UNIVERSITE DE COCODY

UNIVERSITE DE COCODY ABIDJAN

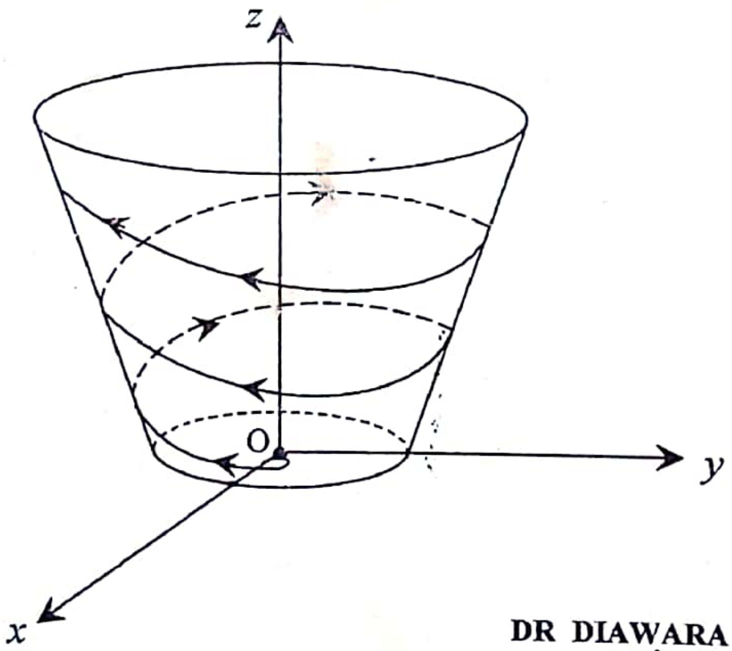
UFR - SSMT

DIPLÔME D'ETUDES UNIVERSITAIRES GENERALES (DEUG)

PREMIÈRE ANNÉE
PC – MPCT – MPT

MÉCANIQUE

SUJETS D'EXAMENS ET EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES CORRIGÉS



DR DIAWARA ADAMA
MAÎTRE ASSISTANT
AU LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'ATMOSPHÈRE
ET DE MÉCANIQUE DES FLUIDES (LAPA-MF)

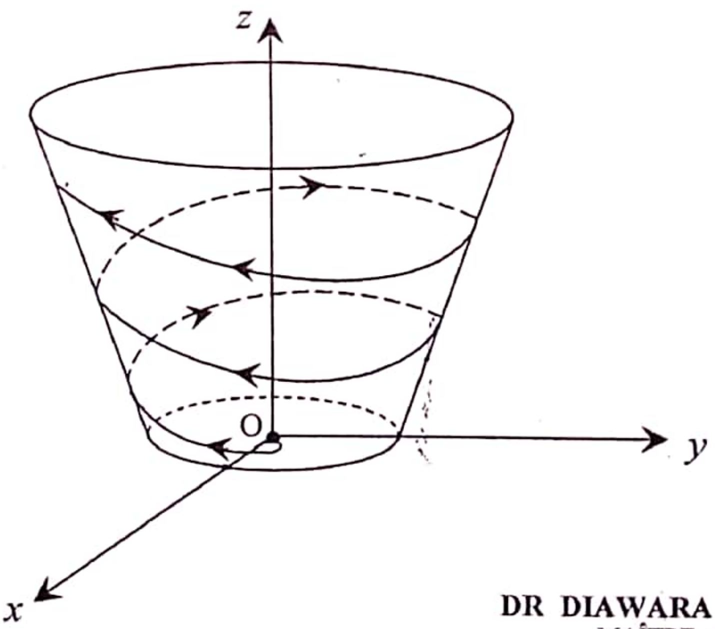
UNIVERSITE DE COCODY

DIPLÔME D'ETUDES UNIVERSITAIRES GENERALES (DEUG)

PREMIÈRE ANNÉE
PC – MPCT – MPT

MÉCANIQUE

SUJETS D'EXAMENS
ET EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
CORRIGÉS



DR DIAWARA ADAMA
MAÎTRE ASSISTANT
AU LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'ATMOSPHÈRE
ET DE MÉCANIQUE DES FLUIDES (LAPA-MF)

TABLE DES MATIERES

PREMIÈRE PARTIE

ENONCÉS

SUJETS D'EXAMENS ET EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Première session 1992-1993 PC1-MPCT1-MPT1 (Sujet B)

Exercice 1 :

Un point M décrit la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta) = 5\rho_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

1/ Représenter sur une figure la trajectoire du point M.

2/ L'angle polaire θ varie linéairement avec le temps $(\theta = \omega t)$. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération du point M :

a) Dans la base du repère local lié aux coordonnées polaires ;

b) Dans la base $(\vec{e_t}, \vec{e_n})$ du repère intrinsèque.

3/ Exprimer la coordonnée curviligne s de M en fonction de θ.

4/ Calculer la longueur L de la trajectoire de M.

5/ Exprimer $\vec{e_t}$ dans la base polaire. En déduire l'angle α que $\vec{e_t}$ fait avec l'axe des x.

6/ Exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de α. En déduire le rayon de courbure R en fonction de α et ensuite en fonction de θ.

Exercice 2 :

Dans un référentiel d'inertie, un point matériel M décrit une courbe d'équations cylindriques paramétriques :

$$\rho = v_0 t,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

$$z = bt,$$

où v_0 et b sont des constantes positives.

1/ a) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M dans le référentiel d'inertie Oxyz.

b) $\vec{v}$ et $\vec{a}$ étant respectivement la vitesse et l'accélération de M dans le référentiel d'inertie, déterminer, sans calcul, la composante normale de $\vec{a}$, ainsi que l'angle que fait $\vec{v}$ avec le plan vertical Oyz.

2/ a) Déterminer les équations paramétriques (de paramètre t) de la trajectoire de M dans un référentiel Ox'y'z' tournant avec une vitesse angulaire constante ω, autour de l'axe Oz, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Les deux référentiels Oxyz et Ox'y'z' sont confondus au début du mouvement de M.

b) Représenter sur une figure la trajectoire de M dans le référentiel non galiléen Ox'y'z'.

3/ Calculer les composantes de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement de M.

En déduire celles de la vitesse absolue de M.

4/ Calculer les composantes des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis du point M.

En déduire celles de l'accélération absolue de M.

5/ Retrouver directement la vitesse et l'accélération absolues de M.

Première session 1993-1994 PC1-MPCT1-MPT1

Exercice 1 :
Un point M oscille sur un demi-cercle (C) vertical de centre O et de rayon R, de part et d'autre d'un point M_0, intersection du demi-cercle (C) avec le plan horizontal (OX,OY) de la figure.
Les positions extrêmes de M sont repérées par M_1 et M_1'.
A chaque instant t le point M est défini par son abscisse curviligne :

$$s(t) = \widehat{M_0M} = A \,.\, \sin \alpha t\,,$$

A et α étant des constantes du mouvement.
Simultanément, le demi-cercle (C) effectue un mouvement autour de l'axe OZ selon la loi :

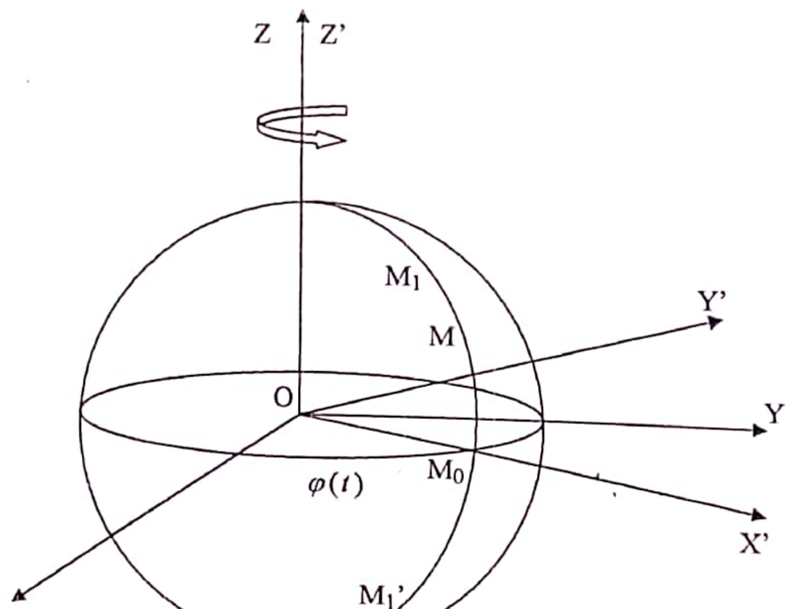
$$\varphi(t) = (\,\overrightarrow{OX}\,,\,\overrightarrow{OX'}\,) = B \,.\, \sin(\beta t + \beta_0)\,,$$

B, β et β_0 étant des constantes du mouvement et OX'Y'Z' un système d'axes orthogonaux liés à (C).

1/ Exprimer dans la base de Serret Frenet ($\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$) et en fonction de α, A, R et t, la vitesse $\vec{V}(M)$ / R' et l'accélération $\vec{\gamma}(M)$ / R' du point M par rapport au référentiel R'(OX'Y'Z').

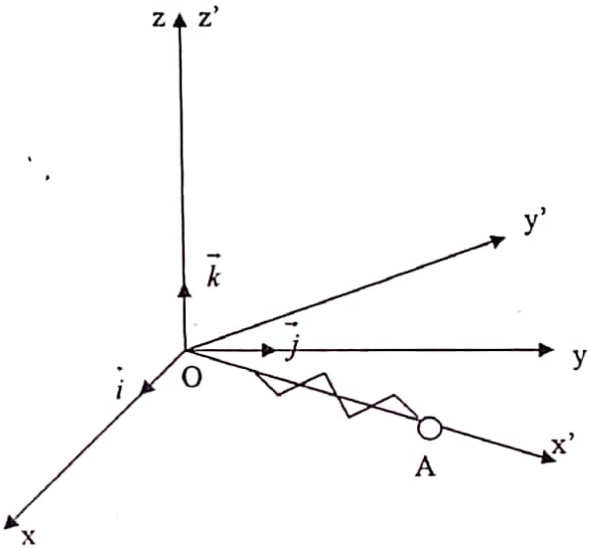
2/ Exprimer en fonction des constantes du mouvement, et toujours dans la base de Frenet, la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du mobile lorsque celui-ci passe par le point M_0 en allant de M_1 vers M_1' et que le mouvement de (C) se fait à cet instant dans le sens de φ croissant.

On commencera par représenter le trièdre orthonormé direct ($\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$) au point M_0.



Exercice 2 :

Dans le repère galiléen R(Oxyz) de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère une tige Ox' de masse négligeable portant un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur a au repos. L'extrémité A de ce ressort est solidaire d'un anneau supposé ponctuel, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur la tige Ox'.
La tige Ox' située dans le plan (xOy), tourne autour de l'axe vertical Oz, dans le sens trigonométrique, avec une vitesse angulaire constante ω .
On appelle R'(Ox'y'z') le référentiel mobile lié à la tige Ox'. Les axes Oz' et Oz sont confondus.



1/ On fixe l'anneau A à la distance a de O.
Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport au repère fixe R(Oxyz), en fonction des vecteurs de base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$) de R'(Ox'y'z').
2/ A l'instant t = 0, on libère l'anneau A sans vitesse initiale.
a) Exprimer vectoriellement dans la base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$) les forces qui s'exercent sur l'anneau A dans le référentiel mobile R'(Ox'y'z').
En déduire l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique dans le repère R'(Ox'y'z').
b) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau A sur Ox'.
Pour quelles valeurs de ω l'anneau A oscillera-t-il sur la tige Ox' ? Exprimer alors Ω, pulsation du mouvement, en fonction des données du problème.
c) Dans ces conditions, déterminer l'équation horaire x'(t) du mouvement de l'anneau A sur la tige Ox'.
3/ Dans le cas du mouvement oscillatoire, déterminer les composantes $R_{x'}$, $R_{y'}$ et $R_{z'}$ de la réaction $\vec{R}$ de la tige Ox' sur l'anneau A.
4/ Déterminer, dans le cas du mouvement oscillatoire, la vitesse $\vec{V}$ de A par rapport au repère fixe (R), en fonction des vecteurs de la base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$).
Calculer la puissance mécanique P(t) de la réaction $\vec{R}$.

Deuxième session 1993-1994 PC1-MPCT1-MPT1

Exercice 1 :

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe Oxyz par ses coordonnées cylindriques (ρ , θ, z) telles que : $\rho = a$, $\theta = \omega t$ et $z = h\theta$, où a, ω et h sont des constantes positives, et t le temps.

1/ Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

2/ Quelle est la nature du mouvement du point M :
  a) dans le plan xOy ?
  b) suivant l'axe Oz ?

3/ a) Quelle est la nature du mouvement résultant du point M ?
  b) Représenter la trajectoire du point M dans le référentiel Oxyz.

4/ Déterminer les composantes cartésiennes et le module du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\gamma}$.

5/ Calculer l'abscisse curviligne s(t) du point M à l'instant t sachant que s(t) = 0 à t = 0.

6/ Calculer les composantes tangentielle (γ_t) et normale (γ_n) du vecteur accélération $\vec{\gamma}$.

7/ Calculer le rayon de courbure R de la trajectoire de M.

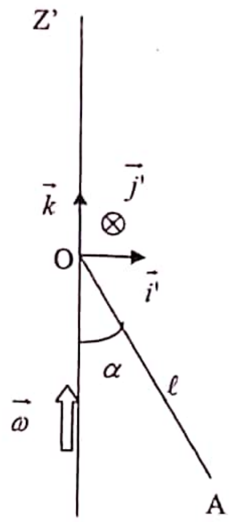
8/ Montrer que la vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant α avec l'axe Oz.
  Déterminer l'hodographe du mouvement du point M.

Exercice 2 :

Soit un axe vertical Oz', tournant sur lui-même à la vitesse angulaire ω variable : $\omega = \omega$ (t). Cet axe entraîne dans son mouvement une tige OA de longueur ℓ articulée en O et qui forme avec l'axe Oz' un angle α dépendant de ω .

En A est fixé un point matériel de masse m ; la tige OA est de masse négligeable.

1/ On considère le repère R'(O, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}$) entraîné par le mouvement de rotation d'axe Oz'.



a) Ecrire dans le repère R' le vecteur position du point matériel.

En déduire sa vitesse relative $\vec{v_r}$ et sa vitesse d'entraînement $\vec{v_e}$.

b) Calculer dans ce repère les différentes forces d'inertie qui s'exercent sur le point matériel.

2/ On suppose ω constante : la tige forme alors avec l'axe Oz' un angle α constant.

a) Que deviennent les différentes forces d'inertie dans ce cas ?

b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère R'.

On exprimera tous les vecteurs dans la base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k}$).

c) En déduire l'intensité de la tension de la tige OA :

- en fonction de m, ℓ et ω ;
- en fonction de α et du poids mg du point matériel.

d) Etablir la relation qui lie α et ω.

Montrer que α n'est différent de zéro que pour des valeurs de ω supérieures à un ω_o que l'on déterminera.

Devoir de Mécanique 1995 PC1-MPCT1-MPT1

Exercice 1 :

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel sont en représentation paramétrique :

$$x = v_0 \left(t - \frac{t^3}{3} \right)$$

$$y = v_0 \, t^2 \qquad\qquad v_0 \text{ : constante positive}$$

$$z = 0$$

Calculer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans la base cartésienne.

En déduire les composantes de $\vec{a}$ dans la base locale de Frenet.

Exercice 2 :

Un tube cylindrique de longueur 2a tourne dans le plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical passant par son centre O. Une particule initialement au repos dans le tube à la distance b de O, se déplace sans frottement suivant l'axe du tube.

Quelle sera, par rapport à un référentiel galiléen judicieusement choisi :

1/ la vitesse V de la particule à tout instant t de son mouvement dans le tube ?

2/ la vitesse V_s de la particule à sa sortie du tube ?

On rappelle que :

a) $\text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\text{ch}^2x + \text{sh}^2x = 2\text{ch}^2x - 1$

b) Les équations différentielles $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ et $\ddot{x} - \Omega^2 x = 0$ ont pour solutions respectives : $x = x_m\cos(\Omega t - \varphi)$ et $x = A.e^{\Omega t} + B.e^{-\Omega t}$

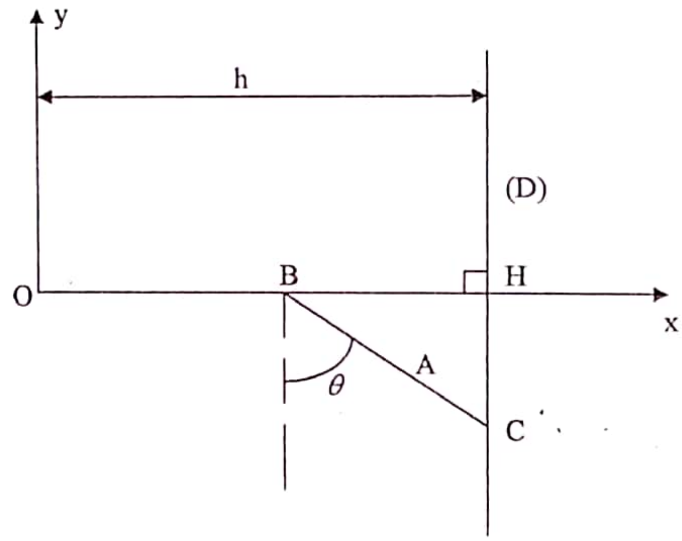
Exercice 3 :
Une tige BC, de longueur ℓ, a ses extrémités qui se déplacent, respectivement, le long de l'axe Ox d'un référentiel R=Oxyz et le long d'une droite (D) parallèle à l'axe Oy. La distance qui sépare (D) de Oy est OH=h (voir figure ci-dessous). La position, dans le plan Oxy, d'un point quelconque A de la tige est caractérisée par l'angle $\theta = (-\overrightarrow{Oy}\ ,\ \overrightarrow{BC})$. On note d la distance AB.

1/ Exprimer en fonction de θ, les coordonnées de C et A dans le repère R.

2/ Quelles sont, dans la base de R, les composantes de $\vec{V}_{A/R}$ et $\vec{V}_{A/R1}$, R_1 étant le référentiel d'origine B, en translation par rapport à R ? Trouver la vitesse d'entraînement de R_1 par rapport à R.

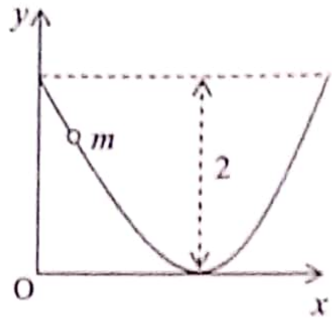
3/ Quelles sont, dans la base de R, les composantes de $\vec{a}_{A/R}$ et $\vec{a}_{A/R1}$? Trouver l'accélération d'entraînement de R_1 par rapport à R.

4/ a) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de A dans le repère R.
b) En déduire la nature de cette trajectoire.
c) Représenter ladite trajectoire dans le cas où ℓ > 2d.
On supposera que : h > ℓ.



Première session 1994 – 1995 PC1 – MPCT1 – MPT1 (Partie B)

Une perle assimilée à un point matériel de masse m glisse sans frottement sur un fil ayant la forme d'une cycloïde (voir figure) d'équations :



$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 + \cos\theta \end{cases}$$

où $0 \le \theta \le 2\pi$, $\theta = \theta(t)$, où t est le temps.

1) Ecrire l'énergie cinétique T de la perle en fonction de m, θ et $\dot{\theta}$.

2) Ecrire l'énergie potentielle V de la perle en fonction de m, g et θ où g est l'accélération de la pesanteur.

3) On pose $L = T - V$
Ecrire L en fonction de m, θ, $\dot{\theta}$ et g.

4) Calculer
   a) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta}$
   b) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$
   c) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)$

5) En écrivant : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, montrer qu'on aboutit à une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + A\dot{\theta}^2 + B = 0$, par identification donner les valeurs de A et B.

6) Montrer que l'on peut écrire l'équation du mouvement de la question 5) sous la forme :
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4}u = 0 \text{ où } u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

7) Donner la solution de l'équation de la question 6) et la période T.

8) Donner la longueur l d'un pendule simple qui aurait la même période que la période de la question 7).

Première session 1999 – 2000 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1 :
On considère, dans le plan xOy, une particule en mouvement sur une trajectoire circulaire de rayon R. On suppose que la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est une constante.

1/ On pose $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V}$ où $\vec{V}$ est la vitesse instantanée de la particule.

Trouver une relation entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse angulaire.

2/ Trouver une relation entre $\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ et l'accélération de la particule.

Exercice 2 :
Soit un champ de force défini par $\vec{F} = y\vec{i} + \lambda x\vec{j}$.

1/ Pour quelle valeur de λ ce champ de force est-il un gradient ?

2/ Exprimer dans ce cas l'énergie potentielle E_p dont ce champ de force dérive.

3/ Calculer, pour la même valeur de λ, le travail de $\vec{F}$ de l'origine O(0,0) au point A(1,1) de deux façons différentes :

a) En suivant les deux segments de droite OC et CA, le point C étant défini par ses coordonnées (1,0) ;
b) En suivant la courbe $y = x^3$ de O à A.

Exercice 3 :
Un homme se tient debout immobile au bord d'un plateau circulaire horizontal de rayon R = 4 m, tournant autour de son axe Oz à la vitesse de 10 tours par minute.
On utilisera le repère Oxyz fixe lié au sol, supposé galiléen, et le repère mobile lié au plateau tournant, O'x'y'z', dont l'origine O' coïncide avec les pieds de l'homme. L'angle de O'x' avec Ox est défini par $\varphi = \omega t$. (Voir figure).

1/ Calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement de l'homme par rapport au repère fixe.

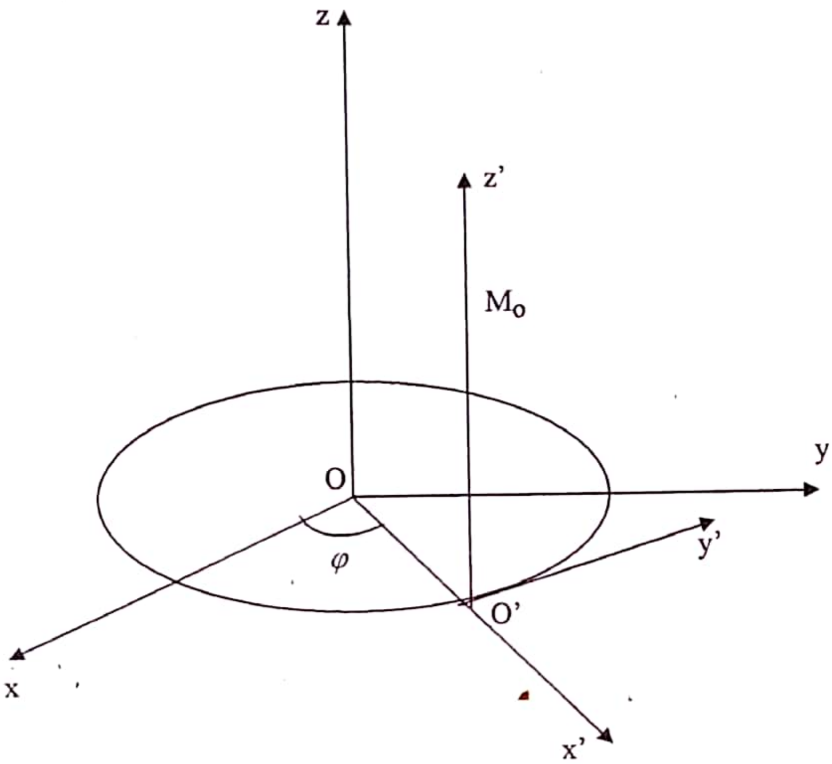
On donnera les résultats dans la base mobile ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$), puis dans la base fixe ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

2/ L'homme lâche sans vitesse initiale par rapport au repère mobile une bille de masse m = 20 g d'un point M_0 situé à une hauteur H = 1,80 m au-dessus du plateau, à l'instant t = 0.

a) Quelle est la vitesse initiale de la bille par rapport au repère fixe ?
On donnera le résultat dans les deux bases.
b) Déterminer les coordonnées x, y, z de la bille en fonction du temps.
c) La bille tombe-t-elle sur le plateau ou à l'extérieur ? Calculer la distance du point d'impact (z = 0) au bord du plateau.
On prendra $g = 10\ m\ .\ s^{-2}$.

3/ L'homme lance du point O' la bille qui roule sur le plateau avec une vitesse initiale de 1 $m.s^{-1}$ dirigée vers le centre O.

Le mouvement de la bille dans le repère mobile étant rectiligne uniforme, calculer la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées à la bille, en fonction de x'. Calculer l'intensité F de cette force au départ de la bille en O'.



Première session 2001 – 2002 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice :
S étant un champ scalaire, calculer le gradient de S en coordonnées cylindriques (ρ , θ , z).
On utilisera la relation :

$$dS = \overrightarrow{grad}\ S \,.\, d\vec{r}$$

Problème :
Une perle P de masse m se déplace sans frottement le long d'une tige. Cette dernière, fixée en A à un axe vertical Oz et inclinée de 60° sur la verticale descendante, tourne autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante ω .

1/ a) La tige étant située dans le plan Oxz à l'instant initial, calculer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U de la perle ponctuelle P.
On notera r la distance AP et h la hauteur du point de fixation A de la tige.

b) En déduire le lagrangien de la perle : L = T – U.

c) Trouver l'équation différentielle du mouvement de P à partir de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 .$$

2/ a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour P dans un référentiel non galiléen judicieusement choisi.

b) En déduire l'équation différentielle du mouvement de P.

3/ Déterminer l'équation horaire r = r(t) du mouvement de P.
On supposera qu'à l'instant t = 0, P est à la distance r_0 du point A et possède la vitesse v_0 sur la tige.

Deuxième session 2001 – 2002 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1/3

1/ Représenter sur une figure la base orthonormée directe sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\phi}, \vec{e_\theta})$, où ϕ représente la colatitude et θ la longitude.

2/ Exprimer le vecteur position $\vec{r}$ d'un point M de coordonnées sphériques (r,ϕ,θ) dans la base sphérique.

3/ En dérivant le vecteur position, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ de M dans la base sphérique.

4/ En déduire l'expression de $\vec{v}$ dans le cas où le point M se déplace à la surface de la terre le long de l'équateur.

Exercice 2/3

A/ Dans un repère orthonormé Oxy, on considère le point P de coordonnées cartésiennes x(t) et y(t). On pose :

$$x' = \frac{dx}{dt}\ ,\ y' = \frac{dy}{dt}\ ,\ x'' = \frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Calculer en fonction de x', x'', y' et y'' :

1/ l'accélération tangentielle γ_t ;

2/ l'accélération normale γ_n ;

3/ le rayon de courbure R.

B/ On donne le cas particulier suivant :

$$x = a.\sin \omega t$$
$$y = a.\cos \omega t$$

où a et ω sont deux constantes positives.

1/ A partir des résultats de A/ calculer γ_t , γ_n et R .

2/ En déduire la nature du mouvement de P.

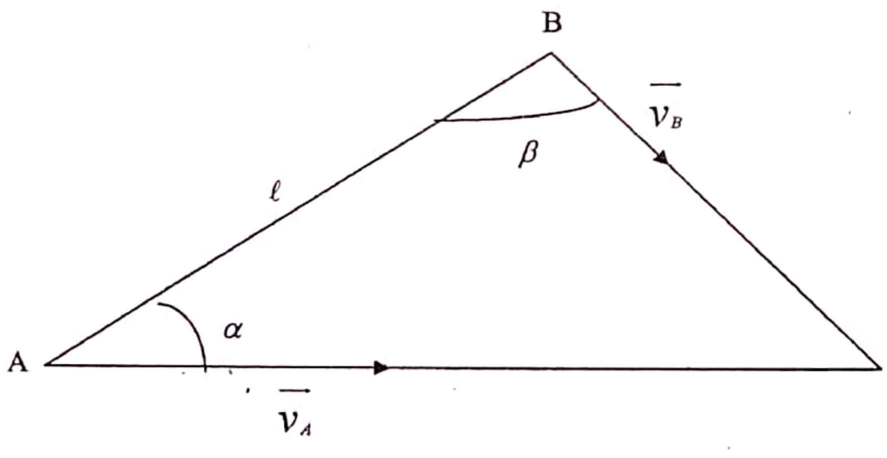
Exercice 3/3

Un bateau passe en un point A avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$. Au même moment, un canot part du point B situé à une distance ℓ de A, avec une vitesse dont la norme est v_B .

α étant l'angle entre $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{AB}$:

1/ Quel doit être l'angle β de $\overrightarrow{v_B}$ avec $\overrightarrow{AB}$ pour que le canot puisse rencontrer le bateau ? On utilisera un référentiel lié au bateau.

2/ Quel sera le temps mis par le canot pour rejoindre le bateau ?



Première session 2003 – 2004 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1 : Energie mécanique totale d'une particule soumise à une force centrale

1/ On considère une particule de masse m soumise à une force constante f le long d'un axe Oy. On appelle ε son énergie mécanique totale. On suppose l'énergie potentielle ε_p nulle pour $y = 0$.

a) Exprimer la vitesse v en fonction de m, ε, y et f.

b) En déduire l'intégrale permettant de calculer le temps t au bout duquel la particule, partie de l'origine O, arrive à la distance y.

2/ On suppose maintenant que la particule est soumise à une force centrale $f = C/r^2$, où C est une constante positive.

Calculer l'énergie mécanique totale ε en fonction de m, dr/dt, r et du moment cinétique σ.

On se placera en coordonnées polaires planes et on supposera que l'énergie potentielle $\varepsilon_p = 0$ pour $r \to \infty$.

Exercice 2 : Dynamique terrestre

Soit un point matériel P de masse m au repos à la surface de la terre en un point de latitude λ. La terre supposée sphérique de rayon R_0 tourne par rapport à l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω constante. Soit $(\mathfrak{R})$ le référentiel (Oxyz) supposé galiléen dont l'origine O coïncide avec le centre de la terre et dont les axes gardent des directions fixes. L'axe Oz est confondu avec l'axe des pôles. Soit $(\mathfrak{R}')$ le référentiel (O'x'y'z') attaché à la terre dont l'origine O' coïncide avec le point P et dont les axes sont tels que : O'x' est tangent au parallèle de latitude λ et orienté vers l'Est ; O'y' est tangent au méridien passant par O' et orienté vers le Nord ; O'z' est radial de même sens que $\vec{OO'}$.

Soit $\vec{F_a}$ la force d'attraction exercée par la terre sur le point matériel P.

1/ Ecrire la loi fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel dans le référentiel $(\mathfrak{R})$ puis dans le référentiel $(\mathfrak{R}')$.

2/ Calculer l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F_e}$ et donner son module en fonction de m, ω, R_0 et λ.

Déterminer la force de Coriolis $\vec{F_c}$.

3/ Sachant que le poids $\vec{P}$ est défini par : $\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F_a} + \vec{F_e}$,

donner l'expression de l'angle $\varepsilon = (\vec{F_a}, \vec{P})$ que fait $\vec{F_a}$ avec $\vec{P}$, en fonction de ω, R_0, g et λ.

4/ En supposant que $\varepsilon \approx 0°$, donner l'expression de g en fonction de g_o, ω, R_0 et λ, où g_o est la valeur de g à l'équateur ($\lambda = 0°$).

5/ A l'instant t le point matériel P se met en mouvement et se déplace vers l'Est le long du parallèle avec une vitesse constante v' par rapport à $(\mathfrak{R}')$.

Trouver les composantes de $\vec{F_c}$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ du référentiel $(\mathfrak{R}')$.

6/ En supposant qu'à l'instant t, la résultante des forces (forces appliquées et forces d'inertie) agissant sur le point matériel en mouvement est égale à la composante de $\vec{F_c}$ suivant $\vec{j'}$, calculer à l'instant t le rayon de courbure ρ de la trajectoire en fonction de v', ω et λ.

Deuxième session 2003 – 2004 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1 : Sens physique du gradient (6 points)

Dans un repère Oxyz on considère une plaque d'épaisseur 2a parallèle au plan xOz. La plaque a une extension infinie dans les directions Ox et Oz ; elle admet xOz comme plan de symétrie. La plaque est en phase de refroidissement : la température T_1 de son cœur (y=0) est supérieure à la température T_2 de ses parois externes ($y=\pm a$) ; sa température interne est donnée par la relation :

$$T(x,y,z) = T_2 + (T_1 - T_2)\frac{a^2-y^2}{a^2} \qquad (\text{ pour } y \in [-a\ ,\ +a]\ )$$

1/ Tracer le profil de température de la plaque le long de l'axe Oy : $T = f(y)$ pour $y \in [-a\ ,\ +a]$.

2/ Calculer $\overrightarrow{grad}\,T$. Donner sa valeur et le représenter pour $y=\pm a$, $y=\pm \frac{a}{2}$, $y=0$.

3/ Que représente physiquement le gradient de température ?

Exercice 2 : Etude d'un mouvement plan (7 points)

Un point P décrit une courbe plane d'équations polaires :

$$r = b\ .\ e^{(-\frac{t}{\tau})}$$

$$\theta = \omega\, t$$

où b, τ et ω sont des constantes positives.

1/ Représenter sur une figure la trajectoire de P.

2/ Calculer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse et de l'accélération.
En déduire les normes de ces vecteurs, ainsi que l'angle que fait la vitesse avec le vecteur position.

3/ Trouver les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

4/ Calculer le rayon de courbure de la trajectoire, R.

5/ Déterminer la coordonnée curviligne s.
On supposera que s est nulle au début du mouvement (à t=0).

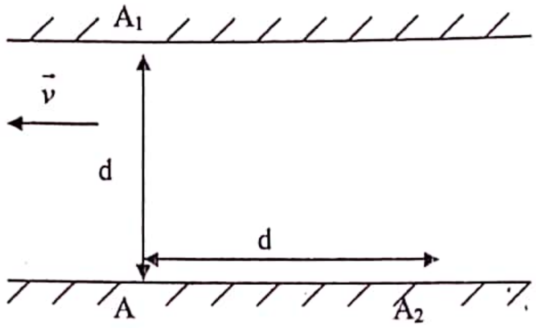
Exercice 3 : Composition des vitesses – Problème du nageur (7 points)

Un nageur parti de A, se déplace à la vitesse constante $\overrightarrow{V}$ par rapport à l'eau d'une rivière de largeur d dont les eaux sont animées d'un courant de vitesse constante $\vec{v}$ (v<V). (Voir figure). Le nageur effectue les trajets aller et retour : AA_1A en un temps t_1, AA_2A en un temps t_2.

1/ Exprimer le rapport t_2/t_1 en fonction du rapport des vitesses v/V.

2/ Sachant que $t_2 = 2t_1 = 7$ min, déterminer l'angle α que fait la vitesse $\overrightarrow{V}$ du nageur avec la perpendiculaire à la rivière, lorsque le nageur effectue le trajet AA_1.

3/ Déterminer le temps t_0 qu'aurait mis le nageur pour effectuer l'aller-retour (2d) sur un lac (ν=0).



Première session 2004 – 2005 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1 : Effet de la force de Coriolis – Cas d'un train
Un train roule sur une ligne Nord-Sud dans l'hémisphère Nord.
Déterminer la direction et le sens de la force de Coriolis s'exerçant sur le train. En déduire le rail (droit ou gauche) sur lequel le train exerce une pression.

Exercice 2 : Mouvements verticaux d'une remorque
Une remorque, de masse totale M = 100 kg , est tirée par un véhicule roulant à vitesse horizontale constante $\vec{V}$ et qui n'exerce sur elle aucune force verticale.

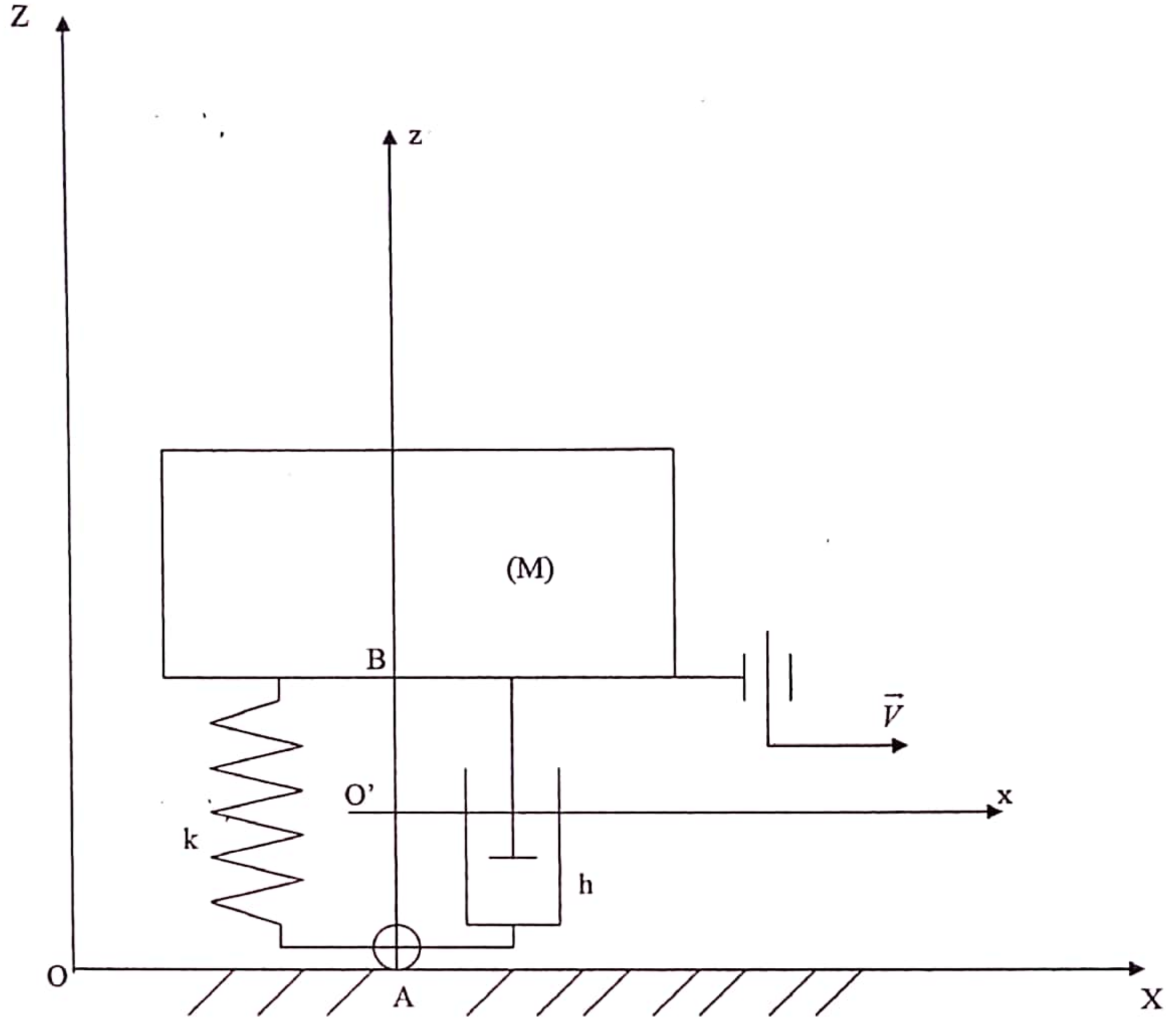
Elle repose sur une roulette A de dimensions et de masse négligeables, par l'intermédiaire d'une suspension verticale AB, de masse négligeable devant M, constituée d'un ressort de rigidité $k = 6,10.10^{+3}$ $N.m^{-1}$ et d'un amortisseur (piston coulissant dans un cylindre rempli d'huile) dont le coefficient d'amortissement fluide est h.

La longueur au repos du ressort est AB = ℓ_0 = 70 cm et, lorsqu'il est soumis à une force de compression statique verticale $\vec{F}$, la loi $|\vec{F}| = k\,|\ell-\ell_0|$, où ℓ est la longueur AB du ressort comprimé, est suivie exactement.

D'autre part, la force résistante $\vec{F'}$ verticale qu'oppose l'amortisseur à ses mouvements d'étirement ou de compression a pour module $|\vec{F'}| = h\left|\frac{d\ell}{dt}\right|$, où ℓ est la longueur AB.

On suppose que la suspension reste toujours verticale et que la remorque peut être assimilée à une masse ponctuelle située en B.

On choisit un référentiel $\mathfrak{R}$, supposé galiléen, lié au sol, de repère OXYZ, l'axe OZ étant vertical ascendant et l'axe OX horizontal, de direction et sens identiques à ceux de $\vec{V}$ (voir figure).



Le profil de la route peut alors être décrit par une fonction Z = f (X). Cependant, dans le présent exercice, on considèrera que la route est plate et horizontale, c'est-à-dire qu'elle correspond au profil Z = 0.

Pour étudier les mouvements verticaux du point B de la remorque, on utilise un second référentiel $\mathfrak{R}'$ galiléen animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}$ par rapport à $\mathfrak{R}$. Un repère de $\mathfrak{R}'$ est O'xyz, dont l'axe O'z coïncide avec la droite AB, son axe horizontal O'x étant parallèle à OX et de même sens. L'altitude de O' dans le repère OXYZ sera définie plus loin à la question 1/.

Le mouvement de B dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ sera décrit par une fonction z = z(t) où t est le temps.

L'intensité de la pesanteur, uniforme, est $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

1/ a) Déterminer l'expression de la longueur $AB = \ell_1$ du ressort lorsque B est en équilibre dans le référentiel $\mathfrak{R}'$.

b) Calculer numériquement ℓ_1.

<u>Remarques :</u>
Dans toute la suite du problème, l'altitude de O' dans le repère OXYZ sera choisie égale à cette valeur ℓ_1.
D'autre part, on considèrera que la roulette A reste toujours en contact avec la route.

2/ Le coefficient d'amortissement h est considéré comme négligeable. A la date t = 0, le point B est écarté de sa position d'équilibre O'. Il a alors pour cote $z_0 = 10$ cm dans le repère O'xyz et il est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathfrak{R}'$.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement de B dans $\mathfrak{R}'$.

b) Montrer que le mouvement de B est sinusoïdal, de pulsation ω_0 dont on précisera l'expression littérale.
Calculer numériquement la fréquence f_0 du mouvement.

c) Déterminer complètement la fonction z(t) à partir des conditions initiales et en donner graphiquement l'allure générale.

3/ L'amortissement h n'est plus négligeable mais correspond à une valeur « critique » :

$$h = h_0 = 2\sqrt{Mk} .$$

a) Calculer numériquement h_0.

b) Etablir la nouvelle équation différentielle du mouvement de B dans $\mathfrak{R}'$.

c) Donner la solution générale de cette équation.

d) Déterminer complètement la fonction z(t) à partir des mêmes conditions initiales qu'à la question 2/ et en donner graphiquement l'allure générale.

e) Quel est l'intérêt pratique de la présence de l'amortisseur ?

Deuxième session 2004 – 2005 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice 1 : Questions de cours (7 points)
1/ Newton donne une forme logique à la mécanique, qui repose sur trois principes.
Citer ces trois principes.

2/ Lorsqu'un pilote de moto entre dans un virage, il a tendance à pencher son engin, et cela d'autant plus que sa vitesse est grande. Comment expliquez-vous cela ?

3/ a) Représenter sur une figure la base orthonormée directe sphérique B = $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi}, \overrightarrow{e_\theta})$, où ϕ représente la colatitude et θ la longitude.
b) Exprimer le vecteur position d'un point M dans la base B.
c) En dérivant le vecteur position, exprimer le vecteur vitesse dans la base B.

4/ a) Enoncer puis démontrer le théorème du moment cinétique.
b) En déduire que, dans le cas des forces centrales, il y a conservation du moment cinétique.

Exercice 2 : Oscillations dans une cuvette de potentiel (7 points)
Un point matériel de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur un axe Ox. Il est soumis de la part du point O à la force centrale :

$$\vec{F}(x) = \left(-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3}\right)\overrightarrow{e_x}$$

où a et b sont deux constantes positives et $x \geq 0$.
1) Calculer la valeur x_o pour laquelle le point est en équilibre.
2) Calculer l'énergie potentielle U(x) dont dérive F(x). On choisira $U(\infty) = 0$.
Représenter graphiquement U(x) et en déduire que la position d'équilibre $x = x_o$ est stable.
3) Calculer l'énergie mécanique E du point matériel et, à l'aide de la courbe précédente, discuter suivant les valeurs de E, le (ou les) mouvement(s) possible(s) du point lâché sans vitesse initiale.

Exercice 3 : Oscillations d'un cube de bois à la surface d'un liquide (6 points)
Un cube de bois de côté ℓ et de masse volumique μ flotte à la surface d'un liquide de masse volumique μ_o. On l'enfonce d'une quantité $z \ll \ell$. Calculer la période T d'oscillation du cube.
On donne : $\ell = 10$ cm ; $\mu = 0{,}8$ g.cm^{-3} ; $\mu_o = 1$ g.cm^{-3} ; g = 9,81 m.s^{-2} .

Première session 2005 – 2006 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice (8 points)
1/ La pression P d'une particule d'air est fonction des coordonnées cartésiennes (x , y , z) et du temps t.

Calculer la dérivée totale $\frac{dP}{dt}$ en fonction de la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial t}$, de la vitesse $\vec{V}$ de la particule d'air et du gradient $\vec{\nabla} P$.

2/ Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point mobile M dans la base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\phi}, \vec{e_\theta})$, où ϕ représente la colatitude et θ la longitude.

En déduire l'expression de $\vec{v}$ dans le cas où M représente un véhicule se déplaçant à la surface de la terre, le long d'un méridien. (On assimilera la terre à une sphère de rayon R).

3/ Enoncer clairement, puis démontrer le théorème du moment cinétique.

4/ Répondre par faux ou vrai :

a) Lors de la rotation d'une roue sur une piste rectiligne, son centre est animé d'un mouvement cycloïdal par rapport au sol.

b) L'accélération d'entraînement est toujours égale à la dérivée de la vitesse d'entraînement par rapport au temps.

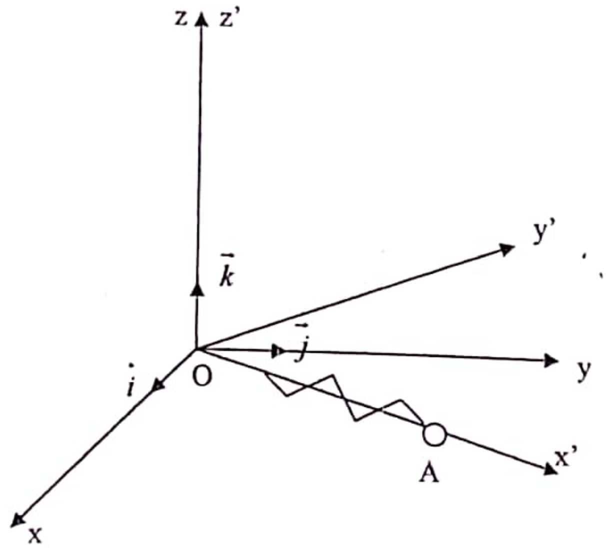
c) Un oscillateur libre ne peut pas être amorti.

<u>Problème</u> (12 points)

Dans le repère galiléen R(Oxyz) de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) on considère une tige Ox' de masse négligeable portant un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur a au repos. L'extrémité A de ce ressort est solidaire d'un anneau supposé ponctuel, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur la tige Ox'.

La tige Ox' située dans le plan (xOy), tourne autour de l'axe vertical Oz, dans le sens trigonométrique, avec une vitesse angulaire constante ω.

On appelle R'(Ox'y'z') le référentiel mobile lié à la tige Ox'. Les axes Oz' et Oz sont confondus.



1/ On fixe l'anneau A à la distance a de O.
Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport au repère fixe R(Oxyz), en fonction des vecteurs de base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$) de R'(Ox'y'z').

2/ A l'instant t = 0, on libère l'anneau A sans vitesse initiale.

a) Exprimer vectoriellement dans la base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$) les forces qui s'exercent sur l'anneau A dans le référentiel mobile R'(Ox'y'z').
En déduire l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique dans le repère R'(Ox'y'z').

b) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau A sur Ox'.
Pour quelles valeurs de ω l'anneau A oscillera-t-il sur la tige Ox' ? Exprimer alors Ω, pulsation du mouvement, en fonction des données du problème.

c) Dans ces conditions, déterminer l'équation horaire x'(t) du mouvement de l'anneau A sur la tige Ox'.

3/ Dans le cas du mouvement oscillatoire, déterminer les composantes $R_{x'}$, $R_{y'}$ et $R_{z'}$ de la réaction $\vec{R}$ de la tige Ox' sur l'anneau A.

4/ Déterminer, dans le cas du mouvement oscillatoire, la vitesse $\vec{V}$ de A par rapport au repère fixe (R), en fonction des vecteurs de la base ($\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$).
Calculer la puissance mécanique P(t) de la réaction $\vec{R}$.

Deuxième session 2005 – 2006 PC1 – MPCT1 – MPT1

Exercice (6 points) : Force centrale et énergie potentielle

On considère une particule de masse m soumise à une seule force centrale de la forme :

$$\vec{F} = F(r).\vec{u_r}$$

$$\text{où } F(r) = 2\frac{U_0}{a}\left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

où $\vec{u_r}$ est le vecteur unitaire dans la direction du vecteur position $\vec{r}$, U_0 et a sont des constantes > 0 et r est la distance entre la particule et le centre de force.

1/ Déterminer l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive la force $\vec{F}$.

On supposera que $U(\infty)=0$.

2/ Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ est conservé au cours du mouvement.

Déterminer $\vec{L}$ en coordonnées polaires (r,θ).

3/ Montrer que le mouvement a lieu dans un plan.

4/ Déterminer la distance radiale r_e pour laquelle $U(r)$ est minimum. Calculer la valeur de $U(r_e)$. Tracer la courbe représentative de $U(r)$ en fonction de r.

<u>Problème</u> (14 points) : Oscillateur amorti

Un grand récipient R de volume V_0 est surmonté d'un tube de hauteur h et de section S (le tout contient de l'air) ; un piston P de masse m peut se déplacer dans le tube (on supposera qu'il n'y a pas de frottement sur les parois).

A l'instant initial, P est en O (origine de l'axe x'x, vecteur unitaire $\vec{i}$), de chaque côté de P règne la pression p_0 : on lâche P (vitesse initiale $(\frac{dx}{dt})_0=0$) et il s'enfonce dans le tube.

A un instant t, P est au point M tel que $\overline{OM}$ = x ; soient p_x et p_0 les pressions de part et d'autre du piston ; du fait de la viscosité de l'air P est soumis à une force de frottement $\vec{F}_R=-k\vec{v}$.

Au bout d'un temps assez long pour qu'on puisse le considérer comme infini, on constate que P se stabilise pour $x = x_e$: à cet état d'équilibre correspond la pression p_e des n moles d'air à l'intérieur du montage. On supposera que l'air peut être considéré comme un gaz parfait et que sa température T varie si peu qu'elle peut être considérée comme constante.

1/ Etablir, au temps t, le bilan des forces s'exerçant sur P. En déduire leur résultante $\vec{R}$.

2/ Que deviennent ces forces lorsque P parvient à l'équilibre ? En déduire l'expression du poids mg de P en fonction de $(p_e - p_0)$ et S. Proposer une nouvelle formulation de $\vec{R}$.

3/ Soient V_x et V_e les volumes d'air enfermés par P quand $\overline{OM}$ = x et $\overline{OM} = x_e$: calculer V_x et V_e en fonction des données du problème. En déduire l'expression de $(p_e - p_x)$. Que devient cette expression si l'on néglige S.h devant V_0 ? Calculer x_e en fonction de mg , V_0 , p_0 et S.

4/ On se place désormais dans l'approximation de la question précédente. Montrer que le mouvement de P à l'intérieur du tube est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2(x-x_e)}{dt^2}+\lambda\frac{d(x-x_e)}{dt}+\omega^2(x-x_e)=0.$$

Exprimer λ et ω^2 en fonction des données du problème.

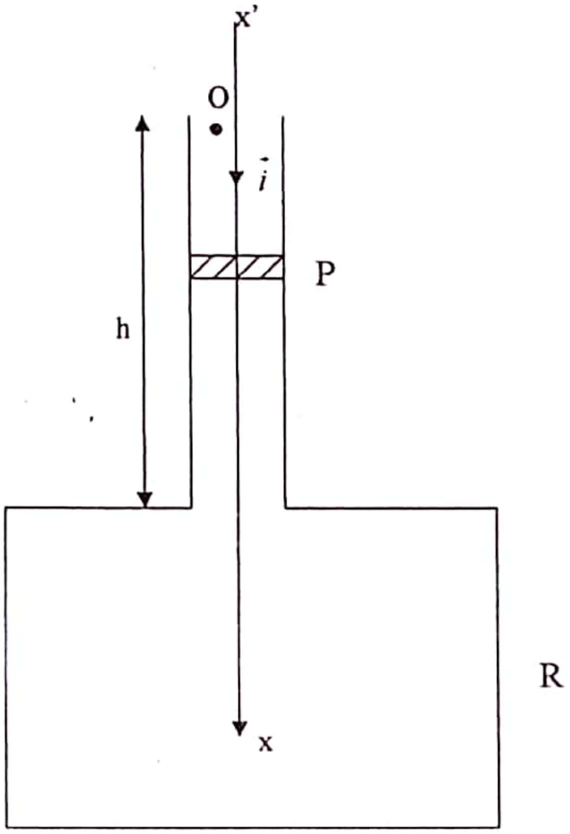
5/ Montrer que, si la condition $\lambda^2<4\omega^2$ est satisfaite, la solution de l'équation différentielle précédente est de la forme $X = e^{(-\lambda t/2)}.(A.\sin\Omega t + B.\cos\Omega t)$, où $X = x - x_e$.

Calculer Ω en fonction de ω et λ, puis A et B en fonction de x_e, λ et Ω.

6/ Tracer la courbe x en fonction de t.

7/ Calculer la valeur maximum x_{max} atteinte par le piston. En déduire que la solution déterminée à la question 5 n'est valable que si le tube présente une hauteur minimale h_{min} que l'on calculera.

8/ Calculer de deux manières différentes la valeur maximale p_{max} de la pression p_x .



EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 1: Mouvement d'un point matériel dans une glissière cycloïdale

A. On considère l'arche de cycloïde définie paramétriquement par :

$$x = a(\theta + \sin\theta) \qquad -\pi \leq \theta \leq +\pi \; ; \; a = \text{cte} > 0$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

1) Représenter sommairement cette arche de cycloïde.
2) Déterminer l'abscisse curviligne $s(\theta)$ d'un point de cette courbe en prenant comme origine le point correspondant à $\theta = 0$, et en orientant la courbe dans le sens des θ positifs.
3) Déterminer les angles polaires, à partir de la direction de (O,x), des vecteurs unitaires tangent et normal $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de la base de Frénet, et le rayon de courbure R.

B. La courbe est une glissière rigide disposée dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{k}$. Un point matériel M de masse m s'y déplace sans frottement. Le point matériel est abandonné sans vitesse initiale à l'abscisse curviligne s_0, à la date $t = 0$.

1) Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme : $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$,

où ω est une constante positive à déterminer.
2) Etablir la fonction s(t).

Exercice 2 : Equilibre relatif et mouvement d'un point le long d'une tige en rotation

Dans le dispositif décrit sur la figure ci-dessous, une tige rigide OX de masse négligeable est entraînée, à l'aide d'un moteur, dans un mouvement de rotation autour d'un axe vertical (par rapport auquel elle fait un angle α), à la vitesse angulaire Ω constante ; le référentiel $\mathfrak{R}_G$ lié au support est supposé galiléen. Un point matériel A de masse m peut glisser le long de la tige. On néglige tous les frottements.

1) a/ Exprimer l'énergie potentielle E_{p1} du point matériel A dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$ lié à la tige.

b/ En déduire la position d'équilibre X_e du point A. Préciser sa stabilité.

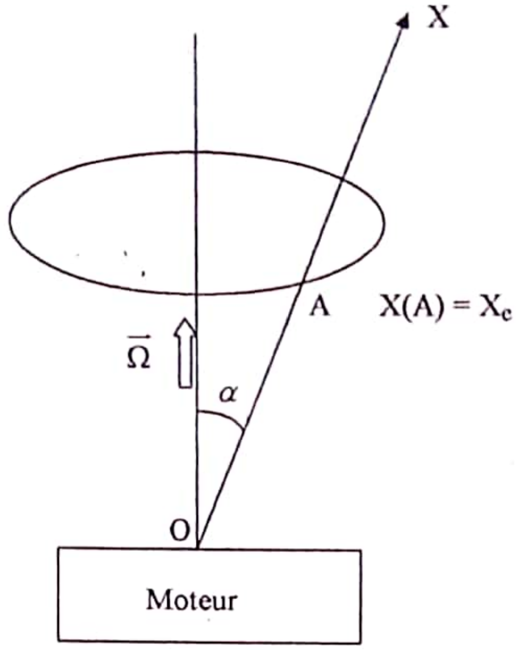
2) a/ Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$. En déduire l'équation différentielle du mouvement du point matériel A.

b/ Intégrer cette équation sachant que le point matériel est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$, à l'abscisse $2X_e$.

c/ Même question si le point matériel est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$, à l'abscisse $X_e / 2$.

3) a/ Exprimer l'énergie mécanique E_m dans le référentiel $\mathfrak{R}_G$. En déduire la puissance P_m du moteur dans le cas où le point matériel A s'éloigne du point origine O.

b/ Montrer que cette puissance est liée à la force d'inertie de Coriolis.



Exercice 3 : Amplitude des oscillations d'un ressort au cours d'un choc

On considère sur un plan horizontal, deux sphères assimilées à deux points matériels A_1 et A_2 de masses respectives $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$ (voir figure ci-dessous). A_2 est lié à une extrémité d'un ressort horizontal, de masse négligeable et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixe ; A_2 et le ressort sont initialement immobiles.

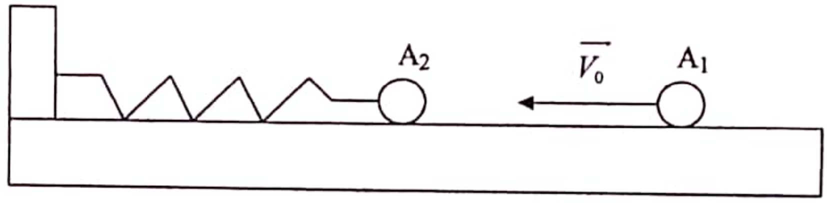
On lance A_1 vers A_2 avec une vitesse de module v_o ; le choc est direct.

1) On suppose que le choc est parfaitement élastique ; exprimer les modules v_1' et v_2' des vitesses de A_1 et de A_2 après le choc, et l'amplitude a_1 des oscillations prises par le ressort, en fonction de v_0 et de la pulsation ω_1.

2) On suppose que le choc est inélastique, A_1 et A_2 devenant solidaires. Exprimer : le module v' de la vitesse de l'ensemble juste après le choc, et l'amplitude a_2 des oscillations prises par le ressort, en fonction de v_0 et de la pulsation ω_2.

Calculer l'énergie Q dissipée au cours du choc.

Dans tout le problème, on négligera les frottements.



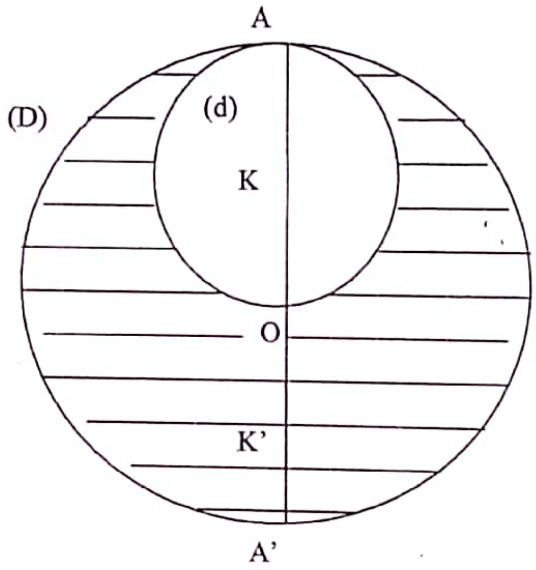
<u>Exercice 4</u> : Pendule pesant

Soit un disque (D) homogène, de centre O, de rayon R et de masse M.

On l'évide en découpant puis en enlevant le petit disque (d). Ce qui reste alors de (D) – hachuré sur la figure – est le croissant (C).

1) Montrer que la période T_A des oscillations de faible amplitude du pendule pesant constitué par (C) et oscillant autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan de (C) en A, s'exprime seulement en fonction de R et de g, l'accélération de la pesanteur.

2) Calculer numériquement R, pour que (C) « batte la seconde » en un lieu où g = 10 unités S.I.



OA = OA' = R

KA = KO = K'O = K'A' = R / 2

DEUXIÈME PARTIE

CORRIGÉS

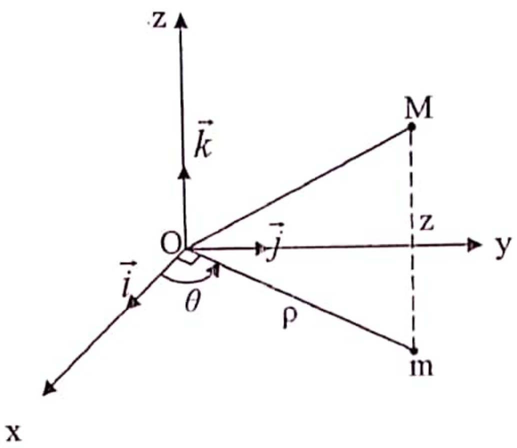
SUJETS D'EXAMENS
ET EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

PREMIERE SESSION 1992-1993 (Sujet B)

Exercice 2:

1/

a) Equation cartésienne de la trajectoire de M dans Oxyz :



$$\begin{cases} \rho = v_0 t \\ \theta = \pi/2 \\ z = bt \end{cases}$$

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = \rho\cos\theta = v_0 t\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x = \rho\sin\theta = v_0 t\sin\frac{\pi}{2} = v_0 t$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x = 0 \\ (2) & y = v_0 t \\ (3) & z = bt \end{array}\right\} \Rightarrow$$ le mouvement a lieu dans le plan Oyz.

$$(2) \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

$$(3) \Rightarrow z = b\frac{y}{v_0}$$

$\boxed{z = \frac{b}{v_0}y} \Rightarrow$ la trajectoire de M est une droite incluse dans le plan Oyz.

b) Accélération normale et angle φ que fait $\vec{v}$ avec le plan Oyz :

Mouvement rectiligne $\Rightarrow \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = 0$

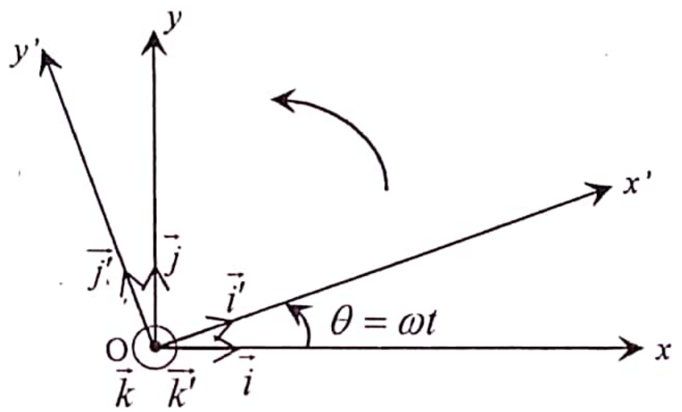
$\boxed{\overline{a_n} = \vec{0}}$

Le mouvement étant rectiligne, $\vec{v}$ est portée par la trajectoire. Cette dernière étant dans le plan Oyz, $\vec{v}$ est également dans le plan Oyz. Donc $\vec{v}$ fait avec le plan Oyz un angle nul :

$$\boxed{\varphi = 0}$$

2/

a)



$$\vec{i}' = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} = \cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}$$
$$\vec{j}' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = -\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}$$
$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_{R'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$
$$= x'\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right) + y'\left(-\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right) + z'\vec{k}$$
$$= \left(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t\right)\vec{i} + \left(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t\right)\vec{j} + z'\vec{k}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t = x = 0 & (1) \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t = y = v_0 t & (2) \\ z' = z = bt \end{cases}$$

$$\boxed{z' = bt}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)*\cos\omega t\\(2)*\sin\omega t\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x'\cos^2\omega t - y'\cos\omega t\sin\omega t = 0 & (1') \\ x'\sin^2\omega t + y'\cos\omega t\sin\omega t = v_0 t\sin\omega t & (2') \end{cases}$$

$$(1') + (2') \Rightarrow \boxed{x' = v_0 t\sin\omega t}$$

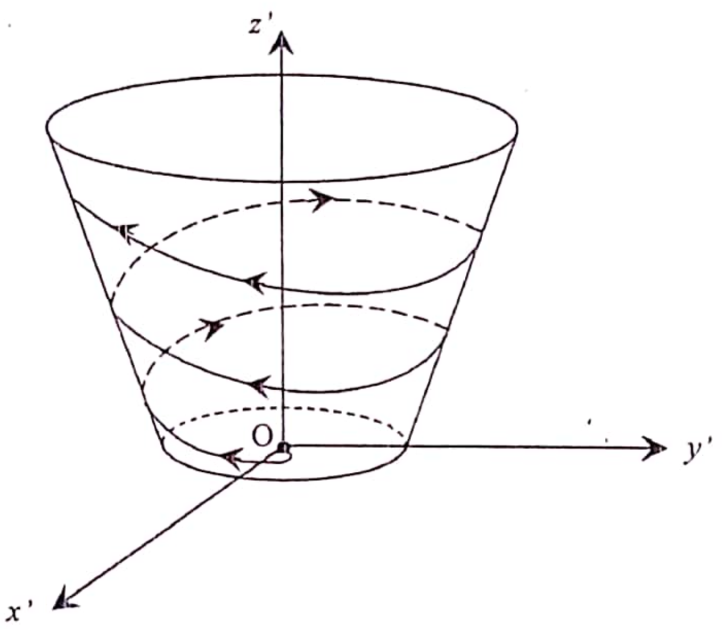
$$\left.\begin{array}{l}(1)*(-\sin\omega t)\\(2)*\cos\omega t\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases}-x'\sin\omega t\cos\omega t + y'\sin^2\omega t = 0 & (1'')\\ x'\sin\omega t\cos\omega t + y'\cos^2\omega t = v_0 t\cos\omega t & (2'')\end{cases}$$

$$(1'')+(2'') \Rightarrow \boxed{y' = v_0 t\cos\omega t}$$

Les équations paramétriques de la trajectoire de M dans le référentiel Ox'y'z' sont :

$$\boxed{\begin{array}{l}x' = v_0 t\sin\omega t\\ y' = v_0 t\cos\omega t\\ z' = bt\end{array}}$$

b) Trajectoire :



3/

$\mathfrak{R} = Oxyz$ = référentiel absolu ➔ $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ = trièdre direct.

$\mathfrak{R}' = O'x'y'z'$ = référentiel relatif ➔ $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ = trièdre direct.

$(O \equiv O'$ et $\vec{k} = \vec{k}')$

$$\vec{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}'}$$

$$\vec{v_r} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right)_{\mathfrak{R}'}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' .$$

$$\overrightarrow{v_r} = \left(v_0 \sin\omega t + v_0 t\omega \cos\omega t\right)\vec{i}' + \left(v_0 \cos\omega t - v_0 t\omega \sin\omega t\right)\vec{j}' + b\vec{k}'$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_r} = v_0\left(\sin\omega t + t\omega \cos\omega t\right)\vec{i}' + v_0\left(\cos\omega t - t\omega \sin\omega t\right)\vec{j}' + b\vec{k}'}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_r} = &\left(v_0 \sin\omega t + \omega v_0 t \cos\omega t\right)\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right) \\
&+\left(v_0 \cos\omega t - \omega v_0 t \sin\omega t\right)\left(-\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right) \\
&+b\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_r} = &\left(v_0 \sin\omega t \cos\omega t + \omega v_0 t \cos^2\omega t - v_0 \sin\omega t \cos\omega t + \omega v_0 t \sin^2\omega t\right)\vec{i} \\
&+\left(v_0 \sin^2\omega t + \omega v_0 t \sin\omega t \cos\omega t + v_0 \cos^2\omega t - \omega v_0 t \sin\omega t \cos\omega t\right)\vec{j} \\
&+b\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_r} = \omega v_0 t\vec{i} + v_0\vec{j} + b\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k} \wedge \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{v_e} = \omega\vec{k} \wedge \left(v_0 t\vec{j} + bt\vec{k}\right) = \omega v_0 t\vec{k} \wedge \vec{j} = -\omega v_0 t\vec{j} \wedge \vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_e} = -\omega v_0 t\vec{i}}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = \omega v_0 t\vec{i} + v_0\vec{j} + b\vec{k} - \omega v_0 t\vec{i}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_a} = v_0\vec{j} + b\vec{k}}$$

4/

$$\overrightarrow{a_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right)_{\Re'} = \left(\frac{dv_{rx'}}{dt}\right)\vec{i}' + \left(\frac{dv_{ry'}}{dt}\right)\vec{j}' + \left(\frac{dv_{rz'}}{dt}\right)\vec{k}'$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_r} = &\left(v_0\omega \cos\omega t + v_0\omega \cos\omega t - v_0 t\omega^2 \sin\omega t\right)\vec{i}' \\
&+\left(-v_0\omega \sin\omega t - v_0\omega \sin\omega t - v_0 t\omega^2 \cos\omega t\right)\vec{j}'
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_r} = \omega v_0\left(2\cos\omega t - \omega t \sin\omega t\right)\vec{i}' - \omega v_0\left(2\sin\omega t + \omega t \cos\omega t\right)\vec{j}'}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_r} = &\left(2\omega v_0 \cos\omega t - \omega^2 v_0 t \sin\omega t\right)\left(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j}\right) \\
&-\left(2\omega v_0 \sin\omega t + \omega^2 v_0 t \cos\omega t\right)\left(-\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_r} = &\left(2\omega v_0 \cos^2\omega t - \omega^2 v_0 t \sin\omega t \cos\omega t + 2\omega v_0 \sin^2\omega t + \omega^2 v_0 t \sin\omega t \cos\omega t\right)\vec{i} \\
&+\left(2\omega v_0 \sin\omega t \cos\omega t - \omega^2 v_0 t \sin^2\omega t - 2\omega v_0 \sin\omega t \cos\omega t - \omega^2 v_0 t \cos^2\omega t\right)\vec{j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_r} = 2\omega v_0\vec{i} - \omega^2 v_0 t\vec{j} = \omega v_0\left(2\vec{i} - \omega t\vec{j}\right)}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_e} = \omega\vec{k} \wedge \left(-\omega v_0 t\vec{i}\right) = -\omega^2 v_0 t\vec{k} \wedge \vec{i}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 v_0 t\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2\omega\vec{k} \wedge \left(\omega v_0 t\vec{i} + v_0\vec{j} + b\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\omega^2 v_0 t\left(\vec{k} \wedge \vec{i}\right) + 2\omega v_0\left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\omega^2 v_0 t\vec{j} - 2\omega v_0\vec{i} = 2\omega v_0\left(\omega t\vec{j} - \vec{i}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_c} = 2\omega v_0\left(-\vec{i} + \omega t\vec{j}\right)}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \cancel{2\omega v_0\vec{i}} - \cancel{\omega^2 v_0 t\vec{j}} - \cancel{\omega^2 v_0 t\vec{j}} + \cancel{2\omega^2 v_0 t\vec{j}} - \cancel{2\omega v_0\vec{i}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_a} = \vec{0}}$$

5/

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = v_0 t\vec{j} + bt\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_a} = v_0\vec{j} + b\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right)_{\Re}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_a} = \vec{0}}$$

$a_a = 0 \Rightarrow$ le mouvement de M dans $\Re$ est rectiligne uniforme $\left(v = cte = \sqrt{v_0^{\,2} + b^2}\right)$

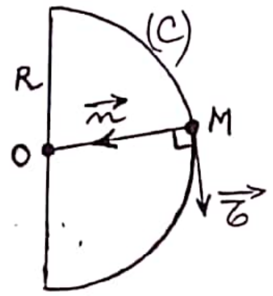
Premier Partiel 93-94

Corrigé du Sujet de Mécanique PC1

Exercice 1 :

1°/ Le point M est animé d'un mouvement oscillatoire curviligne par rapport au référentiel R'.

$\vec{v}(M)/_{R'} = v.\vec{\tau} = \left(\frac{ds}{dt}\right).\vec{\tau}$, où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent en M au demi-cercle (C) orienté dans le sens du mouvement.



$$s(t) = A\sin\alpha t \Rightarrow \frac{ds}{dt} = A\alpha\cos\alpha t = v$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(M)/_{R'} = (A\alpha\cos\alpha t).\vec{\tau}}$$ 1,5

$$\vec{\gamma}(M)/_{R'} = \vec{\gamma}_\tau + \vec{\gamma}_n = \gamma_\tau.\vec{\tau} + \gamma_n.\vec{n} = \left(\frac{dv}{dt}\right).\vec{\tau} + \left(\frac{v^2}{R}\right)\vec{n},$$

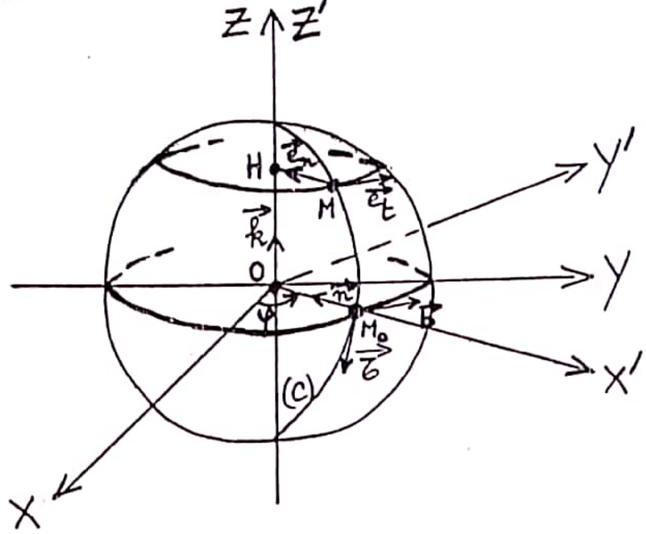
où $\vec{n}$ est la normale principale en M à la courbe (C).

$$\frac{dv}{dt} = -A\alpha^2\sin\alpha t \quad , \quad \frac{v^2}{R} = \frac{(A\alpha\cos\alpha t)^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M)/_{R'} = (-A\alpha^2\sin\alpha t).\vec{\tau} + \frac{(A\alpha\cos\alpha t)^2}{R}.\vec{n}}$$

1,5

2°/



0,5

La vitesse d'entraînement du point M, $\vec{v_e}(M)$, est la vitesse du point coïncidant, c'est-à-dire la vitesse (par rapport au référentiel fixe R(OXYZ)) du point fixe du référentiel mobile R'(OX'Y'Z') et qui coïncide avec le point M.

La trajectoire de ce point est le cercle "horizontal" de centre H et de rayon $r = HM$.

$$\vec{v_e}(M) = r\omega \cdot \vec{e_t} = r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_t}$$

$$\left(\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt} \text{ car } \varphi \text{ croît avec } t\right)$$

Lorsque le point M est en M_0 on a : $r = OM_0 = R$ et $\vec{e_t} = \vec{b}$, $\vec{b}$ étant le vecteur unitaire de la binormale.

$$\Rightarrow \vec{v_e}(M_0) = R\frac{d\varphi}{dt}\vec{b}$$

$$\varphi(t) = B\sin(\beta t + \beta_0) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = B\beta\cos(\beta t + \beta_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v_e}(M_0) = \left[RB\beta \cdot \cos(\beta t + \beta_0)\right] \cdot \vec{b}}$$

1

L'accélération d'entraînement du point M, $\vec{\gamma_e}(M)$, est l'accélération du point coïncidant :

$$\vec{\gamma_e}(M) = \left(\frac{dv_e}{dt}\right) \cdot \vec{e_t} + \left(\frac{v_e^2}{r}\right) \cdot \vec{e_n}$$

$$v_e = r\omega = r\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_e}{dt} = r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \dfrac{v_e^2}{r} = r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

38

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\cdot\vec{e}_t + \left[r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\cdot\vec{e}_n$$

Au point M_0 on a : $r = R$, $\vec{e}_t = \vec{b}$, $\vec{e}_n = \vec{n}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = B\beta\cos(\beta t+\beta_0)\ ,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -B\beta^2\sin(\beta t+\beta_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}_e(M_0) = \left[RB^2\beta^2\cos^2(\beta t+\beta_0)\right]\cdot\vec{n} - \left[RB\beta^2\sin(\beta t+\beta_0)\right]\cdot\vec{b}}$$

1

b/ L'accélération de Coriolis du point M est :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)/_{R'}\ ,\ \text{où}\ \left|\begin{array}{l}\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} = B\beta\cos(\beta t+\beta_0)\vec{k}\\ \vec{v}(M)/_{R'} = (A\alpha\cos\alpha t)\cdot\vec{\tau}\end{array}\right.$$

Au point M_0 on a : $\vec{k} = -\vec{\tau}$

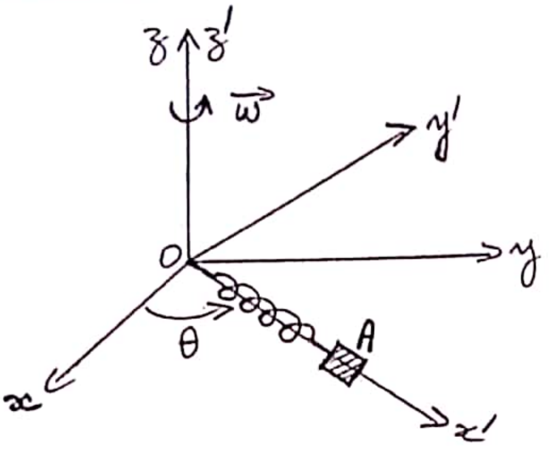
$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c(M_0) = -2B\beta\cos(\beta t+\beta_0)\cdot A\alpha\cos\alpha t\cdot\underbrace{(\vec{\tau}\wedge\vec{\tau})}_{\vec{0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}_c(M_0) = \vec{0}}$$

1

Exercice 2 :

1°)



$$\overrightarrow{OA} = a\vec{i}'$$

$$\vec{v}(A)_{/(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/(R)} = a\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_{/(R)} = a \cdot \frac{d\vec{i}'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = a \cdot \vec{j}' \cdot \omega$$

$$\boxed{\vec{v}(A)_{/(R)} = a\omega\vec{j}'}$$ 1

$$\vec{\gamma}(A)_{/(R)} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_{/(R)} = \left(\frac{d\vec{v}(A)}{dt}\right)_{/(R)} = a\omega\frac{d\vec{j}'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = a\omega(-\vec{i}')\omega$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(A)_{/(R)} = -a\omega^2\vec{i}'}$$ 1

2°) a) Les forces qui s'exercent sur l'anneau A dans le référentiel mobile sont :

- le poids $\vec{P}$ de l'anneau :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}'}$$ 0,5

- la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau :

$$\boxed{\vec{R} = R_{y'}\vec{j}' + R_{z'}\vec{k}'}$$ 0,5

($R_{x'} = 0$ car il n'y a pas de frottement de l'anneau sur la tige O

34 40

- la force de rappel (ou tension) $\vec{T}$ du ressort :

$$\boxed{\vec{T} = -k(x'-a)\vec{i}'}$$ (0,5)

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$:

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$

$\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{OA} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OA})$

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}' = \omega\vec{k} = \vec{cte} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$

$\vec{\omega}\cdot\vec{OA} = \omega\vec{k}'\cdot x'\vec{i}' = 0 \Rightarrow \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OA}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{OA})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{OA}$
$= -\omega^2\cdot x'\vec{i}'$

$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 x'\cdot\vec{i}'$

<u>Autre méthode de calcul de $\vec{\gamma}_e$:</u>

$\vec{\gamma}_e$ = accélération du point coïncidant

$$\vec{\gamma}_e = \left(\frac{d^2\vec{OA}}{dt^2}\right)_{(R)}^{A \text{ fixe dans } (R')} = \left[\frac{d^2(x'\vec{i}')}{dt^2}\right]_{(R)}^{x'=cte} = x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{i}'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\vec{j}', \quad \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \omega\frac{d\vec{j}'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\omega^2\vec{i}'$$

$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 x'\cdot\vec{i}'$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ie} = m\omega^2 x'\cdot\vec{i}'}$$ (1,5)

- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$:

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)_{/(R')} = 2\omega\vec{k}'\wedge\left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{i}' = 2\omega\left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{j}'$$

~~35~~ 41 ~~8~~

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ic} = -2m\omega\left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{j}'}$$ 1,5

Le principe fondamental de la dynamique dans (R') s'écrit :

$$m\vec{\gamma}_r = \underbrace{\left(\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}\right)}_{m\vec{\gamma}_a} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' = -mg\vec{k}' + R_{y'}\vec{j}' + R_{z'}\vec{k}' - k(x'-a)\vec{i}' + m\omega^2 x'\vec{i}' - 2m\omega\left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{j}'}$$ 1

b) En projetant l'équation précédente sur l'axe ox' on a :

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -k(x'-a) + m\omega^2 x'$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{k}{m}x' + \frac{ka}{m} + \omega^2 x'$$

$$\boxed{\frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x' = \frac{ka}{m}}$$ 1

Cette équation différentielle correspond à celle d'un mouvement oscillatoire si :

$$\frac{k}{m} - \omega^2 > 0$$

$$\omega^2 < \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ 0,5

La pulsation de ce mouvement oscillatoire est :

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}$$ 0,5

c) L'équation différentielle du mouvement oscillatoire est :

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \Omega^2 x' = \frac{ka}{m} \quad (E)$$

$x'_p = \dfrac{ka}{m\Omega^2}$ est une solution particulière de (E).

L'équation sans second membre $\dfrac{d^2x'}{dt^2} + \Omega^2 x' = 0$ a pour solution : $x'_s = x'_m \cos(\Omega t - \varphi)$

La solution générale de (E), c'est-à-dire l'équation horaire du mouvement oscillatoire de l'anneau, sera :

$$x'(t) = x'_s + x'_p = x'_m \cos(\Omega t - \varphi) + \frac{ka}{m\Omega^2}$$

Les constantes x'_m et φ sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=0} = 0 \iff \Omega x'_m \sin\varphi = 0 \iff \sin\varphi = 0 \iff \begin{cases} \varphi = 0 \\ \text{ou} \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

$$x'(t=0) = a \iff x'_m \cos\varphi + \frac{ka}{m\Omega^2} = a \quad (E')$$

$$\iff \cos\varphi = \frac{a}{x'_m}\left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right) = \frac{a}{x'_m}\left(1 - \frac{k}{k - m\omega^2}\right) <$$

Donc $\varphi = \pi$ rad

$$(E') \Rightarrow -x'_m = a\left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right) \Rightarrow x'_m = a\left(\frac{k}{m\Omega^2} - 1\right) > 0$$

$$\Rightarrow x'_s = x'_m \cos(\Omega t - \pi) = -x'_m \cos\Omega t = a\left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right) \cdot \cos$$

<u>Autre méthode de calcul de x'_s :</u>

$$x'_s = C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t$$

$$x'(t) = x'_s + x'_p = C_1 \cos\Omega t + C_2 \sin\Omega t + \frac{ka}{m\Omega^2}$$

$$x'(t=0) = a \iff C_1 + \frac{ka}{m\Omega^2} = a \iff C_1 = a\left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right)$$

43 ~~27~~ ~~8~~

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{t=0} = 0 \iff C_2 = 0$$

$$\Rightarrow x'_S = a\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\cdot\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{x'(t) = a\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\cdot\cos\Omega t + \frac{ka}{m\Omega^2}}$$ 1,5

3°/ Il n'y a pas de frottement de l'anneau sur la tige ox' :

$$\boxed{R_{x'} = 0}$$ 0,5

En projetant l'équation du principe fondamental de la dynamique sur les axes oy' et oz' on a :

0,5 $$\boxed{R_{y'} = 2m\omega\frac{dx'}{dt} = -2m\omega\Omega a\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\sin\Omega t}$$

0,5 $$\boxed{R_{z'} = mg}$$

4°/ $\overrightarrow{OA} = x'\vec{i}'$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{i}' + x'\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right), \text{ où } \frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{i}'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\vec{j}'$$

0,5 $$\boxed{\vec{V} = \left[-a\Omega\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\sin\Omega t\right]\vec{i}' + a\omega\left[\frac{k}{m\Omega^2}+\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\cos\Omega t\right]\vec{j}'}$$

$$P(t) = \vec{R}\cdot\vec{V} = \left(R_{y'}\vec{j}' + R_{z'}\vec{k}'\right)\cdot\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)\vec{i}' + x'\omega\vec{j}'\right] = \omega x' R_{y'}$$

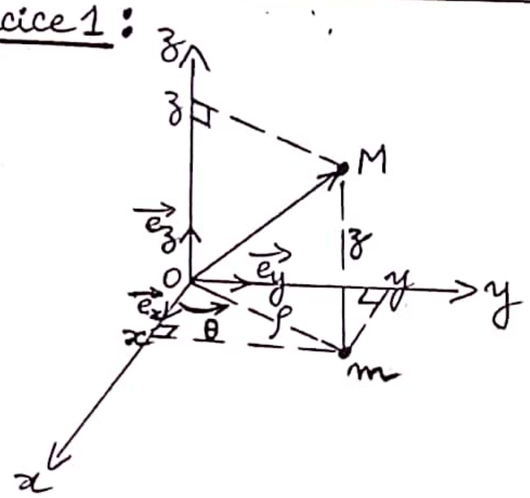
$$\boxed{P(t) = -2m\Omega\omega^2a^2\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\sin\Omega t\left[\frac{k}{m\Omega^2}+\left(1-\frac{k}{m\Omega^2}\right)\cos\Omega t\right]}$$

0,5

Corrigé du Sujet de Mécanique MPCT1 – MPT1 – PC1

(2e Session 93–94)

Exercice 1 :



$$\begin{cases} \rho = a \\ \theta = \omega t \\ z = h\theta \end{cases}$$

1°) $\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta = a\cos\omega t \\ y = \rho\sin\theta = a\sin\omega t \\ z = h\theta = h\omega t \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OM} = a\cos\omega t\,\vec{e_x} + a\sin\omega t\,\vec{e_y} + h\omega t\,\vec{e_z}} \quad (1)$$

2°) a) $\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \end{cases}$

$x^2 + y^2 = a^2$, où $a = cte$ $\longrightarrow$ Equation du cercle de centre O et de rayon a.

(0,5) $\Rightarrow$ Le mouvement est circulaire dans le plan xoy.

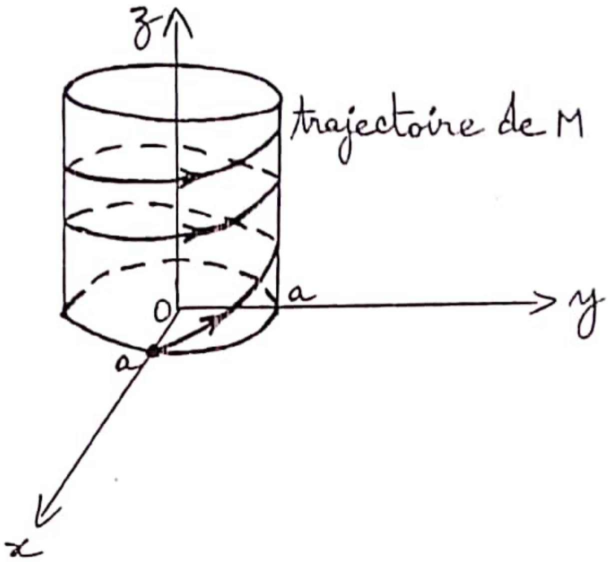
b) $z = h\omega t$, où $h\omega = cte$

(0,5) $\Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme suivant l'axe Oz.

3°/ a) Le mouvement résultant du point M est hélicoïdal.
0,5 La trajectoire de M est une hélice enroulée sur le cylindre droit d'axe Oz et de rayon $\rho = a$.

b)

0,5



4°/ $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

1,5

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = a\omega \cos\omega t \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = h\omega \end{aligned}}$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + h^2\omega^2}$$

0,5 $\boxed{v = \omega\sqrt{a^2 + h^2}}$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

1,5

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2 \cos\omega t \\ \gamma_y &= \frac{dv_y}{dt} = -a\omega^2 \sin\omega t \\ \gamma_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned}$$

$$\gamma = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = a\omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}$$

~~8~~ ~~30~~ 46

$$\boxed{\gamma = a\omega^2}$$ 0,5

5°/ Orientons la trajectoire dans le sens du mouvement.
On a alors :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow ds = v.dt = \omega\sqrt{a^2+h^2}.dt$$

$$\Rightarrow \int_{s(t=0)}^{s(t)} ds = \omega\sqrt{a^2+h^2}.\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow s(t) - \underbrace{s(t=0)}_{0} = \omega\sqrt{a^2+h^2}.(t-0)$$

1 $$\Rightarrow \boxed{s(t) = \omega\sqrt{a^2+h^2}.t}$$

6°/ $v = \omega\sqrt{a^2+h^2} = cte \Rightarrow \boxed{\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0}$ 1

$$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2 = \gamma_n^2 \Rightarrow \gamma_n = \pm\gamma$$

Or $\gamma_n \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_n = \gamma = a\omega^2}$$ 1

7°/ $\gamma_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{\omega^2(a^2+h^2)}{a\omega^2} = \frac{a^2+h^2}{a}$

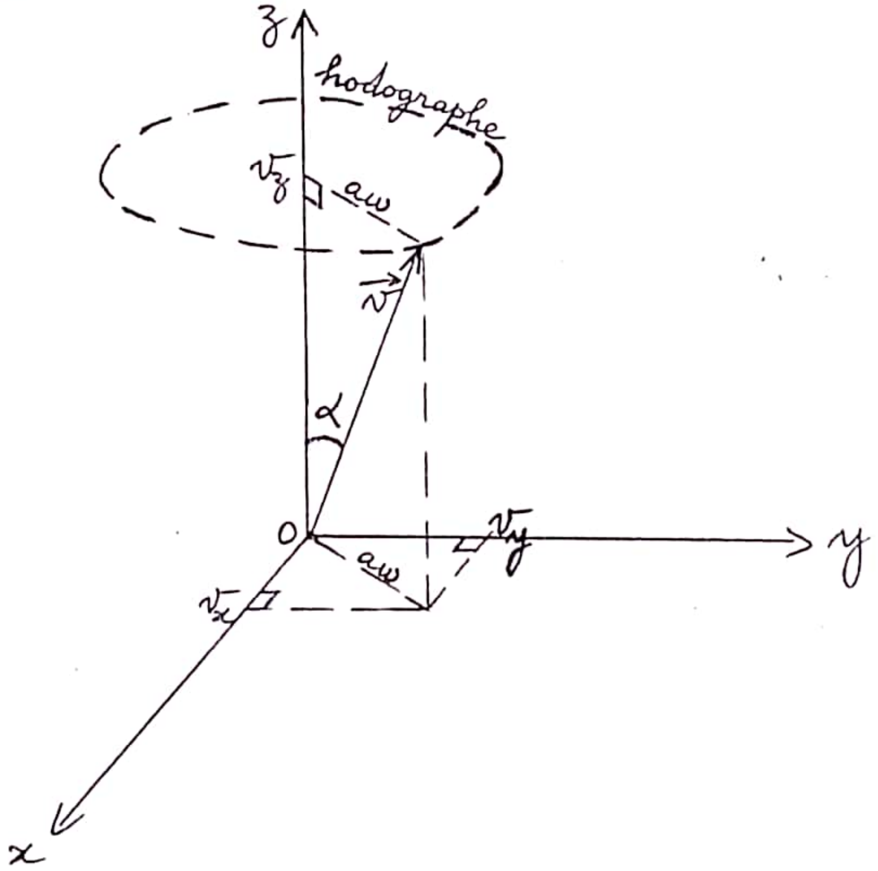
$$\boxed{R = a + \frac{h^2}{a}}$$ 1

8) $v_z = \vec{v}\cdot\vec{k} = \|\vec{v}\|\cdot\underbrace{\|\vec{k}\|}_{1}\cdot\underbrace{\cos(\widehat{\vec{v},\vec{k}})}_{\alpha} = v\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_z}{v} = \frac{h\omega}{\omega\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = cte}$$ 0,5

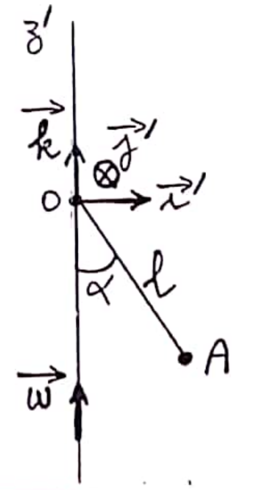
Puisque α est constant et la vitesse constante en module, l'hodographe est un cercle de rayon $a\omega$. 0,5



~~32~~ ~~5~~ 48

Exercice 2 :

1°



a) $\boxed{\overrightarrow{OA} = l\sin\alpha\,\vec{i}' - l\cos\alpha\,\vec{k}}$ (0,5)

$$\vec{v}_r = \vec{v}(A)/(R') = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{(R')}$$

(0,5) $\boxed{\vec{v}_r = l\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{i}' + l\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{k} = l\frac{d\alpha}{dt}(\cos\alpha\,\vec{i}' + \sin\alpha\,\vec{k})}$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OA} = \omega\vec{k}\wedge(l\sin\alpha\,\vec{i}' - l\cos\alpha\,\vec{k})$$

(0,5) $\boxed{\vec{v}_e = \omega l\sin\alpha\,\vec{j}'}$

b) Ces différentes forces d'inertie sont :

— la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$;

— la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$.

L'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OA} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OA}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OA} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}\wedge(l\sin\alpha\,\vec{i}' - l\cos\alpha\,\vec{k}) = l\sin\alpha\frac{d\omega}{dt}\vec{j}'$$

49 ~~33~~ ~~6~~

$$\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{OA}) = (\vec{w} \cdot \vec{OA})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{w})\vec{OA}$$

$$= \left[w\vec{k} \cdot (l\sin\alpha\,\vec{i}' - l\cos\alpha\,\vec{k})\right] w\vec{k} - w^2 (l\sin\alpha\,\vec{i}' - l\cos\alpha\,\vec{k})$$

$$= -w^2 l\cos\alpha\,\vec{k} - w^2 l\sin\alpha\,\vec{i}' + w^2 l\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$= -w^2 l\sin\alpha\,\vec{i}'$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_e} = -w^2 l\sin\alpha\,\vec{i}' + l\sin\alpha\frac{dw}{dt}\vec{j}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_{ie}} = -m\vec{\gamma_e} = ml\sin\alpha\left(w^2\vec{i}' - \frac{dw}{dt}\vec{j}'\right)} \quad 1$$

L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma_c} = 2\vec{w} \wedge \vec{v_r}$

$$\vec{\gamma_c} = 2w\vec{k} \wedge \left(l\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{i}' + l\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{k}\right)$$

$$\vec{\gamma_c} = 2wl\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{j}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_{ic}} = -m\vec{\gamma_c} = -2mwl\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\vec{j}'} \quad 1$$

2°/a) $\left.\begin{array}{l} w = cte \\ \alpha = cte \end{array}\right| \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{F_{ie}} = mlw^2\sin\alpha\,\vec{i}' \\ \vec{F_{ic}} = \vec{0} \end{array}} \quad \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,5 \end{array}$$

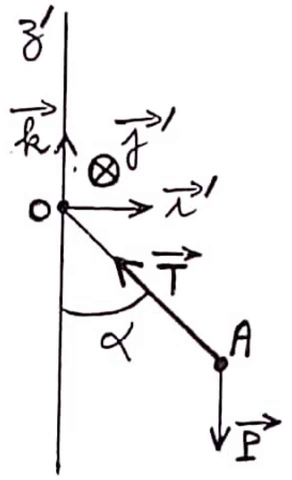
b) Le principe fondamental de la dynamique dans (R') s'écrit : 5

$$m\vec{\gamma}_r = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} ,$$

où : $\vec{\gamma}_r$ = accélération relative du point matériel ;

$\vec{P}$ = poids du point matériel ;

$\vec{T}$ = tension de la tige OA.



$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_r = l\frac{d\alpha}{dt}(\cos\alpha\,\vec{i}' + \sin\alpha\,\vec{k}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{(R')} = \vec{0}$$

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\vec{T} = -T\sin\alpha\,\vec{i}' + T\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_{ie} = ml\omega^2\sin\alpha\,\vec{i}'$$

$$\vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

1,5

$$\Rightarrow \boxed{-mg\vec{k} - T\sin\alpha\,\vec{i}' + T\cos\alpha\,\vec{k} + ml\omega^2\sin\alpha\,\vec{i}' = \vec{0}}$$

c) Projetons la relation ci-dessus :

– sur l'axe $(O, \vec{i}')$: $-T\sin\alpha + ml\omega^2\sin\alpha = 0$

$$T\sin\alpha = ml\omega^2\sin\alpha$$

$$\boxed{T = ml\omega^2}$$ 0,5

- sur l'axe $(O,\vec{k})$: $-mg + T\cos\alpha = 0$

$$T\cos\alpha = mg$$

$$\boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$ 0,5

d) $T = ml\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}}$$ 0,5

si $\alpha \neq 0$ alors : $\cos\alpha < 1$

$$\frac{g}{l\omega^2} < 1$$

$$\frac{1}{\omega^2} < \frac{l}{g}$$

$$\omega^2 > \frac{g}{l}$$

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \neq 0 \text{ pour } \omega > \omega_0 \text{, avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$ 0,5

Corrigé du devoir de Mécanique PC1 – MPCT1 – MPT1 (8 Avril 1995)

Exercice 1 :

Calculons les composantes de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base orthonormée directe cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$:

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0\left(t - \dfrac{t^3}{3}\right) \\ y = v_0 t^2 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0(1-t^2) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2v_0 t \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{array} \right.}$$

0,5

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -2v_0 t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2v_0 \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{array} \right.}$$

0,5

Déduisons des calculs précédents les composantes de $\vec{a}$ dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2(1-2t^2+t^4) + 4v_0^2 t^2}$$

$$v = |v_0|\sqrt{1+2t^2+t^4} = v_0\sqrt{(1+t^2)^2} = v_0|1+t^2|$$

$$v = v_0(1+t^2)$$

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2v_0 t} \quad 1$$

Autre méthode :

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = (a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n})\cdot(v\vec{\tau}) = v\cdot a_\tau$$

$$\Rightarrow a_\tau = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{-2v_0^2 t(1-t^2)+4v_0^2 t}{v_0(1+t^2)} = \frac{2v_0^2 t + 2v_0^2 t^3}{v_0(1+t^2)}$$

$$a_\tau = \frac{2v_0^2 t(1+t^2)}{v_0(1+t^2)} = 2v_0 t$$

$$\boxed{a_\tau = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = 2v_0 t}$$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 \Rightarrow a_n = \pm\sqrt{a^2 - a_\tau^2}$$

Or $a_n = \frac{v^2}{R} \geq 0$ (R étant supposé toujours ≥ 0).

$$\Rightarrow a_n = +\sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) - a_\tau^2}$$

$$a_n = \sqrt{4v_0^2 t^2 + 4v_0^2 - 4v_0^2 t^2} = \sqrt{4v_0^2} = |2v_0| = 2v_0$$

$$\boxed{a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 2v_0} \quad 1$$

Autre méthode :

$$\vec{a}\wedge\vec{v} = (a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n})\wedge(v\vec{\tau}) = v a_n(\vec{n}\wedge\vec{\tau}) = -v a_n \vec{b}$$

$$\|\vec{a}\wedge\vec{v}\| = |-v a_n|\cdot\|\vec{b}\| = v a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\|\vec{a}\wedge\vec{v}\|}{v}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -2v_0 t & 2v_0 & 0 \\ v_0(1-t^2) & 2v_0 t & 0 \end{vmatrix} = \left[-4v_0^2 t^2 - 2v_0^2(1-t^2)\right]\vec{e_z}$$

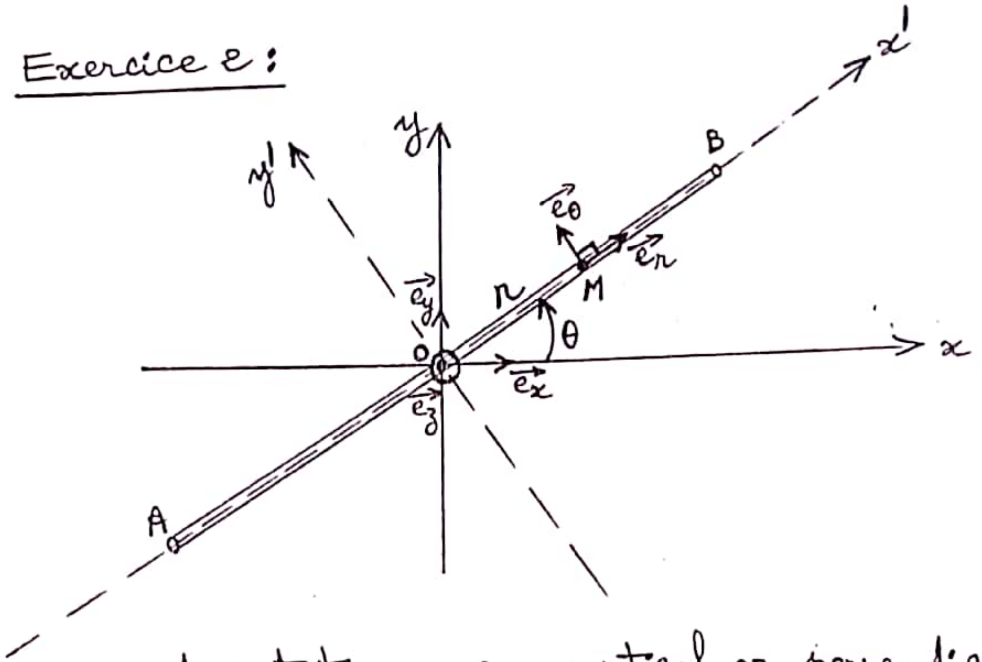
$$\vec{a} \wedge \vec{v} = \left(-2v_0^2 t^2 - 2v_0^2\right)\vec{e_z} = -2v_0^2\left(1+t^2\right)\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = 2v_0^2\left(1+t^2\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2v_0^2\left(1+t^2\right)}{v_0\left(1+t^2\right)} = 2v_0$$

$$\boxed{a_n = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}{v} = 2v_0}$$

Exercice 2 :



axe de rotation = axe vertical oz, perpendiculaire au plan horizontal oxy.

axe du tube = axe horizontal ox', tournant dans le plan horizontal oxy autour de la verticale oz.

$AO = OB = a$

A $t=0$: $\vec{v}_{M/tube} = \vec{0}$ et $r = b < a$

Soit $\mathcal{R} = oxyz$ le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est la base orthonormée directe liée à $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{R}' = ox'y'z'$ le référentiel non galiléen lié au tube. L'axe oz' est confondu avec l'axe oz. $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ est la base orthonormée directe liée à $\mathcal{R}'$.

1°) $\vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v_a} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left[\frac{d}{dt}(r\vec{e_r})\right]_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\omega\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega^2}$ (E)

Pour calculer v, il faut déterminer r.
Pour cela, exprimons vectoriellement le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen R' :

$$m\vec{a_r} = \left(\sum \vec{f}_{ext}\right) + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad (\mathcal{E})$$

$\sum \vec{f}_{ext} = m\vec{a_a} = \vec{P} + \vec{R}$, où $\vec{P}$ = poids de la particule M. $\vec{R}$ = réaction du tube sur la particule M.

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$$

$$\vec{R} = R_{x'}\vec{e_r} + R_{y'}\vec{e_\theta} + R_{z'}\vec{e_z}$$

La particule M se déplace sans frottement suivant l'axe ox'.
Donc on a : $\vec{R} \perp (ox')$; $R_{x'} = 0$.

$$\Longrightarrow \vec{R} = R_{y'}\vec{e_\theta} + R_{z'}\vec{e_z}$$

La force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a_e}$

$$\vec{a_e} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \omega\vec{e_z} \wedge (\omega\vec{e_z} \wedge r\vec{e_r})$$

$$= \omega^2 r\left[\underbrace{(\vec{e_z}\cdot\vec{e_r})}_{0}\vec{e_z} - \underbrace{(\vec{e_z}\cdot\vec{e_z})}_{1}\vec{e_r}\right]$$

$$= -\omega^2 r\vec{e_r}$$

Remarque :

$\vec{a_e}$ = accélération du point M' coïncidant avec M.
M' se déplace à la vitesse angulaire constante ω, sur le cercle "horizontal" de centre O et de rayon r.

$$\Longrightarrow \vec{a_e} = a_n\vec{n} = \frac{v^2}{r}\vec{n} = \omega^2 r\vec{n} = -\omega^2 r\vec{e_r}$$

Donc on a : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r\vec{e_r}$

~~41~~ ~~6~~ 57

La force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \left[\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)\right]_{\mathcal{R}'} = \dot{r}\vec{e}_r$$

$$\left(\vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \ddot{r}\vec{e}_r \right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = 2\omega\vec{e}_z \wedge \dot{r}\vec{e}_r = 2\omega\dot{r}(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) = 2\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{f}_{ic} = -2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$$

L'équation $(\mathcal{E})$ devient :

$$m\ddot{r}\vec{e}_r = -mg\vec{e}_z + R_{y'}\vec{e}_\theta + R_{z'}\vec{e}_z + m\omega^2 r\vec{e}_r - 2m\omega\dot{r}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{(m\ddot{r} - m\omega^2 r)\vec{e}_r + (2m\omega\dot{r} - R_{y'})\vec{e}_\theta + (mg - R_{z'})\vec{e}_z = \vec{0} \quad (\mathcal{E}')}$$

2

En projetant $\mathcal{E}'$ sur l'axe ox' on a :

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

$$\Rightarrow r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Les constantes A et B se calculent à partir des conditions initiales :

$$r(t=0) = b \Rightarrow A + B = b \quad (1)$$

$$\left[\vec{v}_{M/tube}\right]_{t=0} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\right]_{t=0} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_r(t=0) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow i(t=0)=0 \Longleftrightarrow \left[A\omega e^{\omega t}-B\omega e^{-\omega t}\right]_{t=0}=0$$ ~~4~~ ~~7~~ 58

$$\Longleftrightarrow A\omega - B\omega = 0 \Longleftrightarrow \omega(A-B)=0 \Longleftrightarrow A-B=0 \quad (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow A = B = \frac{b}{2}$

$$\Longrightarrow r = \frac{b}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = b.\mathrm{ch}\,\omega t} \quad 1$$

$$i = \frac{b}{2}\left(\omega e^{\omega t}-\omega e^{-\omega t}\right) = b\omega\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right) = b\omega.\mathrm{sh}\,\omega t$$

$v = \sqrt{i^2 + r^2\omega^2}$ (d'après l'équation (E)).

$$\Longrightarrow v = \sqrt{b^2\omega^2\mathrm{sh}^2\omega t + b^2\omega^2\mathrm{ch}^2\omega t} = \sqrt{b^2\omega^2(\mathrm{ch}^2\omega t+\mathrm{sh}^2\omega t)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v = b\omega\sqrt{2\mathrm{ch}^2\omega t - 1}} \quad 1,5$$

2) A la sortie du tube :

$r = a$

$\Longrightarrow b\,\mathrm{ch}\,\omega t = a$

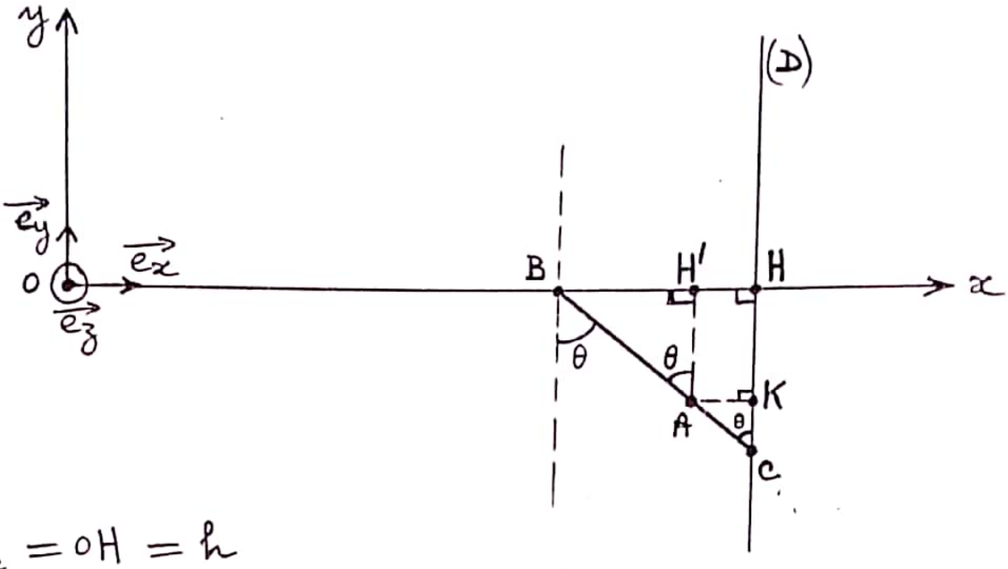
$\Longrightarrow \mathrm{ch}\,\omega t = \frac{a}{b}$

$$\Longrightarrow v_s = b\omega\sqrt{2\frac{a^2}{b^2}-1} = b\omega\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{b^2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_s = \omega\sqrt{2a^2-b^2}} \quad 1,5$$

Exercice 3 :

1°/



$x_c = OH = h$

$y_c = -HC = -BC.\cos\theta = -l\cos\theta$

$z_c = 0$ car C se situe dans le plan oxy.

$$\Rightarrow \boxed{C \left| \begin{array}{l} x_c = h \\ y_c = -l\cos\theta \\ z_c = 0 \end{array} \right.}$$

1

$x_A = OH' = OH - H'H = OH - AK = h - AC.\sin\theta$

$AC = BC - BA = l - d$

$\Rightarrow x_A = h - (l-d)\sin\theta$

Remarque :

$x_A = OH' = OB + BH'$

$OB = OH - BH = h - BC.\sin\theta = h - l\sin\theta$

$BH' = BA.\sin\theta = d\sin\theta$

$\Rightarrow x_A = h - l\sin\theta + d\sin\theta = h - (l-d)\sin\theta$

$y_A = -H'A = -AB.\cos\theta = -d\cos\theta$

$z_A = 0$ car A se situe dans le plan oxy.

$$\Longrightarrow \boxed{A \begin{cases} x_A = h-(l-d)\sin\theta \\ y_A = -d\cos\theta \\ z_A = 0 \end{cases}}$$

1

2/ $R = (O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ = référentiel absolu.

$R_1 = (B, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ = référentiel relatif.

$$\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_a = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_R = \left[\frac{d}{dt}\left(x_A\vec{e_x} + y_A\vec{e_y} + z_A\vec{e_z}\right)\right]_R$$

$$\vec{v}_{A/R} = \dot{x}_A\vec{e_x} + \dot{y}_A\vec{e_y} + \dot{z}_A\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{v}_{A/R} = \left[-\dot{\theta}(l-d)\cos\theta\right]\vec{e_x} + \left[d\dot{\theta}\sin\theta\right]\vec{e_y}}$$

1

$$\vec{v}_{A/R_1} = \vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{BA}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\vec{BA} = \vec{BH'} + \vec{H'A} = BH'.\vec{e_x} - H'A.\vec{e_y}$$

$$BH' = AB.\sin\theta = d\sin\theta$$

$$H'A = AB.\cos\theta = d\cos\theta$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = d\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} - d\cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v}_{A/R_1} = \left[d\dot{\theta}\cos\theta\right]\overrightarrow{e_x} + \left[d\dot{\theta}\sin\theta\right]\overrightarrow{e_y}} \quad 1$$

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v}_{A/R} - \overrightarrow{v}_{A/R_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_e} = \left[-\dot{\theta}(l-d)\cos\theta - d\dot{\theta}\cos\theta\right]\overrightarrow{e_x} + \left[d\dot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}\sin\theta\right]\overrightarrow{e_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_e} = \left[-l\dot{\theta}\cos\theta\right]\overrightarrow{e_x}} \quad 1$$

3°/ $\overrightarrow{a}_{A/R} = \overrightarrow{a}_a = \left.\dfrac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right)_R = \left.\dfrac{d\overrightarrow{v}_{A/R}}{dt}\right)_R$

$$\overrightarrow{a}_{A/R} = \left[-\ddot{\theta}(l-d)\cos\theta + \dot{\theta}^2(l-d)\sin\theta\right]\overrightarrow{e_x} + \left[d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\overrightarrow{e_y}$$

$$1 \quad \boxed{\overrightarrow{a}_{A/R} = (l-d)\left(-\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overrightarrow{e_x} + d\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\overrightarrow{e_y}}$$

$$\overrightarrow{a}_{A/R_1} = \overrightarrow{a_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right)_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{v}_{A/R_1}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\overrightarrow{a}_{A/R_1} = \left[d\ddot{\theta}\cos\theta - d\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\overrightarrow{e_x} + \left[d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\overrightarrow{e_y}$$

$$1 \quad \boxed{\overrightarrow{a}_{A/R_1} = d\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overrightarrow{e_x} + d\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\overrightarrow{e_y}}$$

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ (62) ~~(46)~~ ~~(11)~~

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

R_1 est en translation par rapport à $R \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$

$\Rightarrow \vec{a}_e = \vec{a}_a - \vec{a}_r = \vec{a}_{A/R} - \vec{a}_{A/R_1}$

$\Rightarrow \vec{a}_e = \left[-\ddot{\theta} l\cos\theta + \ddot{\theta} d\cos\theta + \dot{\theta}^2 l\sin\theta - \dot{\theta}^2 d\sin\theta - d\ddot{\theta}\cos\theta + d\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e}_x$
$+ \left[d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta - d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\vec{e}_y$

$$\boxed{\vec{a}_e = l\left(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_x}$$ (1)

4°/a) Le mouvement de A s'effectue dans le plan oxy (d'équation $z = 0$).

Les équations paramétriques (de paramètre θ) du mouvement de A sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = h - (l - d)\sin\theta & (1) \\ y = -d\cos\theta & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \dfrac{x-h}{l-d} = -\sin\theta$

$(2) \Rightarrow \dfrac{y}{d} = -\cos\theta$

Donc l'équation cartésienne de la trajectoire de A est la suivante :

$$\left(\frac{x-h}{l-d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\boxed{\left(\frac{x-h}{l-d}\right)^2+\left(\frac{y}{d}\right)^2=1}$$ 1

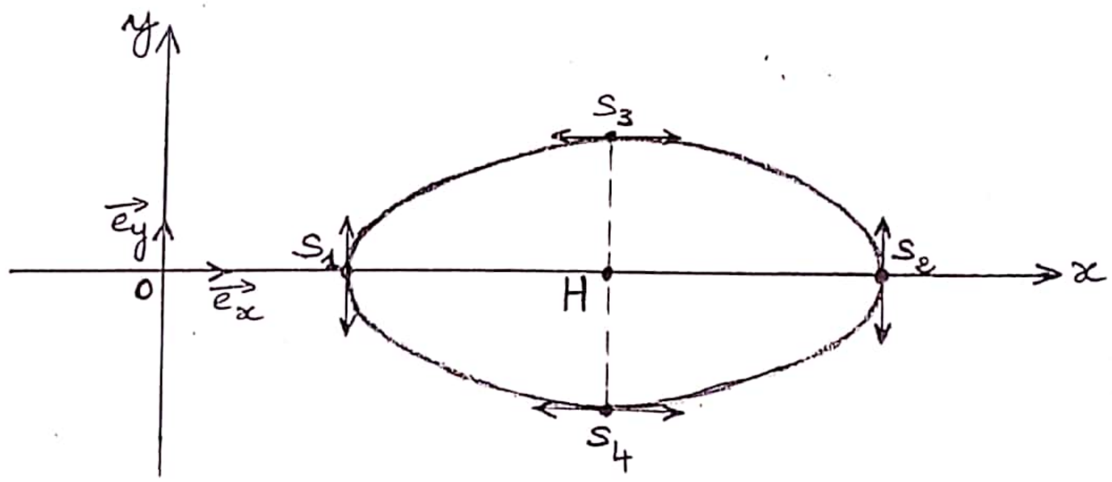
b) $l-d>0$ et $d>0$

1 Donc la trajectoire de A est l'ellipse de centre $H(h,0)$, de sommets $S_1(h-(l-d),0)$, $S_2(h+(l-d),0)$, $S_3(h,d)$ et $S_4(h,-d)$, décrite dans le plan horizontal Oxy.

c) $l>2d \Rightarrow l-d>d \Rightarrow (H,\vec{e_x})$ est le grand axe de l'ellipse.

$h>l \Rightarrow h>l-d \Rightarrow h-(l-d)>0 \Rightarrow x_{S_1}>0$

1



$HS_1=HS_2=l-d$

$HS_3=HS_4=d$

PREMIERE SESSION 1994 – 1995 (PARTIE B)

1) $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}m\left[\left(\dot{\theta}-\dot{\theta}\cos\theta\right)^2+\left(-\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right]$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left[1-2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}\right]$$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(2-2\cos\theta\right)$$

$$\boxed{T=m\dot{\theta}^2\left(1-\cos\theta\right)}$$

2) $V=mgy$

$$\boxed{V=mg\left(1+\cos\theta\right)}$$

3) $$\boxed{\begin{aligned}L=T-V&=m\dot{\theta}^2\left(1-\cos\theta\right)-mg\left(1+\cos\theta\right)\\&=m\dot{\theta}^2-m\dot{\theta}^2\cos\theta-mg-mg\cos\theta\end{aligned}}$$

4)

a) $\frac{\partial L}{\partial\theta}=m\dot{\theta}^2\sin\theta+mg\sin\theta$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial\theta}=m\sin\theta\left(\dot{\theta}^2+g\right)}$$

b) $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2m\dot{\theta}-2m\dot{\theta}\cos\theta$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2m\dot{\theta}\left(1-\cos\theta\right)}$$

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=2m\ddot{\theta}\left(1-\cos\theta\right)+2m\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\sin\theta\right)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=2m\ddot{\theta}\left(1-\cos\theta\right)+2m\dot{\theta}^2\sin\theta}$$

5) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

$2m\ddot{\theta}\left(1-\cos\theta\right)+2m\dot{\theta}^2\sin\theta-m\sin\theta.\dot{\theta}^2-mg\sin\theta=0$

$y\neq2\Leftrightarrow1+\cos\theta\neq2\Leftrightarrow-1+\cos\theta\neq0\Leftrightarrow1-\cos\theta\neq0$

$$\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\sin\theta}{2\left(1-\cos\theta\right)}}_{A}\dot{\theta}^2-\underbrace{\frac{g\sin\theta}{2\left(1-\cos\theta\right)}}_{B}=0}$$

$$6)\ \ddot{\theta}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}^2-\frac{2g\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=0$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\theta}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}.\dot{\theta}^2+\frac{g}{4}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{4}u=0}$$

1

$$7)\ \omega^2=\frac{g}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\sqrt{g}}{2}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi.\frac{2}{\sqrt{g}}=\frac{4\pi}{\sqrt{g}}$$

$$\boxed{T=\frac{4\pi}{\sqrt{g}}}$$

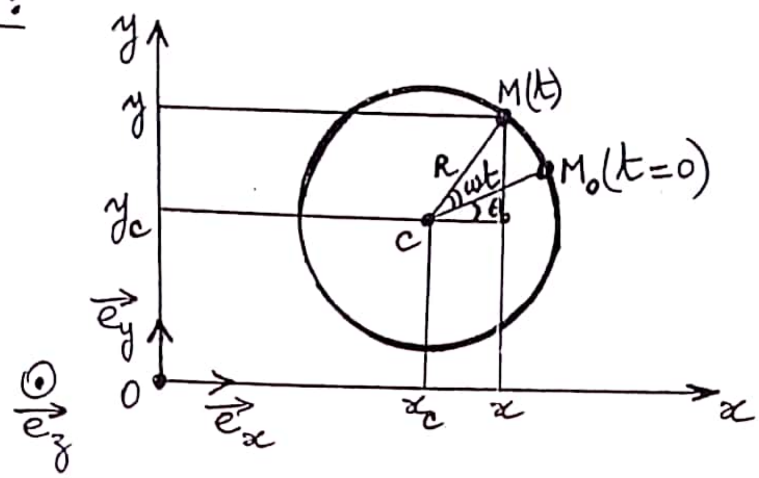
$$8)\ T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{4\pi}{\sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow\boxed{2\pi\sqrt{l}=4\pi\Rightarrow\sqrt{l}=2\Rightarrow l=4m}$$

$$\boxed{l=4m}$$

Mécanique PC1 1ère session 1999-2000

Exercice 1 :



1°) $\boxed{\vec{\omega} = \omega . \vec{e_z}}$

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} x = x_c + R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y = y_c + R\sin(\omega t + \theta_0) \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} \begin{vmatrix} V_x = \dot{x} = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega(y - y_c) \\ V_y = \dot{y} = R\omega \cos(\omega t + \theta_0) = \omega(x - x_c) \\ V_z = \dot{z} = 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = -\frac{\partial V_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\vec{e_y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = 0.\vec{e_x} + 0.\vec{e_y} + 2\omega.\vec{e_z} = 2\omega\vec{e_z}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\vec{rot}\,\vec{V} = \frac{1}{2}\left(2\omega\vec{e_z}\right) = \omega\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega} = \omega . \vec{e_z}}$$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\omega}}$

2°/ $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \ddot{x} = -R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0) \\ a_y = \ddot{y} = -R\omega^2\sin(\omega t+\theta_0) \\ a_z = \ddot{z} = 0 \end{array}\right.$

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\left[\cos(\omega t+\theta_0)\vec{e_x} + \sin(\omega t+\theta_0)\vec{e_y}\right]}$$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = -\omega V_y\vec{e_x} + \omega V_x\vec{e_y}$$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = -R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)\vec{e_x} - R\omega^2\sin(\omega t+\theta_0)\vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = -R\omega^2\left[\cos(\omega t+\theta_0)\vec{e_x} + \sin(\omega t+\theta_0)\vec{e_y}\right]}$$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = \vec{a}}$

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{V} = \vec{a} = -R\omega^2\left[\cos(\omega t+\theta_0)\vec{e_x} + \sin(\omega t+\theta_0)\vec{e_y}\right]$$
$$= -\omega^2\left[(x-x_c)\vec{e_x} + (y-y_c)\vec{e_y}\right]$$

Exercice 2 :

$$\vec{F} = y\vec{i} + \alpha x \vec{j}$$

1°/ $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{k}$,

où U est un champ scalaire.

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_x = y = \dfrac{\partial U}{\partial x} & (1) \\ F_y = \alpha x = \dfrac{\partial U}{\partial y} & (2) \\ F_z = 0 = \dfrac{\partial U}{\partial z} & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow U = yx + K_x$, où $K_x = cte$ (par rapport à x)

$(2) \Rightarrow U = \alpha xy + K_y$, où $K_y = cte$ (par rapport à y)

$(3) \Rightarrow U = K_z$, où $K_z = cte$ (par rapport à z)

Donc : $U = yx + K_x = \alpha xy + K_y$

$$\Longrightarrow (1-\alpha)xy + (K_x - K_y) = 0$$

x et y étant quelconques, on a :

$$\begin{cases} 1-\alpha = 0 \\ \quad \text{et} \\ K_x - K_y = 0 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\alpha = 1}$

Autre méthode :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x) = \alpha$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

La fonction $V(x,y)$ étant continue : $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$,

Soit : $\boxed{\alpha = 1}$

2°/ $\alpha = 1$

$$\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \frac{\partial E_p}{\partial x} = -y & (1) \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = -x & (2) \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 & (3) \end{array} \right.$$

$(1) \Rightarrow E_p = -yx + K_x$

$(2) \Rightarrow E_p = -xy + K_y$

$(3) \Rightarrow E_p = K_z$ (E_p ne dépend pas de z)

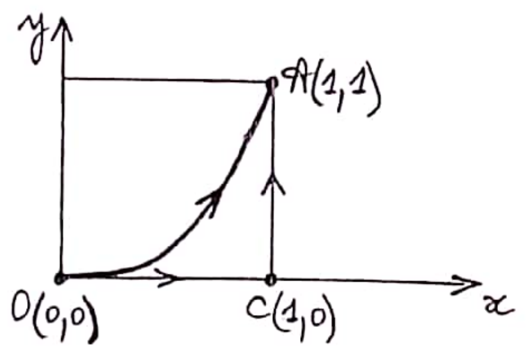
Donc : $E_p = -xy + K_x = -xy + K_y$

$\Rightarrow K_x = K_y = K$, où $K = cte$ (par rapport à x et y)

K ne dépend pas de z, car E_p ne dépend pas de z

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -xy + K, \text{ où } K = cte}$$

3°/



a) $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x dx + F_y dy = y dx + x dy$

Sur OC : $y = 0$, $dy = 0$, $\delta W = 0$

Sur CA : $x = 1$, $dx = 0$, $\delta W = dy$

$$\Rightarrow W = \int_{CA} dy = \int_0^1 dy = [y]_0^1 = 1$$

$$\boxed{W = 1 \text{ (J)}}$$

b) $y = x^3$, $dy = 3x^2 dx$, $\delta W = x^3 . dx + x . 3x^2 dx = 4x^3 dx$

$$\Rightarrow W = \int_{\overset{\frown}{OA}} 4x^3 dx = \int_0^1 4x^3 dx = [x^4]_0^1 = 1$$

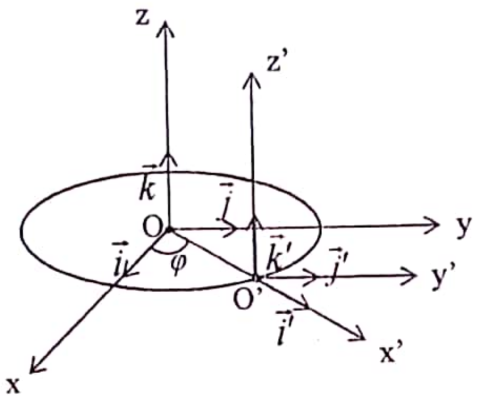
$$\boxed{W = 1 \text{ (J)}}$$

Remarque :

Le travail W est indépendant du trajet suivi.
Ce résultat est normal, car la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle.

PREMIERE SESSION 1999-2000

Exercice 3



$\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = référentiel absolu
$\mathfrak{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ = référentiel relatif

$R = 4m \quad \omega = 10tr/\min = \dfrac{10}{60} tr/s = \dfrac{10}{60}.2\pi rad/s = \dfrac{\pi}{3} rad.s^{-1}$

$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k}'$

$\varphi = \omega t$

1°/ $\vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

Tout point M du corps de l'homme est tel que $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ puisque $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{O'M}$ sont parallèles.

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_{\mathfrak{R}} = \frac{d}{dt}\left(R\vec{i}'\right) = R\frac{d\vec{i}'}{dt} = R\vec{\omega} \wedge \vec{i}' = R\omega\vec{k}' \wedge \vec{i}'$$

$$\boxed{\vec{v}_e = R\omega\vec{j}'}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\omega} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \\ \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} = R\omega\frac{d\vec{j}'}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_e = R\omega\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) = R\omega^2\left(\vec{k}' \wedge \vec{j}'\right)$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\vec{i}'}$$

$\vec{i}' = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$

$\vec{j}' = \dfrac{d\vec{i}'}{d\varphi} = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$

$\boxed{\vec{v}_e = R\omega\left(-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}\right) = R\omega\left[\left(-\sin\omega t\right)\vec{i} + \left(\cos\omega t\right)\vec{j}\right]}$

$\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\left(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}\right) = -R\omega^2\left[\left(\cos\omega t\right)\vec{i} + \left(\sin\omega t\right)\vec{j}\right]}$

2°/

a)

A $t = 0$: $\vec{v}_r = \vec{0}, \vec{v}_a = \vec{v}_e = R\omega \vec{j}' \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a(t=0) = R\omega \vec{j}'}$

A $t = 0$: $\varphi = 0, \vec{j}' = \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a(t=0) = R\omega \vec{j}}$

b) $\mathfrak{R}$ étant un repère galiléen :

$m\vec{\gamma}_a = m\vec{g}$

$\vec{\gamma}_a = \vec{g}$

$$\vec{\gamma}_a \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = g_x = 0 \\ \ddot{y} = g_y = 0 \\ \ddot{z} = g_z = -g \end{array} \right.$$

$$\vec{V}_0 = \vec{v}_a(t=0) = R\omega \vec{j} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} V_{0x} = 0 \\ V_{0y} = R\omega \\ V_{0z} = 0 \end{array} \right.$$

Donc on a : $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = V_{0x} = 0 \\ \dot{y} = V_{0y} = R\omega \\ \dot{z} = -gt + V_{0z} = -gt \end{array} \right.$

$$M_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = R \\ y_0 = 0 \\ z_0 = H \end{array} \right.$$

Donc on a :

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 = R \\ y = R\omega t + y_0 = R\omega t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{array} \right.$$

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} x = R \\ y = R\omega t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{array} \right.}$$

c) La bille est au niveau du plateau à l'instant t tel que :

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+H=0$$

$$\frac{1}{2}gt^2=H$$

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Le point d'impact P a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_P=R \\ y_P=R\omega\sqrt{\dfrac{2H}{g}} \\ z_P=0 \end{cases}$$

La distance du point d'impact P au centre O du plateau est :

$$D=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=R.\sqrt{1+\omega^2.\frac{2H}{g}}$$

$\boxed{D>R \Rightarrow \text{la bille tombe à l'extérieur du plateau}}$

La distance du point d'impact au bord du plateau :

$$\boxed{d=D-R=R\left(\sqrt{1+\frac{2H\omega^2}{g}}-1\right)}$$

<u>A.N.</u> : $R=4m;\ H=1,80m;\ g=10m.s^{-2};\ \omega=\frac{\pi}{3}rad.s^{-1}$

$$d=4\left(\sqrt{1+\frac{2*1,80}{10}*\frac{\pi^2}{9}}-1\right)$$

$\boxed{d=0,724m}$

3°/ Dans le référentiel galiléen $\Re$:

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}_a=m\left(\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_e+\vec{\gamma}_c\right)$$

$$\vec{v}_r=\overrightarrow{cte}=\vec{v}_0=-v_0\vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_r=\left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right]_{\Re'}=\vec{0}$$

$\boxed{\vec{\gamma}_r=\vec{0}}$

$$\vec{\gamma}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r=2\omega\vec{k}'\wedge\left(-v_0\vec{i}'\right)=-2\omega v_0\vec{j}'$$

$\boxed{\vec{\gamma}_c=-2\omega v_0\vec{j}'}$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\vec{i}' + \vec{0} + \omega^2\vec{k}' \wedge \left(\vec{k}' \wedge x'\vec{i}'\right)$$

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\vec{i}' + \omega^2 x' \underbrace{\vec{k}' \wedge \vec{j}'}_{-\vec{i}'}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -\left(R + x'\right)\omega^2\vec{i}'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -m\left(R + x'\right)\omega^2\vec{i}' - 2m\omega v_0\vec{j}'}$$

En O’: $x' = 0$, $\vec{F} = -mR\omega^2\vec{i}' - 2m\omega v_0\vec{j}'$

$$\vec{F} = -m\omega\left(R\omega\vec{i}' + 2v_0\vec{j}'\right)$$

$$\boxed{F = \left\|\vec{F}\right\| = m\omega\sqrt{R^2\omega^2 + 4v_0^2}}$$

<u>A.N.</u> :

$$F = 0{,}020 * \frac{\pi}{3}\sqrt{16 * \frac{\pi^2}{9} + 4 * 1^2}$$

$$\boxed{F = 0{,}097N}$$

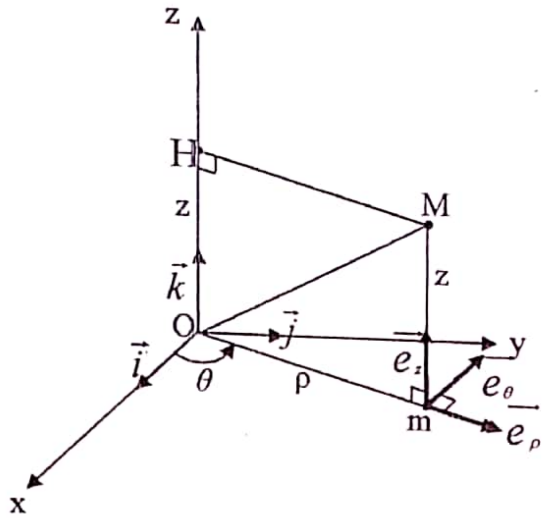
PREMIERE SESSION 2001-2002

Exercice :

S étant un champ scalaire, on a :

$S = S(\rho, \theta, z)$

$$\boxed{dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) dz}$$



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \overrightarrow{e_\rho} + z \overrightarrow{e_z}$$

$$d\vec{r} = d\rho \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\overrightarrow{e_\rho} + dz \overrightarrow{e_z} + z d\overrightarrow{e_z}$$

$$d\overrightarrow{e_\rho} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} d\theta = \overrightarrow{e_\theta} d\theta \text{ , } d\overrightarrow{e_z} = d\vec{k} = \vec{0}$$

$$\boxed{\Rightarrow d\vec{r} = d\rho \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta \overrightarrow{e_\theta} + dz \overrightarrow{e_z}}$$

Posons : $\overrightarrow{grad}\ S = X \overrightarrow{e_\rho} + Y \overrightarrow{e_\theta} + Z \overrightarrow{e_z}$

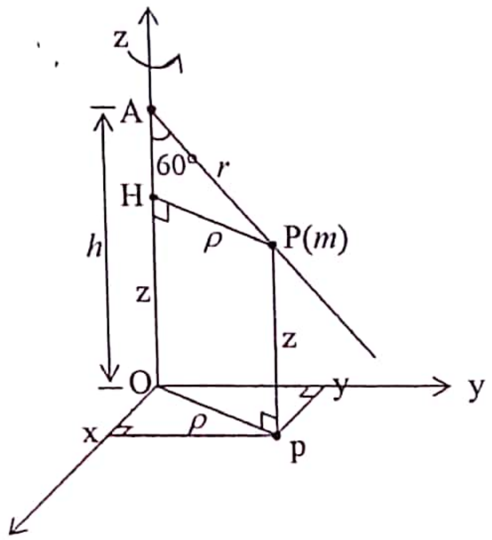
$dS = \overrightarrow{grad} S . d\vec{r}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right) dz = X d\rho + Y \rho d\theta + Z dz$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{\partial S}{\partial \rho} \\ Y\rho = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} \\ Z = \dfrac{\partial S}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\partial S}{\partial \rho} \\ Y = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial S}{\partial \theta} \\ Z = \dfrac{\partial S}{\partial z} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{gradS}=\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\theta}+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z}}$

Problème :



$$\theta=\omega t+\underbrace{\theta_0}_{0}=\omega t$$

1°/ a)

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=r\sin 60°.\cos\omega t=r\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t \\ y=\rho\sin\theta=r\sin 60°.\sin\omega t=r\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t \\ z=AO-AH=h-r\cos 60°=h-\dfrac{1}{2}r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{r}\cos\omega t-r\omega\sin\omega t\right) \\ \dot{y}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{r}\sin\omega t+r\omega\cos\omega t\right) \\ \dot{z}=-\dfrac{1}{2}\dot{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left[\frac{3}{4}\left(\dot{r}^2\cos^2\omega t - 2r\dot{r}\omega\cos\omega t\sin\omega t + r^2\omega^2\sin^2\omega t\right) + \frac{3}{4}\left(\dot{r}^2\sin^2\omega t + 2r\dot{r}\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t\right) + \frac{1}{4}\dot{r}^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}m\left[\frac{3}{4}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) + \frac{1}{4}\dot{r}^2\right]$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{3}{4}\omega^2 r^2\right)}$$

$$U = E_{pp} = mgz$$

$$\boxed{U = mg\left(h - \frac{1}{2}r\right)}$$

b) $L = T - U$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{3}{4}\omega^2 r^2\right) - mg\left(h - \frac{1}{2}r\right)}$$

c) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

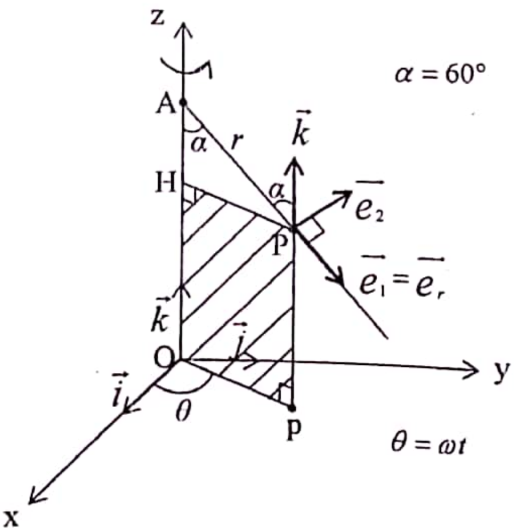
$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}\omega^2.2r\right) - mg\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}m\omega^2 r + \frac{mg}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{3}{4}m\omega^2 r - \frac{mg}{2} = 0$$

$$\boxed{\ddot{r} - \frac{3}{4}\omega^2 r = \frac{g}{2}}$$

2°/ a)



$\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$, ainsi que la tige, appartiennent au plan hachuré.

Soit $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{e_3}$ est orthogonal au plan hachuré.

$\Re = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = référentiel terrestre (absolu, galiléen).

$\Re' = (A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ = référentiel lié à la tige (relatif, non galiléen).

PFD dans $\Re'$:

$$m\overrightarrow{a_r} = \Sigma \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

$$m\overrightarrow{a_r} = \vec{P} + \vec{R} + \left(-m\overrightarrow{a_e}\right) + \left(-m\overrightarrow{a_c}\right) \quad (\xi)$$

$$*\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k} = -mg(-\cos\alpha\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha\overrightarrow{e_2})$$

$$\boxed{\vec{P} = -mg\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_2}\right)}$$

$$*\ \vec{R} = R_1\overrightarrow{e_1} + R_2\overrightarrow{e_2} + R_3\overrightarrow{e_3}$$

P se déplace sans frottement sur la tige. Donc :

$\vec{R} \perp tige$, soit $\vec{R} \perp \overrightarrow{e_1}$, soit $R_1 = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{R} = R_2\overrightarrow{e_2} + R_3\overrightarrow{e_3}}$$

$$*\ \overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)_{\Re'} = \frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_1}\right)\Big]_{\Re'} = \dot{r}\overrightarrow{e_1} \quad \left(\overrightarrow{a_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right)_{\Re'} = \ddot{r}\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_c} = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{r}\overrightarrow{e_1} = 2\omega\dot{r}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_2}\right) \wedge \overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{a_c} = -\omega\dot{r}\sqrt{3}.\overrightarrow{e_3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{f}_{ic} = -m\overrightarrow{a_c} = +m\omega\dot{r}\sqrt{3}.\overrightarrow{e_3}}$$

$$*\ \overrightarrow{a_e} = \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_{\Re}}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})$$

(car $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{cte}$) (car $\vec{\omega} = \overrightarrow{cte}$)

$$\overrightarrow{a_e} = (\vec{\omega}.\overrightarrow{AP})\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\overrightarrow{AP}$$

$$\vec{\omega}.\overrightarrow{AP} = \omega\vec{k}.r\overrightarrow{e_1} = \omega r\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_2}\right).\overrightarrow{e_1}$$

$$\vec{\omega}.\overrightarrow{AP} = -\frac{\omega r}{2}$$

$$\vec{a_c} = -\frac{\omega r}{2}\omega\vec{k} - \omega^2 r\vec{e_1} = -\frac{\omega^2 r}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right) - \omega^2 r\vec{e_1}$$

$$\vec{a_c} = -\frac{\omega^2 r}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right)$$

$$\boxed{\vec{f}_{ic} = -m\vec{a_c} = +\frac{m\omega^2 r}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right)}$$

L'équation (ξ) devient alors :

$$m\ddot{r}\vec{e_1} = -mg\left(-\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right) + R_2\vec{e_2} + R_3\vec{e_3} + \frac{m\omega^2 r}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}\right) + m\omega\dot{r}\sqrt{3}.\vec{e_3}$$

$$\boxed{\left(m\ddot{r} - \frac{mg}{2} - \frac{3m\omega^2 r}{4}\right)\vec{e_1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}mg - R_2 - \frac{m\omega^2 r\sqrt{3}}{4}\right)\vec{e_2} + \left(-R_3 - m\omega\dot{r}\sqrt{3}\right)\vec{e_3} = \vec{0} \quad (\xi')}$$

b)

$$(\xi') \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - \dfrac{mg}{2} - \dfrac{3m\omega^2 r}{4} = 0 & (1) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg - R_2 - \dfrac{m\omega^2 r\sqrt{3}}{4} = 0 & (2) \\ -R_3 - m\omega\dot{r}\sqrt{3} = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation différentielle du mouvement de P est donnée par la projection de (ξ') sur la tige, c'est-à-dire l'équation (1) :

$$m\ddot{r} - \frac{3m\omega^2}{4}r = \frac{mg}{2}$$

$$\boxed{\ddot{r} - \frac{3\omega^2}{4}r = \frac{g}{2} \quad (\xi'')}$$

On retrouve l'équation différentielle obtenue au 1°/c).

3°/ $r = r_s + r_p$,

où r_p est une solution particulière de (ξ'') et r_s est la solution générale de l'équation sans second membre :

$$\ddot{r} - \frac{3\omega^2}{4}r = 0 \quad (E)$$

L'équation caractéristique de (E) est :

$$\chi^2 - \frac{3\omega^2}{4} = 0$$

$$\chi^2 = \frac{3\omega^2}{4}$$

$$\chi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega$$

$$\Rightarrow r_s = C_1 ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) + C_2 sh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)$$

$$r_p = \frac{g}{2}\left(-\frac{4}{3\omega^2}\right) = -\frac{2g}{3\omega^2}$$

Donc on a : $r = C_1 ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) + C_2 sh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) - \frac{2g}{3\omega^2}$

$$r_0 = r(t=0) = C_1 - \frac{2g}{3\omega^2} \Rightarrow C_1 = r_0 + \frac{2g}{3\omega^2}$$

$$\dot{r} = C_1\frac{\sqrt{3}}{2}\omega sh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) + C_2\frac{\sqrt{3}}{2}\omega ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)$$

$$v_0 = v_r(t=0) = \dot{r}(t=0) = C_2\frac{\sqrt{3}}{2}\omega \Rightarrow C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}\omega}v_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3\omega}v_0$$

Donc :

$$\boxed{r = \left(r_0 + \frac{2g}{3\omega^2}\right) ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\omega}v_0\right) sh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right) - \frac{2g}{3\omega^2}}$$

DEUXIEME SESSION 2001-2002

1°/ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$v = \left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt}$$

$$\gamma_t = \frac{d}{dt}\left(\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\gamma_t = \frac{1}{2}\left(x'^2 + y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(2x'x'' + 2y'y''\right)$$

$$\boxed{\gamma_t = \frac{x'x'' + y'y''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{1/2}}}$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu en posant :

$$\gamma_t = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{v}$$

2°/

$$\gamma^2 = \gamma_n^{\ 2} + \gamma_t^{\ 2}$$

Or :

$$\gamma^2 = \left(x''^2 + y''^2\right)$$

On a donc :

$$\gamma_n^{\ 2} = \gamma^2 - \gamma_t^{\ 2} = x''^2 + y''^2 - \frac{\left(x'x'' + y'y''\right)^2}{x'^2 + y'^2}$$

$$\gamma_n^{\ 2} = \frac{\left(x''^2 + y''^2\right)\left(x'^2 + y'^2\right) - x'^2x''^2 - y'^2y''^2 - 2x'x''y'y''}{x'^2 + y'^2}$$

$$\gamma_n^{\ 2} = \frac{x'^2x''^2 + x''^2y'^2 + y''^2x'^2 + y''^2y'^2 - x'^2x''^2 - y'^2y''^2 - 2x'x''y'y''}{x'^2 + y'^2}$$

$$\gamma_n^{\ 2} = \frac{x''^2y'^2 + y''^2x'^2 - 2x'x''y'y''}{x'^2 + y'^2}$$

$$\gamma_n^{\,2} = \frac{\left(x'y'' - y'x''\right)^2}{x'^2 + y'^2}$$

$$\boxed{\gamma_n = \frac{\left|x'y'' - y'x''\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Remarque : Ce résultat peut être obtenu en posant :

$$\gamma_n = \frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\right\|}{v}$$

3°/ $\gamma_n = \dfrac{v^2}{R}$

$$R = \frac{v^2}{\gamma_n} = v^2 \cdot \frac{v}{\left\|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\right\|} = \left(x'^2 + y'^2\right) \cdot \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|x'y'' - y'x''\right|}$$

$$\boxed{R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|x'y'' - y'x''\right|}}$$

4°/

$x = \sin \varpi t$ et $y = 2\cos \varpi t$

$x' = 2\varpi \cos \varpi t$; $x'' = -2\varpi^2 \sin \varpi t$

$y' = -2\varpi \sin \varpi t$; $y'' = -2\varpi^2 \cos \varpi t$

$$\gamma_t = \frac{-4\varpi^3 \cos \varpi t \sin \varpi t + 4\varpi^3 \sin \varpi t \cos \varpi t}{\left[4\varpi^2\left(\cos^2 \varpi t + \sin^2 \varpi t\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\gamma_n = \frac{\left|-4\varpi^3 \cos^2 \varpi t - 4\varpi^3 \sin^2 \varpi t\right|}{2\varpi} = 2\varpi^2$$

$$R = \frac{\left(4\varpi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4\varpi^3} = \frac{8\varpi^3}{4\varpi^3} = 2$$

PREMIERE SESSION 2003-2004

Exercice 1 :

1°/ a) L'énergie totale E est donnée par :

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p = -\int F.dx = -F\int dx = -Fx + c$$

Pour $x = 0, E_p = 0$; on a donc :

$$E_p = -Fx$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 - Fx$$

On en déduit :

$$\boxed{v = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(E + Fx)^{\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

b) $v = \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(E + Fx)^{\frac{1}{2}}$

On a donc : $dt = \left(\dfrac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{(E + Fx)^{\frac{1}{2}}}$

D'où :

$$\boxed{t = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(E + Fx)^{\frac{1}{2}}}} \qquad (2)$$

2°/ On donne : $F = \dfrac{K}{r^2}$

On a donc :

$$E_p = -\int \frac{K}{r^2}dr = -K\int \frac{dr}{r^2}$$

$$E_p = \frac{K}{r} + c$$

Si $r \to \infty$, $E_p = 0$; on a donc :

$$E_p = \frac{K}{r} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r}$$

En coordonnées polaires planes, on a :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{dt}\right)^2$$

Or, dans le cas des forces centrales, on a :

$$\frac{\sigma}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{\sigma}{mr} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{mr}\right)^2\right]$$

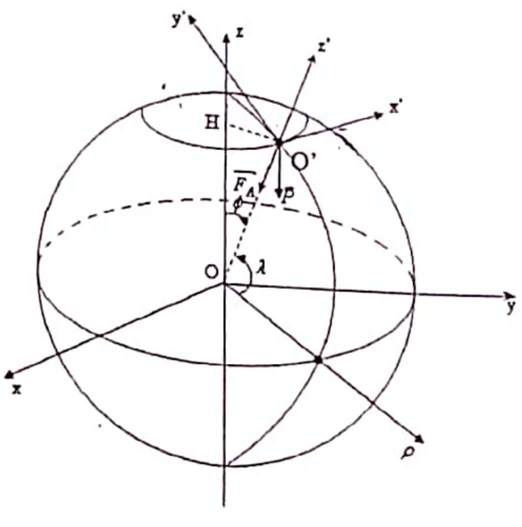
$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2mr^2}$$

L'énergie mécanique totale E vaut donc :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}}$$

Exercice 2 :

1. Le référentiel (R) étant galiléen :



$$\boxed{\vec{R} + \vec{F_a} = m\vec{\gamma}}$$

$\vec{R}$ = réaction du sol sur le point matériel
$\vec{\gamma}$ = accélération du point matériel par rapport à (R) $(\vec{\gamma} \neq \vec{0})$
$\vec{F_a}$ = force d'attraction exercée par la terre sur le point matériel P.

Le référentiel (R') n'étant pas galiléen, on a :

$$\boxed{\vec{R} + \vec{F_a} + \vec{F_c} + \vec{F_e} = m\vec{\gamma_r}}$$

$\vec{F_e}$ = force d'inertie d'entraînement
$\vec{F_c}$ = force d'inertie de Coriolis
$\vec{\gamma_r}$ = accélération du point matériel par rapport à (R') $(\vec{\gamma_r} = \vec{0})$

2. La force d'inertie d'entraînement est donnée par :

$$\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{\gamma_e}$$

$\overrightarrow{\gamma_e}$ = accélération d'entraînement

Comme le mouvement d'entraînement est un mouvement circulaire de rayon $HO' = HP$ et de vitesse angulaire ϖ nous avons :

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \varpi^2 \overrightarrow{PH} = -\varpi^2 \overrightarrow{HP}$$

Donc : $\overrightarrow{F_e} = m\varpi^2 \overrightarrow{HP}$

$$\left|\overrightarrow{HP}\right| = R_0 \cos\lambda$$

D'où :

$$\boxed{F_e = m\varpi^2 R_0 \cos\lambda}$$

La force d'inertie de Coriolis est donnée par :

$$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{\gamma_c}$$

$\overrightarrow{\gamma_c}$ = accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\varpi} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

$\overrightarrow{v_r}$ = vitesse du point matériel par rapport à (R').

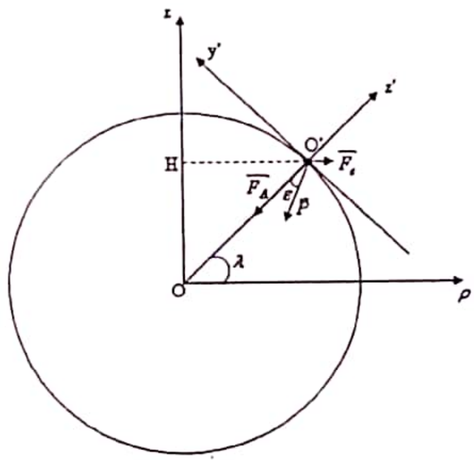
Comme le point matériel est au repos par rapport à (R') nous avons :

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$$

et $\boxed{\overrightarrow{F_c} = \vec{0}}$

3. $$\vec{P} = m\vec{g} = \overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{F_e}$$

$\vec{P}$ = poids du point matériel.



En projetant sur l'axe O'y' il vient :

$$-P\sin\varepsilon = 0 - F_e \sin\lambda$$

$$\sin\varepsilon = \frac{F_e \sin\lambda}{P} = \frac{m\varpi^2 R_0 \cos\lambda \sin\lambda}{mg}$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\varpi^2 R_0 \sin 2\lambda}{2g}$$

$$\boxed{\varepsilon = Arcsin\frac{\varpi^2 R_0 \sin 2\lambda}{2g}}$$

4. $$\vec{P} = m\vec{g} = \overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{F_e}$$

En projetant suivant l'axe O'z' nous avons :

$$-P\cos\varepsilon = -F_a + F_e \cos\lambda$$

Comme $\varepsilon \approx 0$, soit $\cos\varepsilon \approx 1$:

$$P = mg = F_a - F_c \cos\lambda = F_a - m\varpi^2 R_0 \cos^2\lambda$$

A l'équateur $\lambda = 0°$, soit :

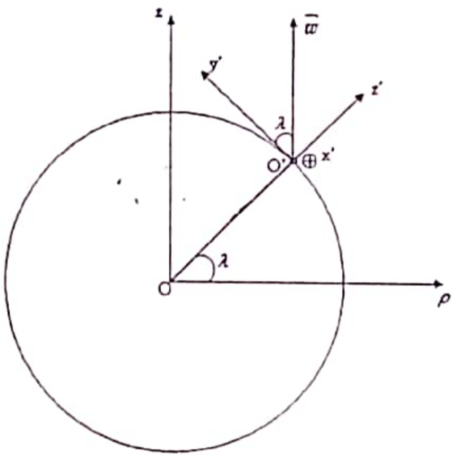
$$mg = mg_0 = F_a - m\varpi^2 R_0$$
$$F_a = mg_0 + m\varpi^2 R_0$$

g_0 est la valeur de g pour $\lambda = 0°$

$$mg = mg_0 + m\varpi^2 R_0 - m\varpi^2 R_0 \cos^2\lambda$$
$$g = g_0 + \varpi^2 R_0 (1 - \cos^2\lambda)$$
$$\boxed{g = g_0 + \varpi^2 R_0 \sin^2\lambda}$$

5. Nous avons :

$$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{\gamma_c} = -m\left(2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}\right)$$
$$\overrightarrow{v_r} = \vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' = v'\vec{i}'$$
$$\vec{\omega} = \varpi \cos\lambda \vec{j}' + \varpi \sin\lambda \vec{k}'$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{F_c} = -2m\varpi v'\left[(\cos\lambda)\vec{j}' \wedge \vec{i}' + (\sin\lambda)\vec{k}' \wedge \vec{i}'\right]$$
$$\vec{j}' \wedge \vec{i}' = -\vec{k}' \quad \text{et} \quad \vec{k}' \wedge \vec{i}' = \vec{j}'$$
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{F_c} = -2m\varpi v' \sin\lambda \vec{j}' + 2m\varpi v' \cos\lambda \vec{k}'}$$
$$\overrightarrow{F_c}\begin{cases} 0 \\ -2m\varpi v' \sin\lambda \\ 2m\varpi v' \cos\lambda \end{cases}$$



6. A l'instant *t* nous avons :

$$\vec{v}' = v'\vec{i}'$$
$$\sum \vec{F} = -2m\varpi v' \sin\lambda \vec{j}'$$

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à l'instant t donne :

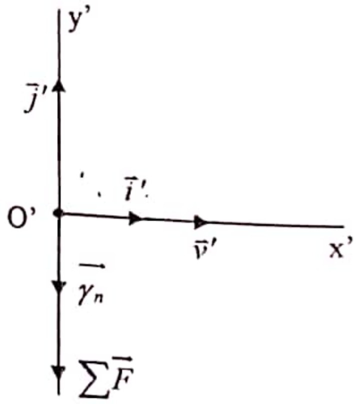
$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = m\left(\overrightarrow{\gamma_n} + \overrightarrow{\gamma_t}\right)$$

D'où : $-2m\varpi v' \sin\lambda \vec{j} = m(\overrightarrow{\gamma_n} + \overrightarrow{\gamma_t})$

Or à l'instant t nous avons :

$\overrightarrow{\gamma_t} = \vec{0}$ (voir figure)

D'où : $-2m\varpi v' \sin\lambda \vec{j}' = m\overrightarrow{\gamma_n}$



comme $\left|\overrightarrow{\gamma_n}\right| = \dfrac{v'^2}{\rho}$

avec ρ le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant t :

$$-2m\varpi v' \sin\lambda\,\vec{j}' = -m\frac{v'^2}{\rho}\,\vec{j}'$$

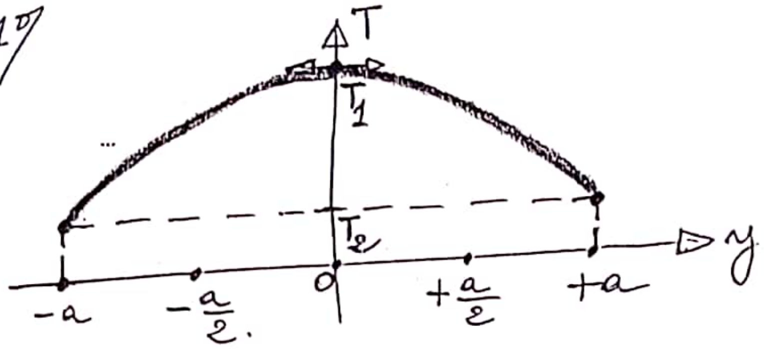
D'où :

$$\boxed{\rho = \frac{v'}{2\varpi \sin\lambda}}$$

Mécanique 2e session 2003-2004 PC1

Exercice 1 :

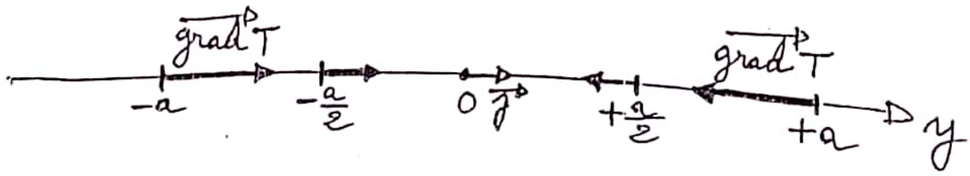
1°/



0,5//

2°/ $\overrightarrow{grad}\, T \left| \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad 0{,}5// \\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_1 - T_2}{a^2}(-2y) = -\frac{2}{a^2}(T_1 - T_2)y \quad 0{,}5// \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad 0{,}5// \end{array} \right.$

* $y = 0$: $\overrightarrow{grad}\, T = \vec{0}$ 0,5//
* $y = -a$: $\overrightarrow{grad}\, T = \frac{2}{a}(T_1 - T_2)\vec{j}$ 0,5//
* $y = +a$: $\overrightarrow{grad}\, T = -\frac{2}{a}(T_1 - T_2)\vec{j}$ 0,5//
* $y = -\frac{a}{2}$: $\overrightarrow{grad}\, T = \frac{1}{a}(T_1 - T_2)\vec{j}$ 0,5//
* $y = +\frac{a}{2}$: $\overrightarrow{grad}\, T = -\frac{1}{a}(T_1 - T_2)\vec{j}$ 0,5//

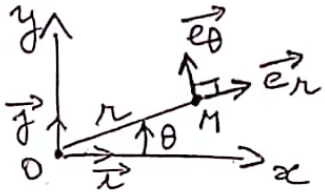


0,5//

3°/ Le gradient de température est un vecteur donnant
0,5/ la direction et le sens de la croissance de la température.
Ses composantes sont les taux de variation spa-
0,5/ tiaux de la température.

Exercice 2 :

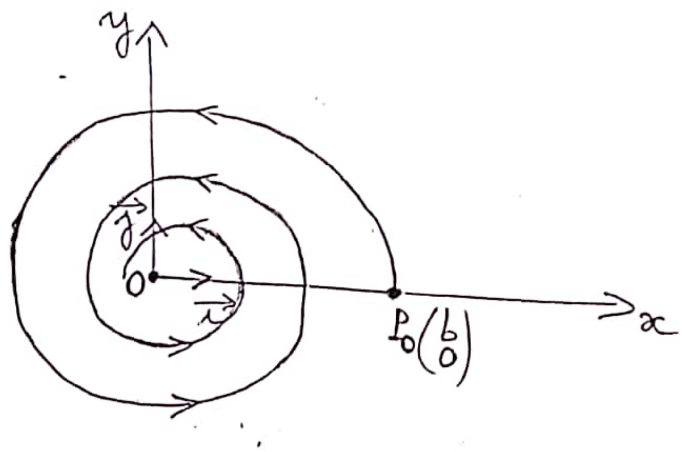
$$\begin{cases} r = b \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$



1°/ $t = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} r = r_0 = b \\ \theta = \theta_0 = 0 \end{vmatrix}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} r(t) = 0$

La trajectoire de P est une spirale allant du point $P_0 \begin{vmatrix} x_0 = b \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$ vers l'origine O.



2°/ $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{v} = \left(-\frac{b}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}\right)\vec{e_r} + \left(\omega b \cdot e^{-t/\tau}\right)\vec{e_\theta}$

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{e_r} + v_\theta \cdot \vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_r = -\frac{b}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \longrightarrow \text{Composante radiale} \\ v_\theta = \omega b \cdot e^{-t/\tau} \longrightarrow \text{Composante orthoradiale} \end{array}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} \qquad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0 \text{ car } \omega = c$$

$$\vec{a} = \left(\frac{b}{\tau^2} e^{-t/\tau} - \omega^2 b\, e^{-t/\tau}\right)\vec{e_r} + \left(-\frac{2\omega b}{\tau} e^{-t/\tau}\right)\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_r = b\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right) e^{-t/\tau} \\ a_\theta = -\frac{2\omega b}{\tau} e^{-t/\tau} \end{array}}$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = b e^{-t/\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}$$

$$\boxed{v = b\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau}}$$

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = b e^{-t/\tau} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}$$

$$a = b e^{-t/\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{\tau^4} - \frac{2\omega^2}{\tau^2} + \omega^4 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}} = b e^{-t/\tau} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right.}$$

$$\boxed{a = b\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right) \cdot e^{-t/\tau}}$$

soit $\theta = (\widehat{\vec{v}, \vec{r}})$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = v \cdot r \cdot \cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v \cdot r} = \frac{-\frac{b^2}{\tau} e^{-2t/\tau}}{b^2\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-2t}}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}}\right) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)}$$

3°/ $\vec{a} = a_t\vec{e_t} + a_n\vec{e_n}$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \boxed{a_t = -\frac{b}{\tau}\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = b\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2-\frac{1}{\tau^2}}$$

$$\boxed{a_n = b\omega\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau}}$$

<u>Remarque :</u> On aboutit au même résultat, en appliquant la formule suivante dans la base orthonormée directe $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_b})$: $a_n = \dfrac{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

4°/ $a_n = \dfrac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{b^2\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right) \cdot e^{-2t/\tau}}{\omega b\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau}}$

$$\boxed{R = \frac{b}{\omega}\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2} \cdot e^{-t/\tau}}$$

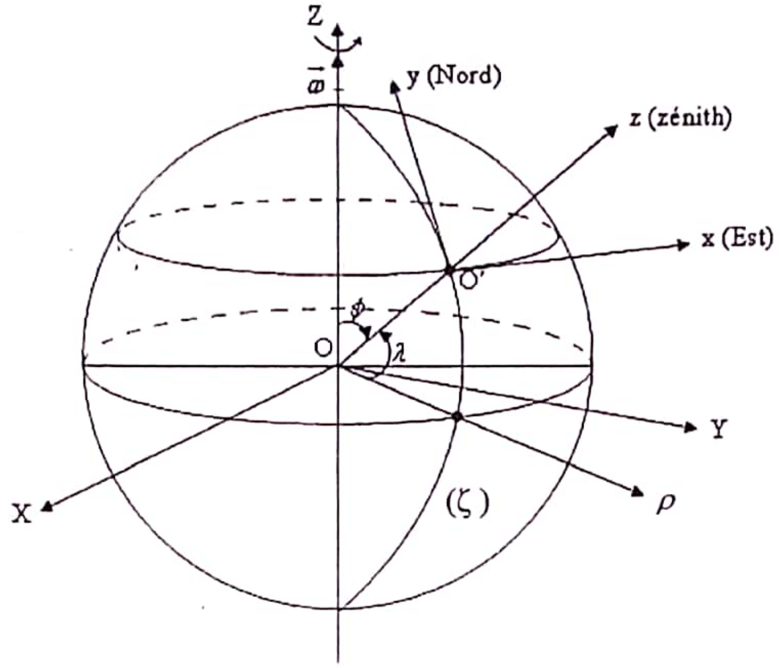
5°/ $v = \dfrac{ds}{dt} \Longrightarrow ds = v\,dt$

$$\int_0^s ds = \int_0^t v\,dt = b\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2}\int_0^t e^{-t/\tau}\,dt$$ 92

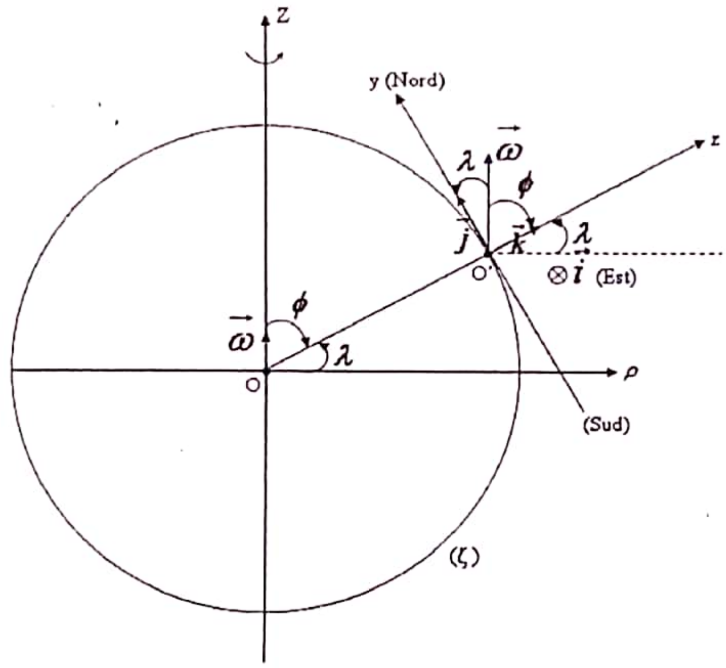
$$\boxed{s = -b\tau\left(\frac{1}{\tau^2}+\omega^2\right)^{1/2}\left[e^{-t/\tau}-1\right]}$$

PREMIERE SESSION 2004-2005

Exercice 1 :



Dans le plan ρOZ contenant le méridien (ζ) passant par O' (dénommé plan du méridien géographique), on a :



$\overrightarrow{F_c} = \overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$

$\vec{\omega} = \omega \cos\phi \vec{k} + \omega \cos\lambda \vec{j}$, où $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$

$\vec{\omega} = \omega \sin \lambda \vec{k} + \omega \cos \lambda \vec{j} = \omega \left(\cos \lambda \vec{j} + \sin \lambda \vec{k} \right)$

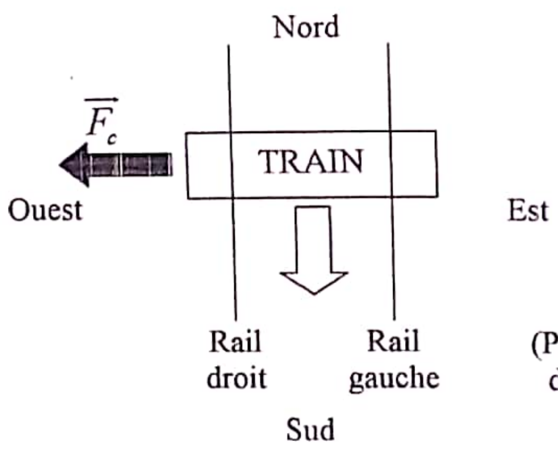
Le train se déplaçant dans le sens Nord-Sud, on a :

$\overrightarrow{v_r} = -v_r \vec{j}$ où $v_r = \|\vec{v}_r\| = \|\dot{y}\vec{j}\| = |\dot{y}| = -\dot{y}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_c} = -2m\omega \left(\cos \lambda \vec{j} + \sin \lambda \vec{k} \right) \wedge \left(-v_r \vec{j} \right)$

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -2m\omega v_r \sin \lambda \vec{i}}$$

$\overrightarrow{F_c}$ est orienté dans la direction Ox, précisément dans le sens Est-Ouest.



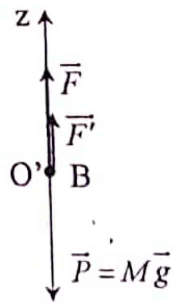
(Par rapport au sens de déplacement du train)

Donc le train exerce une pression sur le rail droit.

Exercice 2 :

1°/

a) Ressort et amortisseur comprimés :



B en équilibre :

$\vec{F} + \vec{F'} + \vec{P} = \vec{0}$

$\vec{F} + \vec{F'} = -\vec{P}$

$(F + F')\vec{e_z} = +Mg\vec{e_z}$

$F + F' = Mg$ (1)

$F = k|l_1 - l_0| = -k(l_1 - l_0)$ car $l_1 - l_0 < 0$

$F' = h\left|\frac{dl}{dt}\right| = 0$ car $l = cte = l_1$ lorsque B reste en équilibre.

(1) $\Rightarrow -k(l_1 - l_0) = Mg$ (2)

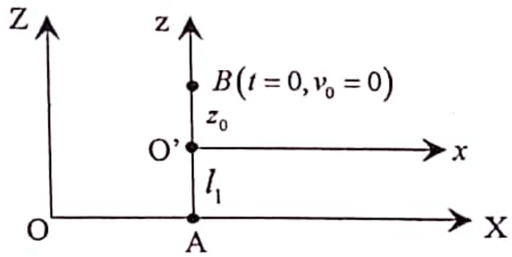
$l_1 - l_0 = -\frac{Mg}{k}$

$\boxed{l_1 = l_0 - \frac{Mg}{k}}$

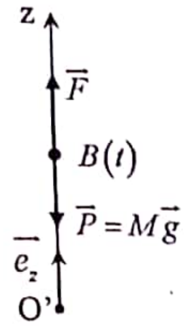
b) AN : $l_1 = 0,70 - \frac{100*9,81}{6,10.10^{+3}}$

$\boxed{l_1 \simeq 0,54m = 54cm}$

2°/ $h \simeq 0$



a) A $t=0$: $l = l_1 + z_0 = 54 + 10 = 64cm < l_0 = 70cm \Rightarrow$ le ressort est comprimé. Il le restera au cours du mouvement sans amortissement étudié ici.



Théorème du centre d'inertie : $M\vec{g} + \vec{F} = M\vec{a}$

$-Mg\vec{e_z} + k|l - l_0|\vec{e_z} = M\ddot{z}\vec{e_z}$ *(3)*

$|l - l_0| = l_0 - l = l_0 - (l_1 + z) = l_0 - l_1 - z$

(3) $\Rightarrow M\ddot{z} = -Mg + k(l_0 - l_1) - kz = \underbrace{-Mg - k(l_1 - l_0)}_{0\ (d'après (2))} - k$

$M\ddot{z} + kz = 0$

$\boxed{\ddot{z} + \dfrac{k}{M}z = 0}$ *(4)*

b) *(4)* est une équation différentielle du 2^{nd} ordre linéaire à cœfficients constants, sans 2^{nd} membre. Son équation caractéristique est :

$r^2 + \dfrac{k}{M} = 0$, soit $r^2 = -\dfrac{k}{M}$

$\Rightarrow r = \pm i\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

Donc la solution de l'équation *(4)*, c'est-à-dire l'équation du mouvement de B dans le référentiel $\mathfrak{R}'$, est :

$z = C_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}.t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}.t\right)$, où C_1 et C_2 sont des constantes. C'est-à-dire :

$z = z_m \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}.t + \varphi\right)$, où z_m et φ sont des constantes.
Le mouvement de B est donc sinusoïdal.

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}}$

$f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2\pi/\omega_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

$\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{M}}}$

A.N. : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6,10.10^{+3}}{100}}$

$\boxed{f_0 = 1,24 Hz}$

c) $z = z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\quad \dot{z} = -z_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$z(t=0) = z_0 \Leftrightarrow z_m \cos\varphi = z_0 \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{z_0}{z_m} > 0$

$v_0 = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(t=0) = 0 \Leftrightarrow -z_m\omega_0 \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

$\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 = \frac{z_0}{z_m} \Rightarrow z_m = z_0 = 10cm$

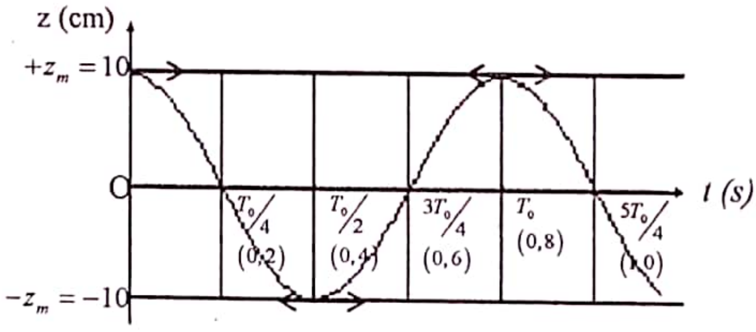
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{6,10.10^{+3}}{100}} = 7,81 rad.s^{-1}$

$\boxed{z=10\cos(7,81t)}$

(cm) $\quad$ s

$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{1,24} = 0,8s$

$z = 10\cos(\omega_0 t) = 10\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$



3°/

a) $h_0 = 2\sqrt{Mk} = 2\sqrt{100 * 6,10.10^{+3}}$

$\boxed{h_0 = 1562 N.s.m^{-1}}$

b) $M\vec{g} + \vec{F} + \vec{F'} = M\vec{a}$ (5)

(3) $\Rightarrow \vec{F} = k|l - l_0|\vec{e_z} = k(l_0 - l_1 - z)\vec{e_z}$

Calculons $\vec{F'}$:

- Piston en phase descendante (Force résistante $\vec{F'}$ opposée à la compression) :

$F' = h_0\left|\frac{dl}{dt}\right| = -h_0\frac{dl}{dt} = -h_0\dot{z}$ car $l = l_1 + z$

$\overrightarrow{F'} = F'\overrightarrow{e_z} = -h_0\dot{z}\overrightarrow{e_z}$

- Piston en phase ascendante (Force résistante $\overrightarrow{F'}$ opposée à l'étirement) :

$F' = h_0\left|\frac{dl}{dt}\right| = h_0\frac{dl}{dt} = h_0\dot{z}$

$\overrightarrow{F'} = -F'\overrightarrow{e_z} = -h_0\dot{z}\overrightarrow{e_z}$

$(5) \Rightarrow -Mg\overrightarrow{e_z} + \left[k\left(l_0 - l_1\right) - kz\right]\overrightarrow{e_z} - h_0\dot{z}\overrightarrow{e_z} = M\ddot{z}\overrightarrow{e_z}$

$\underbrace{-Mg + k\left(l_0 - l_1\right)}_{0} - kz - h_0\dot{z} = M\ddot{z}$

$M\ddot{z} + h_0\dot{z} + kz = 0$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h_0}{M}\dot{z} + \frac{k}{M}z = 0} \qquad (6)$$

c) Equation caractéristique de l'équation différentielle (6) :

$r^2 + \frac{h_0}{M}r + \frac{k}{M} = 0$

$\Delta = \left(\frac{h_0}{M}\right)^2 - 4\frac{k}{M} = \frac{4Mk}{M^2} - 4\frac{k}{M} = \frac{4k}{M} - \frac{4k}{M} = 0$

$r = -\frac{h_0}{2M} = -\frac{2\sqrt{Mk}}{2M} = -\sqrt{\frac{k}{M}} = -\omega_0$

La solution générale de l'équation (6) est :

$$\boxed{z = \left(A + Bt\right)e^{-\frac{h_0}{2M}t} = \left(A + Bt\right)e^{-\omega_0 t} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}}$$

d) $\dot{z} = Be^{-\frac{h_0}{2M}t} - \left(A + Bt\right)\frac{h_0}{2M}e^{-\frac{h_0}{2M}t}$

$z\left(t = 0\right) = z_0 \Leftrightarrow A = z_0$

$\dot{z}\left(t = 0\right) = 0 \Leftrightarrow B - \frac{h_0}{2M}A = 0 \Leftrightarrow B = \frac{h_0}{2M}A = \frac{h_0}{2M}z_0$

$$\Rightarrow \boxed{z\left(t\right) = z_0\left(1 + \frac{h_0}{2M}t\right)e^{-\frac{h_0}{2M}t} = z_0\left(1 + \omega_0 t\right)e^{-\omega_0 t}}$$

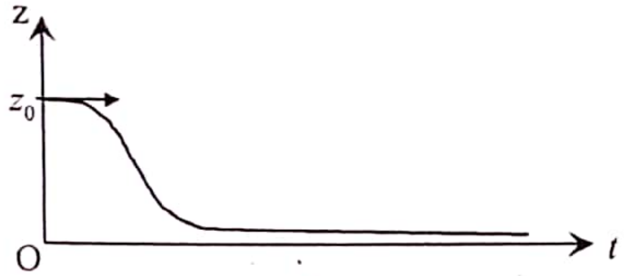
$z\left(t\right) = 10\left(1 + 7{,}81t\right)e^{-7{,}81t}$

(z en cm)

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = z_0\left[\overbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{h_0}{2M}t}}^{0} + \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{h_0}{2M}t\right).e^{-\frac{h_0}{2M}t}}_{G}\right]$$

$$G \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^{X}}}_{0} \text{ où } X = \frac{h_0}{2M}t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$$



e) Présence de l'amortisseur $\Rightarrow$ Régime apériodique.
Donc l'amortisseur permet à la remorque de revenir rapidement à une altitude constante après une perturbation (alors que sans amortisseur, la remorque oscille sans arrêt). La valeur critique du coefficient d'amortissement correspond au temps minimal de retour à l'équilibre.
Ainsi, la présence de l'amortisseur évite les oscillations dommageables pour les objets transportés et désagréables pour les éventuels passagers de la remorque.

Mécanique 2e session 2004-2005

Exercice 1 :

1°/ Les 3 principes de Newton sont :

1. Le principe de l'inertie
2. Le principe fondamental de la dynamique
3. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction

2°/ Supposons que dans le virage, le système pilote-moto est animé d'un mouvement circulaire uniforme

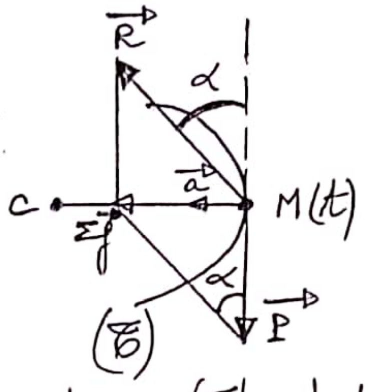
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{e}_t + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)\vec{e}_n$$

$$\rho = cte = R$$

$$v = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n = \left(\frac{v^2}{R}\right)\vec{e}_n$$

$$\Rightarrow \Sigma\vec{f} = m\vec{a} = \left(\frac{mv^2}{R}\right)\vec{e}_n$$



Trajectoire $(\mathcal{C})$ située dans le plan horizontal

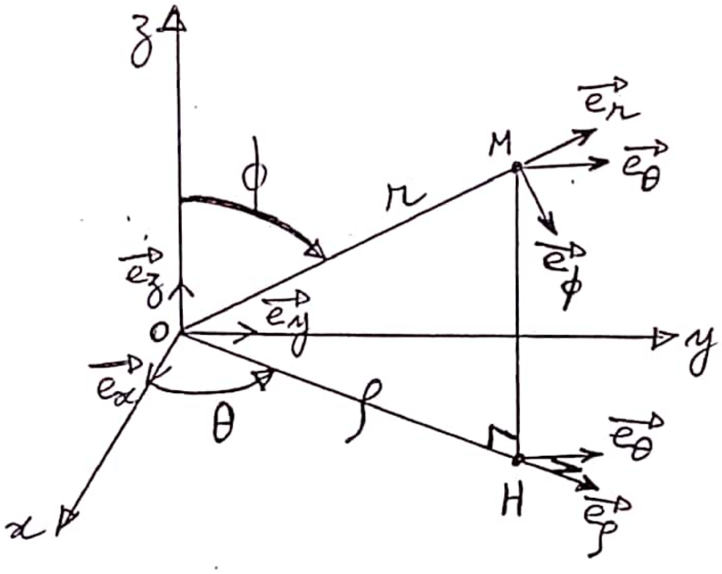
$\Sigma\vec{f} = \vec{P} + \vec{R}$ étant centripète, la réaction du sol sur le système pilote-moto, $\vec{R}$, est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale :

$$tg\alpha = \frac{\|\Sigma\vec{f}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v^2}{Rg}}$$

Donc, si le pilote veut demeurer sur sa trajectoire, plus sa vitesse v est grande, plus il augmentera l'angle d'inclinaison α, c'est-à-dire plus il penchera sa moto.

3°/ a)



b) $\boxed{\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r}}$

c) Dans la base sphérique :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt} \qquad (E')$$

Comme dans le cas de la base cylindrique, on a :

$$\vec{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y} \Rightarrow \vec{e_\rho} = \vec{e_\rho}(\theta)$$

$$\vec{e_\theta} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} = \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y} \Rightarrow \vec{e_\theta} = \vec{e_\theta}(\theta)$$

En outre on a :

$$\vec{e_r} = \sin\phi\,\vec{e_\rho} + \cos\phi\,\vec{e_z} = \sin\phi\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\phi\sin\theta\,\vec{e_y} + \cos\phi\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{e_r} = \vec{e_r}(\phi, \theta)$$

$$\vec{e_\phi} = \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_\rho} + \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_z} = \cos\phi\,\vec{e_\rho} - \sin\phi\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{e_\phi} = \cos\phi\cos\theta\,\vec{e_x} + \cos\phi\sin\theta\,\vec{e_y} - \sin\phi\,\vec{e_z} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{e_\phi} = \vec{e_\phi}(\phi, \theta) \text{ et } \vec{e_\phi} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\phi}$$

$$\vec{e_r} = \vec{e_r}(\phi, \theta)$$

$$\Rightarrow d\vec{e_r} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\phi}\,d\phi + \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\phi}}_{\vec{e_\phi}}\,\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{e_r} = \sin\phi\,\vec{e_\rho} + \cos\phi\,\vec{e_z} \Rightarrow \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\theta} = \sin\phi \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial\theta}}_{\vec{e_\theta}} + \cos\phi \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{e_z}}{\partial\theta}}_{\vec{0}} = \sin\phi \cdot \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\phi}\,\vec{e_\phi} + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e_\theta}$$

$$(E') \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\phi}\,\vec{e_\phi} + r\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e_\theta}}$$

4°/ a) Théorème du moment cinétique :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment de la force appliquée :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \mathcal{M}^t_O\,\vec{f} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{r} \wedge \vec{f}}$$

Démonstration :

$$\vec{\sigma} = \mathcal{M}^t_O\,\vec{p} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

m étant constante, on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{0}} + m\vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}_{\vec{a}}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = m\vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \mathcal{M}^t_O\,\vec{f}}$$

b) Soit $\vec{f}$ une force centrale dont le centre de force O est choisi comme origine.

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \mathcal{M}^t_O\,\vec{f} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\sigma} = \vec{cte}}$$

Exercice 2 :

$$\vec{F}(x) = \left(-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3}\right)\vec{e_x}$$

1/ Le point matériel est en équilibre si : $\vec{F}(x) = \vec{0}$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-ax+b}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow -ax+b = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Donc on a : $\boxed{x_0 = \frac{b}{a}}$

2/ $\vec{F}(x) = -\overrightarrow{grad}\,U \Rightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -F(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_{U(\infty)=0}^{U(x)} dU = -\int_{\infty}^{x} F(x)\,dx$$

$$\Rightarrow U(x) = \int_{\infty}^{x}\left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2}\right]_{\infty}^{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2}}$$

Représentation graphique de U(x) :

$$\lim_{x\to 0^+} U(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(-ax + \frac{b}{2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} U(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\left(-a + \frac{b}{2x}\right) = 0^-$$

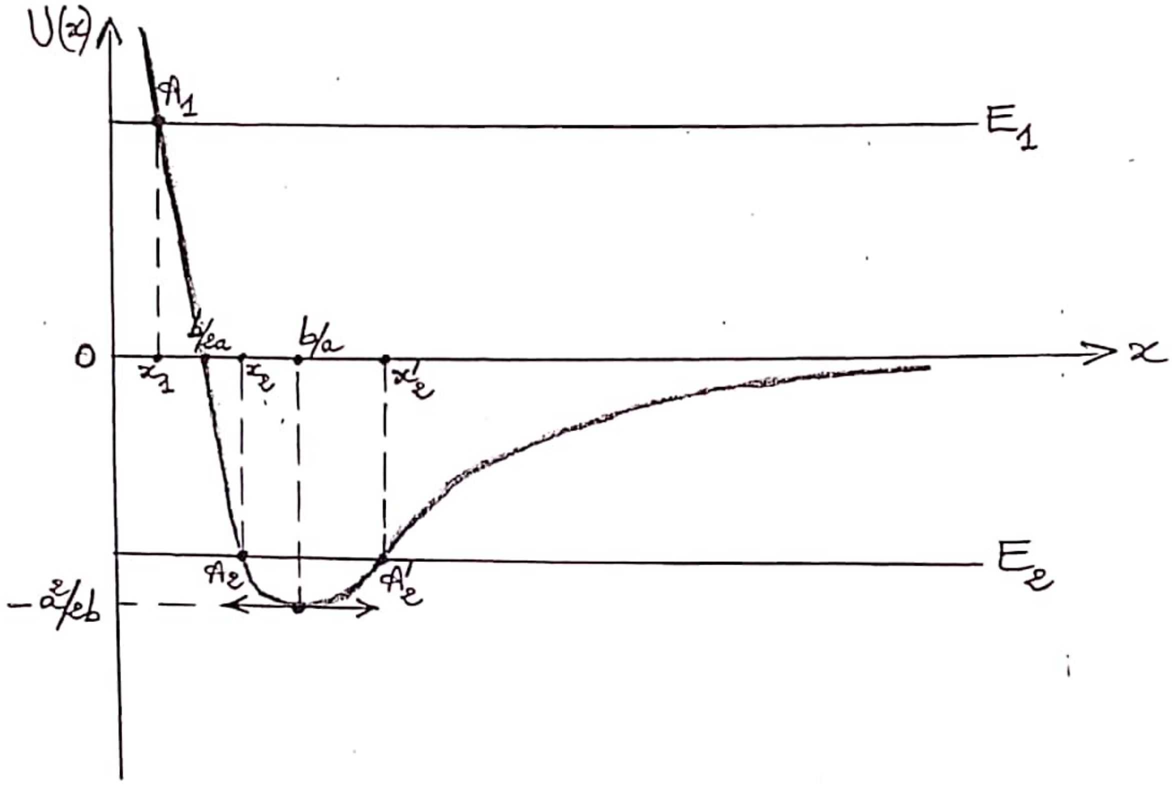
$$U(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2}\left(-ax + \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$-ax + \frac{b}{2} = 0$$

$$x = \frac{b}{2a}$$

$$\frac{dU}{dx} = -F(x) = 0 \text{ pour } x = x_0 = \frac{b}{a}$$

$$U(x_0) = -\frac{a}{b/a} + \frac{b}{2b^2/a^2} = -\frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{2b} = -\frac{a^2}{2b}$$

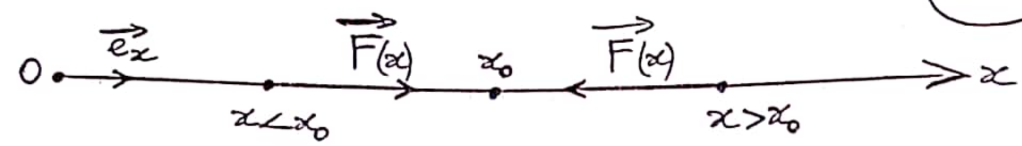


L'équilibre au point $x = x_0$ est stable, car $U(x)$ présente un minimum en $x = x_0 = \frac{b}{a}$.

Remarque :

$$F(x) = -\frac{a}{x^3}\left(x - \frac{b}{a}\right) = -\frac{a}{x^3}(x - x_0)$$

* Si, à partir de la position d'équilibre x_0, on déplace légèrement le point matériel à droite ($x > x_0$), alors on a : $F(x) < 0$.



Donc le point matériel revient à la position x_0.

- Si, à partir de la position d'équilibre x_0, on déplace légèrement le point matériel à gauche ($x < x_0$), alors on a : $F(x) > 0$; le point matériel revient à la position x_0.

Alors la position d'équilibre $x = x_0$ est stable.

3°/ $E = E_c + E_p$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2} \end{aligned}}$$

L'énergie mécanique se conserve ($E = cte$) : si la vitesse v (initialement nulle) augmente, alors $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ croît et $E_p = U(x)$ décroît ; si v diminue, on a le phénomène inverse.

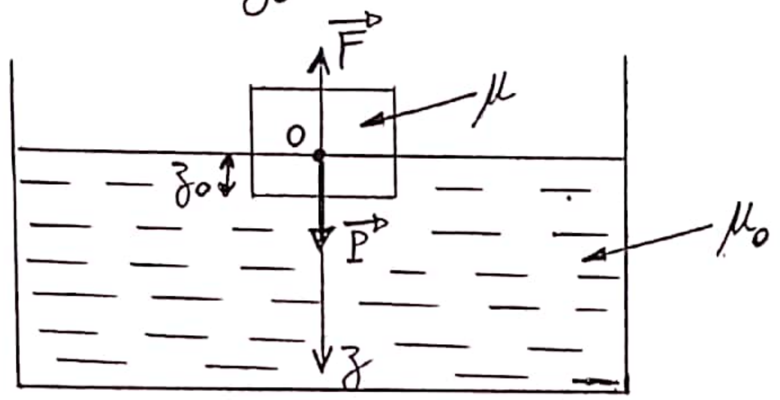
On a les deux cas suivants :

* Si $E = E_1 \geq 0$: partant de la position x_1 sans vitesse initiale le point matériel s'éloignera à l'infini.
* Si $E = E_2 < 0$: partant de la position x_2 sans vitesse initiale le point matériel oscillera entre les positions x_2 et x_2'.

Exercice 3 :

Deux forces agissent sur le cube : son poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{F}$.

Quand le cube est en équilibre, il est immergé d'une hauteur z_0 :



- P = poids du cube

$$P = mg = \mu V g = \mu l^3 g$$

- F = poussée d'Archimède = poids du liquide déplacé

$$F = m_0 g = \mu_0 V_0 g = \mu_0 l^2 z_0 g$$

Cube en équilibre :

$$F = P \iff \mu_0 l^2 z_0 g = \mu l^3 g \quad (E)$$

A partir de cette position d'équilibre, si on enfonce le cube de z, il tend à osciller.

En effet, le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{F}$$

$$\Rightarrow m a_z = P_z + F_z = P - F$$

$$\mu l^3 \ddot{z} = \mu l^3 g - \mu_0 l^2 (z_0 + z) g$$

$$\mu l^3 \ddot{z} = \underbrace{\mu l^3 g - \mu_0 l^2 z_0 g}_{0} - \mu_0 l^2 z g$$

(d'après (E))

$$\mu l^3 \ddot{z} + \mu_0 l^2 g z = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu_0 l^2 g}{\mu l^3} z = 0$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{\mu_0 g}{\mu l}\right) z = 0$$

$$\Rightarrow z = z_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où : $\omega = \left(\frac{\mu_0 g}{\mu l}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{\mu l}{\mu_0 g}\right)^{1/2}}$$

<u>A.N.</u> : $T = 2\pi \left(\frac{0,8 \times 0,1}{1 \times 9,81}\right)^{1/2}$

$$\boxed{T = 0,57 s}$$

1ère session 2005-2006

((Problème : Voir Exercice 2 1ère session 93-94))

Exercice :

1°/ $P = P(x, y, z, t)$

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) dt$$

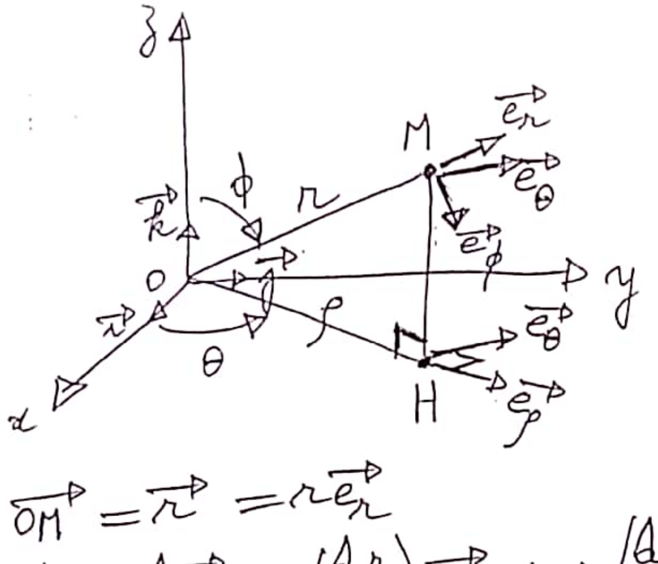
$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{1}$$

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{k}\right]}_{\vec{\nabla} P} \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\vec{k}\right]}_{\vec{V}} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{dP}{dt} = \vec{\nabla} P \cdot \vec{V} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P}$$

2°/



$$\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\vec{e_r} + r\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right) = \dot{r}\vec{e_r} + r\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right) \quad (a)$$

$$\vec{e_r} = \sin\phi\,\vec{e_\rho} + \cos\phi\,\vec{k} = \sin\phi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \cos\phi\,\vec{k}$$

$$\vec{e_r} = \vec{e_r}(\phi, \theta)$$

$$d\vec{e_r} = \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \phi}\right) d\phi + \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\right) d\theta$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \phi}\right) \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\dot{\phi}} + \left(\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\right) \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}$$

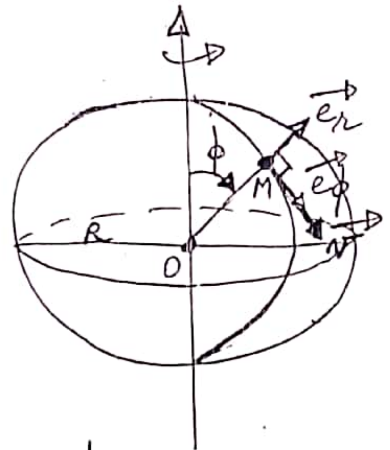
$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \phi} = \vec{e_\phi}$$

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta} = \sin\phi \cdot \frac{\partial \vec{e_\rho}}{\partial \theta} = \sin\phi \cdot \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\phi}\, \vec{e_\phi} + \dot{\theta} \sin\phi\, \vec{e_\theta}$$

$$(a) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\phi}\vec{e_\phi} + r\dot{\theta}\sin\phi\, \vec{e_\theta}}$$

Cas où M se déplace le long d'un méridien :



$r = cte = R \;:\; \dot{r} = 0$

$\theta = cte \;:\; \dot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\phi}\, \vec{e_\phi}}$$

3°/ Enoncé du théorème :
La dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment de la force appliquée.

Démonstration :

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{0}} + m\vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \mathcal{M}_O^t \vec{f}}$$

4°/ a) faux
Le centre de la roue est animé d'un mouvement rectiligne.

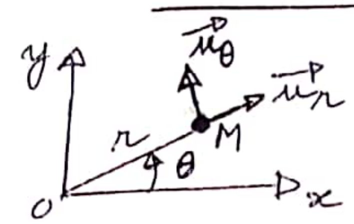
b) faux

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{v_e}}{dt} - \vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$$

c) faux
Un oscillateur libre, c'est-à-dire sans excitation extérieure, peut être amorti, c'est-à-dire avoir un coefficient de viscosité non nul.

Exercice 1 :

2e session 2005-2006



$\odot\vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$

1°) $F(r).dr = -dU$

$$U = -\int F(r)\,dr = -2\frac{U_0}{a}\left[a^3\int\frac{dr}{r^3} - a^2\int\frac{dr}{r^2}\right]$$

$$U = -\frac{2U_0}{a}\left[a^3\left(-\frac{1}{2r^2}\right) - a^2\left(-\frac{1}{r}\right)\right] + cte$$

$$\lim_{r \to \infty} U = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U = U_0\left(\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\right)}$$

2°) D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge F(r)\vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{cte}}$$

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\boxed{\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}}$$

3°) $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cte}$

$\Rightarrow$ M appartient au plan passant par O et orthogonal au vecteur constant $\vec{L}$.

4°/ $U(r)$ est minimum pour :

$$\left.\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_e} = 0$$

$$\frac{dU}{dr} = -F(r) = 0$$

$$\frac{a^3}{r^3} - \frac{a^2}{r^2} = 0$$

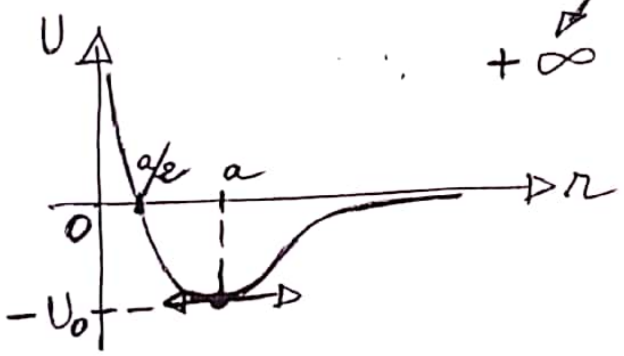
$$\boxed{r = r_e = a}$$

$$U(r_e) = U_0\left(\frac{a^2}{r_e^2} - 2\frac{a}{r_e}\right) = U_0\left(\frac{a^2}{a^2} - 2\frac{a}{a}\right)$$

$$\boxed{U(r_e) = -U_0}$$

Tracé de la courbe $U = f(r)$:

- $r = a$: $\frac{dU}{dr} = 0$ et $U = -U_0$
- $U = 0 \iff \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} = 0 \iff r = \frac{a}{2}$
- $\lim\limits_{r \to +\infty} U = \lim\limits_{r \to +\infty} U_0\left(\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\right) = 0^-$
- $\lim\limits_{r \to 0^+} U = \lim\limits_{r \to 0^+} \underbrace{\frac{U_0}{r^2}}_{+\infty}\underbrace{\left(a^2 - 2ar\right)}_{a^2 = cte > 0} = +\infty$



Problème :

1°/ Le piston est soumis à ;

- son poids ; $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{i}$
- la force de frottement ; $\vec{F}_R = -k\vec{v} = -k\dot{x}\vec{i}$
- les forces de pression exercées par l'air :
  - au-dessus du piston ; $\vec{f} = p_0 S\vec{i}$
  - au-dessous du piston : $\vec{f'} = -p_x S\vec{i}$

La résultante de ces forces est :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{R} &= mg\vec{i} + (p_0 - p_x)S\vec{i} - k\vec{v} \\ \vec{R} &= mg\vec{i} + (p_0 - p_x)S\vec{i} - k\dot{x}\vec{i} \quad (a)\end{aligned}}$$

2°/ A l'équilibre :

- $\vec{P} = mg\vec{i}$
- $\vec{F}_R = \vec{0}$ car $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{f} = p_0 S\vec{i}$
- $\vec{f'} = -p_e S\vec{i}$ car $p_x = p_e$
- $\vec{R} = \vec{0}$ (condition d'équilibre)

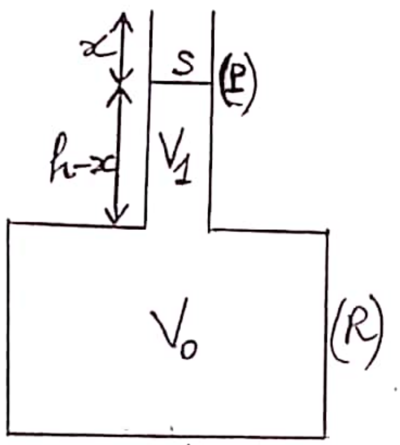
$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{0} = mg\vec{i} + (p_0 - p_e)S\vec{i}$$

$$\boxed{mg = (p_e - p_0)S \quad (b)}$$

(a) et (b) $\Rightarrow \vec{R} = (p_e - p_0) S\vec{i} + (p_0 - p_x) S\vec{i} - k\vec{v}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R} &= (p_e - p_x) S\vec{i} - k\vec{v} \\ \vec{R} &= (p_e - p_x) S\vec{i} - k\dot{x}\vec{i} \end{aligned}}$$

3°/



$V_x = V_0 + V_1$

$$\boxed{V_x = V_0 + S(h - x)}$$

$V_e = V_x(x = x_e)$

$$\boxed{V_e = V_0 + S(h - x_e)}$$

Le gaz étant parfait : $pV = nRT$

Or $n = cte$ et $T = cte$

$\Rightarrow pV = cte$

$\Rightarrow p_x V_x = p_e V_e = p_0 (V_0 + Sh)$

$$p_e = p_0\left(\frac{V_0+sh}{V_e}\right) = p_0\left[\frac{V_0+sh}{V_0+s(h-x_e)}\right]$$

$$p_x = p_0\left(\frac{V_0+sh}{V_x}\right) = p_0\left[\frac{V_0+sh}{V_0+s(h-x)}\right]$$

$$p_e - p_x = p_0(V_0+sh)\left[\frac{1}{V_0+s(h-x_e)} - \frac{1}{V_0+s(h-x)}\right]$$

$$\boxed{p_e - p_x = p_0(V_0+sh)\left[\frac{(x_e-x)s}{[V_0+s(h-x_e)][V_0+s(h-x)]}\right]}$$

Si $sh \ll V_0$: $V_0+sh \simeq V_0$, $V_0+s(h-x_e) \simeq V_0$, $V_0+s(h-x) \simeq$

$$\Rightarrow \boxed{p_e - p_x = p_0\frac{(x_e-x)s}{V_0}} \quad (c)$$

$p_e - p_0 = p_e - p_x(x=0) = p_0\dfrac{x_e s}{V_0}$ d'après (c)

Or $p_e - p_0 = \dfrac{mg}{s}$ d'après (b)

$$\Rightarrow p_0\frac{x_e s}{V_0} = \frac{mg}{s}$$

$$\boxed{x_e = \frac{mgV_0}{p_0 S^2}}$$

4°/ P.F.D. : $m\vec{a} = \vec{R}$

$$m\ddot{x}\vec{i} = (p_e - p_x)S\vec{i} - k\dot{x}\vec{i}$$

$$m\ddot{x} = (p_e - p_x)S - k\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} - (p_e - p_x)\frac{S}{m} = 0$$

$$p_e - p_x = \frac{p_0 S}{V_0}(x_e - x) = -\frac{p_0 S}{V_0}(x - x_e) \text{ d'après}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x_e) \quad \text{car } x_e = cte$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt^2}(x - x_e)$$

Donc on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - x_e) + \frac{k}{m}\frac{d}{dt}(x - x_e) + \frac{p_0 S^2}{mV_0}(x - x_e) = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2(x - x_e)}{dt^2} + \lambda\frac{d(x - x_e)}{dt} + \omega^2(x - x_e) = 0$$

où : $\lambda = \frac{k}{m}$

$$\omega^2 = \frac{p_0 S^2}{mV_0}$$

Equation différentielle décrivant des oscillations mécaniques libres et amorties

5°/ L'équation différentielle du 2nd ordre linéaire à coefficients constants ci-dessus s'écrit :

$$\ddot{X} + d\dot{X} + \omega^2 X = 0, \text{ où } X = x - x_e$$

Son équation caractéristique ($r^2 + dr + \omega^2 = 0$) admet pour discriminant : $\Delta = d^2 - 4\omega^2$.

Si $d^2 < 4\omega^2$:

$$\Delta = d^2 - 4\omega^2 < 0$$

$$r = \frac{-d \pm i\sqrt{4\omega^2 - d^2}}{2} = -\frac{d}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\omega^2 - d^2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X = e^{-\frac{d}{2}t}\left(A.\sin\Omega t + B.\cos\Omega t\right) \quad \text{où : } \Omega = \frac{\sqrt{4\omega^2 - d^2}}{2} = \sqrt{\omega^2 - \frac{d^2}{4}}}$$

A $t = 0$: • $x = 0$

$$X = x - x_e = -x_e$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = -x_e}$$

• $\frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x_e) = \frac{dx}{dt} = 0$$

Or $\frac{dX}{dt} = -\frac{d}{2}e^{-\frac{d}{2}t}\left(A\sin\Omega t + B\cos\Omega\right.$

$$+ e^{-\frac{d}{2}t}\left(A\Omega\cos\Omega t - B\Omega\sin\Omega\right.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{d}{2}B + A\Omega = 0$$

$$A\Omega = \frac{d}{2}B$$

$$A = \frac{dB}{2\Omega}$$

$$\boxed{A = -\frac{dx_e}{2\Omega}}$$

6°/ $X = x - x_e = e^{-\frac{d}{2}t}\left(-\frac{dx_e}{2\Omega}\sin\Omega t - x_e\cos\Omega t\right)$

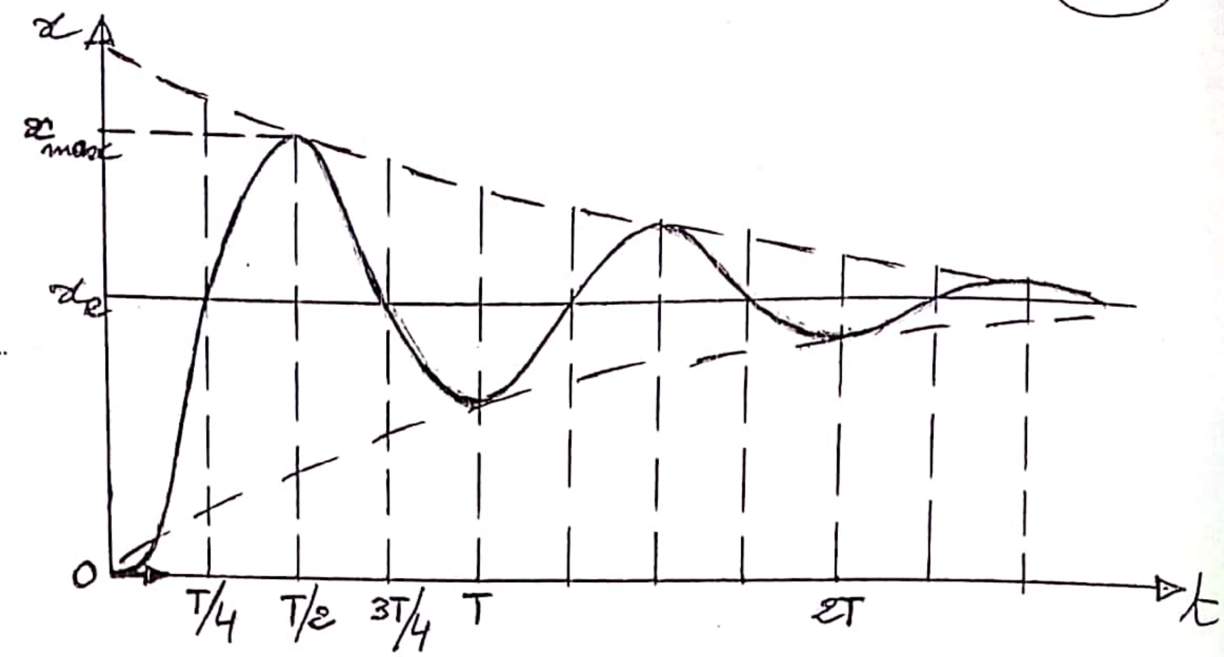
$$\boxed{x = x_e + e^{-\frac{d}{2}t}\left(-x_e\cos\Omega t - \frac{dx_e}{2\Omega}\sin\Omega t\right)}$$

On peut écrire :

$$x = x_e + e^{-\frac{d}{2}t}\cdot\cos(\Omega t + \varphi)$$

où $\cos\varphi = -x_e$, $\sin\varphi = \frac{dx_e}{2\Omega}$

Le mouvement est sinusoïdal, exponentiellement amorti.



7°/ Le mouvement est pseudo-périodique, de pseudo période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

x_{max} est atteint pour $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega}$

$$x_{max} = x\left(t = \frac{\pi}{\Omega}\right) = x_e + x_e\, e^{-\frac{d}{2}\frac{\pi}{\Omega}}\left(-\cos\pi - \frac{d}{2\Omega}\sin\right.$$

$$\boxed{x_{max} = x_e\left(1 + e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}\right)}$$

Le tube doit avoir une hauteur supérieure à cette abscisse maximale :

$$h > x_{max}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_{min} = x_{max} = x_e\left(1 + e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}\right)}$$

8°/ **Première méthode de calcul de p_{max} :**

$$(c) \Rightarrow p_e - p_{max} = p_e - p_x(x = x_{max}) = \frac{p_0 S}{V_0}(x_e - x_{max}) = \frac{p_0 S}{V_0}\left(-x_e\, e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}\right)$$

$$\Rightarrow p_{max} = p_e + \frac{p_0 S}{V_0} x_e\, e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}$$

$$p_e = p_0 + \frac{mg}{S} \text{ d'après (b)}$$

$$x_e = \frac{mg V_0}{p_0 S^2} \text{ (voir 3°/)}$$

$$\Rightarrow p_{max} = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) + \frac{p_0 S}{V_0}\left(\frac{mg V_0}{p_0 S^2}\right) e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}$$

$$\boxed{p_{max} = p_0 + \frac{mg}{S}\left(1 + e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}\right)}$$

Deuxième méthode de calcul de p_{max} :

$$p_{max} \cdot V_{min} = p_0 (V_0 + Sh) \quad \text{car } p \cdot V = cte$$

$$\Rightarrow p_{max} = \frac{p_0 (V_0 + Sh)}{V_{min}} = \frac{p_0 (V_0 + Sh)}{V_0 + S(h - x_{max})}$$

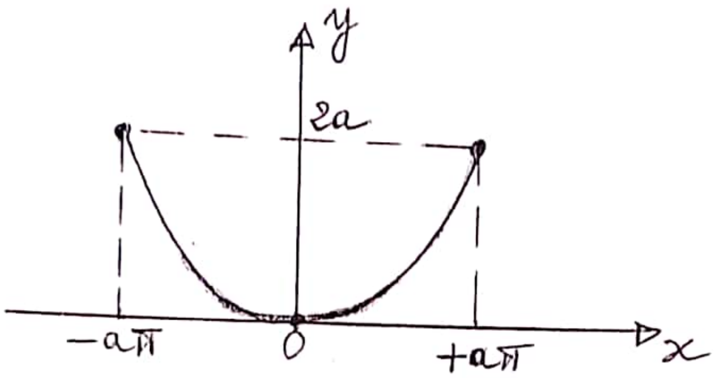
$$\boxed{p_{max} = \frac{p_0 (V_0 + Sh)}{V_0 + S\left[h - x_e\left(1 + e^{-\frac{d\pi}{2\Omega}}\right)\right]}}$$

Exercices supplémentaires

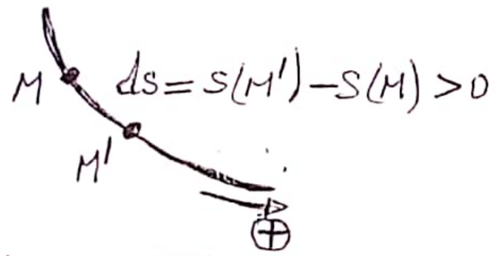
Exercice 1 :

A. 1°/

θ	$-\pi$	0	$+\pi$
$x = a(\theta + \sin\theta)$	$-a\pi$	0	$+a\pi$
$y = a(1 - \cos\theta)$	$2a$	0	$2a$



2°/



$$ds = \widehat{MM'} \simeq \|\overrightarrow{MM'}\| = \|\overrightarrow{dr}\|$$

Or $\overrightarrow{dr} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta\,\vec{\imath} + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta\,\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{dr} = a(1+\cos\theta)\,d\theta\,\vec{\imath} + a\sin\theta\,d\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{dr} = a\,d\theta\left[(1+\cos\theta)\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right]$$

$$\Rightarrow ds = \|\overrightarrow{dr}\| = |a\,d\theta| \cdot \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

$ds > 0 \Rightarrow d\theta > 0$ car la courbe est orientée dans le sens des θ croissants.

$$\Rightarrow ds = a\,d\theta \cdot \sqrt{1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}}$$

$$ds = a\,d\theta \cdot \sqrt{2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$ds = a\,d\theta \cdot 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$-\pi \leq \theta \leq +\pi \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq +\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\theta}{2} \geq 0$$

$$\Longrightarrow ds = 2a\,d\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

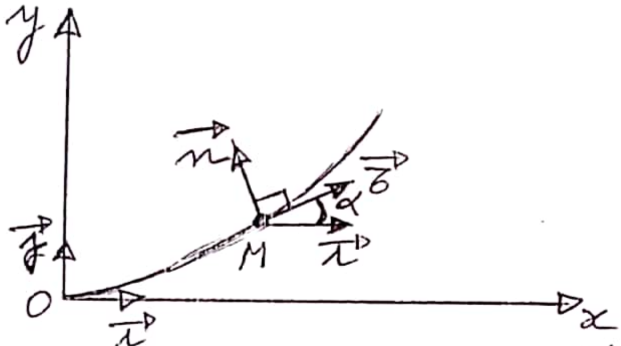
$$\frac{ds}{d\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$s = 2a \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} + K, \text{ où } K = cte$$

Or $s(\theta=0) = 0$, c'est-à-dire $K = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{s(\theta) = 4a\sin\frac{\theta}{2}}$$

3°/



$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d\vec{OM}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\vec{j}}{\frac{ds}{d\theta}}$$

$$\vec{\tau} = \frac{a(1+\cos\theta)\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{j}}{2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\vec{\tau} = \frac{2a\cos^2\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{j}}{2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\vec{\tau} = \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{j}$$

Or $\vec{\tau} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = (\widehat{\vec{i}, \vec{\tau}}) = \frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{\beta = (\widehat{\vec{i}, \vec{n}}) = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}$$

Calcul de R :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} \text{ (formule de Frénet)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} \quad (E)$$

$$\vec{n} = \cos\beta\,\vec{i} + \sin\beta\,\vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\vec{j}$$

$$\vec{n} = -\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + \cos\frac{\theta}{2}\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{j} = \frac{\vec{n}}{2}$$

$$(E) \Rightarrow \frac{\vec{n}}{2} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\boxed{R = 2\left(\frac{ds}{d\theta}\right) = 4a\cos\frac{\theta}{2}}$$

B.

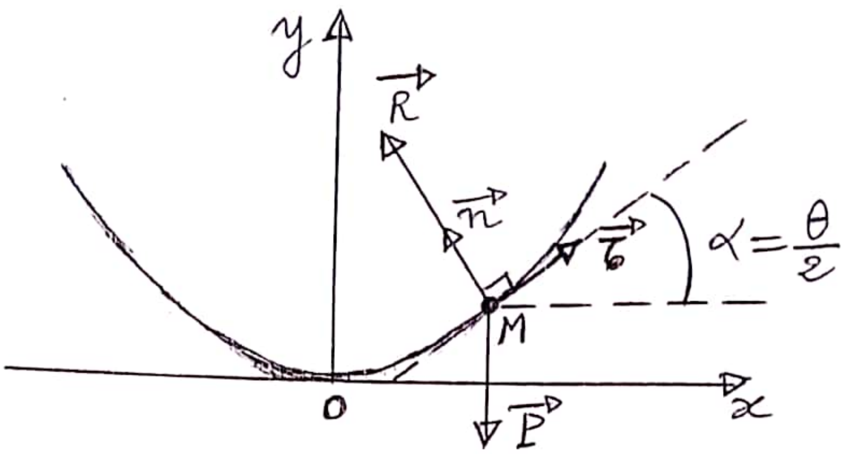
1°/ Appliquons le PFD dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{f}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} \quad (E')$$

où : $\vec{P} = m\vec{g}$ = poids de M

$\vec{R}$ = réaction de la glissière sur M

($\vec{R} \perp \vec{\tau}$, car M se déplace sans frottement)



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{\tau} + \left(\frac{v^2}{R}\right)\vec{n} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{\tau} + \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$$

$$\vec{P} = -mg\sin\frac{\theta}{2}\vec{\tau} - mg\cos\frac{\theta}{2}\vec{n}$$

$$\vec{R} = R\vec{n}$$

$$(E') \Rightarrow m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{\tau} + \frac{m}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n} = -mg\sin\frac{\theta}{2}\vec{\tau} + \left(-mg\cos\frac{\theta}{2} + R\right)\vec{n}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\dfrac{\theta}{2} & (1) \\ \dfrac{m}{R}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = -mg\cos\dfrac{\theta}{2} + R & (2) \end{cases}$$

Comme $s = 4a\sin\frac{\theta}{2}$, on a :

$$(1) \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{g}{4a}s$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}s = 0$$

Donc on a : $\boxed{\dfrac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 . s = 0, \text{ où } \omega = \sqrt{\dfrac{g}{4a}} = cte > 0}$

2°/ La solution de l'équation différentielle ci-dessus est :

$$s(t) = A\cos wt + B\sin wt$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -Aw\sin wt + Bw\cos wt$$

$$s(t=0) = s_0 \Rightarrow A = s_0$$

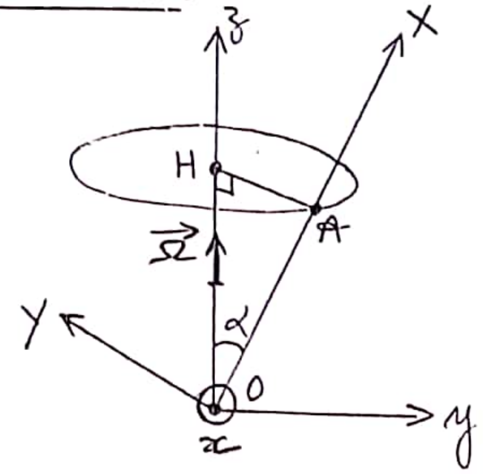
$$v(t=0) = 0 \Rightarrow Bw = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ car } w \neq 0$$

Donc on a :

$$\boxed{s(t) = s_0 \cos wt = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}} \cdot t\right)}$$

Exercice 2 :

1°)



$\mathcal{R}_G = Oxyz = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = référentiel galiléen

$\mathcal{R}_1 = OXYZ = (O, \vec{e_X}, \vec{e_Y}, \vec{e_Z})$ = référentiel non galiléen

a) Dans le référentiel mobile $\mathcal{R}_1$ le point matériel A est soumis à

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_{pp} :

$\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{OA} = -mg\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = -mg\,dz = -dE_{pp}$

$\Longrightarrow E_{pp} = mgz + cte = mgX\cos\alpha + E_{pp0}$

$E_{pp0} = E_{pp}(z=0) = E_{pp}(X=0) = cte$ arbitraire

- la réaction $\vec{R}$ de la tige, qui est normale à la tige (car A glisse sans frottement sur la tige) :

$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v_r} = 0$ car $\vec{v_r}$ est porté par la tige OX.

$\Longrightarrow \delta W = \mathcal{P} \cdot dt = 0$

Donc, si $\vec{R}$ dérive de l'énergie potentielle E_{pr}, on a :

$\delta W = -dE_{pr} = 0 \Longrightarrow E_{pr} = cte \equiv 0$

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_e}$
$= -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OA}) = +m\Omega^2 \cdot \vec{HA}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_{pi} :

$\delta W = \vec{f_{ie}} \cdot d\vec{OA} = m\Omega^2 \vec{HA} \cdot (d\vec{OH} + d\vec{HA}) = m\Omega^2 \vec{HA} \cdot d\vec{HA} = -$

$(\vec{HA} \cdot d\vec{OH} = 0$ car $\vec{HA} \perp d\vec{OH})$

$$\Rightarrow E_{pi} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 \overrightarrow{HA}^2 + cte = -\frac{1}{2} m \Omega^2 HA^2 + E_{pio}$$

$$E_{pi} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 \sin^2\alpha \cdot X^2 + E_{pio}$$

$$E_{pio} = E_{pi}(X=0) = cte \text{ arbitraire}$$

- la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ dont la puissance $\mathcal{P} = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_r = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r = 0$, car $\vec{v}_r \perp (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r)$. Donc l'énergie potentielle dont dérive $\vec{f}_{ic}$ peut être prise égale à zéro (voir cas de $\vec{R}$).

<u>Conclusion :</u>

$$E_{p1} = E_{pp} + E_{pi}$$

$$\boxed{E_{p1} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 X^2 \sin^2\alpha + mgX\cos\alpha + E_{p10}, \text{ où } E_{p10} = E_{p1}(X=0) = cte \text{ arbitraire}}$$

b) * si X_e est une position d'équilibre on a :

$$\left(\frac{dE_{p1}}{dX}\right)_{X=X_e} = 0 \Longleftrightarrow \left(-m\Omega^2 X \sin^2\alpha + mg\cos\alpha\right)_{X=X_e} = 0$$

$$\boxed{X_e = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2 \sin^2\alpha}}$$

* Etude de la stabilité de l'équilibre :

$$\left(\frac{d^2 E_{p1}}{dX^2}\right)_{X=X_e} = -m\Omega^2 \sin^2\alpha < 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{l'équilibre est instable}}$

2°/ a) * $E_{m1} = E_{p1} + E_{c1}$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2} m \dot{X}^2, \text{ car } \vec{v_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}(X\vec{e_X})\right]_{R_1} = \dot{X}\vec{e_X}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_{m1} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 X^2 \sin^2\alpha + mgX\cos\alpha + \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + E_{p10}}$$

* Equation différentielle du mouvement de A :
D'après le théorème de l'énergie mécanique :
$\frac{dE_{m1}}{dt} = P'$, P' étant la puissance des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

$$P' = P(\vec{R}) + P(\vec{f_{ic}}) = 0 + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dE_{m1}}{dt} = 0 \qquad (E_{m1} = cte)$$

$$\Longrightarrow -m\Omega^2\sin^2\alpha . \dot{X}X + mg\cos\alpha . \dot{X} + m\dot{X}\ddot{X} = 0$$

$$m\dot{X}\left(-\Omega^2\sin^2\alpha . X + g\cos\alpha + \ddot{X}\right) = 0$$

$$m\dot{X} \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{X} - \Omega^2\sin^2\alpha . X = -g\cos\alpha}$$

b) $\ddot{X} - \Omega^2\sin^2\alpha . X = -g\cos\alpha$ (1)

$X = X_p + X_s$

X_p = solution particulière de (1)

$$X_p = \frac{-g\cos\alpha}{-\Omega^2\sin^2\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{\Omega^2\sin^2\alpha} = X_e$$

X_s = solution générale de l'équation sans 2nd membre :

$$\ddot{X} - \Omega^2\sin^2\alpha . X = 0 \quad (2)$$

Equation caractéristique de (2) : $r^2 - \Omega^2 \sin^2\alpha = 0$

$\Leftrightarrow r^2 = \Omega^2 \sin^2\alpha \Leftrightarrow r = \pm \Omega \sin\alpha$

$\Rightarrow X_S = c_1 e^{\Omega \sin\alpha . t} + c_2 e^{-\Omega \sin\alpha . t}$, où c_1 et c_2 sont des cte.

$\Rightarrow X = c_1 e^{\Omega \sin\alpha . t} + c_2 e^{-\Omega \sin\alpha . t} + X_e$

$X(t=0) = 2X_e \Leftrightarrow c_1 + c_2 + X_e = 2X_e \Leftrightarrow c_1 + c_2 = X_e$ (a_1)

$\dot{X}(t=0) = 0 \Leftrightarrow \left(c_1 \Omega \sin\alpha\, e^{\Omega \sin\alpha . t} - c_2 \Omega \sin\alpha\, e^{-\Omega \sin\alpha . t}\right)_{t=0} = 0$

$\Leftrightarrow c_1 \Omega \sin\alpha - c_2 \Omega \sin\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \Omega \sin\alpha (c_1 - c_2) = 0$

$\Leftrightarrow c_1 - c_2 = 0$, car $\Omega \sin\alpha \neq 0$ (a_2)

(a_1) et (a_2) $\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{X_e}{2}$

$\Rightarrow X = X_e \left(1 + \frac{e^{\Omega \sin\alpha . t} + e^{-\Omega \sin\alpha . t}}{2}\right)$

$$\boxed{X = X_e \left[1 + ch(\Omega \sin\alpha . t)\right]}$$

$\Rightarrow$ le point matériel A s'éloigne du point origine O.

c) D'après b) on a :

$X = c_1' e^{\Omega \sin\alpha . t} + c_2' e^{-\Omega \sin\alpha . t} + X_e$

$X(t=0) = \frac{X_e}{2} \Leftrightarrow c_1' + c_2' + X_e = \frac{X_e}{2} \Leftrightarrow c_1' + c_2' = -\frac{X_e}{2}$ (a_1')

$\dot{X}(t=0) = 0 \Leftrightarrow c_1' - c_2' = 0$ (a_2')

(a_1') et (a_2') $\Rightarrow c_1' = c_2' = -\frac{X_e}{4}$

$$\Rightarrow X = X_e - \frac{X_e}{\varepsilon}\left(\frac{e^{\Omega \sin\alpha . t} + e^{-\Omega \sin\alpha . t}}{2}\right)$$

$$\boxed{X = X_e\left[1 - \frac{ch(\Omega \sin\alpha . t)}{\varepsilon}\right]}$$

$\Rightarrow$ le point matériel A se rapproche du point origine O.

<u>Remarque</u> : b) et c) confirment le fait que X_e est une position d'équilibre instable.

3°/a) * Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_G$:

$E_m = E_p + E_c$

- Calcul de E_p :

Dans $\mathcal{R}_G$ le point matériel A est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = mgz + cte = mgX\cos\alpha + cte$
- la réaction $\vec{R}$ de la tige, qui travaille, mais ne dérive pas d'une énergie potentielle. En effet, si $\vec{R}$ dérivait d'une énergie potentielle E_{pr}, on aurait :

$$\delta W = \vec{R} . d\vec{OA} = (R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$
$$= R_x dx + R_y dy + R_z dz = -d(-R_x x - R_y y - R_z z) = -dE_{pr}$$

où R_x, R_y et R_z seraient constants, c'est-à-dire $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = \vec{cte}$, ce qui est impossible car $\vec{R}$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_G$.

$\Rightarrow E_p = E_{pp} = mgX\cos\alpha + E_{p0}$,

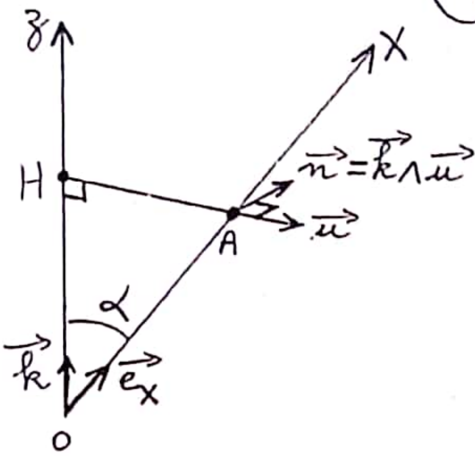
où $E_{p0} = E_p(X=0) = cte$ arbitraire

• Calcul de E_c :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_a^2.$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left[\frac{d}{dt}(X\vec{e}_X)\right]_{\mathcal{R}_1} = \dot{X}\vec{e}_X$$



$$\vec{v}_e = \vec{\Omega}\wedge\vec{OA} = \Omega\vec{k}\wedge X\vec{e}_X$$

$$\vec{v}_e = \Omega X\vec{k}\wedge(\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\,\vec{u}) = \Omega X\sin\alpha\,\vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \dot{X}\vec{e}_X + \Omega X\sin\alpha\,\vec{n}$$

$(\vec{e}_X, \vec{n})$ = base orthonormée $\Rightarrow v_a^2 = \dot{X}^2 + \Omega^2X^2\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \Omega^2X^2\sin^2\alpha)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \Omega^2X^2\sin^2\alpha) + mgX\cos\alpha + E_{p0}}$$

Si nous nous plaçons dans le cas où le point matériel A s'éloigne du point origine O on a :

$$X = X_e\left[1 + ch(\Omega\sin\alpha.t)\right]$$

$$\dot{X} = X_e\Omega\sin\alpha.\,Sh(\Omega\sin\alpha.t)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[X_e^2\Omega^2\sin^2\alpha.\,Sh^2\Omega\sin\alpha t + \Omega^2\sin^2\alpha.X_e^2(1 + 2ch\Omega\sin\alpha t + ch^2\Omega\sin\alpha t)\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha\left[\underbrace{sh^2\Omega\sin\alpha t + ch^2\Omega\sin\alpha t}_{2ch^2\Omega\sin\alpha t - 1} + 1 + 2ch\Omega\sin\alpha t\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha(2ch^2\Omega\sin\alpha t + 2ch\Omega\sin\alpha t)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha(2ch^2\Omega\sin\alpha t + 2ch\Omega\sin\alpha t) + \underbrace{mg\cos\alpha}_{X_e\Omega^2\sin^2\alpha}.X_e(1 + ch\Omega\sin\alpha t) + E_{p0}$$

$$E_m = mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha\cdot \operatorname{ch}\Omega\sin\alpha t\left(1+\operatorname{ch}\Omega\sin\alpha t\right)$$
$$+\,mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha\left(1+\operatorname{ch}\Omega\sin\alpha t\right)+E_{p0}$$

$$E_m = mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha\left[1+\operatorname{ch}(\Omega\sin\alpha\cdot t)\right]^2+E_{p0}$$

$$\boxed{E_m = m\Omega^2\sin^2\alpha\cdot X^2+E_{p0}}$$

* La puissance du moteur : $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}(\vec{R})$

Or $\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}' = \mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R}\cdot\vec{v_a}$, car $\vec{R}$ est ici la seule force qui ne dérive pas d'une énergie potentielle.

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{dE_m}{dt} = 2mX_e^2\Omega^2\sin^2\alpha\left[1+\operatorname{ch}(\Omega\sin\alpha\cdot t)\right]\cdot\Omega\sin\alpha\cdot\operatorname{sh}(\Omega\sin\alpha\cdot t)$$

$$\boxed{\mathcal{P}_m = 2mX_e^2\Omega^3\sin^3\alpha\cdot\operatorname{sh}(\Omega\sin\alpha\cdot t)\cdot\left[1+\operatorname{ch}(\Omega\sin\alpha\cdot t)\right]}$$

b) $\vec{f_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v_r} = -2m\Omega\vec{k}\wedge(\dot{X}\vec{e_X})$

$\vec{f_{ic}} = -2m\Omega\dot{X}\,\vec{k}\wedge(\cos\alpha\,\vec{k}+\sin\alpha\,\vec{u}) = -2m\Omega\dot{X}\sin\alpha\cdot\vec{n}$

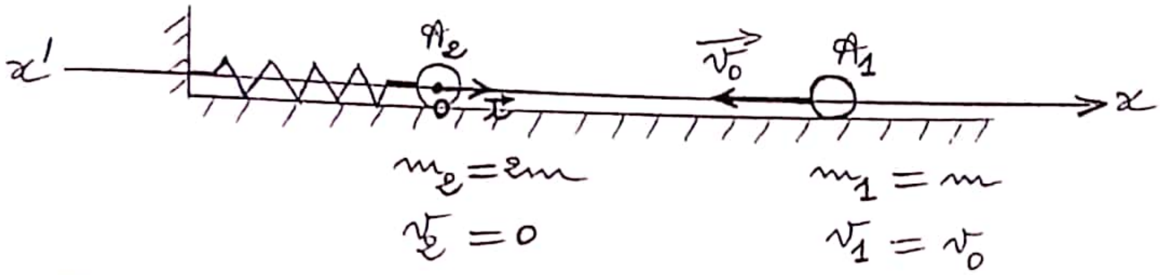
$\mathcal{P}_m = \dfrac{dE_m}{dt} = 2m\Omega^2\sin^2\alpha\cdot X\dot{X}$

$\mathcal{P}_m = (2m\Omega\dot{X}\sin\alpha)\cdot(\Omega X\sin\alpha)$

$\mathcal{P}_m = \left[(2m\Omega\dot{X}\sin\alpha)\vec{n}\right]\cdot\left[(\Omega X\sin\alpha)\vec{n}\right]$

$$\boxed{\mathcal{P}_m = -\vec{f_{ic}}\cdot\vec{v_e} = -\vec{f_{ic}}\cdot(\vec{\Omega}\wedge\vec{OA})}$$

Exercice 3 :



1°/ La durée du choc étant brève on a :

$$\vec{P}_{\text{avant le choc}} = \vec{P}_{\text{après le choc}}$$

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

$$m\vec{v_0} = m\vec{v_1}' + 2m\,\vec{v_2}' \quad (1)$$

Le choc étant direct on a :

$$\vec{v_0} = v_{0x}\,\vec{i}, \quad \vec{v_1}' = v'_{1x}\,\vec{i}, \quad \vec{v_2}' = v'_{2x}\,\vec{i}$$

$$(1) \Rightarrow m\,v_{0x} = m\,v'_{1x} + 2m\,v'_{2x}$$

$$v_{0x} = v'_{1x} + 2\,v'_{2x} \quad (1')$$

Le choc étant parfaitement élastique on a :

$$\frac{1}{2}m\,v_0^2 = \frac{1}{2}m\,v_1'^2 + \frac{1}{2}(2m)\,v_2'^2$$

$$v_{0x}^2 = v_{1x}'^2 + 2\,v_{2x}'^2$$

$$\Rightarrow \left(v'_{1x} + 2v'_{2x}\right)^2 = v_{1x}'^2 + 2\,v_{2x}'^2 \text{, compte tenu de } (1').$$

$$v_{1x}'^2 + 4\,v_{2x}'^2 + 4\,v'_{1x}\,v'_{2x} = v_{1x}'^2 + 2\,v_{2x}'^2$$

$$2\,v_{2x}'^2 = -4\,v'_{1x}\,v'_{2x}$$

$$v'_{2x} = -2\,v'_{1x} \text{, car } v'_{2x} \neq 0$$

$$(1') \Rightarrow v_{0x} = v'_{1x} - 4v'_{1x} = -3v'_{1x}$$

$$\Rightarrow v'_{1x} = -\frac{1}{3}v_{0x} = -\frac{1}{3}(-v_0) = \frac{1}{3}v_0$$

($v'_{1x} > 0 \Rightarrow A_1$ rebrousse chemin après le choc).

$$v'_1 = \|\vec{v}'_1\| = \|v'_{1x}\vec{\imath}\| = |v'_{1x}| = \frac{1}{3}v_0$$

$$\boxed{v'_1 = \frac{1}{3}v_0}$$

$$v'_{2x} = -2v'_{1x} = -\frac{2}{3}v_0$$

($v'_{2x} < 0 \Rightarrow$ le ressort se comprime juste après le choc)

$$v'_2 = \|\vec{v}'_2\| = |v'_{2x}| = \frac{2}{3}v_0$$

$$\boxed{v'_2 = \frac{2}{3}v_0}$$

Calcul de a_1 :

L'application de la RFD au système A_2 après le choc donne

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m_2\vec{a}$ ($\vec{R} \perp x'x$ car il n'y a pas de frottement)

$$\Rightarrow P_x + R_x + T_x = 0 + 0 - kx = m_2 a_x = m_2\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m_2}x = 0$$

Equation différentielle d'un mouvement oscillatoire de pulsation $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ et d'équation horaire $x = a_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$.

$$x(t=0) = 0 \iff a_1 \cos\varphi = 0 \iff \cos\varphi = 0 \iff \sin\varphi = \pm 1$$
$$(\text{où } a_1 \neq 0)$$

$$\dot{x}(t=0) = v'_{2x} \iff -a_1 \omega_1 \sin\varphi = -\frac{2}{3} v_0 \iff \sin\varphi = \frac{2 v_0}{3 a_1 \omega_1} > 0$$

$$\Longrightarrow \sin\varphi = 1 = \frac{2 v_0}{3 a_1 \omega_1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{v_0}{\omega_1}}$$

<u>Autre méthode :</u>

L'énergie mécanique de l'ensemble (ressort + A_2) est constante après le choc :

$$E_m = E_{pp} + E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = cte$$

$$(E_{pp} = m_2 g z + cte \equiv 0 \text{ car } z = cte).$$

$$\Longrightarrow E_m(x=0) = E_m(x = a_1)$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k a_1^2$$

$$\frac{1}{2}(2m)\frac{4}{9} v_0^2 = \frac{1}{2} k a_1^2$$

$$a_1^2 = \left(\frac{4 m v_0^2}{9}\right)\left(\frac{2}{k}\right) = \left(\frac{4 v_0^2}{9}\right)\left(\frac{m_2}{k}\right) = \frac{4 v_0^2}{9 \omega_1^2}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{2}{3} \frac{v_0}{\omega_1}}$$

2) $\vec{P} = \vec{P}'$

$$m\vec{v_0} = (m_1 + m_2)\vec{v}' = 3m\,\vec{v}'$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{1}{3}\vec{v_0}$$

$$\boxed{v' = \frac{1}{3}v_0}$$

Calcul de a_2 :

L'énergie mécanique de l'ensemble (ressort + A_1 + A_2) est constante après le choc :

$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(3m)v^2 = cte$$

$$\Rightarrow E_m(x=0) = E_m(x = a_2)$$

$$\frac{3}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}ka_2^2$$

$$\frac{1}{6}mv_0^2 = \frac{1}{2}ka_2^2$$

$$a_2^2 = \left(\frac{mv_0^2}{6}\right)\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{v_0^2}{9}\left(\frac{3m}{k}\right) = \frac{v_0^2}{9\omega_2^2}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{3}\,\frac{v_0}{\omega_2}}$$

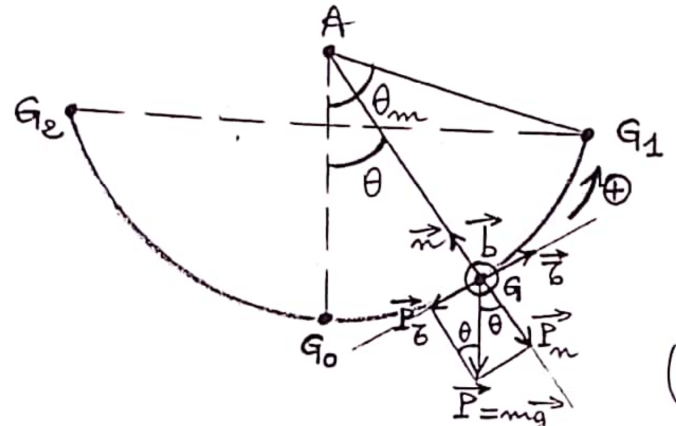
Calcul de Q :

$$Q = -\Delta E_c = -\left[\frac{1}{2}(3m)v'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right] = -\left[\frac{1}{6}mv_0^2 - \frac{3}{6}mv_0^2\right.$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}mv_0^2}$$

Exercice 4 :

1°/ Le centre de gravité G du pendule pesant va osciller entre deux points G_1 et G_2, de part et d'autre de G_0, position de G lorsque le pendule est en équilibre stable.



$AG = a$
$m =$ masse de (C)
$(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}) =$ base orthonormée directe.

La trajectoire $\overset{\frown}{G_1G_2}$ de G est décrite dans le plan vertical $(\vec{\tau}, \vec{n})$. L'axe de rotation Δ est horizontal, donc perpendiculaire au plan vertical $(\vec{\tau}, \vec{n})$; $\vec{b}$ est son vecteur unitaire.
Le pendule est un solide en rotation autour de l'axe Δ. Donc on a :

$$\mathcal{M}^t_\Delta \vec{P} = I\ddot{\theta}, \text{ où } I = \text{moment d'inertie du pendule par rapport à } \Delta.$$

$$\mathcal{M}^t_\Delta \vec{P} = \left(\mathcal{M}^t_A \vec{P}\right).\vec{b} = \left(\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}\right).\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{P}_\tau + \vec{P}_n\right) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}_\tau = \left(-a\vec{n}\right) \wedge \left(-mg\sin\theta\,\vec{\tau}\right)$$
$$= mga\sin\theta.\left(\vec{n} \wedge \vec{\tau}\right)$$
$$= -mga\sin\theta.\vec{b}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^t_\Delta \vec{P} = -mga\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga}{I}\sin\theta = 0$$

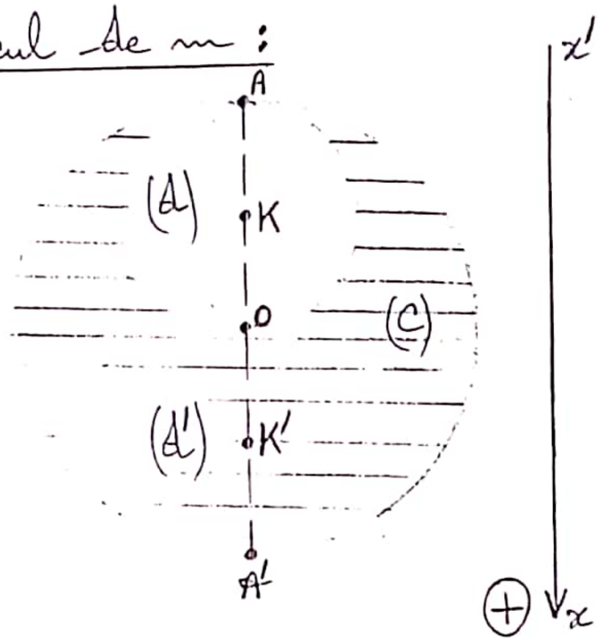
On a des oscillations de faible amplitude ($\theta_m \leq 10°$). Donc : θ petit et $\sin\theta \simeq \theta$.

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga}{I}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_m \cos(\omega t - \varphi), \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_A = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}}$$

Calcul de m :



Les masses sont proportionnelles aux aires :

$$\frac{M}{m(d)} = \frac{\pi R^2}{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 4$$

$$\Rightarrow m(d) = \frac{M}{4} = m(d')$$

$$m(C) = m(D) - m(d) = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}$$

$$\boxed{m = m(C) = \frac{3M}{4}}$$

Calcul de a :

Le centre d'inertie G de (C) est situé sur le segment $[AA']$.
(C) est formé du disque (d'), symétrique de (d) par rapport à O, et du reste de (C). On a donc :

$$m(C)\cdot\overrightarrow{AG} = m(d')\cdot\overrightarrow{AK'} + [m(C) - m(d')]\cdot\overrightarrow{AO}$$

$$\frac{3M}{4}\overrightarrow{AG} = \frac{M}{4}\overrightarrow{AK'} + \frac{M}{2}\overrightarrow{AO}$$

En projetant sur l'axe x'x on a :

$$\frac{3M}{4}\cdot AG = \frac{M}{4}\cdot AK' + \frac{M}{2}\cdot AO$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}\cdot\frac{3R}{2} + \frac{1}{2}R$$

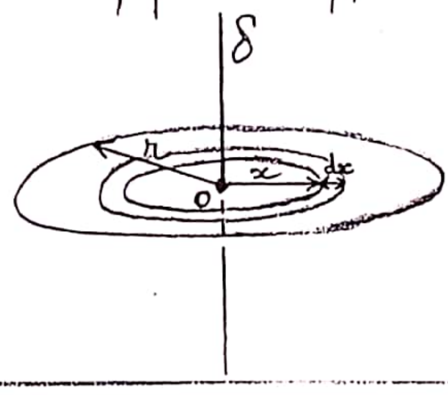
$$\Longrightarrow a = \frac{R}{2} + \frac{2}{3}R$$

$$\boxed{a = \frac{7R}{6}}$$

Calcul de I :

$$I(D) = I(C) + I(d) \Longrightarrow I(C) = I(D) - I(d)$$

Pour déterminer I(D) et I(d), calculons le moment d'inertie i d'un disque de masse m, de centre O et de rayon r, par rapport à son axe δ :



ρ = masse par unité de surface

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi r^2} = cte$$

$$dm = \rho\, dS = \rho . 2\pi x\, dx$$

$$i = \int_{disque} x^2\, dm = 2\pi\rho \int_0^r x^3\, dx = 2\pi\rho . \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$i = 2\pi\rho . \frac{r^4}{4} = \pi\rho \frac{r^4}{2} = \pi \frac{m}{\pi r^2} \frac{r^4}{2}$$

$$i = \frac{1}{2} m r^2$$

$I(D)$ = moment d'inertie de (D) par rapport à Δ

= moment d'inertie de (D) par rapport à l'axe de (D) + $[m(D) . OA^2]$ (théorème d'Huygens)

$$= \frac{1}{2} MR^2 + MR^2$$

$$= \frac{3}{2} MR^2$$

De même : $I(d) = \frac{1}{2} \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$$= \frac{3}{32} MR^2$$

$\longrightarrow$

$$\Longrightarrow I = I(C) = \frac{3}{2}MR^2 - \frac{3}{32}MR^2 = \frac{48}{32}MR^2 - \frac{3}{32}MR^2$$

$$\boxed{I = \frac{45}{32}MR^2}$$

Donc on a :

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{45}{32}MR^2}{\frac{3M}{4}\cdot g\cdot\frac{7R}{6}}}$$

$$\boxed{T_A = \pi\sqrt{\frac{45}{7}\cdot\frac{R}{g}}}$$

$$\Longrightarrow T_A = f(R, g)$$

2/ Un battement est un aller ou un retour simple de (C). C'est donc une demi-oscillation. Sa durée est $T_A/2$.

. (C) "bat la seconde" si : $\frac{T_A}{2} = 1s$

$$\Longrightarrow T_A = \pi\sqrt{\frac{45}{7}\cdot\frac{R}{g}} = 2s$$

$$\Longrightarrow \pi^2\left(\frac{45}{7}\frac{R}{g}\right) = 4$$

$$\Longrightarrow R = \frac{28g}{45\pi^2} = \frac{28\times 10}{45\pi^2}$$

$$\boxed{R = 0{,}63\,m = 63\,cm}$$