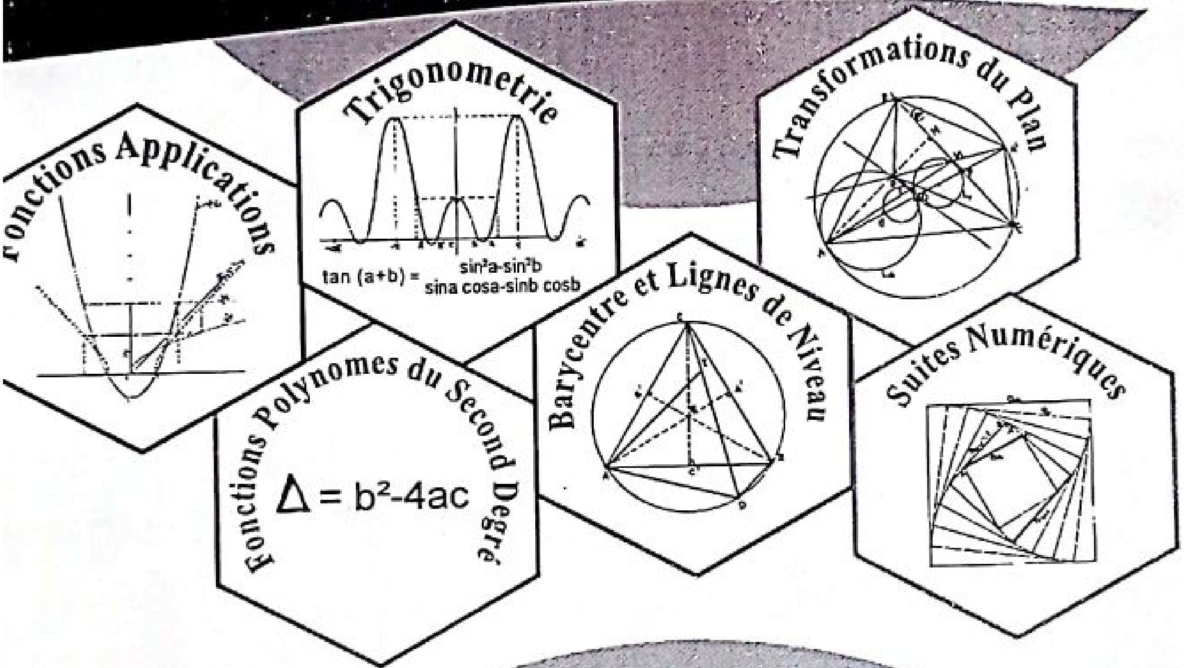
Collection K^2 Mathématiques

FONCTIONS - APPLICATIONS
FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE
TRIGONOMETRIE
BARYCENTRE ET LIGNES DE NIVEAU
TRANSFORMATIONS DU PLAN
SUITES NUMERIQUES



Deuxième Edition : Octobre 2018

Revue Corrigée et Améliorée

***Classes*: Premières : C D E F Ti /1**

Tome 1

Auteur :
KOUEVIDJIN M. Kankoé
Professeur de Mathématiques
90 16 93 00 / 90 72 10 72 / 91 82 84 61
99 54 56 40 / 99 09 43 63
E-mail: koehyppo@yahoo.fr

K^2 au Service de l'Enseignement des Mathématiques

Enregistré a BUTODRA sous le numero : OL 5889

AVANT PROPOS

Chers Amis,

J'ai été interpellé par les cris et les plaintes divers des acteurs de l'enseignement de cette matière sensible et omniprésente que sont les **MATHEMATIQUES.** Je ne saurai rester indifférent aux difficultés rencontrées par les uns et les autres.

C'est pourquoi, étant moi-même passionné de la chose, j'ai bien voulu concevoir et mettre à disposition ce document. Oeuvre de plusieurs nuits d'insomnie, de privations, de déterminations et d'amour du travail bien fait, ce document est ma modeste contribution à la démystification de la mathématique dans les séries scientifiques et industrielles du lycée. Un accent particulier a été mis sur la **REDACTION** et la **PRESENTATION** qui entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies aux examens.

La deuxième édition du document **COLLECTION K^2**, qui est une nette amélioration de la première, traite uniquement le programme en vigueur.

Je remercie tous les collègues professeurs de Mathématiques qui ont relu et critiqué ce document, pour l'aide qu'ils ont apportée à la confection de cet ouvrage.

J'espère que cet ouvrage répondra au mieux à l'attente des utilisateurs et à leurs besoins.

C'est avec reconnaissance que j'accueillerai les différentes remarques, critiques et suggestions qu'ils voudront bien m'adresser et je les en remercie par avance.

L'AUTEUR

KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé

PREFACE

Le côté pratique d'un bon ouvrage de mathématiques, destiné aux apprenants, se caractérise par le fait que lorsqu'ils l'ouvrent à une page quelconque, ils y trouvent quelque chose d'intéressant. La nouvelle édition de la **COLLECTION K²** que vous avez dans vos mains répond à ce critère. Elle vous offre plus de clarté e d'enrichissement, tant sur le fond que sur la forme. Cet ouvrage est d'un contenu revu, amélioré et enrichi des éditions antérieures. Le candidat des séries scientifiques et industrielles à l'examen du Baccalauréat 1ère partie au Togo, pourra l'exploiter pour se préparer sérieusement à affronter l'épreuve de Mathématiques. Autant dire que son contenu est conforme au programme officiel d'enseignement des mathématiques en vigueur au Togo et dans certains pays de la sous-région. Les débordements constatés sont anodins et profitent plutôt à l'apprenant qui veut renforcer les notions de base pour la classe de Terminale.

Les cours proposés par l'auteur offrent au lecteur un accès rapide aux outils didactiques que sont les définitions, les propriétés, les théorèmes ainsi que leurs applications. Ces cours bien que fournis ne se substituent guère à ceux proposés en classe, mais en constituent des rappels et compléments qui peuvent toujours aider à fixer et à clarifier certaines notions.

Les travaux dirigés (TD) aident, par leur variété, à la maîtrise des savoirs et des savoir-faire du programme officiel. Les nombreux exercices corrigés offrent à l'apprenant des occasions indéniables d'entraînement et d'approfondissement des acquisitions. Ces exercices de teneur graduelle constituent un réservoir de ressources à la disposition des enseignants de Mathématiques des classes de premières scientifiques et industrielles qui pourront s'en inspirer pour les différentes évaluations. Etant entendu que toute évaluation doit être précédée d'un entraînement conséquent.

En somme, cette nouvelle édition de la **COLLECTION K²** est bien élaborée et les usagers de cet ouvrage éprouveront beaucoup de plaisir à l'exploiter.

KOSSOU Kokou Jules
Inspecteur de l'Education Nationale,
chargé de l'enseignement des Mathématiques.

DEDICACE

A LA MEMOIRE DE MA GRAND - MERE

Yawo Omassayé ABALO

QUI A FAIT DE MOI CE QUE JE SUIS AUJOURD'HUI

Chapitre 1

FONCTIONS-APPLICATIONS

FONCTIONS-APPLICATIONS

I./ FONCTIONS

1./ Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle fonction de E vers F, toute relation définie de E vers F qui à tout élément de E on associe au plus un (0 ou 1) élément de F.

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de la fonction et F est l'ensemble d'arrivée.

Les éléments de E sont appelés antécédants et ceux de F images par la fonction.

Notation.

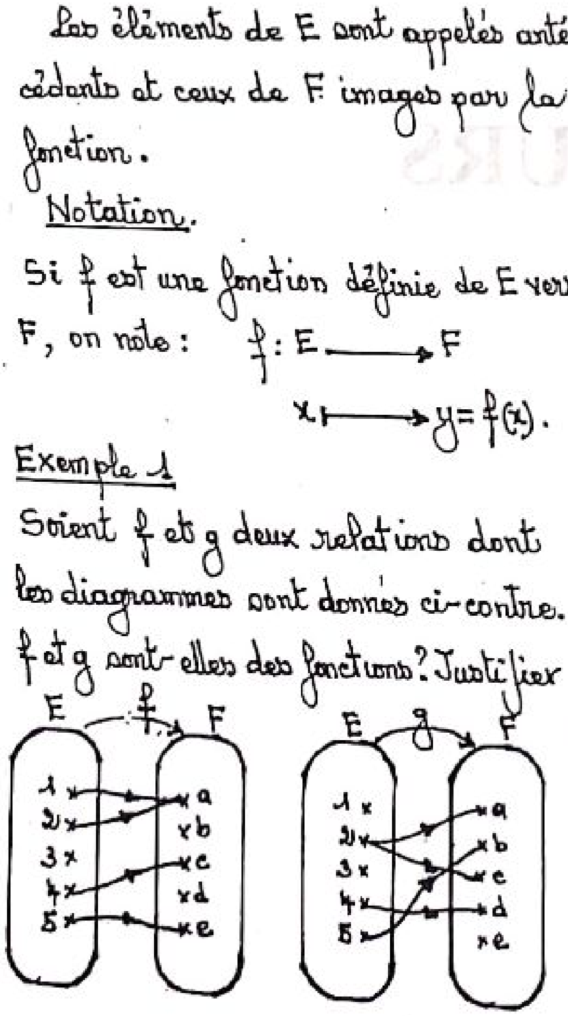
Si f est une fonction définie de E vers F, on note :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y = f(x).$$

Exemple 1

Soient f et g deux relations dont les diagrammes sont donnés ci-contre.

f et g sont-elles des fonctions? Justifier

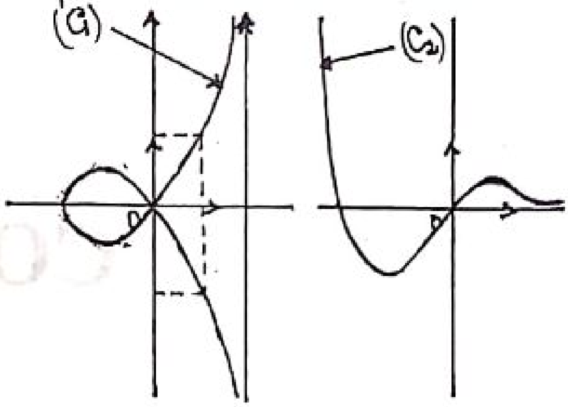


Résolution

- f est une fonction car il n'existe aucun élément de E qui admet plus d'une image dans F
- g n'est pas une fonction car l'élément 2 de E admet deux images dans F.

Exemple 2.

Soient R_1 et R_2 deux relations dont les courbes représentatives (C_1) et (C_2) respectives sont données ci-dessous



R_1 et R_2 sont-elles des fonctions?

Résolution

R_1 n'est pas une fonction par contre R_2 est une fonction.

Exemple 3

- La relation de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe y tel que $x^2 - y^2 = 1$ n'est pas une fonction car l'élément $x = \sqrt{2}$ admet deux images $y = -1$ et $y = 1$
- Par contre la relation de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ qui à x associe y tel que $x^2 - y^2 = 1$ est une fonction.

2/ Ensemble de définition

Soit f une fonction définie de E vers F. On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de E qui ont une image dans F par f. On le note $\mathcal{D}f$.

$$\boxed{\mathcal{D}f = \{x \in E \,/\, \exists\, y \in F \text{ et } f(x) = y\}}$$

Remarque : $\mathcal{D}f \subset E$

NB: Il faut toujours faire attention dans la détermination du domaine de définition d'une fonction, lorsque son ensemble de départ ou d'arrivée est différent de $\mathbb{R}$.

Exercice d'application

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x-5}$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{2x-6}$

$h :]-4;6[\longrightarrow [0;1]$, $x \longmapsto x^2-3$

$k : \mathbb{R}^- \longrightarrow]2;+\infty[$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

Résolution

Déterminons le domaine de définition

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x-5}$

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-5 \neq 0 \text{ et } x^2+4x+3 \geq 0\}$

Posons $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x+2-1)(x+2+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		-1		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	

$$\boxed{\mathcal{D}f =]-\infty;-3] \cup [-1;5[\cup]5;+\infty[}$$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto \dfrac{x-1}{2x-6}$

$\mathcal{D}g = \left\{x \geq 0 \,/\, 2x-6 \neq 0 \text{ et } \dfrac{x-1}{2x-6} \geq 0\right\}$

Posons $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	0		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{2x-6}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{\mathcal{D}g = [0;1] \cup]3;+\infty[}$$

$h :]-4;6[\longrightarrow [0;1]$.

$x \longmapsto x^2-3$

$\mathcal{D}h = \{x \in]-4;6[\,/\, 0 \leq x^2-3 \leq 1\}$

$0 \leq x^2-3 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{3}$ ou $x \geq \sqrt{3}$.

$x^2-3 \leq 1 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Posons $E =]-4;6[$ $\quad S_1 = [-2;2]$

$S_2 =]-\infty;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};+\infty[$

$D_h = E \cap S_1 \cap S_2$

$\boxed{D_h = [-2;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};2]}$

$k : \mathbb{R}^- \longrightarrow]2;+\infty[$

$x \longmapsto \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

$D_k = \left\{x \leq 0 / x-1 \neq 0 \text{ et } \dfrac{x^2-x-2}{x-1} > 2\right\}$

Posons $\dfrac{x^2-x-2}{x-1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x}{x-1} > 0$ (a)

or $x \leq 0 \Leftrightarrow x-1 < -1 < 0$

(a) entraine donc : $x^2-3x < 0$

Ce qui donne $x \in]0;3[-\{1\}$.

Posons $E =]0;1[\cup]1;3[$

$D_k = \mathbb{R}^- \cap E = \emptyset$ $\quad \boxed{D_k = \emptyset}$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f et D_g.

- $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\times g} = D_{\alpha f+\beta g} = D_f \cap D_g$.
- $D_{\sqrt{f}} = \{x \in D_f / f(x) \geq 0\}$
- $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f / f(x) \neq 0\}$
- $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D \cap D_g / g(x) \neq 0\}$

3/ Composition de fonctions

a/ Définition

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$

On appelle composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie de E vers G par : $x \in E$, $f \in F$ et $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$

b/ Domaine de définition

$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_f\}$

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer D_f, D_g, $D_{g\circ f}$, $D_{f\circ g}$, $D_{f\circ f}$ et $D_{g\circ g}$ dans chacun des cas suivants :

1/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{2x-3}$

2/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^-$, $x \longmapsto \dfrac{2}{x^2-4}$

Résolution

1/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{2x-3}$

Déterminons D_f, D_g, $D_{g\circ f}$, $D_{f\circ g}$, $D_{f\circ f}$ et $D_{g\circ g}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\}$; Posons $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$\boxed{D_f = [1 ; +\infty[}$$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x-3 \neq 0\}$

Posons $2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in [1 ; +\infty[$ et $f(x) \neq \frac{3}{2}\}$

Posons $f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x-1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$

$$\boxed{D_{g \circ f} = \left[1 ; \frac{13}{4}\right[\cup \left]\frac{13}{4} ; +\infty\right[}$$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g$ et $g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{3}{2}$ et $g(x) \geq 1\}$

$g(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{2x-3} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \leq 2$

$$\boxed{D_{f \circ g} = \left]\frac{3}{2} ; 2\right]}$$

$D_{f \circ f} = \{x \in D_f$ et $f(x) \in D_f\}$

$= \{x \geq 1$ et $f(x) \geq 1\}$

$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$\boxed{D_{f \circ f} = [2 ; +\infty[}$$

$D_{g \circ g} = \{x \in D_g$ et $g(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{3}{2}$ et $g(x) \neq \frac{3}{2}\}$

Posons $g(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-3} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2x-2 = 6x-9 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

$$\boxed{D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2} ; \frac{7}{4}\right\}}$$

2/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^-$

$x \longmapsto \frac{x}{x-1}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{2}{x^2-4}$

<u>Déterminons D_f, D_g, $D_{g \circ f}$, $D_{f \circ g}$ $D_{f \circ f}$ et $D_{g \circ g}$.</u>

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0$ et $\frac{x}{x-1} \geq 0\}$

Posons $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\frac{x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$

$$\boxed{D_f =]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[}$$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0$ et $\frac{2}{x^2-4} \leq 0\}$

$\frac{2}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

$$\boxed{D_g =]-2 ; 2[}$$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$

$= \{x \leq 0$ ou $x > 1$ et $-2 < f(x) < 2\}$

$f(x) > -2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-1} > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ ou $x > 1$

$f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 2$

Posons $I_1 = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[\cup]1 ; +\infty[$

$I_2 =]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

$D_{g \circ f} = D_f \cap I_1 \cap I_2$

$$\boxed{D_{g \circ f} =]-\infty ; 0] \cup]2 ; +\infty[}$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2 \text{ et } (g(x) \leq 0 \text{ ou } g(x) > 1)\}$$

$g(x) \leq 0 \iff -2 < x < 2$

$g(x) > 1 \iff \frac{2}{x^2-4} - 1 > 0 \iff \frac{-x^2+6}{x^2-4} > 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		-2		2		$\sqrt{6}$	$+\infty$
$-x^2+6$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
x^2-4	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{-x^2+6}{x^2-4}$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$

$g(x) > 1 \iff -\sqrt{6} < x < -2$ ou $2 < x < \sqrt{6}$.

Posons $I_1 =]-\sqrt{6};-2[\cup]2;\sqrt{6}[$

$$D_{f\circ g} = D_g \cap I_1 = \emptyset$$

$$\boxed{D_{f\circ g} = \emptyset}$$

$$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \text{ et } (f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) > 1)\}$$

$f(x) \leq 0 \iff \frac{x}{x-1} \leq 0 \iff 0 \leq x < 1$

$f(x) > 1 \iff \frac{x}{x-1} > 1 \iff \frac{1}{x-1} > 0 \iff x > 1$

Posons $I_1 = [0;1[$ $\quad I_2 =]1;+\infty[$

$$D_{f\circ f} = D_f \cap I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

$$\boxed{D_{f\circ f} = \emptyset}$$

$$D_{g\circ g} = \{x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2 \text{ et } -2 < g(x) < 2\}$$

$g(x) > -2 \iff \frac{2}{x^2-4} > -2 \iff \frac{x^2-3}{x^2-4} > 0$

$\iff x \in I_1 =]-\infty;-2[\cup]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\cup]2;+\infty[$

$g(x) < 2 \iff \frac{2}{x^2-4} < 2 \iff \frac{x^2-5}{x^2-4} > 0$

$\iff x \in I_2 =]-\infty;-\sqrt{5}[\cup]-2;2[\cup]\sqrt{5};+\infty[$

$$D_{g\circ g} = D_g \cap I_1 \cap I_2 =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$$

$$\boxed{D_{g\circ g} =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[}$$

4/ Restriction d'une fonction

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction et soit $A \subset E$.

On appelle restriction de f sur A, la fonction $g : A \longrightarrow F$

$$x \longmapsto g(x) = f(x).$$

On note $g = f/A$.

Exemple.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |x^2-4|$

$D_f = \mathbb{R}$; $\forall x \in [-2;2]$, $x^2-4 \leq 0$

$\implies |x^2-4| = 4-x^2$

Posons $A = [-2;2]$

$f/A : [-2;2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 4-x^2$

5/ Prolongement d'une fonction

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction et B un ensemble tel que $E \subset B$.

On appelle prolongement de f à B la fonction h définie de B vers F telle que $f = h/E$.

Exemple.

$f : \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{2x^2 - 2x}{x^3 - x}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$, $f(x) = \frac{2x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$= \frac{2}{x+1}$

$h : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{2}{x+1}$ h est le prolongement de f à $\mathbb{R} - \{-1\}$

6./ Egalité et Coïncidence de deux fonctions

a./ Egalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont respectivement Df et Dg. Les fonctions f et g sont égales ssi :

$Df = Dg$ et $\forall x \in Df$, $f(x) = g(x)$.

b./ Coïncidence de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions de domaines de définition respectifs Df et Dg.

Soit A une partie de $Df \cap Dg$

On dit que f et g coïncident sur A ssi : $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, les fonctions considérées sont-elles égales ?

a./ $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{5}{x^2 - x - 6}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}$

b./ $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x+1}{|x+1|}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}$

c./ $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\quad$ $x \longmapsto x + 2$

Résolution

a./ $Df_1 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 6 \neq 0\}$

Posons $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$

$Df_1 = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$.

$Dg_1 = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0\}$

Posons $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$Dg_1 = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$.

$Df_1 = Dg_1$.

De plus $\forall x \in Dg_1$, $g_1(x) = \frac{x+2-x+3}{(x-3)(x+2)}$

$g_1(x) = \frac{5}{x^2 - x - 6} = f_1(x)$

Les fonctions f et g sont donc égales.

E mail

kochyppo@yahoo.fr

b-/ $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1\}$; $D_{g_2} = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_{f_2} = D_{g_2}$

De plus on a :

$f_2(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } x < -1 \\ 1 \text{ pour } x > -1 \end{cases}$ $g_2(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < -1 \\ 1 \text{ si } x > -1 \end{cases}$

$\forall x \in D_{f_2}$, $f_2(x) = g_2(x)$.

Les fonctions f_2 et g_2 sont donc égales

c-/ $D_{f_3} = \mathbb{R} - \{2\}$ $D_{g_3} = \mathbb{R}$

$D_{f_3} \neq D_{g_3}$. On en déduit que f_3 et g_3 ne sont pas égales.

II-/ APPLICATIONS

1-/ Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle application de E vers F toute relation de E vers F qui à chaque élément de E, on associe un et un seul élément de F.

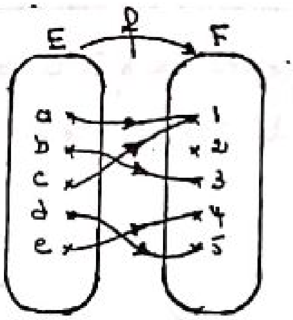
Remarque :

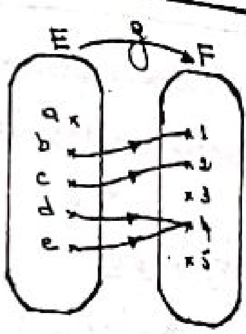
Une fonction est une application ssi, son domaine de définition est égal à son ensemble de départ.

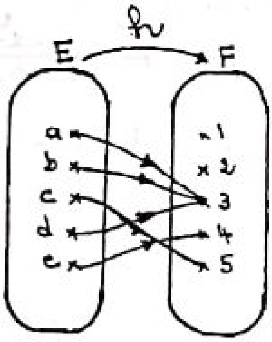
Exemple 1

Soient f, g et h les fonctions dont les diagrammes sont donnés ci-contre.

Ces fonctions sont-elles des applications ? Justifier.







Résolution

- f est une application car chaque élément de E admet une image dans F
- g n'est pas une application l'élément "a" n'a pas d'image par g dans F.
- h aussi est une application.

Exemple 2

Après avoir déterminé le domaine de de la fonction, dire si elle est une application.

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x}{x+1}$

$g : [-1 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$h : [2 ; 4[\longrightarrow \mathbb{R}^-$
$x \longmapsto \frac{x-2}{x-4}$

$p : [-2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x+1$

Résolution

- $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R}^+ / x+1 \neq 0\}$

Posons $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin \mathbb{R}^+$

$$\boxed{\mathcal{D}f = \mathbb{R}^+}$$

- $\mathcal{D}g = \{x \in [-1;1] / 1-x^2 > 0\}$

$1-x^2>0 \Leftrightarrow x \in]-1;1[$

$$\boxed{\mathcal{D}g =]-1;1[}$$

- $\mathcal{D}h = \{x \in [2;4[/ \frac{x-2}{x-4} \leq 0\}$

$\frac{x-2}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4.$

$$\boxed{\mathcal{D}h = [2;4[}$$

- $\mathcal{D}p = \{x \in [-2;+\infty[/ x+1 \geqslant 0\}$

$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

$$\boxed{\mathcal{D}p = [-1;+\infty[}$$

On en déduit que :
- f et h sont des applications
- g et p ne sont pas des applications

2./ Application injective - surjective bijective

a./ Application injective ou injection

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent dans E

Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est injective ssi pour tout x_1 et x_2 de E, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f est injective ssi pour tous x_1 et x_2 de E, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$
- f est injective ssi pour tout $y \in F$, l'équation : $x \in E$, $f(x) = y$ admet au plus une solution.

Remarque.

Soit f une application définie de E vers F.

f injective $\Longrightarrow$ Card$E \leq$ Card$F$.

La réciproque n'est pas forcement vraie c'est-à-dire que Card$E \leq$ Card$F$ n'implique pas necessairement que f est injective.

b./ Application surjective ou surjection

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, f est surjective si et seulement si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f.

Propriété

Soit f une application définie de E vers F.
f est surjective ssi : $\forall y \in F$, l'équation $x \in E$, $f(x) = y$ admet au moins une solution.

Remarque

- Soit f une application définie de E vers F. Si f est surjective alors $\mathrm{Card}\,E \geq \mathrm{Card}\,F$. C'est aussi une implication.
- Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément y de F pour lequel l'équat: $x \in E$, $f(x) = y$ n'a pas de solution.

c./ Application bijective ou bijection

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est bijective ssi pour tout $y \in F$, l'équation : $x \in E$, $f(x) = y$ admet une et une seule solution.

Remarque

Soit f une application définie de E vers F. Si f est bijective alors :

$$\mathrm{Card}\,E = \mathrm{Card}\,F.$$

C'est une implication et non une équivalence

Exercice d'application

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier la réponse.

1./ $f_1 :]-\infty ; -1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+2x+4$

2./ $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x^2+6x$

3./ $f_3 : [2 ; +\infty[\longrightarrow]-\infty ; 5]$
$x \longmapsto -x^2+4x+1$

4./ $f_4 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x ; y) \longmapsto 2x+3y.$

5./ $f_5 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$(x ; y) \longmapsto (2x ; 3y)$

6./ $f_6 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$(x ; y) \longmapsto (2 ; y)$

Résolution

1./ $f_1 :]-\infty ; -1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+2x+4$

$f_1(x) = (x+1)^2 + 3.$

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation $(E_1) : x \in]-\infty ; -1]$, $f_1(x) = a$

$(E_1) \Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 = a$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = a - 3$

1er cas $a < 3$

$a - 3 < 0$; (E_1) n'admet pas de solution

2e cas $a = 3$

$(E_1) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in]-\infty ; -1]$

(E_1) admet une solution $x_0 = -1$

3e cas $a > 3$.

$a-3>0 ; (E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -\sqrt{a-3} \\ \text{ou} \\ x+1 = \sqrt{a-3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-\sqrt{a-3} < -1 \\ \text{ou} \\ x = -1+\sqrt{a-3} > -1 \end{cases}$

(E_1) admet une solution $x_1 = -1-\sqrt{a-3}$.

Conclusion

- f est injective car pour tout $a \in \mathbb{R}$, (E_1) admet au plus une solution.
- f n'est pas surjective car pour $a < 3$ (E_1) n'a pas de solution.
- f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

2/ $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto -x^2+6x$.

$f_2(x) = -x^2+6x = -(x-3)^2+9$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation $(E_2) : x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = a$.

$(E_2) \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9-a$

a	$-\infty$		9		$+\infty$
$9-a$		$+$	0	$-$	

1er cas $a < 9$

$9-a>0 ; (E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -\sqrt{9-a} \\ \text{ou} \\ x-3 = \sqrt{9-a} \end{cases}$

$x_1 = 3-\sqrt{9-a} \qquad x_2 = 3+\sqrt{9-a}$

$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}$. (E_2) admet deux solutions.

2e cas : $a = 9$

$(E_2) \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathbb{R}$.

(E_2) admet une solution $x_1 = 3$.

3e cas : $a > 9$

$9-a<0$; (E_2) n'a pas de solution.

Conclusion.

- f_2 n'est pas injective car pour $a<9$, (E_2) admet deux solutions
- f_2 n'est pas surjective car pour $a>9$ (E_2) n'a pas de solution.
- f_2 n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective.

3./ $f_3 : [2;+\infty[\longrightarrow]-\infty;5]$
$x \longmapsto -x^2+4x+1$

$f_3(x) = -x^2+4x+1 = -(x-2)^2+5$.

Soit $a \in]-\infty;5]$, résolvons l'équation $(E_3) : x \in [2;+\infty[,\ f_3(x) = a$.

$(E_3) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 5-a$.

1er cas $a < 5$

$5-a>0 ; (E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -\sqrt{5-a} \\ \text{ou} \\ x-2 = \sqrt{5-a} \end{cases}$

$x_1 = 2-\sqrt{5-a} < 2 ; \quad x_2 = 2+\sqrt{5-a} > 2$

(E_3) admet une solution $x = 2+\sqrt{5-a}$

2e cas : $a = 5$

$(E_3) \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [2;+\infty[$

(E_3) admet une solution.

• f_3 est injective, surjective donc bijective.

$f_4 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x;y) \longmapsto 2x+3y$

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation

$(E_4) : (x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ 2x+3y = a$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, (E_4) est une équation à deux inconnues ; (E_4) admet donc une infinité de solutions.

Conclusion

f_4 est surjective mais pas injective donc f_4 n'est pas bijective.

$f_5 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$(x;y) \longmapsto (2x;3y)$.

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, résolvons le système $(S_5) : (x;y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ f((x;y)) = (a;b)$

$(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a \\ 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{3} \end{cases}$.

1er cas : a est multiple de 2 et b multiple de 3 ; (S_5) admet une solution $\left(\frac{a}{2};\frac{b}{3}\right)$

2e cas : a n'est pas multiple de 2 ou b n'est pas multiple de 3.

(S_5) n'a pas de solution.

Conclusion

f_5 est injective mais n'est pas surjective.

f_5 n'est donc pas bijective.

$f_6 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x;y) \longmapsto (2;y)$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons le système

$(S_6) : (x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f_6((x;y)) = (2;a)$

$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = a. \end{cases}$

(S_6) admet donc une infinité de solutions.

Conclusion

f_6 est surjective mais n'est pas injective

f_6 n'est donc pas bijective.

3./ Réciproque d'une bijection

Définition

Soit f une bijection de E vers F.

On a : $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

L'application f^{-1} est définie de F vers E et est appelée bijection réciproque de f.

N.B : Pour démontrer qu'une fonction admet une réciproque, il suffit de démontrer que cette fonction est une bijection.

E-mail: koehyppo@yahoo.fr
Tél: 90 16 93 00 / 99 54 56 40
91 82 84 61 / 99 09 43 63
90 72 10 72

III./ IMAGE DIRECTE - IMAGE RECIPROQUE D'UN ENSEMBLE PAR UNE FONCTION

1./ Image Directe

Définition

Soient E et F deux ensembles. Soit f une fonction de E vers F dont l'ensemble de définition est D_f. Soit A une partie de E. L'image directe de A par f est la partie de F, notée $f(A)$, constituée des images par f de tous les éléments de $A \cap D_f$.

Remarque

- Si $A = D_f$ alors $f(A) = Im f$.
- Soit $A = [a;b] \subset D_f$.
  - si f est croissante sur A alors
  $$f(A) = [f(a); f(b)]$$
  - si f est décroissante sur A alors
  $$f(A) = [f(b); f(a)]$$

Exemple.

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

Déterminons l'image directe de $A = [-1;3]$

$A = [-1;0] \cup [0;3]$

$f(A) = f([-1;0]) \cup f([0;3])$

$= [0;1] \cup [0;9] = [0;9]$

$$\boxed{f(A) = [0;9]}$$

2./ Image réciproque

Définition

Soient E et F deux ensembles. Soit f une fonction définie de E vers F, dont l'ensemble de définition est D_f. L'image réciproque d'une partie B de F par f, est la partie de D_f notée $f^{-1}(B)$ constituée des antécédents par f de tous les éléments de $B \cap Im f$.

Remarque

Soit $B = [a;b]$

$f^{-1}(B)$ est l'ensemble solution de l'inéquation : $x \in D_f$, $a \leq f(x) \leq b$.

Exemple.

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

Cherchons l'image réciproque de l'intervalle $B = [1;4[$

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq f(x) < 4\}$

$1 \leq f(x) < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 & ① \\ x^2 < 4 & ② \end{cases}$

$① \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[= I_1$

$② \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in]-2;2[= I_2$

$f^{-1}(B) = I_1 \cap I_2$

$=]-2;-1] \cup [1;2[$

$$\boxed{f^{-1}[1;4[=]-2;-1] \cup [1;2[}$$

ÉNONCÉS DES EXERCICES

DDDNOTO'S

EXERCICE 1 (Corrigé à la page 26)

1/ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes. Parmi ces fonctions, lesquelles sont des applications? Justifier.

a/ $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$
$$x \longmapsto \frac{-x-2}{x+1}$$

b/ $g : [-2;2] \longrightarrow [2;9]$
$$x \longmapsto x^2$$

c/ $h :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}^+_*$
$$x \longmapsto 1-x^2$$

d/ $p : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x+5}{|E(x+2)|-4}$$

2/ Les applications ci-dessous définies sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Justifier la réponse.

$f_1 : [3;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$
$$x \longmapsto x^2-6x+9$$

$g_1 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$$(x;y) \longmapsto (5x;2y).$$

$h_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto x-y.$$

$p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$$(x;y) \longmapsto (2x;3)$$

3/ Soit $f_m : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$$(x;y) \longmapsto [(m-2)x+y;\ 3x+my]$$
une application, m étant un paramètre réel.

f_m est-elle injective? surjective? bijective? Justifier la réponse.

Indication: On discutera suivant les valeurs du paramètre réel m.

EXERCICE 2 (Corrigé à la page 29)

Trouver les ensembles de définition des fonctions f, g, $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$ et $g\circ g$ puis calculer $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(f\circ f)(x)$ et $(g\circ g)(x)$ dans chacun des cas suivants:

a/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\longmapsto \frac{x-1}{x+3}$

b/ $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2}{x^2-1}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{4x+1}{x^4+4}$

c/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\longmapsto \frac{x+1}{2x-1}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x+1}{x+1}$

EXERCICE 3 (Corrigé à la page 32)

Soit l'ensemble $E = \{a;b;c\}$. On considère l'application f de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans lui-même définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) = X \cup \{c\}$$

1/ Déterminer les images par f des ensembles suivants :

$$\emptyset;\ \{a\};\ \{c\};\ \{a;b\};\ \{a;b;c\}$$

2/ Déterminer les images réciproques des ensembles suivants :

$$\emptyset;\ \{a\};\ \{a;c\};\ \{a;b\};\ \{a;b;c\}$$

3/ L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier la réponse.

4/ Soit $B = f(\mathcal{P}(E))$. Trouver B.

Trouver une partie A de $\mathcal{P}(E)$ telle que l'application g de A vers B qui coïncide avec f sur A soit une bijection.

Trouver la bijection réciproque de g.

EXERCICE 4 (Corrigé à la page 33)

On considère une fonction

$$h :]-\infty;-1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2 - 2x$$

1/ Déterminer la forme canonique de $h(x)$

2/ La fonction h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3/ Peut-on trouver un ensemble A pour $h :]-\infty;-1] \longrightarrow A$ soit bijective ?

Déterminer A et la réciproque de h dans l'affirmative.

EXERCICE 5 (Corrigé à la page 36)

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$(x;y) \longmapsto (3x;\ 2y-1)$

et $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$(x;y) \longmapsto (x+1;\ y+3)$

deux applications.

1/ Montrer que f et g sont bijectives.

2/ Trouver f^{-1} et g^{-1}. Trouver $f^{-1}\circ g^{-1}$ et $g^{-1}\circ f^{-1}$.

3/ Trouver $g\circ f$ puis montrer que $g\circ f$ est bijective. Trouver $(g\circ f)^{-1}$.

EXERCICE 6 (Corrigé à la page 37)

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 2|x-3| - |x+1| + 2x$.

1/ Après avoir montré que g est une fonction affine par morceaux, représenter g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2/ Discuter graphiquement suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$(E) : x \in \mathbb{R},\ g(x) = m.$$

3/ Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 5$.

4·/ La fonction g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier

5·/ Résoudre graphiquement l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 5$.

EXERCICE 7 (Corrigé à la page 38)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x+2| + |3-2x| - |x|$

1·/ Ecrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2·/ Représenter f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3·/ Déterminer graphiquement puis algébriquement l'image directe de chacun des intervalles : $]-4;0]$ et $]1;2[$

4·/ Déterminer graphiquement puis algébriquement l'image réciproque de : $\{1\}$; $[0;2]$; $]2;5]$.

EXERCICE 8 (Corrigé à la page 41)

Partie A.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [2;7]$

$$x \longmapsto \sqrt{2|E(x)|+3}$$

Partie B

On considère la fonction

$$h : [-2;1] \longrightarrow [1;10]$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 2$$

1·/ Etudier les variations de h puis tracer sa courbe (C_h) dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

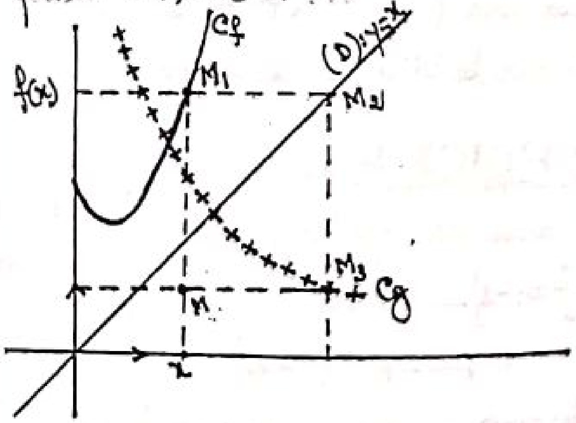
2·/ Montrer que h est bijective, et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

3·/ Tracer la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 9 (Corrigé à la page 42)

Partie A

Soit (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de deux fonctions f et g, et h la fonction $g \circ f$. Soit M_1 le point d'abscisse x de la courbe (C_f). A partir du point M_1, on construit les points M_2, M_3 et M.



1·/ Exprimer les coordonnées des points : M_1, M_2, M_3 et M.

2·/ Justifier que le point M appartient à la courbe (C_h).

Partie B.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2-1$ $\quad$ $x \longmapsto \sqrt{x}$

1/ Rappeler le tableau de variations des fonctions f et g.

2/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h = gof$.

3/ Démontrer que la fonction h est paire

4/ Etudier la variation de h en utilisant g et f. Puis dresser son tableau de variation.

5/ Tracer C_f et C_g dans le même repère orthonormé.

Construire dans le même repère, point par point, en utilisant la méthode de la partie A.

CORRIGE DES EXERCICES

EXERCICE 1

1°/ Déterminons le domaine de définition de chacune des fonctions et justifions si elles sont des applications

a°/ $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^-$

$x \longmapsto \dfrac{-x-2}{x+1}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ / x+1 \neq 0 \text{ et } \dfrac{-x-2}{x+1} \leq 0 \right\}$

Posons $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$-x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Etudions le signe de $\dfrac{-x-2}{x+1}$ sur $\mathbb{R}$

x		-2		-1		0	
$-x-2$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-x-2}{x+1}$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$		$-$

Soit $I_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{-x-2}{x+1} \leq 0 \right\}$ on a :

$I_1 =]-\infty ; -2] \cup]-1 ; +\infty[$

$D_f = I_1 \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$ car $\mathbb{R}^+ \in I_1$

$\boxed{D_f = \mathbb{R}^+}$

Le domaine de définition de f est égal à son ensemble de départ ; donc f est une application.

b°/ $g : [-2 ; 2] \longrightarrow [2 ; 9]$

$x \longmapsto x^2$

$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2 \text{ et } 2 \leq x^2 \leq 9 \right\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 \leq x^2 \leq 9$

Cette inéquation équivaut à :

$\begin{cases} 2 \leq x^2 \; (1) \\ \text{et} \\ x^2 \leq 9 \; (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$

(2) $\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

L'ensemble solution de l'inéquation $2 \leq x^2 \leq 9$ est $S = [-3 ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; 3]$

$D_g = [-2 ; 2] \cap S$

$\boxed{D_g = [-2 ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; 2]}$

g n'est pas une application car son domaine de définition est différent de son ensemble de départ.

c°/ $h :]-1 ; 1[\longrightarrow \mathbb{R}^+_*$

$x \longmapsto 1 - x^2$

$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1 \text{ et } 1 - x^2 > 0 \right\}$

En procédant comme précédemment on a : $\boxed{D_h =]-1 ; 1[}$

h est une application car son domaine de définition est égal à son ensemble de départ.

d°/ $p : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{x+5}{|E(x+2)| - 4}$

$\mathcal{D}_p = \{x \in \mathbb{R}^- / |E(x+2)| - 4 \neq 0\}$

Posons $|E(x+2)| - 4 = 0$ on a :

$|E(x+2)| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} E(x+2) = -4 \ (1) \\ \text{ou} \\ E(x+2) = 4 \ (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow -4 \leq x+2 < -3 \Leftrightarrow -6 \leq x < -5$

(2) $\Leftrightarrow 4 \leq x+2 < 5 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$.

Posons $S = [-6 ; -5[\cup [2 ; 3[$

$\mathcal{D}_p = \mathbb{R}^- - S =]-\infty ; -6[\cup [-5 ; 0]$

$\boxed{\mathcal{D}_p =]-\infty ; -6[\cup [-5 ; 0]}$

p n'est pas une application car son ensemble de définition est différent de son ensemble de départ.

2/ Justifions si les applications sont injectives, surjectives, bijectives

$f_1 : [3 ; +\infty[\longrightarrow [0 ; +\infty[$

$x \longmapsto x^2 - 6x + 9$

$f_1(x) = (x-3)^2$

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, résolvons l'équation

$(E_1) : x \in [3 ; +\infty[,\ f_1(x) = a$.

$(E_1) \Leftrightarrow (x-3)^2 = a$.

1er cas $a = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [3 ; +\infty[$

(E_1) admet une solution $x_0 = 3$

2e cas $a > 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{a}$ ou $x - 3 = \sqrt{a}$

$\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{a} < 3$ ou $x = 3 + \sqrt{a} > 3$.

(E_1) admet une solution $x = 3 + \sqrt{a}$.

Conclusion

f_1 est injective, surjective donc bijective.

$* \ g_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x ; y) \longmapsto (5x ; 2y)$

Soit $(a ; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, résolvons le système $(S_1) : (x ; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ g_1((x ; y)) = (a ; b)$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = a \\ 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{5} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$.

1er cas : a est multiple de 5 et b multiple de 2 ; (S_1) admet une solution $(\frac{a}{5} ; \frac{b}{2})$.

2e cas : a n'est pas multiple de 5 ou b n'est pas multiple de 2 ; (S_1) n'a pas de solution

Conclusion

g_1 est injective mais n'est pas surjective. g_1 n'est donc pas bijective

$* \ h_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x ; y) \longmapsto x - y$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation

$(E_2) : (x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x - y = a$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, (E_2) est une équat° à deux inconnues. (E_2) admet donc une infinité de solutions.

Conclusion

h_1 est surjective mais n'est pas injective ; donc h_1 n'est pas bijective.

* $p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x;y) \longmapsto (2x;3)$

Soit $a \in \mathbb{R}$, résolvons le système

$(S_3) : (x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, p_1((x;y)) = (a;3)$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a \\ y \text{ quelconque.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(S_3) admet donc une infinité de solutions.

Conclusion

p_1 est surjective mais n'est pas injective. p_1 n'est donc pas bijective.

3°/ Soit $f_m : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x;y) \longmapsto [(m-2)x+y ; 3x+my]$

une application, m étant un paramètre réel.

Justifions si f_m est injective, surjective bijective en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, résolvons le système $(S_m) : (x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, f_m((x;y)) = (a;b)$.

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x + y = a \\ 3x + my = b \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m - 3 = (m-3)(m+1)$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 3$.

1er cas $m \neq -1$ et $m \neq 3$.

(S_m) admet une seule solution pour tout couple $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

Conclusion :

L'application f_m pour $m \in \mathbb{R} - \{-1;3\}$ est bijective donc injective et surjective

2e cas $m = -1$

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = a & (E_1) \\ 3x - y = b & (E_2) \end{cases}$$

- Si $a = -b$, (E_1) et (E_2) sont équivalentes ; (S_{-1}) admet donc une infinité de solutions.
- Si $a + b \neq 0$, (E_1) et (E_2) sont incompatibles ; (S_{-1}) n'admet pas de solution.

Conclusion

f_{-1} n'est ni injective ni surjective. f_{-1} n'est donc pas bijective.

3e cas $m = 3$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a & (E'_1) \\ 3x + 3y = b & (E'_2) \end{cases}$$

• si $b = 3a$, (E'_1) et (E'_2) sont équivalentes. (S_3) admet donc une infinité de solutions

• si $b \neq 3a$, (E'_1) et (E'_2) sont incompatibles. (S_3) n'admet pas de solution.

Conclusion

f_3 n'est ni injective, ni surjective. f_3 n'est donc pas bijective.

EXERCICE 2

Trouvons les ensembles de définition des fonctions f, g, $g\circ f$, $f\circ g$, $f\circ f$ et $g\circ g$ dans chaque cas. Nous calculerons pour chaque cas $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(f\circ f)(x)$ et $(g\circ g)(x)$.

a./ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$

$\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$ $\quad$ $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-3\}}$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } f(x) \neq -3\}$

Posons $f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\boxed{D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{-1/3 ; 0\}}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3 \text{ et } g(x) \neq 0\}$

Posons $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{-3 ; 1\}}$

$D_{f\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } f(x) \neq 0\}$

Posons $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ impossible.

$\boxed{D_{f\circ f} = \mathbb{R}^*}$

$D_{g\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3 \text{ et } g(x) \neq -3\}$

Posons $g(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} = -3$

$\Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$

$\boxed{D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \{-3 ; -2\}}$

$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 3} = \dfrac{1-x}{3x+1}$

$\boxed{(g\circ f)(x) = \frac{1-x}{3x+1}}$ $x \neq -1/3$ et $x \neq 0$

$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{x+3}{x-1}$ $x \neq -3$ et $x \neq 1$

$\boxed{(f\circ g)(x) = \frac{x+3}{x-1}}$, $x \neq -3$ et $x \neq 1$

$(f\circ f)(x) = f[f(x)] = x$, $x \neq 0$

$\boxed{(f\circ f)(x) = x}$ $\quad x \neq 0$

$(g\circ g)(x) = g[g(x)] = \frac{g(x)-1}{g(x)+3} = \frac{-1}{x+2}$

$\boxed{(g\circ g)(x) = \frac{-1}{x+2}}$ $x \neq -3$ et $x \neq -2$

b./ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{4x+1}{x^2-4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^2 - 1 \neq 0\}$

Posons $\begin{cases} x^2-1=0 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1$

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$\mathcal{D}g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$

Posons $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

$$\mathcal{D}g = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$\mathcal{D}g\circ f = \{x \in \mathcal{D}f$ et $f(x) \in \mathcal{D}g\}$

$= \{x \geq 0 / x \neq 1$ et $f(x) \neq \pm 2\}$

Posons • $f(x) = -2 \Leftrightarrow x^2-1 = -1 \Leftrightarrow x=0$

• $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2-1 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ donc

$$\boxed{\mathcal{D}g\circ f = \mathbb{R}^+ - \{0; 1; \sqrt{2}\} = \mathbb{R}^*_+ - \{1; \sqrt{2}\}}$$

$\mathcal{D}f\circ g = \{x \in \mathcal{D}g / g(x) \in \mathcal{D}f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2; x \neq 2; g(x) \geq 0$ et $g(x) \neq 1\}$

Posons $g(x) = 1 \Leftrightarrow x^2-4 = 4x+1$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=5$.

Résolvons l'inéquation $g(x) \geq 0$

x	$-\infty$	-2		$-1/4$		2	$+\infty$
$4x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in I =]-2; -\frac{1}{4}] \cup]2; +\infty[$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{D}f\circ g =]-2; -\tfrac{1}{4}] \cup]2; +\infty[- \{-1; 5\}}$$

• $\mathcal{D}f\circ f = \{x \in \mathcal{D}f$ et $f(x) \in \mathcal{D}f\}$

$= \{x \geq 0 / x \neq 1$ et $f(x) \geq 0$ et $f(x) \neq 1\}$

Posons $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2-1 = 2$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0$

$\Leftrightarrow x<-1$ ou $x>1$

En définitive on a :

$$\boxed{\mathcal{D}f\circ f =]1; +\infty[- \{\sqrt{3}\}}$$

• $\mathcal{D}g\circ g = \{x \in \mathcal{D}g / g(x) \in \mathcal{D}g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2; x \neq 2$ et $g(x) \neq \pm 2\}$

Posons $g(x) = -2 \Leftrightarrow -2x^2+4 = 4x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x-3=0$

$\Delta' = 4+6=10;$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{10}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}$

$g(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2-4 = 4x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x-5=0$

$\Delta' = 4+10 = \sqrt{14}$

$x_3 = \frac{2-\sqrt{14}}{2}$ $\quad x_4 = \frac{2+\sqrt{14}}{2}$

$$\boxed{\mathcal{D}g\circ g = \mathbb{R} - \{x_1; -2; x_3; x_2; 2; x_4\}}$$

Calculons $(g\circ f)(x)$; $(f\circ g)(x)$; $(f\circ f)(x)$ et $(g\circ g)(x)$

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{4f(x)+1}{[f(x)]^2-4}$$

$$= \frac{(x^2-7)(x^2-1)}{4x^2(2-x^2)}$$

$$\boxed{\forall x \in D_{g\circ f},\ (g\circ f)(x) = \frac{(x^2-7)(x^2-1)}{4x^2(2-x^2)}}$$

$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{2}{[g(x)]^2-1}$$

$$= \frac{2(x^2-4)^2}{(4x+1)^2-(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{\forall x\ D_{f\circ g},\ (f\circ g)(x) = \frac{2(x^2-4)^2}{(-x^2+4x+5)(x^2+4x-3)}}$$

$$(f\circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{2}{[f(x)]^2-1}$$

$$= \frac{2(x^2-1)^2}{4-(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in D_{f\circ f},\ (f\circ f)(x) = \frac{2(x^2-1)^2}{(3-x^2)(1+x^2)}}$$

$$(g\circ g)(x) = \frac{4g(x)+1}{[g(x)]^2-4}$$

$$= \frac{(x^2+16x)(x^2-4)}{(-2x^2+4x+9)(2x^2+4x-7)}$$

$$\boxed{\forall x \in D_{g\circ g},\ (g\circ g)(x) = \frac{(x^2+16x)(x^2-4)}{(-2x^2+4x+9)(2x^2+4x-7)}}$$

c/ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{2x-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) \neq -1\right\}$

Posons : $f(x) = -1 \Leftrightarrow x+1 = -2x+1$

$\Leftrightarrow x = 0$

$$\boxed{D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{0 ; \tfrac{1}{2}\right\}}$$

$\cdot D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ et } g(x) \neq \frac{1}{2}\right\}$

Posons $g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x+2 = x+1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

$$\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-1 ; -\tfrac{1}{3}\right\}}$$

$D_{f\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) \neq \frac{1}{2}\right\}$

Posons $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+2 = 2x-1$ imp

$\Leftrightarrow 0x = -3$ impossible

$$\boxed{D_{f\circ f} = \mathbb{R} - \left\{\tfrac{1}{2}\right\}}$$

$D_{g\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1 \text{ et } g(x) \neq -1\right\}$

Posons $g(x) = -1 \Leftrightarrow 2x+1 = -x-1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

$$\boxed{D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-1 ; -\tfrac{2}{3}\right\}}$$

On démontre par calcul que :

$(g\circ f)(x) = \dfrac{4x+1}{3x}$, $\qquad (f\circ g)(x) = \dfrac{3x+2}{3x+1}$

$(f\circ f)(x) = x$, $\qquad (g\circ g)(x) = \dfrac{5x+3}{3x+2}$

EXERCICE 3

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. On considère l'application f de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans lui-même définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) = X \cup \{c\}$$

1°/ Déterminons les images par f des ensembles.

$f(\emptyset) = \emptyset \cup \{c\} = \{c\}$

$f(\{a\}) = \{a\} \cup \{c\} = \{a; c\}$

$f(\{a; c\}) = \{a; c\} \cup \{c\} = \{a; c\}$

$f(\{a; b\}) = \{a; b\} \cup \{c\} = \{a; b; c\}$

$f(\{a; b; c\}) = \{a; b; c\} \cup \{c\} = \{a; b; c\}$

2°/ Déterminons les images réciproques

Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$; l'image réciproque de Y est l'ensemble $P = f^{-1}(Y)$ des éléments $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \cup \{c\} = Y$

Remarque : Si $c \notin Y$ alors il n'existe aucun $X \in \mathcal{P}(E) / X \cup \{c\} = Y$

Par conséquent :

- $\emptyset$; $\{a\}$; $\{a; b\}$ n'ont pas d'images réciproques.
- $\{a; c\}$ a deux images réciproques qui sont : $\{a\}$ et $\{a; c\}$
- $\{a; b; c\}$ admet aussi deux images réciproques qui sont : $\{a; b\}$ et $\{a; b; c\}$

3°/ Justifions si f est injective, surjective, bijective.

- f n'est pas injective $\{a; c\}$ admet deux antécédents $\{a\}$ et $\{a; c\}$
- f n'est pas surjective car $\{a; b\}$ n'a pas d'antécédent.
- f n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

4°/ Soit $B = f(\mathcal{P}(E))$. Trouvons B.

B est l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{P}(E)$ d'où :

$B = \{\{c\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$

Trouvons une partie A de $\mathcal{P}(E)$ telle que l'application $g : A \longrightarrow B$ qui coïncide avec f sur A soit une bijection

A doit contenir exactement un seul antécédent de chaque élément de B d'où : $A = \{\{a\}; \{b\}; \{c\} \{a; b\}\}$

Remarques : On aurait pu trouver $A = \{\{c\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$ ou $A = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$ bref il y a plusieurs parties A de $\mathcal{P}(E)$.

Trouvons la bijection réciproque de g.

$$g^{-1} : B \longrightarrow A$$
$$X \longmapsto C_X^{\{c\}}$$

$C_X^{\{c\}}$ désigne le complémentaire du singleton $\{c\}$ dans X avec

$A = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{a;b\}\}$

Attention : la définition de g^{-1} dépend de la partie A de $\mathcal{P}(E)$ choisie

EXERCICE 4

On considère une fonction

$$h :]-\infty ; -1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2 - 2x.$$

1/ Déterminons la forme canonique de la fonction $h(x)$

$h(x) = -x^2 - 2x = -(x^2+2x)$

$= -[(x+1)^2 - 1]$

$$\boxed{h(x) = -[(x+1)^2 - 1]}$$

2/ Vérifions si h est injective, surjective, bijective

Soit $a \in \mathbb{R}$ résolvons l'équation

(E) : $x \in]-\infty ; -1]$, $h(x) = a$

(E) $\Leftrightarrow -(x+1)^2 + 1 = a$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 - a.$

1er cas $a < 1$

$1 - a > 0$ et (E) $\Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{1-a}$

$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{1-a} < -1$; $x = -1 + \sqrt{1-a} > -1$

(E) admet donc une solution

2e cas $a = 1$

(E) $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in]-\infty ; -1]$

(E) admet une solution $x_0 = -1$

3e cas $a > 1$

$1 - a < 0$; (E) n'admet pas de solut-

Conclusion

- h est injective car pour tout $a \in \mathbb{R}$ (E) admet au plus une solution
- h n'est pas surjective car pour tout $a > 1$, (E) n'a pas de solution
- h n'est pas bijective car h n'est pas surjective.

3/ Trouvons un ensemble A pour que $h :]-\infty ; -1] \longrightarrow A$ soit bijective

Pour que h soit bijective il suffit de restreindre l'ensemble d'arrivée à $]-\infty ; 1]$.

L'ensemble cherché est donc

$$A =]-\infty ; 1]$$

Réciproque de h

$$h^{-1} :]-\infty ; 1] \longrightarrow]-\infty ; -1]$$
$$x \longmapsto -1 - \sqrt{1-x}$$

Posons $x^2-1=0 \iff x=-1$ ou $x=1$

$-1 \notin \mathbb{R}^+$ et $1 \in \mathbb{R}^+$ d'où

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}^+ - \{1\}}$$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$

Posons $x^2-4=0 \iff x=-2$ ou $x=2$

$$\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-2; 2\}}$$

• $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f$ et $f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 ; x \neq 1$ et $f(x) \neq \pm 2\}$

Posons $f(x) = -2 \iff \dfrac{2}{x^2-1} = -2$

$\iff x^2 = 0 \iff x = 0$

$f(x) = 2 \iff x^2 - 1 = 1$

$\iff x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

$$\boxed{D_{g\circ f} = \mathbb{R}^*_+ - \{1; \sqrt{2}\}}$$

• $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g$ et $g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2$ et $g(x) \geq 0$ et $g(x) \neq 1\}$

Posons $g(x) = 0 \iff x = -1/4$

$g(x) = 1 \iff \dfrac{4x+1}{x^2-4} = 1$

$\iff x^2 - 4 = 4x+1$

$\iff x^2 - 4x - 5 = 0$

$\iff (x-2)^2 - 9 = 0$

$\iff (x+1)(x-5) = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = 5$.

Résolvons l'inéquation $g(x) \geq 0$

x		-2		$-1/4$		2	
$4x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

Soit S l'ensemble solution de l'inéquation $g(x) \geq 0$ on a :

$S =]-2; -1/4] \cup]2; +\infty[$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2 ; x \neq -1 ; x \neq 5$ et $x \in S\}$

d'où $D_{f\circ g} = S - \{-1; 5\}$

$$\boxed{D_{f\circ g} =]-2; -1[\cup]-1; -1/4] \cup]2; 5[\cup]5; +\infty[}$$

• $D_{f\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f$ et $f(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^+ / x \neq 1$ et $f(x) \geq 0$ et $f(x) \neq 1\}$

Posons $f(x) = 1 \iff \dfrac{2}{x^2-1} = 1$

$\iff x^2 - 1 = 2$

$\iff x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

$f(x) \geq 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1$

$D_{f\circ f} = \{x \in \mathbb{R}^+ / x \neq 1, x \neq \pm\sqrt{3}$ et $x \in I\}$

avec $I =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

d'où $\boxed{D_{f\circ f} =]1; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[}$

• $D_{g\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g$ et $g(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2$ et $g(x) \neq \pm 2\}$

Posons $g(x) = -2 \iff 4x+1 = -2(x^2-4)$

$\iff 2x^2 + 4x - 7 = 0$

$\Delta' = 4 + 14 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$x_1 = \dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$

$g(x) = 2 \iff 4x+1 = 2(x^2-4)$

$\iff 2x^2 - 4x - 9 = 0$

$\Delta' = 4 + 18 = 22$

$x_3 = \dfrac{2-\sqrt{22}}{2}$ $\quad x_4 = \dfrac{2+\sqrt{22}}{2}$

$$\mathcal{D}_{gog} = \mathbb{R} - \{x_1 ; -2 ; x_3 ; x_2 ; 2 ; x_4\}$$

avec $x_1 = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $x_2 = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$x_3 = 1 - \frac{\sqrt{22}}{2}$; $x_4 = 1 + \frac{\sqrt{22}}{2}$

• $(gof)(x) = g[f(x)] = \frac{4f(x)+1}{[f(x)]^2 - 4}$

Après calculs et simplification on a :

$$\boxed{(gof)(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+7)}{4x^2(2-x^2)}}$$

• $(fog)(x) = f[g(x)] = \frac{2}{[g(x)]^2 - 1}$

Après calculs et simplification on a :

$$\boxed{(fog)(x) = \frac{2(x^2-4)^2}{(-x^2+4x+5)(x^2+4x-3)}}$$

• $(fof)(x) = f[f(x)] = \frac{2}{[f(x)]^2 - 1}$

Après calculs et simplification on a :

$$\boxed{(fof)(x) = \frac{2(x^2-1)^2}{(3-x^2)(1+x^2)}}$$

• $(gog)(x) = g[g(x)] = \frac{4g(x)+1}{[g(x)]^2 - 4}$

Après calculs et simplification on a :

$$\boxed{(gog)(x) = \frac{(x^2+16x)(x^2-4)}{(2x^2+4x-7)(-2x^2+4x+9)}}$$

c/ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+1}{2x-1}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x+1}{x+1}$

$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}}$ $\qquad$ $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-1\}}$

• $\mathcal{D}_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \in \mathcal{D}_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) \neq -1\}$

Posons $f(x) = -1 \Leftrightarrow x+1 = -2x+1$

$\Leftrightarrow x = 0$

$$\boxed{\mathcal{D}_{gof} = \mathbb{R} - \{\ ; \frac{1}{2}\}}$$

• $\mathcal{D}_{fog} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \in \mathcal{D}_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } g(x) \neq \frac{1}{2}\}$

Posons $g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x+2 = x+1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

$$\boxed{\mathcal{D}_{fog} = \mathbb{R} - \{-1 ; -\frac{1}{3}\}}$$

• $\mathcal{D}_{fof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x) \in \mathcal{D}_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) \neq \frac{1}{2}\}$

Posons $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+2 = 2x-1$ imp

$$\boxed{\mathcal{D}_{fof} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}}$$

• $\mathcal{D}_{gog} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \in \mathcal{D}_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } g(x) \neq -1\}$

Posons $g(x) = -1 \Leftrightarrow 2x+1 = -x-1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

$$\boxed{\mathcal{D}_{gog} = \mathbb{R} - \{-1 ; -\frac{2}{3}\}}$$

On montre aisement que :

$(gof)(x) = \frac{4x+1}{3x}$ $\qquad$ $(fog)(x) = \frac{3x+2}{3x+1}$

$(fof)(x) = x$ $\qquad$ $(gog)(x) = \frac{5x+3}{3x+2}$

EXERCICE 5

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto (3x; 2y-1)$$

et $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto (x+1; y+3).$$

deux applications

1/ <u>Montrons que f et g sont bijectives</u>

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, résolvons les systèmes suivants

$(S_1) : (x;y)\in\mathbb{R}^2,\ f((x;y)) = (a;b)$

$(S_2) : (x;y)\in\mathbb{R}^2,\ g((x;y)) = (a;b)$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = a \\ 2y-1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{b+1}{2} \end{cases}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = a \\ y+3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-1 \\ y = b-3 \end{cases}$$

(S_1) et (S_2) admettent chacun une seule solution d'où :

f et g sont bijectives

2/ <u>Trouvons f^{-1} et g^{-1}</u>

$f^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto \left(\frac{x}{3}; \frac{y+1}{2}\right)$$

$g^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto (x-1; y-3)$$

Trouvons $f^{-1}\circ g^{-1}$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(x;y) = f^{-1}\left[g^{-1}((x;y))\right]$$
$$= f^{-1}((x-1; y-3))$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})((x;y)) = \left(\frac{x-1}{3}; \frac{y-3+1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{x-1}{3}; \frac{y-2}{2}\right)$$

$f^{-1}\circ g^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto \left(\frac{x-1}{3}; \frac{y-2}{2}\right)$$

Trouvons $g^{-1}\circ f^{-1}$.

$$(g^{-1}\circ f^{-1})((x;y)) = g^{-1}\left[f^{-1}((x;y))\right]$$
$$= g^{-1}\left(\left(\frac{x}{3}; \frac{y+1}{2}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{x}{3}-1; \frac{y+1}{2}-3\right)$$
$$= \left(\frac{x-3}{3}; \frac{y-5}{2}\right)$$

$g^{-1}\circ f^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto \left(\frac{x-3}{3}; \frac{y-5}{2}\right)$$

3/ <u>Trouvons $g\circ f$.</u>

$$(g\circ f)((x;y)) = g\left[f((x;y))\right]$$
$$= g((3x; 2y-1))$$
$$= (3x+1; 2y-1+3)$$
$$= (3x+1; 2y+2)$$

$g\circ f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto (3x+1; 2y+2)$$

Trouvons $(g\circ f)^{-1}$

On trouve aisément le résultat suivant

$(g\circ f)^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(x;y) \longmapsto \left(\frac{x-1}{3}; \frac{y-2}{2}\right)$$

On constate que : $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

EXERCICE 6

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 2|x-3| - |x+1| + 2x.$$

1/ * Montrons que g est une fonction affine par morceaux

Posons $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

• $\forall x \in]-\infty;-1]$, $x-3<0$ et $x+1 \leq 0$

donc $|x-3| = -x+3$ et $|x+1| = -x-1$

et $g(x) = 2(-x+3)-(-x-1)+2x$

$g(x) = x+7$

• $\forall x \in [-1;3]$, $x-3 \leq 0$ et $x+1 \geq 0$

donc $|x-3| = -x+3$ et $|x+1| = x+1$

d'où $g(x) = 2(-x+3)-(x+1)+2x$

$g(x) = -x+5.$

• $\forall x \in [3;+\infty[$, $x-3>0$ et $x+1>0$

donc $|x-3| = x-3$ et $|x+1| = x+1$

d'où $g(x) = 2(x-3)-(x+1)+2x$

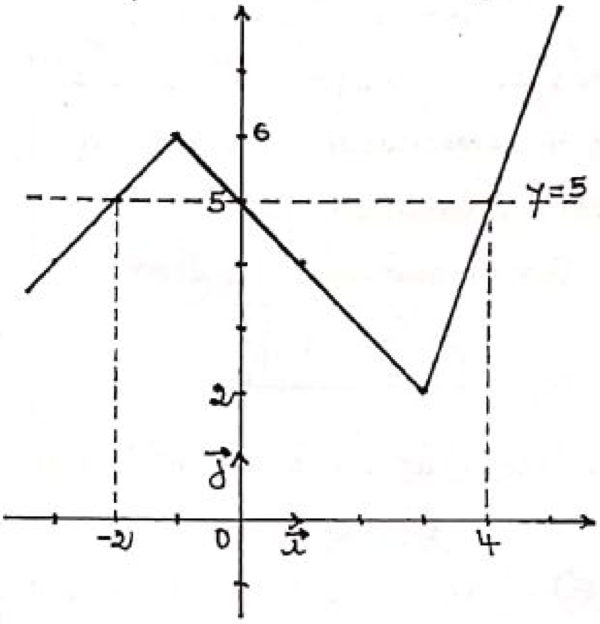
$g(x) = 3x-7$

En résumé on a :

$$g(x) = \begin{cases} -x+7 & \text{si } x \leq -1 \\ -x+5 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 3x-7 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

g est donc une fonction affine par morceaux.

• Représentation graphique de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



2/ Discutons graphiquement suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation

(E) : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = m$

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de la représentation de g avec la droite d'équation $y = m$

Résumons les résultats de notre discussion dans le tableau ci-dessous

m	$-\infty$	2		5		6	$+\infty$
nombre et signe des solut. de (E)	1 $x_1<0$	2 $x_1<0$ $x_2>0$	3 $x_1<0$ $x_2>0$ $x_3>0$	3 $x_1<0$ $x_2=0<x_3$	3 $x_1<0$ $x_2<0$ $x_3>0$	2 $x_1<0$ $x_2>0$	1 $x_1>0$

3/ * Résolution graphique de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 5$

Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la représentation de g avec la droite d'équation $y=5$

Graphiquement on a donc :

$$\boxed{S=\{-2;0;4\}}$$

* Résolution algébrique de l'équation (E') : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 5$

$$(E') \Leftrightarrow \begin{cases} x+7=5 \text{ si } x \leq -1 \Rightarrow x=-2 \\ -x+5=5 \text{ si } -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x=0 \\ 3x+7=5 \text{ si } x \geq 3 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$\boxed{S=\{-2;0;4\}}$$

4/ Justifions si g est injective, surjective, bijective

- g n'est pas injective car les réels -2 ; 0 et 4 ont une même image qui est 5
- g est surjective car l'équation (E) admet au moins une solution pour tout m réel.
- g n'est pas bijective car g n'est pas injective.

5/ Résolution graphiquement l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 5$

Graphiquement on a : l'ensemble solution S' de cette inéquation est la réunion des intervalles sur lesquels la représentation de g est au-dessus de la droite d'équation $y=5$. En tenant aussi compte du fait que l'inégalité est large on a :

$$\boxed{S'=[-2;0]\cup[4;+\infty[}$$

EXERCICE 7

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=|x+2|+|3-2x|-|x|$

1/ Ecrivons f(x) sans le symbole de valeur absolue.

Posons : $\begin{cases} x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \\ \text{ou} \\ 3-2x=0 \Leftrightarrow x=3/2 \end{cases}$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $3/2$	$3/2$ $+\infty$
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$
x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$

- $\forall x \leq -2$, $x+2 \leq 0$; $3-2x>0$; $x<0$

donc $f(x)=-(x+2)+(3-2x)-(-x)$

$f(x)=-2x+1$

- $\forall x \in [-2;0]$, $x+2 \geq 0$, $3-2x>0$; $x \leq 0$

donc $f(x)=(x+2)+(3-2x)-(-x)$

$f(x)=5$

- $\forall x \in [0; \frac{3}{2}]$, $x+2>0$; $3-2x>0$; $x>0$

donc $f(x) = (x+2)+(3-2x)-x$

$f(x) = -2x+5$

- $\forall x \geq \frac{3}{2}$, $x+2>0$; $3-2x\leq 0$; $x>0$

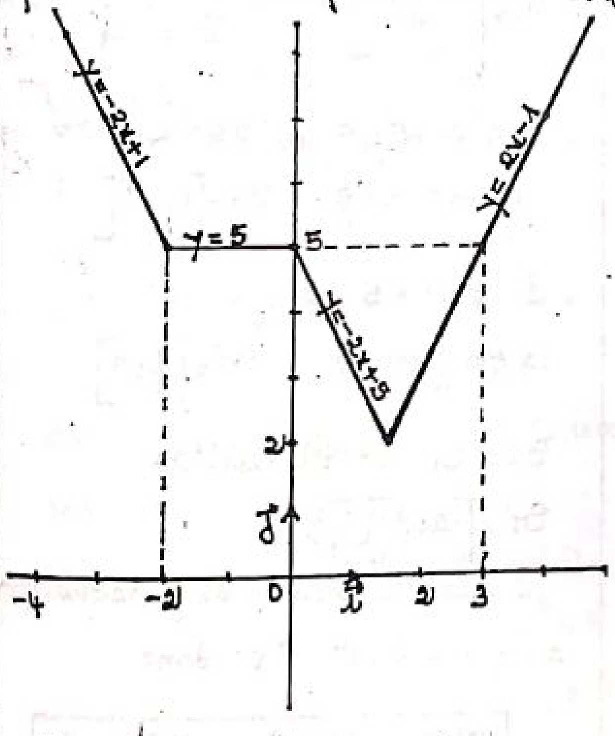
donc $f(x) = (x+2)+(-3+2x)-x$

$f(x) = 2x-1$

En résumé on a :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ 5 & \text{si } -2\leq x\leq 0 \\ -2x+5 & \text{si } 0\leq x\leq \frac{3}{2} \\ 2x-1 & \text{si } x\geq \frac{3}{2} \end{cases}}$$

2/ Représentation de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



3/ * Détermination graphique d'image directe

$$\boxed{f(]-4;0]) = [5;9[}$$

$$\boxed{f(]1;2[) = [2;3[}$$

* Détermination algébrique de l'image directe de : $]-4;0]$ et $]1;2[$

$]-4;0] =]-4;-2]\cup[-2;0]$

$f(]-4;0]) = f(]-4;-2])\cup f([-2;0])$

$= [f(-2); f(-4)[\cup \{5\}$

$= [5;9[\cup\{5\} = [5;9[$

$$\boxed{f(]-4;0]) = [5;9[}$$

$f(]1;2[) = f(]1;\frac{3}{2}])\cup f([\frac{3}{2};2[)$

$= [f(\frac{3}{2}); f(1)[\cup[f(\frac{3}{2}); f(2)[$

$= [2;3[\cup[2;3[= [2;3[$

$$\boxed{f(]1;2[) = [2;3[}$$

4-/ Déterminons graphiquement l'image réciproque de $\{1\}$; $[0;2]$; $]2;5]$

$$\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \emptyset}$$

$$\boxed{f^{-1}([0;2]) = \{\frac{3}{2}\}}$$

$$\boxed{f^{-1}(]2;5]) = [-2;3]-\{\frac{3}{2}\}}$$

- Déterminons algébriquement l'image réciproque de : $\{1\}$; $[0;2]$; $]2;5]$

- l'image réciproque de $\{1\}$ est l'ensemble solution de l'équat° : $f(x)=1$

Résolvons donc cette équation

$$f(x)=1 \iff \begin{cases} -2x+1=1\ , & x\leq -2 \ (a) \\ \text{ou} & \\ -2x+5=1\ , & 0\leq x\leq \frac{3}{2} \ (b) \\ \text{ou} & \\ 2x-1=1\ , & x\geq \frac{3}{2} \ (c). \end{cases}$$

$(a)\iff\begin{cases} x=0 \\ \text{et} \\ x\leq -2 \end{cases}$; $(b)\iff\begin{cases} x=2 \\ \text{et} \\ 0\leq x\leq \frac{3}{2} \end{cases}$ $(c)\iff\begin{cases} x=1 \\ \text{et} \\ x\geq \frac{3}{2} \end{cases}$

aucune des équations (a), (b) et (c) n'admet de solution; l'ensemble solution de l'équation $f(x)=1$ est donc vide d'où $\boxed{f^{-1}(\{1\})=\emptyset}$

- L'image réciproque par f de $[0;2]$ est l'ensemble solution de l'inéquation

$$0\leq f(x)\leq 2 \quad (I)$$

$$(I)\iff \begin{cases} 0\leq -2x+1\leq 2, & x\leq -2 \ (d) \\ \text{ou} & \\ 0\leq -2x+5\leq 2, & 0\leq x\leq \frac{3}{2} \ (e) \\ \text{ou} & \\ 0\leq 2x-1\leq 2, & x\geq \frac{3}{2} \ (f) \end{cases}$$

• $0\leq -2x+1\leq 2 \iff -1\leq -2x\leq 1$

$\iff -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$

$(d)\iff\begin{cases} -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ x\leq -2 \end{cases}$ $\quad S_d=\emptyset$

• $0\leq -2x+5\leq 2 \iff \frac{3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$

$(e)\iff\begin{cases} \frac{3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2} \\ \text{et} \\ 0\leq x\leq\frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad S_e=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

• $0\leq 2x-1\leq 2 \iff \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$.

$(f)\iff\begin{cases} \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2} \\ \text{et} \\ x\geq\frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad S_f=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$S_I = S_d\cup S_e\cup S_f=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

L'ensemble solution de l'inéquation $0\leq f(x)\leq 2$ est : $S_I=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; donc

$$\boxed{f^{-1}([0;2])=\left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

- L'image réciproque par f de $]2;5]$ est l'ensemble solution de l'inéquation

$$2<f(x)\leq 5 \quad (I')$$

$$(I')\iff \begin{cases} 2<-2x+1\leq 5\ , & x\leq -2 \ (1) \\ \text{ou} & \\ -2\leq x\leq 0 & \\ \text{ou} & \\ 2<-2x+5\leq 5\ , & 0\leq x<\frac{3}{2} \ (2) \\ \text{ou} & \\ 2<2x-1\leq 5, & x\geq\frac{3}{2} \ (3). \end{cases}$$

• $2<-2x+1\leq 5 \iff -2\leq x<-\frac{1}{2}$

$(1)\iff\begin{cases} -2\leq x<-\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ x\leq -2 \end{cases}$ $\quad S_1=\{-2\}$

• $2<-2x+5\leq 5 \iff 0\leq x<\frac{3}{2}$

$(2)\iff 0\leq x<\frac{3}{2}$; $\quad S_2=\left[0;\frac{3}{2}\right[$

• $2<2x-1\leq 5 \iff \frac{3}{2}<x\leq 3$

$(3)\iff \frac{3}{2}<x\leq 3 \quad S_3=\left]\frac{3}{2};3\right]$

$S_{I'}=S_1\cup[-2;0]\cup S_2\cup S_3$

$S_{I'}=\left[-2;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};3\right]$

L'ensemble solution de l'inéquation $2<f(x)\leq 5$ est $S_{I'}$ donc

$$\boxed{f^{-1}(]2;5])=\left[-2;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};3\right]}$$

e-mail : koahyppo@yahoo.fr

EXERCICE 8

PARTIE A

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [2;7]$$
$$x \longmapsto \sqrt{2|E(x)|+3}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / \ 2 \leq \sqrt{2|E(x)|+3} \leq 7\}$$

$$2 \leq \sqrt{2|E(x)|+3} \leq 7 \iff 4 \leq 2|E(x)|+3 \leq 49$$
$$\iff \frac{1}{2} \leq |E(x)| \leq 23$$
$$\iff -23 \leq E(x) \leq 23$$
$$\iff -23 \leq x \leq 23.$$

$$\boxed{Df = [-23;23]}$$

PARTIE B

On considère la fonction

$$h : [-2;1] \longrightarrow [1;10]$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x + 2$$

1/ Etudions les variations de h

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

Soit u et v deux réels de $[-2;1]$ tels que $u < v$. On a:

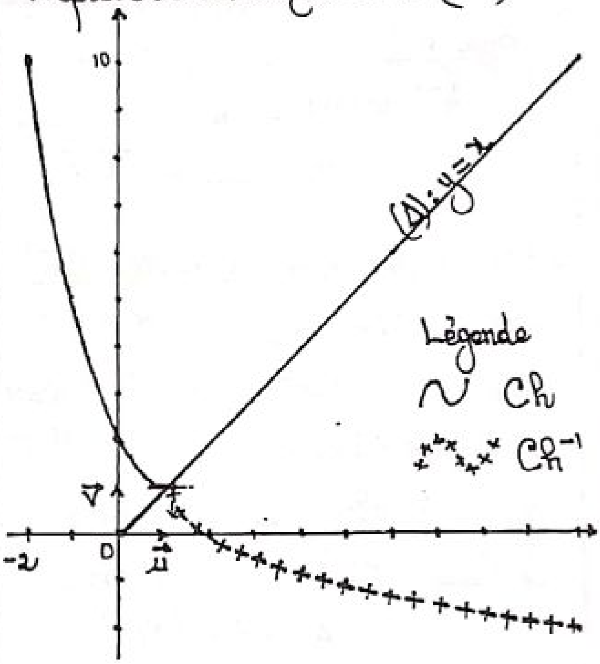
$$-2 \leq u < v \leq 1 \iff -3 \leq u-1 < v-1 \leq 0$$
$$\implies 0 \leq (v-1)^2 < (u-1)^2 \leq 9$$
$$\iff 1 \leq (v-1)^2+1 < (u-1)^2+1 \leq 10$$
$$\iff 1 \leq h(v) < h(u) \leq 10$$

h est donc décroissante sur $[-2;1]$

Tableau de variation de h

x	-2		1
h	10	$\searrow$	1

Représentation de la courbe (C_h).



2/ Montrons que h est bijective

Soit $a \in [1;10]$, résolvons l'équation

(E) : $x \in [-2;1]$, $h(x) = a$

$$h(x) = a \iff (x-1)^2 + 1 = a$$
$$\iff x - 1 = -\sqrt{a-1} \text{ ou } x - 1 = \sqrt{a-1}$$
$$\iff x = 1 - \sqrt{a-1} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{a-1}$$

De plus : $1 \leq a \leq 10 \implies 0 \leq a - 1 \leq 9$
$$\implies 0 \leq \sqrt{a-1} \leq 3 \ (1)$$

$$0 \leq \sqrt{a-1} \leq 3 \implies -3 \leq -\sqrt{a-1} \leq 0$$
$$\implies -2 \leq 1 - \sqrt{a-1} \leq 1 \ (a)$$

$$0 \leq \sqrt{a-1} \leq 3 \implies 1 \leq 1 + \sqrt{a-1} \leq 4 \ (b)$$

(a) et (b) montrent que l'équation (E) admet une seule solution

$x = 1-\sqrt{a-1}$ donc h est bijective.

<u>Déterminons la bijection réciproque h^{-1}</u>

$$h^{-1}: [1;10] \longrightarrow [-2;1]$$
$$x \longmapsto 1-\sqrt{x-1}$$

3/ <u>Construction de la courbe Ch^{-1} représentative de h^{-1}</u>

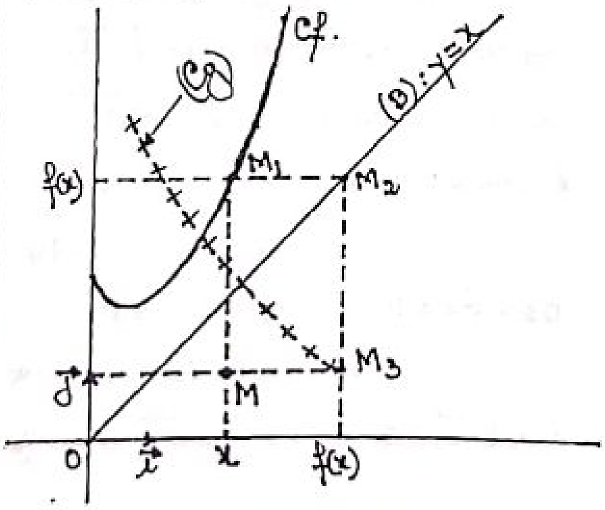
Soit (Δ) la droite d'équation $y=x$. (Ch^{-1}) est l'image de (Ch) par la symétrie orthogonale par rapport à (Δ)

Méthode : si $A(a;b)\in(Ch)$ alors $A'(b;a)\in(Ch^{-1})$.

(Voir figure à la page précédente)

EXERCICE 9

PARTIE A



Soit f et g deux fonctions et $h = g\circ f$. Soit (C_f) et (C_g) les représentations graphiques respectives de f et g. Soit M_1 le point d'abscisse x de la courbe (C_f).

1/ <u>Exprimons les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M.</u>

$M_1\left(x; f(x)\right)$ $\quad$ $M_2\left(f(x); f(x)\right)$

$M_3\left(f(x); g[f(x)]\right)$ $\quad$ $M\left(x; g[f(x)]\right)$

2/ <u>Justifions que le point M appartient à la courbe (C_h).</u>

$M\left(x; g[f(x)]\right)$ or $g[f(x)] = (g\circ f)(x) = h(x)$

donc $M(x; h(x))$.

Le point M appartient donc à la courbe (C_h).

PARTIE B

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2-1$ $\quad$ $g: [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

1/ <u>Rappelons le tableau de variation des fonctions f et g.</u>

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Vf	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
V_g	0	$\nearrow$	$+\infty$

2-/ Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $h = g \circ f$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$

Posons $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{D_h =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[}$$

3-/ Démontrons que la fonction h est paire

$\forall x \in D_h, -x \in D_h$

$h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$h(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = h(x)$.

La fonction h est donc paire.

4-/ Etudions les variations de h en utilisant g et f

• Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $1 \leq x_1 < x_2$ on a:

$f(1) \leq f(x_1) < f(x_2)$ car f est croissante sur $[0; +\infty[$

$\Rightarrow 0 \leq f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow 0 \leq g[f(x_1)] < g[f(x_2)]$ car g est croissante sur $[0; +\infty[$ et $g(0) = 0$

$\Rightarrow 0 \leq h(x_1) < h(x_2)$ donc h est croissante sur $[1; +\infty[$.

• Supposons à présent que: $x_1 < x_2 \leq -1$

on a: $f(x_1) \cdot f(x_2)\ 0$ car f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(-1) = 0$

$\Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \geq 0$ car g est croissante sur $[0; +\infty[$ et $g(0) = 0$

$\Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \geq 0$ donc h est décroissante sur $]-\infty; -1]$

Conclusion:

h est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ avec $h(-1) = h(1) = 0$

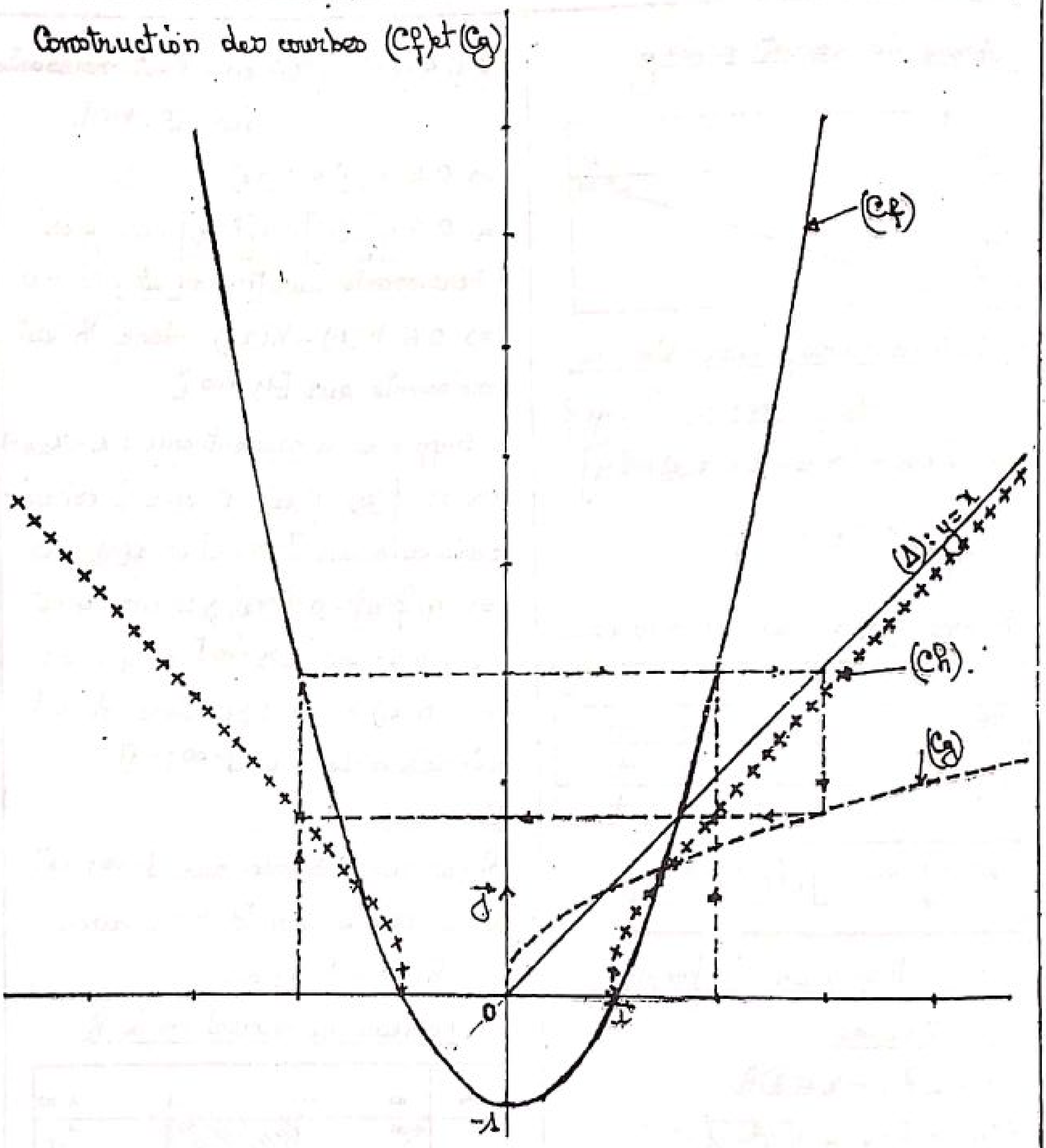
Tableau de variation de h

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
V_h	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

5-/ Traçons (C_f) et (C_g) dans le même repère

(Voir figure à la page suivante

Construction des courbes (C_f) et (C_g)



Construction de la courbe (C_h) point par point en utilisant la partie A.

(Voir figure ci-dessus)

E-mail: koehyppo@yahoo.fr
Tél: 90 16 93 00 / 99 54 56 40
91 82 84 61 / 99 09 43 63
90 72 10 72

Chapitre 2

FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

COURS

FONCTION POLYNÔME DU SECOND DEGRE - EQUATIONS - INEQUATIONS - SYSTEMES

I/ FONTION POLYNÔME DU SECOND DEGRE

1-/ Définition

On appelle fonction polynôme du second dégré, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x associe

$f(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Exemples :

- La fonction définie dans $\mathbb{R}$ qui à tout $x \longmapsto 2x^2+3x-1$ est une fonction polynôme du second dégré.
- Cependant, la fonction $x \mapsto x^2-(x-1)^2$ n'est pas une fonction polynôme du second dégré.

2-/ Forme canonique d'un polynôme du second dégré

Posons $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$

On peut écrire successivement

$$f(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$
$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$

Pour tout nombre reel x,

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \quad (1)$$

La relation (1) est appelée forme canonique du polynôme du second dégré.

Exemples

Donner la forme canonique de chacune des fonctions f et g définies par :

$f(x) = -2x^2+5x-11 \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+1$

Résolution

$$f(x) = -2x^2+5x-11$$
$$= -2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{11}{2}\right)$$
$$= -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{11}{2}\right]$$

$$\boxed{f(x) = -2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{63}{16}\right]}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+1$$
$$= \frac{1}{3}\left(x^2-6x+3\right) = \frac{1}{3}\left[(x-3)^2-6\right]$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{3}\left[(x-3)^2-6\right]}$$

Méthode:

Soit à déterminer la forme canonique d'un polynôme du second dégré de la forme : $f(x) = ax^2+bx+c$.

Pour les élèves qui s'embrouilleraient, proceder de la manière suivante:

- Calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$ • Calculer $\Delta = b^2-4ac$
- Calculer $\beta = \frac{\Delta}{4a^2}$ On a alors

$$f(x) = a\left[(x-\alpha)^2-\beta\right]$$

II./ EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1./ Définition

On appelle équation du second dégré toute équation d'inconnue x de la forme: $(E): x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

2./ Résolution d'une équation du second dégré

a./ Cas particuliers

- Cas où $c=0$

L'équation (E) devient : $ax^2+bx=0$

$\Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{b}{a}$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{b}{a};0\right\}}$$

- Cas où $b=0$

L'équation (E) devient : $ax^2+c=0$

$\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$

i/ Si a et c sont du même signe, l'équation n'a pas de solution

ii/ Si a et c sont de signes contraires alors : $x=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ ou $x=\sqrt{\frac{-c}{a}}$

$$\boxed{S=\left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}};\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}}$$

b./ Cas où une solution est connue

Soit x_1 la solution connue. L'autre solution est $x_2=-\frac{b}{a}-x_1$. On a alors

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)} \quad (2)$$

(2) est appelée forme factorisée de ax^2+bx+c

Démontrons (2)

x_1 solution de (E) $\Leftrightarrow ax_1^2+bx_1+c=0$

$\Leftrightarrow ax^2+bx+c=ax_1^2+bx_1+c$

$\Leftrightarrow a(x^2-x_1^2)+b(x-x_1)=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)[a(x+x_1)+b]=0$

$\Leftrightarrow a(x-x_1)\left(x+x_1+\frac{b}{a}\right)=0 \quad (3)$

Posons $x_2=-\frac{b}{a}-x_1$

$(3) \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$

c./ Cas général

L'équation (E) : $x\in\mathbb{R}, ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$ et donc à:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ car $a\neq 0$

En posant $\Delta=b^2-4ac$ on obtient:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

1er cas : $\Delta<0$

$-\frac{\Delta}{4a^2}>0$; l'équation (E) n'admet pas de solution.

2e cas : $\Delta=0$

(E) devient $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$

(E) admet donc une seule solution $x_0=-\frac{b}{2a}$ appelée solution double.

3e cas : $\Delta>0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

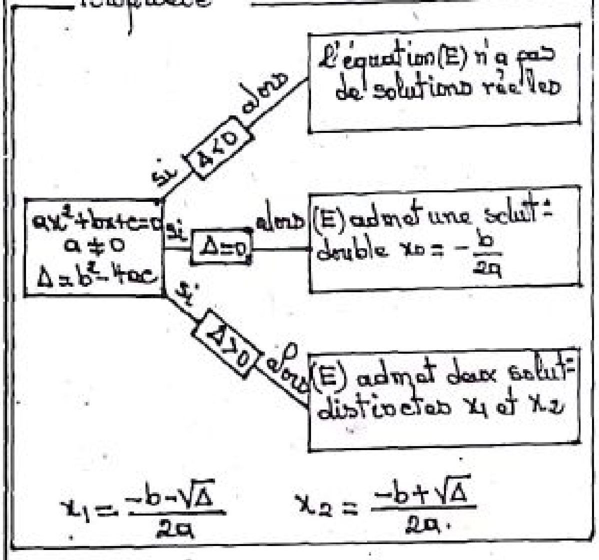
(E) admet donc pour solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Définition

On appelle discriminant du polynôme ax^2+bx+c, le nombre réel noté Δ tel que : $\Delta = b^2-4ac$.

Propriété



d-/ Notion de discriminant réduit

Soit à résoudre l'équation

(E): $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$.

si b est divisible par 2, on pose : $b' = \frac{b}{2}$ puis on calcule $\Delta' = b'^2 - ac$. appelé discriminant réduit.

Dans ce cas les solutions de (E) si elles existent sont : $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Remarque : $\Delta = 4\Delta'$

3-/ Equation bicarrée

a-/ Définition

On appelle équation bicarrée toute équation de la forme : $x \in \mathbb{R}$, $ax^4+bx^2+c=0$ avec $a \neq 0$. (E)

b-/ Résolution de l'équation bicarrée

Pour résoudre une telle équation, on introduit une inconnue auxilliaire $X = x^2$ (1). L'équation devient alors

(E'): $aX^2+bX+c=0$

On resoud d'abord (E') et on déduit les solutions de (E) à partir de (1).

- Si (E') n'admet pas de solution ou admet deux solutions négatives, alors (E) n'a pas de solution
- Si (E') admet une solution double négative alors (E) n'a pas de solution
- Si (E') admet deux solutions dont une négative et l'autre nulle, alors (E) admet une seule solution qui est 0.
- Si (E') admet deux solutions de signes contraires ou une solution double positive alors (E) admet deux solutions.
- Si (E') admet deux solutions dont une positive et l'autre nulle alors (E) admet trois solutions
- Si (E') admet deux solutions positives alors (E) admet quatre solutions

c./ Autres formes d'équations dont la resolution necessite une inconnue auxilliaire :

• (E_1) : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2+b|x|+c=0$

Pour résoudre une telle équation, on pose $X=|x|$ (2) (E_1) devient :

(E'_1) : $aX^2+bX+c=0$

On resoud (E'_1) puis on deduit les solutions de (E_1) à partir de (2)

• (E_2) : $x \in \mathbb{R}$, $ax+b\sqrt{x}+c=0$

Dans ce cas on pose $X=\sqrt{x}$ (3)

(E_2) devient alors $aX^2+bX+c=0$ (E'_2)

(E_2) n'admet des solutions que si (E'_2) admet des solutions positives ou nulle. Les solutions de (E_2) sont déduites de (3) qui équivaut à $x=X^2$.

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1./ $x^4+10x^2+24=0$; 2./ $9x^4+8x^2-1=0$

3./ $2x^4+x^2-1=0$; 4./ $3x^2-10|x|+3=0$

5./ $-2x^4+8x^2=0$ 6./ $x^2-|x|=0$

Résolution

1./ (E_1) : $x^4+10x^2+24=0$.

Posons $X=x^2$ (1)

$(E_1) \Leftrightarrow X^2+10X+24=0$

$\Delta' = 25-24 = 1$

$X_1=-5-1=-6$; $X_2=-5+1=-4$

$X_1<0$ et $X_2<0$

(E_1) n'a donc pas de solution

$\boxed{S=\emptyset}$

2./ (E_2) : $9x^4+8x^2-1=0$

Posons $X=x^2$ (1)

$(E_2) \Leftrightarrow 9X^2+8X-1=0$

$\Delta' = 16+9 = 25 = 5^2$

$X_1=\frac{-4-5}{9}=-1$; $X_2=\frac{-4+5}{9}=\frac{1}{9}$

$x^2=X_1 \Leftrightarrow x^2=-1$ impossible.

$x^2=X_2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{1}{3}$.

$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}}$

3./ (E_3) : $2x^4+x^2-1=0$

Posons $X=x^2$ (1).

$(E_3) \Leftrightarrow 2X^2+X-1=0$

$\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$

$X_1=\frac{-1-3}{4}=-1$; $X_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

$x^2=X_1 \Leftrightarrow x^2=-1$ impossible

$x^2=X_2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$

4./ (E_4) : $3x^2-10|x|+3=0$

Posons $X=|x|$ (1)

$(E_4) \Leftrightarrow 3X^2-10X+3=0$

$\Delta' = 25-9 = 16 = 4^2$

$X_1 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$; $X_2 = \frac{5+4}{3} = 3$

$|x| = X_1 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{3}$.

$|x| = X_2 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.

$$\boxed{S = \left\{-3 ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; 3\right\}}$$

5/ (E_5) : $-2x^4 + 8x^2 = 0$

Posons $X = x^2$ (1)

$(E_5) \Leftrightarrow -2X^2 + 8X = 0$

$\Leftrightarrow -2X(X-4) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 4$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

$$\boxed{S = \{-2 ; 0 ; 2\}}$$

6/ (E_6) : $x^2 - |x| = 0$

Posons $X = |x|$ (1).

$(E_6) \Leftrightarrow X^2 - X = 0 \Leftrightarrow X(X-1) = 0$

$\Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 1$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$$\boxed{S = \{-1 ; 0 ; 1\}}$$

4/ Somme et Produit des solutions d'une équation du second dégré

Soit le polynôme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ dont le discriminant est positif.

Ce polynôme admet deux racines x_1 et x_2 éventuellement égales.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Un calcul simple conduit à :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}.$$

Propriété

> Si l'équation du second dégré $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 éventuellement égales alors : leur somme vaut $S = -\frac{b}{a}$ et leur produit vaut $P = \frac{c}{a}$.

Conséquence

Soit l'équation :

(E) : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

admettant deux solutions x_1 et x_2 on a :

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$(E) \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$ car $a \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

On peut donc dire :

> Deux nombres réels x_1 et x_2 dont on connaît la somme S et le produit P sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

5/ Signe d'une fonction polynôme du second dégré

Soit f la fonction polynôme du second dégré à variable réelle x définie par :

$f(x) = ax^2+bx+c$ avec $(a \neq 0)$.

On a : $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, $\Delta = b^2-4ac$

- si $\Delta < 0$ alors pour tout x réel

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \text{ car } -\frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

Le signe de $f(x)$ est donc le signe de a pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

- si $\Delta = 0$ alors pour tout x réel, $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right) \geq 0$.

$f(x)$ a donc le signe de a pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

- si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2 et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Le tableau ci-dessous nous permet de déterminer le signe du polynôme.

Supposons $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a.

Propriété.

Le signe de ax^2+bx+c est :

- le signe de a $\forall x \in \mathbb{R}$ si $\Delta < 0$
- le signe de a pour tout x autre que la racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- le signe de a si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, le signe de $-a$ si $x \in]x_1; x_2[$ pour $\Delta > 0$, x_1 et x_2 étant les zéros de ax^2+bx+c

Exemples.

- Le polynôme $2x^2+x+1$ a pour discriminant $-7<0$. Le coefficient de x^2 est $2>0$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$ $2x^2+x+1>0$.
- Le polynôme $-x^2+6x-9$ a pour discriminant 0. Le coefficient de x^2 est $-1<0$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de 3 qui annule le polynôme $-x^2+6x-9<0$.
- Le polynôme $-6x^2-7x+3$ a pour discriminant 121. Il admet deux racines qui sont $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Le coefficient de x^2 est $-6<0$.
  - $-6x^2-7x+3<0$ si $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[$
  - $-6x^2-7x+3>0$ si $x \in]-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}[$
  - $-6x^2-7x+3=0$ si $x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right\}$

6/ Inéquations du second degré.

a/ Définition

On appelle inéquation du second degré à inconnue x toute inéquation de la forme :

$(I) : x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c \begin{pmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{pmatrix} 0$

avec $a \neq 0$.

b./ Résolution

Pour résoudre une inéquation du second degré :

- On résoud l'équation $ax^2+bx+c=0$
- On étudie le signe de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ suivant les valeurs de x, de préférence dans un tableau
- L'ensemble solution de l'inéquation se lit aisément dans le tableau.

EXERCICE D'APPLICATION

PARTIE A.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1./ $x^2-5x+6 \geq 0$; 2./ $-4x^2+4x-1 \geq 0$

3./ $2x^2+3x+1 < 0$; 4./ $-3x^2+10x-3 < 0$

5./ $x^2-6x+9 < 0$; 6./ $-x^2+10x-25 < 0$

PARTIE B

Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation :

$(I) : (m-4)x^2+(m-2)x+m-2 \leq 0$.

Résolution

PARTIE. A.

1./ $x^2-5x+6 \geq 0$ (I_1)

Posons $x^2-5x+6=0$ $\Delta = 25-24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Signe de x^2-5x+6

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[}$$

2./ $(I_2) : x \in \mathbb{R}, -4x^2+4x-1 \geq 0$

Posons $-4x^2+4x-1=0$ (E_2)

$\Delta' = 4-4=0$

(E_2) admet une solution double

$x_0 = \frac{1}{2}$.

Signe de $-4x^2+4x-1$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$-4x^2+4x-1$		$-$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

3./ $(I_3) : x \in \mathbb{R},\ 2x^2+3x+1 < 0$

Posons $(E_3) : x \in \mathbb{R},\ 2x^2+3x+1=0$

$\Delta = 9-4\times2\times1 = 1 = 1^2$

$x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$; $x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

Signe de $2x^2+3x+1$

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
$2x^2+3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S =]-1; -\frac{1}{2}[}$$

4./ $(I_4) : -3x^2+10x-3 < 0$

Posons $(E_4) : x \in \mathbb{R},\ -3x^2+10x-3$

$$\Delta' = 5^2 - (-3)(-3) = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-5-4}{-3} = 3 \; ; \; x_2 = \frac{-5+4}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Signe de $-3x^2+10x-3$

x	$-\infty$		$1/3$		3		$+\infty$
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[\cup \left]3; +\infty\right[}$$

5/ (I_5) : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 9 < 0$

Posons (E_5) : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta' = 9 - 9 = 0$; (E_5) admet une solution double $x_0 = 3$.

Signe de x^2-6x+9

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	0	$+$	

$$\boxed{S = \emptyset}$$

6/ (I_6) : $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + 10x - 25 < 0$

Posons (E_6) : $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + 10x - 25 = 0$

$\Delta' = 25 - 25 = 0$; (E_6) admet une solution double $x_0 = 5$.

Signe de $-x^2+10x-25$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$-x^2+10x-25$		$-$	0	$-$	

$$\boxed{S = \mathbb{R} - \{5\}}$$

PARTIE B

Discutons et resolvons suivant les valeurs du paramètre reel m, l'inéquation :

(I) : $x \in \mathbb{R}$, $(m-4)x^2 + (m-2)x + m - 2 \leq 0$.

1er cas : $m = 4$

(I) devient $2x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

$$\boxed{S = \left]-\infty; -1\right]}$$

2e cas $m \neq 4$.

Posons $f_m(x) = (m-4)x^2 + (m-2)x + m - 2$

Resolvons l'équation :

(E) : $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) = 0$.

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(m-4)(m-2)$$
$$= (m-2)(m-2-4m+16)$$
$$= (m-2)(-3m+14)$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ou $m = \frac{14}{3}$.

m	$-\infty$		2		4		$14/3$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$m-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

• $m < 2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ m - 4 < 0 \end{cases}$

(E) n'a pas de solutions. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) < 0$

$$\boxed{S_I = \mathbb{R}}$$

• $2 < m < 4. \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m - 4 < 0 \end{cases}$

(E) admet deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-m+2-\sqrt{\Delta}}{2(m-4)}$ et $x_2 = \frac{-m+2+\sqrt{\Delta}}{2(m-4)}$

$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{m-4} < 0 \Leftrightarrow x_2 < x_1$

Signe de $f_m(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S_I =]-\infty ; x_2] \cup [x_1 ; +\infty[}$$

- $4 < m < \frac{14}{3} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m-4 > 0 \end{cases}$

(E) admet deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-m+2-\sqrt{\Delta}}{2(m-4)}$ et $x_2 = \frac{-m+2+\sqrt{\Delta}}{2(m-4)}$

$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{m-4} > 0 \Rightarrow x_1 < x_2$.

Signe de $f_m(x)$ suivant les valeurs de x

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S_I = [x_1 ; x_2]}$$

- $m > \frac{14}{3} \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ m-4 > 0 \end{cases}$

(E) n'a pas de solution. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) > 0$ d'où

$$\boxed{S_I = \emptyset}$$

- $m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ m-4 < 0 \end{cases}$

(E) admet une solution double $x_0 = 0$.

$\forall x \neq 0$, $f_2(x) < 0$ et $f_2(0) = 0$

$$\boxed{S_I = \mathbb{R}}$$

- $m = \frac{14}{3} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ m-4 > 0 \end{cases}$

(E) admet une solution double $x_0 = -2$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $f_{\frac{14}{3}}(x) > 0$ et $f_{\frac{14}{3}}(-2) = 0$ d'où

$$\boxed{S_I = \{-2\}}$$

7/ Signe des solutions d'une équation du second degré.

On suppose $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, l'équation possède donc deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Pour connaître le signe des racines sans les avoir calculées, on étudie soigneusement le signe de leur produit P et de leur somme S (de préférence dans un tableau).

1er cas

$P>0$	$S>0$	Deux solutions positives $0 < x_1 < x_2$
	$S<0$	Deux solutions négatives $x_1 < x_2 < 0$

2e cas

$P<0$	$S>0$	Deux solutions de signes contraires $x_1 < 0 < x_2$ et $\lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert$
	$S<0$	Deux solutions de signes contraires $x_1 < 0 < x_2$ et $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
	$S=0$	Deux solutions opposées.

3^e cas

$P=0$	$S>0$	Deux solutions x_1 et x_2 telles que : $x_1=0$ et $x_2>0$
	$S<0$	Deux solutions x_1 et x_2 telles que : $x_1=0$ et $x_2<0$.

8·/ Position des racines par rapport à un réel α non nul donné

Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

On suppose que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 c'est-à-dire que $\Delta = b^2-4ac>0$ et on se propose de positionner ces deux solutions par rapport à un réel α non nul donné.

Pour mener cette tâche, on procède de la manière suivante :

On calcule le produit $a \cdot f(\alpha)$ et on étudie son signe.

1^{er} cas : $a \times f(\alpha) < 0$ on a : $x_1 < \alpha < x_2$

2^e cas : $a \times f(\alpha) > 0$

- si $\frac{S}{2} - \alpha > 0$ alors $\alpha < x_1 < x_2$
- si $\frac{S}{2} - \alpha < 0$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$.

EXERCICE D'APPLICATION

PARTIE A

Soit l'équation (E) :

$x \in \mathbb{R}, (m-3)x^2+4x+m=0$

1·/ Pour quelle valeur m_0 de m, (E) est-elle du premier degré?

2·/ Resoudre (E) pour $m = m_0$.

3·/ Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles

a·/ (E) n'admet pas de solutions

b·/ (E) admet une solution double.

c/ (E) admet deux solutions distinctes

PARTIE B.

On considère l'équation (E') :

$x \in \mathbb{R}, (m+2)x^2-2(m+4)x+2m+5=0$

où m est un paramètre réel.

1·/ Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solut- de l'équation (E').

2·/ En déduire le nombre de solutions de l'équation (E'') :

$x \in \mathbb{R}, (m+2)x^4-2(m+4)x^2+2m+5=0$

3·/ Discuter suivant les valeurs de m la position des solutions de (E) par rapport à 1

Résolution

PARTIE A.

Soit l'équation (E) :

$x \in \mathbb{R}, (m-3)x^2+4x+m=0$

1·/ Valeur m_0 de m pour laquelle (E) est du premier degré

(E) est du premier degré si $m-3=0 \Leftrightarrow m=3$

$$\boxed{m_0 = 3}$$

2./ Résolution de (E) pour $m = m_0$.

Pour $m = 3$, (E) devient $4x+3=0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}}$$

3./ Déterminons l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles :

a./ (E) n'admet pas de solution

$\Delta' = 2^2 - m(m-3) = -m^2+3m+4$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0$

$$\delta = 9+16 = 25 = 5^2$$

$m_1 = \frac{3-5}{2} = -1$; $m_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

Signe de Δ'

m	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	0	$-$	

(E) n'admet pas de solution ssi $\Delta' < 0$

$\Leftrightarrow m < -1$ ou $m > 4$.

L'ensemble I des valeurs de m pour lesquelles (E) n'admet pas de solution est $\boxed{I =]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[}$

b./ (E) admet une solution double.

(E) admet une solution double ssi $\Delta' = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 4$.

L'ensemble J des valeurs de m pour lesquelles (E) admet une solution double est : $\boxed{J = \{-1; 4\}}$

c./ (E) admet deux solutions distinctes

(E) admet deux solutions distinctes ssi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4$.

L'ensemble K des valeurs de m pour lesquelles (E) admet deux solutions distinctes est : $\boxed{K =]-1; 4[- \{3\}}$

PARTIE B

On considère l'équation (E') :

$x \in \mathbb{R}$, $(m+2)x^2 - 2(m+4)x + 2m+5 = 0$ où m est un paramètre réel.

1./ Discutons suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de (E')

1er cas : $m = -2$

$(E') \Leftrightarrow -4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

$$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

2e cas : $m \neq -2$

$\Delta' = (m+4)^2 - (m+2)(2m+5)$

$= m^2+8m+16-2m^2-9m-10$

$\Delta' = -m^2-m+6 = -(m^2+m-6)$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2+m-6=0$

$$\delta = 1^2+24 = 25 = 5^2$$

$m_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$; $m_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$

Soit P et S le produit et la somme respectif des solutions éventuelles de (E').

$P = \frac{2m+5}{m+2}$ $\quad P = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

$S = \frac{2(m+4)}{m+2}$; $S = 0 \iff m = -4$.

Resumons les résultats de notre discussion dans le tableau ci-dessous

m	-4	-3		$-5/2$		-2		2	$+\infty$
Δ'		0	+		+		+	0	
P			+	0	−		+		
S			−		−		+		
nbre et signe des sol. de (E')	$S=\emptyset$	1 : $x'=x''<0$	2 : $x'<x''<0$	2 : $x'=0$, $x''<0$	2 : $x'<0<x''$	1 : $x=\frac{1}{4}$	2 : $0<x'<x''$	1 : $x'=x''>0$	$S=\emptyset$

2·/ <u>Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation (E'') :</u>

$x \in \mathbb{R}$, $(m+2)x^4 - 2(m+4)x^2 + 2m+5 = 0$

Posons $X = x^2$ (E'') devient :

$X \in \mathbb{R}^+$, $(m+2)X^2 - 2(m+4)X + 2m+5 = 0$

X est solution de (E').

Le nombre de solutions de (E'') dépend du nombre et du signe des solutions de (E').

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous.

m	$-\infty$	$-5/2$		-2		2	$+\infty$
nbr. de solut. de (E'')	0	1	2	2	4	2	0

3·/ <u>Discutons suivant les valeurs de m la position des solutions éventuelles de (E') par rapport à 1</u>

Posons $f_m(x) = (m+2)x^2 - 2(m+4)x + 2m+5$.

$$\Delta' = -m^2 - m + 6$$

$(m+2) f_m(1) = (m+2)(m-1)$.

$(m+2) f_m(1) = 0 \iff m = -2$ ou $m = 1$

$\frac{S}{2} - 1 = \frac{2}{m+2}$

Resumons les résultats dans le tableau ci-dessous :

m		-3		-2		1		2	
Δ'		0	+		+		+	0	
$(m+2)f_m(1)$			+		−	0	+		
$\frac{S}{2} - 1$			−		+		+		
Posit° des sol de (E') par rapport à 1	$S=\emptyset$	1 : $x'=x''<1$	2 : $x'<x''<1$	1 : $x=\frac{1}{4}<1$	2 : $x'<1<x''$	2 : $x'=1$, $x''>1$	2 : $1<x'<x''$	1 : $x'=x''>1$	$S=\emptyset$

III·/ <u>VARIATION ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRE</u>

1·/ <u>Sens de variation</u>

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

La forme canonique de $f(x)$ nous permet d'écrire pour tout réel x :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} ; \ \Delta = b^2 - 4ac$$

Soient u et v deux nombres réels tq $u < v$. Comparer $f(u)$ et $f(v)$, revient à comparer $a\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $a\left(v+\frac{b}{2a}\right)^2$

On démontre aisément que :

- $u < v < -\frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} f(u) > f(v) \text{ si } a > 0 \\ f(u) < f(v) \text{ si } a < 0 \end{cases}$

• $-\frac{b}{2a} < u < v \Rightarrow \begin{cases} f(u) < f(v) \text{ si } a>0 \\ f(u) < f(v) \text{ si } a<0 \end{cases}$

En récapitulatif on a :

• Si le nombre réel a est strictement positif, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{b}{2a}[$, strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ et admet un minimum au point $-\frac{b}{2a}$.

• Si le nombre réel a est strictement négatif, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{b}{2a}[$, strictement décroissante sur $]-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ et admet un maximum au point $-\frac{b}{2a}$.

On en déduit les tableaux de variations ci-dessous en fonction du signe de a :

$a<0$

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
Vf	$-\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

$a>0$

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
Vf	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

2°/ Axe de symétrie et sommet

Soit (D) la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et S le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

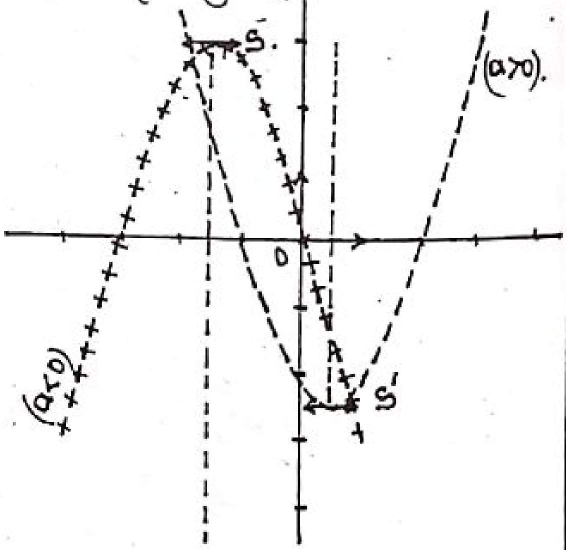
(D) est l'axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c \ (a \neq 0)$ et S en est le sommet.

Propriété

La courbe représentative (P) de la fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

Cette courbe s'appelle une parabole et le point $S\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ en est le sommet.

Donnons une allure de la parabole suivant le signe de a :



Méthodes :

Pour bien représenter une parabole :

- On place le sommet.
- On trace en pointillet l'axe de symétrie
- On cherche l'intersection avec l'axe

des ordonnées en calculant $f(0)$.

- On cherche l'intersection avec l'axe des abscisses en résolvant $f(x)=0$.
- On fait un tableau de valeurs puis on trace la courbe avec soins.

EXERCICE D'APPLICATION

On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par:
$f(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminer a, b et c sachant que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 4 et passe par le point $A(2;-6)$

2/ Représenter soigneusement (C) après avoir dresser le tableau de variation de la fonction f.

3/ Soit (Δ) la droite d'équation

$$(\Delta): y = px+q$$

a/ Déterminer une relation entre p et q pour que (Δ) soit tangente à (C).

b/ En déduire l'équation des tangentes à (C) issues du point $B(1;-7)$

c/ Déterminer les points de contact et construire les deux tangentes.

Resolution.

Soit la fonction f définie par:
$f(x) = ax^2+bx+c$ et (C) sa courbe.

1/ Déterminons a, b et c pour que (C) coupe l'axe des abscisses aux points -1 et 4 et passe par $A(2;-6)$

Les conditions de l'énoncé se traduisent par:

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(4)=0 \\ f(2)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ 4a+2b+c=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a \\ a+b=-2 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-4 \end{cases}$$

$a=1$	$b=-3$	$c=-4$

2/ – Variation de f.

$f(x) = x^2-3x-4$.
$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, croissante sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et admet un minimum au point $\frac{3}{2}$ avec $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{4}$

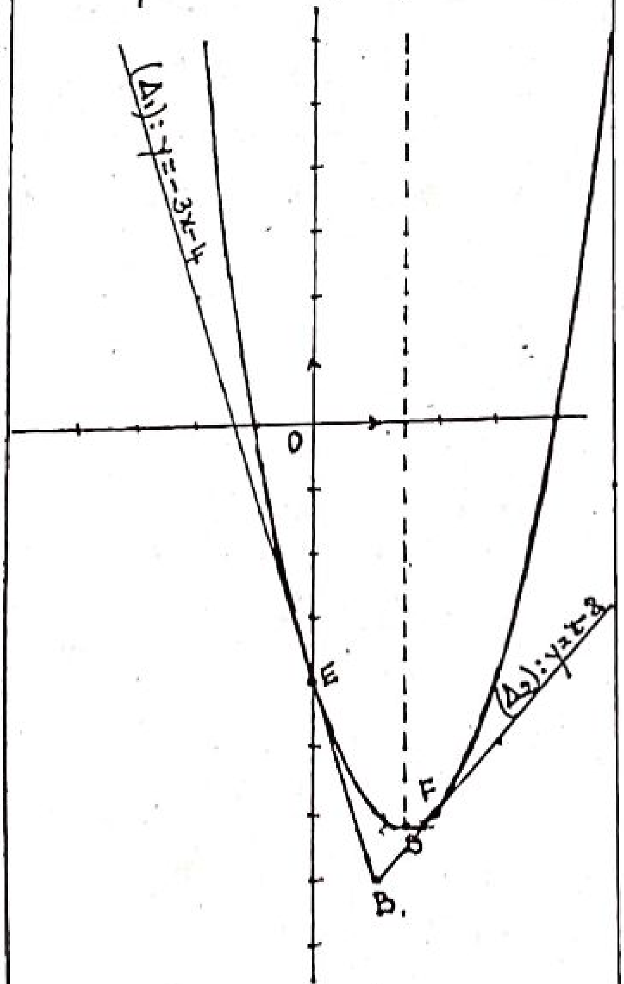
Tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
Vf	$+\infty$	$-\frac{25}{4}$	$+\infty$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0

Représentation de (C)



3/ Soit (Δ) la droite d'équation

(Δ) : $y = px+q$

a/ Déterminons une relation entre p et q pour que (Δ) soit tangente à (C).

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (C) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = px+q \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = px+q \Leftrightarrow x^2-3x-4 = px+q$

$\Leftrightarrow x^2-(p+3)x-q-4=0$ (E)

$\Delta = (p+3)^2-4(-q-4)$

$= (p+3)^2+4q+16.$

(C) et (Δ) sont tangentes ssi (E) admet une seule solution $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow (p+3)^2+4q+16=0$

Conclusion :

(Δ) est tangente à (C) ssi :

$\boxed{(p+3)^2+4q+16=0}$

b/ Déduisons-en l'équation des tangentes à (C) issues du point $B(1;-7)$

(Δ) tangente à (C) et passant par B

$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+3)^2+4q+16=0 \\ p+q=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-p-7 \\ (p+3)^2-4(p+3)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q=-p-7 \\ (p+3)(p-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \text{ et } q=-8 \\ \text{ou} \\ p=-3 \text{ et } q=-4. \end{cases}$

Les tangentes à (C) issues du point $B(1;-7)$ sont :

$\boxed{(\Delta_1): y=-3x-4 \text{ et } (\Delta_2): y=x-8.}$

c/ Points de contact.

Posons $E=(C)\cap(\Delta_1)$ et $F=(C)\cap(\Delta_2)$

on a: $x_E = \frac{p+3}{2}$ avec $p=-3$

$x_E = 0 \qquad y_E = -3x_E-4 = -4$

$x_F = \frac{p+3}{2}$ avec $p=1$

$x_F = 2 \qquad y_F = x_F-8 = -6$

On a donc :

$(C) \cap (\Delta_1) = E(0;-4)$

$(C) \cap (\Delta_2) = F(2;-6)$

Construction de (Δ_1) et (Δ_2)

Voir figure à la page précédente.

IV./ EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

1./ Equations irrationnelles

Soient f et g deux polynômes. On appelle équations irrationnelles les équations de la forme :

a./ $\sqrt{f(x)} = g(x)$ b./ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Pour résoudre ces équations on cherche d'abord le domaine de validité Dv défini par :

$Dv = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \geq 0\}$

puis on égale le carré des deux membres de l'égalité. Les solutions sont donc les éléments $x \in Dv$ et $f(x) = (g(x))^2$ resp $f(x) = g(x)$.

En résumé on a:

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

2./ Inéquations irrationnelles

Elles sont de la forme:

a./ $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ b./ $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

c./ $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ d./ $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

e./ $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ f./ $\sqrt{f(x)} < g(x)$

g./ $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ h./ $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

a) Résolution de: a, b, c, d, e, f.

La résolution de ces inéquations nécessite comme dans le cas des équations, la recherche du domaine de validité Dv :

$Dv = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \geq 0\}$.

Après avoir déterminé le Dv, élever les deux membres de l'inégalité et résoudre l'inéquation obtenue. (Soit S_1 son ensemble solution).

L'ensemble solution de l'inéquation mère est $S = S_1 \cap Dv$.

b/ Résolution de g et h

- On résoud l'inéquation $g(x) \leq 0$ soit I l'ensemble solution

On résoud l'inéquation $f(x) \geq 0$ soit J l'ensemble solution.

On pose $S_1 = I \cap J$.

- Dans le Dv on résoud l'inéquation comme dans les autres cas pour obtenir un ensemble solution S_2

L'ensemble solution de l'inéquation mère est : $S = S_1 \cup S_2$.

En d'autres termes :

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x \in D_V \\ \text{et} \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}$$

avec $D_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) \geq 0\}$

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1./ $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x}$ (E_1)

2./ $\sqrt{2x-3} = x-3$. (E_2)

3./ $\sqrt{x^2+2x} < \sqrt{2x^2-8}$ (I_1).

4./ $\sqrt{2x^2-3x+1} \geq x+1$ (I_2)

RESOLUTION

1./ $(E_1) : \sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x}$

$$(E_1) \iff \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2-4 = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{et} \\ x^2-4 = 3x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-3x-4 = 0 \ (1) \end{cases}$$

Resolvons (1)

$\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 < 2$ $\quad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 > 2$

$$\boxed{S = \{4\}}$$

2./ $(E_2) : \sqrt{2x-3} = x-3$

$$(E_2) \iff \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-8x+12 = 0 \end{cases}$$

$x^2-8x+12 = 0$ $\quad \Delta' = 16-12 = 4 = 2^2$

$x_1 = 4-2 = 2 < 3$; $x_2 = 4+2 = 6 > 3$

$$\boxed{S = \{6\}}$$

3./ $(I_1) : \sqrt{x^2+2x} < \sqrt{2x^2-8}$

$$(I_1) \iff \begin{cases} x^2+2x \geq 0 \\ 2x^2-8 \geq 0 \\ x^2+2x < 2x^2-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D_V \\ x^2-2x-8 > 0 \ (a) \end{cases}$$

avec $D_V =]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$

(a) $\iff x \in S_1 =]-\infty ; -2[\cup]4 ; +\infty[$

$S = S_1 \cap D_V$

$$\boxed{S =]-\infty ; -2[\cup]4 ; +\infty[}$$

4./ $(I_2) : \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x+1$

$$(I_2) \iff \begin{cases} \begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ \text{et} \\ x+1 \leq 0 \end{cases} (a) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x \in D_V \\ 2x^2-3x+1 \geq (x+1)^2 \end{cases} (b) \end{cases}$$

$$(a) \iff \begin{cases} x \in]-\infty ; \tfrac{1}{2}] \cup [1 ; +\infty[= I_1 \\ x \in]-\infty ; -1] \end{cases}$$

$\iff x \in]-\infty ; -1] = S_a$.

$D_V = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-3x+1 \geq 0 \text{ et } x+1 \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \in I_1 \text{ et } x \geq -1\}$

$= [-1 ; \tfrac{1}{2}] \cup [1 ; +\infty[$

$(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_Y \\ x^2 - 5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_Y \\ \text{et} \\ x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_Y \\ \text{et} \\ x \in I_2 =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[\end{cases}$

$S_b = D_Y \cap I_2$

$= [-1; 0] \cup [5; +\infty[$

$S = S_a \cup S_b$

$$\boxed{S =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[}$$

V./ SYSTEME D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

1./ Système d'équations

a./ Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$

Dans la résolution d'un tel système on peut utiliser trois méthodes :

- la méthode d'élimination
- la méthode de substitution
- la méthode de déterminant.

Les deux premières méthodes sont déjà étudiées dans les classes antérieures.

Méthode de déterminant

Soit à résoudre le système :

$(S) \begin{cases} ax + by = c \quad (E) \\ a'x + b'y = c' \quad (E'). \end{cases}$

Soit Δ le déterminant de ce système on a :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$

* si $\Delta \neq 0$ alors le système (S) admet une seule solution $(x; y)$ telle que : $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

avec : $\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'.$

* si $\Delta = 0$ alors on cherche à voir si les équations (E) et (E') sont équivalentes ou non.
  - si (E) et (E') sont équivalentes alors (S) admet une infinité de solutions.
  - si (E) et (E') ne sont pas équivalentes alors (S) est impossible et il n'y a pas de solution.

EXERCICE D'APPLICATION

Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m, le système $(S) : \begin{cases} mx + y = -1 \\ x + my = 1 \end{cases}$

Résolution

$(S) : \begin{cases} mx + y = -1 \quad (E_1) \\ x + my = 1 \quad (E_2). \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 1$

$\underline{1^{er}\text{cas}}$: $m \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

$\Delta \neq 0$ et (S) admet une seule solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-m-1}{m^2-1} = -\frac{1}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m-1}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{1}{m-1} ; \frac{1}{m-1}\right)\right\}}$$

$\underline{2^{e}\text{ cas} : m = -1}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y = -1 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-y = 1 \Leftrightarrow y = x-1$$

(S) admet une infinité de solution

$$\boxed{S = \{(k ; k-1)\}, k \in \mathbb{R}}$$

$\underline{3^{e}\text{ cas } m = 1}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ x+y = 1 \end{cases} \text{ impossible.}$$

$$\boxed{S = \emptyset}$$

b/ <u>Système d'équations dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$</u>

Pour résoudre ces systèmes on utilise la méthode de Gauss.

Elle consiste à transformer le système en un système triangulaire qui permet de déterminer les inconnues de proche en proche.

Exemple 1 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$(S) \begin{cases} 2x+7y+4z = 4 \\ 4x-3y-6z = 16 \\ -x+2y+2z = -3 \end{cases}$$

en le transformant en un système de la forme : $\begin{cases} a_1x = e_1 \\ a_2x+b_2y = e_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z = e_3. \end{cases}$

1/ Pour ce faire, on appelle L_1, L_2, L_3 les lignes du système (S).

Remplaçons L_1 par $L_1 - 2L_3$ et L_2 par $L_2 + 3L_3$. On note ces substitutions :

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$
$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$$
$$L_3 \leftarrow L_3$$

On obtient alors le système (S') ci-dessous :

$$(S') : \begin{cases} 4x+3y = 10 \\ x+3y = 7 \\ -x+2y+2z = -3. \end{cases}$$

2/ On appelle L'_1, L'_2, L'_3 les lignes du système (S) et on fait les substitutions suivantes : $L'_1 \leftarrow L'_1 - L'_2$

$$L'_2 \leftarrow L'_2$$
$$L'_3 \leftarrow L'_3$$

On obtient finalement le système triangulaire (S'') : $\begin{cases} 3x = 3 \\ x+3y = 7 \\ -x+2y+2z = -3 \end{cases}$

Ce système permet de déterminer x, puis y et enfin z. On a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{S = \{(1\,;\ 2\,;\ -3)\}}$$

EXERCICE D'APPLICATION

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} -2x-y+4t = 2 \\ 2x+3y+3z+2t = 14 \\ x+2y+z+t = 7 \\ -x-z+t = -1 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} 2x+5y-4z = -12 \\ 4x-8y+3z = -5 \\ 3x+2y+z = 6 \\ x+y-z = -4. \end{cases}$$

Résolution

$$(S_1) : \begin{cases} -2x-y+4t = 2 & L_1 \leftarrow L_1-4L_3 \\ 2x+3y+3z+2t = 14 & L_2 \leftarrow L_2-2L_3 \\ x+2y+z+t = 7 & L_3 \leftarrow L_3-L_4 \\ x-z+t = -1 & L_4 \leftarrow L_3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y+4z = 26 & L_1 \leftarrow L_1-4L_2 \\ y = z. & L_2 \leftarrow L_2 \\ x+y+z = 4 & L_3 \leftarrow L_2+L_3 \\ x+2y+z+t = 7 & L_4 \leftarrow L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+13y = 26 \\ y = z \\ x+2y = 4 \\ x+2y+z+t = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{(0\,;\ 2\,;\ 2\,;\ 1)\}}$$

$$(S_2)\begin{cases} 2x+5y-4z = -12 \\ 4x-8y+3z = -5 \\ 3x+2y+z = 6 \\ x+y-z = -4 \end{cases}$$

(S_2) est un système de 4 équations à 3 inconnues. Pour le résoudre, nous allons résoudre le système (S'_2) constitué par les 3 premières lignes et vérifier si la solution trouvée est solution de la 4^e ligne.

$$(S'_2)\begin{cases} 2x+5y-4z = -12 & L_1 \leftarrow 3L_1+4L_2 \\ 4x-8y+3z = -5 & L_2 \leftarrow L_2-3L_3 \\ 3x+2y+z = 6 & L_3 \leftarrow L_3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22x-17y = -56 & L_1 \leftarrow 14L_1+17L_2 \\ 5x+14y = 23 & L_2 \leftarrow L_2 \\ 3x+2y+z = 6 & L_3 \leftarrow L_3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 393x = -393 \\ 5x+14y = 23 \\ 3x+2y+z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

De plus : $-1+2-5 = -4$.

La solution $(-1\,;\ 2\,;\ 5)$ vérifie bien L_4.

d'où $\boxed{S = \{(-1\,;\ 2\,;\ 5)\}}$

2/ Système d'inéquations :

Un système d'inéquations est toujours résolu graphiquement. Dans cette partie nous allons nous borner aux systèmes d'inéquations à deux inconnues.

Les solutions sont des parties du plan, un plan que l'on ramène à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Procédons par des exemples.

Exemple 1

Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants :

1/ $\begin{cases} -x+2y+2 \geq 0 \\ x+y-3 < 0 \end{cases}$ 2/ $\dfrac{x-3y+1}{x+y-2} > 0$

3/ $(x^2-xy)(x+2y-1) > 0$

Résolution

1/ $\begin{cases} -x+2y+2 \geq 0 \\ x+y-3 < 0 \end{cases}$

Soit (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives :

$(D_1) : -x+2y+2=0$ $(D_2) : x+y-3=0$

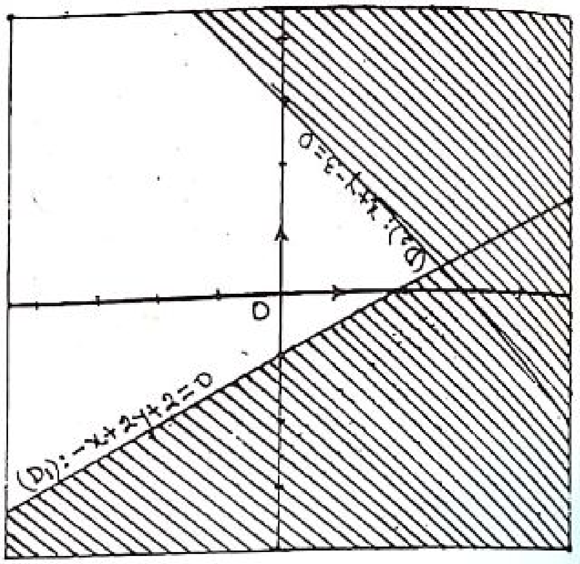
Représentons (D_1) et (D_2) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(D_1) :

x	0	2
y	-1	0

(D_2) :

x	0	3
y	3	0



Point test $O(0;0)$

$-0+2\times0+2 \geq 0$ Vrai.

$0+0-3 < 0$ Vrai.

L'ensemble solution est la partie non hachurée bord de (D_1) inclu et bord de (D_2) exclu

2/ $\dfrac{x-3y+1}{x+y-2} > 0$

Soient (Δ_1) et (Δ_2) les droites d'équations respectives :

$(\Delta_1) : x-3y+1=0$ $(\Delta_2) : x+y-2=0$

Représentons (Δ_1) et (Δ_2)

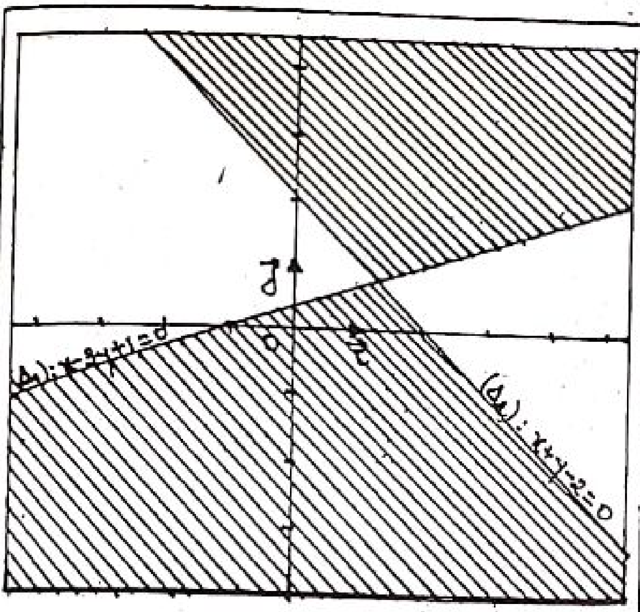
(Δ_1) :

x	2	-1
y	1	0

(Δ_2) :

x	0	2
y	2	0

Les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) divisent le plan en 4 zones. Nous prendrons dans chaque zone un point test pour vérifier si elle est solution ou pas.



Après vérification on aboutit au résultat suivant :

L'ensemble solution est la partie non hachurée, bords exclus.

3·/ $(x^2-xy)(x+2y-1)>0\ (I)$

$(I) \Leftrightarrow x(x-y)(x+2y-1)>0$

Soit (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les droites d'équations respectives :

$(\Delta_1): x=0 \quad (\Delta_2): x-y=0 \quad (\Delta_3): x+2y-1=0$

Représentons ces trois droites dans le repère ci-après.

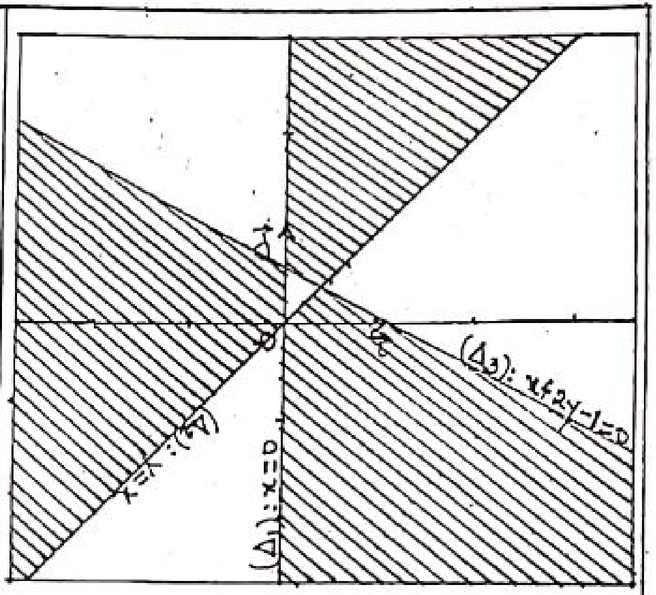
(Δ_1) est confondue à l'axe (OY)

(Δ_2) est la 1^{ere} bissectrice.

(Δ_3):

x	3	1
Y	-1	0

Après vérification par des points test bien choisis on aboutit au résultat suivant :



L'ensemble solution est la partie non hachurée, frontières exclues.

Conçu et Rédigé par :

E-mail: koehyppo@yahoo.fr
Tél: 90 16 93 00 / 99 54 56 40
91 82 84 61 / 99 09 43 63
90 72 10 72

ÉNONCÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1 (Corrigé à la page 82)

1/ Déterminer la forme canonique de chacune des fonctions polynômes suivantes :

$f(x) = 5x^2-10x+3$; $g(x) = -\frac{1}{2}x^2-3x+1$

$h(x) = \frac{2}{7}x^2+x-6$; $p(x) = -3x^2+6x-3$

2/ Soient a et b deux réels non nuls et différents de $\frac{1}{2}$. On pose :

$S = a+b$ et $P = ab$.

Déterminer en fonction de S et P chacune des expressions suivantes :

$A = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $B = a^2+b^2$; $C = a^3+b^3$

$D = a^4+b^4$; $E = |a-b|$

$F = (2a^2+1)(2b^2+1)$; $G = \frac{a}{2a-1}+\frac{b}{2b-1}$

$H = (a-b)^2$; $I = (a^2-b^2)^2$.

EXERCICE 2 (Corrigé à la page 83)

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a/ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-1 \end{cases}$ d/ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12} \\ xy=24. \end{cases}$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a/ $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ xy=-3 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{41}{400} \end{cases}$

EXERCICE 3 (Corrigé à la page 85)

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a/ $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ |x+y|=3 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(y-2)^2}=17 \\ \left|\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-2}\right|=3 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} (2x^2-1)(2y^2-1)=679 \\ xy=14. \end{cases}$

2/ Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m, les systèmes suivants :

a/ $(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x+y=3-\frac{m}{2} \\ xy=\frac{10-3m}{4} \end{cases}$

b/ $(x;y)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$, $\begin{cases} x+y=\frac{-4}{m-3} \\ xy=\frac{m}{m-3} \end{cases}$

c/ $(x;y)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{-}$, $\begin{cases} x+y=\frac{2}{m+3} \\ xy=\frac{m}{4(m+3)} \end{cases}$

EXERCICE 4 (Corrigé à la page 86)

Un circuit comporte une source de tension continue $U = 12V$, un ampermètre de résistances négligeable et deux resistances R_1 et R_2 dont on ne connait pas les valeurs.

Lorsque R_1 et R_2 sont montées en série l'ampermètre indique $0,48A$; par contre lorsqu'elles sont montées en parallèle, l'ampermètre indique $2A$.

Déterminer R_1 et R_2 sachant que $R_1 < R_2$.

EXERCICE 5 (Corrigé à la page 87)

Soit N un nombre à deux chiffres dans le système décimal et N' le nombre obtenu en permutant l'ordre des chiffres. On désigne par P le produit des chiffres et par S leur somme.

1/ On pose $Q = N \times N'$. Montrer que
$81P = Q - 10S^2$

2/ On donne $S = 11$ et $Q = 3478$
Sachant que $N' < N$, déterminer le nombre N.

EXERCICE 6 (Corrigé à la page 87)

Soit l'équation (E):
$x \in \mathbb{R}, 612x^3 - 168x^2 + 2x + 1 = 0$
On admet que (E) possède trois solutions a, b et c.

Sans calculer a, b et c, calculer la valeur exacte des expressions suivantes:
$S = a+b+c$; $P = abc$; $A = a^2+b^2+c^2$
$B = ab+ac+bc$; $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

EXERCICE 7 (Corrigé à la page 90)

Soit l'équation du second dégré
(E) : $x \in \mathbb{R}, (a-1)x^2 + 2bx - 2 = 0$ où a est un réel différent de 1

1/ Déterminer une relation entre a et b pour que (E) admette deux solutions distinctes.

2/ On suppose dans cette question que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Sans chercher à calculer x_1 et x_2, calculer en fonction de a et b les expressions suivantes

$A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; $B = (3x_1+2)(3x_2+2)$

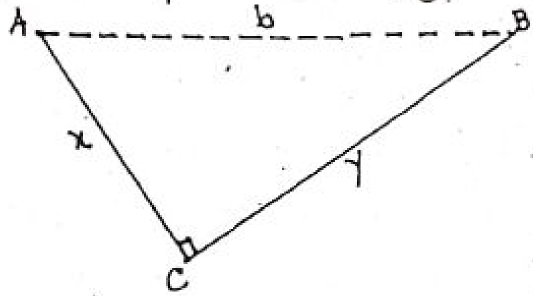
$C = x_1^3 + x_2^3$ $\qquad D = (x_1^2 - x_2^2)^2$

3/ Déterminer a et b pour que l'ensemble solution de l'équation (E) soit : $S = \{1 ; 2\}$

EXERCICE 8 (Corrigé à la page 91)

Un fil de longueur a est fixé entre deux points A et B tels que $AB = b$.
On se propose de tendre ce fil de

façon à obtenir un triangle rectangle en un point C (Voir figure)



1°/ Déterminer en fonction de a et b le périmètre du triangle ABC

2°/ Déterminer la relation entre a et b pour que :

a°/ ABC existe et soit rectangle au point C

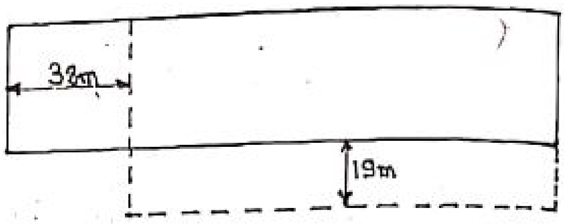
b°/ ABC soit la moitié d'un carré dont on déterminera le côté.

3°/ On pose $a = 28$ et $b = 20$.

Déterminer les cotés x et y formant l'angle droit du triangle ABC.

EXERCICE 9 (Corrigé à la page 92)

Dans le cadre d'un remembrement, un cultivateur qui possède un champ rectangulaire de $6432\,m^2$ voit le tracé de son champ modifié sans perte de terrain, comme l'indique la figure ci-contre. Le nouveau tracé est en pointillés.



Quelles sont les dimensions du champ (longueur et largeur) avant et après le remembrement ?

EXERCICE 10 (Corrigé à la page 93)

Soit l'équation du second degré

(E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2(m+1)x + 5m + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1°/ Etudier suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation (E).

2°/ En déduire le nombre de solutions de l'équation (E') :

$x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2(m+1)|x| + 5m + 1 = 0$

3°/a/ Montrer que lorsqu'elles existent, les solutions de (E) vérifient une égalité indépendante de m.

b/ Déterminer m pour que les racines x' et x'' de (E) vérifient l'égalité $x' - x'' = 4m$.

c/ Former l'équation (E_1) du second degré qui admet pour solutions les nombres $X' = 2x'$ et $X'' = 2x''$, x' et x'' étant les solutions de (E)

4/ Déterminer l'ensemble A des valeurs de m pour lesquelles les solutions x' et x'' de (E) vérifient :

$$x' < 3 < x'' < 8.$$

EXERCICE 11 (Corrigé à la page 94)

Soit l'équation (E) :

$x \in \mathbb{R}, (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 4m+1 = 0$

où m est un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions de (E).

2/ En déduire le nombre de solutions de l'équation :

(E'): $x \in \mathbb{R}, (m-1)x^4 - 2(m+1)x^2 + 4m+1 = 0$

suivant les valeurs de m.

3/ Dans le cas où (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 former :

a/ une équation (E_1) du second degré admettant pour solutions :

$$X_1 = \frac{1}{x_1} \text{ et } X_2 = \frac{1}{x_2}$$

b/ une équation (E_2) du second degré admettant pour solution :

$$X' = x_1^2 \text{ et } X'' = x_2^2.$$

4/ Déterminer l'ensemble B des valeurs de m pour lesquelles les solutions x_1 et x_2 de (E) appartiennent au domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

EXERCICE 12 (Corrigé à la page 96)

Soit l'équation (E) du second degré $x \in \mathbb{R}, x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ où m est un paramètre réel.

1/ Etudier suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation (E).

2/ a/ Etudier suivant les valeurs de m, la position des solutions de (E) par rapport à 1.

b/ En déduire le domaine de définition de la fonction :

$$f_m :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{P_m(x)} \text{ avec}$$

$$P_m(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6.$$

EXERCICE 13 (Corrigé à la page 97)

A tout nombre réel m, on associe l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2mx - 5 = 0$

Trouver dans chacun des cas suivants, une valeur du nombre réel m pour que les solutions x_1 et x_2 de (E) vérifient la relation :

a/ $(2x_1+1)(2x_2+1) = 3$

b/ $x_1^2 + x_2^2 = 4$

c/ $x_1^3 + x_2^3 = 16$

d/ $\frac{x_1-2}{x_2-2} + \frac{x_2-2}{x_1-2} = 5.$

EXERCICE 14 (Corrigé à la page 98)

On considère l'équation du second dégré (E) : $x \in \mathbb{R}$, $mx^2+3(m+1)x+4m=0$.
où m est un paramètre réel.

1/ Montrer que lorsque (E) admet deux solutions distinctes, elles sont toujours de même signe.

2/ Etudier suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de (E)

3/ En déduire le nombre de solutions de l'équation (E') :
$x \in \mathbb{R}$, $mx+3(m+1)\sqrt{x}+4m=0$.

4/ Etudier suivant les valeurs de m, la position du nombre 2 par rapport aux racines de (E).

5/ Discuter et résoudre suivant les valeurs de m l'inéquation :
(I) : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x-2}{mx^2+3(m+1)x+4m} \leq 0$.

EXERCICE 15 (Corrigé à la page 100)

Soit (E) l'équation du second dégré à inconnue t : $t^2-2(x-1)t+y-2x+1=0$ dans laquelle x et y sont les coordonnées d'un point M du plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Déterminer l'ensemble (P) des points M tels que (E) ait une solution double.

2/ Déterminer l'ensemble (D_1) des points M du plan pour lesquels (E) possède deux solutions distinctes

3/ Déterminer l'ensemble :

a/ (Δ) des points M du plan pour lesquels (E) admet deux racines de même signe.

b/ (Δ') des points M du plan pour lesquels (E) admet deux racines opposées.

EXERCICE 16 (Corrigé à la page 101)

On considère l'équation du second degré (E) : $t^2-2(x-y+1)t-y-2xy=0$ où t est l'inconnue et $(x;y)$ les coordonnées d'un point M du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ Discuter suivant la position du point M dans le plan, le nombre de solutions de l'équation (E)

2/ Quel est l'ensemble (Δ) des points M pour lesquels (E) possède deux solutions opposées.

3/ Discuter suivant la position du point M dans le plan, le nombre et le signe des solutions de (E)

4/ Déterminer les coordonnées du point M pour que l'ensemble solution de (E) soit $S=\{-1;3\}$.

EXERCICE 17 (Corrigé à la page 106)

Soient x et y deux réels. On considère le polynôme P de la variable réelle t défini par :

$$P(t) = (x+y-3)t^3 + (xy-2)t^2 + 2t$$

1/ Discuter suivant la position du point $M(x;y)$ dans le plan, le degré du polynôme P.

2/ Calculer $P(-1)$ et $P(1)$ en fonction des réels x et y.

3/ Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ pour lesquels la courbe représentative de la fonction polynôme Q défini par : $Q(t) = (2x+3y-1)t^2 + (x-2)t + \frac{1}{4}$ coupe l'axe des abscisses en deux points E et F tels $O \in]EF[$, O étant l'origine du repère.

EXERCICE 18 (Corrigé à la page 107)

Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble de définition des fonctions :

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto \frac{\sqrt{4x-x^2-y^2}}{\sqrt{y(x-2)-|x+1|}}$$

$$g : P \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x;y) \longmapsto \frac{-x^2-y^2+4x-6y-4}{x-2y+4}$$

EXERCICE 19 (Corrigé à la page 109)

On considère la fonction numérique f_m à variable réelle définie par :

$$f_m(x) = (m+4)x^2 - 2(m-2)x + 1$$

Soit (P_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ m étant un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de m, la nature de (P_m).

2/ Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (P_m) avec l'axe $(O, \vec{i})$ puis les positions des points d'intersection sur l'axe $(O, \vec{i})$ par rapport à O.

3/ Discuter suivant les valeurs de m, le signe de f_m.

4/ Lorsque (P_m) sont des paraboles, déterminer l'ensemble décrit par les sommets S_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathbb{R} - \{-4\}$

EXERCICE 20 (Corrigé à la page III)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1/ Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe (C) représentative de f passe par le point $A(1;5)$ et admet au point $S(-1;1)$ une tangente horizontale.

2-/ Etudier les variations de f.

3-/ Soit (D_m) la droite de coefficient directeur m et passant par $B(-1;0)$

a-/ Déterminer une équation de la droite (D_m).

b-/ Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (D_m) est tangente à la courbe (C). Préciser les points de contact pour chacune des valeurs de m trouvées.

c-/ Déterminer les équations des tangentes à (C) issues de B.

d-/ Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de (C) et (D_m).

4-/ On suppose que (D_m) coupe (C) en deux points distincts M' et M''

a-/ Déterminer en fonction de m, les coordonnées du milieu I du segment $[M'M'']$.

b-/ Déterminer et représenter avec soins, l'ensemble (P') des points I lorsque m varie.

EXERCICE 21 (Corrigé à la page 114)

Soit g_m la fonction à variable réelle x définie par :

$g_m(x) = -mx^2 + (-3m+2)x + 4m + 3$.

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, m étant un paramètre réel.

1-/ Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de g_m.

2-/ Montrer que toutes courbes (C_m) possèdent deux points communs A et B dont on précisera les coordonnées.

3-/ Soit $M(p;q)$ un point du plan. Discuter suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbes (C_m) passant par M.

4-/ Etudier les variations de g_m et représenter (C_m) dans un même repère pour $m \in \{-1;1\}$.

5-/ On pose:

$f(x) = \sup[g_{-1}(x); g_1(x)]$ et $g(x) = \inf[g_{-1}(x); g_1(x)]$.

En utilisant les courbes (C_{-1}) et (C_1), représenter (C_f) et (C_g) dans un même repère autre que le précédent.

CORRIGE DES EXERCICES

EXERCICE 1

1/ Déterminons la forme canonique de chacune des fonctions polynômes

- $f(x) = 5x^2 - 10x + 3$

$= 5\left(x^2 - 2x + \frac{3}{5}\right) = 5\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{5}{3}\right]$

$$\boxed{f(x) = 5\left[(x-1)^2 + \frac{2}{3}\right]}$$

- $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 6x - 2\right)$

$= -\frac{1}{2}\left[(x+3)^2 - 9 - 2\right]$

$$\boxed{g(x) = -\frac{1}{2}\left[(x+3)^2 - 11\right]}$$

- $h(x) = \frac{2}{7}x^2 + x - 6$

$= \frac{2}{7}\left(x^2 + \frac{7}{2}x - 21\right)$

$= \frac{2}{7}\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} - 21\right]$

$$\boxed{h(x) = \frac{2}{7}\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{385}{16}\right]}$$

- $p(x) = -3x^2 + 6x - 3$

$= -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$

$$\boxed{p(x) = -3(x-1)^2}$$

2/ Soient a et b deux réels non nuls et différents de $\frac{1}{2}$. On pose $S = a+b$ et $P = ab$.

Déterminons en fonction de S et P chacune des expressions :

- $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{S}{P}$

$$\boxed{A = \frac{S}{P}}$$

- $B = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\boxed{B = S^2 - 2P}$$

- $C = a^3 + b^3$

On sait que : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$\boxed{C = S^3 - 3PS}$$

- $D = a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2$

$= B^2 - 2P^2$

$= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

$= S^4 - 2PS^2 + 4P^2 - 2P^2$

$$\boxed{D = S^4 - 2PS^2 + 2P^2}$$

- $E = |a-b| = \sqrt{(a-b)^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$

$= \sqrt{B - 2P} = \sqrt{S^2 - 2P - 2P}$

$$\boxed{E = \sqrt{S^2 - 4P}}$$

- $F = (2a^2+1)(2b^2+1)$

$= 4a^2b^2 + 2(a^2+b^2) + 1$

$= 4(ab)^2 + 2B + 1 = 4P^2 + 2(S^2 - 2P) + 1$

$$\boxed{F = 4P^2 + 2S^2 - 4P + 1}$$

- $G = \frac{a}{2a-1} + \frac{b}{2b-1} = \frac{a(2b-1) + b(2a-1)}{(2a-1)(2b-1)}$

- $G = \dfrac{4ab-(a+b)}{4ab-2(a+b)+1} = \dfrac{4P-S}{4P-2S+1}$

$$\boxed{G = \dfrac{4P-S}{4P-2S+1}}$$

- $H = (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

$= B - 2P = S^2-2P-2P$

$\boxed{H = S^2-4P}$ $\quad H = E^2$

- $I = (a^2-b^2)^2 = [(a+b)(a-b)]^2$

$= (a+b)^2(a-b)^2$

$= S^2H = S^2(S^2-4P)$

$$\boxed{I = S^2(S^2-4P)}$$

EXERCICE 2

1/ Résolution de systèmes dans $\mathbb{R}^2$

a/ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ x et y sont solutions de l'équation :

$t \in \mathbb{R},\ t^2-5t+6=0$

$\Delta = 25-4\times 6 = 1$

$t_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$; $t_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$.

$x=2 \Rightarrow y=3$ et $x=3 = y=2$

$$\boxed{S = \{(2;3);(3;2)\}}$$

b/ $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases} (S_1)$

1ère méthode

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=9 \end{cases}$ Posons $X=x^2$ et $Y=y^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=10 \\ XY=9 \end{cases}$ X et Y sont solutions de l'équation :

$t \in \mathbb{R},\ t^2-10t+9=0$

$\Delta' = 25-9 = 16 = 4^2$

$t_1 = 5-4 = 1$; $t_2 = 5+4 = 9$

$X = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$Y = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$.

De plus $xy = 3 > 0$; x et y sont donc de même signe d'où :

$$\boxed{S = \{(-3;-1);(-1;-3);(1;3);(3;1)\}}$$

2e méthode

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-6=10 \\ xy=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=16 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} (a) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} (b) \end{cases}$

$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$ x et y sont solut° de l'équation :

$t \in \mathbb{R},\ t^2+4t+3=0$

$\Delta' = 4-3 = 1$ $\quad t_1 = -2-1 = -3$; $t_2 = -2+1 = -1$

$S(a) = \{(-3;-1);(-1;-3)\}$

$(b) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ x et y sont solutions de l'équation :

$t \in \mathbb{R},\ t^2-4t+3=0$

$\Delta' = 4-3 = 1$; $t_1 = 2-1 = 1$; $t_2 = 2+1 = 3$

$S(b) = \{(1;3);(3;1)\}$ $\quad S = S(a) \cup S(b)$

$$\boxed{S = \{(-3;-1);(-1;-3);(1;3);(3;1)\}}$$

c/ $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=13 \\ x+y=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2-2xy=13 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-6 \\ x+y=-1 \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2+t-6=0$

$\Delta=1-4(-6)=25=5^2$

$t_1=\frac{-1-5}{2}=-3\ ;\ t_2=\frac{-1+5}{2}=2$

$\boxed{S=\{(-3;2);(2;-3)\}}$

d/ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12} \\ xy=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12} \\ xy=24 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ xy=24 \end{cases}$ x et y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2-10t+24=0$

$\Delta'=25-24=1$

$t_1=5-1=4\ ;\ t_2=5+1=6$

$\boxed{S=\{(4;6);(6;4)\}}$

car l'addition et la multiplication sont commutative.

2/ <u>Résolution de systèmes dans $\mathbb{R}^2$</u>

a/ $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ (xy)^3=-27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ x^3y^3=-27 \end{cases}$ Posons $X=x^3$ et $Y=y^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=-26 \\ XY=-27 \end{cases}$

X et Y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2+26t-27=0$

$\Delta'=13^2+27=196=14^2$

$t_1=-13-14=-27\ ;\ t_2=-13+14=1$

$X=-27 \Leftrightarrow x^3=-27 \Leftrightarrow x=-3$

$Y=1 \Leftrightarrow y^3=1 \Leftrightarrow y=1$

$\boxed{S=\{(-3;1);(1;-3)\}}$

b/ $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^4\cdot y^4=16 \end{cases}$

Posons $X=x^4$ $Y=y^4$.

Le système devient: $\begin{cases} X+Y=17 \\ XY=16 \end{cases}$

X et Y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2-17t+16=0$

$\Delta=17^2-4\times16=225=15^2$

$t_1=\frac{17-15}{2}=1\ ;\ t_2=\frac{17+15}{2}=16$

$X=1 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm1$

$Y=16 \Leftrightarrow y^4=16 \Leftrightarrow y=\pm2$.

$xy=2>0$ donc x et y ont même signe.

$\boxed{S=\{(-2;-1);(-1;-2);(1;2);(2;1)\}}$

c/ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{41}{400} \end{cases}$ (C)

<u>1ère méthode</u>: Posons $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$

(C) $\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=\frac{1}{20} \\ X^2+Y^2=\frac{41}{400} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=\frac{1}{20} \\ (X+Y)^2-2XY=\frac{41}{400} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=\frac{1}{20} \\ XY=-\frac{1}{20} \end{cases}$$

X et Y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2-\frac{1}{20}t-\frac{1}{20}=0$

$\Delta'=\left(\frac{1}{40}\right)^2+\frac{1}{20}=\frac{81}{1600}=\left(\frac{9}{40}\right)^2$

$t_1=\frac{1}{40}-\frac{9}{40}=-\frac{1}{5}$

$t_2=\frac{1}{40}+\frac{9}{40}=\frac{1}{4}$

$X=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow x=-5$; $Y=\frac{1}{4}\Leftrightarrow y=4$.

$$\boxed{S=\{(-5;4);(4;-5)\}}$$

2e méthode:

$$(C)\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{20} \\ \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{41}{400} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{P}=\frac{1}{20} \\ \frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{41}{400} \end{cases}$$

avec $S=x+y$ et $P=xy$ · $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=20S\ (a) \\ 41P^2=400(S^2-2P)\ (b) \end{cases}$$

(b) $\Leftrightarrow 41\times 400S^2=400(S^2-40S)$

$\Leftrightarrow 41S^2=S^2-40S$

$\Leftrightarrow 40S(S+1)=0 \Leftrightarrow S=-1$ car $S\neq 0$

$S=-1\Leftrightarrow P=-20$

x et y sont donc solution de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2+t-20=0$

$\Delta=1+80=81=9^2$

$t_1=\frac{-1-9}{2}=-5$; $t_2=\frac{-1+9}{2}=4$

$$\boxed{S=\{(-5;4);(4;-5)\}}$$

EXERCICE 3

1/ Résolution dans $\mathbb{R}^2$ de systèmes:

a/ $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ |x+y|=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=3 \end{cases}(1)$ ou $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=-3 \end{cases}(2)$

(1) $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=17 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4)=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ ou $t=4$.

$S_1=\{(-1;4);(4;-1)\}$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=17 \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4. \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+4)=0$

$\Leftrightarrow t=1$ ou $t=-4$.

$S_2=\{(-4;1);(1;-4)\}$

$S=S_1\cup S_2$

$$\boxed{S=\{(-1;4);(4;-1);(-4;1);(1;-4)\}}$$

b/ $\begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(y-2)^2}=17 \\ \left|\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-2}\right|=3 \end{cases}$

Posons $X=\frac{1}{x-2}$ et $Y=\frac{1}{y-2}$

Le système devient:

c./ $(x;y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, $\begin{cases} x+y = \dfrac{2}{m+3} \\ xy = \dfrac{m}{4(m+3)} \end{cases}$ (S_3).

1^er cas : $m=-3$.

(S_3) n'a pas de sens et son ensemble solution est $S=\emptyset$

2^e cas $m \neq -3$.

x et y sont solutions de l'équation
(E) : $t \in \mathbb{R}$, $t^2 - \dfrac{2}{m+3}t + \dfrac{m}{4(m+3)} = 0$.

$\Leftrightarrow 4(m+3)t^2 - 8t + m = 0$

$\Delta' = 16 - 4m(m+3) = -4m^2 - 12m + 16$
$= -4(m^2 + 3m - 4)$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+4)(m-1) = 0$
$\Leftrightarrow m = -4$ ou $m = 1$

Soit P le produit des solutions de (E) et S leur somme on a :

$P = \dfrac{m}{4(m+3)}$; $S = \dfrac{2}{m+3}$

$P = 0 \Leftrightarrow m = 0$

m	$-\infty$ -4	-3	0	1	$+\infty$
Δ'	$-$ 0	$+$	$+$	$+$ 0	$-$
P	$+$	$+$	$-$ 0	$+$	$+$
S	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

• $m < -4$ ou $m > 1$

(E) n'a pas de solution donc (S_3) n'a pas de solution. $S = \emptyset$

• $m = -4$

(E) admet une solution double $x_0 = -1$

$S = \emptyset$

• $-4 < m < -3$

(E) admet deux solutions négatives

$S = \emptyset$

• $-3 < m < 0$

(E) admet deux solutions de signes contraires. Supposons x_1 et x_2 les deux solutions, $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$

$S = \{(x_2; x_1)\}$

• $m = 0$

(E) admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\left(\frac{3}{2}; 0\right)\right\}$

• $0 < m < 1$

(E) admet deux solutions positives strictement.

$S = \emptyset$

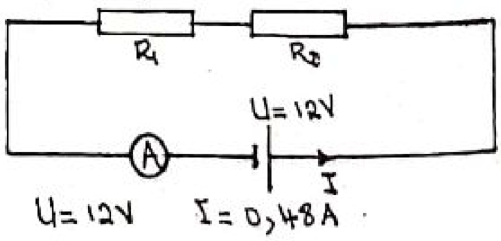
• $m = 1$

(E) admet une solution double $x_0 = \frac{1}{4}$.

$S = \emptyset$

EXERCICE 4

R_1 et R_2 en série

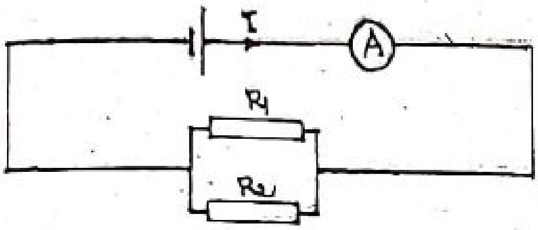


$U = 12V$ $\quad I = 0,48A$

$U = (R_1 + R_2)I \Leftrightarrow R_1 + R_2 = \dfrac{U}{I} = \dfrac{12}{0,48} = 25$

$R_1 + R_2 = 25\,\Omega$ (1)

R_1 et R_2 en dérivation.



$U = 12V \quad I = 2A$

$U = R_{eq} I \Leftrightarrow R_{éq} = \frac{U}{I} = \frac{12}{2} = 6\Omega$.

or : $R_{éq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$\Leftrightarrow R_1 R_2 = (R_1 + R_2) R_{éq}$

$R_1 R_2 = 25 \times 6 = 150$

$R_1 R_2 = 150\Omega$ (2).

(1) et (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = 25 \\ R_1 \times R_2 = 150 \end{cases}$

R_1 et R_2 sont solutions de l'équation

$x \in \mathbb{R}, \ x^2 - 25x + 150 = 0$

$\Delta = (25)^2 - 4 \times 150 = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{25-5}{2} = 10 \ ; \ x_2 = \frac{25+5}{2} = 15$

Avec $R_1 < R_2$ on a :

$R_1 = 10\Omega$	$R_2 = 15\Omega$

EXERCICE 5

1/ Démontrons que : $81P = Q - 10S^2$

Soit x le chiffre des dizaines et y celui des unités du nombre N on a :

$N = 10x + y \qquad N' = 10y + x$

$P = xy \qquad S = x + y$.

$Q = N \times N' = (10x + y)(10y + x)$

$= 100xy + 10x^2 + 10y^2 + xy$.

$Q = 101xy + 10(x^2 + y^2)$

$= 101xy + 10[(x+y)^2 - 2xy]$

$= 101xy + 10(x+y)^2 - 20xy$

$= 10(x+y)^2 + 81xy$.

$Q = 10S^2 + 81P$

d'où $\boxed{81P = Q - 10S^2}$

2/ On $S = 11$ et $Q = 3478$

Trouvons N sachant que $N' < N$

$81P = Q - 10S^2$

$= 3478 - 10 \times 11^2 = 2268$

$81P = 2268 \Leftrightarrow P = 28$

$S = 11 \qquad P = 28$

x et y sont donc solution de l'équation

$t \in \mathbb{R}, \ t^2 - 11t + 28 = 0$

$\Delta' = (-11)^2 - 4 \times 28 = 9 = 3^2$

$t_1 = \frac{11-3}{2} = 4 \ ; \ t_2 = \frac{11+3}{2} = 7$.

$x = 4$ et $y = 7$ ou $x = 7$ et $y = 4$.

$N = 47$ et $N' = 74 \qquad N = 74$ et $N' = 47$

$N' < N \Leftrightarrow N = 74$

$\boxed{N = 74}$

EXERCICE 6

Soit l'équation (E) :

$x \in \mathbb{R}, \ 612x^3 - 168x^2 + 2x + 1 = 0$

On admet que (E) possède trois solutions a, b et c. Sans calculer a, b et c calculons les expressions :

$$\begin{cases} X^2+Y^2=17 \\ |X+Y|=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (X;Y) \in \{(-1;4);(4;-1);(-4;1)(1;-4)\}$

$X=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=-1 \Leftrightarrow x=1$

$X=4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=4 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$

$X=-4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=-4 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$

$X=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3.$

$$\boxed{S=\left\{\left(1;\frac{9}{4}\right);\left(\frac{9}{4};1\right);\left(\frac{7}{4};3\right);\left(3;\frac{7}{4}\right)\right\}}$$

c./ $\begin{cases} (2x^2-1)(2y^2-1)=679 \\ xy=14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2y^2-2(x^2+y^2)+1=679 \\ xy=14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=53 \\ xy=14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=53 \\ x^2y^2=196 \end{cases}$ Posons $X=x^2$ et $Y=y^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=53 \\ XY=196 \end{cases}$ X et Y sont solutions de l'équation:

$t\in\mathbb{R},\ t^2-53t+196=0$

$\Delta=53^2-4\times 196=2025=45^2$

$t_1=\frac{53-45}{2}=4 \qquad t_2=\frac{53+45}{2}=49$

$X=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$Y=49 \Leftrightarrow y^2=49 \Leftrightarrow y=\pm 7$

$xy=14>0$, x et y ont même signe; de plus l'addition et la multiplication sont commutatives d'où:

$$\boxed{S=\{(-7;-2)(-2;-7);(2;7)(7;2)\}}$$

2./ <u>Discussion et résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$</u>

a./ $(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\begin{cases} x+y=3-\frac{m}{2} \\ xy=\frac{10-3m}{4} \end{cases}$ (S_1)

x et y sont solutions de l'équation

(E): $t\in\mathbb{R},\ t^2-\left(3-\frac{m}{2}\right)t+\frac{10-3m}{4}=0$

$\Leftrightarrow 4t^2-2(6-m)t+10-3m=0$

$\Delta'=(6-m)^2-(10-3m)\times 4=m^2-4$

$\Delta'=0 \Leftrightarrow m=-2$ ou $m=2$

<u>Signe de Δ' suivant les valeurs de m</u>

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>1er cas</u>: $m\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$\Delta'>0$; (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2. L'ensemble solution du système est:

$$S=\{(x_1;x_2);(x_2;x_1)\}$$

<u>2e cas</u> $m\in]-2;2[$

$\Delta'<0$; (E) n'a pas de solution. L'ensemble solution du système est:

$$S=\emptyset$$

<u>3e cas $m=-2$</u>

$\Delta'=0$; (E) admet une solution double $x_0=2$

L'ensemble solution de (S_1) est:

$$\boxed{S=\{(2;2)\}}$$

4^e cas : $m = 2$

$\Delta' = 0$; (E) admet une solution double $x_0 = 1$

L'ensemble solution de (S_1) est :

$$\boxed{S = \{(1;1)\}}$$

b/ $(x;y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\begin{cases} x+y = \frac{-4}{m-3} \\ xy = \frac{m}{m-3} \end{cases}$ (S_2)

1^{er} cas $m = 3$

Le système n'a pas de sens.

$S = \emptyset$.

2^e cas : $m \neq 3$

x et y sont solutions de l'équation.

(E) : $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 + \frac{4}{m-3}t + \frac{m}{m-3} = 0$

$\Leftrightarrow (m-3)t^2 + 4t + m = 0$

$\Delta' = 4 - m(m-3) = -m^2 + 3m + 4 = 0$

$\delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$m_1 = \frac{-3-5}{-2} = 4$; $m_2 = \frac{-3+5}{-2} = -1$

Soit P le produit des solutions de (E) et S leur somme. On a :

$P = \frac{m}{m-3}$ $S = -\frac{4}{m-3}$.

m	$-\infty$	-1		0		3		4	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$
P	$+$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$
S	$+$		$+$		$+$	‖	$-$		$-$

• $m < -1$ ou $m > 4$

(E) n'a pas de solution donc le système (S_2) n'a pas de solution : $S = \emptyset$

• $m = -1$

(E) admet une solution positive (solution double) $x_0 = \frac{1}{2}$.

L'ensemble solution du système est :

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}}$$

• $-1 < m < 0$

(E) admet deux solutions distinctes positives x_1 et x_2

L'ensemble solution de (S_2) est donc :

$$\boxed{S = \{(x_1; x_2); (x_2; x_1)\}}$$

• $m = 0$

(E) admet deux solutions $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$

L'ensemble solution du système est :

$$\boxed{S = \left\{\left(0; \frac{4}{3}\right); \left(\frac{4}{3}; 0\right)\right\}}$$

• $0 < m < 3$

(E) admet deux solutions de signes contraires.

L'ensemble solution du système est :

$S = \emptyset$

• $3 < m < 4$.

(E) admet deux solutions négatives.

L'ensemble solution du système est :

$S = \emptyset$

• $m = 4$

(E) admet une solution double $x_0 = -2 < 0$

$S = \emptyset$

$S = a+b+c$; $P = abc$; $A = a^2+b^2+c^2$

$B = ab+ac+bc$; $D = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Posons $f(x) = 612x^3-168x^2+2x+1$

$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$

a, b et c solutions de $(E) \Leftrightarrow a, b$ et c solutions de l'équation $f(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x) = 612(x-a)(x-b)(x-c)$

$= 612(x^2-ax-bx+ab)(x-c)$

$= 612(x^3-cx^2-ax^2+acx-bx^2+bcx+abx-abc)$

$f(x) = 612[x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc]$

$= 612(x^3-Sx^2+Bx-P)$

Par identification on a:

$$\begin{cases} 612S = 168 \\ 612B = 2 \\ -612P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{168}{612} = \frac{14}{51} \\ B = \frac{2}{612} = \frac{1}{306} \\ P = -\frac{1}{612} \end{cases}$$

$A = a^2+b^2+c^2$ On sait que:

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\Leftrightarrow S^2 = A+2B$

$\Leftrightarrow A = S^2-2B$

$= \left(\frac{14}{51}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{306} = \frac{179}{867}$

$D = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{B}{P} = -2$

$S = \frac{14}{51}$	$\hat{A} = \frac{179}{867}$	$B = \frac{1}{306}$
$P = -\frac{1}{612}$	$D = -2$	

EXERCICE 7

Soit l'équation du second dégré

$(E): (a-1)x^2+2bx-2=0$ où a est un réel différent de 1.

1/ Déterminons une relation entre a et b pour que (E) admette deux solutions distinctes.

$(E): (a-1)x^2+2bx-2=0$

(E) admet deux solutions distinctes

ssi $\begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \text{et} \\ \Delta' = b^2+2(a-1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \text{et} \\ b^2+2a > 2. \end{cases}$

(E) admet deux solutions distinctes ssi $a \neq 1$ et $b^2+2a > 2$

2/ On suppose que (E) admet deux solutions distinctes : x_1 et x_2

Sans calculer x_1 et x_2, calculons en fonction de a et b

x_1 et x_2 solutions de (E) nous permet d'écrire : $x_1+x_2 = -\frac{2b}{a-1} = S$

$x_1x_2 = -\frac{2}{a-1} = P$

$A = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$= \frac{S}{P} = \frac{2b}{a-1} \times \frac{a-1}{2} = b$

$\boxed{A = b}$

$$B = (2x_1-1)(2x_2-1)$$
$$= 4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1$$
$$= 4P - 2S + 1$$
$$= \frac{-8}{a-1} + \frac{4b}{a-1} + 1 = \frac{4b+a-9}{a-1}$$

$$\boxed{B = \frac{4b+a-9}{a-1}}$$

$$C = x_1^2 + x_2^2$$
$$= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$
$$= \frac{4b^2}{(a-1)^2} + \frac{4}{a-1} = \frac{4b^2+4a-4}{(a-1)^2}$$

$$\boxed{C = \frac{4(b^2+a-1)}{(a-1)^2}}$$

$$D = (x_1-x_2)^2 = x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$$
$$= S^2 - 2P - 2P$$
$$= S^2 - 4P.$$
$$= \frac{4b^2}{(a-1)^2} + \frac{8}{a-1}$$

$$\boxed{D = \frac{4(b^2+2a-2)}{(a-1)^2}}$$

3/ Déterminons a et b pour que l'ensemble solution de E soit $S=\{1;2\}$

S ensemble solution de (E) equivaut à:

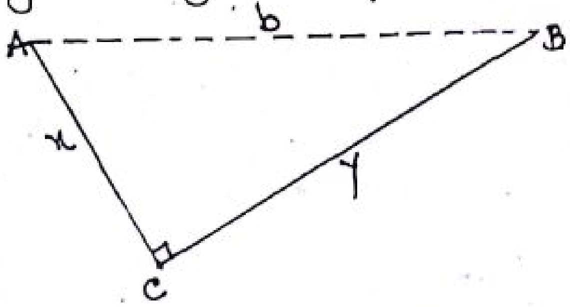
$$\begin{cases} 1 \text{ solution de (E)} \\ \text{et} \\ 2 \text{ solution de (E)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1+2b-2=0 \\ 4(a-1)+4b-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ 2a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$a=0$	$b=\frac{3}{2}$

EXERCICE 8

Un fil de longueur a est fixé entre deux points A et B tels que AB = b. On se propose de tendre ce fil de façon à obtenir un triangle rectangle en un point C.



1/ Déterminons en fonction de a et b le périmètre du triangle ABC

Soit p le périmètre du triangle ABC

on a: $p = AB + AC + BC$
$= b + x + y$; or $x+y = a$
$= b + a = a+b$

$$\boxed{p = a+b}$$

2/ Relation la relation entre a et b pour que:

a/ ABC existe et soit rectangle en C

ABC rectangle ssi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=b^2 \\ x+y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=b^2 \\ x+y=a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{a^2-b^2}{2} \end{cases}$$

x et y sont solutions de l'équation:

(E): $t \in \mathbb{R}$, $t^2 - at + \frac{a^2-b^2}{2} = 0$

$$\Delta = a^2 - 4\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right) = a^2 - 2a^2 + 2b^2$$

$$\Delta = 2b^2 - a^2$$

ABC existe et est rectangle en C si $\Delta > 0 \iff 2b^2 - a^2 > 0$

$$\iff 0 < a < b\sqrt{2}$$

> Pour que ABC existe et soit rectangle en C il faut et il suffit que: $0 < a < b\sqrt{2}$

b./ <u>ABC soit la moitié d'un carré dont nous préciserons le côté</u>

ABC est la moitié d'un carré si (E) admet une solution double

$\iff \Delta = 0 \iff 2b^2 - a^2 = 0 \iff a = b\sqrt{2}$

et la solution double est $t_1 = t_2 = \frac{a}{2}$

Soit $x = y = \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

> Pour $a = b\sqrt{2}$, ABC est un triangle rectangle et isocèle en C avec $AC = BC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ et $AB = b$

3/ On pose $a = 28$ et $b = 20$

<u>Déterminons les côtés x et y formant l'angle droit du triangle ABC</u>

Pour $a = 28$ et $b = 20$ (E) devient

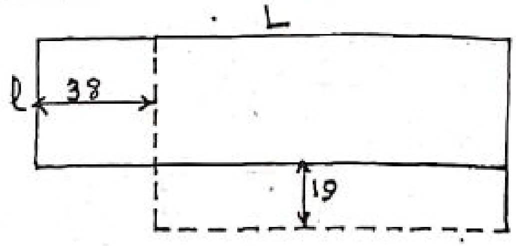
$$t^2 - 28t + 192 = 0$$

$$\Delta' = 14^2 - 192 = 4 = 2^2$$

$t_1 = 14 - 2 = 12$; $t_2 = 14 + 2 = 16$

> Les cotés du triangle formant l'angle droit ont donc pour longueur:
> $x = 12$ et $y = 16$

EXERCICE 9



<u>Dimensions du champ (longueur et largeur) avant et après le remembrement.</u>

Soit L et l les dimensions avant, L' et l' les dimensions après le remembrement

On a: $\begin{cases} L \times l = 6432 & L' = L - 38 \\ L' . l' = L \times l & l' = l + 19 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} L \times l = 6432 \\ (L-38)(l+19) = 6432 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} L \times l = 6432 \\ L \times l + 19L - 38l - 722 = 6432 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} L \times l = 6432 \\ L - 2l = 38 \end{cases} \iff \begin{cases} L = 2l + 38 \\ (2l+38).l = 6432 \end{cases}$$

$$\iff l^2 + 19l - 3216 = 0$$

$$\Delta = 19^2 + 4 \times 3216 = 13225 = 115^2$$

$l_1 = \frac{-19-115}{2} = -67 < 0$ impossible.

$l_2 = \frac{-19+115}{2} = 48$

On a : $\ell = 48$

$\Leftrightarrow \begin{cases} L = 2\times 48+38 = 134 \\ L' = 134-38 = 96 \\ \ell' = 48+19 = 67 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} L = 134\,m \\ \ell = 48\,m \\ L' = 96\,m \\ \ell' = 67\,m \end{array}}$

EXERCICE 10

Soit l'équation du second degré $(E) : x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2(m+1)x + 5m+1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1°/ Etudions suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation (E)

$\Delta' = (m+1)^2 - (5m+1) = m^2 - 3m.$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 3$.

Soit S et P la somme et le produit des solutions éventuelles de (E).

On a : $S = 2(m+1)$ $\quad P = 5m+1$

$P = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}$; $\quad S = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Résumons les résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous

m	$-\infty$		-1		$-1/5$		0		3		$+\infty$
Δ'		+		+		+	0	−	0	−	
P		−		−	0	+		+		+	
S		−	0	+		+		+		+	
nombre et signe des solutions de (E)		2 $x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert>\lvert x''\rvert$	2 $x'=-x''$	2 $x'<0<x''$ $\lvert x'\rvert<\lvert x''\rvert$	2 $x'=0$ $x''>0$	2 $0<x'<x''$	1 $x'=x''>0$	$S=\emptyset$	1 $x'=x''>0$	2 $0<x'<x''$	

2°/ Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation (E')

$x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2(m+1)|x| + 5m+1 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^2 = x^2$

$(E') \Leftrightarrow |x|^2 - 2(m+1)|x| + 5m+1 = 0$

Posons $X = |x| \geq 0$

(E') devient : $X^2 - 2(m+1)X + 5m+1 = 0$

X est donc solution de (E).

Le nombre de solutions de (E') dépend donc du nombre et du signe des solutions de (E).

Chaque solution positive de (E) donne deux solutions de (E') ; chaque solut- négative ne donne aucune solution et une solution nulle de (E) donne une solution nulle de (E').

D'où le tableau suivant.

m	$-\infty$		-1		$-1/5$		0		3		$+\infty$
nbre de solut- de (E')		2	2	2	3	4	2	0	2	4	

3°/ a-/ Montrons que lorsqu'elles existent les solutions de (E) vérifient une égalité indépendante de m.

Soit x' et x'' les solutions de (E) on a :

$\begin{cases} x'+x'' = 2(m+1) \\ x'.x'' = 5m+1 \end{cases} \Leftrightarrow -5(x'+x'') + 2x'x'' = -8$

d'où : $\boxed{2x'x'' - 5(x'+x'') + 8 = 0}$

b/ Déterminons m pour que les racines x' et x'' de (E) vérifient l'égalité $x'-x''=4m$

Posons $I =]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

$$\begin{cases} x'+x''=2m+2 & ① \\ x'-x''=4m & ② \\ x'.x''=5m+1, \quad m\in I & ③ \end{cases}$$

① et ② $\Rightarrow x'=3m+1 \quad x''=-m+1$

③ $\Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)(-m+1)=5m+1 \\ m\in I \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m(m+1)=0 \\ m\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \text{ ou } m=0 \\ m\in I. \end{cases}$

On a donc : $\boxed{m=-1}$

c/ Formons l'équation (E_2) du second degré qui admet pour solutions ; $X'=2x'$ et $X''=2x''$, x' et x'' étants les solutions de (E).

Posons : $S_2 = X'+X''=2(x'+x'')=2S$

$S_2 = 4(m+1)$

$P_2 = X'.X''=4x'x''=4P=4(5m+1)$

$(E_2): x\in\mathbb{R}, x^2-S_2x+P_2=0$

$$\boxed{(E_2): x\in\mathbb{R}, x^2-4(m+1)x+4(5m+1)=0}$$

4/ Déterminons l'ensemble A des valeurs de m pour lesquelles les solutions x' et x'' de (E) vérifient : $x'<3<x''\leq 8$

Cette relation est vérifiée ssi :

$\begin{cases} m\in I \\ x'<3<x'' & ① \\ x'<x''\leq 8 & ② \end{cases}$ Posons $f_m(x)=x^2-2(m+1)x+5m+1$

$f_m(3)=-m+4$; $f_m(8)=-11m+49$

① $\Leftrightarrow \begin{cases} m\in I \\ f_m(3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in I \\ -m+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>4$

$m\in I_1 =]4;+\infty[$

② $\Leftrightarrow \begin{cases} m\in I \\ f_m(8)\geq 0 \\ 8-\frac{S}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in I \\ -11m+49\geq 0 \\ 8-(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in I \\ m\leq \frac{49}{11} \\ m<7. \end{cases}$

$m\in I_2 =]3;\frac{49}{11}]$

$A = I_1\cap I_2 =]4;\frac{49}{11}]$

$$\boxed{A =]4;\frac{49}{11}]}$$

EXERCICE 11

Soit l'équation (E) :

$x\in\mathbb{R}, (m-1)x^2-2(m+1)x+4m+1=0$ où m est un paramètre réel.

1/ Discutons suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions de (E)

1er cas : $m=1$

(E) devient : $-4x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

$S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$

2e cas : $m\neq 1$

$\Delta' = (m+1)^2-(m-1)(4m+1)$

$= m^2+2m+1-4m^2+3m+1$

$\Delta' = -3m^2+5m+2$

$\Delta'=0 \Leftrightarrow -3m^2+5m+2=0$

$\delta = 25-4(-3)\times 2 = 49 = 7^2$

$m_1 = \frac{-5-7}{-6} = 2$; $m_2 = \frac{-5+7}{-6} = -\frac{1}{3}$.

$P = \frac{4m+1}{m-1}$; $P = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$ et $m \neq 1$

$S = \frac{2(m+1)}{m-1}$; $S = 0 \Leftrightarrow m = -1$ et $m \neq 1$

<u>Résumons les résultats de notre discussion dans le tableau ci-dessous</u>

m	←	-1		$-1/3$		$-1/4$		1		2	→
Δ'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$
P	$+$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$
S	$+$	0	$-$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$
nbre et signe des solut° de (E).	$S = \emptyset$			1 : $x_1 = x_2 < 0$	2 : $x_1 < x_2 < 0$	2 : $x_1 = 0$, $x_2 < 0$	2 : $x_1 < 0 < x_2$	1 : $x = \frac{5}{4}$	2 : $0 < x_1 < x_2$	1 : $x_1 = x_2 > 0$	$S = \emptyset$

2/ <u>Déduisons-en le nombre de solut°s de l'équation</u>

$(E') : x \in \mathbb{R},\ (m-1)x^4 - 2(m+1)x^2 + 4m+1 = 0$

<u>suivant les valeurs de m</u>

Posons $X = x^2$ (E') devient :

$(m-1)X^2 - 2(m+1)X + 4m+1 = 0$

X est solution de (E).

En utilisant le même raisonnement que dans la question 2/ de l'EXO 10 on déduit le tableau ci-dessous.

m	←	$-1/4$		1		2	→
nombre de solut°s de (E').	0	1	2	2	4	2	0

3/ Dans le cas où (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, formons :

a/ <u>Une équation (E_1) du second degré admettant pour solutions</u> : $X_1 = \frac{1}{x_1}$ et $X_2 = \frac{1}{x_2}$

Posons $S_1 = X_1 + X_2$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$S_1 = \frac{2(m+1)}{4m+1}$$

$P_1 = X_1 . X_2 = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{P} = \frac{m-1}{4m+1}$

$(E_1) : x \in \mathbb{R},\ x^2 - S_1 x + P_1 = 0$ soit :

$$\boxed{(E_1) : x \in \mathbb{R},\ (4m+1)x^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0}$$

b/ <u>Une équation (E_2) du second degré admettant pour solutions</u> : $X' = x_1^2$ et $X'' = x_2^2$

Posons : $S' = X' + X'' = x_1^2 + x_2^2$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$S' = \left(\frac{2(m+1)}{m-1}\right)^2 - 2\left(\frac{4m+1}{m-1}\right) = \frac{-4m^2 + 14m + 6}{(m-1)^2}$$

$P' = X' . X'' = x_1^2 . x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = P^2$

$P' = \frac{(4m+1)^2}{(m-1)^2}$ On a donc :

$(E_2) : x \in \mathbb{R},\ x^2 - S'x + P' = 0$ soit :

$$\boxed{(E_2) : x \in \mathbb{R},\ (m-1)^2 x^2 + (4m^2 - 14m - 6)x + (4m+1)^2 = 0}$$

4/ <u>Déterminons l'ensemble B.</u>

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x > 0\} =]-\infty ; 3[$$

$$D_f =]-\infty ; 3[$$

La condition donnée par l'énoncé

équivaut à : $x_1 < x_2 < 3$ ①

Posons $g_m(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1$

$I = \left]-\frac{1}{3}; 2\right[$

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} m \in I \\ (m-1)\,g_m(3) \geq 0 \\ 3 - \frac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in I \\ 7(m-1)(m-2) > 0 \\ \frac{2(m-2)}{m-1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 2 \\ m \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left]2; +\infty\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$$

$$\boxed{B = \left]-\frac{1}{3}; 1\right[}$$

EXERCICE 12

Soit l'équation (E) du second degré : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ où m est un paramètre réel.

1-/ Etudions suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de (E)

$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m-6)$

$\Delta = 25$; $\forall m \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$.

$P = m^2 + m - 6 \qquad S = 2m + 1$

$P = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$

$\delta = 1^2 - 4(-6) = 25 = 5^2$

$m_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$; $m_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$S = 0 \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Résumons les résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous

	$-\infty$		-3		$-1/2$		2		$+\infty$
Δ		+		+		+		+	
P		+	0	−		−	0	+	
S		−		−	0	+		+	
nombre et signe des solut. de (E)		2 $x_1 < x_2 < 0$	2 $x_1 = 0$ $x_2 < 0$	2 $x_1 < 0 < x_2$	2 $x_1 = -x_2$	2 $x_1 < 0 < x_2$	2 $x_1 = 0$ $x_2 > 0$	2 $0 < x_1 < x_2$	

2-/ a-/ Etudions suivant les valeurs de m, la position des solutions de (E) par rapport à 1

Posons $g_m(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6$

$g_m(1) = 1 - (2m+1) + m^2 + m - 6$

$= m^2 - m - 6$

$g_m(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (m+2)(m-3) = 0$

$\Leftrightarrow m = -2$ ou $m = 3$.

$1 - \frac{S}{2} = 1 - \frac{2m+1}{2} = -m + \frac{1}{2}$

$1 - \frac{S}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Résumons les résultats dans le tableau ci dessous

m	$-\infty$		-2		$1/2$		3		$+\infty$
Δ		+		+		+		+	
$g_m(1)$		+	0	−		−	0	+	
$1 - S/2$		+		+	0	−		−	
Posit. des solut. de (E) par rapport à 1		$x_1 < x_2 < 1$	$x_1 < 1$ $x_2 = 1$	$x_1 < 1 < x_2$	$x_1 < 1 < x_2$	$x_1 < 1 < x_2$	$x_1 = 1$ $x_2 > 1$	$1 < x_1 < x_2$	

b/ Déduisons-en le domaine de définition de la fonction

$$f_m :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{P_m(x)} \quad \text{avec}$$

$$P_m(x) = x^2-(2m+1)x+m^2+m-6$$

$$\mathcal{D}f_m = \{x>1 \mid P_m(x) \neq 0\}$$

Posons $(E_1) : x>1 ;\ P_m(x) = 0$

Utilisons la question précédente pour déterminer suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_1)

m	$-\infty$		-2		$1/2$		3		$+\infty$
nbre de solut. de (E_1)		0		1		1		2	
			0	1		1			

1^{er} cas : $m \leq -2$

$$\boxed{\mathcal{D}f_m =]1;+\infty[}$$

2^e cas : $-2<m\leq 3$

(E_1) admet une solution x_1

$$\boxed{\mathcal{D}f_m =]1;x_1[\cup]x_1;+\infty[}$$

3^e cas $m>3$.

(E_1) admet deux solutions x_1 et x_2.

$$\boxed{\mathcal{D}f_m =]1;+\infty[-\{x_1;x_2\}}$$

E-mail : koehyppo@yahoo.fr.
Cél : 916-93-00.

EXERCICE 13

Soit l'équation du second degré $(E_m) : x\in\mathbb{R},\ x^2-2mx-5=0$ où m est un paramètre réel.

Soient x_1 et x_2 les solutions de (E_m).

Déterminons m pour que x_1 et x_2 vérifient la relation :

a/ $(2x_1+1)(2x_2+1) = 3$

$\Delta' = m^2+5 \quad \forall m\in\mathbb{R},\ \Delta'>0.$

$\forall m\in\mathbb{R}$, (E_m) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Posons $S = x_1+x_2$ et $P = x_1x_2$

$$S = 2m \qquad P=-5.$$

$(2x_1+1)(2x_2+1) = 3 \Leftrightarrow 4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1 = 3$

$\Leftrightarrow 4P+2S+1 = 3$

$\Leftrightarrow -20+4m+1 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}.$

$$\boxed{m = \frac{11}{2}}$$

b/ $x_1^2+x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = 4$

$\Leftrightarrow S^2-2P = 4$

$\Leftrightarrow 4m^2+10 = 4$

$\Leftrightarrow 4m^2 = -6$ imp

$\boxed{S = \emptyset}$ Il n'existe donc aucune valeur de m pour laquelle $x_1^2+x_2^2 = 4$.

c/ $x_1^3+x_2^3 = 16$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) = 16$

$\Leftrightarrow S^3-3PS=16 \Leftrightarrow 8m^3+30m-16=0$

$\Leftrightarrow 4m^3+15m-8=0 \Leftrightarrow (2m-1)(2m^2+m+8)=0$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

$$\boxed{m=\frac{1}{2}}$$

d-/ $\frac{x_1-2}{x_2-2}+\frac{x_2-2}{x_1-2}=5$ (1)

$x_1=2$ est solution de (E_m) ssi

$4-4m-5=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-2)^2+(x_2-2)^2=5(x_1-2)(x_2-2) \\ m \neq -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2+8=5x_1x_2-10x_1-10x_2+20$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-7x_1x_2+6(x_1+x_2)-12=0$

$\Leftrightarrow S^2-7P+6(x_1+x_2)-12=0$

$\Leftrightarrow 4m^2+35+12m-12=0$

$\Leftrightarrow 4m^2+12m+23=0$

$\delta'=36-92=-56<0$

Il n'existe aucune valeur de m.

EXERCICE 14

On considère l'équation du second degré (E):

$x\in\mathbb{R}$, $mx^2+3(m+1)x+4m=0$ où m est un paramètre réel.

1-/ Montrons que lorsque (E) admet deux solutions distinctes, elles sont toujours de même signe

(E) admet deux solutions distinctes ssi $\begin{cases} m\neq 0 \\ \text{et} \\ \Delta>0 \end{cases}$ Et si (E) admet deux solutions distinctes x' et x'' alors leur produit vaut : $P=x'x''=\frac{4m}{m}=4>0$.

Conclusion : lorsque (E) admet deux solutions distinctes, elles sont toujours de même signe.

2-/ Etudions suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation (E).

1er cas : $m=0$

(E) devient $3x=0 \Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

2e cas : $m\neq 0$

$\Delta=9(m+1)^2-16m^2$

$=[3(m+1)-4m][3(m+1)+4m]$

$=(-m+3)(7m+3)$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=3$ ou $m=-\frac{3}{7}$.

$P=\frac{4m}{m}=4$ avec $m\neq 0$

$S=\frac{-3(m+1)}{m}$; $S=0 \Leftrightarrow m=-1$ et $m\neq 0$.

Résumons les résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous.

m	$-\infty$	-1		$-\frac{3}{7}$		0		3	$+\infty$
Δ	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
P	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
S	$-$	0	$+$		$+$		$-$		$-$
nbre et signe des solut-s de E	Pas de solution $S=\emptyset$			1 : $x'=x''>0$	2 : $0<x'<x''$	1 : $x=0$	2 : $x'<0<x''$	1 : $x'=x''<0$	Pas de solution $S=\emptyset$

3/ Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation (E').

$x \in \mathbb{R},\ mx + 3(m+1)\sqrt{x} + 4m = 0$

Posons $X = \sqrt{x} \iff x = X^2,\ X > 0$

$(E') \iff mX^2 + 3(m+1)X + 4m = 0$

X est solution de (E).

Le nombre de solutions de (E') dépend donc du nombre et du signe des solutions de (E).

Chaque solution positive de (E) donne une solution de (E') et chaque solution strictement négative ne donne rien.

D'où le tableau ci-dessous.

m	$-\infty$	$-3/4$		0		$+\infty$
nombre de solut. de (E')	0	1	2	1	0	

4/ Etudions suivant les valeurs de m, la position du nombre 2 par rapport aux racines de (E)

Posons $g_m(x) = mx^2 + 3(m+1)x + 4m$

$g_m(2) = 14m + 6$; $2 - \frac{S}{2} = \frac{7m+3}{2m}$

Résumons les résultats dans le tableau suivant

m	$-\infty$	$-3/7$		0		3	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$
$m\,g_m(2)$	$+$	0	$-$	||	$+$		$+$
$2 - \frac{S}{2}$	$+$	0	$-$	||	$+$		$+$
Posit. de 2 par rapport aux racines de (E)	Pas de solut.	$x' = x'' = 2$	$x' < 2 < x''$	$x < 2$	$x' < x'' < 2$	$x' = x'' < 2$	Pas de

5/ Discutons et résolvons suivant les valeurs de m, l'inéquation

(I): $\frac{x-2}{mx^2+3(m+1)x+4m} \le 0$

Posons $g_m(x) = mx^2 + 3(m+1)x + 4m$

1er cas $m < -\frac{3}{7}$ (E) n'a pas de solution

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$g_m(x)$		$-$		$-$	
$\frac{x-2}{g_m(x)}$		$+$	0	$-$	

$\boxed{S = [2; +\infty[}$

2e cas $m = -\frac{3}{7}$

(I) devient : $\frac{x-2}{-\frac{3}{7}(x-2)^2} \le 0 \iff x - 2 > 0$

$\iff x > 2$

$\boxed{S =]2; +\infty[}$

3e cas : $-\frac{3}{7} < m < 0$

Soit x' et x'' les solutions de (E)

on a: $x' < 2 < x''$.

x	$\leftarrow$	x'		2		x''	$\rightarrow$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$g_m(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x-2}{g_m(x)}$	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$

$\boxed{S =]x'; 2] \cup]x''; +\infty[}$

4ᵉ cas : $m = 0$

$(I) \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x} \leq 0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{3x}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$\boxed{S =]0; 2]}$$

5ᵉ cas $0 < m < 3$

Soit x' et x'' les zéros de $g_m(x)$.

on a : $x' < x'' < 2$.

x	$-\infty$	x'		x''		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g_m(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{g_m(x)}$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$\boxed{S =]-\infty; x'[\cup]x''; 2]}$$

6ᵉ cas $m = 3$

$(I) \Leftrightarrow \frac{x-2}{3(x+2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ \text{et} \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \text{et} \\ x \neq -2 \end{cases}$

$$\boxed{S =]-\infty; -2[\cup]-2; 2]}$$

7ᵉ cas $m > 3$

(E) n'a pas de solution.

$\forall x \in \mathbb{R}, g_m(x) > 0$

$(I) \Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$$\boxed{S =]-\infty; 2]}$$

EXERCICE 15

Soit (E) l'équation du second degré à inconnue t :

$t^2 - 2(x-1)t + y - 2x + 1 = 0$ dans laquelle x et y sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point M du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Déterminons l'ensemble (P) des points M tels que (E) ait une solution double.

$\Delta' = (x-1)^2 - y + 2x - 1 = x^2 - y$.

(E) admet une racine double ssi :

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow y = x^2$.

$$\boxed{\text{L'ensemble (P) est la parabole d'équation } y = x^2}$$

2/ Ensemble (D_1) des points M du plan pour lesquelles (E) possède deux solutions distinctes

(E) admet deux racines distinctes ssi

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow x^2 - y > 0 \Leftrightarrow y < x^2$.

(D_1) est le demi-plan d'équation $y < x^2$

$$\boxed{(D_1) \text{ est le demi-plan de frontière (P) contenant le point } A(0;-1) \text{ frontière exclue.}}$$

3/ Déterminons l'ensemble :

a/ (Δ) des points M du plan pour lesquels (E) admet deux racines de m̂ signe

(E) admet deux racines de même signe ssi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \text{et} \\ P = y - 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x^2 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$

(Δ) est le demi-plan de frontières (P) et (D') contenant B(−1 ; 0) où (D') est la droite d'équation : $y = 2x - 1$ (frontières exclues).

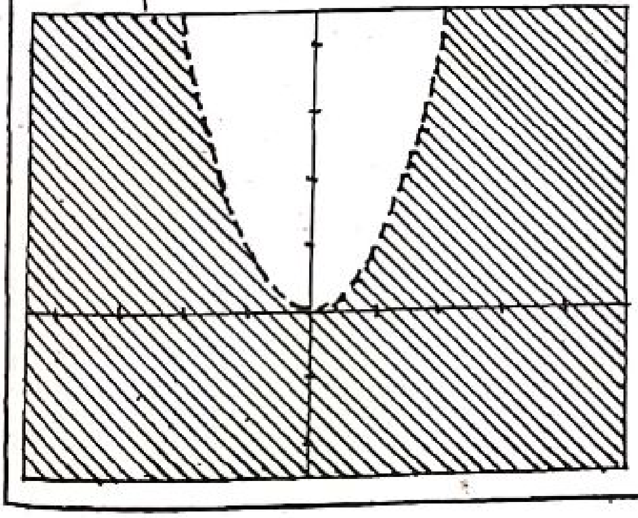
b/ (Δ') des points M du plan pour lesquels (E) admet deux solutions opposées

(E) admet deux racines opposées ssi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \text{et} \\ S = 2(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x^2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y < 1 \end{cases}$

(Δ') est la demi-droite d'équation :

$\begin{cases} x = 1 \\ y < 1 \end{cases}$

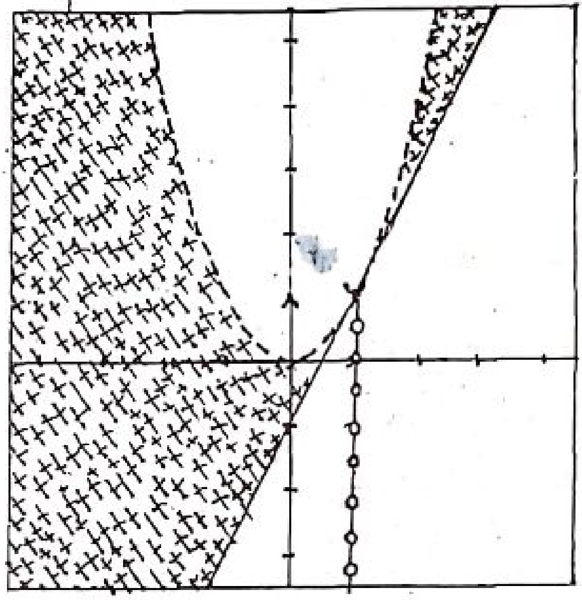
– Représentation de P et (D_1)



Légende : (P)

(D_1)

Représentation de (Δ) et (Δ').



Légende : (Δ)

(Δ').

EXERCICE 16

On considère l'équation du second degré (E) : $t^2 - 2(x-y+1)t - y - 2xy = 0$ où t est l'inconnue et (x ; y) les coordonnées d'un point M du plan.

1/ Discutons suivant la position du point M dans le plan, le nombre de solutions de (E)

$\Delta' = (x-y+1)^2 - (-y-2xy)$

$= x^2 + y^2 - 2xy + 1 + 2x - 2y + y + 2xy$

$\Delta' = x^2 + y^2 + 2x - y + 1$

Posons $\Delta' = 0$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y+1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(-1;\frac{1}{2})$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$.

Soit D le disque de centre A et de rayon r, bord exclu.

1er cas: $M \in D$.

$\Delta' < 0$; L'équation (E) n'a donc pas de solution.

2e cas: $M \in \mathscr{C}$.

$\Delta' = 0$; L'équation (E) admet une solution double.

3e cas: $M \in \mathscr{P} - \{\mathscr{C}; D\}$

$\Delta' > 0$; L'équation (E) admet alors deux solutions réelles distinctes.

2°/ Ensemble Δ des points M pour lesquels (E) possède deux solutions opposées.

Désignons par S la somme des solutions de (E) on a:

$$S = 2(x-y+1)$$

(E) admet deux solutions opposées

ssi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \text{et} \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x-y+1>0 \ (1) \\ y = x+1 \ (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(x+1)^2+2x-(x+1)+1>0 \\ y = x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x+1>0 \ (3) \\ y = x+1 \end{cases}$

Posons $2x^2+3x+1=0$

$$\Delta = 9-8 = 1$$

$x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$; $x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

(3) $\Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]-\frac{1}{2};+\infty[$

Tout revient à :

$\begin{cases} y = x+1 \\ x < -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = x+1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

Soit (Δ_1) et (Δ_2) les demi droites d'équations respectives

$(\Delta_1) : \begin{cases} y = x+1 \\ x < -1 \end{cases}$ $(\Delta_2) : \begin{cases} y = x+1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

L'ensemble (Δ) recherché est

$$(\Delta) = (\Delta_1) \cup (\Delta_2)$$

Autre forme de (Δ).

Soient Q et H les points de la droite Δ_1': $y = x+1$

On a : $G(-1;0)$ et $H(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

L'ensemble (Δ) recherché est la droite (Δ_1') d'équation $y=x+1$ privée du segment $[GH]$

3/ Discutons suivant la position du point M dans le plan, le nombre et le signe des solutions de (E)

Soit P le produit des solutions éventuelles de (E) on a : $P=-y-2xy$.

Posons $P=0 \Leftrightarrow y(1+2x)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $y=0$

Désignons par :

Z_1 : la partie du plan délimitée par (Δ_2), (Δ_0) et contenant le point $A_1(0;2)$ où (Δ_0) est la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$

Z_2 : la partie du plan délimitée par (Δ_1), (Δ_0) et l'axe (Ox).

Z_3 : la partie du plan délimitée par (Δ_2) (Δ_0) et l'axe (Ox)

Z_4 : la partie du plan délimitée par (Δ_1), l'axe (Ox) et contenant le point $A_4(-3;-1)$

Z_5 : la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), (Δ_0) et contenant le point $A_5(0;-1)$.

Z_6 : la partie du plan délimitée par le cercle $\mathscr{C}$, (Δ_0) et l'axe (Ox), contenant le point $A_6(-2;1)$.

Z_7 : la partie du plan délimitée par le cercle $\mathscr{C}$, (Δ_0), l'axe (Ox) et ne contenant pas le point A_6.

Désignons par (Δ_3), (Δ_4), (Δ_5) et (Δ_6) les demi-droites d'équations respectives :

$(\Delta_3') : \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y>0 \end{cases}$ $(\Delta_4) \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y<0 \end{cases}$

$(\Delta_5) : \begin{cases} y=0 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ $(\Delta_6) : \begin{cases} y=0 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$

NB : les zones Z_i $(1\leq i\leq 7)$ sont des zones bords exclus.

Discussion

1^er cas : $M\in D$

(E) n'a pas de solution

2^e cas : $M\in\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_1$ étant la partie de $\mathscr{C}$ située en dessous de (Δ').

(E) admet une solution double positive

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

3^e cas : $M \in \mathscr{C}_2 = \mathscr{C} - \mathscr{C}_1$

(E) admet une solution double négative

4^e cas : $M \in Z_1 \cup Z_4$

$\Delta' > 0$; $S < 0$; $P < 0$

(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 tels que $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$

5^e cas : $M \in Z_2 \cup Z_3$.

$\Delta' > 0$; $S > 0$; $P < 0$

(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$

6^e cas : $M \in Z_5 \cup Z_7$

$\Delta' > 0 \quad S > 0 \quad P > 0$

(E) admet deux solutions distinctes positives $x_1 > 0 \quad x_2 > 0$

7^e cas ; $M \in Z_6$

$\Delta' > 0 \quad S < 0 \quad P > 0$

(E) admet deux solutions distinctes négatives $x_1 < 0 \quad x_2 < 0$

8^e cas : $M \in \Delta_1 \cup \Delta_2$

$\Delta' > 0$, $S = 0$; $P < 0$

(E) admet deux solutions distinctes opposées.

9^e cas : $M \in (\Delta_3) \cup (\Delta_5)$

$\Delta' > 0$, $P = 0$ $S < 0$

(E) admet deux solutions distinctes $x_1 = 0$ et $x_2 < 0$

10^e cas : $M \in (\Delta_4) \cup (\Delta_6)$

$\Delta' > 0$; $P = 0$ $S > 0$

(E) admet deux solutions distinctes $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$

Voir Figure à la page suivante

4-/ Déterminons les coordonnées du point M pour que l'ensemble solution de (E) soit $S = \{-1 ; 3\}$

La condition ci-dessus est réalisée ssi -1 et 3 sont solutions de (E)

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 2(x-y+1) - y - 2xy + 1 = 0 \\ -6(x-y+1) - y - 2xy + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \quad (a) \end{cases}$$

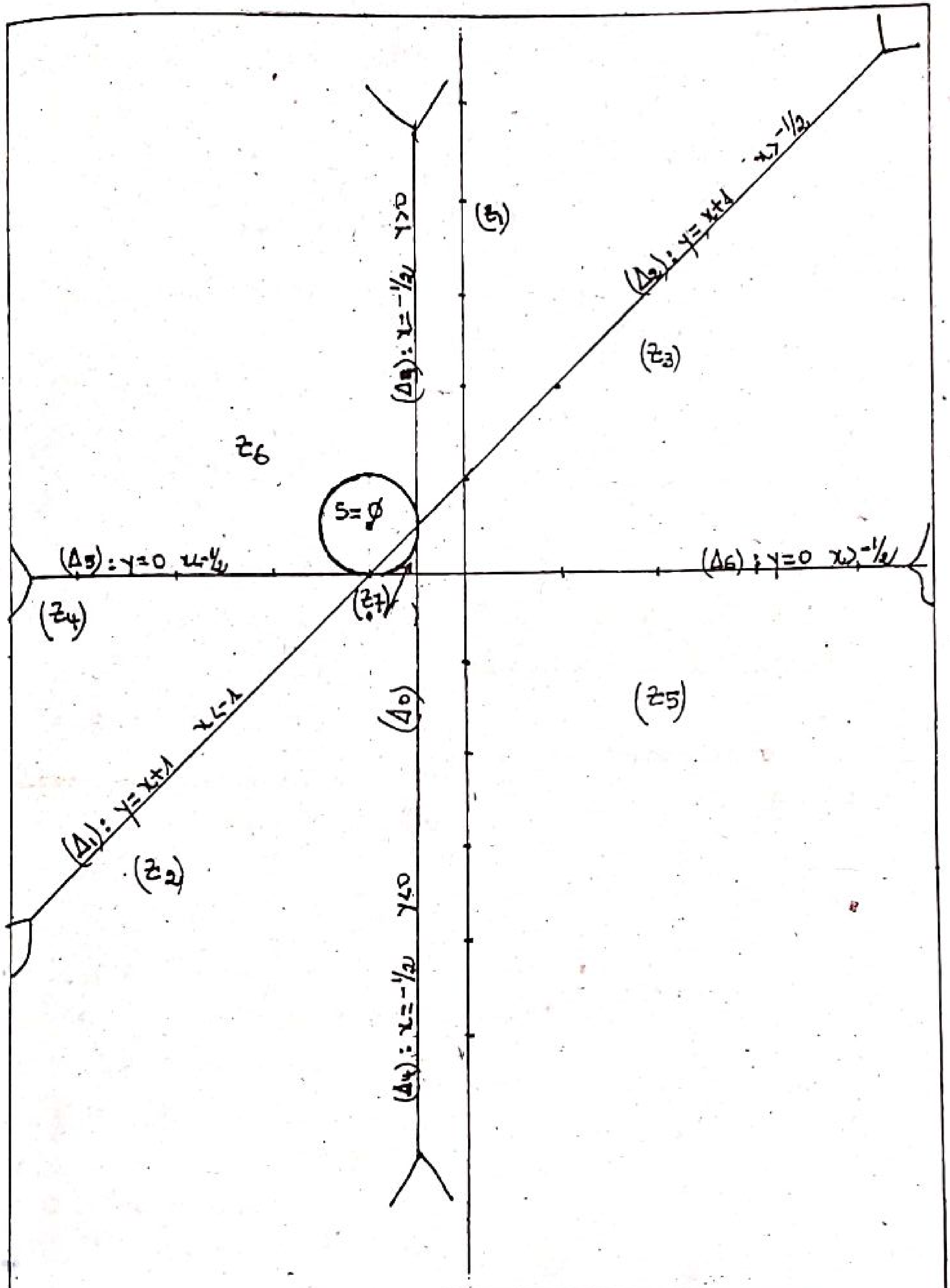
Résolvons (a).

$\Delta = 1 - 4(2)(-3) = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

Les points M sont donc

$M_1\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right) \quad M_2(1 ; 1)$



$(\Delta_2): y = x+1 \quad x > -1/2$
$(\Delta_3): x = -1/2 \quad y > 0$
(z_1)
(z_3)
z_6
$S = \emptyset$
$(\Delta_5): y = 0 \quad x < -1/2$
$(\Delta_6): y = 0 \quad x > -1/2$
(z_4)
(z_7)
(Δ_0)
(z_5)
$(\Delta_1): y = x+1 \quad x < -1$
(z_2)
$(\Delta_4): x = -1/2 \quad y < 0$

EXERCICE 17

Soient x et y deux réels. On considère le polynome P de la variable réelle t défini par:

$$P(t) = (x+y-3)t^3 + (xy-2)t^2 + 2t.$$

1-/ Discutons suivant la position du point $M(x;y)$ dans le plan, le dégré du polynôme P

Posons $\begin{cases} x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3 \\ \text{et} \\ xy-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{x} \end{cases}$

Soit (Δ) la droite d'équation $y=-x+3$ et H l'hyperbole d'équation $y=\frac{2}{x}$

Déterminons les coordonnées des points d'intersection de H et (Δ)

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ xy-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-x+3)-2=0 \\ y=-x+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=-x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{et} \\ y=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2 \\ \text{et} \\ y=1 \end{cases}$$

Soit $A(1;2)$ et $B(2;1)$

Discussion

1er cas: $M \notin (\Delta)$

P est de dégré 3.

2e cas: $M \in (\Delta)$ privée de A et B

Le polynôme P est de dégré 2

3e cas: $M \in \{A;B\}$

P est de dégré 1

2-/ Calculons $P(-1)$ et $P(1)$ en fonction de x et y.

$$P(-1) = -(x+y-3)+(xy-2)-2 = xy-x-y-1$$

$$\boxed{P(-1) = xy-x-y-1}$$

$$P(1) = (x+y-3)+(xy-2)+2 = xy+x+y-3$$

$$\boxed{P(1) = xy+x+y-3}$$

3-/ Soit le polynôme Q de la variable réelle t défini par:

$$Q(t) = (2x+3y-1)t^2+(x-2)t+\frac{1}{4}.$$

Déterminons l'ensemble des points $M(x;y)$ pour lesquels la courbe représentative de Q coupe l'axe des abscisses en deux points E et F tels que $O \in]EF[$, O étant l'origine du repère

Tout ce qui précède se traduit sous la forme du système suivant:

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

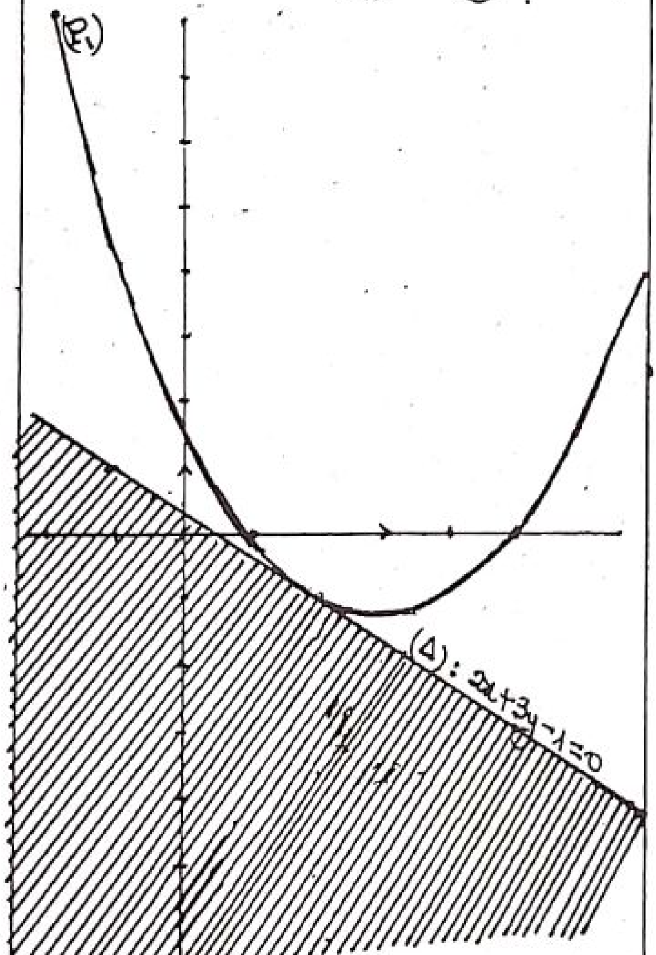
$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{avec } \Delta = (x-2)^2 - (2x+3y-1) \\ P < 0 & P = \dfrac{1}{4(2x+3y-1)} \end{cases}$$

On a : $\Delta = x^2 - 6x + 5 - 3y$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 5)$

Soit (P_1) la parabole d'équation $y = \frac{1}{3}(x^2-6x+5)$ et (Δ_1) la droite d'équation $2x+3y-1=0$

Construisons (P_1) et (Δ)



L'ensemble recherché est la partie hachurée bord exclu. C'est le demi plan delimité par la droite (Δ) d'équation $2x+3y-1=0$ contenant l'origine du repère, bord exclu.

EXERCICE 18

Construisons dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble de définition des fonctions

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto \frac{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}{\sqrt{y(x-2) - |x+1|}}$$

$$\mathcal{D}f = \left\{ M(x;y) \in P \,/\, 4x - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ et } y(x-2) - |x+1| > 0 \right\}$$

Posons $4x - x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2$

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r = 2$

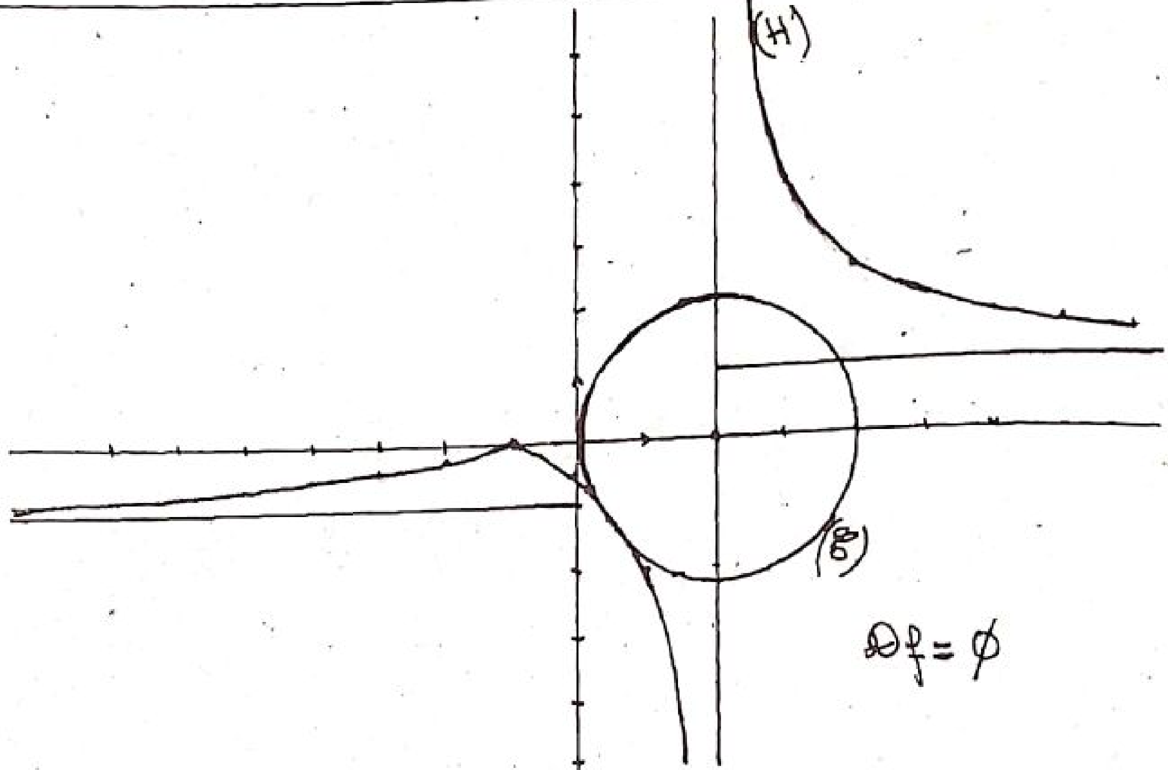
Posons $y(x-2) - |x+1| = 0$

$y = \dfrac{|x+1|}{x-2}$

Posons $p(x) = \dfrac{|x+1|}{x-2}$

$$= \begin{cases} \dfrac{-x-1}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{x-2} & \text{si } x \geq -1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$$

Construisons les courbes $(\mathcal{C})$ et H, H étant la représentation graphique de p.



$\mathcal{D}f = \emptyset$

Domaine de définition de g

$g : P \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(x;y) \longmapsto \dfrac{-x^2-y^2+4x-6y-4}{x-2y+4}$

$\mathcal{D}g = \left\{ M(x;y) \in P \,/\, \dfrac{-x^2-y^2+4x-6y-4}{x-2y+4} \geq 0 \right\}$

Posons $\begin{cases} -x^2-y^2+4x-6y-4 = 0 & (1) \\ x-2y+4 = 0 & (2) \end{cases}$

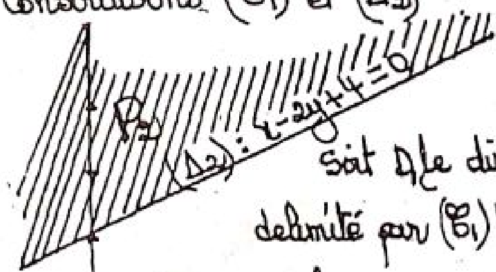
$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = 9$

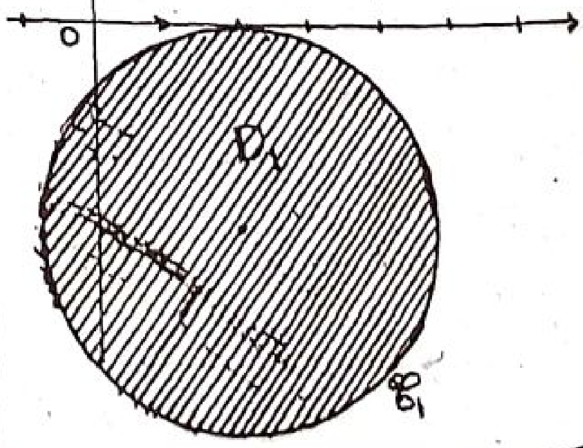
Soit $(\mathscr{C}_1)$ le cercle de centre $\Omega_1(2;-3)$ et de rayon $r_1 = 3$

Soit (Δ_2) la droite d'équation $x-2y+4=0$

Construisons $(\mathscr{C}_1)$ et (Δ_2)



Soit D_1 le disque délimité par $(\mathscr{C}_1)$ bord inclus



le domaine de définition D_g de g est : $D_g = D_1 \cup P_2$ où

D_1 est le disque de centre $\Omega_1(2;-3)$ et de rayon $r = 3$ bord inclus

P_2 est le demi plan de bord (Δ_2) ne contenant pas l'origine O du repère bord exclus.

EXERCICE 19

On considère la fonction numérique f_m à variable réelle définie par :

$$f_m(x) = (m+4)x^2 - 2(m-2)x + 1.$$

Soit (P_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ m étant un paramètre réel.

1/ Discutons suivant les valeurs de m, la nature de (P_m)

Posons $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$

1er cas : $m<-4$

$m+4<0$; (P_m) est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas

2e cas : $m=-4$

$f_{-4}(x) = 12x+1$ (P_{-4}) est la droite d'équation $y = 12x+1$

3e cas : $m>-4$

$m+4>0$; (P_m) est une parabole dont la concavité est tournée vers le haut.

2/ Discutons suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (P_m) avec l'axe $(O,\vec{i})$. Nous position nerons les points par rapport à O

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M \in (P_m) \cap (O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_m(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f_m(x) = 0$

$\Leftrightarrow (m+4)x^2 - 2(m-2)x + 1 = 0 \quad (E_m)$.

Le nombre de points d'intersection de (P_m) avec l'axe $(O,\vec{i})$ est le nombre de solutions de (E_m). Positionner les points par rapport à O revient à étudier le signe des solutions de (E_m)

Etudions donc le nombre et le signe des solutions de l'équation (E_m)

$x \in \mathbb{R}$, $(m+4)x^2 - 2(m-2)x + 1 = 0$

1er cas : $m=-4$

$(E_{-4}) \Leftrightarrow 12x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12}$

2e cas : $m \neq -4$

$\Delta' = (m-2)^2 - (m+4) = m^2 - 5m$

Posons $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0$ ou $m_2 = 5$

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

Désignons par S et par P la somme et le produit des solutions éventuelles de (Em). On a :

$S = \frac{2(m-2)}{m+4}$ $P = \frac{1}{m+4}$

<u>Résumons les résultats de notre discussion dans le tableau ci-dessous</u>

m	$-\infty$		-4		0		2		5		$+\infty$
Δ'		+		+	0	−		−	0	+	
P		−		+		+		+		+	
S		+		−		−	0	+		+	
A		2 $O\in[M_1M_2]$	1	2 M_2 M_1 O	1 M_1 O		0		1 O M_1	2 O M_1 M_2	

A = Nombre et position des points d'intersection de (P_m) avec $(O, \vec{I})$.

3./ <u>Discutons suivant les valeurs de m le signe de $f_m(x)$ suivant les valeurs de x</u>

Posons (Em) : $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) = 0$

Pour $m \neq -4$, $\Delta' = m^2 - 5m$

Tableau résumant les signes de Δ' et de $m+4$ suivant les valeurs de m

m	$-\infty$		-4		0		5		$+\infty$
Δ'		+		+	0	−	0	+	
$m+4$		−	0	+		+		+	

Dans chaque cas nous dresserons le tableau de signe de $f_m(x)$ suivant les valeurs de x.

<u>1er cas</u> : $m < -4$

$\Delta' > 0$ et $m+4 < 0$

(Em) admet deux solutions x_1 et x_2

x		x_1		x_2	
$f_m(x)$	−	0	+	0	−

2e cas : $m = -4$

$f_{-4}(x) = 12x + 1$

x	$-\infty$		$-1/12$		$+\infty$
$f_{-4}(x)$		−	0	+	

<u>3e cas</u> : $-4 < m < 0$ ou $m > 5$

$\Delta' > 0$ et $m+4 > 0$

(Em) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f_m(x)$		+	0	−	0	+	

<u>4e cas</u> : $m = 0$

$\Delta' = 0$ $m+4 > 0$ (Em) admet une solution double $x_0 = -1/2$

x		$-1/2$	
$f_m(x)$	+	0	+

5^e cas : $0 < m < 5$

$\Delta' < 0$ et $m+4 > 0$ On a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) > 0$

<u>6^e cas</u> : $m = 5$

$\Delta' = 0 \quad m+4 > 0$; $(E5)$ admet une solution double $x'_0 = 1/3$.

x		$1/3$	
$f_m(x)$	$+$	0	$+$

4°/ Lorsque (P_m) est une parabole, elle possède un sommet S_m.

<u>Déterminons l'ensemble (H) décrit par S_m lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{-4\}$</u>

Posons $\alpha = \frac{S}{2} = \frac{m-2}{m+4}$

Les coordonnées de S_m sont $(\alpha ; f_m(\alpha))$

$$f_m(\alpha) = (m+4)\left(\frac{m-2}{m+4}\right)^2 - 2(m-2)\left(\frac{m-2}{m+4}\right) + 1$$

$$= 1 - \frac{(m-2)^2}{m+4}$$

$$S_m\left(\frac{m-2}{m+4} ; 1 - \frac{(m-2)^2}{m+4}\right)$$

<u>Ensemble H décrit par S_m lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{-4\}$.</u>

$$\begin{cases} x = \frac{m-2}{m+4} \ (1) & x = 1 - \frac{6}{m+4} \\ y = 1 - \frac{(m-2)^2}{m+4} \ (2) ; & y = 1 - (m-2)x \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow m = \frac{6}{1-x} = \frac{4x+2}{1-x}$

$$y = 1 - x\left(\frac{4x+2}{1-x} - 2\right)$$

$$y = \frac{6x^2+x-1}{x-1}$$

Lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{-4\}$, le sommet (S_m) de la parabole P_m décrit la courbe (H) représentative de la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{6x^2+x-1}{x-1}$$

EXERCICE 20

On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Soit $A(1;5)$ et $S(-1;1)$ deux points du plan.

1°/ <u>Déterminons les réels a, b et c pour que la courbe (C) représentative de f, passe par A et admette en S une tangente horizontale</u>

Les conditions ci-dessus peuvent se traduire sous la forme

$$\begin{cases} A \in (C) \\ S \in (C) \\ -\frac{b}{2a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-1) = 1 \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 5 \\ a-b+c = 1 \\ b = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{a = 1 \quad b = 2 \quad c = 2}$$
$$\boxed{f(x) = x^2 + 2x + 2}$$

2./ <u>Etudions les variations de f.</u>

$f(x) = x^2 + 2x + 2$
$\quad = (x+1)^2 + 1$

Le coefficient a de x^2 est $1 > 0$

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$, strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$ et admet un minimum au point -1 avec

$f(-1) = 1$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Y_f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3./ Soit $B(-1;0)$ un point du plan.

a/ <u>Déterminons l'équation de la droite (D_m) de coefficient directeur m et passant par B.</u>

Posons $(D_m) : y = ax + b$. $a = m$

$B(-1;0) \in D_m \Rightarrow 0 = -m + b$
$\Rightarrow b = m$

On a donc :

$$\boxed{(D_m) : y = mx + m}$$

b./ <u>Déterminons les valeurs de m pour lesquelles (D_m) est tangente à la courbe (C)</u>

Soit $M(x;y)$ un point du plan

$M \in (D_m) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + m \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = mx + m$

$\Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 2 - m = 0 \quad (1)$

$\Delta = (2-m)^2 - 4(2-m)$
$\quad = (2-m)(2-m-4)$
$\quad = (m+2)(m-2)$.

(D_m) est tangente à (C) ssi $(\Delta) = 0$ soit $m = -2$ ou $m = 2$

> Les valeurs de m pour lesquelles (D_m) est tangente à (C) sont : $m_1 = -2$ et $m_2 = 2$

• <u>Précisons les points de contact</u>

Pour $m = -2$

(1) devient $x^2 + 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f(-2) = 2$

Pour $m = 2$

(1) devient $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f(0) = 2.$$

Conclusion:

$(\mathcal{D}_{-2})$ est tangente à (C) au point $A_1(-2;2)$

$(\mathcal{D}_2)$ est tangente à (C) au point $A_2(0;2)$

c/ Equations des tangentes à (C) issues du point B

Les tangentes à (C) issues de B sont les droites $(\mathcal{D}_m)$ pour $m \in \{-2;2\}$

On a donc:

$(\mathcal{D}_{-2}): y = -2x - 2$ et $(\mathcal{D}_2): y = 2x + 2$

d/ Discutons suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection entre (C) et $\mathcal{D}_m$

Le nombre de point d'intersection entre (C) et $(\mathcal{D}_m)$ est le nombre de solutions de l'équation

(1): $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + (2-m)x + (2-m) = 0$

dont le discriminant est

$$\Delta = (m+2)(m-2)$$

Résumons les résultats de notre discussion dans le tableau ci-après

m		-2		2	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$
Nombre de points d'intersection (C) et $\mathcal{D}_m$	2	1	0	1	2

4/ On suppose que $(\mathcal{D}_m)$ coupe (C) en deux points distincts M' et M''.

a/ Coordonnées du point I milieu de $[M'M'']$ en fonction de m

I milieu de $[M'M'']$ voudrait dire

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{M'} + x_{M''}}{2} \\ I \in (\mathcal{D}_m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{S}{2} \\ y_I = m x_I + m \end{cases}$$

S étant la somme des solutions de l'équation (1). On a donc

$$x_I = \frac{-2+m}{2}$$

$$y_I = m\left(\frac{-2+m}{2} + 1\right) = \frac{m^2}{2}$$

$$I\left(\frac{-2+m}{2}; \frac{1}{2}m^2\right)$$

avec $m \in]-\infty;-2[\ ]2;+\infty[$

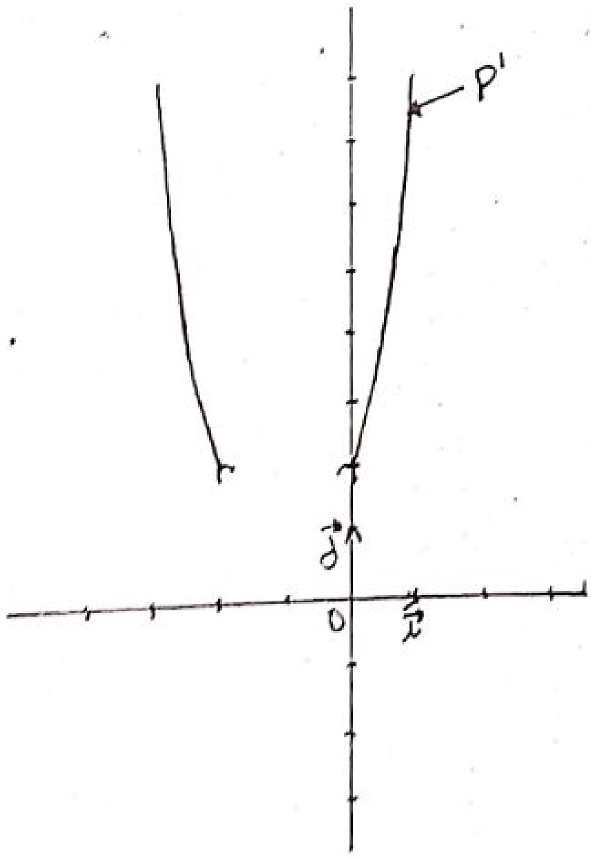
b-/ Déterminons et représentons avec soins l'ensemble (P') des points I lorsque m varie.

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{m}{2} \\ y = \frac{1}{2} m^2 \\ m < -2 \text{ ou } m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(x+1) \\ y = 2(x+1)^2 \\ x < -2 \text{ ou } x > 0 \end{cases}$$

L'ensemble (P') est la courbe dont l'équation est:

$$\begin{cases} y = 2(x+1)^2 \\ x < -2 \text{ ou } x > 0 \end{cases}$$

Construction de (P')



EXERCICE 21

Soit g_m la fonction à variable réelle x définie par:

$$g_m(x) = -mx^2 + (-3m+2)x + 4m + 3$$

On désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$, m étant un paramètre réel.

1-/ Etudions suivant les valeurs de m le sens de variation de g_m

Posons $\Delta = (-3m+2)^2 + 4m(4m+3)$
$= 25m^2 + 4$

Posons $\alpha = \frac{3m-2}{-2m} = \frac{-3m+2}{2m}$

En utilisant la forme canonique

$$g_m(x) = -m(x-\alpha)^2 + \frac{\Delta}{4m}$$

1er cas; $m = 0$

$g_0(x) = 2x + 3$, avec $2 > 0$

g_0 est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2e cas; $m < 0$

g_m est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$, strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$

et admet au point α un minimum avec $g_m(\alpha) = \frac{25m^2+4}{4m}$

3e cas: $m > 0$

g_m est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ et atteint son maximum au point α.

2/ Montrons que toutes les courbes (Cm) passent par deux points communs A et B dont nous préciserons les coordonnées

Posons $y = g_m(x)$ avec $M(x;y)$ on a:

$y = -mx^2 - 3mx + 2x + 4m + 3$

$\Leftrightarrow y - 2x - 3 = -m(x^2+3x-4)$

Toutes les courbes (Cm) passent par $M(x;y)$ ssi :

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ \text{et} \\ y-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-1)=0 \\ y = 2x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Toutes les courbes (Cm) passent donc par deux points communs $A(-4;-5)$ et $B(1;5)$

3/ Soit $M(p;q)$ un point du plan

Discutons suivant la position du point M dans le plan, le nombre de courbes passant par M

$M \in (Cm) \Leftrightarrow (q-2p-3) = -m(p+4)(p-1)$ (2)

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ les droites d'équations $(\mathcal{D}_1): x=-4$ $(\mathcal{D}_2): x=1$

1er cas: $M \in \mathcal{D}_1 - \{A\}$ ou $M \in \mathcal{D}_2 - \{B\}$

(2) $\Leftrightarrow 0m = (q-2p-3) \neq 0$

Cela n'a pas de sens.

Aucune courbe (Cm) ne passe donc par M

2e cas: $M \in \mathcal{P} - \{(\mathcal{D}_1);(\mathcal{D}_2)\}$

(2) est sous la forme $am=b$, $a\neq 0$

Une seule courbe (Cm) passe donc par M.

3e cas: $M \in \{A;B\}$

(2) se met sous la forme $0m = 0$

Toutes les courbes (Cm) (Une infinité de courbes) passent par M.

4/ Etudions les variations de g_m pour $m \in \{-1;1\}$.

1er cas: $m=-1$

$g_{-1}(x) = x^2+5x-1$
$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}$

E-mail: koehyppo@yahoo.fr

g_{-1} est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[$, strictement croissante sur $\left]-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

et admet en $-\frac{5}{2}$ son minimum

$$g_{-1}\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{29}{4}$$

Tableau de variation de g_{-1}

x	$-\infty$	$-5/2$	$+\infty$
Vg_{-1}	$+\infty$ ↘	$\frac{29}{4}$	↗ $+\infty$

Pour $m = 1$

$$g_1(x) = -x^2 - x + 7$$
$$= -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$$

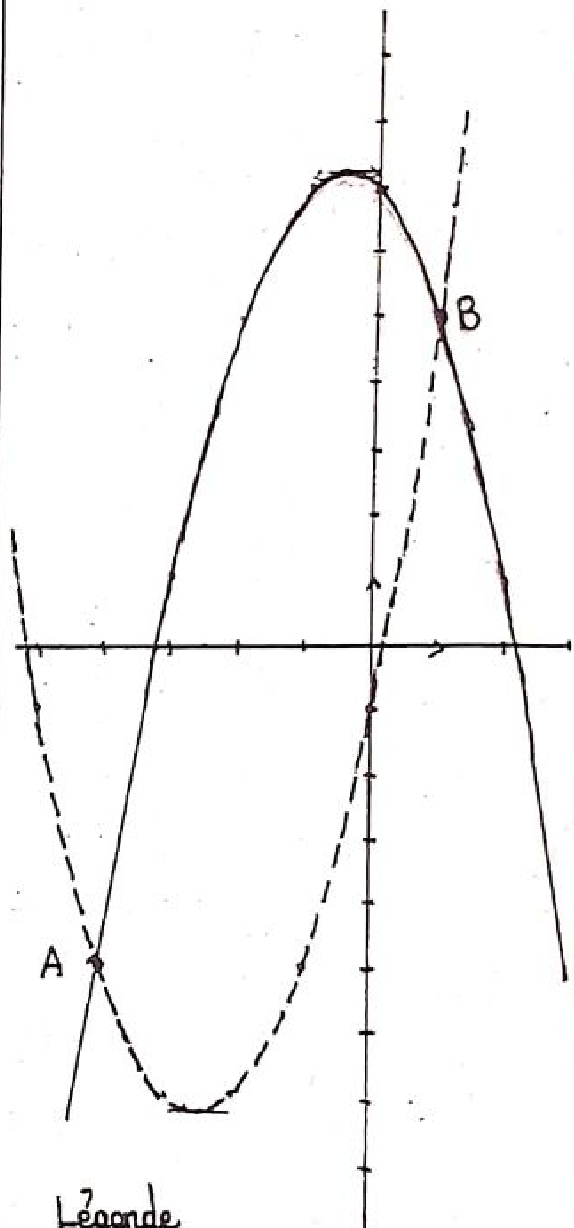
g_1 est strictement croissante sur $-\infty; -\frac{1}{2}$, strictement décroissante sur $-\frac{1}{2}, +\infty$

et admet un maximum au point $-\frac{1}{2}$ avec $g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{4}$

Tableau de variation de g_1

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
Vg_1	$-\infty$ ↗	$\frac{28}{4}$	↘ $-\infty$

Construction des courbes (C_{-1}) et (C_1)



Légende

C_{-1} (pointillés)

C_1 (trait plein)

5°/ On pose :

$f(x) = \operatorname{Sup}[g_{-1}(x) ; g_1(x)]$

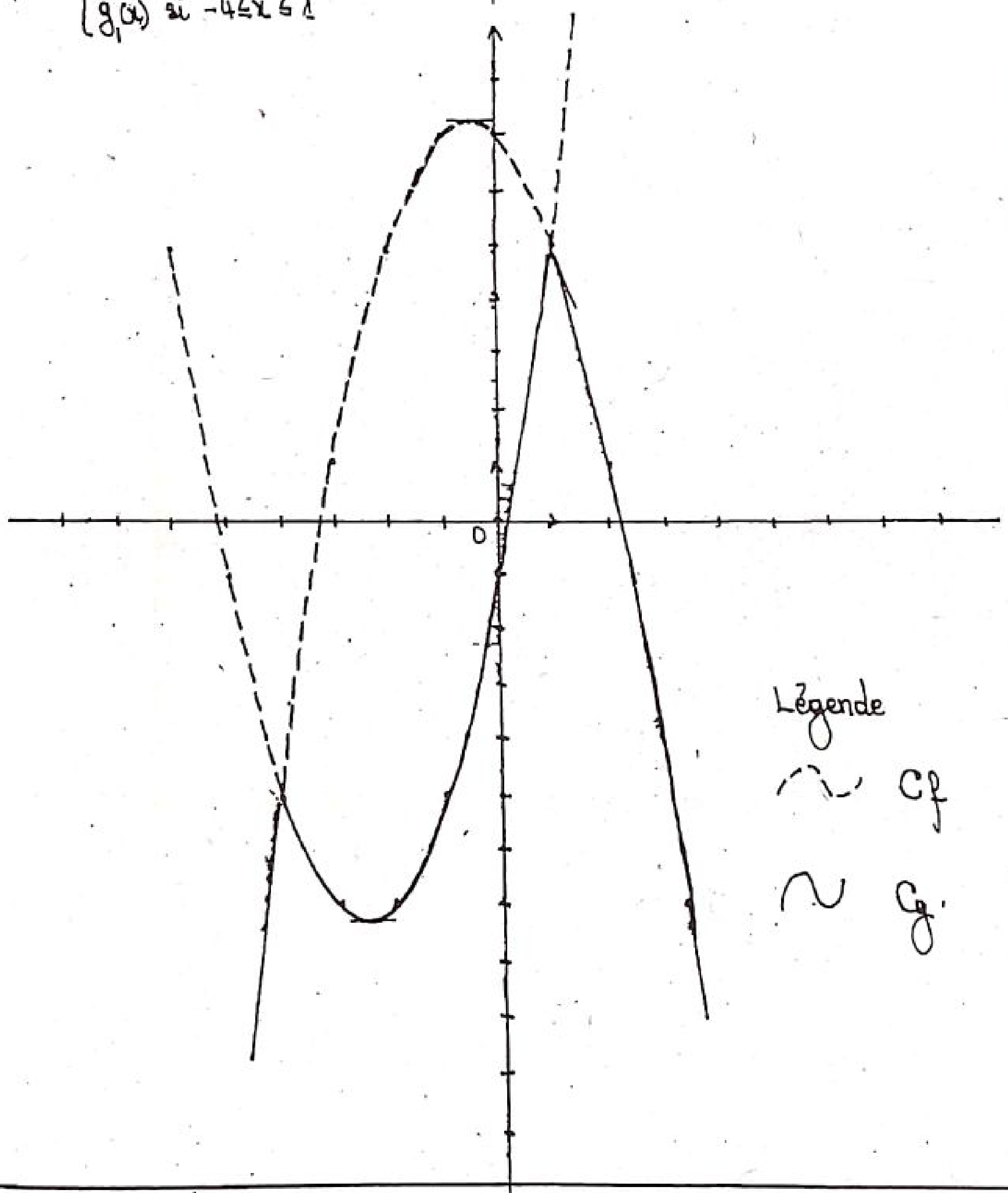
$g(x) = \operatorname{Inf}[g_{-1}(x) ; g_1(x)]$

On :

$$f(x) = \begin{cases} g_{-1}(x) & \text{si } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \\ g_1(x) & \text{si } -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \\ g_{-1}(x) & \text{si } -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Voir figure ci-dessous pour C_f et C_g



Doukoto's

De l'effort

Encore de l'effort

Toujours de l'effort

Car au bout de l'effort

Le confort

Chapitre 3

TRIGONOMETRIE

COURS

I/ LES FONCTIONS CIRCULAIRES

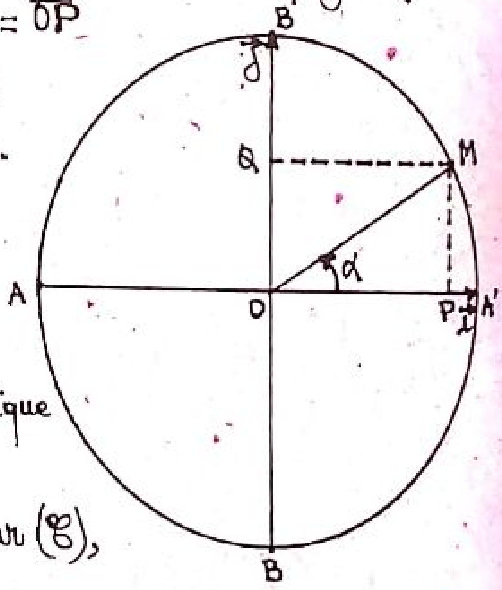
1°/ Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$, on considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1. Soit M un point de $(\mathscr{C})$ tel que $(\vec{I}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Soit $A(-1;0)$, $A'(1;0)$, $B(0;-1)$ et $B'(0;1)$ quatre points de $(\mathscr{C})$. Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AA') et (BB').

- On appelle cosinus de α noté $\cos\alpha$ le nombre réel égal à l'abscisse du point M. En d'autres termes $\cos\alpha = \overline{OP}$

- On appelle sinus de α noté $\sin\alpha$ le nombre réel égal à l'ordonnée du point M. On a $\sin\alpha = \overline{OQ}$



Remarques:

- Le cercle $(\mathscr{C})$ est appelé cercle trigonométrique et a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$
- Quelle que soit la position du point M sur $(\mathscr{C})$, $P \in [AA']$ et $Q \in [BB']$

2°/ Tangente et cotangente d'un angle orienté

Soit (Δ) la perpendiculaire à (AA') en A' et T le point d'intersection des droites (Δ) et (OM).

- On appelle tangente de α notée $\tan\alpha$ le nombre réel égal à $\overline{A'T}$

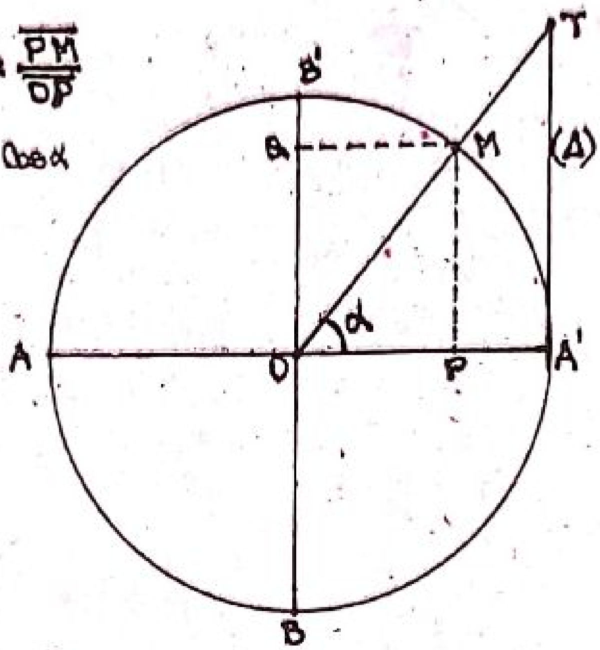
En appliquant le théorème de Thalès on a:

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{A'T}}$ or $OA' = 1$ donc $\overline{A'T} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}$

De plus $PM = OQ = \sin\alpha$ et $OP = \cos\alpha$

Il en découle donc que :

$$\boxed{\overline{AT} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$



• On appelle cotangente de α notée $\operatorname{cotan}\alpha$, l'inverse de $\tan\alpha$.

$$\boxed{\operatorname{Cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Remarques :

• Si M est confondu à B ou à B' alors les droites (OM) et (Δ) sont parallèles. Le point T n'existe pas.

Par conséquent $\tan\alpha$ n'existe pas pour les nombres réels α de la forme

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

• Pour les réels α de la forme $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan\alpha = 0$ et $\operatorname{cotan}\alpha$ n'est pas définie.

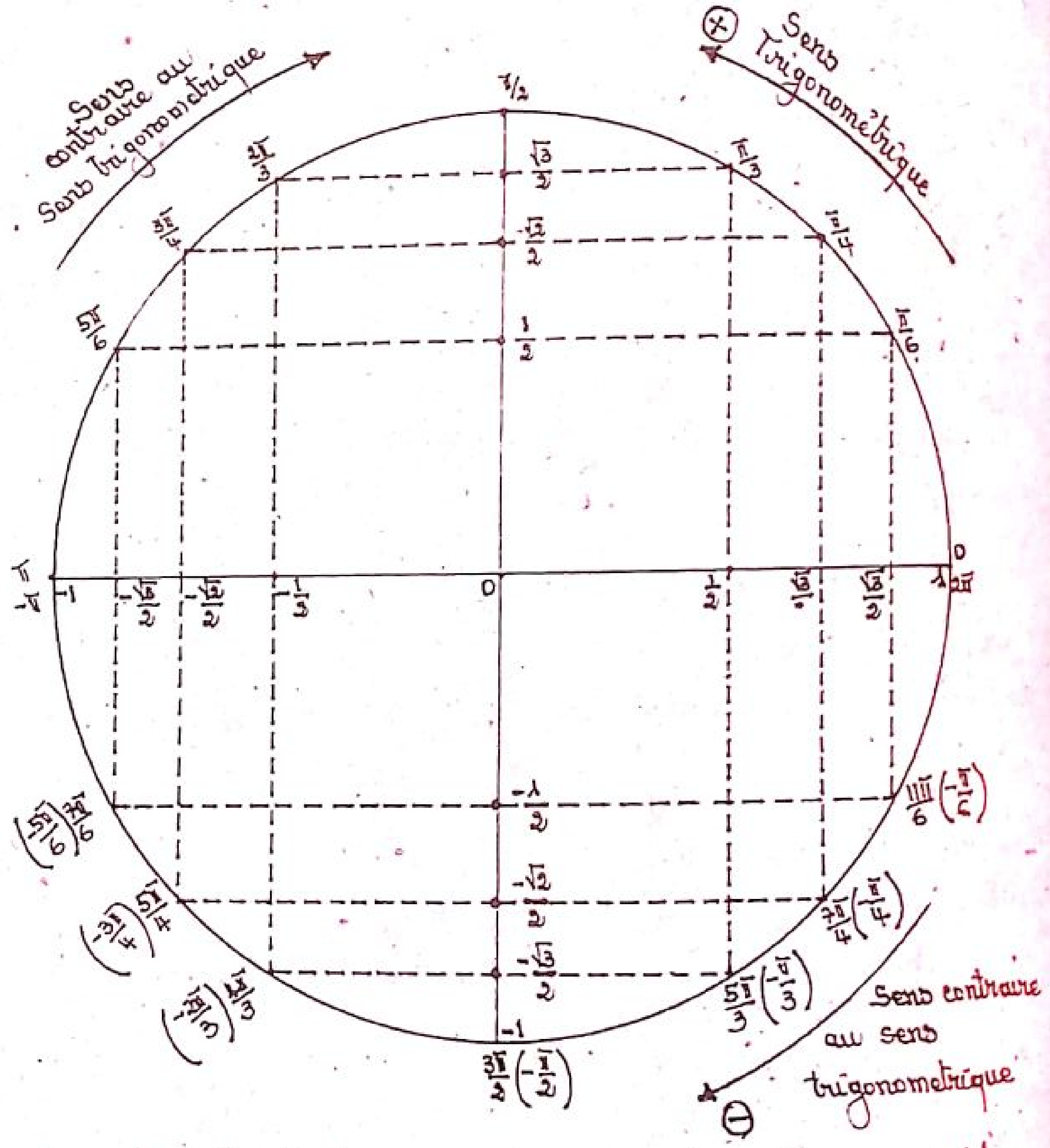
Donc $\operatorname{cotan}\alpha$ est définie pour $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Posons $f(x) = \tan x$ et $g(x) = \operatorname{cotan} x$

On a : $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{D}g = \mathbb{R} - \{k\pi\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3·1 Sinus et Cosinus des angles remarquables



Ce cercle présente le sinus et le cosinus des angles remarquables.

A la page suivante nous allons faire un tableau qui donne le sinus, le cosinus la tangente et la cotangente des angles remarquables.

Sinus - Cosinus - Tangente et Cotangente des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$ ou $\frac{-\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$ ou $\frac{-\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\text{Cotan}\,\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

II./ PROPRIETES DES FONCTIONS CI CULAIRES

1./ Fonctions circulaires simples

Soit $M \in (\mathscr{C})$ tel que $(\widehat{\vec{I}, \vec{OM}}) = \alpha$. On a: $M(\cos\alpha ; \sin\alpha)$ et $X_M^2 + Y_M^2 = 1$ soit

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Donc: $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ (P_1)

On a également vu que: quelle que soit la position du point M sur $(\mathscr{C})$,

$P \in [AA']$ et $Q \in [BB']$.

On en déduit que:

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \\ \text{et} \\ -1 \leq \sin\alpha \leq 1 \end{cases}} \quad (P_2)$$

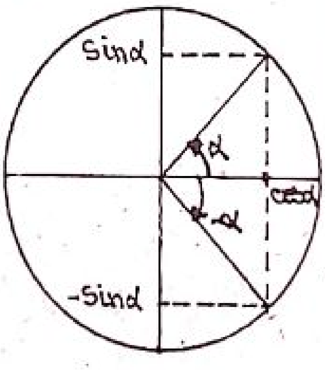
2./ Relation entre les images des réels α et $-\alpha$ par les fonctions circulaires simples

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

donc:



$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$

$$= -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$$\cot an(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

$\cot an(-\alpha) = -\cot an\alpha$

Conclusion

- Pour tout α réel on a:

$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$ (P_3)

$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.}$ (P_4)

- Pour tout $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ on a:

$\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$ (P_5)

- Pour tout $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ on a:

$\boxed{\cot an(-\alpha) = -\cot an\alpha}$ (P_6)

NB:

Les fonctions sinus, tangente et cotangente sont impaires et la fonction cosinus est paire.

3./ Relation entre les images de deux angles complémentaires par les fonctions circulaires simples

a./ Définition

Deux angles α et β sont dits complémentaires lorsque: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

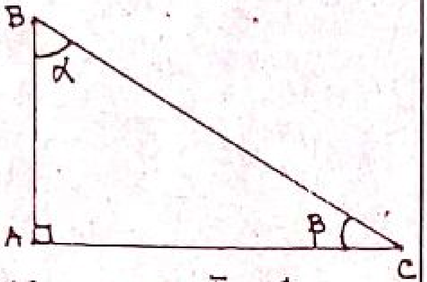
$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

les angles α et $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont donc
plémentaires

b/ Relation entre les images

Considérons le triangle ABC rectangle en A. Posons $\widehat{B}=\alpha$ et $\widehat{C}=\beta$



$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi \iff \alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi$

$\iff \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \iff \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\cos\alpha=\frac{AB}{BC}$ $\quad \sin\beta=\frac{AB}{BC}$

$\cos\beta=\frac{AC}{BC}$ $\quad \sin\alpha=\frac{AC}{BC}$

$\text{cotan}\,\alpha=\frac{AB}{AC}$ $\quad \tan\beta=\frac{AB}{AC}$

On a: $\cos\beta=\sin\alpha$; $\sin\beta=\cos\alpha$

$\tan\beta=\text{cotan}\,\alpha$ avec $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Conclusion

• Pour tout réel α on a:

$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha}$ (P7)

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha}$ (P8)

• Si de plus $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ on a:

$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cotan}\,\alpha}$ (P9)

Conséquences

Remplaçons dans (P7), (P8) et (P9) α par $-\alpha$ et appliquons les résultats de (P3), (P4) et (P5). On obtient:

• Pour tout réel α :

$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha}$ (P10)

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha}$ (P11)

• Si de plus $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ on a:

$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\text{cotan}\,\alpha}$ (P12)

4/ Relation entre les images de deux angles supplémentaires par les fonctions circulaires simples.

a/ Définition

Deux angles α et β sont supplémentaires si leur somme est égale à π.

$\alpha+\beta=\pi \iff \beta=\pi-\alpha$.

b/ Relation entre les images

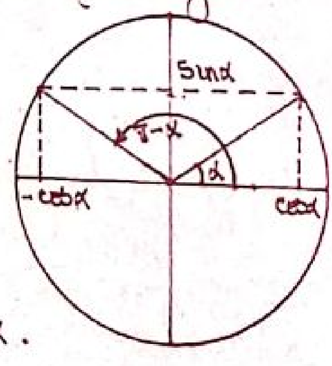
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ on a:

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

et si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.



Conclusion

- Pour tout α réel on a :

$$\boxed{\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha} \quad (P_{13})$$

$$\boxed{\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha} \quad (P_{14})$$

- Pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $\alpha \neq k\pi$ on a :

$$\boxed{\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha} \quad (P_{15})$$

$$\boxed{\cotan(\pi-\alpha) = -\cotan\alpha} \quad (P_{16})$$

c/ Conséquences

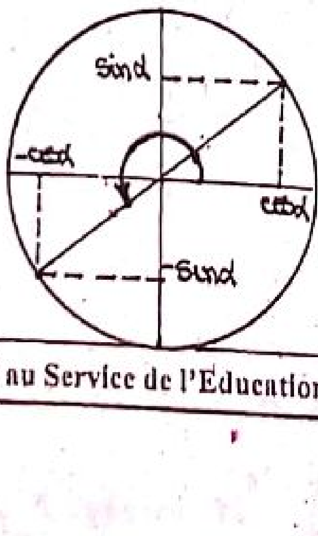
Remplaçons dans (P_{13}), (P_{14}), (P_{15}) et (P_{16}), α par $-\alpha$ et utilisons (P_3) (P_4) et (P_5) on obtient :

$$\boxed{\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha} \quad (P_{17})$$

$$\boxed{\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha} \quad (P_{18})$$

$$\boxed{\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha} \quad (P_{19})$$

$$\boxed{\cotan(\pi+\alpha) = \cotan\alpha} \quad (P_{20})$$

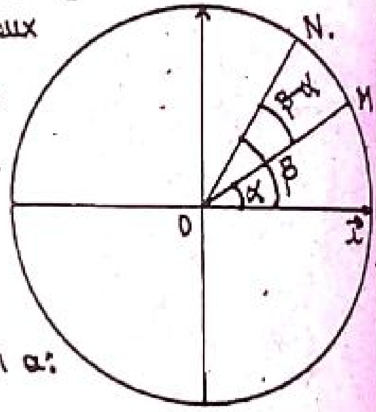


Les propriétés (P_{19}) et (P_{20}) signifient que les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.

III./ LES FORMULES TRIGONOMETRIQUES

1/ Les formules d'addition

Soit M et N deux points du cercle trigonométrique tel que : $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$ et $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}}) = \beta$. On a :



$\beta - \alpha = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}}) - (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$

$\quad = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}})$

$\beta - \alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$

De plus : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{pmatrix}$

avec $OM = ON = 1$.

Calculons de deux manières différentes $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$

1ère méthode :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$ (a)

2e méthode :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM.ON.\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(\beta-\alpha)$ (b).

(a) et (b) nous permettent d'écrire :

• Pour tout α et β réels :

$$\boxed{\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha} \quad (P_{21})$$

Remplaçons dans (P_{21}) α par $-\alpha$ et utilisons (P_3) et (P_4) on a :

Pour tout α et β réels :

$$\boxed{\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha} \quad (P_{22})$$

Remplaçons dans (P_{22}), β par $\frac{\pi}{2}-\beta$ on a :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\alpha$$

or $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta-\alpha)\right]$

$= \sin(\beta-\alpha)$ d'après (P_8)

De plus : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta$ d'après (P_7)

En définitive on a :

Pour tout α et β réels on a :

$$\boxed{\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha} \quad (P_{23})$$

Remplaçons dans (P_{23}) α par $-\alpha$ et utilisons (P_3) et (P_4) on obtient :

$\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha} \quad (P_{24})$$

Calculons à présent $\tan(\beta+\alpha)$ en supposant que : $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $\beta+\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos\beta\cos\alpha$ qui est non nul on a :

$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$ ce qui donne :

$$\boxed{\tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}} \quad (P_{28})$$

En remplaçant α par $-\alpha$ dans P_{28} et en utilisant P_5 on a :

$$\boxed{\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}} \quad (P_{29}).$$

2/ Formules de duplication et de linéarisation

Remplaçons dans (P_{22}), (P_{24}) et (P_{28}) β par α on obtient :

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad (P_{30})$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \quad (P_{31}).$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} \quad (P_{32})$$

Exploitons à présent (P_1) et (P_{30}).

(P_1) et (P_{30}) $\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha \\ 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \end{cases}$ Soit:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \quad (P_{33})$$

ou

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha} \quad (P_{34}).$$

Des deux propriétés précedentes on déduit les deux suivantes :

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \quad (P_{35})$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \quad (P_{36})$$

(P_{35}) et (P_{36}) sont des formules de linéarisation.

Utilisons (P_{35}) et (P_{36}) on obtient

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ Soit

$$\boxed{\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \quad (P_{37})$$

De (P_{37}) on déduit que:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} \quad (P_{38}).$$

De plus:

$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\cotan^2\alpha = 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

Soit :

$$\boxed{1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}} \quad (P_{39})$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \quad (P_{40})$$

$$\boxed{1+\cotan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}} \quad (P_{41})$$

En posant $\cotan\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ dans (P_{41}) on obtient :

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} \quad (P_{42})$$

Reprenons les formules P_{32} et P_{38} puis posons $a = 2\alpha$ et $t = \tan\alpha = \tan\frac{a}{2}$

On a:

$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Or $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ donc $\sin a = \tan a . \cos a$

$= \frac{2t}{1+t^2}$

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

Conclusion :

Pour tout nombre réel a tel que $\tan\frac{a}{2}$ soit défini, en posant $t=\tan\frac{a}{2}$ on a:

$$\boxed{\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad (P_{43})$$

$$\boxed{\sin a=\frac{2t}{1+t^2}} \quad (P_{44})$$

$$\boxed{\tan a=\frac{2t}{1-t^2}} \quad (P_{45})$$

3°/ Transformation en produit d'une somme ou d'une différence de deux sinus ou de deux cosinus

Reprenons les relations P_{21} et P_{22}

$$\begin{cases}\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha\\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos(\beta+\alpha)+\cos(\beta-\alpha)=2\cos\beta\cos\alpha\\ \cos(\beta+\alpha)-\cos(\beta-\alpha)=-2\sin\beta\sin\alpha\end{cases}$$

Posons $\begin{cases}\beta+\alpha=p\\ \beta-\alpha=q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\frac{p+q}{2}\\ \alpha=\frac{p-q}{2}\end{cases}$

On a donc:

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \quad (P_{46})$$

$$\boxed{\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)} \quad (P_{47})$$

Reprenons à présent les relations P_{23} et P_{24}

$$\begin{cases}\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha\\ \sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)=2\sin\beta\cos\alpha\\ \sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)=2\cos\beta\sin\alpha\end{cases}$$

En procédant comme précédemment on a:

$$\boxed{\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)} \quad (P_{48})$$

$$\boxed{\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \quad (P_{49})$$

IV·/ EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1·/ Equation de forme: $\cos x=a$

a·/ Existence des solutions

On sait que: $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\cos x\leq 1$.

L'équation $\cos x=a$ n'admet donc des solutions que si : $-1\leq a\leq 1$

b·/ Résolution de l'équation

- Si $a<-1$ ou $a>1$, l'équation $\cos x=a$ n'admet pas de solution
- Si $-1\leq a\leq 1$, il existe un réel $\alpha\in[0;\pi]$ tel que $\cos\alpha=a$.

L'équation devient donc :

$$\cos x = \cos\alpha \iff \begin{cases} x = -\alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

c./ Cas particuliers

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = -1 \iff x = (2k+1)\pi \\ \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \iff x = 2k\pi \end{array}\right| k \in \mathbb{Z}$$

d./ Cas général

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.

L'équation : $x \in (D_f \cap D_g)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \iff \begin{cases} f(x) = -g(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ f(x) = g(x) + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$

e./ Equations pouvant être ramenées à la forme $\cos f = \cos g$.

$$\cos U = \sin V \iff \cos U = \cos\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$$

$$\cos U = -\cos V \iff \cos U = \cos(\pi - V)$$

$$\cos U = -\sin V \iff \cos U = \cos\left(\frac{\pi}{2} + V\right)$$

2./ Equation de la forme $\sin x = b$

a./ Existence des solutions

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$.
L'équation $\sin x = b$ n'admet donc des solutions que si $-1 \leq b \leq 1$.

b./ Résolution de l'équation

- Si $b < -1$ ou $b > 1$, l'équation $\sin x = b$ n'admet pas de solution.
- Si $-1 \leq b \leq 1$ alors il existe un réel $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta = b$.

L'équation devient alors :

$$\sin x = \sin\beta \iff \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

c./ Cas particuliers

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

d./ Cas général

Soient f et g deux fonctions de domaines de définition respectifs D_f et D_g.

L'équation $x \in D_f \cap D_g$

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)) \iff \begin{cases} f(x) = g(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$

e-/ Equations pouvant être ramenées à la forme : $\sin f = \sin g$.

$\sin U = \cos V \iff \sin U = \sin\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$

$\sin U = -\sin V \iff \sin U = \sin(-V)$

$\sin U = -\cos V \iff \sin U = \sin\left(V - \frac{\pi}{2}\right)$

3-/ Equation de la forme : $\tan x = c$

a-/ Existence des solutions

La fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel c, l'équation $\tan x = c$ admet au moins une solution.

b-/ Résolution de l'équation

Pour tout réel c, il existe un réel γ tel que $\tan \gamma = c$. L'équation devient alors :

$\tan x = \tan \gamma \iff x = \gamma + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Cas général

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $\forall x \in D_f \cap D_g$, $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

L'équation :

$$\tan(f(x)) = \tan(g(x)) \iff f(x) = g(x) + k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Remarque

L'équation $\cot x = d$ est équivalente à $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = d$ ou $\tan x = \frac{1}{d}$.

d-/ Equations pouvant être ramenées à la forme $\tan f = \tan g$

- $\tan U = \cot V \iff \tan U = \tan\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$
- $\tan U = -\tan V \iff \tan U = \tan(-V)$
- $\tan U = -\cot V \iff \tan U = \tan\left(\frac{\pi}{2} + V\right)$
- $\tan U \cdot \cot V = 1 \iff \tan U = \tan V$
- $\tan U \cdot \tan V = 1 \iff \tan U = \tan\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$

4-/ Equation de la forme : $a\cos x + b\sin x = c$

a-/ Première méthode : Factorisation

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ l'équation devient $\cos x = \frac{c}{a}$ Voir 1-/ du IV

E-mail: koehyppo@yahoo.fr

- Si $a=0$ et $b\neq 0$ alors l'équation devient : $\sin x = \frac{c}{b}$.
Voir IV - 2/ pour sa résolution

- Si $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $c=0$ alors l'équation devient :

$$a\cos x + b\sin x = 0$$

$$\Rightarrow b\tan x + a = 0 \text{ avec } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$k\in\mathbb{Z}$$

Ce qui devient : $\tan x = -\frac{a}{b}$
Voir IV - 3/ pour sa résolution

- Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ et $c\neq 0$ alors l'équation devient.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Soit θ l'angle tel que :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

l'équation devient :

$$\cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Nous savons résoudre cette équation

- Soit θ' l'angle tel que :

$$\cos\theta' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\theta' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

l'équation devient :

$$\cos x\sin\theta' + \sin x\cos\theta' = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\sin(x+\theta') = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nous savons également résoudre cette équation

b·/ Deuxième méthode :

Adjonction de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Ajoutons à l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ la propriété $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

On obtient : $(S)\ \begin{cases} a\cos x + b\sin x = c \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$

Posons $\cos x = X$ et $\sin x = Y$.

(S) devient : $\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{c-aX}{b} & (E_1) \\ X^2 + \left(\frac{c-aX}{b}\right)^2 = 1 & (E_2) \end{cases}$$

$(E_2) \Leftrightarrow (a^2+b^2)X^2 - 2acX + c^2 - b^2 = 0$

Soient X_1 et X_2 les solutions éventuelles de (E_2)

* Si X_1 et X_2 n'existent pas ou si X_1 et X_2 existent mais vérifient la condition $|X_1|>1$ et $|X_2|>1$

alors l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ n'a pas de solution

* Si $|X_1| \leq 1$ et $|X_2| \leq 1$ alors on calcule

$$Y_1 = \frac{c - aX_1}{b} \text{ et } Y_2 = \frac{c - aX_2}{b}$$

Résoudre l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ revient alors à résoudre les deux systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \cos x = X_1 \\ \sin x = Y_1 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} \cos x = X_2 \\ \sin x = Y_2 \end{cases}$$

les solutions de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ sont donc celles de (S_1) et celles de (S_2).

Exemple

On considère les équations :

(1) : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 6$

(2) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$

Résolvons chacune de ces équations par la méthode de factorisation puis par la méthode d'adjonction de $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

(1) : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 6$

Première méthode : Factorisation

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \text{ impossible}$$

car $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. et $3 > 1$

$$S = \emptyset$$

Deuxième méthode :

Ajoutons à (1) la propriété $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(1) devient le système :

$$(S) \begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 6 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

En posant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$

(S) devient : $\begin{cases} X\sqrt{3} + Y = 6 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 6 - X\sqrt{3} & (E_1) \\ 4X^2 - 12\sqrt{3}X + 35 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Résolvons (E_2)

$\Delta' = (6\sqrt{3})^2 - 4 \times 35 = -32 < 0$

(E_2) n'a pas de solution donc (1) n'en a pas

$$S = \emptyset$$

(2) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$

Première méthode : Factorisation

$$\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}}$$

<u>2e Méthode</u> :

Ajoutons à (2) l'égalité $\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$

On obtient le système :

$\begin{cases} \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3} \\ \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \end{cases}$

Posons $X = \cos 2x$ et $Y = \sin 2x$

On a : $\begin{cases} X - Y\sqrt{3} = \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{X\sqrt{3}}{3} - 1 \quad (E'_1) \\ 4X^2 - (2\sqrt{3})X = 0 \quad (E'_2) \end{cases}$

$(E'_2) \Leftrightarrow 2X(2X - \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow X_1 = 0$ ou $X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour $X_1 = 0$ on a $Y_1 = -1$

$X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on a $Y_2 = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-\pi}{12} + k\pi$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}}$$

FIN du Cours

SUR

La trigonometrie

E-mail: koehyppo@yahoo.fr

ÉNONCÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1 (Corrigé à la page 158)

1°/ Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) + \sin(t+\pi) + \sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$

$B = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right) - \sin\left(\theta+\frac{7\pi}{2}\right)$

$C = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + \cotan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{7\pi}{2}+\varphi\right) + \cotan\left(\frac{5\pi}{2}-\varphi\right)$

$D = \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cotan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) - \cotan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) - \tan\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$

2/ Démontrer que pour tout nombre α on a :

a/ $\cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

b/ $\sin\alpha + \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

3°/ Soit x un réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

a/ Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

b°/ Exprimer en fonction de $\cos x$ les expressions :

$E = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$F = \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$.

EXERCICE 2 (Corrigé à la page 160)

A°/ 1°/ Montrer que les expressions suivantes représentent des constantes

$I = \sin\varphi\cos\varphi(\tan\varphi + \cotan\varphi)$

$J = \cos x\sqrt{1+\tan^2 x}$.

$K = \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cotan^2 x}$

$L = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 y - \sin^2 x}$ $\quad M = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x - \sin^2 y}$.

2°/ Etablir les identités suivantes :

a/ $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

b°/ $(\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + \sin\alpha\cos\alpha) = \sin^3\alpha - \cos^3\alpha$

c/ $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$

d°/ $\sin^6\varphi + \cos^6\varphi = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi$.

e°/ $\cos^2 a\sin^2 b - \cos^2 b\sin^2 a = \cos^2 a - \cos^2 b$.

f°/ $\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x\cos^2 y} = \tan^2 x - \tan^2 y$

B°/ 1°/ Simplifier les expressions suivantes :

$E_1 = \cos^3\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha + \sin^3\alpha$

$E_2 = \frac{1-\tan^2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}$

$E_3 = \sqrt{\frac{1}{2+2\sin t} + \frac{1}{2-2\sin t}}$

2/ On donne $\tan x = \frac{a}{b}$: Exprimer en fonction de a et b : $a>0$ $b>0$ $\sin x>0$ et $\cos x>0$

a/ $a\sin x + b\cos x$ b/ $a\cos x - b\sin x$

c/ $\frac{a^2}{\cos^2 x} - \frac{b^2}{\sin^2 x}$ d/ $\frac{a^2}{\cos^2 x} + \frac{b^2}{\sin^2 x}$

3/ Soient $x = a\sin\alpha\cos\beta$

$y = a\sin\alpha\sin\beta$ et $z = a\cos\alpha$.

Montrer que $x^2+y^2+z^2 = a^2$

EXERCICE 3 (Corrigé à la page 163)

Soit f une fonction comportant plusieurs fonctions circulaires.

- si f ne change pas lorsqu'on remplace x par $-x$ alors $f(x)$ peut s'écrire en fonction de $\cos x$ uniquement
- Si $f(\pi - x) = f(x)$ alors f peut s'écrire en fonction de $\sin x$ uniquement
- Si $f(\pi + x) = f(x)$ alors f peut s'écrire en fonction de $\tan x$ uniquement.

Soient les fonctions f, g, h et p définies respectivement par :

$f(x) = \frac{2\cos^3 x + \sin^3 x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$g(x) = 3\sin^5 x - 2\sin^3 x\cos^2 x + \sin x$

$h(x) = 2\sin^2 x - 3\cos x\sin^2 x + \cos x$

$p(x) = \frac{\tan x}{\sin^2 x\cos x}$

1/ Montrer f(x) peut s'écrire à l'aide de la seule fonction tan

2/ Montrer que g(x) peut s'écrire à l'aide de la seule fonction sin

3/ Montrer que h(x) peut s'écrire à l'aide de la seule fonction cos

4/ Ecrire f(x) en fonction de $\tan x$, g(x) en fonction de $\sin x$ et h(x) en fonction de $\cos x$.

5/ Calculer $p(-x)$, $p(\pi - x)$ et $p(\pi + x)$

Ecrire p(x) à l'aide de $\cos x$ seulement, de $\sin x$ seulement, de $\tan x$ seulement.

EXERCICE 4 (Corrigé à la page 166)

1/ Réduire :

$A = \cos 4x\cos 2x - \sin 4x\sin 2x$

$B = \sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x$

$C = \sin 5x\cos 7x - \sin 7x\cos 5x$

$D = \cos x\cos 4x + \sin x\sin 4x$

2/ Simplifier

$E = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ $F = \frac{2+\sin 2x - 2\cos 2x}{1 + 2\sin 2x - \cos 2x}$

3/ Si $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, établir les égalités suivantes :

a/ $\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$

b/ $\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$

c/ $\cotan\beta\cotan\gamma + \cotan\alpha\cotan\gamma + \cotan\alpha\cotan\beta = 1$

d/ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

e/ $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

4/ Exprimer en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$ les expressions :

$G = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ $H = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$I = \frac{\sin x + \cos x - 1}{3\sin x - 2\cos x + 2}$

$J = \frac{2\sin x + \cos x + 2}{5\sin x - 2\cos x - 5}$

5/ Calculer $\cos 4x$ et $\sin 4x$

a/ En fonction de $\sin x$ et $\cos x$

b/ En fonction de $\tan x$.

EXERCICE 5 (Corrigé à la page 169)

1/ Ecrire en fonction de $\cos 2x$

$A = \cos^2 x + 2\sin^2 x$

$B = \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x$

$C = 3\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$D = 2\cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^4 x$

$E = \tan^2 x - \cotan^2 x$

2/ Montrer que :

$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a\cos a - \sin b\cos b}$

3/ Démontrer que :

$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

4/ Calculer :

$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

On pourra calculer $A+B$ et $A-B$.

5/ Démontrer que :

$16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$

EXERCICE 6 (Corrigé à la page 172)

Soit l'expression $A = \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$ définie pour x différent de $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

1/ Montrer que $A = 4\cos 2x$.

2/ Soit l'équation $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = m$ où m désigne un paramètre réel.

a/ Pour quelles valeurs de m, cette équation admet-elle des solutions?

b/ Résoudre cette équation pour $m = 2$ et placer les solutions sur le

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

cercle trigonométrique.

c/ Montrer que pour $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $m = 2\sqrt{3}$. Résoudre alors l'équation $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Soit x_0 cette solution. Calculer $\sin x_0$ et montrer que $\tan x_0 = 2-\sqrt{3}$.

EXERCICE 7 (Corrigé à la page 173)

A/ Soit $S = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

1°/ Transformer en un produit $\cos p + \cos q$

2°/ Montrer que: $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -2\cos\frac{3\pi}{5}$

3°/ a/ Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$

b/ Montrer que $\cos\frac{3\pi}{5} = 1 - 2\cos^2\frac{\pi}{5}$

c/ En déduire S en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$.

4°/ Déterminer la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$ pour $S=-1$ puis déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

B/ On pose $K = \tan\frac{\pi}{20} - \tan\frac{3\pi}{20} + \tan\frac{5\pi}{20} - \tan\frac{7\pi}{20}$

1°/ a/ Démontrer en précisant l'ensemble de validité les formules:

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \quad \text{et}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}.$$

En déduire que:

$$\tan p + \tan q = \frac{2\sin(p+q)}{\cos(p+q)+\cos(p-q)}$$

b/ Calculer $K_1 = \tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{3\pi}{20}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $K_2 = \tan\frac{3\pi}{20} + \tan\frac{7\pi}{20}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$

2°/ En utilisant les résultats de la partie A déterminer la valeur exacte de K.

3°/ Sachant que le côté et l'apothème d'un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon R est $2R\sin\frac{\pi}{n}$ et $R\cos\frac{\pi}{n}$, déduire à partir de A, l'aire d'un pentagone régulier en fonction de R.

EXERCICE 8 (Corrigé à la page 176)

On donne les réels $A = (2\sqrt{2}-1)^2 + 8\sqrt{2}$ et $B = (2\sqrt{2}+1)^2$

1°/ Comparer A et B

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$2x^4 + (2\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2} = 0$$

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\sin^4 2x + (2\sqrt{2}-1)\sin^2 2x - \sqrt{2} = 0$$

et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

4°/ Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation: $2\cos^4 2x + (2\sqrt{2}-1)\cos^2 2x - \sqrt{2} > 0$

EXERCICE 9 (Corrigé à la page 178)

1/ Quelle est la valeur de $\cos \frac{11\pi}{6}$.

2/ a/ Montrer que $\cos^2 \frac{11\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

b/ En déduire les valeurs exactes du cos et du sin de : $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

c/ Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x - \sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x = -\sqrt{2}$

3/ Soit $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

a/ Calculer $\cos 2\alpha$ puis en déduire la valeur de α.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 3x + \sin x = \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin 2x$.

(On pourra transformer $\sin 3x + \sin x$ en produit). Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 10 (Corrigé à la page 180)

1/ Soit a un réel appartenant à $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (a exprimé en rad)

a/ Calculer $\cos 2a$

b/ Montrer que $\cos 4a = \sin a$

c/ En déduire la valeur exacte de a.

2/ Resoudre l'équation :

$x \in [0 ; 2\pi[$, $4\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

EXERCICE 11 (Corrigé à la page 181)

1/ Soit ABC un triangle non rectangle. Démontrer que :

a/ $\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C} = 4\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$

b/ $\tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} = \tan\hat{A} \cdot \tan\hat{B} \cdot \tan\hat{C}$

2/ Démontrer :

a/ $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4x+\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

b/ Résoudre alors l'équation :

$x \in \mathbb{R}$, $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

puis donner les solutions sur $]-\pi ; \pi[$

3/ a/ En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\tan\frac{\pi}{12}$.

b/ Résoudre sur $]-\pi, \pi[$ les equations et inéquations suivantes :

i/ $\tan x = 2-\sqrt{3}$ ii/ $\tan x = 2+\sqrt{3}$

iii/ $2-\sqrt{3} \leq \tan x \leq 2+\sqrt{3}$.

4/ Resoudre sur $]-\pi, \pi[$ les equations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{2} = 0$

(E_2) $(\sqrt{2}+1)\cos^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2}-1)\sin^2 x = \sqrt{2}$

Par: Mr KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé

EXERCICE 12 (Corrigé à la page 184)

A/ 1/ Résoudre l'équation
$x \in [0; 2\pi[$, $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2/ a/ Montrer que pour tout x réel
$\sin 2x = 1 - (\cos x - \sin x)^2$

b/ Résoudre l'équation :
$x \in [0; 2\pi[$, $\sqrt{2} \sin 2x + \cos x - \sin x = \sqrt{2}$
Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

B/ 1/ Résoudre l'équation
$x \in]-\pi; \pi[$, $1 - 2\cos x = 0$

2/ Résoudre l'équation :
$x \in]-\pi; \pi[$, $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

3/ En déduire la résolution de l'inéquation : $x \in]-\pi; \pi[$, $\frac{1 - 2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$

EXERCICE 13 (Corrigé à la page 186)

1/ a/ Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

b/ Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$

c/ En déduire $\tan 3x$ en fonction de $\tan x$

2/ Déterminer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$

3/ Déduire de 2/ l'expression de $\tan 2x$ puis celle de $\tan 3x$ en fonction de $\tan x$.

4/ Démontrer que :

a/ $1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8}$

b/ $\frac{3 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}{1 - 3\tan^2 \frac{\pi}{12}} = \cotan \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 14 (Corrigé à la page 187)

Soit a un réel appartenant à $[0; 2\pi[$. On désigne par (E) l'équation :
$x \in \mathbb{R}$, $x^2 \cos a - 2x - 1 + 2\cos a = 0$

1/ Pour quelles valeurs de a, (E) est-elle du premier degré ?
Dans la suite de l'exercice, on considère les valeurs de a pour lesquelles (E) est du second degré.

2/ Déterminer suivant les valeurs de a, le nombre et le signe des solutions de (E).

3/ Pour quelles valeurs de a l'équation (E) a-t-elle :

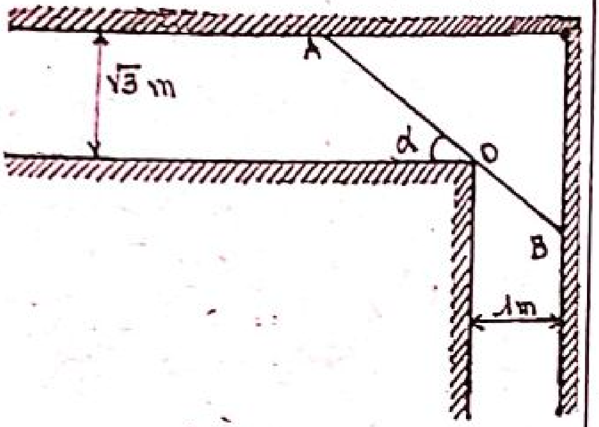
a/ Deux solutions de même signe ?

b/ Deux solutions de signes contraires ?

EXERCICE 15 (Corrigé à la page 189)

Un couloir, de largeur $\sqrt{3}$ mètres, tourne à angle droit et sa largeur n'est plus alors que de 1 mètre.

E-mail: kochyppo@yahoo.fr



Sur la figure, une droite passe par O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et en B.

1/ Exprimer en fonction de α les longueurs OA, OB et AB.

2/ On pose $AB = f(\alpha)$.

Démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{4\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})}{\sin 2\alpha}$

3/ a/ Déterminer α pour que : $AB = 4$

b/ Déterminer α pour que $OA = OB$

EXERCICE 16 (Corrigé à la page 190)

1/ a/ Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

c/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

2/ Déduire de la question 1/ la résolution de l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Représenter sur le cercle trigonométrique, les points images des solutions de (E).

3/ Déduire de la question 1/ la résolution de l'inéquation I :

$$x \in [0; 2\pi[,\ 2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de (I).

EXERCICE 17 (Corrigé à la page 192)

A/ Soit ABC un triangle rectangle en A. Démontrer que :

1/ a/ $\sin\hat{B} + \sin\hat{C} = -1 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$

b/ $\cos\hat{B} + \cos\hat{C} = 1 + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\sin\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$

2/ Démontrer que, quels que soient α et β appartenant à $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ on a :

a/ $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha + \tan\beta)$

b/ $\sin(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha - \tan\beta)$.

B/ Soit le système de deux équations

$$(\mathrm{I}) : \begin{cases} \tan^2 x + \tan^2 y = 6 \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} + \dfrac{\tan y}{\tan x} = -6 \end{cases}$$

1°/ On pose $\tan x = a$ et $\tan y = b$.

On considère le système : $(II)\begin{cases} a^2+b^2=6 \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-6 \end{cases}$

Montrer que le système (II) est équivalent au système (III) : $\begin{cases} (a+b)^2=4 \\ (a-b)^2=8. \end{cases}$

2°/ Montrer que le système (III) admet quatre couples de solutions $(\alpha;\beta)$, $(\beta;\alpha)$, $(-\alpha;-\beta)$ et $(-\beta;-\alpha)$ avec $\beta<\alpha$.

3°/ Soit x_1 l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x_1 = \alpha$.

Calculer $\tan(2x_1)$; en déduire x_1.

4/ Soit x_2 l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x_2 = \beta$.

Calculer $\tan(2x_2)$; en déduire x_2.

5°/ Déterminer les couples $(x;y)$ avec x et y éléments de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ solutions de (I).

EXERCICE 18 (Corrigé à la page 194)

1°/ a/ x et y étant des nombres réels quelconques factoriser :

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

b°/ Résoudre le système :

$(x;y)\in[0;2\pi[\times[0;2\pi[$

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{4} \\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x+1=0$ et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3°/ Soit x un nombre réel. Démontrer que :

a/ $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$

b/ $\sin^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$

4/ En déduire les valeurs exactes de :

a/ $A=\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

b/ $B=\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

5°/ Montrer que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{3}{16}$$

EXERCICE 19 (Corrigé à la page 197)

A/ Transformer en somme $2\sin x\cos(2px)$

Utiliser le résultat pour simplifier l'expression :

$$A(x)=\sin x+2\sin x\cos(2x)+2\sin x\cos(4x)+2\sin x\cos(6x)$$

B/ En déduire l'expression :

$B(x)=1+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx$, n étant un entier naturel non nul.

Par: Mr KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé

EXERCICE 20 (Corrigé à la page 197)

α est la mesure en radians d'un angle orienté tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction f_α de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_\alpha(x) = x^2 - 2(\cos\alpha)x + 1 - \sin\alpha.$$

1-/ Pour quelles valeurs de α, les courbes d'équation $y = f_\alpha(x)$ sont-elles tangentes à l'axe des abscisses ?

Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé les courbes correspondantes.

Préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

2-/ Montrer que, à part le cas vu précédemment, la courbe d'équation $y = f_\alpha(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points P' et P'' d'abscisses positives.

3-/ Pour quelles valeurs de α, les abscisses x' et x'' de P' et P'' vérifient-elles la relation $x'^2 + x''^2 = 2$

4-/ Quelle est la relation indépendante de α qui lie les abscisses x' et x'' de P' et P''.

5-/ En supposant $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, quelles sont les coordonnées des points d'intersection des courbes d'équations $y = f_{\alpha_1}(x)$ et $y = f_{\alpha_2}(x)$ si $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

(α_1 et α_2 étant compris en 0 et $\frac{\pi}{2}$)

EXERCICE 21 (Corrigé à la page 200)

Soit le polynôme de la variable réelle x défini par :

$$P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3.$$

1-/ a/ Calculer. $P(1)$

Factoriser $P(x)$ puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b/ Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2-/ a/ Etudier la parité et la périodicité de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 4\cos^3 2x - 8\cos^2 2x + \cos 2x + 3$$

b-/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\cos^3 2x - 8\cos^2 2x + \cos 2x + 3 = 0$, et l'inequation : $4\cos^3 2x - 8\cos^2 2x + \cos 2x + 3 \leq 0$

Placer les points images des solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique.

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

EXERCICE 22 (Corrigé à la page 202)

1/ En utilisant une autre écriture de $\sin(4x+x)$ démontrer l'égalité :

$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

2/ Démontrer que $\frac{\pi}{5}$ est solution de de l'équation :

$$16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0$$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0$

(Utiliser la question 1/)

4/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

5/ En remarquant que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 23 (Corrigé à la page 203)

1/ Soit M_1, M_2, M_3 les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O et muni de la base orthonormée de sens positif $(\vec{OA}, \vec{OB})$.

Soit α une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OM_1})$

a/ Montrer que $\vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3} = \vec{0}$

b/ En déduire que :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

et $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

2/ Sachant que :

$\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{a+c}$

et $\cos z = \frac{c}{a+b}$.

a/ Calculer $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)$ et $\tan^2\left(\frac{z}{2}\right)$ en fonction de a, b, c.

b/ Que peut-on dire de la somme $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{z}{2}\right)$.

EXERCICE 24 (Corrigé à la page 205)

On considère le système d'équations

$$(S)\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

1/ Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$(S')\begin{cases} \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2/ Résoudre alors (S).

EXERCICE 25 (Corrigé à la page 205)

A/ Pour tout réel α tel que $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}$ on considère l'équation d'inconnue réelle x, (E) :

$$2x^2 - 4x\cos\alpha + \cos 2\alpha - \cos\alpha = 0$$

1./ Résoudre dans l'inéquation

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$$

2./ Exprimer en fonction de $\cos\alpha$, le discriminant et le produit des racines de l'équation (E). On exprimera également la somme des racines

3./ Etudier l'existence et le signe des racines de l'équation (E) suivant les valeurs de α.

B./ On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

1./ Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2./ Démontrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = \tan^2\frac{x}{2}$

3./ Sachant que $\tan\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3}$, déterminer la valeur de x.

EXERCICE 26 (Corrigé à la page 207)

On considère le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

1./ Démontrer que:

a/ $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$

b/ Le système (S) est équivalent au système :

$$(S') : \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$$

2./ Résoudre (S).

EXERCICE 27 (Corrigé à la page 208)

On considère l'équation (E) :

$x \in]-\pi ; \pi[$, $\sin^2(x+\frac{\pi}{3}) = m$ où m est un réel donné.

1./ Pour quelles valeur de m le réel $\frac{\pi}{4}$ est-il solution de (E) ?

2./ A quel ensemble doit appartenir le réel m, afin que l'équation (E) possède au moins une solution ?

3./ Déterminer l'ensemble des solutions de (E) et placer les points images de ces solutions sur le cercle trigonométrique pour $m = \frac{1}{4}$.

4./ Résoudre l'inéquation :

$x \in]-\pi ; \pi[$, $\sin^2(x+\frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{4}$.

A FORCE DE CHERCHER SANS TROUVER, ON FINIT PAR TROUVER SANS CHERCHER

EXERCICE 28 (Corrigé à la page 209)

A/ Soient a, b et c trois réels tels que $a+b+c=\pi$. Etablir les égalités suivantes :

1/ $\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c = 4\sin a\sin b\sin c$

2/ $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c = -1-4\cos a\cos b\cos c$

3/ $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c = 1-2\cos a\cos b\cos c$

4/ $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c = 2+2\cos a\cos b\cos c$.

5/ $\dfrac{\cos a}{\sin b\sin c}+\dfrac{\cos b}{\sin a\sin c}+\dfrac{\cos c}{\sin a\sin b} = 2$

B/ α et β étant deux réels de $[0;\frac{\pi}{2}]$ tels que: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1/ Déterminer $\cos\alpha$ et $\cos\beta$. Montrer que $\cos\beta$ peut s'écrire sous la forme $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2/ Calculer $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$. En déduire la valeur de β

EXERCICE 29 (Corrigé à la page 210)

A/ 1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$2\cos^2 x+5\sin x+1=0$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$2\sin^2 x+5\cos x+1=0$ puis résoudre dans $[0;2\pi[$, l'inéquation :

$2\sin^2 x+5\cos x+1 \leq 0$.

B/ 1/ Soit le polynôme P défini par:

$P(x) = x^3+x-2$.

a/ Calculer $P(1)$

b/ Résoudre l'équation $P(x)=0$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

2/ On considère l'équation

(E): $x\in[0;2\pi[$, $\tan x = 2\cos^2 x$.

a/ Montrer que (E) est équivalente à : $\tan^3 x+\tan x-2=0$.

b/ Résoudre (E).

EXERCICE 30 (Corrigé à la page 214)

A/ 1/ Résoudre l'inéquation

$x\in[0;2\pi[$, $\sin 2x+\cos x \leq 0$

2/ a/ Transformer l'expression

$\cos^2 3x-2\sqrt{3}\cos 3x\sin 3x-\sin^2 3x$

en $a\cos 6x+b\sin 6x$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$\cos^2 3x-2\sqrt{3}\cos 3x\sin 3x-\sin^2 3x=2$

Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique

B/ 1/ Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, x étant une variable réelle.

2/ En déduire la valeur exacte de l'expression $A = 4\cos^3\frac{\pi}{12}-3\cos\frac{\pi}{12}$.

3/ On considère l'équation trigono-

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

métrique suivante :

$x \in]-\pi;\pi[$, $-4\cos^3 x + 3\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E)

a/ Résoudre (E)

b/ En déduire les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $-4x^3 + 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Justifier que les trois solutions distinctes de cette équation appartiennent toutes à l'intervalle $]-2;1]$.

EXERCICE 31 (Corrigé à la page 216)

PARTIE A

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$$

2/ En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2\cos^3 2x + 7\cos^2 2x - 5\cos 2x - 4 = 0$$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3/ Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'inéquation

$$2\cos^3 2x + 7\cos^2 2x - 5\cos 2x - 4 \leq 0$$

PARTIE B

1/ Mettre $4 + 2\sqrt{3}$ sous la forme d'un carré, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4x^2 + 2(\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$$

2/ Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation

$$4(\cos^2 x - 1) - 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 0$$

Représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 32 (Corrigé à la page 219)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2\cos x + 1}$

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2/ Montrer que le réel π est un période de la fonction f.

3/ Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

4/ Résoudre l'inéquation : $x \in [0;\pi]$, $f(x) > 0$.

EXERCICE 33 (Corrigé à la page 220)

On considère la fonction f à variable réelle définie par :

$f(x) = 2\sin x + \sin 2x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

2/ Montrer que :

$$\cos 2x + \cos x = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

3/ Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π.

4/ Calculer $f'(x)$ et démontrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

5/ Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

6/ Construire (C) sur $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$

EXERCICE 34 (Corrigé à la page 222)

1/ Factoriser : $2xy + 2y - x - 1$

2/ a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $2\cos x \sin x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$

b/ Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de l'équation précédente.

3/ Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'inéquation : $2\cos x \sin x + 2\cos x - \sin x - 1 < 0$

EXERCICE 35 (Corrigé à la page 223)

Soit la fonction φ de $]-\pi;\pi[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \tan x + \frac{1}{\tan x} - \tan(3x) - \frac{1}{\tan(3x)}$$

1/ Déterminer l'ensemble $D\varphi$ de définition de φ.

2/ Démontrer que : $\forall x \in D\varphi$ on a :

$$\varphi(x) = \frac{4\cos 4x}{\sin 6x}.$$

3/ Résoudre l'équation (E) : $x \in]-\pi;\pi]$, $|\varphi(x)| = 4$

Représenter sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de (E).

EXERCICE 36 (Corrigé à la page 225)

Soit x un nombre réel. On donne :

$f(x) = \sin x + \sin 3x - \sqrt{3}\sin 2x$

$g(x) = \cos x + \cos 3x - \sqrt{3}\cos 2x$.

1/ Mettre $\sin x + \sin 3x$ et $\cos x + \cos 3x$ sous forme de produit.

2/ Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

3/ Résoudre l'équation, $f(x) + g(x) = 0$

4/ Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE 37 (Corrigé à la page 228)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos 2x - \cos x + 1$

1/ Montrer que f est paire et périodique de période 2π. En déduire un intervalle d'étude sur lequel il suffira d'étudier f.

2/ a/ Montrer que f est dérivable et calculer la dérivée $f'(x)$

b/ Résoudre dans $[0;\pi]$, l'équation $f'(x) = 0$ puis l'inéquation $f'(x) > 0$

c/ Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;\pi]$. Préciser le minimum de f sur $[0;\pi]$.

d/ Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$

3/ Construction soignée de la courbe (C) représentative de f.

a/ Résoudre l'équation $x \in [0;\pi]$, $f(x)=0$

b/ Préciser les points d'intersection de la courbe (C) restreinte à $[-\pi;\pi]$ avec l'axe des abscisses.

c/ Construire soigneusement la courbe (C) restreinte à $[-\pi;\pi]$.

Compléter pour obtenir la courbe (C) sur l'intervalle $[-3\pi;3\pi]$.

4/ a/ Déterminer l'équation des tangentes en chacun des points communs à (C) restreinte à $[-\pi;\pi]$ avec l'axe des abscisses

b/ Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

c/ Quels sont les nombres x de $[-\pi;\pi]$ tels que : $1 < f(x) < 3$.

DE L'EFFORT, ENCORE DE L'EFFORT TOUJOURS DE L'EFFORT, CAR AU BOUT DE L'EFFORT SOUTENU SE TROUVE LA REUSSITE

EXERCICE 38 (Corrigé à la page 230)

Soit la fonction

$$f : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2\cos x(1-\cos x)}$$

1/ Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2/ Calculer les images par f des réels suivants : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; π.

3/ Montrer que f est paire. En déduire un intervalle d'étude de f. On l'appelera I

4/ Etudier les variations de f sur I.

5/ Construire avec soins la courbe (C) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

6/ Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire le domaine de définition de g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

EXERCICE 39 (Corrigé à la page 232)

PARTIE A

Soit $a \in]0;\frac{\pi}{2}[$ tel que : $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

1/ Calculer $\cos 2a$ puis en déduire la valeur de a :

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$\sin 3x + \sin x = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sin 2x.$$

E-mail: kochyppo@yahoo.fr

et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

PARTIE B

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \cos 3x - \cos 2x$$

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

2/ Exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos x$. En posant $\cos x = t$ on obtient une fonction $g(t)$. Résoudre l'équation $g(t)=0$ puis déduire les valeurs exactes de: $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 40 (Corrigé à la page 234)

Soit x et y deux réels différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ tels que $x+y \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

1/ Démontrer que $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

En déduire $\tan(x-y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$.

2/ On suppose x et y positifs tels que $x+y = \frac{\pi}{4}$. et $\tan x . \tan y = 3-2\sqrt{2}$

a/ Calculer $\tan(x+y)$ et $\tan x + \tan y$.

b/ Calculer $\tan x$ et $\tan y$. En déduire les valeurs de x et y.

c/ Etablir que: $\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = 1$

d/ Démontrer que le réel $\tan\frac{\pi}{8}$ est solution de l'équation:

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 41 (Corrigé à la page 236)

Soit la fonction f à variable réelle définie par:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x.$$

1/ Justifier que l'intervalle d'étude de f peut être réduit à $[0;\pi]$.

2/ a/ Montrer que:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{3}\sin^3 x$

b/ Montrer que:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\sin x \sin 2x$.

c/ Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

3/ Construire soigneusement la courbe (C) représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.

4/ Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel k, le nombre de solutions de l'équation:

(E) : $x \in [-2\pi; 2\pi]$, $4\sin^3 x - 3k = 0$.