Tronc commun scientifique

MATHÉMATIQUES

Support de coours

Calcul vectoriel dans le plan

Réalisé par : Pr. Yassine Aouami

Sommaire

• Calcul vectoriel dans le plan

CHAPITRE 1

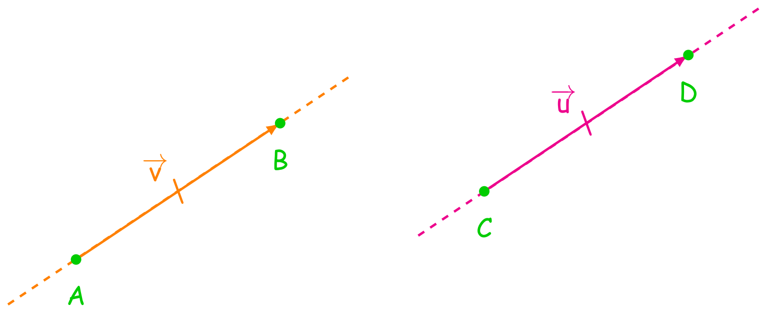
CALCUL VECTORIEL DANS LE PLAN

A. Premiers concepts

1. Égalité de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{v}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs du plan.
On dit que deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont **égaux**, s'ils ont le même sens, la même direction et la même norme.



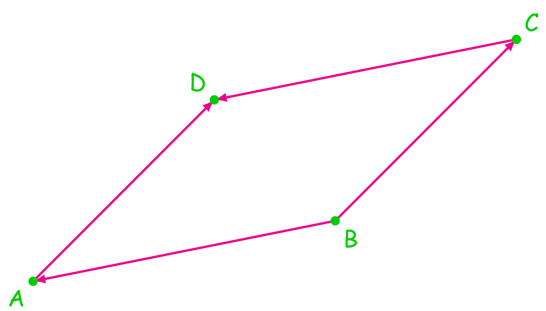
Remarques

- Les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont **égaux** signifie que :
  - Les deux droites (AB) et (CD) qui portent les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont parallèles : $(AB) /\!/ (CD)$.
  - Ils ont le même sens : le sens de A vers B est le même que celui de C vers D.
  - Ses normes sont égales : $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$, c'est à dire $AB = CD$.

Exemple

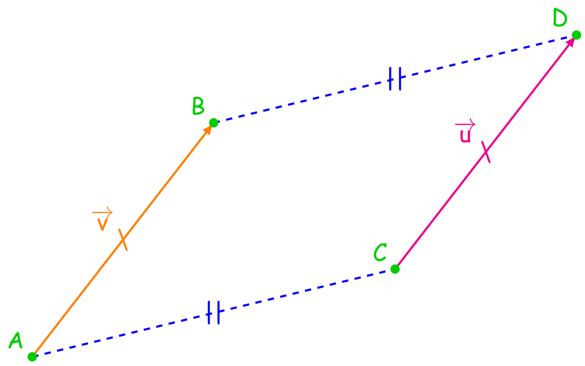
Sur le parallélogramme ABCD ci-contre, on peut voire que :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ **sont égaux** : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}$ **sont égaux** : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ **ne sont pas égaux,** car ils n'ont pas la même direction et la même norme.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **ne sont pas égaux,** car ils sont de sens contraire.



Propriété

Soit ABCD un quadrilatère.
Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** équivaut à dire que ABDC est un parallélogramme.



Remarques

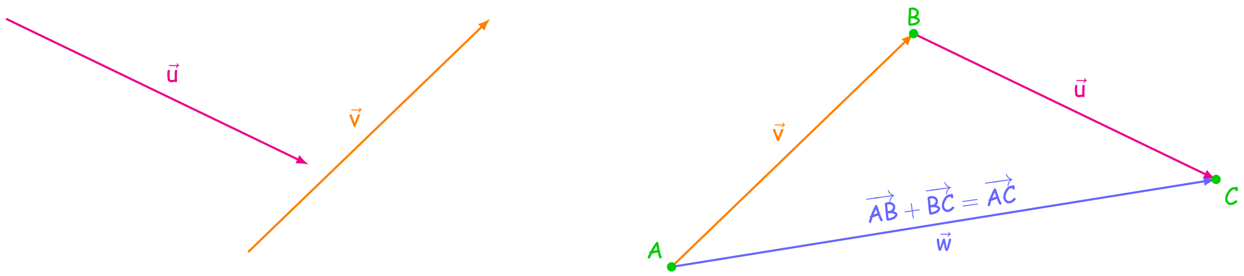
- ◇ ABCD est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2. Somme de deux vecteurs

Définition

Soit $\vec{v}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs. On construit les points A, B et C tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

La **somme** de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ est **le vecteur** $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, et on écrit : $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$.



Remarques

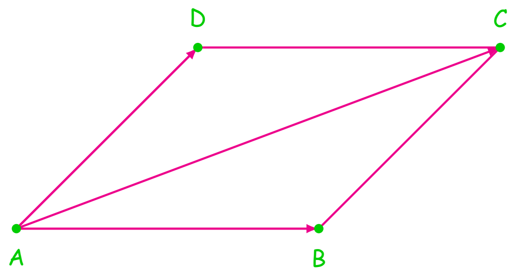
- ◇ L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée **la relation de Chasles**.

Exemple

On considère, ci-contre, le parallélogramme ABCD.

1. Montrons que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$:
On a ABCD est parallélogramme
C'est dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
À l'aide de la relation de Chasles, on obtient :

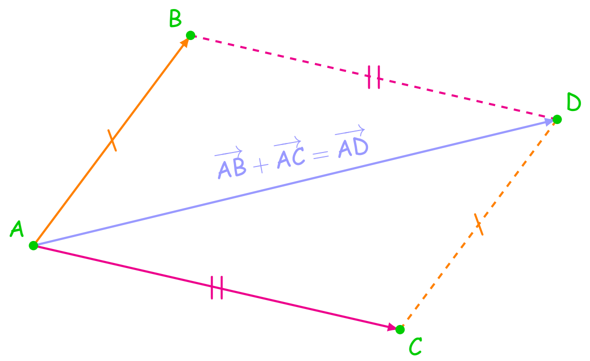
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



Propriété

Soit A, B et C trois points non-alignés du plan.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ est parallélogramme.



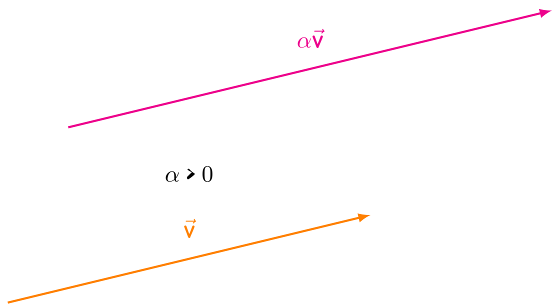
3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition

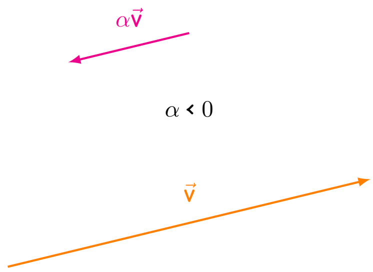
Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan et α un réel.

Le produit de $\vec{v}$ par α est le vecteur, noté $\alpha\vec{v}$, tel que :

1. Si $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.
2. Si $\alpha \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\alpha\vec{u}$ ont la même direction, et on a :
   a. Si $\alpha > 0$ alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\alpha\vec{v}$ ont même sens, et $\|\alpha\vec{v}\| = \alpha \times \|\vec{v}\|$.
   b. Si $\alpha < 0$ alors les vecteurs $\vec{v}$ et $\alpha\vec{v}$ ont des sens opposés, et $\|\alpha\vec{v}\| = -\alpha \times \|\vec{v}\|$.



- les vecteurs $\vec{v}$ et $\alpha\vec{v}$ ont le même sens.



- les vecteurs $\vec{v}$ et $\alpha\vec{v}$ n'ont pas le même sens.

Remarques

- Si $\alpha = -1$, alors le vecteur $-\vec{v}$ est appelé le **vecteur opposé** du vecteur $\vec{v}$.
- Si $\alpha = 1$, alors la norme du vecteur résultant sera la même.
- Si $\alpha > 1$ ou $\alpha < -1$, alors la norme du vecteur résultant sera plus grande.
- Si $-1 < \alpha < 1$, alors la norme du vecteur résultant sera plus petite.

Propriété

Soit $\vec{v}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs du plan et α et β deux réels.

1. $\alpha(\vec{u}+\vec{u}) = \alpha\vec{v}+\alpha\vec{u}$.

2. $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$.

3. $\alpha(\beta\vec{v}) = \beta(\alpha\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$.

Exemple

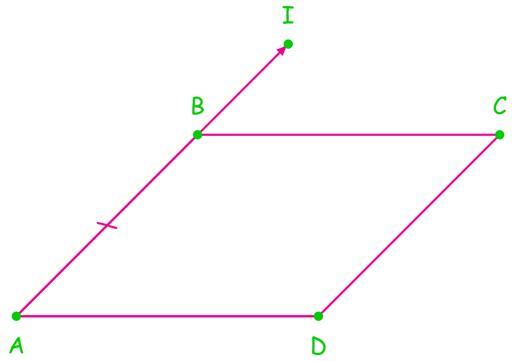
Soit ABCD un parallélogramme, I et J deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$$

1. Construirons les deux points I et J :

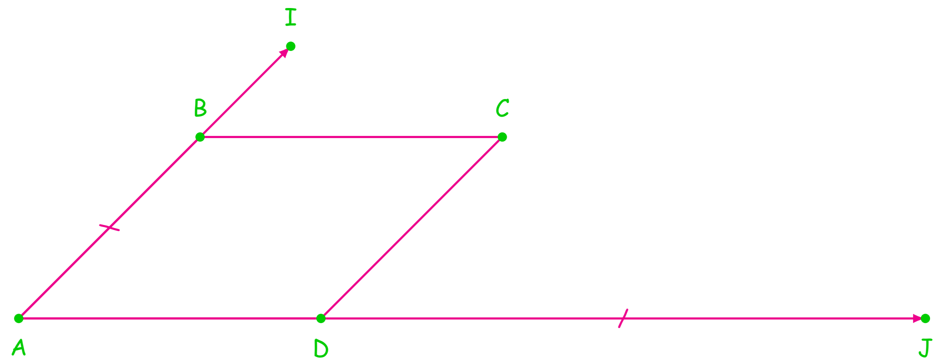
a. On a $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, alors :

- $\overrightarrow{AI}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ont la même direction : Le point I appartient à la droite (AB).
- $\overrightarrow{AI}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ont le même sens : de A vers B.
- $AI = \frac{3}{2}AB$.



b. On a $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$, c'est dire que $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$:

- $\overrightarrow{AJ}$ et $2\overrightarrow{AD}$ ont la même direction : Le point J appartient à la droite (AD).
- $\overrightarrow{AJ}$ et $2\overrightarrow{AD}$ ont le même sens : de A vers D.
- $AJ = 3AD$.



2. Montrons que : $\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.
On a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DJ}$
Donc $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{CJ}$.

3. Dans le repère $(A; D)$, déterminons l'abscisse du point J.
C'est à dire, cherchons un réel x tel que $\overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AD}$, où $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur unitaire.
D'après ce qui précède, on a : $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$
Donc le point J a pour abscisse 3.

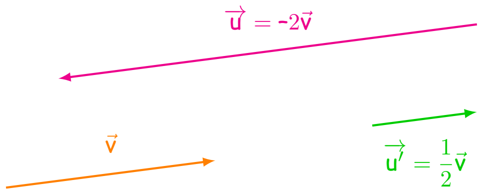
B. Vecteurs colinéaires dans le plan

1. Deux vecteurs colinéaires

Définition

Soit $\vec{v}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs du plan .
On dit que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel α tel que :

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \alpha\vec{v}$$



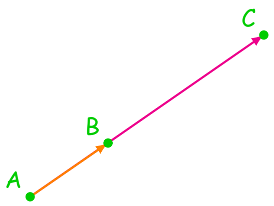
Remarques

◇ Si $\vec{v} = \vec{0}$, on a $\vec{0} = \alpha\vec{u}$, alors le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

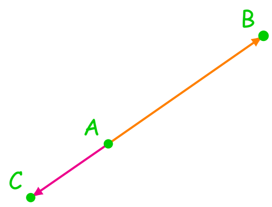
2. Trois points alignés

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan tous distincts.
Dire que les points A, B et C sont **alignés** équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ou encore $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$, où α est un réel.



- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

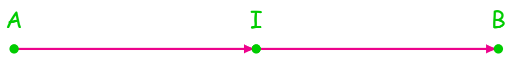


- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$.

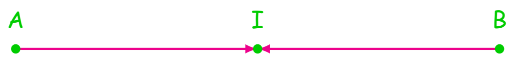
3. Milieu d'un segment

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan .
Dire que le point I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
ou encore $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

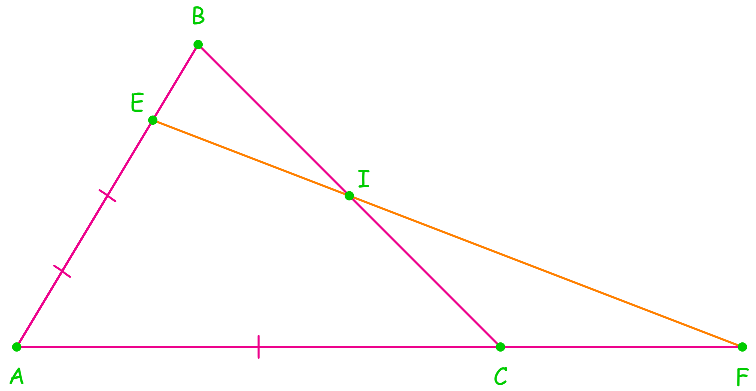


$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Exemple

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$, E et F deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$



1. Montrons que $4\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}$:

On a $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Équivaut à $4\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$

Équivaut à $4\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IB}$ (Relation de Chasles)

Équivaut à $4\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IB}$

Équivaut à $4\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}$.

2. Montrons que $2\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}$:

On a $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Équivaut à $2\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

Équivaut à $2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IF} = 3\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IC}$ (Relation de Chasles)

Équivaut à $2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{IC}$

Équivaut à $2\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}$.

3. Montrons que les points E, F et I sont alignés :

D'après les résultats précédents : $4\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}$ et $2\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités , on obtient : $4\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{IF} = 3\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}$

Équivaut à $4\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{IF} = 3\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)$

Comme I est le milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

Donc $4\overrightarrow{IE} + 2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0}$

c.à.d $2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IF}$.

Il en déduit que les points E, F et I sont alignés.

C. Exercices