BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE

Fascicule de Mathématiques

Terminale D

NKODIA-LOEMBA

Edition 2023-2024

Exercices types :

- Composition du premier trimestre
- Composition du deuxième Trimestre
- Bac test
- Bac blanc

Avant-propos

Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classe de Terminale D.

Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de cette classe.

L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue des examens d'état. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez des exercices stimulants issus des sujets proposés par les inspections des différentes zones du Congo-Brazzaville qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux examens d'état. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.

L'auteur

PARTIE A
Analyse

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on dressera un tableau de variation de g)
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2;3[$
3. Déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan : unité graphique 1cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f
3. Exprimer la dérivée de f en fonction de g. En déduire le signe de f'.
4. Dresser le tableau de variations de f
5. Etudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$
6. De l'inégalité $2 < \alpha < 3$, donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près, puis tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes dans le même repère.

Exercice 2

A/ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Dresser le tableau de variation de g

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$

3) En déduire le signe de g.

B/ On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

1) Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Déduire le signe de f' sur $]-1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f

3) Etudier les branches infinies de f

C/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition E_h de h.

2) Peut-on calculer $h(2)$? Pourquoi ?

3) h est-elle continue en $x_0 = 2$?

4) Calculer $lim_{x\to 2}\, h(x)$; puis déduire la fonction g prolongement par continuité de h en $x_0 = 2$.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} + 2$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
En déduire que la courbe de f a deux asymptotes dont on précisera les équations.
2) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f' de f.
b) Dresser le tableau de variation de f et en déduire le signe de f
3) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.
b) En déduire que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en un point unique $\in \mathbb{R}$.

Exercice 4
1. Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis
2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x+2}$
a) Préciser l'ensemble de définition E_f de f
b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que quel que soit $x \in [2;3]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
d) En déduire que quel que soit $x \in [2\,;3]$; $|f(x)-2| \leq \frac{1}{4}|x-2|$

Exercice 5
Soient $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ et $h(x) = x^3 g(x)$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
On suppose que $g(x) \geq 2$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
1) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction h.
2) Calculer $f'(x)$
3) Montrer que, pour tout réel $x \in [0{,}5;1]$: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
4) Utiliser l'inégalité des accroissements finis, pour déduire un encadrement de f sur $[0{,}5;1]$ par deux fonctions affines et interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 6
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la fonction numérique f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$
1. Montrer que f est continue et dérivable sur $I =]-1;+\infty[$
2. Montrer que $\forall\, x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ on a : $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq 1 + \frac{1}{2}$ où f' est la dérivée de f
3. a) Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis
b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0;x]$ montrer que $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$
c) Déterminer un encadrement de $\sqrt{1{,}1}$ d'amplitude 10^{-2}

Exercice 7
Vrai ou Faux ?
Cet exercice comporte six affirmations. Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F), en justifiant la réponse.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = sinx - \frac{2}{3}sin^3x$

1. La fonction f est impaire
2. La fonction f est périodique de période 2π
3. On peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0;\pi]$
4. La courbe $(\mathcal{C})$ de f est symétrique par rapport à la droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Il est possible de restreindre l'étude de f à l'intervalle de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
6. La dérivée f' de f est définie par : $f'(x) = (cosx)(cos2x)$

Exercice 8

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

Et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 1cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter ce résultat.
3. Etudier les variations puis dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$ puis étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
5. Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$

Exercice 9

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité 1 cm).

1) Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $x^2 - 6x + 5$ et écrire l'expression de $g(x)$ sans le symbole « valeur absolue ».
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g, en particulier aux points d'abscisse 1 et 5.
3) Etudier les variations de g.
4) Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de (C).
5) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = x + 3$ sont asymptotes à la courbe.
6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec les deux asymptotes. A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
7) Tracer (C).

Exercice 10

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$$

Et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 4cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Ecrire sur les intervalles convenables de $\mathbb{R}$, $f(x)$ sans valeur absolue.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$. Interpréter ce résultat puis en déduire les équations cartésiennes des demi-tangentes s'il y a lieu au point d'abscisse $x_0 = 1$.
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$
6. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ en $x_1 = -1$.
7. Construire les demi-tangentes, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$.

Exercice 11

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + x\sqrt{2 - x} \quad si\ x \leq 2 \\ f(x) = x - 3 + \dfrac{6}{x + 2} \quad si\ x > 2 \end{cases}$$

Et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 2$ et déterminer les équations des demi-tangentes.
3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4) Montrer que pour $x \leq 2$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [-1; 0]$.
5) Etudier les branches infinies de (C).
6) Construire (C).
7) Pour $x \leq 2$, on pose $g(x) = -f(x)$. Sans étudier la fonction g dresser le tableau de variation de g puis construire dans le même repère que (C) la courbe (C') représentative de g.

Exercice 12

On donne les fonctions f et g telles que : $f(x) = x^2 + x\sqrt{1 + x^2}$; $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}$.

1) Calculer $lim_{x \to +\infty}[f(x) - 2x^2]$. En déduire que les courbes (C_f) et (C_g) sont asymptotes.
2) Etudier les variations de f.
3) Déterminer l'équation cartésienne de la tangent (T) à (C_f) au point O origine du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4) Tracer la courbe (C_f), ainsi que cette tangente dans le même repère.
5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
6) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

7) Calculer $f^{-1}(1+\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(1+\sqrt{2})$.
8) Expliciter $f^{-1}(x)$, puis vérifier la valeur de $(f^{-1})'(1+\sqrt{2})$.
9) Tracer (C') courbe de f^{-1} dans le même repère que (C_f).

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-1}{x+2}, & x < 1 \\ x + \sqrt{x^2-1}, & x \geq 1 \end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$
3) a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$
   b) Interpréter les résultats obtenus.
4) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5) Pour $x < 1$
   a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
   c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ)
   d) Que représente la droite $x = -2$?

Exercice 14

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, (C) désigne la courbe représentative de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 1, & x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Unité graphique 2 cm.

1) On admet que f est continue en $x_0 = 0$
   a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
   b) En déduire la nature du point A de (C) d'abscisse x_0
2) a) Déterminer la dérivée f' de f.
   b) Dresser le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3) On donne $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
4) Déterminer le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des ordonnées.
5) La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D): $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$. Tracer soigneusement la courbe (C).

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) On note h^{-1} la bijection réciproque de h sur I. Déterminer l'expression analytique de h^{-1}

c) Tracer soigneusement la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).

Exercice 15

Partie A

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $3\sqrt{x^2-4}+4x<0$

b) $3\sqrt{x^2-4}+4x>0$

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réel x définie par :

$$f(x)=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\sqrt{|4-x^2|}.$$

On considère par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f

2) Etudier la continuité de f sur l'ensemble de définition.

3) Etudier la dérivabilité de f, en particulier en $x_0=-2$ et $x_1=2$. Que dire alors de la courbe (C_f) en chacun de ces points ?

4) Etudier les variations de f

5) Montrer que (C_f) admet deux asymptotes obliques dont on déterminer les équations. Déterminer la position de (C_f) par rapport à ces asymptotes.

6) Tracer (C_f).

7) Soit g la fonction telle que $\forall x \in E_f, g(x)=-f(x)$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Construire la courbe représentative de g dans le même repère que la courbe de f

Exercice 16

Soit f une fonction dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(\mathbb{R})=]0;+\infty[\\ f(0)=1 \\ f'(0)=-2 \end{cases}$$

1) Déterminer $lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) f admet-elle une bijection réciproque notée f^{-1} ? (On justifiera la réponse).

3) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

4) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{2}{f^{-1}(x)}$

a) Préciser E_g, l'ensemble de définition de g.

b) Exprimer $g'(x)$ en fonction $f^{-1}(x)$. En déduire le sens de variation de g.

Exercice 17

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x^2 + x^2 - 1$.

1) Etudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On donne $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+2}$ (a et b sont des réels).

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifie :

- Sa courbe représentative passe par le point $A(-1; -1)$.
- Sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

2) Montrer que le point $I(-2; -3)$ est un centre de symétrie pour la courbe de f.

Partie C

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -1 - 4x^2 + x^4$.

1) Etudier les variations de f

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0; \sqrt{2}]$

   a) Montrer que g admet une bijection réciproque noté g^{-1} dont on précisera les variations.

   b) Construire (C_g) *et* $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

3) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

4) Expliciter $g^{-1}(x)$ puis vérifier le calcul de 3).

Exercice 18

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x+1}{x+1}, & si\ \ x \leq 0 \\ f(x) = cos\dfrac{\pi}{2}x, & si\ \ 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté E_f.
2. On admet que la fonction f est continue en $x_0 = 0$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   b) Calculer les limites de f aux bornes de E_f
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = -2$.
6. a) Montrer que pour tout $x \in]-1; 0[, -2 < f'(x) < 0$
   b) Démonter en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis dans l'intervalle $[x; 0]$ que : $\forall x \in]-1; 0[,\ 1 < f(x) < -2x + 1$. Conclure.
7. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (D_1): $y = 1$ et (D_2): $y = -2x + 1$

Exercice 19

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} \ \ si\ x \in]0;+\infty[\\ f(x) = cos\pi x \quad si\ \ x \in [-2;0] \end{cases}$$

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. Préciser l'ensemble de définition E de f
2. Etudier la continuité de f sur E.
3. Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 0.
4. Déterminer la dérivée f' de f puis préciser le signe de $f'(x)$
5. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 20

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} h(x) = -|x| - \sqrt{m+x^2}, \qquad si\ x \in \mathbb{R}_-^* \\ h(x) = -cos\pi x, \qquad si\ 0 \leq x \leq 4 \text{ où } m \in \mathbb{R}_+ \\ h(x) = \dfrac{1}{1-x} + \sqrt{|x|}, \qquad si\ x \geq 4 \end{cases}$$

1) Quel est l'ensemble de définition de h ?
2) Donner les différentes expressions de h sans valeur absolue.
3) a) Déterminer le réel m pour que h soit continue en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de h en 0 et 4 puis en déduire l'ensemble de dérivabilité de h.

Exercice 21

Soit f_m la fonction numérique à variable réelle x, définie par :

$f_m(x) = \frac{x^2+m+1}{x^2+1}$ (m un paramètre réel non nul)

1) Prouver que f est définie pour tout x réel.
2) Calculer la dérivée première f_m' de la fonction f_m.
3) Discuter selon les différentes valeurs du paramètre m, le signe de la dérivée f_m' puis déduire les variations de la fonction numérique f_m (On dressera le tableau de variations pour chaque cas).

Exercice 22

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2;3]$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{x^2+1} \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{2x^3+3}{1-x^2} \; si \; x > 0 \end{cases}$$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f.

2) On admet que f est continue en $x_0 = 0$, étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

3) a) Montrer que $\forall\, x \in \,]0;1[\, \cup\,]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-2xg(x)}{(1-x^2)^2}$.

b) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation

c) Montrer que $f(\alpha) = -3\alpha$ puis donner un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Montrer que les droites d'équations respectives $(D): y = -x + 2$ et $(\Delta): y = -2x$ sont asymptotes à (C) aux voisinages respectifs de $-\infty \; et + \infty$.

5) Construire (D); $(\Delta) \; et \; (C)$.

Exercice 23

Partie A

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x\sqrt{x}$ sur $[2;4]$

1) Montrer que pour tout $x \in [2;4]$, $\frac{3}{2}\sqrt{2} \leq g'(x) \leq 3$.

2) En déduire que pour tout $x \in [2;4]$:

$$\frac{3}{2}x\sqrt{2} - \sqrt{2} \leq g'(x) \leq 3x + 2\sqrt{2} - 6$$

Partie B

f est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1. Etudier les variations de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1;2[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
4. Notons g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
   a) Monter que pour tout x dans $[1;+\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
   b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis à g sur l'intervalle $[\alpha; x]$ déduire que pour tout $x \in [1;+\infty[$

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} \leq |x - \alpha|$$

Exercice 24

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \,]0{,}7;0{,}8[$
3. En déduire le signe de g dans $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \ \ si \ \ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2} \ \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. On admet que f est continue en $x_0 = 0$, étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3. Montrer que pour tout $x \geq 0, f'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in \left]1; 2\right[$
   b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{\alpha}$
   c) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

<u>Exercice 25</u>

On considère la fonction f de la variable réel x définie par : $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x^2+2}$

Et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm.

1. Préciser l'ensemble de définition E_f.
2. Ecrire sur les intervalles convenables de $\mathbb{R}, f(x)$ sans barre de valeur absolue.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$
En déduire une interprétation géométrique.
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote, puis étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ
6. Construire Δ, $(\mathcal{C})$ ainsi que ses demi-tangentes.
7. On désigne par g la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $g(x) = -f(x)$
   a) Par quelle transformation du plan, peut-on déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$?
   b) Sans étudier la fonction g, dresser le tableau de variation de g
   c) Construire dans le même repère que $(\mathcal{C})$ la courbe $(\mathcal{C}_g)$

<u>Exercice 26</u>

On considère les fonctions f et u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{2-2x^2}, \quad si\ x \leq 2 \\ f(x) = -2 + \sqrt{x-2}, \quad si\ x > 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad u(x) = x^3 - 3x + 1$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1. a) Etudier les variations de la fonction u sur $\left]-\infty; 2\right[$
   b) Justifier que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\left]-\infty; 2\right[$, une solution unique α telle que $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$.
   c) Déduisez-en le signe de $u(x)$ sur $\left]-\infty; 2\right[$, suivant les valeurs de x.
2. Justifier que l'ensemble de définition D de f est : $D = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$
3. Calculer les limites de f aux bornes de D.
4. Etudier la continuité de f en 2.

5. Justifier que f est continue sur D.
6. Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que pour tout x élément de $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; 2]$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$
7. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.
8. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.
9. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; 2]$.
10. Justifier que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}$

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+2} \end{cases}$

1) a) Démontrer que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n}$ est suite arithmétique.

b) Préciser sa raison et son premier terme.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

2) Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n.

3) Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{U_n+1}; n \geq 1\ et\ U_1 = 3$.

1) Calculer U_2 et U_3.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est majorée par 1.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.

3) On pose $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (V_n).

Exercice 3

Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :

$U_n = \frac{n}{n+1}$ et $V_n = \frac{n+2}{n+1}$

1) Etudier la monotonie des suites (U_n) et (V_n).

2) Vérifier que $V_n - U_n > 0$

3) Calculer la limite des suites (U_n) et (V_n).

4) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 4

On donne la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite réelle définie par : $V_n = U_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le réel a pour que (V_n) soit une suite géométrique.

2) On pose $a = -6$, déterminer le premier terme et la raison de la suite (V_n).

3) Ecrire V_n et U_n en fonction de n.
4) Calculer $S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{50}$.

Exercice 5

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$.

1) Prouver que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $V_n = \frac{1}{U_n}$ est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_n = \frac{3U_{n-1}}{2U_{n-1}+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer U_1 et U_2.
2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n.
3) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ et $S'_n = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{U_k}$. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit la $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$.

1) Calculer U_0 , U_1 et U_2.
2) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3) Calculer $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9$ en fonction de a.

Exercice 8

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n$; $n \in \mathbb{N}$

On considère les suites (V_n) et (W_n) par : $V_n = U_{n+1} - U_n$ et $W_n = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer V_0 et W_0
2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Démontrer que (W_n) est une suite constante.
4. Montrer que : $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
5. a) Calculer la limite de (V_n)

b) En déduire la convergence de la suite (U_n)

Exercice 9

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$ et $V_{n+1} = lnU_n$.

1) a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer son terme général en fonction de n.

2) a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison r.

b) Exprimer son terme général en fonction de n.

3) a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$.

b) En déduire en fonction de n, le produit $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} U_k$.

Exercice 10

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_1 = 6 \\ 5V_{n+1} = V_n + 16 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) Démontrer que (V_n) est minorée par 4 et décroissante.

2) En déduire que (V_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

3) Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $W_n = V_n - a$, a étant un nombre réel donné. Déterminer le nombre a pour que la suite (W_n) de terme général W_n soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 11

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})U_n + 3 \end{cases}$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $V_n = U_n - i\sqrt{3}$

1. Donner une expression de V_{n+1} en fonction de V_n, déduire la nature de la suite (V_n).
2. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n
3. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

Exercice 12

La suite de terme U_n est définie par $U_1 = 2$; $U_2 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\,;1\,;2\}$:

$$U_n = \frac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3}.$$

La suite de terme général W_n est définie par $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$: $W_n = U_n - U_{n-1}$.

1) Calculer W_n en fonction de W_{n-1}.

2) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on calculera le premier terme W_2. Exprimer W_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

4) Calculer $S_n$en fonction de $U_n - U_1$.
5) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
6) Quelle est la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 13

1- Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$.

2- Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.
b) Exprimer (v_n) et (u_n) en fonction de n.
c) Calculer la limite de la suite u_n.

3- On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{3}{u_n}$ et on pose :

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $w_n = 1 - v_n$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = (n+1) + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$
c) Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14

On considère la suite complexe (U_n) de premier terme $U_0 = -3$ et définie par la relation : $2U_{n+1} = iU_n - 2 + i, n \in \mathbb{N}$.

1) Soit la suite (V_n) de terme général V_n tel que : $V_n = U_n + 1$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Donner en fonction de n, le module et l'argument de (V_n).
   Déterminer n pour que (V_n) soit réel.

2) Soient k_n et θ_n le module et l'argument de (V_n). Montrer que k_n et θ_n sont les termes généraux d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes.

Exercice 15

Soit S l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation de récurrence : pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$; $U_{n+2} = \frac{5}{6}U_{n+1} - \frac{1}{6}U_n$; sachant que $U_0 = -1$ et $U_1 = 2$.

1. Trouver deux suites géométriques $(\alpha^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ appartenant à S.

2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ tel que : $U_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ où $(\lambda; \beta)\epsilon\mathbb{R}^2$ appartient à S

3. Soit $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ un élément de S.

Calculer U_n en fonction de n, puis $lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 16

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites définies respectivement par $u_0 = 9$;
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$

1) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Montrer que pour tout $n \geq 0, v_n > 0$.

c) Calculer en fonction de $n, S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer les limites de (S_n) et (S'_n).

2) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = lnv_n$.

a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer en fonction de n, $S''_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$ puis déterminer la limite de (S''_n).

3) Calculer en fonction de n, $P_n = \prod_{k=0}^{n} v_k$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = -(lnx)^2 + 4(lnx) - 3.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \frac{4-2lnx}{x}$

2. En déduire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 4x + 3 = 0$ et déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

b) En déduire dans $\mathbb{R}$, une résolution de l'inéquation $f(x) > 0$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = 2x^2 - 1 - lnx$. $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
5. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -f(x)$.
   a) Sans étudier les variations de g, dresser son tableau de variation.
   b) Déduire une construction de la courbe $(\mathcal{C}')$
   c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de g.

Exercice 3

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + xlnx^2 \ \ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3. Déterminer trois points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses.
4. Vérifier que f est impaire.
5. Etudier les variations de f
6. Tracer sa courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 4

Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par : $g(x) = 1 + x - ln(-x)$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en 0.
2. Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
3. Calculer $g(-1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0[$.
4. On considère la fonction f définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) ln(-x)$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Préciser l'ensemble de définition E_f de f.
   b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en 0.
   c) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   d) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
   e) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$, puis tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm. On donne la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - x + lnx$.

On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $lim_{x \to 0} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a) Justifier que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = x(-1 + \frac{3}{x} + \frac{lnx}{x})$
   b) Calculer $lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Vérifier que pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{-x+1}{x}$.
4. a) Justifier que $f(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et $f(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]4,5; 4,6[$.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -x + 1 - 2lnx$.

1. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$
2. Etudier les variations de f.
3. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$

1. Donner l'ensemble de définition de g
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}$
4. Dresser le tableau de variation de g.
5. Construire la courbe représentative de g. Unité graphique : 2 cm.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xlnx}{x+1}, & si\ x > 0 \\ f(0) = 0, & si\ x = 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + lnx$

1. Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique $\alpha \in]0,1; 0,4[$.
3. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
3. a) Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha$
   b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.
   c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en $x_0 = 1$.
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = 0,3$.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1}, puis dresser son tableau de variation.
   b) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1}.

Exercice 8

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = x^2 - 2 + lnx$$

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1,30; 1,35]$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie B

On considère la fonction numérique de la variable x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x + \frac{1-lnx}{x}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer $lim_{x\to0^+} f(x)$ et $lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   c) Etablir le tableau de variation de f

2. a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ puis étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$

   b) Déterminer le point d'intersection B de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite $(\mathcal{D})$, puis déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B.

3. Sans étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$. Dresser le tableau de variation de h telle que $h(x) = -f(x)$

4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de h.

On donne : $\alpha = 1{,}33$ et $f(\alpha) = 1{,}87$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. On pose $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$

   a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

3. a) Montrer que pour tout $x > 0, f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f

5. a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$, d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

   b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote $(\mathcal{D})$.

   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$.

Exercice 10

Partie I

Soit la fonction g de la variable réelle x définie par : $g(x) = x^2 - 1 + 2lnx$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition E_g de g.
   b) Calculer les limites de g en 0^+ et $+\infty$
   c) Déterminer la dérivée $g'(x)$ de g.
   d) Calculer $g(1)$
   e) Dresser le tableau de variation de g
   f) Etudier le signe de $g(x)$ sur son ensemble de définition.

Partie II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = lnx - \frac{lnx}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans ce repère.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. a) Déterminer $lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $lim_{x\to +\infty} f(x)$
   b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   c) En déduire le signe de f' dérivée de la fonction f.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
   e) Tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{lnx}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a) Donner l'ensemble de définition E_f de f.
   b) Calculer les limites suivantes $lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $lim_{x\to +\infty} f(x)$
   c) Déterminer $lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Vérifier que pour tout $x \in]1; +\infty[$; $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2}$
   b) Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur $]1; +\infty[$.
   c) Déduire le signe de la fonction $f'(x)$.
   d) Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[e ; +\infty[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $[e ; +\infty[$ sur $[e ; +\infty[$. On note h^{-1} la réciproque de h.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction h^{-1}.
4. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Exercice 12

Partie A

On considère la fonction numérique g à variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + 1 + lnx.$$

1. Calculer les limites de g à droite de 0 et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variations de g.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,27; 0,28[$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{4xlnx}{x+1}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f
2. Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$
3. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$
4. Etudier le sens de variations de f et dresser le tableau de variation.
5. Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$
6. Après une étude de la branche infinie, tracer la courbe de f.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + lnx)$

Et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Unité graphique : 2cm.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Calculer $f'(x)$.
2. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x - 3 + lnx$
   a) Etudier les variations de u
   b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$
   c) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$
3. Dresser le tableau des variations de f
4. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$
6. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = -f(x)$.
   a) Donner le tableau des variations de h
   b) Sans étudier la fonction h, construire sa courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 14

I- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -2(x^2 - 1) - lnx$

1. Dresser le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$
2. Calculer $g(1)$ et déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

II- Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{-1+lnx}{x} - 2(x-e)$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

1. a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   b) Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$ de f
   c) Dresser le tableau de variation de f
2. a) Calculer $lim_{x\to+\infty}[f(x) + 2(x-e)]$. Que peut-on déduire ?
   b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à son asymptote oblique (D)
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]0{,}4; 0{,}5[$
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans le même repère.

Exercice 15

1. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - 1 + xlnx$.
   a) Etudier les variations de la fonction h.
   b) Calculer $h(1)$. En déduire le signe de la fonction h sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + (x-1)lnx$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   a) Montrer que $lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Calculer $lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.
   b) Montrer que, $f(x) \leq x$, si et seulement si $x \in [1;e]$
   c) En déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
5. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;2[$ par : $f(x) = ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Calculer $lim_{x\to0^+} f(x)$ et $lim_{x\to2^-} f(x)$.

   b) Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $]0;2[$, puis montrer pour tout $x \in]0;2[$ on a : $f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   d) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $A(1;0)$.

2. On pose : $\rho(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $]0;2[$.

   a) Montrer que $\rho(\frac{3}{2}) < 0$ et $(\frac{7}{4}) > 0$ $(On\ prendra\ ln3 = 1{,}1\ et\ ln7 = 1{,}94)$.

   b) Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

   c) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

3. Construire dans le même repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe (τ) représentation de la fonction f^{-1}.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = ln(1+\sqrt{x})$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. a) Montrer que f est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, $f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

   b) Montrer que $lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter ce résultat.

   c) Calculer $lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   d) Dresser le tableau de variation de f.

   e) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

   f) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que pour tout ≥ 0,

$$f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2.$$

2. On considère l'intervalle $I = \left[\frac{1}{4};1\right]$. Montrer que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle I une solution α vérifiant $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$.

3. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ où $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ est la courbe représentative de la fonction f^{-1}. On précisera les demi-tangentes en O.

FONCTION EXPONNENTIELLE

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^{-x}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
Unité graphique : 2cm.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation
3. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^{x}$.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité 2cm.

1. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
2. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède deux points d'inflexion d'abscisse -3 et -1.
5. Construire la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^{-x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2 cm.

a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) et une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
b) Montrer que la dérivée f' de f est telle que : $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$
c) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f
d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -f(x)$

a) Sans étude détaillée, dresser le tableau de variations de h
b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de h dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 4

On considère la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Démontrer que $lim_{x\to-\infty}\, g(x) = 1$
2. Etudier le sens de variations de g. Calculer $g(0)$.
3. Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité 2cm.
   a) Etudier les variations de f.
   b) Démontrer que f admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $(D): y = x + 3$.
   c) Etudier les positions relatives de (D) et de $(\mathcal{C})$
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

Exercice 5

Soit f la fonction de la variable réelle x, définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{x}-1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Unité graphique : 2 cm.

1. Montrer que f est définie sur $]-\infty; 0[\, \cup\,]0; +\infty[$.
2. a) Calculer $lim_{x\to0^-}\, f(x)$; $lim_{x\to0^+}\, f(x)$ et $lim_{x\to+\infty}\, f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.
   b) Vérifier que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{e^{-x}-2}{(e^{x}-1)^2}$.
   c) Préciser le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sachant que $lim_{x\to-\infty}\, f(x) = -\infty$
4. Montrer que $lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter le résultat.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; -ln2]$.
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}.
   b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
6. Tracer les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ où $(\mathcal{C}')$ représente la courbe de la fonction g^{-1}.

Exercice 6

Partie A

Soit g la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - xe^{1+x}$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$
2. Déduire suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{1+e^{x+1}}$.

$(\mathcal{C})$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$ et $f(x_0) = x_0$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. Achever l'étude des branches infinies à $(\mathcal{C})$.
5. Etudier la position de (D) par rapport à $(\mathcal{C})$.
6. Construire $(\mathcal{C})$ et (D).

Exercice 7

Partie I

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$

Et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

1. f' désignant la fonction dérivée de f, montrer que : $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. Montrer que $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
5. Montrer que $lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie II

Soit f^{-1} la restriction de f à l'intervalle $[-2;+\infty[$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.
2. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
3. Construire $(\mathcal{C}')$, la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + 2e^{-x} + x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que, pour tout x, on a : $f(x) = e^{-x}(e^{2x} + 2 + xe^x)$
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x+2)}{e^x}$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) au voisinage de $+\infty$.
   a) Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.
5. Soit g la restriction de f sur $I = [0; +\infty[$.
   a) Montrer que la fonction g est bijective sur I
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de la bijection réciproque g^{-1} de g.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Unité graphique : 2 cm.
1. Montrer que le point O est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$
2. a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x+1}$.
   b) Montrer que $lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
4. a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}): y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.
   c) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   d) Construire T, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$

Exercice 10

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$g(x) = e^{-x} + 1 + xe^{-x}$$
1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1{,}28; -1[$
3. En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique 3cm.
1. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$, α étant le réel défini dans la partie A.
2. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ en utilisant l'encadrement de α établi dans la partie A.
3. a) Etudier les variations de f.

b) Montrer qu'il existe un réel $\beta \in]0;1[$ tel que $f'(\beta) = \frac{e}{1+e}$. En donner une interprétation graphique.

c) Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 11

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Démontrer que : $lim_{x \to -\infty}\, g(x) = 1$.
2. Calculer $lim_{x \to +\infty}\, g(x)$.
3. Calculer $g'(x)$ puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de g.
5. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g.
6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm.
   a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   b) Montrer que $f'(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une asymptote $(\mathcal{D})$, d'équation $y = x + 3$.
3. Déterminer suivant les valeurs de x la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]-3;-1[$ et une autre solution $\beta \in]0;1[$.
5. Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

Exercice 12

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2e^{-x-1} + 2x$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   a) Déterminer la fonction dérivée f' de f
   b) Dresser le tableau de variation de f
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$
   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{-x-1} + x^2 - 3$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f(x)$

b) En déduire le tableau de variation de g

3. a) Montrer que $lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$

b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$, sachant qu'elle admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$ et on donne $g(\alpha) = -2{,}56$

Exercice 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = (2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$. $(\mathcal{C})$ est sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition E_f de f

b) Donner la dérivée f' de f puis son signe.

c) Déduis-en le sens de variation de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de E_f.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet un point d'inflexion noté I.

b) Déterminer les coordonnées de ce point d'inflexion I.

4. a) Etudier les éventuelles branches infinies de $(\mathcal{C})$

b) Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique : 2 cm.

5. On considère la fonction r définie par $r(x) = -f(x)$. Sans expliciter r, construire sa courbe $(\mathcal{C}_r)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

6. Calculer la dérivée de la fonction $U(x)$ définie par : $U(x) = (4+x)e^{-\frac{x}{2}}$

Exercice 14

1. On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = (2x+1)e^x + 1$.

a) Justifier que $lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et $lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau variation de g.

c) En déduire que pour tout réel x, $g(x) > 0$.

2) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + 2 + (2x-1)e^x$. Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

a) Montrer que $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer et interpréter graphiquement $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$ puis déterminer leurs positions relatives.

3. Ecrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

4. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α puis vérifier que

$-0,86 < \alpha < -0,85$.

5. a) Montrer qu'il existe un point A en lequel la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à l'asymptote oblique. Préciser les coordonnées de A et donner l'équation de (T).
   b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et l'asymptote (D).

Exercice 15

Partie I

1. Etudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = 3x - 1 + e^x$
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet 0 pour seule solution dans $\mathbb{R}$.

Partie II

1. On considère la fonction f de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = -x + x^2 + x^3 + xe^x$$

   a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (1 + x)g(x)$
   b) Etudier les variations de f.
   c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $\left[-2\,; -1\right]$
   d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[-2; -1]$.

2. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où l'on prendra 2cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1cm pour unité sur l'axe des ordonnés.

Partie III

Soit la fonction S de la variable réelle x, définie par : $S(x) = x^3 - x^2 - x + xe^{-x}$

1. Démontrer que pour tout réel x : $f(-x) = -S(x)$
2. Sans étudier les variations de S. Construire tout en expliquant le raisonnement, la courbe $(\mathcal{C}')$ de S dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 16

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$

1. a) Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, calculer $g'(x)$.
   b) En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) On admet que $lim_{x\to+\infty}\, g(x) = 1$ et $lim_{x\to-\infty}\, g(x) = -\infty$.
   Dresser le tableau de variation de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique $\alpha \in \left]-1,28; -1,27\right[$.
3. En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Unité graphique : 2 cm.

1. Montrer que, pour tout x, on a : $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1}$
2. Calculer $lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^{-x}+1)^2}$.

   b) Dresser le tableau de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
4. On admet que la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote de direction l'axe des abscisses (Ox) d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$
   b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)
5. a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$

   b) En déduire l'encadrement de $f(\alpha)$
6. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ).

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{2}(lnx)^2$

1. Calculer la dérivée g' de g
2. Calculer la primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}lnx$
3. En déduire la primitive de f pour $x=e$ et $F(e)=0$.

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 (x^3-x+2)dx\,;\ J=\int_0^{e^2}\frac{dx}{x}\ ;\ K=\int_0^1 3xe^{x^2}dx$$

$$L=\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{3+2x^2}}dx\ ;\ M=\int_1^3 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx$$

Exercice 3

1. Trouver les réels a, b et c tels que : $\frac{2x^2-x+1}{x+2}=ax+b+\frac{c}{x+2}$ puis calculer

$$I=\int_0^2 \frac{2x^2-x+1}{x+2}dx$$

2. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x+2}{(x+1)^4}=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^4}$ puis calculer

$$J=\int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}dx$$

3. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer

$$I=\int_1^e x(1-lnx)dx\ \ et\ J=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}cos2xdx$$

4. On donne :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x cos^2xdx\ \ et\ J=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x sin^2xdx$$

   a) Calculer $I+J$ et $I-J$
   b) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-1+lnx}{x}-2(x-e)$ et $(D): y=-2(x-e)$ son asymptote oblique.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

Calculer l'aire de la partie du plan qui délimite la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{-x-1} + x^2 - 3$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Unité graphique 2cm.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + 2e^{-x} + x$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit λ un réel strictement positif.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limités par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites Δ , D_1 et D_2 d'équation respectives $y = x$; $x = 0$ et $x = \lambda$
b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2 cm

1. A partir d'une intégration par parties, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire, en cm^2, l'aire A du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Où $(\mathcal{C}')$ est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -f(x)$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^{-x}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Unité graphique : 2cm.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax + b)e^{-x}$

1. Déterminer les nombres réels a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$

Exercice 9

1. Démontrer que, pour tout réel x : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$
3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ln(1 + e^x)$
   a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de $J = \int_0^1 e^x ln(1 + e^x)\, dx$

Exercice 10

En utilisant l'intégration par parties, calculer :

1. Les intégrales I_1 et I_2 telles que : $I_1 = \int_1^e xlnxdx$ et $I_2 = \int_1^e x(lnx)^2 dx$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$

Démontrer, pour $n \geq 2$ l'égalité $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$

3. Calculer I_4

Exercice 11

On pose, pour tout nombre entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien et $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.

1. Calculer I_0
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1
3. En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout nombre entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n + 1)I_n = e^3$. En déduire la valeur de I_2

Exercice 12

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinxdx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosxdx$

1. Calculer I_0 et J_0
2. En intégrant par partie I_n puis J_n, montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + I_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$
3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tends vers $+\infty$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' = x + \frac{1}{x^2}$
b) $y'' = 2sin^2x$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E): 2y'' - 5y' + 3y = 0$
2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$
b) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(0) = 4$ et $g'(0) = 2$
c) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y = h(x)$ est une fonction impaire et $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Exercice 4

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$
2. Déterminer la solution particulière h de (E) dont la courbe passe par le point $A(0; -2)$ et admet en ce point une tangente (T) d'équation $y = 3x - 2$.

Exercice 5

On donne l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$, où y est la fonction inconnue.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution particulière h de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point, une tangente de pente -1.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = -x + 5$

a) Déterminer la solution particulière de (E)
b) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 3y = 0$
c) En déduire les solutions de (E)

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 4xe^x$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E)
2. Vérifier qu'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) équivaut à $f - g$ est solution de l'équation $(E') : y'' - y = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, (E') puis en déduire la solution générale de (E)

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2cosx$

a) Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = -cosx + sinx$ est solution de (E).
b) Démontrer que φ est solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de $(E') : y' - y = 0$
c) En déduire les solutions de (E)

Exercice 9

On considère une équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 0$

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la fonction f solution de (E) dont la courbe admet au point $A(1; 0)$ une tangente de pente $\frac{1}{e}$
3. Calculer $I = \int_0^1 (x - 1)e^{-x}dx$

Exercice 10

Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $(E_1) : y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$

a) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction g définie par $g(x) = me^{-2x}$ soit solution de (E_1)
b) Démontrer que $f + g$ est solution de (E_1) si et seulement si f est solution de $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$. Résoudre (E_2)
c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) vérifiant $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$

Exercice 11

Soit l'équation différentielle (E) définie par : $y'' - ay' + by = 0$

Déterminer les réels a et b pour que (E) admette pour solution générale des fonctions de la forme $f(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Après avoir déterminé les réels a et b ; trouver la solution particulière f de l'équation (E) sachant que la courbe de f admet une tangente au point $A(0; 1)$ perpendiculaire à la droite d'équation $y = -x$

Exercice 12

1. Intégrer l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 0$ (E)
2. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative admet au point $I(0; 1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 2$
3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$
   a) Montrer que F est une primitive de f $\mathbb{R}$
   b) Expliciter $F(x)$
   c) En déduire l'intégrale $I = \int_0^{\pi} f(t)dt$.

Exercice 13

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 3sinx$

1. Déterminer le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha sinx$ soit une solution de (E)
2. Démontrer qu'une fonction f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y'' + 4y = 0$
3. Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)
4. Trouver la solution de (E) vérifiant les conditions $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = 0$.

EXERCICES D'ANALYSE

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-2x}, \ si\ x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x - xlnx, \ si \ \ x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On admet que f est continue en $x_0 = 0$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

2. a) On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$, calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

 b) Calculer la dérivée de f dans chaque intervalle où elle est dérivable.

 c) Préciser le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

 d) Etablir le tableau de variation de f

2. a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$

 b) Sachant que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]3; 4[$, tracer la courbe $(\mathcal{C})$

Exercice 2

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + y = 0$

2. Déterminer la solution ρ de (E), vérifiant $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = 0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xln(-x) + 1; \ si\ x < 0 \\ f(x) = (x+1)e^{-x}; \ si\ x \geq 0 \end{cases}$

On admet que f est continue en $x_0 = 0$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

2. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

 b) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ suivant les intervalles de x.

 c) Donner le sens de variation de f

 d) Etablir le tableau de variation de f

3. Pour $x < 0$, on admet que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une branche parabolique de direction (Oy). Tracer la branche infinie de $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé. Unité 2cm.

Exercice 3

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$

 a) Résoudre l'équation différentielle (E)

b) Déterminer la solution particulière g de (E) dont la courbe passe par le point $A(0;-2)$ et admet la droite d'équation $y = 3x$ comme tangente.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x} - 2e^{-x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Calculer la dérivée f' de f puis préciser son signe.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
d) Etudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$
e) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (ax + b)e^{-x}$

a) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction h soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$
Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Où $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
3. a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$
   b) Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite D.
   c) Montre que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite D dans le même repère.
5. On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier naturel n

a) Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2} - x + e^{x-1}, & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{3}{2} - x + ln(2x-1), & si\ x > 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, unité graphique 2 cm. On admet que f est continue en $x_0 = 1$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

   b) Interpréter graphiquement les résultats.

2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

3. Calculer la dérivée f' de f

4 Dresser le tableau de variation de f

5. a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$

   b) Achever l'étude des branches infinies de $(\mathcal{C})$

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]3; 3,5[$

7. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$

8. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 6

I. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. Etudier le sens de variation de g

2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

II. On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-4ln(-x)}{x}, & si\ x < -1 \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}), & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de f

2. Etudier la continuité de f en $x = -1$

3. Etudier la dérivabilité de f en $x = -1$. Interpréter graphiquement le résultat.

4. a) Montrer que pour $x < -1$, $f'(x) = \frac{4[ln(-x)-1]}{x^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f

5. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$

6. Tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

III. Soit λ un nombre réel supérieur à -1

1. Calculer les intégrales $I = \int_{-e}^{-1} \frac{ln(-x)}{x} dx$ et $J = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$

2. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan au-dessus de l'axe des abscisses, délimité par $(\mathcal{C})$, la droite $(D): y = x + 1$ et les droites d'équations $x = -e$ et $x = \lambda$.
   a) Démontrer que $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda + 2)e^{-\lambda}$
   b) Calculer $lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

<u>Exercice 7</u>

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{2(e^{x+1}-1)}{e^{x+1}-2} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = x + 1 + ln(x+2) & si\ x > -1 \end{cases}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
4. Etudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$
5. Construire les asymptotes s'il y a lieu et la courbe $(\mathcal{C})$
6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; +\infty[$
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1} dont on dressera un tableau de variation.
   b) Construire dans le même repère que $(\mathcal{C})$ la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de g^{-1}
   c) Soit α un réel strictement positif, calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = x$; $x = 0$ et $x = \alpha$
   d) Calculer $lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

<u>Exercice 8</u>

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie par : $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
3. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

<u>Partie B</u>

On donne la fonction f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = e^x - ln|x|$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

1. Préciser l'ensemble de définition E_f de f
2. Calculer les limites de f en $-\infty$; 0 et $+\infty$ puis donner une interprétation graphique.
3. Montrer que pour tout $x \in E_f$, $f'(x) = g(x)$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $J = [-2; -1]$
6. Montrer que $\sqrt{e} \leq f(\alpha) \leq e + ln2$, donner un encadrement à 10^{-1} près de $f(\alpha)$ et construire $(\mathcal{C})$
7. Soit a un nombre réel strictement négatif tel que : $a < -1$. Calculer cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = -1$. On prendra $\alpha = 0{,}75$ et $f(\alpha) = 2$

Exercice 9

1. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x - 5$
   a) Calculer $lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $lim_{x \to -\infty} g(x)$
   b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; 3]$
2. Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 5[$ par : $f(x) = ln(5 - x)$
   a) Calculer les dérivées f' et f'' de f
   b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$
   c) Démontrer que $\forall\, x \in [0; 3]$ on a $f(x) \in [0; 3]$
   d) Montrer qu'on a : $\forall\, x \in [0; 3], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer aussi que :
   $\forall\, x \in [0; 3]\,, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,;\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [0; 3]$
   b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
   d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente puis préciser sa limite.

Exercice 10

Soit l'entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction numérique f_n à variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n lnx \; ; si \; x \neq 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la famille des courbes représentatives des fonctions f_n dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique 2 Cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de la fonction f_n
2. Déterminer le point fixe aux courbes $(\mathcal{C}_n)$
3. Vérifier que la dérivée f_n' est $f_n' = x^{n-1}(1 + nlnx)$
4. Calculer la limite de f_n en $+\infty$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n
6. Dans la suite de l'exercice, on pose $n = 2$
   a) En déduire le tableau de variations de la fonction f_2
   b) Etudier la branche infinie à $(\mathcal{C}_2)$
   c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_2)$ de la fonction f_2
7. Calculer en Cm^2, l'aire A du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_2)$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$; $x = 1$

PARTIE B
Algèbre

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

1) On considère le nombre complexe : $u = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$
   a) Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
   b) Montrer que $u^2 = -2\sqrt{3} + 2i$.
   c) Donner le conjugué de u^2.
   d) Calculer le module et l'argument de u^2.
   e) Ecrire sous forme trigonométrique u^2.

2) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On pose $Z = z.u^2$.
   a) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe Z.
   b) Ecrire sous la forme trigonométrique Z.
   c) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos\frac{13\pi}{12}$ et $sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes $Z_1 = \sqrt{3} - i$ et $Z_2 = 2 - 2i$ et $A = \frac{Z_1^4}{Z_2^3}$

1. a) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes : Z_1 ; Z_2 ; Z_1^4 et Z_2^3.
   b) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes Z_1^4 et Z_2^3 et A.
2. Calculer le module et un argument de A.
3. Déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$, (E)

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ (E), on notera Z_1 et Z_2 les solutions de (E) avec la partie réelle de Z_1 inférieure de zéro.
b) Vérifier que $Z_1 = -a + b$ et $Z_2 = a + b$ où $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
c) Donner les formes trigonométriques de a et b.

Exercice 4

1) Soit le polynôme $P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 4$
   a) Calculer $P(2)$ et $P(-2)$.
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z-2)(z+2)(az^2 + bz + c)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère le nombre complexe $z = \frac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{-i\frac{\pi}{3}}}$.

Déterminer le module et un argument de z.

Exercice 5

A.

On considère la fonction f de la variable complexe Z définie par :

$$f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3}+i)Z^2 + 4(1+i\sqrt{3})Z - 8i$$

1) Vérifier que $f(Z) = (Z-2i)(Z^3 - 2\sqrt{3}Z + 4)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$.

3) Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

B.

I) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les trois nombres complexes $Z_1 = \sqrt{3} - i$; $Z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z_3 = 2i$.

Représenter dans le plan complexe les trois points M_1, M_2 *et* M_3 d'affixes Z_1, Z_2 *et* Z_3 et démontrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.

II) Calculer $Z_1 - Z_2$ *et* $Z_2 - Z_3$. Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_2$ est un losange.

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$, le système d'équations suivant : $\begin{cases} (2-3i)z_1 + 2z_2 = -1-i \\ (-3+2i)\bar{z}_1 - 3i\bar{z}_2 = -11-i \end{cases}$

On rappelle que : $\bar{\bar{z}} = z$

2. On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

   a) Déterminer la forme algébrique de Z
   b) Déterminer le module et un argument de z_1, de z_2 puis de Z.
   c) Donner la forme trigonométrique de Z
   d) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$

3. On donne le complexe $U = \frac{x+iy}{2-3i}$ où x et y sont des nombres réels.

Déterminer x et y sachant que U a pour module $\sqrt{2}$ et a pour argument $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 7

Une fonction f de P dans P associée au point M d'affixe $Z = x + iy$ le point M' d'affixe $Z' = \frac{Z-1}{Z-2i}$.

1) Ecrire le nombre complexe Z' sous la forme algébrique. On précisera la partie réelle $Re(Z')$ et la partie imaginaire $Im(Z')$.

2) Déterminer et construire l'ensemble (C_1) des points M d'affixe Z tels que Z' soit imaginaire pur.

3) Déterminer et construire l'ensemble (C_2) des points M d'affixe Z tels que $|Z'| = 2$.

4) Déterminer l'intersection de (C_1) et (C_2).

Exercice 8

I) Soit les nombres complexes définis par : $Z_1 = cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3}$; $Z_2 = -cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$; $Z_3 = -2\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$ et $Z_4 = 5\left(sin\frac{\pi}{3} - icos\frac{\pi}{3}\right)$ et $Z_5 = 1 + cos\theta + isin\theta$.

Déterminer le module et un argument de ces nombres complexes.

II) A tout nombre complexe $z \neq -1$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{iz^2}{z+1}.$$

1) On pose $z = x + iy$. Donner la forme algébrique de Z en fonction de x et de y.
2) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

Exercice 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et pour nombre complexe $z \in \mathbb{C} - \{2\}$, on pose $Z = \frac{z-4i}{z-2}$.

1) Mettre Z sous la forme algébrique (indication : poser $z = x + iy$).
2) En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
   a) Z soit réel.
   b) Z soit imaginaire pur
   c) Le module de Z soit égal à 1.

Exercice 10

I- On considère deux nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1. Calculer le module et un argument de z_1
2. Vérifier que $z_2 = (1 + i)z_1$. En déduire le module et un argument de z_2 puis en déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe z distinct de $-1 + i$ le nombre complexe $T = \frac{2z-i}{z+1-i}$

1. En posant $z = x + iy$; écrire T sous la forme algébrique puis en déduire la partie réelle et la partie imaginaire de T.
2. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tel que T soit réel.
3. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M d'affixe z tel que T soit imaginaire pur.
4. Soit B le point d'affixe $z_B = \frac{1}{2}i$. Vérifier que B appartient à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{D})$

Exercice 11

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives $z_A = 4 + 2i$ et $z_B = -2 - i$.

On considère l'application P qui, à tout point M différent de B et ayant pour affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$$

1) Interpréter géométriquement le module de ' , puis un argument de z'.

2) Déterminer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' en fonction de la partie réelle x et de la partie imaginaire y de z.

3) Déterminer, puis construire dans le plan complexe, les ensembles suivants :

a) E_1 ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

b) E_2 ensemble des points M tels que $|z'| = 2$.

c) E_3 ensemble des points M tels que z' soit un réel.

d) E_4 ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 12

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme :

$$P(z) = z^4 - z^3 + z - 1$$

1. Développer, réduire puis ordonner suivant les puissances décroissantes de z, l'expression $(z^2 - 1)(z^2 - z + 1)$

2. En déduire une factorisation de $P(z)$

3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$

4. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 1\ ;\ z_B = -1\ ;\ z_C = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_D = \overline{z_C}$$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D

b) Représenter dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A, B, C et D

5. Calculer z_C^{2018}

Exercice 13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B et C désignent les points d'affixes $z_A = -2\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{3} - 3i$ et $z_B = 2i$.

1) Ecrire z_B sous forme exponentielle

2) On désigne par E le barycentre du système $\{(A;1);(C;3)\}$ et F celui du système $\{(A;2);(B;1)\}$.

a) Déterminer l'affixe z_E et z_F des points E et F.

b) Placer les points A, B, C, E et F dans le repère.
c) Démontrer que les points A, C et E d'une part et les points A, B et F sont alignés.

3) a) Démontrer que le quotient $\frac{z_E - z_C}{z_E - z_B}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
En déduire que, dans le triangle ABC, E est le pied de la hauteur issue du point B.
b) Démontrer que quotient $\frac{z_F - z_C}{z_F - z_B}$ peut s'écrire $k'i$ où k' est un nombre réel à déterminer.
En déduire que, dans le triangle ABC, F est le pied de la hauteur issue du point C
c) En déduire que les points B, C, E et F sont cocycliques.

4) On désigne par H le barycentre du système $\{(A;2);(B;1);(C;6)\}$.
a) Démontrer que H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
b) Qu'en déduit-on pour le point H par rapport au triangle ABC ?

Exercice 14

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme f définie par :

$$f(z) = z^3 + (1+5i)z^2 + (-10+6i)z - 16 - 8i$$

1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on précisera.
2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $f(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
4) On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = -1 - 3i$ et $z_C = 2 - 2i$.
a) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
b) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
c) Construire et donner la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 15

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

1. Déterminer les racines sixièmes de l'unité ($z^6 = 1$). On donnera les solutions sous la forme algébrique.

2. Soit l'équation (E): $Z^6 = -64$.

a) Montrer que $(1+i)^{12} = -64$
b) Déterminer une solution de l'équation (E).
c) Déduire toutes les solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que toutes les solutions de l'équation (E) appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon à préciser.

4. a) Placer toutes les solutions de (E) dans un repère.

b) Donner la nature de la figure obtenue.

5. Soit M_0; M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $Z_0 = 2i$; $Z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $Z_2 = -\sqrt{3} - i$

a) Démontrer que $Arg\frac{Z_0 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \left(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}\,;\overrightarrow{M_1M_0}}\right)$

b) Calculer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2};\overrightarrow{M_1M_0}}\right)$.

Exercice 16

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = -1$ et $z_C = 1 + i$.

1. Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme C en A et A en B.
2. Donner les éléments caractéristiques de S.
3. Pour tout point M du plan distinct du centre Ω de S, on notre $M' = S(M)$

a) Préciser la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$

b) En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

Exercice 17

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : \; z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

1. a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0

b) Résoudre l'équation (E)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = -2 + i$; $z_C = i$

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $U = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

b) Placer les points A, B et C

c) En déduire la nature du triangle ABC

3. On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe Z associe Z' tel que :

$$Z' = Z_C Z + Z_B$$

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

b) En posant $Z' = x' + iy'$ et $Z = x + iy$, exprimer x' et y' en fonction de x et y

Exercice 18

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i est le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$
   a) Déduire de 1. une solution de l'équation (E)
   b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$
4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
   a) Déterminer l'affixe z_B du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe z_C du point C, image de B par r.
   b) Montrer que z_B et z_C sont solution de (E')
5. a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité graphique 2cm), représenter les points A, B et C.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 19

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1-i)z^2 - 2z - 11 - 3i = 0$
2. On donne le polynôme P défini par :
$$P(z) = (1-i)z^3 - (2+4i)z^2 + (-15+i)z - 28 + 16i$$
   a) Déterminer deux nombres réels a et b tel que $z \in \mathbb{C}$
$$P(z) = (z + a + ib)[(1-i)z^2 - 2z - 11 - 3i]$$
   b) En déduire la solution de l'équation $P(z) = 0$
3. Le plan complexe P est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A ; B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$; $z_B = 3 + 2i$ et $z_C = -2 - i$
   a) Placer les points A ; B et C dans le repère.
   b) On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Calculer le module et un argument de Z puis en déduire la nature du triangle ABC.
   c) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.
4. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \alpha z + \beta$
   a) Déterminer les nombres complexes α et β telle que f laisse le point A invariant et transforme C en B.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 20

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes z

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = -3 + 4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 8iz - 13 - 4i = 0$

2. Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-3 - 2i$; $-1 + 2i$ et $1 - 2i$

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

3. Soit R la rotation de centre B qui transforme A en C.

a) Montrer que la forme complexe de R est : $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$

b) Déterminer l'affixe du point E l'antécédent du point F d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ par R.

Exercice 21

Les parties A et B sont indépendantes.

A/1) Caractériser les applications f et g définies par :

$$f: z' = 2iz + 1 + i \text{ et } g: z' = z + 2 - 3i$$

2) Donner l'expression analytique de l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et de rapport $k = 2$

B/ On donne les nombres complexes suivants :

$$z_A = 1 - i \text{ ; } z_B = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \text{ et } z_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

1) a) Mettre sous la forme trigonométrique puis sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants $T = \frac{z_C}{z_A}$ et $Z = \frac{z_B}{z_A}$

b) Déduire la forme trigonométrique de z_B et z_C

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C

a) Montrer que $OABC$ est un parallélogramme

b) Montrer que les droites (OB) et (AC) sont perpendiculaires

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que :

$$|z - z_C| = |z - z_A|$$

Exercice 22

I- On considère l'équation (E) : $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$

1. Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de (E)

2. Achever la résolution de (E).

II- Dans le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$; $3 + 3i$ et $3 - 2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.

2. a) Calculer le nombre $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe qui laisse invariant le point B et transforme A en C.

   a) Donner l'écriture complexe de f

   b) Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 23

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (1 + 8i)z^2 + (-25 + 13i)z - 30 - 30i = 0$

1) Déterminer le nombre complexe imaginaire pur z_0 solution de (E).

2) Déterminer les complexes a, b et c tels que (E) s'écrive sous la forme $(z + 3i)(az^2 + bz + c) = 0$.

3) a) Déterminer les racines carrées du complexe $Z = 16 - 30i$.

   b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

4) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3 - i$, $z_B = 2 + 4i$, $z_C = 3 - i$ et $z_D = -2$.

   a) Construire dans le plan les droites (AD) et (BC).

   b) Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

5) On désigne par S la similitude plane directe qui laisse invariant le point I d'affixe $z_I = 2$ et qui transforme le point C et D.

   a) Déterminer l'expression complexe de S.

   b) Déterminer le rapport et l'angle de S.

Exercice 24

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Soit Q un polynôme du deuxième degré d'inconnus à coefficients complexes. Déterminer Q pour que $3 + i$ et $1 + 2i$ soient ses racines.

2. On considère le polynôme : $P(Z) = Z^3 - 2(2+i)Z^2 + (4+3i)Z - 7 + i$. Où Z est un complexe.

   a) Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(Z) = (Z+i)(aZ^2 + bZ + c)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 3 + i$ et $Z_B = 1 + 2i$.
Déterminer la nature du triangle BOA.

4. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' telle que : $\overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$

   a) Montrer que $Z' = -2Z + 8 + i$
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 25

1. On considère l'équation (E) : $Z^3 - (4+i)Z^2 + (13+4i)Z - 13i = 0$ où Z est un nombre complexe.

   a) Vérifier que le nombre complexe i est solution de l'équation (E)
   b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que (E) s'écrive : $(Z - i)(aZ^2 + bZ + c) = 0$
   c) Résoudre (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $Z_A = i$; $Z_B = 2 + 3i$ et $Z_C = 2 - 3i$ et par R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$

   a) Ecrire l'écriture complexe de R.
   b) Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la rotation R.
   c) Démontrer que les points A' ; B et C sont alignés.
   d) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $|Z - Z_B| = |Z - Z_C|$

Exercice 26

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E): $z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$, où α est un nombre complexe. Soit J et K les points du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont les affixes sont solutions de (E).

1. a) Vérifier que $\alpha + 2i$ est solution de (E)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E)
   c) Déterminer α pour que le triangle OJK soit isocèle rectangle en O

2. On donne $z_J = \frac{3}{2}(1 - i)$ et $z_K = \frac{3}{2}(1 + i)$.

   a) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OJK

b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme J en K et K en O.

c) Préciser les éléments caractéristiques de S.

Exercice 27

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que $(1+i)^3 = -8i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^3 = -8i$

3. On considère le point A d'affixe $Z_A = 2i$ et la rotation R de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Déterminer l'affixe Z_B du point B, image de A par la rotation R.

b) Déterminer l'affixe Z_C du point C, image de B par la rotation R

c) Vérifier que Z_B et Z_C sont les solutions de l'équation (E).

4. On considère maintenant les points A, B et C d'affixes respectives

$Z_A = 2i$; $Z_B = -\sqrt{3} - i$ et $Z_C = \sqrt{3} - i$

a) Représenter les points A, B et C dans un repère du plan.

b) Préciser la nature du triangle ABC.

Exercice 28

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})z - 4$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + (-2 - 6i\sqrt{3})z - 8 = 0$

2. Calculer $P\left(-\frac{1}{2}\right)$

a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + \frac{1}{2})(4z^2 + az + b)$

b) Achever la résolution de l'équation $P(z) = 0$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2}$; $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

a) Placer les points A, B et C dans le repère

4. a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

b) Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe.

c) Ecrire l'expression analytique de la similitude plane directe

d) Déterminer l'affixe du point E image de C par la similitude plane directe.

Exercice 29

1. a) Déterminer le nombre complexe β tel que : $\beta(1+i) = 1+3i$

   b) En déduire le nombre complexe $i\beta^2$ sous la forme algébrique.

2. On considère le polynôme $P(Z) = Z^2 - (1+3i)Z - 4 + 3i$

   a) Montrer que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z-\beta)(Z-i\beta)$

   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(Z) = 0$

3. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points $A(2;1), B(-1;2)$ et $C(-2;-1)$. Soit S la transformation du plan complexe qui fait correspondre au point M d'affixe Z, le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = aZ + b$; où a et b sont des nombres complexes.

   a) Déterminer a et b sachant que $S(A) = A$ et $S(B) = C$

   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

   c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

   d) Déterminer l'affixe du point E, image de D par la transformation S.

Exercice 30

On considère un nombre complexe P défini par :

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 8z + 17 = 0$
2. Calculer $P(-i)$
3. Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 4 + i$; $z_B = 4 - i$ et $z_C = -i$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Démontrer que ABC est un triangle rectangle en B.
6. Soit le point D d'affixe $z_D = 2$ et F l'image de A par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation
   b) Déterminer l'affixe du point F
   c) Exprimer x' et y' en fonction de x et y

Exercice 31

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 2cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3-(7+i)z^2+2(8+3i)z-10(1+i)=0$

1. a) Montrer que $z_0=1+i$ est une solution de (E).

   b) Déterminer les complexes a et b tels que (E) : $(z-1-i)(z^2+az+b)$

   c) Achever la résolution de l'équation (E)

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $1+i; 3+i$ et $3-i$.

   a) Construire le triangle ABC, dans ce repère.

   b) Ecrire sous la forme exponentielle $T=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

   c) En déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation :

$$|z-1-i|=|z-3+i|$$

   a) Déterminer l'ensemble (Δ)

   b) Démontrer que le point F d'affixe $4+2i$ appartient à (Δ)

Exercice 32

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): Z^2+(-1+2i)Z-3+4i=0$$

1. Sachant que $Z_0=i$ est une solution de l'équation (E), écrire (E) sous la forme : $(Z-i)(aZ^2+bZ+c)=0$, où a, b et c sont des nombres complexes à déterminer.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives

$Z_A=i$; $Z_B=-1-2i$; $Z_C=2-i$

   a) Placer les points A, B et C dans le plan.

   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

4. Déterminer (Γ), l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $|Z-i|=\sqrt{10}$ (on pourra poser $Z=x+iy$)

5. a) Montrer que $B\in(\Gamma)$

   b) Construire (Γ)

6. a) Calculer le produit $Z_A.Z_B$

   b) En déduire que le point C est l'image du point B par la rotation de centre O, dont on précisera une mesure d'angle.

Exercice 33

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme :

$$P(z)=z^3+(-3+5i)z^2-2(4+5i)z+10-10i$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u=-8i$

2. a) Démontrer que P peut s'écrire : $P(z) = [z - (3 - i)][z^2 + 4iz - 4 + 2i]$
   b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3 - i$; $z_B = 1 - 3i$ et $z_C = -1 - i$.
   a) Calculer le rapport : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
   c) Déterminer l'affixe du point D, centre de la rotation R d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ qui transforme C en A.
4. Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.
   a) Donner l'écriture complexe de S.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Exercice 34

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2sin\theta)z^2 + (1 - 2sin\theta)z - 1 \; ; \; \theta \in]0; \pi[$$

1. a) Calculer $P(1)$ et conclure.
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On appellera z_1 la solution réelle, z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative et z_3 l'autre solution.
3. Donner la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation ci-dessus.
4. Dans la suite, on pose $\theta = -\frac{\pi}{4}$
   a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z_2 et z_3
   b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives z_2 et z_3. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S de centre O qui transforme B en C.
   c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $U = \frac{z_C - z_O}{z_B - z_O}$ puis en déduire la nature du triangle OBC.

Exercice 35

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Unité : 2cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 2 + i$; $z_B = 1 + 2i$; $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$

1. Représenter les points A, B, C et D sur la figure.
2. Soit f l'application du plan P dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$
   a) Déterminer les nombres complexes a et b telle f transforme A en B et C en D.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

3. Soit J le point d'affixe $3+5i$. Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1+i$. P et Q les points tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés.

   a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q. Placer I, J, P et Q.

   b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles orientés $(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IP})$ et $(\overrightarrow{IC}\,;\overrightarrow{IQ})$

Exercice 36

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-2z+4=0$

2. Soient A ; B et C les points d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$; $z_B=1-i\sqrt{3}$ et $z_C=4$

   a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $U=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère la transformation ponctuelle f du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $\overrightarrow{MM'}=i\sqrt{3}$

   a) Exprimer z' en fonction de z

   b) En déduire la nature de f

4. Déterminer les affixes z_E et z_D des points E et D tels que $f(A)=D$ et $f(E)=C$

5. Soit K milieu du segment $[AC]$

   a) Déterminer l'affixe z_K du point K

   b) Déterminer le nombre complexe $\frac{z_D-z_E}{z_D-z_K}$

   c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 37

A- On rappelle que $cos2\theta=1-2sin^2\theta$ et $sin2\theta=2sin\theta cos\theta$

1. Qu'appelle-t-on argument d'un nombre complexe z d'image M ?

2. On note $Z=1-cos\alpha+isin\alpha$ avec $\alpha\in[0;2\pi]$

   a) Etablir que $Z=2isin\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}-isin\frac{\alpha}{2}\right)$

   b) Déduire en fonction de α, le module et un argument de Z

B- On considère les nombres complexes suivants: $z_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; $z_2=\frac{2+i}{3-i}$ et $z_3=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

1. Montrer que $z_2=\overline{z_1}$ où $\overline{z_1}$ est le nombre complexe conjugué de z_1

2. On note Z le nombre complexe défini par : $Z=\frac{z_2}{z_3}$

   a) Mettre Z sous la forme algébrique

   b) Déterminer le module et un argument de Z

c) En déduire la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{12}$, $sin\frac{\pi}{12}$ et $tan\frac{\pi}{12}$

Exercice 38

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $U^4 = 1$

2. a) Calculer $(1+2i)^4$

b) En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $Z^4 + 7 + 24i = 0$

2. Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1+2i$; $Z_B = -2+i$; $Z_C = -1-2i$ et $Z_D = 2-i$.

a) Placer les points A ; B ; C et D sur le repère.

b) Montrer que $OA = OB = OC = OD$

c) En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z' = aZ + b$

a) Déterminer les nombres complexes a et b telle que f laisse le point B invariant et transforme D en A.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 39

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme p défini par :

$$p(z) = 2z^3 + (5+3i)z^2 + (13-5i)z + 10 + 2i$$

1. L'équation $p(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure. Déterminer cette racine.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$

3. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} - i$. Soit S la similitude plane directe définie par : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 2 - i$

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

c) Calculer l'affixe $z_{A'}$, du point A' image de A par S.

4. On note h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$. Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B' image de B par h.

Exercice 40

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique : 4cm.

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r

   a) Déterminer une écriture complexe de r
   b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   c) Ecrire z_B et z_C sous la forme algébrique
   d) Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients : 2; -1 et 2

   a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et placer le point D
   b) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h

   a) Déterminer une écriture complexe de h
   b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E

4. a) Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous la forme exponentielle.

   b) En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice 41

I- Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E) : \left(z - \sqrt{2}\right)^2 + 2 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On considère par z_1 la solution dont la partie image est positive et par z_2 l'autre racine.

II- On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. (Unité graphique 1Cm) les points B, C et A d'affixes respectives $\sqrt{2}(1+i)$; $\sqrt{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Placer ces points dans le repère puis compléter la figure progressivement.

2. Déterminer l'expression complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport -3. En déduire l'affixe du point D image de C par l'homothétie h.

3. Déterminer l'expression complexe de la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. En déduire l'affixe du point E image de C par R.

4. Placer le point F d'affixe $i\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ dans le repère.

5. Montrer que $\frac{z_E-z_D}{z_F-z_D}=i$ puis déduire que $BDFE$ est un carré.

<u>Exercice 42</u>

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^4-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^3+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$$

1. Vérifier que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est une racine de P.

2. a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)$

   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points $A, B,\ J$ et K d'affixes respectives $z_A=1+i$; $z_B=1-i$; $z_J=i\sqrt{3}$ et $z_K=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

   a) Placer les points A, B, J et K dans le repère.

   b) Soit C le symétrique du point J par rapport à K. Montrer que l'affixe de C est $z_C=-\sqrt{2}$

   c) Montrer que les points A, B, J et C appartiennent à un même cercle.

4. Soit D le point d'affixe $z_D=-1+i$. On considère la rotation r de centre O qui transforme J en D.

   a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

   b) Déterminer l'affixe du point E image de C par r.

Exercice 43

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $Z_P = 3 + 2i$. $\overrightarrow{W}$ est le vecteur d'affixe $Z_{\overrightarrow{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1. a) Déterminer l'affixe Z_Q du point Q image du point B par la translation T de vecteur $\overrightarrow{W}$.
   b) Déterminer l'affixe Z_R du point R image du point P par l'homothétie H de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$
2. a) Déterminer l'affixe Z_S du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
   b) Placer les points P, Q, R et S.
3. a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
   b) Calculer le rapport : $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$
   c) En déduire la nature exacte du quadrilatère $PQRS$.
4. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$
5. Déterminer l'expression analytique de la similitude plane directe de centrer A, de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Exercice 44

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni de repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit le point A d'affixe $Z_A = 1 + i$ et f une transformation plane qui, au point $M(x; y)$ d'affixe $Z_M = x + iy$ associe le point $M'(x'; y')$ d'affixe $Z_{M'} = x' + iy'$ tel que : $f(Z) = Z'$ avec $Z' = \frac{1}{2}(Z + i\bar{Z})$ où le nombre complexe $\bar{Z}$ désigne le conjugué du nombre complexe Z.

1. Déterminer l'expression analytique de f (on exprimera x' et y'en fonction de x et y).
2. En déduire que le point $M'(x' ; y')$ appartient à la droite (Δ) d'équation $y = x$
3. Déterminer l'ensemble $inv(f)$ des points invariants par f
4. Démontrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
5. On considère l'application g définie dans $\mathbb{C}$ telle que $g : Z' = \frac{1}{2}(Z + iZ)$

a) Déterminer les nombres complexes a et b tels que l'application g s'écrive sous la forme $g(Z) = aZ + b$

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe a

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application g.

Exercice 45

Soit a un entier relatif et f une transformation du plan complexe P qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$f(z) = z' = (2-i)z^3 + (3+i)z^2 + 2(1+ai)z + 8 + 16i$$

1. Déterminer les polynômes g et h tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(ix) = g(x) + ih(x)$

2. Déterminer la valeur de a pour laquelle l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

3. Déterminer les nombres complexes α, β et γ tel que : $f(z) = (z - z_0)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

5. Dans le plan complexe P on donne les points A, B et C d'affixes respectives $2i$; $1 - i$ et $-2 - 2i$

a) Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui laisse le point A invariant et qui transforme C en B.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S

Exercice 46

Partie A

1. Déterminer dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les racines carrées de $\Delta = 8 - 6i$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P tel que : $P(z) = 2z^3 - (1+i)z^2 - (1+i)z + 2$

a) Vérifier que $1 + i$ est une racine de P

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :

$$P(z) = (z - 1 - i)[az^2 + bz + c]$$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives

$z_A = -1$; $z_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = 1 + i$

1. Ecrire le nombre complexe $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous la forme exponentielle

2. En déduire la nature du triangle ABC

3. Soit S la similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme A en B.

On désigne par D le point tel que A soit le milieu du segment $[CD]$.

a) Déterminer l'affixe du point D.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) En déduire le centre de S.

d) Déterminer l'affixe du point E tel que $S(D) = E$.

Exercice 47

1. On considère le polynôme P à variable complexe Z définie par :

$P(Z) = Z^3 - (5+i)Z^2 + (a+ib)Z - 8 - 16i$. Où a et b sont deux nombres réels non nuls.

a) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(Z) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $Z_I = 2i$; $Z_J = 3 + i$; $Z_K = 2 - 2i$ et $Z_A = \sqrt{3} + i$

a) Placer les points I, J, K et A dans le repère.

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

3. Soit B le point du plan tel que $Z_B = \bar{Z}_A$

a) Calculer les distances OA ; OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB.

b) Calculer l'affixe du point C pour que $AOBC$ soit un losange.

4. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O.

a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Déterminer l'expression analytique de S puis en déduire une équation cartésienne de la droite (Δ') image de la droite (Δ) : $-4x - 6y + 11 = 0$.

STATISTIQUES

Exercice 1

On donne la série statistique suivante, où α est un réel non nul donné.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	α	16	20

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 9x + 0{,}6$

1. Calculer $\bar{X}$
2. a) Exprimer $\bar{Y}$ en fonction de α
   b) Déterminer α
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. Cette corrélation est-elle faible ou forte ?
4. Estimer la valeur de y relative à $x = 3{,}2$

Exercice 2

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau ci-dessous :

X	1	1	2	1	2	0	2	0	2	1	0	2	2	2	1
Y	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1	0	-1	0	-1	1

1. Transformer ce tableau en un tableau à double entrée d'effectifs n_{ij}
2. Déterminer le point moyen $G(\bar{X};\bar{Y})$
3. Calculer les variances de X et Y.
4. Déterminer l'inertie minimum du nuage.
5. En déduire l'inertie du nuage par rapport au point $A(1;0)$

Exercice 3

Un pays est attaqué par une nouvelle pandémie : le CORONAVIRUS. On a relevé les différents cas constatés durant les semaines. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Rang des semaines	x_i	1	2	3	4	5	6
Nombres de cas confirmés	y_i	65	70	63	68	76	81

1. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique double $(x_i;y_i)$
2. Calculer $V(X)$, la variance de X
3. On suppose que cette tendance reste uniforme (la pandémie évolue de la même façon).

Déterminer par la méthode des moindres carrés la droite de régression de Y en X.

4. Combien de cas de CORONAVIRUS seront enregistrés à la dixième semaine ?

Exercice 4

Un commerçant observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires est en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires correspondant. En moyenne, le nombre de mois de l'observation de cette officine est de 8 et réalise un chiffre d'affaires de 18 millions.

X	4	5	6	x_4	10	15
Y	3	5	15	20	y_5	40

1. a) Déterminer les valeurs de x_4 et y_5

   b) On donne $x_4 = 8$ et $y_5 = 25$. Calculer la variance de X.

2. On note (Δ) la droite de régression de Y en X de pente égale à 3,33.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Δ)
   b) En déduire le nombre de mois pour lequel le commerçant possède un chiffre d'affaires de 48 millions.

Exercice 5

On considère la série statistique à deux variables réelles X et Y définie par les tableaux des distributions marginales suivantes :

X	-1	0	1
n_i	a	5	2

Y	1	2
n_j	6	b

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que les coordonnées du point moyen soient $G\left(\frac{-1}{10};\frac{7}{5}\right)$

On admet que $a = 3$ et $b = 4$

2. Transformer ces deux tableaux en un tableau linéaire à une entrée
3. En déduire le tableau non linéaire à double entrée.
4. Calculer la covariance de cette série
5. Calculer l'inertie minimale.

Exercice 6

Le tableau ci-dessous présente la taille x $(en\ centimètre)$ et la pointure y de chaussure $(en\ centimètre)$ de dix élèves choisis au hasard dans une classe de terminale D.

x	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
y	40	41	43	43	42	44	44	44,5	44,5	44

1. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de cette série statistique.
2. a) En prenant la covariance de la série $(x; y)$ égale à 9,6 et pour écart-types marginaux σ_x et σ_y respectivement égaux à 7,4 et 1,4 calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x; y)$

   b) Utiliser la méthode des moindres carrées pour donner une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x

   c) En déduire au centimètre près la pointure d'un élève de cette série dont la taille est 163 cm, dans le cas où le comportement général est proche de cet échantillon.

Exercice 7

Soit la série statistique double suivante :

$X \backslash Y$	-1	1
-2	2	1
-1	3	2
3	1	1

1. Représenter le nuage des points de la série.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y
3. Déterminer la droite régression de Y en X
4. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

   b) Apprécier cette corrélation.

Exercice 8

On considère la série statistique à double variables X et Y telle que (x_i, y_i, n_{ij}) définie par le tableau à double entrées suivant :

$X \backslash Y$	1	2
-1	2	1
0	3	2
1	1	1

1. Déterminer les deux séries statistiques marginales associées à cette série double.
2. Déterminer les coordonnées $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y.
4. Calculer l'inertie du nuage statistique par rapport au point $A(-2; 2)$.

Exercice 9

On considère les notes obtenues : X en mathématiques et Y en SVT par des élèves d'une classe de Terminale D.

2 élèves ont obtenu 4 en Mathématiques et 7 en SVT
5 élèves ont obtenu 6 en Mathématiques et 10 en SVT
3 élèves ont obtenu 8 en Mathématiques et 11 en SVT
4 élèves ont obtenu 10 en Mathématiques et 14 en SVT
1 élève a obtenu 12 en Mathématiques et 14 en SVT

1. Faire un tableau à double entrée.
2. Donner les séries marginales de X et de Y.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage des points de cette série.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
5. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de X en Y.

Exercice 10

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-2; -1), B(1; 1), C(-2; 0), D(1; 0), E(-2; 1)$ et $F(1; 1)$. On suppose que ces points sont affectés des coefficients respectifs : 2; 3 ; 1; 2 ; 2 et 0. Unité : 1cm.
1. Représenter le nuage des points de la série ainsi définie.
2. Dresser le tableau non linéaire à double entrée de cette série.
3. Déterminer les séries marginales associées à cette série statistique.
4. Déterminer les coordonnées du point moyen $G(\bar{X}; \bar{Y})$.
5. Calculer la covariance entre X et Y
6. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r
7. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point $H(-1; 1)$

Exercice 11

Le directeur des ressources humaines de l'entreprise ***POLOKOMA 2025*** doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidats Y en fonction des salaires X proposés.
Il a eu les résultats suivants :
- Salaire moyen : $\bar{X} = 600.000\ FCFA$

- Variance de X : $V(X) = 20000$
- Equation de la droite de régression de y en x : $y = 0{,}001125x - 56$
- Le coefficient de corrélation : $r = 0{,}922$

1. Déterminer le nombre moyen des candidatures $\overline{Y}$
2. Déterminer la covariance de $(X; Y)$ de la série
3. Déterminer la droite de régression de x en y
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

PROBABILITES

Exercice 1

On lance trois fois de suite un dé cubique dont deux faces partent le chiffre 1 et les autres le chiffre 2. On note à chaque lancer le chiffre obtenu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le résultat $(1; 2; 1)$?
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le chiffre 1
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 1.

Exercice 2

On dispose d'un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Le dé possède 3 faces rouges, une face orange et deux faces vertes.

Un jeu consiste à lancer une fois le dé. La règle est la suivante : le joueur mise 10 francs.

- Si la face supérieure du dé est rouge, il ne reçoit rien.
- Si la face supérieure du dé est orange, il reçoit 10 francs.
- Si la face supérieure du dé est verte, il reçoit m francs avec $m \in \mathbb{N}$ et $m > 10$.

On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue d'une partie et sa mise et soit X la variable aléatoire réelle associant à chaque lancer ce gain algébrique.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X
3. Déterminer en fonction de m l'espérance mathématique de X
4. Déterminer m pour que le jeu soit équitable c'est-à-dire $E(X) = 0$

Exercice 3

Un établissement compte trois professeurs X, Y et Z de sciences physiques.

Un sujet commun de cette discipline est composé par l'un de ces trois professeurs avec les probabilités suivantes : $P(x) = 0{,}35$; $P(y) = 0{,}40$; $P(z) = 0{,}25$.

Où $P(I)$ désigne la probabilité pour que le sujet soit composé par le professeur I.

Les étudiants craignent un sujet portant sur la relativité (événement R), et connaissant leurs professeurs ils pronostiquent : $P(R/x) = 0{,}2$; $P(R/y) = 0{,}5$; $P(R/z) = 0{,}8$

1. a) Traduire l'hypothèse $P(R/x) = 0{,}2$ par une phrase liée aux probabilités conditionnelles

   b) Traduire à l'aide d'un arbre de pondération (arbre de choix) les données de l'énoncé.
2. A l'examen, le sujet porte sur la relativité.

Quelle est la probabilité pour que le professeur X ait composé ce sujet ? On donne $P(R) = 0{,}47$

Exercice 4

Un élève sérieux de la terminale « D » d'un lycée relevant de l'inspection des lycées zone I ($ILZ1$) a 80% de chance d'avoir son baccalauréat.

Pendant les grandes vacances, il passe un concours pour intégrer une école de formation. Le concours est ouvert à tous les élèves (bachelier ou non), mais le candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% si non.

Notons B l'évènement « l'élève réussi à son baccalauréat » et A l'évènement « l'élève est admis à cette école »

1. Construire un arbre de probabilité correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité pour que l'élève réussisse à son baccalauréat et soit admis à cette école.
3. Calculer la probabilité que l'élève ne réussit pas au baccalauréat et est admis dans cette école.
4. Montrer que $P(A) = 0{,}54$

Exercice 5

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risques. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des personnes non vaccinées ne sont pas malades.

On note V l'événement « la personne est vaccinée » et M l'événement « la personne est malade ». On choisit une personne au hasard.

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langages des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cette situation.
3. Quelle est la probabilité que la personne soit malade et vaccinée ?
4. En déduire la probabilité pour une personne de contacter la maladie
5. Calculer la probabilité pour qu'une personne bien portante soit vaccinée.

Exercice 6

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale, on décide de soumettre la population menacée à un test. D'une façon générale, le résultat du test est positif pour les porteurs du virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y a des exceptions. On choisit un individu X et on considère les événements suivants :

V : « X est porteur du virus » ; $\bar{V}$ « X n'est pas porteur du virus »

T : « Le test appliqué à X est positif » ; $\bar{T}$ « Le test appliqué à X est négatif »
En désignant par $p(E)$ la probabilité de l'événement E, on admet que $p(V) = 0{,}1$ d'où $p(\bar{V}) = 0{,}9$; $p(T\ sachant\ V) = 0{,}95$ d'où $p(\bar{T}\ sachant\ V) = 0{,}05$ et $p(T\ sachant\ \bar{V}) = 0{,}03$.

1. Construire l'arbre pondéré à cette situation.
2. Calculer la probabilité des événements :

   A « X est porteur du virus et le test appliqué à X est négatif »

   B « X n'est pas porteur du virus et le test appliqué à X est positif »

   En déduire la probabilité de T puis celle de $\bar{T}$
3. Calculer la probabilité que X soit porteur du virus et que le test soit négatif
4. En déduire la probabilité que X soit porteur du virus sachant que le test est négatif.

Exercice 7

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit Rhésus positif (noté Rh^{+}) et s'il ne possède pas ce facteur, il est dit Rhésus négatif (noté Rh^{-}). Dans une certaine population P, on sait que 40% des individus ont un groupe sanguin A, 10% ont un groupe sanguin B, 5% ont un groupe sanguin AB et 45% ont un groupe sanguin O. Pour chaque groupe sanguin, la population d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit comme suit :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^{+}	82%	81%	83%	80%
Rh^{-}	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel. On choisit un individu au hasard dans la population P. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) L'individu a un sang de groupe O
b) L'individu est un donneur universel
c) L'individu a un sang de Rhésus négatif
d) Si l'individu choisit a du sang de Rhésus négatif, quelle est la probabilité que cet individu soit du groupe O ?

Exercice 8

Un pisciculteur dispose de deux étangs identiques B_1 et B_2. Il y'a 7 silures et 3 carpes dans B_1 et, 5 silures et 2 carpes dans B_2.

Le pisciculteur a faim. Il veut manger un poisson. Il choisit au hasard un étang et veut en extraire un poisson.

1. Construire l'arbre pondéré traduisant les données.
2. Quelle est la probabilité d'extraire :
   a) Un silure sachant qu'il provient de B_1 ?
   b) Une carpe sachant qu'elle provient de B_2 ?
3. Il souhaite manger une carpe. Quelle est la probabilité d'en avoir une ?
4. Il est chanceux, il vient d'extraire une carpe. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de B_1 ?

Exercice 9

On dispose de deux urnes. L'urne A contient trois boules blanches et deux boules noires, l'urne B contient deux boules blanches et trois boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de chaque urne.

1. Qu'appelle-t-on en probabilité deux évènements indépendants de même univers ?
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « Avoir quatre boules d'une même couleur »

B « Avoir deux boules blanches et deux boules noires »

C « Avoir trois boules blanches et une boule noire »

Exercice 10

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (indiscernables au toucher).

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :

A : « obtenir au moins une boule blanche »

B : « obtenir deux boules de la même couleur »

Montrer que : $P(A) = \frac{13}{28}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$

2. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.
   a) Montrer que $P(X = 2) = \frac{1}{28}$
   b) Déterminer la loi de probabilité de X
   c) Calculer l'espérance mathématique.

Exercice 11

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules, 75% de particules A et 25% de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2. L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;

- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Soit une particule au hasard. On définit les événements :

A_1 : « la particule isolée est du type A et elle entre dans K_1 » ;

A_2 : « la particule isolée est du type A et elle entre dans K_2 » ;

B_1 : « la particule isolée est du type B et elle entre dans K_1 » ;

B_2 : « la particule isolée est du type B et elle entre dans K_2 » ;

C : « la particule entre dans K_2 »

a) Calculer $P(A_1)$ et $P(B_1)$

b) Montrer que $P(A_2) = 0{,}50$ et $P(B_2) = 0{,}125$

c) Montrer que $P(C) = P(A_2) + P(B_2)$

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en 1. On admet que les proportions 75% et 25% restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement

D : « il y a exactement deux particules dans K_2 »

Exercice 12

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-après :

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,25	p_2	0,18	p_4	0,37

1. Déterminer les probabilités p_2 et p_4 sachant que $[X = 2]$ et $[X = 4]$ sont équiprobables.

2. Dans la suite de l'exercice, on prendra $p_2 = p_4 = 0{,}1$

a) Déterminer la probabilité $p = p(1 \leq x \leq 3)$

b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 13

Un sac contient 10 jetons, indiscernables au toucher dont 6 jetons numérotés 1 et 4 jetons numérotés 3. On tire simultanément 3 jetons du sac.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros sortis.

1. Donner les différentes valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$
4. Déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie ci-dessous :

$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$F(x) = 0$	$F(x) = \frac{1}{8}$	$F(x) = \frac{1}{2}$	$F(x) = \frac{7}{8}$	$F(x) = 1$

1. Représenter la fonction de répartition F dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unités graphiques : 2 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour $\frac{1}{8}$ en ordonnée.
2. Déterminer l'univers image $X(\Omega)$ de X.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Montrer que l'espérance mathématique est $E(X) = 1$
5. Calculer la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X.

PARTIE C
Géométrie

REPERAGE DANS L'ESPACE

Exercice 1

L'espace E est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On donne les points $A(-1;1;0)$; $B(-2;0;-1)$; $C(1;0;1)$ et $D(-2;1;\alpha)$

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
2. Déterminer le nombre réel α pour lequel les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient coplanaires.
3. a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$
   b) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points $A(3;-2;1)$, $B(5;2;-3)$ et $C(6;-2;-2)$.

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et BC
   b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On suppose que les points A, B et C définissent un plan.
   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;1;2)$ est normal au plan (ABC)
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D, passant pas A et orthogonale au plan (ABC) .

Exercice 3

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère les points A ; B et C de coordonnées respectives : $A(1;2;-3)$, $B(-3;1;4)$ et $C(2;6;-1)$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + z + 3 = 0$
3. Soit I le point de coordonnées $(-5;9;4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC)
4. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

Exercice 4

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, les points A ; B ; C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3;0;0)$, $B(0;6;0)$; $C(0;0;4)$ et $D(-5;0;1)$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis déduire les coordonnées du vecteur normal au plan (ABC).
2. Déterminer alors une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) et passant par D.
4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

Exercice 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points $A(1;1;0), B(1;2;1)$ et $C(3;-1;2)$.
1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$
3. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives
$x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$
Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
4. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

Exercice 6

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Les points A ; B et C ont pour coordonnées respectifs : $A(3;-2;2), B(6;1;5)$ et $C(6;-2;-1)$
1. Montrer que ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$. Montrer que le plan P est orthogonal à la droite (AB) et passant par A.
3. Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par A. Déterminer une équation cartésienne de P'.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D, droite d'intersections des plans P et P'

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère les points $A(2;1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(4;1;4)$, $D(5;3;-2)$ et $E(6;-2;-4)$
1. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC)
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE)
4. Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)
5. Déterminer un réel k tel que $\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{DF}$.

Exercice 8

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où on considère :

- Les points $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-3)$, $C(6;6;1)$ et $E(1;2;4)$
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x-y-z+4=0$

1. a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs BA et BC

2. a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC)

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E

   d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $(4;\frac{1}{2};\frac{5}{4})$

ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on donne les ensembles suivants :

$D = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = -y = z\}$; $P = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$

1. Montrer que D et P sont deux sous espaces vectoriels.
2. Donner les vecteurs de base $\vec{e}_1$ de D et $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$ de P.
3. Démontrer que D et P sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 2

A- On considère les vecteurs $\vec{U}_1(1; 1; 0; 0), \vec{U}_2(0; 1; 1; 0)$ et $\vec{U}_3(0; 0; 1; 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$

1. Montrer que la famille $F = \{\vec{U}_1; \vec{U}_2; \vec{U}_3\}$ des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^4$ est libre.
2. Soit $\vec{U}(1; 2; 3; 1)$ un vecteur de l'espace $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\vec{U}$ est une combinaison linaire des vecteurs de la famille F.

B- Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = 2x - y + z$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f puis donner une base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ du noyau de f

Exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ de base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ défini par $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ avec $\vec{u} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1. a) Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   b) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$
2. a) Montrer que $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 8\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$
   b) Montrer que f est bijectif
   c) Donner l'expression analytique de f
   d) Calculer $(fof)(\vec{u})$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristique de l'endomorphisme f.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme d'un espace vectoriel E de base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ défini par : $f(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$, avec $\overrightarrow{e_1} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1. a) Montrer que le couple $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   b) Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$
2. Montrer que $f(\vec{\imath}) = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$
3. a) Déterminer $fof(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\jmath})$ puis en déduire la nature de f
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de f

4. On donne le vecteur $\vec{w} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$
   a) Ecrire $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$
   b) Donner l'expression de $f(\vec{w})$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel E muni de sa base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de E définis par : $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1. Quelle est la dimension de l'espace E ? Justifier la réponse.
2. Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E.
3. Exprimer le vecteur $\vec{w} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.
4. Soit f l'endomorphisme de E défini relativement à la base $(\vec{u}; \vec{v})$ par :

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$
   a) Exprimer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
   b) Déterminer l'expression analytique de f relativement à la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
   c) Déterminer fof puis déduire la nature de f

Exercice 6

Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On considère f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $f_a(\vec{\imath}) = \frac{2}{3}\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ et $f_a(\vec{\jmath}) = -\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}$ où a est un nombre réel.

1. Ecrire la matrice M de f_a dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$
2. Déterminer le réel a pour que f_a soit une projection vectorielle
3. Dans la suite on donne $a = -\frac{1}{3}$. Soit $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, montrer que $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$
4. f étant une projection vectorielle, déterminer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Déduire de ce qui précède pour tous réels x et y on a : $f(x\overrightarrow{e_1}) = x\overrightarrow{e_1}$ et $f(y\overrightarrow{e_2}) = \vec{0}$

5. Quelles sont la base et la direction de f.

Exercice 7

Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les ensembles (D_1) et (D_2) définies par :

$(D_1) = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + 6y = 0\}$ et $(D_2) = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / -2x + 3y = 0\}$

I- 1. Justifier que (D_1) et (D_2) sont des sous-espaces vectorielles de $\mathbb{R}^2$
   2. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont respectivement engendrées par les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = -6\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
   3. Monter que $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

II- Soit f la symétrie vectorielle de base (D_1) et de direction (D_2)

1. Exprimer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2. Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
3. Vérifier que fof est égale à l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Dans le plan vectoriel E muni de sa base canonique $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les droites vectorielles (D_1) et (D_2) définies par :

$(D_1) = \{\vec{u}(x;y) \in E/2x - y = 0\}$ et $(D_2) = \{\vec{u}(x;y) \in E/x + y = 0\}$

1. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont respectivement engendrées par les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$
2. Vérifier que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
3. Soit f la symétrie vectorielle de base (D_1) et de direction (D_2)
   a) Calculer $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
   b) Calculer les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
   c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
4. Soit le vecteur $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par f.
   a) Exprimer les coordonnées x' et y' de $\vec{u}'$ en fonction de x et y de $\vec{u}$
   b) Vérifier que fof est l'identité du plan vectoriel E.

Exercice 9

On rappelle qu'une partie U d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si :

a) U est non vide
b) $\forall\, \vec{u},\vec{v} \in U$ et $\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}, (\alpha\vec{u} + \lambda\vec{v}) \in U$

Soit U_1 et U_2 deux sous espaces vectoriels de E.

1. Démonter $U_1 \cap U_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles U_1 et U_2 définis par :
   $U_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3/x - y + 2z = 0\}$; $U_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3/y = 2x \; et \; z = x\}$
   a) Déterminer le réel a pour que le vecteur $\vec{w}(2;a;1) \in U_1$
   b) Démontrer que U_1 et U_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
   c) Les sous-espaces vectoriels U_1 et U_2 sont-ils supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10

Soit E est un espace vectoriel de dimension 2 muni de sa base canonique $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E tels que : $\vec{u} = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$

On désigne par f l'endomorphisme de E dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3y \\ y' = \frac{1}{12}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base B.
2. Donner la matrice M de f dans la base B.
3. a) Calculer $fof(\vec{\imath})$. En déduire la nature de f.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f (base et direction)
4. a) Montrer que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E.
   b) Exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base $(\vec{u};\vec{v})$
   c) Donner la matrice N de f dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 11

E est un espace vectoriel muni d'une base canonique $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère l'endomorphisme f de E définie par : $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

1. a) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
   b) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
2. a) Déterminer le noyau de f noté $Ker(f)$
   b) Déterminer l'image de f notée $Im(f)$
3. Soit g la symétrie vectorielle de base $B = \{\vec{u} \in E/2x - y = 0\}$ et de direction $D = \{\vec{u} \in E/x + 2y = 0\}$
   a) Déterminer $g(\vec{\imath})$ et $g(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
   b) Déterminer l'expression analytique de g
4. On donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
   a) Monter que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E.
   b) Donner la matrice de g dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 12

Dans le plan vectoriel E de base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on considère les droites vectorielles F et G engendrées respectivement par la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ par $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1. Qu'appelle-t-on un endomorphisme de f ?
2. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
3. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} \end{cases}$
   a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $B' = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$
   b) Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
   c) Donner la matrice de f dans la base $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$

4. Soit $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
   a) Exprimer les coordonnées x' et y' en fonction de x et y de f
   b) Calculer $fof(\vec{u})$
   c) En déduire la nature de f
   d) Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 13

Soit f l'endomorphisme d'un espace vectoriel E dans la base canonique $(\vec{i};\vec{j})$ défini par : $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i};\vec{j})$
2. Démontrer que f est une bijection de E
3. Déterminer les valeurs du réel λ telles que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$; où $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur de E.
4. H et G sont deux sous-ensembles de E tels que :

$$H = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\} \text{ et } G = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 4\vec{u}\}$$

   a) Montrer que H est une droite vectorielle et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$
   b) Montrer que G est une droite vectorielle et en donner une base $\overrightarrow{e_2}$
   c) Montrer que la famille $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   d) Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

Exercice 14

I- Qu'appelle-t-on :
   a) Application linéaire ?
   b) Endomorphisme ?

II- Soit E un espace vectoriel de la base $(\vec{i};\vec{j})$ et f l'endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et $f(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{0}$

1. Montrer que $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$
2. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{i};\vec{j})$
3. Montrer que f n'est pas bijectif
4. Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\vec{i};\vec{j})$
5. Déterminer le noyau de f. En donner une base $(\vec{e}_1)$
6. Déterminer l'image de f. En donner une base $(\vec{e}_2)$
7. On donne $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$
   a) Montrer que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de E
   b) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 15

I- Soit f une application linéaire de E vers F. Définir les termes suivants :

a) épimorphisme
b) isomorphisme
c) endomorphisme

II- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{\imath}) = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

1. Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2. Déterminer l'expression analytique de f
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f
4. On donne $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
   a) Montrer que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   b) Exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
   c) Donner la matrice N de f dans la base $(\vec{u}\,;\vec{v})$

Exercice 16

Dans le plan vectoriel E muni de la base canonique $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}(-2;\alpha)$ et $\overrightarrow{e_2}(6;4)$ où α est un réel.

1. Déterminer la valeur de α, pour que $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ soient orthogonaux.

Dans la suite, on posera $\alpha = 3$

2. Montrer que $B' = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est une base orthogonale du plan E.
3. Soit (D) la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2}$, d'équation cartésienne $2x - 3y = 0$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de la droite vectorielle (D') de base $\overrightarrow{e_1}$
   b) Déterminer l'intersection $(D') \cap (D)$
4. En déduire que (D) et (D') sont deux sous espaces supplémentaires de E.
5. Soit f la projection vectorielle de E de direction (D) et de base (D')
   a) Exprimer les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$ dans la base $B' = (\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$
   b) Exprimer les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
   c) Ecrire la matrice de f dans la base $B = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Exercice 17

E est un plan vectoriel, $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ une base de E et f un endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
2. Pour tout réel α, on note E_α l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tel que : $f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.
   a) Montrer que, si α est différent de 1 et -1, E_α est réduit au vecteur nul.

b) Déterminer les ensembles E_1 et E_{-1} en donner une base pour chacune, nommée respectivement $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

3. a) Démontrer que le couple $(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,)$ est une base de E.
   b) Peut-on connaitre $f(\overrightarrow{e_1}\,)$ et $f(\overrightarrow{e_2}\,)$ sans calcul ? Justifier.
   c) Si oui donner la matrice A de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,)$
4. a) Montrer que f est involutif, c'est-à-dire : $\begin{cases} fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \end{cases}$ ou $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) En déduire la nature de f et donner les éléments caractéristiques.

<u>Exercice 18</u>

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa bas canonique $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On donne $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$. Soit E_1 le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ tel que $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ et E_2 le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\vec{w}$

1. a) Montrer que E_1 est un sous espace de $\mathbb{R}^3$
   b) Montrer que la famille $(\vec{u};\vec{v})$ est une famille génératrice de E_1
   c) Montrer que la famille $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   d) Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(\vec{u}) = \vec{u}$, $f(\vec{v}) = \vec{v}$ et $f(\vec{w}) = -\vec{w}$
   a) Déterminer $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$
   b) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$
   c) Déterminer l'expression analytique de f.

<u>Exercice 19</u>

Soit l'espace vectoriel réel E, rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel E défini dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ par : $f(\vec{u}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

1. Déterminer les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2. Soit le vecteur $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par l'endomorphisme f tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$
   a) Exprimer les coordonnées x' et y' du vecteur $\vec{u}'$ en fonction de x et y celles de $\vec{u}$
   b) Calculer la composée $fof(\vec{u})$
   c) En déduire la nature de l'endomorphisme f
3. a) Montrer que le sous ensemble B de E défini tel que : $B = \{(x, y) \in E / x + y = 0\}$ est la base de l'endomorphisme f
   b) Montrer que le sous ensemble D de E défini tel que $D = \{(x, y) \in E / 3x + y = 0\}$

est la direction de l'endomorphisme f

4. a) Vérifier que $(\vec{u};\vec{v})$ tels que $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$, est une base de l'espace E.
   b) Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 20

E est un espace vectoriel muni de sa base canonique $B=(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et f, un endomorphisme de E.

1. Montrer que l'ensemble $E_\lambda=\{\vec{u}\in E/f(\vec{u})=\lambda\vec{u},\lambda\in\mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de E.

2. Soit l'endomorphisme f défini par : $\begin{cases} f(\vec{\imath})=\frac{1}{3}\vec{\imath}+\frac{2}{3}\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath})=\frac{4}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}\end{cases}$

   a) Déterminer les sous espaces vectoriels E_1 et E_{-1} tels que :
   $E_1=\{\vec{u}\in E/f(\vec{u})=\vec{u}\}$ et $E_{-1}=\{\vec{u}\in E/f(\vec{u})=-\vec{u}\}$
   b) Montrer que f est une symétrie vectorielle.

3. En déduire les éléments caractéristiques de f

4. On donne $\vec{e}_1=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$
   a) Montrer que le couple $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E.
   b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

Exercice 21

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} h(\vec{\imath})=5\vec{\imath}-2\vec{\jmath} \\ h(\vec{\jmath})=10\vec{\imath}-4\vec{\jmath}\end{cases}$

1. Exprimer $h(\vec{\jmath})$ en fonction de $h(\vec{\imath})$.
2. Soit $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{u}'=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u}'$ soit l'image de $\vec{u}$ par h. Exprimer x' et y' en fonction de x et y
3. Ecrire la matrice de h dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
4. Déterminer l'ensemble $E_1=\{\vec{u}(x;y)\in\mathbb{R}^2/h(\vec{u})=\vec{u}\}$ et en déduire sa base $(\overrightarrow{e_1})$
5. Déterminer l'ensemble $E_2=\{\vec{u}(x;y)\in\mathbb{R}^2/h(\vec{u})=\vec{0}\}$ et en déduire sa base $(\overrightarrow{e_2})$
6. Déterminer $hoh(\vec{\imath})$ et $hoh(\vec{\jmath})$ et en déduire la nature de h.
7. Caractériser h.
8. Donner la matrice de h dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$

Exercice 22

1. On donne l'ensemble D défini par : $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x-2y=0\}$
Montrer que l'ensemble D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\begin{cases} 3f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ 3f(\vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$

   a) Déterminer la matrice A de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$
   b) Montrer que le produit $A \times A = I$ où I est la matrice identité d'ordre 2.
   c) En déduire la nature de l'endomorphisme f
   d) Déterminer la base B et la direction D de l'endomorphisme f

3. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

   a) Montrer que la famille $\{\vec{u}; \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   b) Exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
   c) En déduire la matrice M de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$

Exercice 23

$E = (\mathbb{R}^2; +; .)$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la base canonique $B = (\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit g l'endomorphisme de E défini par : $3g(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $3g(\vec{\jmath}) = -8\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1. a) Montrer que la matrice de g dans la base B est $M_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

   b) Montrer que g est un isomorphisme de E.

2. Soit le sous-espace vectoriel de E : $D_1 = \{\vec{U}(x; y) \in E / x + 4y = 0\}$.
Soit $\vec{V}_1 = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}$ un vecteur de D_1.
Montrer que $g(\vec{V}_1) = \vec{V}_1$.

3. $D_2 = \{\vec{U}(x; y) \in E / x - 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $\vec{V}_2 = a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath}$ un vecteur de D_2.
Montrer que $g(\vec{V}_2) = -\vec{V}_2$.

4. Calculer $M_g \times M_g$. En déduire que g est une symétrie vectorielle.

5. a) Donner les éléments caractéristiques de g

   b) Justifier que D_1 et D_2 sont deux sous espaces supplémentaires de E.

Exercice 24

Soit $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel muni de sa base canonique $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. L'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ est défini par : $g(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $g(\vec{\jmath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ où a et b sont des réels.

   a) Déterminer $gog(\vec{\imath})$ et $gog(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$
   b) Déduire les valeurs de a et b pour les quelles g est une projection vectorielle.

2. On donne les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$
Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

3. On considère l'endomorphisme f de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

a) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$
b) En déduire l'expression analytique de f
c) Déterminer le noyau $Kerf$ de f
d) Déterminer l'ensemble G définis par $G = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{X}) = \vec{X}\}$
e) Montrer que f est une projection vectorielle. Préciser sa base et sa direction.
f) On donne $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Déterminer $fofofofofof(\vec{w})$

Exercice 25

I. On considère l'ensemble (H) tel que : $(H) = \{\vec{u}(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$
1. Montrer que (H) est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$
2. a) Déterminer une base de (H)
b) (H) admet-il d'autres bases ? Justifier la réponse.
c) Préciser la dimension de (H)

II. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui, au vecteur $\vec{u}(x;y;z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x';y';z')$
tel que : $f = \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases}$
1. Soit les ensembles (E_1) et (E_2) tels que : $(E_1) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $(E_2) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
a) Montrer qu'une équation de (E_1) est $y - z = 0$. Préciser une base de (E_1).
b) Montrer qu'une équation de (E_2) est : $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Préciser une base de (E_2)
2. Déterminer fof
3. En déduire la nature de f ; puis préciser les éléments caractéristique de f.

Exercice 26

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$; soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\begin{cases} x' = -2x + 4y + 2z \\ y' = -4x + 8y + 4y \\ z' = 5x - 10y - 5z \end{cases}$
1. Déterminer le noyau $Ker(\varphi)$ de φ et en donner une base $\beta_1(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants $Inv(\varphi)$ par φ et en donner une base $\beta_2(\overrightarrow{e_3})$.
3. Montrer que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de $Ker(\varphi)$ et $Inv(\varphi)$?
4. On donne $\overrightarrow{W}(5;5;-4)$ de $\mathbb{R}^3$, trouver les vecteur $\vec{U}$ de $Kerf(\varphi)$ et $\vec{V}$ de $Inv(\varphi)$ tels que $\overrightarrow{W} = \vec{U} + \vec{V}$
5. Donner la matrice de φ dans la base β.

Exercice 27

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=\vec{i}$; $\overrightarrow{e_2}=\vec{j}+\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3}=\vec{i}+\vec{k}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(\vec{i})=\vec{i}$; $f(\vec{i}-\vec{j})=-(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$ et $f(\vec{j}+\vec{k})=\vec{j}+\vec{k}$

1. Déterminer les vecteurs $f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}$; $\vec{j}$ et $\vec{k}$
2. Ecrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
3. Montrer que f est bijectif puis en déduire le noyau et l'image de f.
4. Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
5. a) Montrer que f est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la base B et la direction D de f
6. a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   b) Ecrire la matrice M' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$.

Exercice 28

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à une base $B=(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit analytiquement par : $\begin{cases} x'=x+2y-2z \\ y'=2x+y-2z \\ z'=2x+2y-3z \end{cases}$

1. Donner la matrice M de f dans la base B
2. Déterminer $f(\vec{i})$; $f(\vec{j})$; $f(\vec{k})$
3. Montrer que f est une symétrie vectorielle que l'on caractérisera
4. On donne $\overrightarrow{e_1}(1;1;1)$, $\overrightarrow{e_2}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{e_3}(0;1;1)$
   a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer $f(\overrightarrow{e_1})$; $f(\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_3})$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$
   b) Donner la matrice M' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$

Exercice 29

Le plan vectoriel $(\mathcal{V})$ est muni de sa base canonique $(\vec{i};\vec{j})$. On considère f_a l'endomorphisme de $(\mathcal{V})$ défini par : $f_a(\vec{i})=a\vec{i}+(2a-2)\vec{j}$ et $f_a(\vec{j})=\vec{i}-\frac{3}{2}a\vec{j}$ où a est un nombre réel.

1. Donner l'expression analytique de f_a
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f_a est un autormphisme de $(\mathcal{V})$.
3. Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble des vecteurs invariants par f_a
4. Pour quelle valeur de a f_a est une projection vectorielle ?
5. Dans la suite on donne $a=-2$, déterminer le noyau et l'image de f_{-2}

NOS CENTRES D’ENCADREMENT

Site 1 : Quartier **Vindoulou**, arrêt église catholique en allant vers le secteur Douanier.
Site 2 : Quartier **Makayabou 418**, vers le terminus

Suivez nous sur :
Facebook : Bureau du Centre Académique –BCA
Whatsapp : +242 06 810 90 90 / +242 06 71332 41

Contactez-nous aux numéros indiqués à l’entête de chaque page pour plus d’informations.