

Tronc commun scientifique

MATHÉMATIQUES

Support
de
cours

Notions d'arithmétique dans l'ensemble $\mathbb{N}$

Réalisé par : Pr. Yassine Aouami

Sommaire

• Notions d'arithmétique dans l'ensemble $\mathbb{N}$

A. Premiers concepts	3
1. Rappel et notations	3
2. Multiples et diviseurs d'un entier naturel	3
3. Nombres pairs - Nombres impairs	4
B. Les nombres premiers	4
1. Nombre premier	4
2. Décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel	5
C. PGCD et PPCM	6
1. Plus grand diviseur commun à deux nombres	6
2. Plus petit multiple commun à deux nombres	7
3. Relation entre PGCD et PPCM	8
D. Exercices	8

NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE DANS L'ENSEMBLE $\mathbb{N}$

A. Premiers concepts

1. Rappel et notations

1. Les nombres entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ forment un ensemble infini, on le note $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

2. On note $\mathbb{N}^*$, ou encore $\mathbb{N}-\{0\}$, l'ensemble des entiers naturels non nuls, et on écrit :

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

et on a « $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ », se lit « $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$ ».

3. Soit a un nombre quelconque.

(a) La notation « $a \in \mathbb{N}$ » signifie que le nombre « a est un élément de $\mathbb{N}$ », ou encore « a appartient à $\mathbb{N}$ ».

(b) La notation « $a \notin \mathbb{N}$ » signifie que «le nombre a n'est pas un élément de $\mathbb{N}$ », ou encore « a n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ».

Exemple

1. On a « $7 \in \mathbb{N}$ » et « $404 \in \mathbb{N}$ », car les deux nombres 7 et 404 sont des entiers naturels.
2. On a « $2,6 \notin \mathbb{N}$ » et « $-5 \notin \mathbb{N}$ », car les deux nombres 2,6 et -5 ne sont pas des entiers naturels.

2. Multiples et diviseurs d'un entier naturel

Définition

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On dit que b **divise** a , noté b/a , s'il existe un entier naturel k tel que : $a = b \times k$

On dit aussi que b est un **diviseur** de a , ou encore que a est **multiple** de b .

Exemple

1. On a 8 est un multiple de 4, car $8 = 4 \times 2$ ($k = 2$).
2. On a 17 est un diviseur de 51, car $51 = 17 \times 3$ ($k = 3$).

Remarques

- ◇ « b divise a » signifie que « $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ ».
- ◇ L'élément 0 est multiple de tout entier naturel, et ne peut pas être diviseur d'aucun entier.
- ◇ L'élément 1 divise tout entier naturel.
- ◇ Tout entier naturel a non nul est toujours divisible par 1 et lui-même.
- ◇ On désigne par $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a , et par $M(a)$ l'ensemble des multiples de a .

3. Nombres pairs - Nombres impairs

Définition

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. On dit que a est un **nombre pair** s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Autrement dit, si 2 divise a .
2. On dit que a est un **nombre impair** s'il existe un entier naturel k tel que $a = 2k + 1$.
Autrement dit, si 2 ne divise pas a .

Exemple

1. On a 10 est un nombre pair, car $10 = 2 \times 5$.
2. On a 101 est un nombre impair, car $101 = 2 \times 50 + 1$.

Remarques

- ◇ Tout entier naturel est soit pair soit impair.

B. Les nombres premiers

1. Nombre premier

Définition

On dit qu'un entier naturel a est un nombre **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Autrement dit $D(a) = \{1; a\}$

Exemple

1. 19 est un nombre premier, car $D(19) = \{1; 19\}$.
2. 45 n'est pas un nombre premier, car $D(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

TABLE 1.1 - Liste des nombres premiers inférieure à 100

Remarques

- ◇ 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- ◇ Tout nombre **pair** différent de 2 n'est pas un nombre premier.
- ◇ Tout nombre premier strictement supérieur à 2 est un nombre **impair**.
- ◇ Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Méthode

Pratiquement, pour montrer qu'un entier naturel a est premier, il suffit de vérifier qu'il n'admet aucun diviseur parmi les nombres premiers successifs $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ jusqu'à $\sqrt{n}$.

Exemple

- 119 est-il un nombre premier ?
D'abord, on a $\sqrt{109} \simeq 10.4$. En utilisant la division euclidienne, on vérifie que 109 n'est pas divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5 et 7, donc 109 est premier.
- 283 est-il un nombre premier ?
D'abord On a $\sqrt{283} \simeq 16.8$. En utilisant la division euclidienne, on vérifie que 283 n'est pas divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 et 13, donc 283 est premier.
- 381 est-il un nombre premier ?
On a 381 est divisible par 3 ($281 = 3 \times 127$), donc 381 n'est pas premier.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel**Théorème**

Tout entier naturel a strictement supérieur à 1, s'écrit d'une façon unique sous la forme d'un produit des nombres premier.

On dit qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemple

Décomposons 168 et 825 en produit de facteurs premiers.

On va diviser successivement le nombre à décomposer par les nombres premiers pris dans l'ordre croissant $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

1. La décomposition du nombre 168 :

On remarque que 168 est divisible par 2, alors $168 = 2 \times 84$

Comme 84 n'est premier et divisible par 2, donc $168 = 2 \times 2 \times 42 = 2^2 \times 42$

Et 42 est divisible par 2, d'où $168 = 2^2 \times 2 \times 21 = 2^3 \times 21$

21 n'est un nombre premier, car $21 = 3 \times 7$, alors $168 = 2^3 \times 3 \times 7$

La décomposition de 168 en produit de facteurs premiers est : $168 = 2^3 \times 3 \times 7$

2. La décomposition du nombre 825 :

On a $825 = 3 \times 275 = 3 \times 5 \times 55 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$.

donc $825 = 3 \times 5^2 \times 11$.

825	3
275	5
55	5
11	11

C. PGCD et PPCM

1. Plus grand diviseur commun à deux nombres

Définition

Soit a et b deux entiers naturels.

Le plus grand diviseur commun à a et b est le **plus grand entier naturel** qui divise a et qui divise b , on le note $a \wedge b$ ou encore $\text{PGCD}(a; b)$.

Exemple

- On a $D(27) = \{1; 3; 9; 27\}$ et $D(81) = \{1; 3; 9; 27; 81\}$
Alors les diviseurs communs à 27 et 81 sont : 1, 3, 9, 27.
D'où $\text{PGCD}(27; 81) = 27$, ou encore $27 \wedge 81 = 27$.
- On a $D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $D(105) = \{1; 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105\}$
Alors les diviseurs communs à 18 et 105 sont : 1, 3.
D'où $\text{PGCD}(18; 105) = 3$, ou encore $18 \wedge 105 = 3$.
- On a $D(17) = \{1; 17\}$ et $D(97) = \{1; 97\}$
Alors le seul diviseur commun à 17 et 97 sont : 1.
D'où $\text{PGCD}(17; 97) = 1$, ou encore $17 \wedge 97 = 1$.

Remarques

- ◇ Comme 1 divise tous les entiers naturels, alors $a \wedge b \geq 1$.
- ◇ Le PGCD de deux nombre premiers est toujours égale à 1.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. $a \wedge a = a$.
2. $a \wedge 1 = 1$.
3. $a \wedge 0 = a$.
4. Si un entier naturel b divise a , alors $a \wedge b = b$.

Méthode

Soit a et b deux entiers naturels.

Le PGCD de a et b est le produit des facteurs premiers **communs** contenus dans leurs décompositions, qui ont la **plus petite puissance**.

Exemple

1. On a : $80 = 2^4 \times 5$ et $315 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
On voit que 2 et 5 sont les facteurs premiers communs, donc on prend ces facteurs dont l'exposant est le petit, on trouve :

$$\text{PGCD}(80; 315) = 2^2 \times 5 = 20$$

2. On a : $525 = 3 \times 5^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
On voit que 3, 5 et 7 sont les facteurs premiers communs, donc on prend ces facteurs dont l'exposant est le petits, on trouve :

$$252 \wedge 210 = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

2. Plus petit multiple commun à deux nombres

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit multiple commun à a et b est le **plus petit entier naturel non nul**, qui est multiple de a et b , on le note $a \vee b$ ou encore $\text{PPCM}(a; b)$.

Exemple

1. On a $M(7) = \{0; 7; 14; 21; 28; \dots\}$ et $D(3) = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; \dots\}$
Donc $\text{PPCM}(7; 3) = 21$, ou encore $7 \vee 3 = 21$.
2. On a $M(15) = \{0; 15; 30; 45; \dots\}$ et $M(30) = \{0; 30; 60; 90; \dots\}$
Donc $\text{PPCM}(15; 30) = 30$, ou encore $15 \wedge 30 = 30$.

Remarques

- ◇ Le PPCM de deux nombres premiers est toujours égale leur produit.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{N}$.

1. $a \vee a = a$.

2. $a \vee 1 = a$.

3. $a \vee 0 = 0$.

4. Si un entier naturel b divise a , alors $a \vee b = a$.

Méthode

Soit a et b deux entiers naturels.

Le PPCM de a et b est le produit de **tous** les facteurs premiers (**communs ou non**) contenus dans leurs décompositions, qui ont la **plus grande puissance**.

Exemple

1. On a : $80 = 2^4 \times 5$ et $315 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

On prend tous les facteurs premiers dont l'exposant est le grand, on trouve :

$$\text{PPCM}(80; 315) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

2. On a : $525 = 3 \times 5^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

On prend tous les facteurs premiers dont l'exposant est le grand, on trouve :

$$252 \vee 210 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

3. Relation entre PGCD et PPCM

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels, on a :

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$$

Exemple

1. Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Déterminons $a \wedge b$, sachant que $ab = 180$ et $a \vee b = 60$:

On a $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$, alors $a \wedge b = \frac{ab}{a \vee b} = \frac{180}{60} = 3$

D. Exercices