« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que je n'ose pas, mais c'est parce que je n'ose pas qu'elles sont difficiles »

Partie A

Exercice 1

1-Ecrire le plus simplement possible les nombres suivants :

$$A = \sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{\sqrt{72}-\sqrt{18}+\sqrt{27}-\sqrt{75}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad ; D = \sqrt{3(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$$

2-Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers :

$$A = \frac{(0{,}6)^2\times 12^5\times 54^3}{9^2 5^3 (0{,}8)^3 (0{,}4)^4} \quad ; B = \frac{10^2\times 3^2}{8\times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5\times 3^9}{6}} \quad ; c = \frac{(0{,}009)^{-3}\times(0.016)^2\times 250}{(0{,}00075)^{-1}\times(810)^3\times 30}$$

3-A-Soit a, b et c trois nombres réels non nuls, Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^m b^n c^p$ ou m, n et p sont des entiers relatifs

$$D = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times \left(\frac{c}{ab}\right)^{-2} \times \left(\frac{a}{bc}\right)^{-3} ; \ E = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times \left(\frac{c^2}{a^3 b}\right)^{2} \times \left(\frac{a^4}{bc^2}\right)^{-3};$$

$$F = \frac{(a^2c)^{-4}\times(-b^2c)^5\times(a^3bc^{-1})^{-2}}{(-a^2b^{-3}c)^3(-b^4)(a^{-5}c)^2}$$

B- Ecrire sous la forme $2^m\, 3^n\, 5^p$ (m, n, p entiers relatifs) l'expression suivante :

$$A = \frac{(-0{,}036)^{-2}\times(1600)^3\times(-0{,}25)^3}{(48)^{-5}\times(75^2)^{-3}} \quad ; \quad B = \frac{(0{,}09)^{-3}\times(0{,}16)^2\times 25}{(0{,}0075)^{-1}\times 810^3}$$

Exercice 2: Calculer les nombres suivants :

$$A = \left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}\right)\times\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}\right) \quad ; B = \frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{8-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}} \quad ; \ C = \frac{9-\frac{-1}{3}\times 5+\frac{7}{10}}{4+\frac{2}{5}-3\left(3^{-1}\times 2^2\right)^3}$$

$$D = \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\times\frac{\frac{7}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}-1}\times\frac{18}{10}\right):\left(\frac{2}{7}\times\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}\right) \quad ; \quad E = \frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}-3\times\frac{4}{35}}:\frac{2}{1+\frac{1}{7-\frac{1}{7}}}$$

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{64^2\times(-15)^3\times 21^{-3}}{-(7)^{-5}\times 24^2\times(-30)^4} \qquad B = \frac{(-2)^{-5}\times 7^8\times(-25)^3}{(-10^4)\times 35^5} : \frac{(-42^2)\times 14^3\times(-70)^2}{(-50)^4\times(-49)^2}$$

$C=\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}}{\sqrt{135}-\sqrt{15}}$ $\quad$ $D = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercice 4 :

1.Soit $p \in \mathbb{R}_+$ n , montrer que $\sqrt{p+1}$ - $\sqrt{p}$ est l'inverse de $\sqrt{p+1}+\sqrt{p}$.

2-Ecris sans radical au dénominateur $\frac{1}{\sqrt{p+1}+p}$

3.En déduire une expression simple de la somme :

$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots \qquad + \frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$.

4.Détermine le plus grand entier naturel n tel que :

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots \qquad + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 9$

Exercice 5 On considère le réel $X = \sqrt{12-3\sqrt{7}}-\sqrt{12+3\sqrt{7}}$

a-Déterminer le signe de X.

b-Calculer X^2.

c-En déduire la valeur de X.

d-Calculer : $A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$ et $B = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\times\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$

1- Factoriser complètement les expressions :

$A = (4a^2+b^2-9)^2-16a^2b^2$ et $B = x^3+(x+2)(x-3)-8+x^3-27$

2-Développer, réduire et ordonner :

$C = (x-3)^3+(x+2)^3$ et $D = (2x+y+z)^2$.

Exercice 6: Dans chacun des cas suivants étudier le signe de X, calculé X^2, en déduire X.

a) $X=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$
b) $X=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
c) $X=\sqrt{12-3\sqrt{7}}-\sqrt{12+3\sqrt{7}}$

Exercice 7

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x < y$. Notons

$a = \frac{x+y}{2}$; $g = \sqrt{xy}$; $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

1- Démontrer que : $x < h$ et $a < y$

2-Démontrer que : $g < a$

3-Démontrer que : $g^2 = ha$. En déduire que : $h < g$

4- Ranger par ordre croissant les nombres : x ; y ; a ; g et h

Exercice 8 : E(x) est la partie entière de x

1-Calculer E(x) pour les valeurs de x appartenant à l'ensemble :

A= {34,72 ; 0,998 ; -3,99998 ; -17,004}

2-Comparer les nombres E(x)+E(y) et E(x + y) pour :

a- x =14,85 ; y = 8,87

b- x = -0,0477 ; y = -0,00874

c- x = -27,12 ; y=13,45

Quelle conjoncture peux-tu émettre ?

3- x et y sont des réels. Démontrer que :

a)$x-1<E(x) \leq x$ et b) $E(x + y) \geq E(x)+E(y)$.

Exercice 9 :

A-Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

a) $|2x + 7| = 4$; b) $|x + 3| - |1 - x| = 0$; c) $|x + 1| = 2x - 1$; d) $|2x - 1| \leq 2$

e) $|3x + 1| > -4$. f) $|-4x - 2| \leq 3$. ; g) $|5x - 3| \leq -2$ h) $|-3x + 2| = 5x - 2$

i) $|-x + 6| + |3x - 2| \leq 3$; j) $|5x + 7| - |4x - 1| = x + 5$

k) $|14x - 18| - |-7x + 9| = -4$; l) $|2x - 1| + |3x - 1| < 4$.

m) $|x + 6| + |x - 10| \leq 16$; n) $1 \leq |2x + 1| \leq 4$ o)$|x + 1| = x + 1$;

p) $|2x - 3| = 1 - \sqrt{2}$ Q) $\left|5 - |2x - 4|\right| = 0$

B- Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0{,}3$; **b)** $\left|(x - 3)(\sqrt{2}x - 6)\right| = 0$; **c)** $|x| + x = 0$

d) $2|x - 1| - 3|2x + 3| = 5|x + 2|$; **e)** $d(x;0) + d(x;2) = 2$

f) $d(x;1) < d(x;-1)$; **g)** $|x + 1| - 2|x + 1| \leq -3$; **h)**$\sqrt{(2x - 1)^2} < 2$

C-Résoudre dans les équations et inéquations suivantes :

a)$E(x - 3) = 4$; b) $E(|x - 3|) = 4$ c) $E(x) \leq x$; d)) $E(x) \leq 3$ et e)) $E(x - 2) \geq -5$

Exercice 10 : Soit l'expression $f(x) = |x - 2| + |-3x + 9|$

a-Ecrire f(x) sans les valeurs absolues

b-En déduire la résolution de $f(x) = 2$

Exercice :11

Exercice1: (10pts)

1.Calculer $(3 + 2\sqrt{2})^{2018} \times (3 - 2\sqrt{2})^{2018}$.

2.On donne $A = (-2)^7 \times \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$ .Ecrire A sans radical

3.On donne B == $\frac{(-ab^{-1})^2 \times (-b^2c)^{-2}}{-a^{-3} \times c^5 \times (b\,c^{-2})^4}$. Ecrire B sous la forme $a^m \times b^n \times c^p$ ou m , n et p sont des entiers relatifs.

4.a. Comparer $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$. En déduire le signe de A = $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

b. calculer A^2.En déduire A

5. Démontrer que $\frac{3+|3-2\sqrt{7}|-(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{7})^2}}+1=0$

6.Résoudre dans ℝ l'équation et l'inéquation suivantes :

a. $\sqrt{(2x+3)^2} \leq 0$; b. $|x+3| = 4-5x$.

7.Soit à résoudre $x\,, y \; et \; z$ trois réels deux à deux distincts tels que :

$x+\frac{1}{y} = y+\frac{1}{x} = z+\frac{1}{x}$ .Montrer que $xyz = 1 \; ou \; xyz = -1$

8. Soit x et y deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer que $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ et $\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geq 2$

9.Soient a et b deux réels strictement positifs.

Démontrer que **:** $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Exercice 12 Soient $x \; et \; y$ deux réels tels que $|x| < 1 \; et \; |y| < 1$. Montrer que $\left|\frac{x+y}{xy+1}\right| < 1$

Exercice 13 Démontrer que ∀ a ,b positifs on a : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Exercice 14 Démontrer que $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ avec n $\epsilon \; \mathbb{N}^*$

Exercice 15

1-Montrer que ∀ n $\epsilon \; \mathbb{N}^*$ $1-\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$

2-En déduire que $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{19^2}\right)$

Partie B

Exercice 16

A- On donne A = $\frac{(-1)n}{\sqrt{n}}$ et B = $\frac{(-1)n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

1-Montrer que B = A + A^2

2- En déduire que $\frac{B}{A} = 1+A$

B-$\forall n \epsilon IN$, Montrer que $(n^2+3n+1)(n^2+3n+3)+1$ est un carré parfait.

Exercice 17: Soient a et b deux réels tels que: $a^2+b^2=1$. Montrer que $|a+b| \leq 2$

Exercice 18 Soit x et y deux réels strictement positifs.
Montre que $(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8xy$

Exercice 19 ∀ $n\epsilon \; IN^*$ **;** Démontrer que $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Exercice 20 soient x y et z trois réels strictement positifs
Montrer que : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$

Exercice 21 soient x et y des réels strictement positifs.
Montrer que : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$

Exercice 22 Soit a ; b et c des réels
Montrer que $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0 \rightarrow \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} < \sqrt{2}(a+b+c)$

Exercice 23 Soit a ; b et c des réels tels que $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$
Montrer que $si\ a \times b \times c = 1\ alors\ \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+a+1}=1$

Exercice 24

1-Soit A= $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$
a-calculer A^2
b-Déduis une expression simple de A.

2-Simplifie B= $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

3-Soit nϵ IN, simplifier c= $\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}$ à l'aide de puissance positives de 2 et de 3.

Exercice 25

1- x est un réel non nul.On pose : $x - \frac{1}{x} = 3$.
Montrer que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$ et que $x^3 - \frac{1}{x^3} = 36$

2- a est réel positif. Simplifier $\frac{a^2+3a}{a(a+6)+9}$

Exercice 26 Soit a ; b et c trois nombres réels non nuls tels que: $ab+bc+ac=0$
calculer $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$

Exercice 27 Soient x et y deux réels
Montrons que : $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{y}{y^2+y+1} \leftrightarrow xy=1\ ou\ x=y$

Exercice 28
1-Soit a ; b et c trois nombres réels
Montrer que: $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$
2-Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Montrer que : $\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Exercice 29 Soit a ; b et c trois nombres réels tels que : a + b + c =0
Montrer que: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Exercice 30 Soit a et b deux réels non nuls tels que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

1-Montrer que : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7$

2-Détermine la valeur de: $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}$

3-Sachant que a et b sont positifs , détermine la valeur de $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

Exercice 31 Développer les expressions suivantes :

$A=(2-\sqrt{3})^3$, $B=(-1-\sqrt{2})^3$, $c=(2\sqrt{2}+3)^3$

Exercice 32 Rendre rationnels

$A=\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $B=\frac{2}{3-\frac{1}{1-\sqrt{3}}}$ et $C=\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}$.

Exercice 33 Calculer A= $\left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right]^2+\left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right]^2$ et B= $\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]^2$.

Exercice 34 On considère le réel X = $\sqrt{12-3\sqrt{7}}-\sqrt{12+3\sqrt{7}}$

1- Déterminer le signe de X.

2-Calculer X^2.

3-En déduire la valeur de X.

4-Calculer : A = $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}$ et B = $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\times\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

Exercice 35 Mettre sous la forme a+$b\sqrt{c}$ ou a ; b et c ϵ IN

$A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ et $B=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

Exercice 36

Soient a et b deux réels strictement positifs. On considère A et B définis par :

A=$a^2\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{8}+a^2\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{8}$ et B=$\frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$.

a−Montrer que A=$2a^2$ et B= $\frac{2\sqrt{3}}{b^2}$.

b − Montrer que $A\times B=\left(\frac{a}{b}\right)^2.4\sqrt{3}$.

c − Montrer que $\frac{A}{B}=(ab)^2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 37 Soient quatre entiers naturels consécutifs n, n+1, n+2, n+3

1-Démontrer que $(n+1)(n+2)=n(n+3)+2$

2-On pose $(n+1)(n+2)=a$.

a-Exprimer en fonction de a le produit P = $n(n+1)(n+2)(n+3)$.

b- En déduire que P+1 est un carré parfait.

Exercice 38 Soient x et y deux réels tels que $x>y>0$,

Montrer que : $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$; $\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2=2(x+y)$

Exercice 39

1-Soient a, a', b, b', c et c' des réels strictement positifs tels que: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

Montrer que $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$

2-Soit $b = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}}}$ et soit $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $a^2 = a+1$.

En déduire que $b = a$. Le nombre a est appelé nombre d'or.

Exercice 40: Soit a et b deux réels strictement positifs

1-Démontrer que $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$. En déduire que $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$

2-Démontrer que $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b+c} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$

Exercice 41

Soit trois réels x y et z strictement positifs

1) démontrer que $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ *et que* $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

2) Soit x ; y et z trois réels positifs donnés

a-Prouve que $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

b-Montre que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

3) Démontrer que $\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{1}{X} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Exercice: 42

Montrer que si a, b et c sont les longueurs d'un triangle alors $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$

Exercice: 43

1-Soient a et b deux réels tels que ab>0. Montrer que :$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2-En déduire que pour tout a>0 , a $+\frac{1}{a} \geq 2$

Exercice 44 Soit n un entier naturel

1-Ecris sans radical au dénominateur $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2- En déduire une expression simple de S $= \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

Exercice 45

1-Montrer que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$; quels que soit les réels a et b.

2-Montrer que pour a , b, c strictement positif (a^2+b^2) c + (b^2+c^2)a + (c^2+a^2)b $\geq 6ab$

Exercice 46: Soient x, y et z trois réels tous non nuls tel que: x + y + z = 0.

Démontrer que $\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right)\left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right) = 9.$

Exercice 47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $E\left(\frac{x}{3}\right) = -2$; b)$E(5x-2) = 3$; c) $E\left(\frac{1}{x}\right) = -4$; d) $E(2x-1) = E(x-4)$.

Exercice 48: On pose $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1-Exprimer $\emptyset^2$ et $\frac{1}{\emptyset}$ en fonction de $\emptyset$.

2-Montrer que $13\emptyset^5 = 65\emptyset + 39$

3-Montrer que $\frac{5}{\emptyset^7} = 65\emptyset - 105$

4-Déduire de 2) et 3) que $13\emptyset^5 - \frac{5}{\emptyset^7} = 144$

Exercice 49

Soit le nombre $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ appelé nombre d'or.

1- Déterminer l'inverse de T.

2-Vérifier que $\frac{1}{\emptyset} = \emptyset - 1$ puis en déduire que $\emptyset^2 = 1 + \emptyset$

3- Montrer que $\emptyset^3 = 2\emptyset + 1$

4- Montrer ainsi que $\frac{\sqrt{\emptyset}}{\sqrt{\emptyset-1}} + \frac{\sqrt{\emptyset-1}}{\sqrt{\emptyset}} = \sqrt{5}$

5- Démontrer que pour tout entier naturel n ; $\emptyset^{2n} = \emptyset^{2n-1} + \emptyset^{2n-2}$

<u>Exercice 50</u> Soient a , b , c et d, des réels strictement positifs
Montrer que $(a^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)+(d^2+1) \geq 16$

<u>Exercice 51</u> Soit n un entier naturel non nul.

1) Prouver que $\sqrt{2n-1} \times \sqrt{2n+1} < 2n$. 2) En déduire que : $\frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$.

3) Démontrer que : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

<u>Exercice 52</u>

1-Rendre rationnel le dénominateur de la fraction : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$,

2-Calculer la somme : $S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$

<u>Exercice</u> 53

Démontrer que si a, b et c sont les longueurs d'un triangle alors $\frac{a}{b+C} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 3$

<u>Exercice 54</u>

1- Développer $(2x + y)^2$ .En déduire que $4x^2 + y^2 \geq 4xy$

2- En utilisant 1**),** démontrer que si alors 2x + y = 1 alors $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$

<u>Exercice 55</u> Soit a $\in \mathbb{R}$.

1.a.Développer $(1-a)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)$.

b. En déduire pour a ≠ 1 **on a :** $1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6 = \frac{1-a^7}{1-a}$.

2.Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Montrer $(1-x)(1+x+x^2+\cdots \quad + x^{n-1}) = 1 - x^n$.

3.En appliquant la question 1) b), trouver la valeur exacte de la somme :

$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729}$

« Chers élèves, ce n'est pas le chemin qui est difficile, c'est le difficile qui est le chemin. »
DIOMATHS