ la symétrie S d'axe $(\mathcal{D})$ direction celle de l'axe(Oy).

Soit g l'application affine de P dans P qui au point $M(x,y)$associe le point $M'(x',y')$ tel que

$$g(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+1 \\ y'=-\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2}\end{cases}$$

1. Montrer que g est bijective et vérifier que : $goS=Sog$.
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariant par g .
3. Montrer que si M n'est pas invariant par g, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera .
4. Calculer les coordonnées du point M_1 intersection de (MM') et de (Δ) .
5. Montrer que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

Proposition de correction 3

1 .

$\varphi(\vec{\imath})=-\frac{1}{2}\vec{\imath}-\frac{3}{4}\vec{\jmath}$ et $\varphi(\vec{\jmath})=-\vec{\jmath}$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\imath});\boldsymbol{\varphi}(\vec{\jmath}))=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Donc g est bijective.

Déterminons d'abord l'écriture analytique de S

$$M\in(D)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases} \text{il existe un réel } \alpha\in IR^* \text{ tel que } \overrightarrow{MM'}=\alpha\vec{\jmath} \\ Imil[MM']\in(D)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \left(\frac{x'+x}{2};\frac{y'+y}{2}\right)\in(D)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'-x=0 \\ y'-y=\alpha\end{cases}(1) \\ \frac{y'+y}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x'+x}{2}\right)(2)\end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x \\ y'=\alpha+y\end{cases}(1) \\ x'+x=2(y'+y) \quad (2)\end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x \\ y'=\alpha+y\end{cases}(1) \\ 2x=4y+2\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x \\ y'=\alpha+y\end{cases}(1) \\ 2\alpha=2x-4y\ (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x'=x \\ y'=\alpha+y\end{cases}(1) \\ \alpha=x-2y\ (2)\end{cases}$$

En remplaçant (2) *dans* (1) *on obtient* :

$$S_{(D)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=x-y\end{cases}$$

$$g(M)=M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x+1 \\ y_1=-\frac{3}{4}x+y+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$S_{(D)}(M_1)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x_1 \\ y'=x_1-y_1\end{cases}$$

$$Sog(M)=S(M_1)=M'$$

$$Sog(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{1}{4}x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_{(D)}(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x - y \end{cases}$$

$$g(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x_1 + y_1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$gos(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{1}{4}x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où : $goS = Sog$

2.

Résolvons l'équation $g(M) = M$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M(x,y) \in (\Delta) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

3.

$$g(M) \neq M \Longrightarrow M' \neq M$$

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{\imath} + (y' - y)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{1}{2}x + 1 - x\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} - y\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x + 1\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \left(\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)\left(-\frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$\overrightarrow{MM'} = \left(\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)(\Delta)$$

$\overrightarrow{MM'}$ à la direction du vecteur $\left(\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$

4 .

La droite (MM') a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1; \frac{1}{2}\right)$

ainsi (MM') a pour équation cartésienne :

$$\frac{1}{2}x - y + C = 0$$

$$C = y - \frac{1}{2}x$$

$$M_1 \in \begin{cases} (MM') \\ (\Delta) \end{cases} M_1 \in \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - y_1 + C = 0 \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M_1 \in \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + C \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M_1 \in \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} + y - \frac{1}{2}x \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$M_1 \begin{pmatrix} \frac{2 + 6y - 3x}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5.

g est écrit sous la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

avec $a, b, c, a', b' et\ c'$ des nombres réels

$a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 1 ; a' = \frac{-3}{4}, b' = 1, c' = \frac{1}{2}$

Donc g est une application affine du plan.

Elément caractéristiques

D'une part on a :

$$\overrightarrow{M_1M'} = (x' - x_1)\vec{\imath} + (y' - y_1)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_1M'} = \left(-\frac{1}{2}x + 1 - \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{3}{4}x + y + \frac{1'}{2} - \left(\frac{1}{3} + y - \frac{1}{2}x\right)\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_1M'} = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\vec{\jmath}$$

D'autre part on a :

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{\imath} + (y - y_1)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} + \left(y - \frac{1}{3} - y + \frac{1}{2}x\right)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M_1M'} = -\frac{1}{2}\underbrace{\left(x - \frac{2}{3}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\vec{\jmath}}_{\overrightarrow{M_1M}}$

$\overrightarrow{M_1M'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M}$ D'où : $k = -\frac{1}{2}$

Conclusion : g est une affinité d'axe

(Δ): $x = \frac{2}{3}$, de direction $\left(\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$ et de rapport

$k = -\frac{1}{2}$.