BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE

Fascicule de Mathématiques

Seconde C & TCI

NKODIA-LOEMBA

Edition 2023-2024

Avant-propos

Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classes de Seconde C & Tronc Commun Industriel.

Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de ces classes.

L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue d'évaluations. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez des exercices stimulants qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux évaluations. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.

L'auteur

PARTIE A
Algèbre

CONNAITRE LES NOMBRES

Exercice 1

On donne les nombres suivants :

$$-4,5 \ ; \ 2,4 \ ; \ -\frac{1}{3} \ ; \ -\frac{4}{5} \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ -\sqrt{3} \ ; \ \pi \ ; \ \frac{22}{7} \ ; \ \frac{\pi^2}{2}$$

1. Regrouper les nombres rationnels et faire les divisions si possibles.

2. Regrouper les nombres irrationnels et extraire les racines si possibles, donner les résultats sous forme des décimaux.

3. Quel distinction faites-vous ?

Exercice 2

Donner l'écriture fractionnaire des nombres rationnels suivants :

$A = 2,45$; $B = 32,78$; $C = 35,7121212 \ldots$; $D = -16,457777777 \ldots$

$E = 2,15151515 \ldots$; $F = -32,432432432 \ldots$; $G = 0,82828282 \ldots$

$H = -31,417841784178 \ldots$; $I = -0,333333 \ldots$; $J = 2,4676767 \ldots$

$K = -0,98232323 \ldots$

Exercice 3

1. Donner la nature des nombres réels suivants :

2 ; π ; $\sqrt{3}$; $3,23$; $\frac{3}{4}$; -5 ; $4,2323232323 \ldots$; $45,123234567 \ldots$

2. Soit le nombre $x = 2,3333333 \ldots$

a) Qu'appelle t'on période d'un nombre rationnel ?
b) Déterminer la période de x

c) Ecrire x sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel.

Exercice 4

1. On donne les nombres suivants :

$x = 0{,}531531531531\ldots ; y = 3{,}15515151515\ldots ;$

$z = -678{,}121412141214\ldots$ *et* $t = -0{,}13134131313131\ldots$

1. Donner l'écriture fractionnaire de x ; y ; z ; et t

2. Soient deux nombres définis par : $A = 2020{,}9999999999\ldots$

et $B = 0{,}9999999999999\ldots$

a) Vérifier sans utiliser la calculatrice que $B = A - 2020$
b) Déterminer l'écriture fractionnaire de B.
c) Déduire que $A = 2021$

Exercice 5

On donne $A = \{x \in \mathbb{R} /\ x \leq 7\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / -7 < x < -1\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} /\ x \leq 4\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} /\ 5 > x\}$

1. Déterminer les ensembles A ; B ; C et D sous forme d'intervalle.

2. Tracer sur une droite graduée les ensembles A ;B ;C et D.

3. Calculer l'amplitude, le centre et le rayon de chaque intervalle.

Exercice 6

Déterminer l'ensemble $A \cap B$ dans les cas suivants :

a) $A =]-2; 7]$ *et* $B = [0; 5]$

b) $A = [1; 6]$ *et* $B = [6; 9]$
c) $A = [0; 4]$ *et* $B =]4; 6[$
d) $A = [0; 4[$ *et* $B = [6; 9]$
e) $A =]-5; 3]$ *et* $B = [6; 9]$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble $A \cup B$ *dans les cas suivants :*

a) $A =]-2; 7]$ *et* $B = [0; 5]$
b) $A = [1; 6]$ *et* $B = [6; 9]$
c) $A = [0; 4]$ *et* $B =]4; 6[$
d) $A = [0; 4[$ *et* $B = [6; 9]$
e) $A =]-5; 3]$ *et* $B = [6; 9]$

Exercice 8

On donne les ensembles suivants :

$A =]2; 10[$; $B = [5; 15[$; $C =]-2; 5]$; $D = [7; 12[$

1. Déterminer $A \cap B$ *et* $C \cap D$

2. Déterminer $A \cup B$ *et* $C \cup D$

Exercice 9

On donne $A =]-\infty; -1{,}7]$; $B = \left]-\frac{12}{7}; -1{,}69\right[$ *et* $C =]-1{,}71; +\infty[$

1. Représenter graphiquement les intervalles A, B et C.

2. Quel est l'ensemble D des réels communs à A ; B et C ?

3. Trouver un nombre rationnel r appartenant à D dont le dénominateur est 10.

Exercice 10

Soient a, b, c et d les nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} < \frac{ac}{bd}$

2. Prouver que si $a < b \Longrightarrow a < \sqrt{ab} < b$

3. Montrer que si $a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

4. On donne deux nombres réelles a et b tels que : $1 < a < 4$ *et* $3 < b < 5$

a) Montrer que $\frac{1}{9} < \frac{1}{a+b} < \frac{1}{4}$

b) Montrer que $\frac{1}{9} < \frac{a}{a+b} < 1$ *puis en déduire que* $\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{a}{a+b}} < 1$

Exercice 11

1. Comparer les nombres réels suivants :

$a)$ $(1+a)^2$ *et* $1+2a$

$b)$ $\frac{1}{18}$ *et* $\frac{1}{13\sqrt{2}}$

$c)$ $7 - 3\sqrt{5}$ *et* $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$d)$ $2+\sqrt{5}$ *et* $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

$e)$ $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ *et* $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$f)$ $\sqrt{6+11\sqrt{3}}$ *et* $\sqrt{6-11\sqrt{3}}$

$g)$ α ; α^2 *et* α^3. *Avec* $\alpha = 4 - x$ *où* x *est un réel tel que* $3 < x < 4$

2. Ranger par ordre croissant les nombres réels suivants

$A = \sqrt{17} + 3\sqrt{2}$; $B = 4 + \sqrt{19}$ *et* $C = \sqrt{5}(\sqrt{3}+2)$

Exercice 12

1. Ecrire les expressions suivantes sans valeurs absolues

$A = |3x - 2| + |-x + 4|$; $B = 5x - 1 - |5 - 3x|$

2. Déterminer a *telle que* $|a + 1| = |2a - 3|$

3. Déterminer x *telle que* $|x| = 3$

Exercice 13

1. Ecrire sous forme d'intervalle, les inégalités suivantes :

$a)$ $|x - 3| \leq 4$; $b)$ $|x - 1| \geq 2$; $c)$ $|2x + 1| < 8$; $d)$ $|3x + 5| > 14$

2. Traduire en valeur absolue les intervalles suivants :

$I = [1; 8]$; $J =]-3; 3[$; $A =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$

3. a et b étant deux nombres réels tels que :

$\left|a - \frac{1}{2}\right| < 1$ *et* $|b - 1| < \frac{1}{2}$.

A quels intervalles appartiennent a *et* b

Exercice 14

1. On donne $M = \{x \in \mathbb{R} / \ |1 - x| < 4\}$ *et* $N = \{x \in \mathbb{R} / \ d(3x - 2) \geq 7\}$

- *a) Déterminer M et N sous forme d'intervalles.*
- *b) Déterminer les ensembles E et F tels que* $E = M \cap N$ *et* $F = M \cup N$

2. Ecrire sous forme des intervalles les ensembles suivants :

- *a)* $X = \{x \in \mathbb{R} / \ x \leq 4 \ \text{ et } \ x \geq 2\}$
- *b)* $Y = \{x \in \mathbb{R} / \ |x - 4| < 7 \ \text{ ou } \ |2x - 5| > 3\}$

Exercice 15

On considère l'intervalle suivant $I = [-3; 1]$ *et la relation*

$J = \{x \in \mathbb{R};\ |x+1| \geq 2\}$.

1. Ecrire la relation J *sous forme d'intervalle.*

2. En déduire que J *est un intervalle non borné de* $\mathbb{R}$.

3. a) Donner un majorant et un minorant de I

b) Donner le maximum et le minimum de I

c) I est-il un intervalle borné ? Justifiez la réponse.

4. a) Déterminer le centre c *et le rayon* r *de I.*

b) Traduire I en valeur absolue.

5. Déterminer $I \cap J$ *puis* $I \cup J$

Exercice 16

Etant donné deux réels x *et* y, *démontrer sans utiliser l'inégalité triangulaire que :*

1. $x + y \leq |x| + |y|$

2. $-(x + y) \leq |x| + |y|$

3. En utilisant les questions 1. et 2.

En déduire que $|x + y| \leq |x| + |y|$

4. A quelle condition a-t-on $|x + y| = |x| + |y|$ *?*

CALCULS DANS $\mathbb{R}$

Exercice 1

On donne $A = \frac{7}{2}$ *et* $B = \frac{5}{4}$

1. Calculer $A + B$

2. Calculer $A - B$ *et* $A \times B$

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants :

$A = 3 + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^2}$ *avec* $a \neq 0$; $B = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$ *avec* $a \neq b$

$C = \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{9}\right) : \frac{18}{5}$; $D = \frac{\frac{7}{9}-\frac{2}{9}}{\frac{5}{18}}$; $D = \frac{3-\frac{5}{7}+\frac{1}{2}}{3+\frac{5}{7}-\frac{1}{2}}$; $E = \frac{a-\frac{a-b}{1+ab}}{1+\frac{a(a-b)}{1+ab}}$; $F = \left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}}\right) \div \left(\frac{\frac{4}{5}-\frac{6}{7}}{\frac{7}{5}+\frac{3}{7}}\right)$

$G = \frac{4}{\frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}+\frac{1}{1+\frac{b}{b+c}}+\frac{1}{1+\frac{c}{b+c}}}$; $H = \left[\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{9}}\right] \times \left[\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}}\right] : \left[\frac{\frac{5}{6}-\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}+\frac{4}{5}}\right]$; $I = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}$

Exercice 3

1. Calculer :

$A = 10^3 \times 100000$; $B = \frac{3}{81}$; $C = (-1)^3 + 2^{-1}$

2. Simplifier puis calculer :

$A = (5^4 \times 5^5)^3$; $B = (7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2$; $C = \frac{2^5 \times 3^6}{3^5 \times 2^5}$; $D = \frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$

$E = (2 \times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-4}$; $F = \frac{(0{,}025)^3 \times (0{,}02)^5}{(4000)^3}$

$G = \left(\frac{-4}{9}\right)^{-6} \times \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3} \times \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 \times \left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2\right]^3$

$$H = \frac{(4,9)^2 \times (0,9)^2 \times (125.10^{-2})^3}{(7.10^{-1})^3 \times (0,3)^4 \times (0,5)^2}$$

3. On considère le nombre réel :

$$E = 2,5 \times 10^{-2} + 7,5 \times 10^{-3} - 15,25 \times 10^{-4}$$

a) Ecrire le nombre E sous la forme $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$
b) En déduire l'écriture scientifique du nombre réel E.

Exercice 4

1. Rendre rationnel les expressions suivantes :

$A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $B = \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

2. Calculer les expressions suivantes :

$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$; $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{7}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$C = \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; $D = \sqrt{14 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$;

$E = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{5} - 25\right)^2}$

Exercice 5

On considère deux nombres :

$a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ *et* $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

1. Calculer $a^2 + b^2$ et $a \times b$

2. Déduire la valeur de $a + b$. On donne $6 - 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$

Exercice 6

1. Factoriser $a^2 - a$ et écrire $1 - \frac{1}{a}$ sous forme d'un quotient.

2. Supposons que $a > 0$; Montrer que $a - \sqrt{a} = \frac{a(a-1)}{a+\sqrt{a}}$. Déduire que $a - \sqrt{a}$ est du même signe que $a(a-1)$

3. Etudier le signe de $1 - \sqrt{a}$

Exercice 7

On donne $M = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

1. Comparer $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

2. Déduire le signe de M.

3. Calculer M^2

4. Déduire une valeur simple de M.

Exercice 8

On considère les nombres réels $x = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ et $y = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$

1. Montrer que $x^2 + y^2 = 8$ et $xy = 1$

2. On pose $A = x + y$ et $B = x - y$

   a) Montrer que $A^2 = 10$ et $B^2 = 6$
   b) Sachant que $A > 0$ et $B > 0$, en déduire les valeurs exactes de A et B.
   c) Donner alors une expression plus simple de x et de y

3. Calculer le nombre réel C tel que : $C = \sqrt[4]{A^2 + B^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Exercice 9

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ *;* $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ *;* $C = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$ *et*

$D = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$

2. Calculer :

$A = \sqrt[3]{-8}$; $B = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ *;* $C = \sqrt[4]{16}$ *;* $D = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ *;* $E = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

$F = \sqrt[2\times3]{2^3} \times \sqrt[2\times3]{2^2} \times \sqrt[6]{2}$

Exercice 10

On donne $|x - 5| \leq 10^{-4}$

1. Déterminer l'encadrement de x

2. Donner la valeur approchée de x *par défaut et par excès à* 10^{-4} *près.*

3. Calculer l'amplitude, le centre et le rayon de l'encadrement de x.

4. Soit la proposition : 1,4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *à 0,1 près. Traduire cette proposition en valeur absolue et en intervalle.*

Exercice 11

On donne $x = 0{,}666$ *à* 10^{-3} *et* $y = 0{,}325$ *à* 10^{-3}

1. Déterminer une valeur approchée de $x + y$ *à* 10^{-3}

2. Déterminer une valeur approchée de $x.y$ *à* 10^{-3}

3. Déterminer une valeur approchée de $\frac{x}{y}$ *à* 10^{-3}.

EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

Exercice 1

1. Déterminer le réel a *pour que* $P(x) = (2x - a)(x + 3)$ *et*

$Q(x) = 2x^2 + x - 15$ *soient égaux.*

2. On donne $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Déterminer la valeur numérique de f *lorsque* x *prends la valeur* -1.

3. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

a) Calculer $P(-2)$; $P(1)$; $P(3)$; $P\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
b) Donner les zéros du polynôme P.

Exercice 2

Soit P le polynôme de degré 5 défini par $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 4x + 1$ *et Q le polynôme de degré 3 défini par :* $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

1. Calculer $E(x) = P(x).Q(x)$; $S(x) = P(x) + Q(x)$

2. Déterminer le degré de $E(x)$ *et de* $S(x)$.

3. Factoriser les polynômes suivants :

a) $p(x) = 12x - 3x^3$
b) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
c) $r(x) = x^3 - 8 + (x - 2)(4x + 5)$
d) $s(x) = (x - y)^3 - (x^3 - y^3)$

Exercice 3

On donne $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 15$

1. Montrer que g est factorisable par $x - 3$

2. On pose $g(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

a) Développer, réduire puis ordonner $g(x)$
b) Quand dit-ton que deux polynômes sont égaux ?
c) Déterminer les réels a, b *et* c *tels que* $g(x) = g(x)$

Exercice 4

Soit $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ *et* $q(x) = x + 1$

1. Calculer $f(-1)$

2. Que peut-on dire de -1 *?*

3. Effectuer la division euclidienne de f *par le polynôme* q

4. Déterminer les réels a, b *et* c *tels que* $\frac{f(x)}{q(x)} = ax^2 + bx + c.$

Exercice 5

Soit $p(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

1. Calculer $p(1)$.

2. Que peut-on déduire ?

3. Déterminer un polynôme $q(x)$ *tel que* $p(x) = (x-1)q(x)$ *par la méthode de Hörner.*

Exercice 6

1. On donne $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

a) Calculer $f(-2)$
b) Simplifier $q(x) = \frac{f(x)}{x^2-4}$

2. On donner $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$ *et* $g(x) = \frac{4x^4+3x^2+2}{x^2+x+1}$

Décomposer f *et* g.

Exercice 7

1. *Soit* P *le polynôme défini par :* $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$

 a) *Montrer qu'il existe un polynôme R, dont on précisera le degré, tel que :* $\forall\ x\ \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-3)R(x)$
 b) *Déterminer* $R(x)$ *par la méthode de Hörner.*

2. *Soit Q la fraction rationnelle définie par :* $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2-9}$

 a) *Déterminer le domaine de définition* D_Q *de Q.*
 b) *Simplifier* $Q(x)$ *dans* D_Q*.*

3. *Par la méthode d'indentification des coefficients, déterminer les nombres réels* a, b *et* c *tels que :* $\forall\ x \in D_Q,\ Q(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$

Exercice 8

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - 4x - 7x + k.$

1. *Déterminer le réel* k *pour que* 1 *soit une racine de* P.

 En déduire une factorisation de $P(x)$.

2. *Déterminer les réels a et b pour que le polynôme*

 $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + ax + b$ *admette comme racines les réels* -1 *et* 1

3. *Soit Q le polynôme défini par* $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10$

 a) *Montrer que* $Q(x)$ *est factorisable par* $x^2 - 1$
 b) *Trouver les réels a, b et c tels que* $Q(x) = (x^2-1)(ax^2+bx+c)$

Exercice 9

On considère le polynôme F défini par : $F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

1. a) *Quel est le degré de F ?*

 b) *Calculer* $F(2)$ *puis conclure.*

2. On pose $F(x) = (x-2)g(x)$

   a) Déterminer le degré de g
   b) Déterminer g

3. On pose $Q(x) = (x+3)(x+1)$ et $R(x) = \frac{F(x)}{(x+1)(x+2)}$

   a) A quelles conditions deux polynômes sont-ils égaux ?
   b) Montrer que $Q(x) = g(x)$
   c) Simplifier $R(x)$

4. Décomposer $q(x) = \frac{x^2+x-6}{x+2}$

Exercice 10

On considère le polynôme $f(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$ avec $a \neq 0$.

1. Montrer que 0 n'est pas une racine de $f(x)$

2. Calculer $f(-1)$ puis conclure.

3. Montrer que pour tout x non nul, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}f(x)$

4. En déduire la nature et l'ordre du polynôme f.

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$\boldsymbol{a}$) $2x+4=0$; $\boldsymbol{b}$) $3x+1=0$; $\boldsymbol{c}$) $x+1=2x+3$; $\boldsymbol{d}$) $5x+10=5(x+2)$

$\boldsymbol{e}$) $2x+4=2(x+2)$; $\boldsymbol{f}$) $3(2x-5)=6x+9$; $\boldsymbol{g}$)$(x+2)(4x-7)=0$

$\boldsymbol{h}$) $2x-4=2x+3$; $\boldsymbol{i}$) $(x+2)(5x+7)=(x+2)(12x-7)$

$\boldsymbol{j}$) $(4x-3)^2-(2x+3)(3-4x)=4x(4x-3)$; $\boldsymbol{k}$) $(2x+1)(-x+4)=0$

$\boldsymbol{l}$) $2x+3=(2x+1)(2x+3)$; $\boldsymbol{m}$) $\dfrac{2x+2}{x-3}=0$; $\boldsymbol{n}$) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=0$

$\boldsymbol{o}$) $\dfrac{2}{3x-1}-\dfrac{3x}{3x+1}=\dfrac{4}{9x^2-1}-1$; $\boldsymbol{p}$) $\dfrac{2x-7}{2x+3}=\dfrac{x+2}{x+1}$; $\boldsymbol{a'}$) $mx-m=x-2$

$\boldsymbol{q}$) $m^2(x-1)+3m=x+2$; $\boldsymbol{r}$) $m^2x+4=16x+m.$

$\boldsymbol{s}$) $3x+4=5x+6$; $\boldsymbol{t}$) $2(x+5)-6x-7=5(2x+7)-4(x-5)$

$\boldsymbol{u}$) $(x-3)(2x+5)=(x-3)(5x-2)$; $\boldsymbol{v}$) $(2x+1)^2-(3x+7)^2=0$

$\boldsymbol{w}$) $\dfrac{4x^2-16}{x+2}=0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\boldsymbol{a}$) $|x+2|=-3$; $\boldsymbol{b}$) $|2x+1|=3$; $\boldsymbol{c}$) $|x+2|=2x-1$; $\boldsymbol{d}$) $|x+1|=x+1$

$\boldsymbol{e}$) $|2x+5|=3x-1$; $\boldsymbol{f}$) $|x+3|=|2x+3|$; $\boldsymbol{g}$) $|4x-2|=|x+1|$

$\boldsymbol{h}$) $\sqrt{3x+1}=-1$; $\boldsymbol{i}$) $\sqrt{x+4}=5$; $\boldsymbol{j}$) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$

$\boldsymbol{k}$) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-8}$; $\boldsymbol{l}$) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x-4}$; $\boldsymbol{m}$) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=3$

$\boldsymbol{n}$) $\sqrt{5x+4}=5x-2$; $\boldsymbol{o}$) $\sqrt{x^2-2x}=x-3$; $\boldsymbol{p}$) $\sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}.$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\boldsymbol{a}$) $2x + 4 \geq 2$; $\boldsymbol{b}$) $22x - 4 < 23x - 1$; $\boldsymbol{c}$)$3x - 1 < 4$

$\boldsymbol{d}$) $33x - 3 \leq 31x + 3$; $\boldsymbol{e}$) $x^3 \geq 16x$; $\boldsymbol{f}$) $x^2(x-1) \leq x^2$

$\boldsymbol{g}$) $2x - 3 > 3x + 2$; $\boldsymbol{h}$) $(x-1)(3x-1) < 0$

$\boldsymbol{i}$) $(4x-3)^2 - (2x+3)(3-4x) \geq 4x(4x-3)$; $\boldsymbol{j}$) $(2x+1)^2 < (x+3)^2$

$\boldsymbol{k}$) $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$; $\boldsymbol{l}$) $\dfrac{2x-3}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} \leq \dfrac{2x^2}{x^2-1}$; $\boldsymbol{m}$) $\dfrac{x}{x^2-1} < \dfrac{x}{x+1}$

$\boldsymbol{n}$) $\dfrac{x+1}{x} \leq \dfrac{x}{x+1}$; $\boldsymbol{o}$) $m(x-1) > x + 2$; $\boldsymbol{p}$) $m - 2x \leq 2mx - 1$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\boldsymbol{a}$) $|x+1| \leq -4$; $\boldsymbol{b}$)$|x-1| \leq 5$; $\boldsymbol{c}$) $|x+2| \geq 2$; $\boldsymbol{d}$) $|3x+1| \leq x + 3$

$\boldsymbol{e}$) $|x-1| \geq 2x + 1$; $\boldsymbol{f}$) $|2x+1| \geq |2-3x|$; $\boldsymbol{g}$) $|6x-7| \leq |2x-3|$

$\boldsymbol{h}$) $\sqrt{x+1} < -2$; $\boldsymbol{i}$) $\sqrt{x+3} < 3$; $\boldsymbol{j}$) $\sqrt{x^2-2x} \leq x - 3$; $\boldsymbol{k}$) $\sqrt{x-1} \leq 2x - 4$

$\boldsymbol{l}$) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{4x-1}$; $\boldsymbol{m}$) $\sqrt{x^2-2x} \geq x - 3$; $\boldsymbol{n}$) $\sqrt{x+5} > -4$

$\boldsymbol{o}$) $\sqrt{(x-3)(4-x)} > -1$; $\boldsymbol{p}$) $\sqrt{(x-3)(4-x)} < -1$; $\boldsymbol{q}$) $\sqrt{x+1} \geq 2$

$\boldsymbol{r}$) $\sqrt{x-1} \geq \sqrt{4x-1}$; $\boldsymbol{s}$) $\sqrt{x-2} > x - 4$; $\boldsymbol{t}$) $x + \sqrt{x(x-3)} < 4$.

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

$(S_1):\begin{cases}3x-2y=9\\2x+y=6\end{cases}$; $(S_2):\begin{cases}x+y+1=0\\-x+2y+5=0\end{cases}$; $(S_3):\begin{cases}x+y=6\\2x+2y=12\end{cases}$

$(S_4):\begin{cases}3x-y=6\\6x-2y=5\end{cases}$; $(S_5):\begin{cases}x-3y=4\\x-y=2\end{cases}$; $(S_6):\begin{cases}3x+4y=5\\5x-2y=17\end{cases}$

$(S_7):\begin{cases}5x-y=1\\x+3y=-4\end{cases}$; $(S_8):\begin{cases}3x-2y=4\\x+2y=4\\2x+3y=7\end{cases}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1):\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=-1\\\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y+1}=1\end{cases}$; $(S_2):\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+1}=1\\\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+1}=3\end{cases}$

$(S_3):\begin{cases}\dfrac{2}{x}-3y^2=1\\\dfrac{5}{x}-8y^2=2\end{cases}$; $(S_4):\begin{cases}\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-3\\3\sqrt{x}-\sqrt{y}=23\end{cases}$; $(S_5):\begin{cases}5\sqrt{x}-\sqrt{y}=1\\\sqrt{x}+3\sqrt{y}=-4\end{cases}$

$(S_6):\begin{cases}2|x|-3|y|=1\\5|x|-8|y|=2\end{cases}$

Exercice 3

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1):\begin{cases}mx+y=1\\x+my=-1\end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$; $(S_2):\begin{cases}mx+y=2m\\x+my=m+1\end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$

$$(S_3):\begin{cases}(m+1)x-(m-1)y=2\\ 3x-5y=-2\end{cases}\quad (m\in\mathbb{R})$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases}x+3y-z=-4\\ 2x-y+2z=5\\ 5x-2y+3z=4\end{cases}\ ;\ (S_2):\begin{cases}x+2y+z=-4\\ -2x+y-z=5\\ -x+2y=0\end{cases}$$

$$(S_3):\begin{cases}x+z=8\\ y+z=10\\ x+y=5\end{cases}\ ;\ (S_4):\begin{cases}x+2y3z=2\\ 4x+3y+z=0\\ 3x-6y-5z=4\end{cases}\ ;\ (S_5):\begin{cases}7x-14=0\\ 3x-5y-1=0\\ 7x-17y+3z=1\end{cases}$$

$$(S_6):\begin{cases}2x-3y+5z=0\\ 3x-5y+2z=1\\ 2x-5y+3z=2\end{cases};\ (S_7):\begin{cases}2x-y+z=3\\ x+y+2z=12\end{cases}\ ;\ (S_8):\begin{cases}x+y-2z=7\\ 2x-y+z=0\\ 3x+y+z=8\end{cases}$$

$$(S_9):\begin{cases}2x-2y-z=0\\ x+y+3z=0\\ x-2y-z=3\end{cases}$$

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Exercice 1

1. a) Donner la définition d'un trinôme du second degré.

b) Déterminer sa forme canonique.

2. On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}; P(x) = -x^2 + x + 2$

a) En déduire la forme canonique de $P(x)$
b) Factoriser $P(x)$
c) Etudier suivant les valeurs du réel x *le signe de* $P(x)$.

Exercice 2

Soit T le trinôme du second degré défini par : $T(x) = 4x^2 - 20x + 24$

1. Donner la forme canonique du trinôme T

2. Factoriser le trinôme T

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $T(x) = 0$

4. Etudier le signe du trinôme T.

5. Déduire dans $\mathbb{R}$ *la solution des inéquations suivantes :* $T(x) \geq 0$ *et* $T(x) < 0$.

Exercice 3

1. Mettre les polynômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

$P(x) = x^2 - 6x + 9$; $F(x) = -3x^2 + 11x - 8$ *et* $H(x) = 3x^2 - 6x\sqrt{2} + 6$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$\boldsymbol{a}$) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $\boldsymbol{b}$) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; $\boldsymbol{c}$) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

d) $x^2 - 3x - 4 = 0$; ***e***) $x^2 + 1 = 0$; ***f***) $2x^2 - 3x + 7 = 0$;

g) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; ***h***) $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$; ***i***) $x^2 + 4x + 4 = 0$

j) $3x^2 + x + 1 = 0$; ***k***) $x^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$; ***l***) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

m) $6x^2 - 3x\sqrt{3} + 1 = 0$; ***n***) $x^2 - |x| - 6 = 0$; ***o***) $x + \sqrt{x} - 1 = 0$

3. Déterminer une équation du second degré dont les racines sont -2 et -3.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$(S_1) : \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$; $(S_3) : \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$; $(S_4) : \begin{cases} S = 2 \\ P = -3 \end{cases}$

2. Sans calculer les racines x_1 et x_2 de l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$, déterminer $S = x_1 + x_2$; $P = x_1.x_2$; $\alpha = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $\beta = \frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2}$ et $\theta = x_1^2 + x_2^2$.

3. Sachant que $S = x' + x''$ et $P = x'.x''$ et sans calculer les racines x' et x'' de l'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$

a) Exprimer $A = x'^2 + x''^2$ et $B = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'}$ en fonction de S et P
b) En déduire la valeur exacte de A et B.

4. Dans chacun des cas suivants, déterminer deux nombres réels s'ils existent, dont on connait la somme S et le produit P.

a) $S = 28$; $P = 195$
b) $S = -20$; $P = -1344$
c) $S = 2\sqrt{5}$; $P = 3$
d) $S = 14$; $P = 851$
e) $S = 32$; $P = 256$
f) $S = 15$; $P = -324$

Exercice 5

On considère un réel m et l'équation :

$(E):\ (m-2)x^2 - 2mx + m^2(m-1) = 0$

1. Pour quelles valeurs de m, l'équation (E) est du second degré ?

2. Pour des valeurs trouvées à la question (1), déterminer m pour que :

a) (E) ait une solution double ;
b) (E) admette deux solutions distinctes ;
c) Les solutions de (E) vérifient :
- $x' < 0 < x''$
- $x' < x'' < 0$
- $0 < x' < x''$

Exercice 6

On donne $(E_m):\ (m+2)x^2 - 2(m-1)x + 2(m+3) = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer S et P en fonction de m

2. Trouver la relation indépendante de m liant les racines x_1 et x_2 de l'équation (E_m).

3. Déterminer m pour que (E_m) soit une équation du premier degré.

4. Pour quelle valeur de m :

a) L'une des racines est 1 ?
b) $x_1 = x_2$
c) $x_1 = -x_2$
d) $x_1 = \frac{1}{x_2}$

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$; ***b***) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

c) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$; ***d***) $4x^4 + 12x^2 + 9 = 0$; ***e***) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2. Etudier les signes des trinômes suivants :

$T(x) = 3x^2 - 12x + 12$; $G(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$;

$H(x) = x^2 - 6x + 10 = 0$; $Q(x) = -2x^2 + 3x - 4$;

$R(x) = 2x^2 - 4x\sqrt{3} + 6$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 - x + 3 \geq 0$; ***b***) $-x^2 + x + 1 < 0$; ***c***) $x^2 + 6x + 9 > 0$

d) $x^2 - 4x + 1 \leq 0$; ***e***) $(x+1)^2 + x^2 - 1 > 0$

f) $25(x-2)^2 \leq 9(x-1)^2$; ***g***) $x^2 + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x - 3 + 2\sqrt{2} \leq 0$

PARTIE B
Analyse

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $g(x) = \sqrt{2}x^4 + 3x^3 + 2x$; $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$;

$i(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $j(x) = \frac{2x+7}{5x^2+3x-2}$; $k(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $l(x) = \frac{x+5}{x^3-2x}$

$m(x) = 2x - 3 + \dfrac{12}{x^2 - 1}$; $n(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 5}$; $p(x) = \dfrac{x^2 + 4}{|2x + 3| - 1}$

$q(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 3}}$; $r(x) = \dfrac{2x + 4}{\sqrt{-2x + 4}}$; $s(x) = \sqrt{|-3x - 3|}$; $t(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + 1}$

$u(x) = \dfrac{7 + 3x}{-x + 1}$; $v(x) = \sqrt{2 - x}$

2. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $g(x) = x^2$ *et* $h(x) = 3x + 4$

Déterminer $f \circ g$; $g \circ f$; $h \circ f \circ h$ *et* $h \circ h$.

Exercice 2

1. On donne $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ *et* $g(x) = 1 - x^2$

f *et* g *sont-elles injectives ?*

2. On donne $f(x) = -\frac{2}{2x+1}$ *et* $g(x) = x^2 - 3$

f *et* g *sont-elles surjectives ?*

3. On donne $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *et* $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$

f *et* g *sont-elles bijectives ?*

Exercice 3

Partie A

On donne $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

1. Montrer que f *est bijective.*

2. En déduire sa bijection réciproque.

Partie B

On donne les fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 + x$; $g(x) = x^3 - x + 1$; $h(x) = x^2 - 1$; $F(x) = \frac{x^2-1}{x}$ *et*
$G(x) = x^2 sinx$

Etudier la parité des fonctions f ; g ; h ; F *et* G.

Exercice 4

Partie A

Soit l'application f *définie par* $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer l'image de 3 et l'antécédent de 1 par f

3. Montrer que f *est bijective*

4. Expliciter f^{-1}.

Partie B

On donne $g(x) = x^2 + x - 6$ *et* $h(x) = -5x - 1$

1. Vérifier si la fonction g *est injective*

2. Déterminer $h \circ g$ *et* $g \circ h$

Exercice 5

1. On donne $f(x) = x^4 + |x| + 1;\ g(x) = \frac{x^3 - x}{x^2}$ *et* $h(x) = 3x^2 + x - 5$

Etudier la parité des fonctions $f;\ g$ *et* h.

2. Trouver les taux de variations si possible puis déduire le sens de variations des fonctions suivantes :

$f(x) = -7x + 2\ ; g(x) = 5x + 1\ , h(x) = 6x - 3\ ;\ i(x) = x^2 + x\ ;$

$j(x) = x^2 - 4x + 5\ \ ; k(x) = \sqrt{x + 1}\ ;\ l(x) = \frac{3x+1}{x+2}.$

Exercice 6

Voici le tableau de variation d'une fonction numérique f

x	-2		0		3		6
$f(x)$	-1	↗	4	↘	2	↗	5

1. Quel est l'ensemble de définition de f *?*

2. Quel est l'antécédent de 4 et quelle est l'image de 6 par f *?*

3. Préciser l'intervalle sur lequel f *est décroissante,* f *est croissante*

4. Quelle est l'image de l'intervalle $I = [0; 3]$ *et de* $J = [-2; 0]$ *par* f.

Exercice 7

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 2x^2 - 1$

1. Etudier la parité de f.

2. Montrer que f *est croissante sur* $[0; +\infty[$

3. Montrer que f *est décroissante sur* $]-\infty; 0]$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Quel est le minimum de f ?

6. Quels sont les antécédents de 2 par f ?

7. Calculer $f(0); f\left(\frac{1}{2}\right); f(1); f(2)$ et $f(3)$

8. Tracer la courbe de f.

Exercice 8

Soit f une fonction définie par $f(x) = -4x^2 + 12x - 3$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Déterminer le taux de variation de f

3. Déterminer les coordonnées du sommet S.

4. Donner la nature exacte de S.

5. Dresser le tableau de variation de f

6. Compléter le tableau de valeurs ci-contre.

x	-6	-4	0	1	2	3
$f(x)$						

7. Construire sur l'intervalle $[-6; 3]$ la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de cette fonction dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 - x + 2$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Déterminer le taux d'accroissement T de cette fonction.

3. Donner la forme canonique de $f(x)$

4. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

5. Dresser le tableau de variation de f

6. Construire $(\mathcal{C})$ la courbe de f.

7. Discuter suivants les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$

8. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$

9. Par la méthode algébrique, vérifier la solution de la question (8).

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 1cm.

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = ax + b$ et $g(x) = x^2 - 4$ avec a et b des réels.

1. Déterminer les réels a et b sachant que $f(0) = -3$ et $f(4) = 1$

2. On pose $a = 1$ et $b = -3$. Déterminer la fonction composée $f \circ g$.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 - 6x + 5$

- *a) Calculer le taux de variation de h puis préciser son signe.*
- *b) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$*
- *c) Donner les coordonnées du sommet S de la courbe $(\mathcal{C})$*
- *d) Trouver les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ de h avec les axes du repère.*
- *e) Compléter le tableau suivant puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.*

x	-1	2	4	6	7
$h(x)$					

Exercice 11

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 + 4x + 5$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Déterminer le taux d'accroissement T de cette fonction.

3. Déterminer les coordonnées du sommet S de cette fonction.

4. Donner la nature exacte de S.

5. Dresser le tableau de variation de f.

6. Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

7. Compléter le tableau de valeurs suivantes :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y							

8. Construire sur l'intervalle $[-5;1]$ la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de cette fonction dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité graphique 1cm.

9. Soit $(\mathcal{D})$ une droite d'équation $y = 6$

a) Tracer cette droite dans le même repère.
b) Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{D})$
c) Indiquer les abscisses de ces points d'intersection.

10. Faire autant pour les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $y = 1$ et $y = 0$

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. Soit (U_n) *une suite définie par :* $U_n = 2n + 3$.

Calculer U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 *et* U_5.

2. Soit (U_n) *une suite définie par :* $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 1 + 2U_n \end{cases}$

Calculer U_1, U_2, U_3, U_4 *et* U_5.

Exercice 2

On donne $U_n = \frac{2n+3}{n+4}$; $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que (U_n) *est majorée par 2.*

2. Montrer que (U_n) *est minorée par* $\frac{3}{4}$

3. En déduire que la (U_n) *est bornée.*

Exercice 3

1. On donne $U_n = 3n - 4$

Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

2. On donne la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = -12 \\ u_{n+1} = \frac{8}{11}u_n + 1 \end{cases}$

a) Calculer u_1, u_2 *et* u_3
b) Représenter graphiquement les termes de cette suite.

Exercice 4

Soit (u_n) *une suite définie par :* $u_n = 2n + 4$

1. Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

2. Donner l'expression de u_{n+1}

3. Calculer $u_{n+1} - u_n$

4. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 4 - u_n \end{cases}$

1. Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

2. Construire les droites $(\mathcal{D})$ *et* (Δ) *d'équations respectives*

$y = -x + 4$ *et* $y = x$.

3. En déduire la construction des quatre premiers termes de cette suite sur l'axe $(O\vec{\imath})$.

STATISTIQUES

Exercice 1

On donne ci-dessous les notes obtenues par les élèves en classe de seconde C du Bureau du Centre académique à l'issue d'une interrogation écrite de Mathématiques.

x_i	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n_i	4	2	15	7	5	6	1	3	5

1. a) Déterminer le mode.

b) Déterminer la médiane de cette série.

2. Calculer le pourcentage des élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10

3. a) Calculer la moyenne générale de la classe à cette interrogation.

b) Calculer la variance de cette série statistique.

c) Calculer l'écart-type de cette série statistique.

Exercice 2

Les notes de Mathématiques de deux élèves A et B sont consignés dans les tableaux suivants :

Pour l'élève A

Note	8	9	12	13
Effectifs	2	3	2	1

Pour l'élève B

Note	8	9	12	13
Effectifs	1	1	4	1

1. Calculer la moyenne de chaque élève.

2. Comparer leur moyenne.

3. Calculer l'écart moyen de chaque élève. Quel est l'élève le plus régulier ?

Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition des notes de Mathématiques lors d'un devoir.

Notes	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$
Effectifs	5	14	22	8

1. Quel est l'effectif total ?

2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

3. Quelle est la classe modale de la série ?

4. Quel est le mode de la série ?

5. Calculer l'écart-moyen de cette série.

Exercice 4

Le tableau ci-dessous est de la série statistique des notes obtenues lors d'un contrôle de Maths dans une classe de seconde C de 25 élèves.

Notes x_i	2	6	8	10	12	14	16	18
Effectifs n_i	1	5	4	3	2	5	2	3

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés (croissants et décroissants) ainsi que des fréquences cumulées (croissantes et décroissantes).

2. Construire sur une même figure le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants.

3. Calculer la moyenne $\bar{X}$ et la médiane.

Exercice 5

On considère le tableau suivant donnant les notes du devoir de Mathématiques organisé par M. NKODIA-LOEMBA en classe de seconde scientifique :

Notes (x_i)	5	6	7	8	11	13	15	17
Effectif (n_i)	2	3	5	4	11	11	8	4
E.CC								
E.C.D								

1. Recopier puis compléter ce tableau.

2. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?

3. Déterminer la valeur de la médiane de la série statistique.

4. a) Déterminer le premier et le troisième quartile de la série statistique.

b) En déduire l'écart inter-quartiles et l'intervalle inter-quartiles.

5. a) Déterminer le premier et le neuvième décile.

b) En déduire l'écart inter-déciles et l'intervalle inter-déciles.

6. Construire le diagramme en boîte de cette série.

Exercice 6

Voici les notes attribuées aux élèves d'une classe de seconde TCI après un devoir de mathématiques :

6 ;6 ;7 ;7 ;7 ;8 ;8 ;8 ;9 ;9 ;10 ;10 ;11 ;11 ;11 ;11 ;11 ;11 ;11 ;12 ;12 ;12 ;12 ;13 ;13 ;13 ;13 ;13 ;13 ;13 ;13 ;14.

1. Représenter ses résultats dans un tableau contenant des effectifs.

2. Déterminer le mode et la médiane de cette série statistique.

3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série statistique.

4. Regrouper ces notes en classe d'amplitude 6.

5. Présenter ses résultats dans un tableau contenant les effectifs ; effectifs cumulés croissants et décroissants.

6. Déterminer la classe modale et le mode de cette série.

7. Construire le diagramme en bande de cette série statistique.

PARTIE C
Géométrie

OUTIL VECTORIEL DU PLAN

Exercice 1

Représenter les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *;* $\overrightarrow{AQ}$ *et* $\overrightarrow{AS}$ *tels que :*

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points K *et* G *tels que :*

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

2. Démontrer que les points A, K *et* G

Exercice 3

Soit ABC *un triangle,* B' *et* C' *deux points du plan tels que :*

$\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CC'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

1. Faire une figure

2. Démontrer que les droites (BC) *et* $(B'C')$ *sont parallèles.*

Exercice 4

MNP est un triangle quelconque.

Soit I le milieu de $[MN]$ *et J le point tel que* $\overrightarrow{PJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PN}$

1. Construire le point Q tel que JPQI soit un parallélogramme.

2. Démontrer que le point Q est le milieu de $[MJ]$

3. Démontrer que le point Q est le centre de gravité du triangle MPI.

Exercice 5

Soit ABC un triangle, K et I les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BK]$. J est le point tel que $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BJ}$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IJ}$ dans cette base.

3. En déduire que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 6

Soit A, B et C trois points non alignés.

1. Placer les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Que peut-on dire de points M, N et P ?

Exercice 7

Soit ABC un triangle non aplati.

1. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

3. En déduire la position des droites (MN) et (BC).

4. La droite passant par N parallèle à (AB) coupe le segment $[BC]$ en P. Déterminer α tel que $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BC}$

Exercice 8

A, B et C sont trois points non alignés.

1. Construire les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC}$

2. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

3. Soit le point G tel que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$

   a) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.
   b) En déduire le coefficient de dépendance des vecteurs colinéaires.

Exercice 9

Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par P et Q les points définis par : $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AD}$.

1. Etablir les relations suivantes :

   a) $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
   b) $\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$

2. En déduire que si ABCD est un parallélogramme, alors les points P, Q et C sont alignés.

Exercice 10

Soit ABC un triangle quelconque.

On désigne par D, E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. Démontrer que le quadrilatère AEDF est un parallélogramme.

2. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{AD}$ comme somme de deux vecteurs.

3. Trouver chacun des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$ comme somme de deux vecteurs.

4. Calculer la somme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle quelconque.

On donne $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

1. Placer les points D ; E et F.

2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Exprimer $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4.Montrer que les points D ;E et F sont alignés.

Exercice 12

ABC est un triangle quelconque. M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure

2. Exprimer $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4. Démontrer que les droites (BN) et (CM) sont parallèles.

Exercice 13

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 6\ cm$ et $AD = 3\ cm$. On désigne par E et F les points définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$

1. Construire la figure.

2. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$

3. En déduire que $\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{CE}$

4. Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 14

ABC est un triangle quelconque.

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Démontrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

4. Placer les points D et J définis par :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

5. Montrer que les points A, D et J sont alignés.

Exercice 15

ABC est un triangle quelconque de centre de gravité G. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

2. En utilisant la relation de Chasles et les égalités vectorielles caractérisant le milieu d'un segment, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. En déduire la relation vectorielle : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Exercice 16

A, B et C sont trois points non alignés.

1. Construire le point F tel que : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$

2. Démontrer que B, C et F sont alignés.

On donne un point D tel que $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

3. Placer le point D.

4. Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MD}$

5. Montrer que $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Exercice 17

Soit ABC trois points du plan non alignés.

1. Construire le point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

2. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$

3. On définit les points D et E par $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$

Quelle est la nature du quadrilatère ADME ?

4. Construire le point N du plan tel que $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB}$

5. Exprimer $\overrightarrow{CN}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

6. Exprimer $\overrightarrow{CM}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

7. Comment sont placés les points N, C et M ?

REPERE DU PLAN

Exercice 1

$(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est une base du plan.

Soit $\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(\vec{U};\vec{V})$ est une base du plan.

2. Exprimer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{U};\vec{V})$.

3. Soit $\vec{W} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Calculer les coordonnées x et y du vecteur $\vec{W}$ dans la base $(\vec{U};\vec{V})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On donne les points $A(1;2)$, $B(3;-1)$ et $C(4;1)$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

2. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3. Déterminer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4. Que peut-on dire des points A, B et C ?

Exercice 3

Le plan est rapporté à la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On donne les vecteurs $\vec{U}(a;2)$ et $\vec{V}(3;2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que $(\vec{U};\vec{V})$ ne soit pas une base.

2. On pose $a = -1$

On suppose maintenant que $(\vec{U};\vec{V})$ *est une base. Déterminer les composantes des vecteurs* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *dans la base* $(\vec{U};\vec{V})$.

3. Soient les vecteurs $\vec{S}(-1;3)$ *et* $\vec{W}(2;0)$ *dans la base* $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{S}$ *et* $\vec{W}$ *dans la base* $(\vec{U};\vec{V})$.

Exercice 4

I. Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ *est muni d'une base* $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. *On considère les vecteurs :* $\vec{U}=\frac{1}{2}\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$; $\vec{V}=\frac{1}{2}\vec{\imath}-\frac{1}{2}\vec{\jmath}$; $\vec{W}=(m+1)\vec{\imath}$ *et*

$\vec{S}=150\vec{\imath}+(m-1)\vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(\vec{U};\vec{V})$ *est une base.*

2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{W}$ *et* $\vec{S}$ *dans la base* $(\vec{U};\vec{V})$.

II. On considère un triangle ABC et les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ *définis par :*

$\vec{U}=(3-\sqrt{2})\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *et* $\vec{V}=7\overrightarrow{AB}+(3-\sqrt{2})\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ *sont-ils colinéaires ?*

Exercice 5

On donne les vecteurs $\vec{U}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ *et* $\vec{V}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. *Les coordonnées de* $\vec{W}$ *dans la base* $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ *sont* $(-1;1)$ *et les coordonnées de* $\vec{T}$ *dans la base* $(\vec{U};\vec{V})$ *sont* $(1;2)$.

1. Montrer que $(\vec{U};\vec{V})$ *forme une base.*

2. Exprimer $\vec{W}$ *dans la base* $(\vec{U};\vec{V})$

3. Exprimer $\vec{T}$ *dans la base* $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

4. Soit $\vec{M}=(1-2x)\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$

Calculer x pour que les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{T}$ soient orthogonaux.

Exercice 6

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On donne le point $A(-2;3)$ les vecteurs $\vec{U} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1. Démontrer que $(\vec{U};\vec{V})$ est une base.

2. Quelles sont les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{U};\vec{V})$?

3. Un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $(x';y')$ dans le repère $(A, \vec{U}, \vec{V})$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

FONCTIONS VECTORIELLES DE LEIBNIZ

Exercice 1

Ecrire la fonction vectorielle de LEIBNIZ des systèmes suivants :

$S = \{(A,1); (B,3); (C,-2)\}$

$S' = \{(A,m); (B,5); (C,-4)\}$

Exercice 2

On donne $\vec{g}(M) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ *et* $\vec{g}(N) = 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - 5\overrightarrow{NC}$

1. Calculer $\vec{g}(M) - \vec{g}(N)$

2. En déduire la nature de l'application $\vec{g}$

Exercice 3

On donne $\vec{g}(M) = 3\overrightarrow{MA} - (m-2)\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ *et*

$\vec{g}(N) = 3\overrightarrow{NA} - (m-2)\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NC}$ *avec* $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer m *pour que l'application* $\vec{g}$ *soit bijective.*

Exercice 4

1. Définir la fonction vectorielle de Leibniz $\vec{g}$ *associée au système des points suivants :* $S = \{(A,4); (B,-1); (C,-5)\}$.

2. Que peut-on en déduire de cette fonction vectorielle de Leibniz ?

3. Calculer $\vec{g}(A)$, $\vec{g}(B)$ *et* $\vec{g}(C)$.

4. Montrer que quelque soit M et N deux points du plan, on a :

$$\vec{g}(M) - \vec{g}(N) = -2\overrightarrow{MN}$$

Exercice 5

On donne les points $A(1;2)$; $B(2;-3)$; $C(0;1)$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{f}$ *l'application définie par :* $\vec{f}(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

a) Démontrer que $\vec{f}$ *est une application bijective.*
b) Calculer $\vec{f}(A), \vec{f}(B)$ *et* $\vec{f}(C)$.
c) Montrer que : $\vec{f}(A) + \vec{f}(B) + \vec{f}(C) = \vec{0}$

3. Montrer que $\forall$ *N un point du plan on a :*

$$\vec{f}(M) - \vec{f}(N) = 3\overrightarrow{MN}$$

4. Soit $\vec{h}$ *l'application définie par :* $\vec{h}(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Démontrer que $\vec{h}$ *est constante.*

BARYCENTRE

Exercice 1

Soient A et B deux points distincts du plan. On considère le point G tel que : $4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

1. Préciser les coefficients affectés aux points pondérés A et B.

2. Justifier que le barycentre G de ces points pondérés existe.

3. Déterminer et construire le point G.

Exercice 2

Soit ABC un triangle. I est le milieu du segment $[AB]$ *et J est le milieu du segment* $[CI]$.

Soit K un point tel que : $3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.

1. Ecrire K comme barycentre des points B et C muni des coefficients a et b à déterminer.

2. Ecrire J comme barycentre des points A, B et C muni des coefficients α, β *et* γ *à déterminer.*

3. Montrer que les points A, J et K sont alignés.

Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Placer le point H barycentre des points $(A, 1)$ *et* $(B, 2)$

2. Placer le point L barycentre des points $(H, 3)$ *et* $(C, 2)$

3. On définit I barycentre du système $\{(B, 4); (C, 2)\}$ *; J barycentre du système* $\{(A, 3); (C, 2)\}$ *et K barycentre du système* $\{(A, 3); (B, 4)\}$.

On considère G barycentre du système $\{(A, 3); (B, 4); (C, 2)\}$

Démontrer que les droites $(AI), (BJ)$ et (CK) sont concourantes.

Exercice 4

Choisir la bonne réponse :

1. Si $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, alors :

- *a) G est le barycentre des points $(A, 2)$ et $(B, 5)$*
- *b) G est le barycentre des points $(A, -3)$ et $(B, 5)$*

2. Si $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, alors :

- *a) G est le barycentre des points $(A, 1), (B, 1)$ et $(C, 1)$*
- *b) G est le barycentre des points $(A, 2), (B, 3)$ et $(C, 2)$*

Exercice 5

Soient A, B et C trois points non alignés du plan P. On désigne par G le barycentre des points $(A; \alpha^2)$; $(B; 2\alpha)$ et $(C; 4\beta)$.

1. Quelles sont les valeurs de α et β pour que G soit l'isobarycentre des points A, B et C ?

2. On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{4}$

- *a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$*
- *b) Construire le point G.*

Exercice 6

Soit A, B et C trois points non alignés et G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B; -2)$ et $(C, 3)$.

1. a) Construire le point E tel que $E = bar\{(A, 1); (B, -2)\}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{GE}$

c) Démontrer que G est un point de la droite (CE)

2. a) Construire le point F tel que $F = bar\{(B,-2);(C,3)\}$

b) Démontrer que G est un point de la droite (AF)

c) Construire G.

Exercice 7

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on donne les points* $A(-2;2)$*,* $B(3;3)$ *et* $C(-1;-2)$*. On considère le point G barycentre du système* $S = \{(A,1);(B,2);(C,3)\}$*.*

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$*.*

2. Construire le point G.

3. a) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OA}$*,* $\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OC}$*.*

b) En déduire les coordonnées du point G.

4. Montrer qu'en utilisant le théorème des barycentres partiels, on obtient la même construction du point G.

Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. Soit G le point défini par : $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$*.*

On note K le barycentre des points pondérés $(B,-3)$ *et* $(C,4)$*.*

1. Construire le point K.

2. Ecrire le point G comme barycentre des points A et K.

3. En déduire une construction de G.

4. Soit M un point quelconque du plan. On pose :

$$\vec{f}(M) = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

a) *Déterminer* $\vec{f}(K)$ *et* $\vec{f}(G)$
b) *Montrer que* $\vec{f}(M) = 2\overrightarrow{MG}$

Exercice 9

Soit ABC un triangle quelconque.

G_m *est le barycentre du système* $S = \{(A, m); (B, -2); (C, 1)\}$

1. *Faire une figure.*

2. a) *Déterminer les valeurs de m pour lesquels* G_m *existe.*

   b) *Exprimer* $\overrightarrow{AG_m}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

   c) *Déduire une construction des points* G_4 *et* G_{-1}

3. *Soit K un point du plan défini par* $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

   a) *Démontrer que K est le barycentre des points A et B affectés des coefficients à déterminer.*
   b) *En déduire que* G_{-3} *est barycentre du système* $\{(C, 1); (K, -5)\}$

Exercice 10

Soit G_m *le barycentre des points pondérés* $(A;\ 4m^2 - 3)$, $(B; 1 - 2m^2)$ *et* $(C; 3 - m^2)$.

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et I le milieu du segment $[AB]$ *tel que* $AB = 5cm$ *et m un réel.*

1. *Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.*

2. a) *Déterminer les valeurs de m pour lesquelles* G_m *existe.*

   b) *Exprimer* $\overrightarrow{AG_m}$ *en fonction de m,* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$

   c) *Construire le point* G_1

3. Soit M un point du plan, on donne une fonction vectorielle de Leibniz $\vec{g}$ définie par : $\vec{g}(M) = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

- *a) Déterminer* $\vec{g}(A)$, $\vec{g}(B)$ *et* $\vec{g}(C)$.
- *b) Monter que* $\vec{g}(G_1) = \vec{0}$
- *c) Montrer que* $\vec{g}(M) = 2\overrightarrow{MG_1}$
- *d) Pour tout point N du plan, exprimer* $\vec{g}(M) - \vec{g}(N)$ *en fonction de* $\overrightarrow{MN}$

Exercice 11

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB = AC = 4$.

On désigne par G barycentre du système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

1. Faire une figure puis construire le point G.

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) *des points M du plan tels que :* $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 16$

3. Soit I et J les barycentres des systèmes $\{(A, 1); (B, 2)\}$ *et* $\{(A, 2); (B, 1)\}$.

- *a) Construire les points I et J.*
- *b) Déterminer et construire l'ensemble* $(\mathcal{E})$ *des points M du plan tels que :* $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *dans les cas suivants :*

1. A *est le milieu de* $[BC]$
2. B *est le milieu de* $[AC]$
3. C *est le milieu de* $[AB]$

Exercice 2

Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

$a)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $b)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$; $c)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $d)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO}$

Exercice 3

ABCD est un carré de sens direct, de côté a *et de centre O.*

1. *Faire une figure.*
2. *Déterminer en fonction de* a *les produits scalaires :*

$a)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $b)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $c)$ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $d)$ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OA}$

Exercice 4

ABCD est un carré de côté 6 et ADE est un triangle équilatéral. I est le projeté orthogonal de E sur la droite (AD) *, M est le milieu du segment* $[AB]$ *et N celui du segment* $[BC]$.

1. *Faire la figure.*

2. Calculer les produits scalaires suivants :

$a)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $b)\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NE}$; $c)\ \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IB}$; $d)\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}$; $e)\ \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DE}$

Exercice 5

On considère un triangle ABC de côté a. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G étant le centre du triangle ABC.

1. Faire une figure.

2. Calculer les produits scalaires suivants :

$a)\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $b)\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $c)\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $d)\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$; $e)\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BJ}$; $f)\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

Exercice 6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{19}$

1. Développer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

2. En déduire la valeur de $\vec{u}.\vec{v}$

3. Déterminer le cosinus de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$

Exercice 7

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = 7$.

On pose $\vec{\imath} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{\jmath} = -3\vec{u} + \vec{v}$

1. Démontrer que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$

2. Démontrer que $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$

3. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$?

Exercice 8

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs non nuls du plan tels que :*

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{58}$ *et* $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{46}$

1. Développer les expressions suivantes :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ *et* $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

2. Démontrer que :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$

3. Faire l'application numérique.

Exercice 9

1. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs tels que* $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2$ *et* $\vec{u}.\vec{v} = -3$.
Calculer :

a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$
b) $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$

2. On donne $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\|^2 = 9$ *et* $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{11\pi}{6}$

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

3. Montrer que les vecteurs $\vec{u}\left(2\sqrt{3};2\right)$ *et* $\vec{v}\left(\sqrt{3};-3\right)$ *sont orthogonaux.*

Exercice 10

I. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{U};\vec{V}\right)$ *dans chacun des cas suivants :*

1. $\vec{U}(2;0)$ *et* $\vec{V}\left(3;\sqrt{3}\right)$

2. $\vec{U}(1;3)$ *et* $\vec{V}(3;4)$

II. Soit ABC un triangle tel que $BC = 3$ *et* $AC = 6$ *et* $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = 10$.

1. Développer $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)^2$

2. Calculer AB.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit (D) une droite d'équation : $4x-3y+5=0$ et $A(2;-4)$.

Calculer la distance du point A à la droite (D)

Exercice 11

Dans un triangle ABC, on pose $=a,\ AB=c,\ AC=b,\ \widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$ et $\widehat{BCA}=\gamma$

1. Développer $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)^2$

2. En déduire que : $\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\cos\beta}{b}+\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

3. Que devient cette égalité lorsque le triangle ABC est équilatéral ? En déduire α

4. On considère que le triangle ABC est quelconque, soit H le pied de la hauteur issue de A.

a) Exprimer AH en fonction de c et β
b) En déduire que l'aire triangle ABC est $S=\frac{1}{2}ac\sin\beta$
c) En s'inspirant des questions a) et b), calculer S de deux manières.
d) En déduire que : $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2S}$

Exercice 12

Soit ABC un triangle quelconque tel que $BC=4,\ AC=7$ et

$\widehat{BCA}=120°$.

1. Calculer AB.

2. Déterminer les mesures des angles $\widehat{BAC}$ *et* $\widehat{ABC}$

3. Déterminer le périmètre du triangle ABC.

4. En déduire son demi-périmètre

5. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$. *Calculer AI.*

Exercice 13

Soit ABC un triangle tel que : $BC = 2a$ *et* $AB = a$ *avec* $a > 0$. *K est le pied de la hauteur issue de B et H le pied de la hauteur issue de A tel que :* $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Calculer en fonction de a *les produits scalaires suivants :*

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer les mesures en degrés des angles $\hat{A}$; $\hat{B}$ *et* $\hat{C}$ *à* 10^{-2} *près*

3. Soit A'; B' *et* C' *les milieux respectifs des segments* $[BC]$; $[AC]$ *et* $[AB]$. *Démontrer que :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} = 0$

Exercice 14

ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$.

1. Faire la figure.

2. Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

En déduire l'égalité $AB^2 = \overline{BH}.\overline{BC}$

3. Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

En déduire l'égalité $AC^2 = \overline{CH}.\overline{CB}$

4. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HB}$ *et* $\overrightarrow{HC}$.

En déduire que $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$.

5. Démontrer que : $AB^2 \times AC^2 = AH^2 \times BC^2$.

En déduire que : $AB \times AC = AH \times BC$

6. Démontrer que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 6.

1. Faire une figure.

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) *des points M du plan tels que :* $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 72$

3. Que remarque-t-on ?

4. Justifier cette remarque.

Exercice 16

On considère le segment $[AB]$ *tel que* $AB = 12$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) *des points M du plan tels que :* $3\left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2 = 60$

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) *des points M du plan tels que :* $2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2 - 3\left(\overrightarrow{MB}\right)^2 = 0$

3. On donne l'ensemble (Γ_k) *des points M du plan tels que :* $\frac{MA}{MB} = k$

Déterminer et construire (Γ_k) *tels que :* $k = \frac{4}{3}; k = \frac{1}{2}$ *et* $k = \frac{3}{4}$

Exercice 17

A) Soit ABC un triangle et I *le milieu du segment* $[AB]$.

1. *Faire la figure que l'on complètera au fur et à mesure.*

2. *Construire le barycentre G des points pondérés* $(A, 1)$; $(B, -4)$
3. *Démontrer que pour tout point M du plan, on a :*

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$$

B) 1. Enoncer le 1er théorème de la médiane.

2. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ *et* f *l'application telle que :*

$$f(M) = MA^2 + MB^2$$

a) Déduire de la question B) 1. que $f(M) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) *des points* M *du plan tels que* $f(M) = 10$ *avec* $AB = 2$

Exercice 18

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On donne les points $A(-2; 2)$ *et* $B(2; 2)$

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$

2. Démontrer que pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

3. Démontrer que l'ensemble (E) *des points M du plan tels que :*

$MA^2 + MB^2 = 40$ *est un cercle* $(\mathcal{C})$ *de centre I et de rayon 4.*

4. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$

5. Soit a un réel négatif. Comment choisir a *pour que le point* $C(\sqrt{7}; a)$ *soit sur le cercle* $(\mathcal{C})$ *?*

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C})$ *avec l'axe des abscisses.*

Exercice 19

Soient A et B deux points distincts du plan. On appelle ligne de niveau k $(k > 0)$, *de la fonction* $f \mapsto \frac{MA}{MB}$ *l'ensemble des points M du plan tels que* $f(M) = \frac{MA}{MB} = k$

1. Si $k = 1$, *quelle est la ligne de niveau 1 de la fonction* f *?*

2. On suppose que $k \neq 1$. *Montrer que pour tout point M du plan,* $\frac{MA}{MB} = k$ *si et seulement si* $\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

3. On désigne par I et J respectivement les barycentres des systèmes $\{(A, 1); (B, k)\}$ *et* $\{(A, 1); (B, -k)\}$

a) Déterminer les lignes de niveau k *de la fonction.*
b) En déduire la ligne pour $k = 2$

4. On pose : $AB = 3$ *et on désigne par G le barycentre des points* $(A, 1)$ *et* $(B, 2)$.

a) Démontrer que : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6$
b) Déterminer puis construire l'ensemble $(\mathcal{E})$ *des points tels que :*

$$MA^2 + 2MB^2 = 9$$

5. On choisit un repère orthonormal de manière que A soit l'origine du repère et B ait pour coordonnées $(3; 0)$. *Retrouver analytiquement l'ensemble* $(\mathcal{E})$

DROITE DANS LE PLAN

Exercice 1

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *On donne* $A(-3; 4); B(-4; 1)$; $C(-1; 4); D(3; -2)$; $\vec{U}(1; 2)$ *et* $\vec{n}(-2; 3)$

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}_1)$ *passant par A et de vecteur directeur* $\vec{U}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}_2)$ *passant par B et de vecteur normal* $\vec{n}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}_3)$ *passant par C et D.*

II. On considère la droite (Δ) *de représentation paramétrique* $\begin{cases} x = -3 + k \\ y = -2 + 2k \end{cases}$; $k \in \mathbb{R}$ *et* (Δ') *la droite dont une équation cartésienne est :* $x + 2y + 3 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de (Δ)

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ')

Exercice 2

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *On donne* $A(1; 2); B(-3; 4)$ *et* $C(-3; -2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ *passant par C et de vecteur normal* $\vec{n}(2; 1)$

4. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) *de pente 2 qui passe par C.*

Exercice 3

On donne $A(-3;-2)$; $B(3;2)$ *et* $C(4;-3)$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D}_0)$ *passant par A et de vecteur directeur* $\vec{u}(2;5)$.

2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}_0)$

3. On donne $(\mathcal{D}_1) : 2x - y + 1 = 0$

a) Déterminer l'équation de la droite $(\mathcal{D}_2)$ *qui passe par B et perpendiculaire à* $(\mathcal{D}_1)$
b) Déterminer l'équation de la droite $(\mathcal{D}_3)$ *passant par C et parallèle à* $(\mathcal{D}_1)$
c) Donner la position relative de la droite $(\mathcal{D}_2)$ *et la droite* $(\mathcal{D}_3)$
d) Déterminer le point d'intersection de la droite $(\mathcal{D}_2)$ *et* $(\mathcal{D}_3)$

4. Placer les points A ; B et C et les droites $(\mathcal{D}_0)$; $(\mathcal{D}_1)$; $(\mathcal{D}_2)$ *et* $(\mathcal{D}_3)$ *dans le même repère.*

Exercice 4

Dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *On donne les droites* (Δ) *et* (Δ') *d'équations respectives :*

$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *et* $(\Delta') : x - 3y - 5 = 0$

1. Montrer que les droites (Δ) *et* (Δ') *sont perpendiculaires et préciser leur point d'intersection.*

2. Soit (Δ_m) *la famille des droites d'équations :*

$(\Delta_m) : \ (3m+1)x + (m-3)y + 5(m-1) = 0$

Déterminer m de manière que :

a) (Δ_m) *soit parallèle à l'axe* (Ox).
b) (Δ_m) *soit parallèle à l'axe* (Oy)
c) (Δ_m) *passe par l'origine du repère.*
d) (Δ_m) *soit perpendiculaire à la droite* $(\Delta) : 2x - y + 3 = 0$

3. Déterminer m pour que :

a) (Δ_m) soit parallèle à la première bissectrice.
b) (Δ_m) soit parallèle à la deuxième bissectrice.

4. Montrer que toutes les droites passent par un point fixe I que l'on déterminera les coordonnées.

5. Déterminer l'équation cartésienne puis une représentation paramétrique de la droite (Δ_0)

6. Construire (Δ_0), (Δ) et I dans ce repère.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère un triangle des sommets $A(-3;-2)$; $B(-3;6)$ et $C(4;-9)$ et on note H le pied de la hauteur issue de A.

1. Construire ce triangle.

2. Trouver une équation cartésienne de la droite passant par A et C.

3. Trouver une équation cartésienne de la droite (AH).

4. Déterminer les coordonnées du point H.

5. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

a) Déterminer les coordonnées de I et placer I sur la figure.
b) Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[BC]$.

EQUATION DU CERCLE

Exercice 1

1. Déterminer la forme générale des cercles suivants :

a) $(\mathcal{C}_1)$ *cercle de centre* $A(2;-1)$ *et de rayon* $r = 3$
b) $(\mathcal{C}_2)$ *cercle de centre* $B(2;0)$ *et de rayon* $r = 2$

2. Soit $(\mathcal{C})$ *le cercle d'équation :* $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0$.

Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$.

3. Etudier les ensembles des points M du plan tels que :

$(\mathcal{C}_1)$: $x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0$

$(\mathcal{C}_2)$: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$

$(\mathcal{C}_3)$: $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

Exercice 2

1. Discuter suivant les valeurs de m *la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble* $(\mathcal{C}_m)$ *des points M du plan tels que :*

$x^2 + y^2 - 2(m-1)x + 2(m+3)y + 10 = 0$

2. On donne $A(0;4)$ *et* $B(1;5)$.

Déterminer et construire le cercle de diamètre $[AB]$

3. Donner une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ *dont une représentation paramétrique est :* $\begin{cases} x = -2 + 4cos\alpha \\ y = 3 + 4sin\alpha \end{cases}$

4. Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ *de centre* $A(1;2)$ *et de rayon* $r = 3$.

Exercice 3

I. On désigne par $(\mathcal{C})$ *l'ensemble des points M du plan tels que* $x^2 + y^2 + 6x + 4y + m = 0$.

1. Déterminer le réel m *pour que* $H(0; -2)$ *appartienne à* $(\mathcal{C})$.

2. On donne $m = 4$

a) Déterminer l'équation réduite de $(\mathcal{C})$.
b) En déduire le centre et le rayon.
c) Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$

3. Donner l'équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ *dans le cas où* $m = 1$.

II. 1. Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ *d'équation*

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ *à la droite* (Δ) *d'équation* $x - y + 1 = 0$.

2. Déterminer si possible les coordonnées de leur(s) point(s) commun(s) ou de contact(s).

Exercice 4

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$*, on donne les points* $A(1; -4)$, $B(6; 1)$, $C(4; -3)$; $D(2; 4)$ *et la droite* (Δ) *d'équation :* $3x + 4y - 12 = 0$.

1. Placer les points A, B ; D et la droite (Δ) *dans le repère.*

2. Calculer la distance du point D par rapport à la droite (Δ).

3. Former l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ *qui admet pour centre D et qui est tangente à la droite* (Δ).

4. Calculer les coordonnées du point de contact I.

5. Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C}')$ *circonscrit au triangle ABC.*

6. Construire $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$ *dans le repère.*

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. *Unité 1 cm.*
On donne :

$(\mathcal{C}):\ x^2+y^2-2x+6y=0$; $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *et*

$(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=5+3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

1. Le point $A(1;1)$ *appartient-il à* $(\mathcal{C})$ *?*

2. Donner les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{D})$

3. Donner les équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$. *Les droites* $(\mathcal{D})$ *et* $(\mathcal{D}')$ *sont-elles sécantes ?*

4. Donner l'équation réduire de $(\mathcal{C})$

5. Tracer $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{D})$ *dans le même repère.*

Exercice 6

Le plan $\mathcal{P}$ *étant rapporté à un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, *on donne les droites* $(\mathcal{D})$ *et* (Δ) *d'équations respectives*

$\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ *et* $\begin{cases} x=1+3t \\ y=4-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

1. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ *et* (Δ) *se rencontrent en un point* $I(x_0;y_0)$ *dont on déterminera les coordonnées.*

2. En déduire l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ *de centre I et de rayon 5 et donner sa représentation paramétrique.*

3. Trouver les coordonnées des points de rencontre des axes des abscisses et des ordonnées avec le cercle $(\mathcal{C})$

4. Construire les droites $(\mathcal{D})$ *et* (Δ) *puis le cercle* $(\mathcal{C})$ *dans le même repère avec pour unité graphique 1 cm.*

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on considère l'ensemble* $(\mathcal{C}_1)$ *des points* $M(x;y)$ *tels que :*

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$

1. Montrer que $(\mathcal{C}_1)$ *est un cercle dont on précisera le centre A et le rayon r.*

2. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{D}_1)$ *à* $(\mathcal{C}_1)$ *en* $B(0;-2)$

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D}_2)$ *passant par* $C(-4;0)$ *et perpendiculaire à* $(\mathcal{D}_1)$*.*

4. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_2)$ *de diamètre* $[BC]$

5. Construire le cercle $(\mathcal{C}_1)$ *et les droites* $(\mathcal{D}_1)$ *et* $(\mathcal{D}_2)$ *dans le repère.*

Exercice 8

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, 1cm.*

On considère les points A, B et C de coordonnées $A(1;0)$ *;* $B(0;1)$ *et* $C(3;0)$*.*

1. Placer les points A, B et C.

2. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

3. Soit $(\mathcal{C})$ *le cercle circonscrit au triangle ABC.*

- *a) Déterminer l'équation cartésienne de* $(\mathcal{C})$
- *b) En déduire son centre et son rayon.*
- *c) Déterminer les équations des tangentes* (T_1) *;* (T_2) *à* $(\mathcal{C})$ *en B et en C.*
- *d) Tracer* (T_1) *et* (T_2)

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*.*

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ *tels que :*

$(\Gamma) : \ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

2. On donne $A(-1; 1)$ *et* $B(4; 3)$*.*

Déterminer et construire l'ensemble des points M tes que :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -1$

3. On considère l'ensemble (Γ) *des points* $M(x, y)$ *du plan tels que :*

$(\Gamma): x^2 - 4x + y^2 - 2y - m^2 + 4m + 1 = 0.$

a) *Pour quelles valeurs de m* (Γ) *est un cercle de centre* $\Omega(2; 1)$ *de rayon 2.*
b) *On suppose que m* $= 4$*. Déduire la construction de l'ensemble* (Γ)*.*

4. Discuter suivant m la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma_m): x^2 + y^2 + mx - (m + 1)y + 2 = 0.$

Exercice 10

m étant un paramètre réel, on considère la courbe $(\mathcal{C}_m)$ *d'équation :*

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4mx + y - 4m = 0.$

1. Mettre $(\mathcal{C}_m)$ *sous la forme :* $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

2. Caractériser les ensembles $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_{-1})$ *en précisant la nature.*

3. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ *et* (Δ)*, où* (Δ) *est une droite d'équation* $y = \frac{1}{2}x - 5$*.*

4. Pour quelles valeurs de m, $(\mathcal{C}_m)$ *et* (Δ) *sont sécantes ?*

5. Pour quelle valeurs de m la droite (Δ) *est-elle tangente à* $(\mathcal{C}_m)$ *?*

6. Démontrer que les courbes $(\mathcal{C}_m)$ *sont des cercles dont on déterminera le centre et le rayon.*

ANGLES ORIENTES

Exercice 1

Le plan étant orienté.

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes :

a) *Le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.*
b) *Le sens indirect est le sens des aiguilles d'une montre.*
c) *Sur un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α radian est $L = \alpha r$*
d) *Le plan dans lequel on a choisi un sens direct est appelé plan orienté.*
e) *Lorsque le plan est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, le sens est dit indirect.*
f) *Lorsque le plan est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le sens est dit direct.*

Exercice 2

1. *Qu'appelle-t-on angle orienté ?*

2. *Qu'appelle-t-on mesure principale d'un angle orienté ?*

3. *Répondre par Vrai ou faux aux affirmations suivantes :* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

   a) $\alpha = n\pi$, *alors la mesure principale de* α *est nulle si* n *est pair.*
   b) $\alpha = n\pi$, *alors la mesure principale de* α *est* π *si* n *est impair*

4. *Déterminer la mesure principale des angles suivants :*

$\alpha = 2016\pi$; $\beta = 2017\pi$; $\gamma = \dfrac{5\pi}{2}$; $\theta = \dfrac{-7\pi}{4}$; $\delta = \dfrac{-85\pi}{4}$; $\varphi = \dfrac{17\pi}{3}$;

$\lambda = -17\pi$.

5. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	180		90	
y		3π		$\frac{\pi}{4}$

6. Convertir 200 grade en radian et 10000 grade en degré.

Exercice 3

ABC est un triangle de sens direct tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

1. Faire la figure.

2. Déterminer une mesure principale des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}\right), \left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right), \left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}}\right)$.

Exercice 4

Soient A, B, C et D quatre points du plan formant un carré de centre O. On désigne par I et J les milieux des segments $[AB]$ *et* $[BC]$*. On donne* $AB = 8cm$.

1. Construire ce carré en plaçant les points A, B, C et D dans le sens direct, puis placer les points I et J.

2. Déterminer la mesure des angles suivants :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IA})$

3. a) Donner la nature du quadrilatère OIBJ.

b) Le quadrilatère OIBJ est-il dans le sens direct ?

4. Soit $(\mathcal{C})$ *un cercle circonscrit au carré ABCD.*

a) Quelle est le centre de $(\mathcal{C})$ *?*
b) En déduire son rayon R.

5. Construire le cercle (C') circonscrit au quadrilatère OIBJ puis déduire son rayon r.

Exercice 5

Soit A, B et C trois points du plan formant un triangle rectangle et isocèle en B tel que $AB = BC = 8$. On désigne par O, G et H les milieux respectifs des segments $[AC], [AB]$ et $[BC]$.

1. Construire ce triangle en plaçant les points A, B et C dans le sens direct.

2. Placer les points O, G et H dans ce triangle.

3. Construire le point D tel que $AD = 8$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}$

4. a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

b) Que représente le point O pour le quadrilatère ABCD ?

c) Le quadrilatère ABCD est-il dans le sens direct ?

5. Déterminer la mesure des angles suivants :

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$; $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{GH};\overrightarrow{GA})$ *et* $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OD})$

TRIGONOMETRIE

Exercice 1

On donne $cos\alpha = \frac{1}{2}$

1. Calculer $sin\alpha$ *et* $tan\alpha$

2. En déduire la valeur de α *en degré et en radian.*

3. Calculer les lignes trigonométriques des angles suivants :

$\alpha = \frac{\pi}{12}$ *et* $\beta = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 2

Soit α *un réel de l'intervalle* $]0;\pi[$. *On donne* $cos\alpha = -\frac{1}{2}$

1. a) Calculer $sin\alpha$

b) En déduire la valeur de : $sin(-\alpha)\,; cos(-\alpha)$ *et* $tan(\alpha)$

2. Placer, sur un cercle trigonométrique, les points M et N repérés respectivement par les réels $x_M = \frac{3\pi}{4}$ *et* $x_N = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 3

1. Calculer les expressions suivantes :

$A = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + cos(\pi) + sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$B = cos(30°) + cos(60°) + sin(-60°)$

$C = cos(50gd) - cos(150gd) - sin(250gd)$

2. Soient A et B deux nombres définis par :

$A = cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + cos\left(\frac{11\pi}{8}\right)$ *et*

$B = cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$

Montrer que : $A = 0$ *et* $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *sachant que* $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4

1. Déterminer, pour tout réel $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ *et* $sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ *en fonction de* $cosx$ *et* $sinx$

2. a) Décomposer $\frac{7\pi}{4}$ *et* $-\frac{35\pi}{3}$ *en une somme ou différence de deux angles particuliers.*

b) Déduire de cette décomposition, la valeur exacte de $sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ *et* $cos\left(-\frac{35\pi}{3}\right)$

Exercice 5

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (cosx + sinx)^2 + (cosx - sinx)^2$

$B = (acosx + bsinx)^2 + (bcosx - asinx)^2$ *avec* $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$C = sin^2x\left(\frac{1}{1-cosx} + \frac{1}{1+cosx}\right)$ *avec* $cos \neq \pm 1$

Exercice 6

Partie A

1. Sachant que $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ $sinx > 0$ *et* $cosx < 0$, *on donne* $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculer $cosx$ *et* $tanx$

2. Simplifier les expressions suivantes

a) $X = sin(x+\pi) + sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) + sin(x+\pi)$

b) $Y = cos\left(\frac{703\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{551\pi}{2}\right)$

Partie B

1. Démontrer que pour tout x réel :

a) $(cosx + sinx)^2 + (cosx - sinx)^2 = 2$
b) $(cosx)^4 - (sinx)^4 = 1 - 2(cosx)^2$

Exercice 7

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : $BC = a$ et $mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2\pi}{5}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D.

1. Faire une figure.

2. Démontrer que : $AD = BD = a$.

3. Démontrer que :

a) $AB = 2acos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
b) $CD = 2acos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

4. En déduire que : $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

5. On appelle H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

a) Calculer BH en fonction de a de deux manières différentes.
b) En déduire que : $cos\left(\frac{\pi}{5}\right).cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$

6. En remarquant que : $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. Calculer $cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

7. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 8

Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre $BC = 2$, *A est un point de ce demi-cercle tel que* $\widehat{COA}$ *soit aigu. On note H le projeté orthogonal de A sur* (BC) *et I celui de O sur* (AB). α *est la mesure principale de l'angle* $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1. Faire une figure.

2. a) Démontrer que : I est le milieu de $[AB]$.

b) Démontrer que : $OH = \cos 2\alpha$.

3. Exprimer AB en fonction de $\cos\alpha$

4. Démontrer que :

a) $BH = 2\cos^2\alpha$

b) $OH = 2\cos^2\alpha - 1$

5. En déduire que :

a) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

b) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

6. Application : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

APPLICATIONS PONCTUELLES DU PLAN

Exercice 1

I. ABCD est un parallélogramme. F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Démontrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On donne $A(2;3)$, $B(1;-1)$ et $C(1;-2)$

1. Déterminer l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

2. Déterminer T et T' telles que $T = t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ et $T' = t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

3. Comparer T et T'

Exercice 2

I. ABC est un triangle isocèle. I est le milieu du segment $[BC]$.

Placer le point D image de A par la symétrie de centre I puis déduire la nature de la figure obtenue.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On donne les points $A(-1;2)$, $B(0;2)$ et $I(2;3)$

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie centrale de centre A

2. Déterminer les coordonnées des points C et D images respectives des points B et I par la symétrie centrale de centre A.

Exercice 3

1. ABCD est un carré de centre O.

Construire l'image de ce carré par le quart de tour direct de centre C.

2. A et B étant donnés.

Construire le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

Exercice 4

ABCD est un carré de centre O. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. Faire une figure.

2. Démontrer qu'il existe une rotation transformant B en A et L en K.

3. Préciser son centre.

4. Comment appelle-t-on cette rotation ?

5. Déterminer les images de tous les points de cette figure par le quart de tour indirect de centre A.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne $A(-1; 2)$ un point du plan.

1. Ecrire l'expression analytique de l'homothétie de centre A et de rapport -3.

2. On considère l'application h du plan dans lui-même, qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(-5x; -5y)$. Démontrer que h est une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

NOS CENTRES D'ENCADREMENT

Site 1 : Quartier **Vindoulou**, arrêt église catholique en allant vers le secteur Douanier.

Site 2 : Quartier **Makayabou 418**, vers le terminus

Suivez nous sur :

Facebook : Bureau du Centre Académique –BCA

Whatsapp : +242 06 810 90 90 / +242 06 71332 41

Contactez-nous aux numéros indiqués à l'entête de chaque page pour plus d'informations.