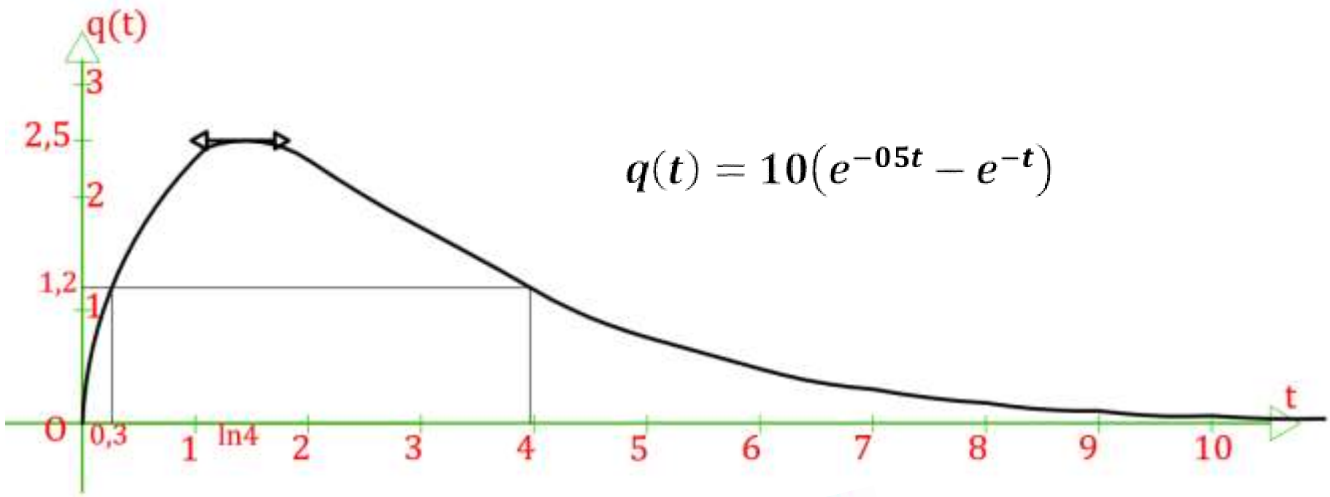
$N \equiv 30[7] \Longrightarrow N \equiv 2[7]$

EXCELLENCE MATHS

Correction des dix derniers sujets du Baccalauréat Malien

Séries : TSE, STI et MTGC



$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x).\cos^n(x)\,dx = -\left[\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$T_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$z_k = \left[1;\frac{2k\pi}{n}\right]; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Année scolaire : 2018-2019

EXCELLENCE MATHS

Enoncés et corrigés des exercices des sujets du baccalauréat Malien de 2009 à 2018

Séries : TSE, STI et MTGC

Auteur : Mahamadou BAGAYOKO

Master Mathématiques ENSup Bamako

Adresse : Titibougou-Bamako

Tél : 75884726 Email : mbaga21@yahoo.com

Table des matières

Bac 2018 : Enoncé du Sujet

Exercice 1 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$(E) : z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

Partie A :

1) Montrer que $-i$ est solution de (E).
2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$ et $-i$.

1) Placer les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.
2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.

Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r. Calculer l'affixe de S.

3) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle.
4) A tout point d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z'

$$z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$$

   a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B, C.
   b) Vérifier que A', B' et C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.
   c) Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de z.
   d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.
   e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M.

Exercice 2 : (4 point)

I) On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$, où $(x\ ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1)
   a) Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers $(a\ ; b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

   a) Montrer que le couple $(a\ ; -b)$ est solution de (E).
   b) Quel est le reste de la division de N par 40 ?

3)
   a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   b) Au VIIIè siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge.

Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

II) On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \quad (E).$$

1) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{2x} g(x)$$

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si : $g'(x) = -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2) En déduire toute les solutions de (E).

Problème

A)

1) On définit la fonction g *sur l'intervalle* $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1).$$

   a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$

En déduire la limite de g lorsque x tend vers 1.

   b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
   c) Résoudre l'inéquation : $1 - \ln(x - 1) > 0$, d'inconnue x appartenant à $]1\,;\,+\infty[$.
   d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
   e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e + 1\,;e^3 + 1]$ puis étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

   a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ *et prouver que* $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x) = 0.$
   b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ *a le même signe que* $g(x^2)$ *sur* $]1\,;\,+\infty[$.
   c) Montrer que φ *est* croissante sur l'intervalle $\left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[$

B) On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1) Vérifier que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$.
2) En déduire :
   a) La limite de f *lorsque* x *tend vers* 0 ;
   b) La limite de f *lorsque* x *tend vers* $+\infty$;
   c) Le sens de variation de f *sur* $]0\,;\,+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.
3) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

4) Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeurs approchée de α.

Bac 2017 : Enoncé du Sujet

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u};\vec{v}\ )$, on considère les points M_n d'affixe $Z_n\ = \left(\frac{1}{2}i\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1) Exprime Z_{n+1} en fonction de Z_n puis Z_n en fonction de Z_0 et n.
2) Donne Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 *et* Z_4 sous forme algébrique et trigonométrique.
3) Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 *et* M_4 (unité graphique 4cm).
4) Détermine la distance OM_n en fonction de n.
5)
   a) Montre que $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.
   b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).

   Détermine L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
6) Détermine une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_O};\overrightarrow{OM_n}}\right)$ en fonction de n.
7) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 *et* M_n sont ils alignés ?

Exercice 2 (5 points)

I. Dans le plan affine, on considère le triangle ABC rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A\ ;1)\ ,(B\ ;m),(C\ ;2m)\}.$$

Pour tout point M du plan, on note $V_m = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

1) Montre que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.
2) Montre que les points G_1, J *et* C sont alignés.
3) Montre que pour tout point M, $V_m = -\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.
4) Montre que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.
5) Montre que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.

II. Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé, on considère l'application affine f définie par:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

1) Démontre que f est une isométrie.
2) Trouve l'ensemble des points invariants par f.
3) Caractérise géométriquement l'application f.

Problème

A. Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1)
   a) Calculer la fonction dérivée de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   d) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (D) que l'on déterminera.
   e) Construire $(\mathcal{C})$ et (D) sur un même graphique.

2)
   a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une solution et une seule notée α.
   b) Justifier l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

B. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudier les variations de g sur J puis en déduire que pour tout $x \in J$, $g(x) \in J$.
2) Montrer que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

   En déduire que pour tout $x \in J$, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite d'éléments de J définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.
   a) Montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.
   b) En déduire que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (U_n).
   d) Déterminer un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$. Calculer U_p à 10^{-3}

Bac 2016 : Enoncé du Sujet

Exercice1 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(A;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que ABCD soit un rectangle.

1) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. $Déterminer$ l'affixe Z_E de E. Construire E.
3) Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.
4) On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme A en E et B en F.

   a) Exprimer Z' en fonction de Z où Z' est l'affixe du point M' image de M par $\mathcal{S}$.
   b) Déterminer le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{S}$.
   c) Déterminer les images de C et D par $\mathcal{S}$.
   d) Calculer l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle ABCD.

Exercice2 : 4pts

I. On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculer :
   1) La distance comprise entre deux arbres.
   2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II. On considère l'équation (E): $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.
   1) Vérifier que le couple $(-7;-3)$ est une solution de (E).
   2) Résoudre l'équation (E).
   3) En déduire le couple d'entiers $(p;q)$ solution de (E) tel que :$0 \leq p \leq 25$.

Problème :

A. A l'instant $t = 0$(t exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être présenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta.Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montrer qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.
2) Calculer la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.
3) Etudier le sens de variation de Q $pour$ $t \geq 0$, déterminer sa limite en$+\infty$, et tracer la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan $\mathcal{P}$.

4) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier les variations de f.
3) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$. (unité 2cm)

Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis la position par rapport à $(\mathcal{C})$.

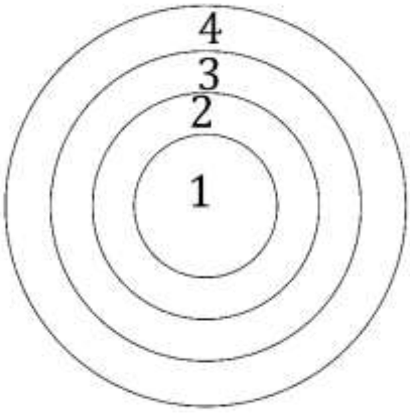
4) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.
5) Construire $(\mathcal{C})$.

Bac 2015 : Enoncé du Sujet

Exercice 1 : [5 points]

I. Une cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées (1), (2), (3), (4) (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une 5ème zone.

1) Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (Rappel : l'aire d'un disque de rayon r est $A = \pi r^2$). Montrer que les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.



2) Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA – Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA – Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000F CFA – Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA – Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA. On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle. On appelle X le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche)

a) Déterminer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 et la probabilité P_5 de manquer la cible.
b) Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

II. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C.

Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

Exercice 2 : [5 points]

I. α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2) En déduire les valeurs de N.

II. Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives

$$a = -1 + 3i \quad , \quad b = -4 + 2i \quad et \quad c = 1 + 4i.$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f. vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.
3) Soit $M(x\,;y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f. Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5\ ;\ 5]$.

Problème : [10 points]

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath};\vec{\jmath}\ )$.

1) On désigne par $M(x\ ;\ y)$ un point du plan, $M_1(x_1\ ;\ y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ et $M'(x'\ ;\ y')$ l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O\ ;\vec{\imath}\ )$.

a) Exprimer $x'\ et\ y'en\ fonction\ de\ x\ et\ y.$

b) Caractérisez l'application qui transforme M en M'.

c) On désigne par r l'application qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M''(x''\ ;\ y'')$ définies par : $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$. Montrez que r est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

2) Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.

3) Au point $M(x;\ y)$, on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$

a) Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?

b) Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en 1)- c)

B. Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath};\vec{\jmath}\ )$. Préciser les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses $-1\ et\ -\frac{1}{2}$.

2) Soit $(\mathcal{C}'_f)$ la courbe image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie orthogonale par rapport à $(O\ ;\vec{\imath}\ )$. On pose $\Gamma = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}'_f)$. Tracez Γ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

3) On considère le point $A(-1;\ 0)$ et la droite Δ d'équation $x = -2$. Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O(0\ ;\ 0)$. Les droites D et D' coupent Δ en P et P' respectivement.

Soit K le milieu du segment $[PP']$, la droite (AK) coupe D et D' en M et M'respectivement.

a) Déterminer les coordonnées de M et M' en fonction de m.

b) On appelle Γ_1 l'ensemble des points M lorsque $m \in IR^*$ et Γ'_1 celui des points M' lorsque $m \in IR^*$. Trouvez une relation entre Γ_1 et Γ'_1 .

Bac 2014 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 6pts

I. On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1-z)$$

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.
2) On se propose de résoudre le système suivant : $(1)\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$.
   a) Montrer que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$.
   b) Soit z_0 l'une de ces solutions, calculer, en fonction du module ρ *et* l'argument θ de z_0, l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1-z_0)$.
   c) En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

Quel est l'ensemble des solutions du système ?

II.

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $11x + 8y = 79$.
   a) Montrer que si $(x\,;y)$ est solution de (E) , alors $y \equiv 3[11]$.
   b) Résoudre alors l'équation (E).
2) Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F. le prix d'une pièce du premier lot est 4800F ; le prix d'une pièce du deuxième lot est 3600F et le prix d'une pièce du troisième lot est 400F.

Quel est le nombre de pièces de chaque lot ?

Exercice2 : 4pts

I. Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60 ?

II. Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t *et* h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ces héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le premier chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- Le premier chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

Problème :

A. Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1)
   a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
   b) calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de φ .

2) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1\ ;\ +\infty[$. Vérifier que $1{,}79 \leq \alpha \leq 1{,}80$.
3) En déduire le signe de φ sur IR.

B. On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ leur courbe sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$.

1) Déterminer les domaines de définitions de $f\ et\ g$ puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.
2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0\ ;1)$ une tangente commune (T). Donner une équation cartésienne de (T).
3)
   a) Vérifier que pour tout $x \in IR, f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A.
   b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in IR$.
   c) En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$.
4)
   a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur IR.
   b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.
   c) En déduire une primitive H de $f - g$ sur IR.
   d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}\ \ et\ \ x = 0$.

NB : les tracés de $(\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)$ ne sont pas demandés.

Bac 2013 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 6pts

I.

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.
2)
   a) Trouver le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
   b) Soit l'entier naturel $N = 999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111$.
      - Montrer que N peut s'écrire en fonction de 111.
      - Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ?

II. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Soit T_α l'application

de $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\ ;y)$ associe le point $M'(x'\ ;y')$ telles que $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

où α est un paramètre réel.

1) Montrer que, pour tout α, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.
2) Montrer qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.
3) Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. On les note $R\ et\ R^{-1}$.

Exercice2 : 4pts

Une substance est injectée par voie intramusculaire. Elle passe du muscle au sang et est éliminée par les reins. Après étude, on constate que la quantité de substance contenue dans le sang à un instant t est donnée approximativement par la fonction q définie par :

$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t})$ où $t \geq 0$ est le temps exprimé en heure, q_0 la quantité de substance injectée en milligramme.

1) Etablir le tableau de variation de q.
2) On désire contrôler les effets de cette substance. Pour cela, il faut que la quantité de ce médicament contenue dans le sang soit comprise entre 2 valeurs $q_m\ et\ q_M$.

$q_m = 1{,}2\ mg$ est le seuil d'efficacité et $q_M = 2{,}6mg$ est le seuil de toxicité.

Déduire du tableau de variation de q, les valeurs qu'on peut donner à q_0 pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique.

3) On pose $q_0 = 10$
   a) Tracer soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.
   b) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

Problème :

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A. **Etude de f_1**

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_1)$?
2) Etudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau de variation de f_1.
3) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}_1)$.
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_2)$?
5) Calculer $f'_2(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.

B.

1) Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$.
2) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère orthogonal.

C. m étant un entier naturel non nul, on pose $I_m = \int_1^e f_m(x)dx$.

1) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$. En déduire I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{m+1} = -\frac{1}{e} + (m+1)I_m$.
3) Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ *et* $x = e$.

Bac 2012 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 6pts

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{1 - x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D_f, on ait :

$$f(x) = ax + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

3) En déduire l'ensemble des primitives de f sur D_f.

B. Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Le mangue coute 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit. Et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ en base sept.

1) Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
2) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
3)
   a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.
   b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et de m_2 $puis$ le $pgcd(m_1\,;m_2)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ $où$ u et v sont deux entiers relatifs.

Exercice2 : 6pts

I. On considère le complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z^2}{z + i} \quad \text{où } z = x + iy, avec\ (x\,;y) \in IR^2$$

1) On note $Z = X + iY, (X\,;Y) \in IR^2$. Ecrire X et Y en fonction de x et y.
2) Au complexe z, on associe le point $M(x\,;y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

II.

1) On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun de a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?
2) Trouver les diviseurs dans IN de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que :

$$n^2 - 240 \text{ est un carré parfait.}$$

Problème :

Soit f la fonction de $[0\ ;\ +\infty[$ $vers\ IR$ définie par

$$f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$$

1)
   a) Etudier le sens de variation de f.
   b) Etudier la limite de $f\ en\ +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$: 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées
   a) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse nulle.
   b) Tracer $(T)\ et\ (\mathcal{C})$.
3) En utilisant les variations de f, démontrer que $\forall\ x \in [1\ ;2], 1 \leq f(x) \leq 2$.
4)
   a) Démontrer que pour tout réel $x\ de\ [1\ ;2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
   b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [1\ ;2]$, $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$. En déduire un encadrement de f sur $[1\ ;2]$ par deux fonctions affines que l'on précisera sur la figure.

Bac SE 2011 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 4pts

Dans le plan muni d'un repère ortho-normal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on donne le point $A(12\ ;18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O\ ;\ \vec{u})$ et C un point de $(O\ ;\ \vec{v})$ tels que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1) Démontrer que le couple $(x\ ;y)$ est solution de l'équation : (E): $2x + 3y = 78$.
2) On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x *et* y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
   b) A partir de la définition de B et de C, trouver une solution particulière $(x_0\ ;y_0)$ de (E)
   c) Démontrer qu'un couple $(x\ ;y)$ est solution de (E) si et seulement si
   $$(x\ ;y) = (12+3k\ ;18-2k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif}.$$
   d) Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \le x \le 21$ *et* $-5 \le y \le 14$?

Exercice2 : 5pts

1) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On considère l'application affine f *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x\ ;y)$ associe le point $M'(x'\ ;y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \quad et\ \mathbb{C}\ Il'ensembledes\ nombres\ complexes.$$

1)
   a) f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c) Quelle est l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x + 1$?
2) On désigne par $M(x\ ;y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'\ ;y')$ le point d'affixe z' où z *et* z' sont des nombres complexes.
   a) Sachant que $f(M) = M'$, exprimer z' en fonction de z.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Problème :

A. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ *et* $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3) Calculer$f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
4)
   a) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I.
   b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).
5) Tracer $(\mathcal{C})$ *et* (T) dans le même repère.

6)

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$.

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

B. Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x) \text{ où } f \text{ est la fonction définie en A.}$$

1) Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x}$$

2) Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$.

3) Soit $(I_n)_{n \in IN}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n} x}{\sin x}\,dx$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2, I_3, I_4 et I_5.

Bac 2010 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 5pts

On considère l'équation d'inconnue complexe z,

$$(E): z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
3) Achever la résolution de (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
4) En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la quatrième solution de (E), montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
5) Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E).

Exercice2 : 5pts

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite $(D): y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\,;\ \vec{\imath})$.

1) Soit M un point du plan et M_1 son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$.
   a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.
   b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M'.
   c) Au point $M(x\,;y)$, on associe le point $N(X\,;Y)$ telles que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

2) Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N.

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\,;N)$?

Problème :

A. Soit g la fonction numérique définie sur IR par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
   1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
   2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
   3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
      a) Vérifier que zéro (0) en est une.
      b) L'autre solution est appelée α. Montrer que$-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.
   4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

B. Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.
   1) Déterminer les limites de f en$-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^x en facteur).
   2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe. (g est la fonction définie dans la partie A). Etudier les sens de variation de f.
   3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ $où$ α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).
   4) Etablir le tableau de variation de f.

5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique 2cm).

C. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)\ dx$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ *et* $\sin(n\pi) = 0$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}$.
3) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{1+n^2}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Bac 2009 : Enoncé du Sujet

Exercice1 : 3pts

1) z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E): $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.
   a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).
   b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.
2) Soit ABCD un carré du plan.
   a) Ecrire A comme barycentre des points B, C et D. (On précisera les coefficients)
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$$

Exercice2 : 5,5pts

1) On considère la suite (U_n) définie par, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$
   a) Préciser le sens de variation de la suite (U_n).
   b) Démontrer que pour tout entier naturel $n, U_n > n^2$; en déduire la limite de la suite (U_n).
   c) Conjecturer une expression de U_n en fonction de n puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.
2) Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

$$a)\ (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i! \qquad ; \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$$

NB : n! désigne factorielle n

3) Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.
   a) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient.
   b) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Problème :

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\ln x$$

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que la fonction

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

2)
   a) Etudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0\,;\ \alpha[$ et $]\alpha\,;\ +\infty[$.

3) Vérifier que $f(\alpha)=\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2}<\alpha<2$ un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$.

B.

1) Montrer que l'équation $g(x)=0$ est équivalente à l'équation $h(x)=x$ où h est la fonction définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

2)

a) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall\ x\in\left[\frac{3}{2}\,;2\right],on\ a{:}\ -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\leq h'(x)\leq-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

En déduire qu'il existe un réel $k\in[0\,;1]$ $tel\ que$ $\forall\ x\in\left[\frac{3}{2}\,;2\right],|h'(x)|\leq k$.

b) Prouver que pour tout couple de réels $(x\,;y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\,;2\right],on\ a$:

$$|h(x)-h(y)|\leq k|x-y|$$

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0=2\ et\ \forall n\in IN, U_{n+1}=h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall\ n\in IN, U_n\in\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$.

b) En appliquant à $(U_n\,;\ \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouver que

$$\forall n\in IN, |U_{n+1}-\alpha|\leq k|U_n-\alpha|.$$

c) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$\forall n\in IN, |U_n-\alpha|\leq k^n|U_0-\alpha|$ et montrer que la suite U_n *est convergente*

Quel est la limite de la suite U_n ?

4) Montrer en utilisant les variations de h *que* $(U_{n+1}-\alpha)$ *et* $(U_n-\alpha)$ sont de signe contraires. En déduire que α est compris entre U_n *et* U_{n+1}.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

C. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et deux fois dérivables sur $]0\,;\ +\infty[$ solution de l'équation différentielle :

$$(E){:}\ y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$

1)

a) Vérifier que la fonction f définie dans la partie A est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E'): $y''+3y'+2y=0$

2)

a) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g-f$ est une solution de (E').

b) En déduire toutes les solutions de (E).

Correction des sujets

Correction Bac 2018

Exercice 1 : (6 points)

$$(E) : z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

Partie A :

1) Montrer que $-i$ est solution de (E).

$$(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$$

Donc $-i$ est bien solution de (E).

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

Par la méthode d'Orner

	1	$-8+i$	$17-8i$	17i
$-i$	$\downarrow$	$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0
	a	b	c	0

Donc,

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

$$(E) \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+i) = 0 \ \ ou \ \ (z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -i \ \ ou \ \ (z-4)^2 + 1 = 0$$

$$(z-4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-4)^2 - i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-4)^2 - i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-4-i)(z-4+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 4+i \ \ ou \ \ z = 4-i$$

$$S = \{-i\,, 4+i\,, 4-i\}$$

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i\,, 4-i \ et -i$.

1) Placer les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.(voir la fin de l'exercice).
2) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$.

Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r. Calculer l'affixe de S.

$$z_S = iz_A - 2i + 2 = i(4+i) - 2i + 2 = 1 + 2i$$

3) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle.

Les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle si et seulement si :

$$\frac{\dfrac{Z_S - Z_B}{Z_S - Z_A}}{\dfrac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A}} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{\dfrac{1+2i-4+i}{1+2i-4-i}}{\dfrac{-i-4+i}{-i-4-i}} = \frac{\dfrac{-3(1-i)}{-3+i}}{\dfrac{-4}{-4-2i}} = \frac{6(1-i)(2+i)}{4(3-i)} = \frac{6(3-i)}{4(3-i)} = \frac{3}{2}\ \ cqfd$$

On remarque que :

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_C} = \frac{4-i-4-i}{4-i+i} = -\frac{1}{2}i\,.\,C'est-\text{à}-dire\ le\ triangle\ ABC\ est\ rectangle\ en\ B.$$

$$donc\ le\ centre\ du\ cercle\ \mathcal{C}\ est\ le\ milieu\ I\ de\ AC{:}\, z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = 2 = z_\Omega$$

$$son\ rayon\ est\ r = |z_I - z_B| = |2-4+i| = \sqrt{5}$$

4) A tout point d'affixe $z \neq 2$, on associe le point $M'\ d'affixe\ z'$

$$z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$$

a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B, C.

$$z'_A = \frac{iz_A + 10 - 2i}{z_A - 2} = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{4+1} = \frac{20-5i}{5} = 4 - i = z_B$$

$$z'_A = z_B = 4 - i$$

$$z'_B = \frac{iz_B + 10 - 2i}{z_B - 2} = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \frac{11+2i}{2-i} = \frac{(11+2i)(2+i)}{4+1} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$$

$$z'_C = \frac{iz_C + 10 - 2i}{z_C - 2} = \frac{i(-i)+10-2i}{-i-2} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{4+1} = \frac{-20+15i}{5} = -4+3i$$

b) Vérifier que $A', B'\ et\ C'$ appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.

On remarque que :

$$\frac{z'_B - z'_A}{z'_B - z'_C} = \frac{4+3i-4+i}{4+3i+4-3i} = \frac{1}{2}i.\,Cela\ veut\ dire\ que\ le\ triangle\ A'B'C'\ est\ rectangle\ en\ B'.$$

Donc les points A' , $B'\ et\ C'$ appartiennent au cercle de centre P milieu de $A'C'$. C'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

$$z_P = \frac{z_{A'} + z_{C'}}{2} = \frac{4-i-4+3i}{2} = i \quad ; \quad z_P = i$$

Le rayon du cercle est le module de $z_P - z_{B'}$: $|z_P - z_{B'}| = |i - 4 - 3i| = |-4-2i| = 2\sqrt{5}$

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 0, exprimer\ |z' - i|$ en fonction de z.

$$|z' - i| = \left|\frac{iz + 10 - 2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz + 10 - 2i - iz + 2i}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right|$$

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

M appartient au cercle $\mathcal{C} \Longrightarrow BM = \sqrt{5} \Longrightarrow |z-2| = \sqrt{5}$

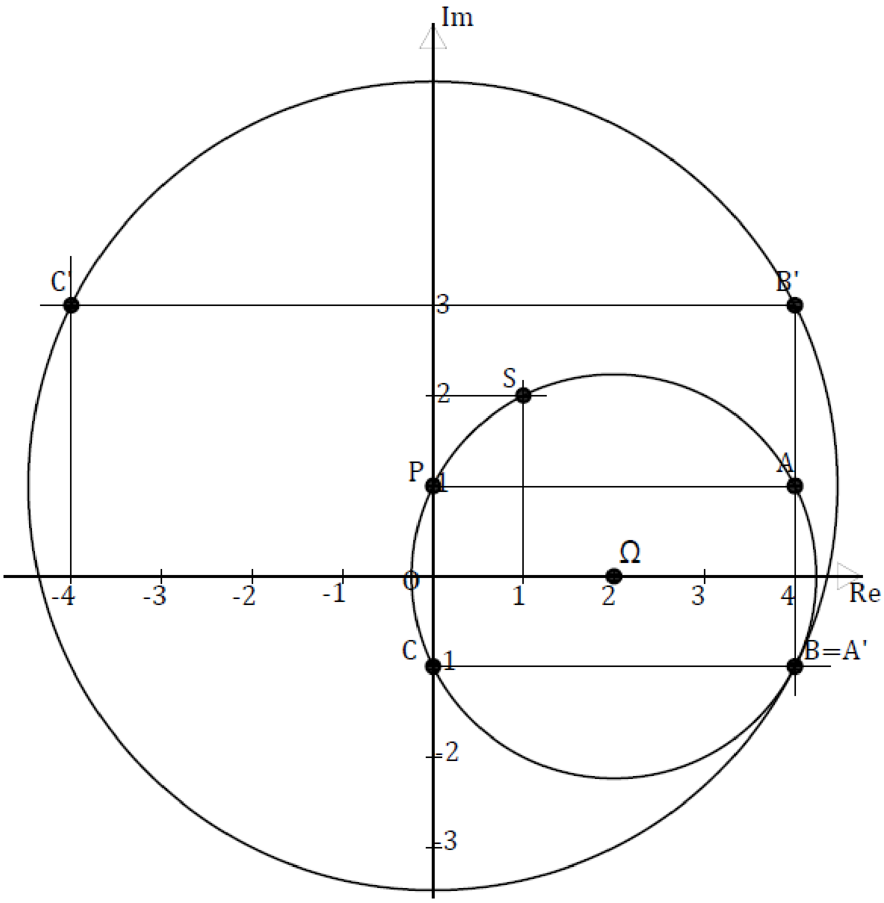
$$\Longrightarrow \frac{1}{|z-2|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Longrightarrow \frac{10}{|z-2|} = 2\sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow |z' - i| = 2\sqrt{5} \ \ cqfd$$

e) En déduire à quel ensemble appartient les points M' associés aux points M.

Les points M' associés aux points M appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$.



<u>Exercice 2 :</u> (4 point)

I) On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1)

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

Le couple $(2\,;\,-3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

On peut écrire le système suivant : $\begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 8(2) + 5(-3) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8x + 5y = 1 \\ 8(2) + 5(-3) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 8(x-2) + 5(y+3) = 0 \Longrightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$$

$$8(x-2) = 5(-y-3) \Longrightarrow \begin{cases} 5/8(x-2) \\ 8\ /\ 5(-y-3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5/(x-2) \\ 8/(-y-3) \\ car\ \ pgcd(8\,;5) = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-2 = 5k \\ -y-3 = 8k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 5k+2 \\ y = -8k-3 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \{(5k+2\ ;\ -8k-3)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers $(a\,;b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a\ ;\ -b)$ est solution de (E).

$8a - 5b - 1 = 8a + 1 - 5b - 2 = N - N = 0.$ *Donc le couple* $(a\ ;\ -b)$ *est solution de* (E).

b) Quel est le reste de la division de N par 40 ?

$$N = N \Leftrightarrow 8a - 5b = 1 \Leftrightarrow a = 5k+2\ \ et\ \ b = -8k-3\ \ ;\ \ avec\ k \in \mathbb{Z}$$

Donc, $N = 8(5k+2) + 1 = 40k + 17 \Longrightarrow N \equiv 17[40]$

Le reste de la division euclidienne de N *par* 40 *est* 17.

3)

a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

$$S = \{(5k+200\,;\ -8k-300)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

b) Soit x *et* y respectivement le nombre d'hommes et de femmes de ce groupe.

$$8x + 5y = 100 \Longrightarrow x = 5k + 200\ \ et\ \ y = -8k - 300\ \ \ avec\ \ k \in \mathbb{Z}$$

D'autre part, $\begin{cases} 0 < x < \frac{100}{8} = 12{,}5 \\ 0 < y < \frac{100}{5} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 5k + 200 < 12 \\ 0 < -8k - 300 < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -40 < k < -37 \\ -40 < k < -37 \end{cases}$

$$\Longrightarrow k \in \{-38\,, -39\}$$

D'où, $\begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$

II) On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}} \quad (E).$$

1) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{2x} g(x)$$

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si : $g'(x) = -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$f \ solution \ de \ (E) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) - e^{2x}g(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \quad cqfd$$

2) En déduire toute les solutions de (E).

$$g'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Longrightarrow g(x) = -\ln(1+e^{-2x}) + k$$

On en déduit les solutions f de (E): $f(x) = e^{2x}g(x) = -e^{2x}\ln(1+e^{-2x}) + ke^{2x}$

<u>Problème</u>

A)

1) On définit la fonction g sur $l'intervalle$ $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$

En déduire la limite de g lorsque x tend vers 1.

Par changement de variable, posons $t = x - 1$

$$x = t + 1 \quad ; \quad x \longrightarrow 1 \Longrightarrow t \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} 2x - (x-1)\ln(x-1) = \lim_{x\to 0} 2t + 2 - t\ln(t) = 2$$

b) Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1) \Longrightarrow g'(x) = 2 - \ln(x-1) - 1 = 1 - \ln(x-1)$$

c) Résoudre l'inéquation : $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à $]1\,;\,+\infty[$.

$$1 - \ln(x-1) > 0 \Longrightarrow \ln(x-1) < 1 \Longrightarrow x - 1 < e \Longrightarrow x < 1 + e$$

$$S =]1\,;1+e[$$

d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

$$\begin{cases} pour \ x \in]1\,;1+e[\,, g'(x) > 0 \\ pour \ x \in]1+e\,;+\infty[\,, g'(x) < 0 \\ g'(1+e) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g \nearrow sur \ ]1\,;1+e[\\ g \searrow sur \ ]1+e\,;+\infty[\\ g(1+e) = e+2 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation de g.

x	1		$1+e$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$			$2+e$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	2				$-\infty$

e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique notée α, dans l'intervalle $[e+1\,; e^3+1]$ puis étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]1\,;\, +\infty[$.

D'après le tableau des variations de g, elle est strictement décroissante sur $[1+e\,;\ 1+e^3] \subset [1+e\,;\ +\infty[$. Donc, elle réalise une bijection de $[1+e\,;\ 1+e^3]\ vers\ [2+e\,; 2-e^3]$. De plus, $0 \in [2+e\,; 2-e^3]$.

Donc $\exists!\, \alpha \in [1+e\,;\ 1+e^3]\ tel\ que\ g(\alpha) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de la solution

Signe de $g(x)\ sur\ ]1\,;\ +\infty[$ (nous déduisons le signe du tableau de variation de g)

$$\begin{cases} pour\ \ x \in\ ]1\,;\ \alpha[\,, g(x) > 0; \\ Pour\ x \in\ ]\alpha\,;\ +\infty[\ , g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x)\ \ et\ \ prouver\ que\ \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0 + 0 = 0$$

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)\ a\ le\ même\ signe\ que\ g(x^2)\ sur\ ]1\,;\ +\infty[$.

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} \Longrightarrow \varphi'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

Sur l'intervalle $]1\,; +\infty[\,, x^2(x^2-1) > 0\ donc\ \varphi'(x)\ a\ le\ même\ signe\ que\ g(x^2)\ sur\ ]1\,;\ +\infty[$

c) Montrer que φ *est* croissante sur l'intervalle $\left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[$

Par changement de variable, posons $X = x^2$

$$pour\ X \in]1\,;\,\alpha[\,, g(X) > 0 \Leftrightarrow pour\ x^2 \in]1\,;\,\alpha[\,, g(x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right[\,, g(x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right[\,, \varphi'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right[\,, \varphi \nearrow \quad cqfm$$

$$De\ même\ pour\ X \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, g(X) < 0 \Leftrightarrow pour\ x^2 \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, g(x^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[\,, g(x^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[\,, \varphi'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[\,, \varphi \searrow \quad cqfm$$

B) On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1) Vérifier que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[\,, f(x) = \varphi(e^x)$. (il suffit de remplacer x *par* e^x *dans* $\varphi(x)$)

2) En déduire : (par changement de variable, on pose $X = e^x$)

a) La limite de f *lorsque* x *tend vers* 0 ;

$$x \to 0 \Longrightarrow X \to 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to 1} \varphi(X) = -\infty \quad ; \ d'après\ A), 2), a)$$

b) La limite de f *lorsque* x *tend vers* $+\infty$;

$$x \to +\infty \Longrightarrow X \to +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} \varphi(X) = 0 \quad ; \ d'après\ A), 2), a)$$

c) Le sens de variation de f *sur* $]0\,;\,+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

$$Pour\ \ X \in \left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right[, \varphi(X) \nearrow \Leftrightarrow pour\ e^x \in \left]1\,;\,\sqrt{\alpha}\right[, \varphi(e^x) \nearrow$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]0\,;\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right[,\ \ f(x) \nearrow$$

$$Pour\ \ X \in \left]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[, \varphi(X) \searrow \Leftrightarrow pour\ e^x \in \left]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty\right[, \varphi(e^x) \searrow$$

$$\Leftrightarrow pour\ x \in \left]\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\,;\,+\infty\right[,\ \ f(x) \searrow$$

Tableau de variation de f

x	0		$\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$	$\searrow$	0

D'après le tableau de variation de f, elle admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$ qui a pour coordonnées $\left(\ln(\sqrt{\alpha})\ ;\ \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}\right)$

3) Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

$$\textit{le point } \left(\ln(\sqrt{\alpha})\ ;\ \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}\right) \textit{ maximum de } f \Longrightarrow \forall x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) \leq \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$$

D'autre part, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

Donc $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$ $\quad cqfm$

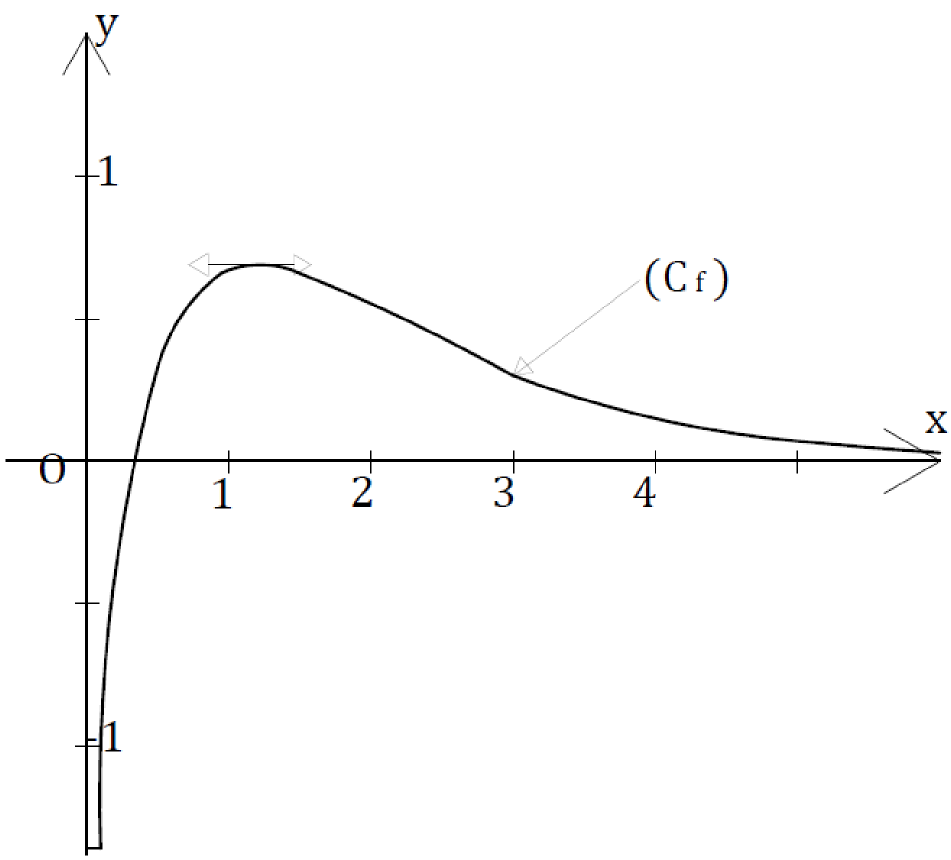
4) Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	$-1{,}36$	0,33	0,68	0,66	0,54	0,30

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeurs approchée de α.

<u>Intersection avec l'axe des abscisses :</u>

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2}$$



Correction Bac 2017

Exercice1 :

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$$

1) Z_{n+1} $en\ fonction\ de\ Z_n$

$$Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}i \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}i \times Z_n$$

$$\boxed{Z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times Z_n}$$

Z_n $en\ fonction\ de\ Z_0\ et\ n$

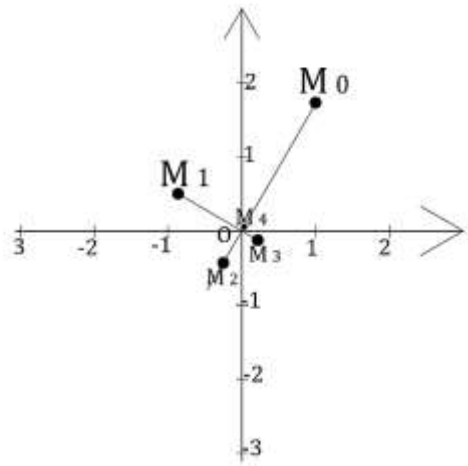
$$Z_0 = 1 + i\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{Z_n = Z_0 \times \left(\frac{1}{2}i\right)^n}$$

2) $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\ et\ Z_4$ sous forme algébrique et trigonométrique

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times i\sqrt{3} \quad et \quad Z_n = \left[\frac{1}{2^n}\,; \frac{n\pi}{2}\right] \times \left[2\,; \frac{\pi}{3}\right] = \left[\frac{1}{2^{n-1}}\,; \frac{3n\pi + 2\pi}{6}\right]$$

Formes algébriques	Formes trigonométriques	
$Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n + \left(\frac{1}{2}i\right)^n \times i\sqrt{3}$	$Z_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\left(\frac{3n\pi + 2\pi\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3n\pi + 2\pi\pi}{6}\right)\right)$	
$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$	$Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	
$Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$Z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$	
$Z_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$	$Z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	
$Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$	$Z_3 = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$	$\frac{11\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{6}\,[2\pi]$
$Z_4 = \frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}$	$Z_4 = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	

3) Plaçons les points $M_0(Z_0)$, $M_1(Z_1)$, $M_2(Z_2)$, $M_3(Z_3)$ et $M_4(Z_4)$ dans le plan.



4) La distance OM_n en fonction de n.

$$OM_n = \left|Z_{\overrightarrow{OM_n}}\right| = |Z_n - Z_0| = |Z_n| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})\right| = \left|\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right| \times \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\boxed{OM_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

5)

a) $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$?

$$M_nM_{n+1} = |Z_{n+1} - Z_n| = \left|\frac{1}{2}i \times Z_n - Z_n\right| = \left|Z_n \times \left(\frac{1}{2}i - 1\right)\right| = |Z_n| \times \left|\frac{1}{2}i - 1\right|$$

$$M_nM_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n} \quad cqfd$$

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).

Déterminons L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{5}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On remarque que L_n est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique $U_n = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ dont la raison est $q = \frac{1}{2}$ $et\ le\ premier\ terme\ U_0 = \sqrt{5}$

$$\text{Donc } L_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \sqrt{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$\boxed{L_n = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2^n}}$$

Limite de L_n $en +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2^n} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 0$$

$$explication\colon \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{1}{2}} = 0 \;\; car \ln\frac{1}{2} < 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = 2\sqrt{5}}$$

6) Une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_O};\overrightarrow{OM_n}}\right)$ en fonction de n.

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_O};\overrightarrow{OM_n}}\right) = \arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = \arg\left(\frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})}\right) = \arg\left(\left(\frac{1}{2}i\right)^n\right) = n\arg(i) = \frac{n\pi}{2}$$

$$\boxed{mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_O};\overrightarrow{OM_n}}\right) = \frac{n\pi}{2}}$$

7) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont ils alignés ?

Les points O, M_0 et M_n sont alignés si et seulement si $\frac{Z_{\overrightarrow{OM}}}{Z_{\overrightarrow{OM_0}}} = \frac{Z_n}{Z_0}$ est un nombre réel.

$$\arg\left(\frac{Z_n}{Z_0}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_O};\overrightarrow{OM_n}}\right) = \frac{n\pi}{2} \;\; et \;\; \left|\frac{Z_n}{Z_0}\right| = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{Z_n}{Z_0} = \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{Z_n}{Z_0} \; est\ un\ réel \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{2} = 0 \Longrightarrow n\ est\ pair$$

Les points $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{M_0}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{M_n}$ sont alignés si et seulement si $\boldsymbol{n}$ est pair.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

I.

$$G_m = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;m),(C\,;2m)\}\,;m \neq \frac{1}{3} \;\; et \;\; V_m = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

1) Montrons que G_1 est le milieu du segment $[CI]$.

$$I\ milieu\ [AB] \Longrightarrow I = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;1)\}$$

$$G_1 = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;1),(C\,;2)\} = bar\{(I\,;2)\,,(C\,;2)\} \Longrightarrow \overrightarrow{CG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \Longrightarrow G_1 est\ le\ milieu\ de[CI].$$

2) Montrons que les points G_1, J et C sont alignés.

$$\begin{aligned} J\ centre\ de\ gravité\ du\ triangle\ ABC &\Longrightarrow J = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;1),(C\,;1)\} \\ &\Longrightarrow J = bar\{(I\,;2)\,,(C\,;1)\} \\ &\Longrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \quad et \quad \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CG_1} \end{aligned}$$

$$donc\ \overrightarrow{CJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CG_1}$$

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CG_1} \Longrightarrow les\ points\ G_1, J\ et\ C \text{ sont alignés.}$$

3) Montrons que pour tout point M, $V_m = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$. (nous utilisons la relation de Chasles)

$$V_m = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

4) Montrons que pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

$$G_m = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;m),(C\,;2m)\} \Longrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+3m}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AC}$$
$$\Longrightarrow (1+3m)\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{AC}$$

D'autre part $\overrightarrow{AG_{-1}} = bar\{(A\,;1)\,,(B\,;-1),(C\,;-2)\} \Longrightarrow \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG_{-1}} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG_{-1}} - 2\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (1+3m)\overrightarrow{AG_m} = 2m\overrightarrow{AG_{-1}} - 2m\overrightarrow{AC} + 2m\overrightarrow{AC}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{2m}{1+3m}\overrightarrow{AG_{-1}}$$

Donc pour tout réel m distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.

5) Montrons que le triangle $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle. (nous utilisons le produit scalaire)

$$G_{-\frac{1}{2}} = bar\left\{(A\,;1)\,,\left(B\,;-\frac{1}{2}\right),(C\,;-1)\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = -2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = \overrightarrow{BI}.(-2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BI}.(-2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \ car\ ABC\ est\ rectangle\ en\ A$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BG_{-\frac{1}{2}}} = 0 \Longrightarrow IBG_{-\frac{1}{2}}\ est\ rectangle\ en\ B. \quad (cqfd)$$

II.

$$f: \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$$

1) Démontrons que f est une isométrie.

Soit $M_1(x_1\,;y_1)$, $M_2(x_2\,;y_2)$ deux points du plan.

$$f(M_1) = M_1'(x_1'\,;\,y_1') \ \ et\ \ f(M_2) = M_2'(x_2'\,;\,y_2')$$

$$M_1'M_2' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$\begin{cases} x_2' - x_1' = \frac{1}{5}(-3x_2 + 4y_2 + 4) - \frac{1}{5}(-3x_1 + 4y_1 + 4) \\ y_2' - y_1' = \frac{1}{5}(4x_2 + 3y_2 - 2) - \frac{1}{5}(4x_1 + 3y_1 - 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = \dfrac{1}{5}(-3(x_2 - x_1) + 4(y_2 - y_1)) \\ y'_2 - y'_1 = \dfrac{1}{5}\big(4(x_2 - x_1) + 3(y_2 - y_1)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x'_2 - x'_1)^2 = \dfrac{1}{25}(9(x_2 - x_1)^2 - 26(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + 16(y_2 - y_1)^2) \\ (y'_2 - y'_1)^2 = \dfrac{1}{25}(16(x_2 - x_1)^2 + 26(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + 9(y_2 - y_1)^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = \frac{1}{25}(25(x_2 - x_1)^2 + 25(y_2 - y_1)^2)$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$Donc\ M'_1M'_2 = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2$$

$$f\ est\ bien\ une\ isométrie.$$

2) L'ensemble des points invariants par f.

Le point $M(x\,;y)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 5x + 5y = x + 8y + 2$

$\Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0$

Donc l'ensemble des points invariants par f est la droite (D): $4x - 3y - 2 = 0$

3) Caractérisation géométriquement de l'application f.

- $\boldsymbol{f}$ est une isométrie $\Longrightarrow f$ est une rotation ou une symétrie orthogonale.
- L'ensemble des points invariants par f est une droite $\Longrightarrow f$ est une symétrie orthogonale.

<u>**Conclusion :**</u> f est la symétrie orthogonale d'axe (D): $4x - 3y - 2 = 0$.

<u>Problème</u>

A. $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$; $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f

1)

a) Calculons la fonction dérivée de f.

$$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x \Longrightarrow f'(x) = -e^{-2x}(2x + 1) - 1$$

b) Dressons le tableau de variation de $f\,'$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Limites de $f\,'$ aux bornes de $[0\,;\,+\infty[$.

$$f'(0) = -2 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{e^{2x}} - e^{-2x} - 1 = -1$$

- Sens de variation de f'.

$$f'(x) = -e^{-2x}(2x + 1) - 1 \Longrightarrow f''(x) = 4xe^{-2x} > 0\ \forall x \in [0\,;\,+\infty[$$

f'est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Tableau de variation de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	-2	$\nearrow$	-1

c) Dressons le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- Limites de f aux bornes de $[0\ ;\ +\infty[$.

$$f(0) = 2 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} + 1 - x = \boxed{-\infty}$$

- Sens de variation de f.

D'après le tableau de variation de f', $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, -2 \leq f'(x) \leq -1$

$$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, -2 \leq f'(x) \leq -1 \Longrightarrow f'(x) < 0\ \forall x \in [0\ ;\ +\infty[$$

f est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- Tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

d) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (D) que l'on déterminera.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow il\ y\ a$ possibilité d'asymptote oblique. Par ailleurs, on remarque que

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (1-x)\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} = 0$$

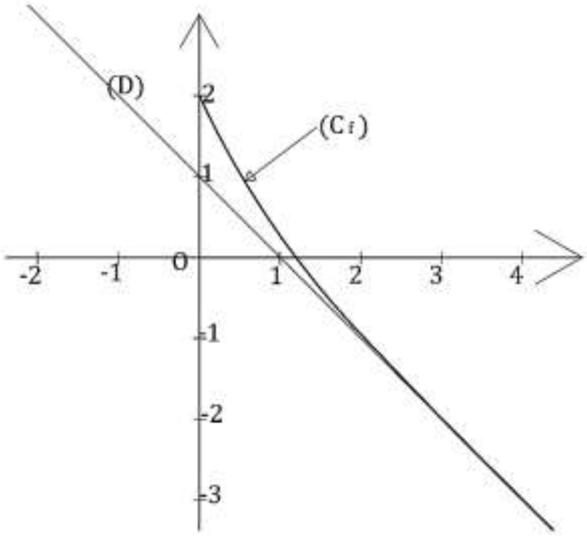
Donc la droite $(D): y = -x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f.

2) Construction $(\mathcal{C})$ et (D) sur un même graphique.

- Tableau des coordonnées x et y de quelques points :

	$(D): y = -x + 1$		$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$			
x	0	1	1	2	3	4
y	1	0	0,27	$-0{,}95$	$-1{,}99$	$-2{,}99$

- Représentation de $(\mathcal{C})$ et (D) sur un même graphique :



c) L'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une solution et une seule notée α ?

Le tableau des variations de f nous indique qu'elle réalise une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,2]$; de plus $0 \in\,]-\infty\,;\,2]$. Donc il existe un unique réel $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On prouve ainsi l'existence et l'unicité dans $[0\,;\,+\infty[$ de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

d) Justifier l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

$$f(1) = 0{,}27 > 0 \; et \; f(2) = -0{,}95 < 0 \Longrightarrow f(2) < 0 < f(1)\;;\;(f(\alpha) = 0)$$
$$\Longrightarrow f(2) < f(\alpha) < f(1)\;\; et\; f \searrow$$
$$\Longrightarrow 1 < \alpha < 2 \quad cqfd$$

B. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $J = [1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1) Etudions les variations de g sur J.

- Limites de g aux bornes de $[1\,;\,+\infty[$.

$$g(1) = 2e^{-2} + 1 \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} + 1 = \boxed{1}$$

- Sens de variation de g.

$$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 \Longrightarrow g'(x) = -e^{-2x}(2x+1) < 0 \;\; \forall x \in [1\,;\,+\infty[$$

g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation de $g\ sur\ [1\ ;\ +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$2e^{-2}+1$ ↘	1

Déduisons- en que pour tout $x \in J, g(x) \in J$

D'après le tableau de variation de $g, \forall x \in [1\ ;\ +\infty[, 1 < g(x) \leq 1 + 2e^{-2}$

$$1 < g(x) \leq 1 + 2e^{-2} \Longrightarrow g(x) \in]1\ ; 1 + 2e^{-2}]$$

$$]1\ ; 1 + 2e^{-2}] \subset [1\ ;\ +\infty[\Longrightarrow g(x) \in [1\ ;\ +\infty[\ cqfd$$

2) Montrons que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$

$$g'(x) = -e^{-2x}(2x+1) \Longrightarrow g''(x) = 4xe^{-2x} > \forall x \in [1\ ;\ +\infty[$$
$$\Longrightarrow g' \nearrow sur\ [1\ ;\ +\infty[$$

$$g'(1) = -\frac{3}{e^2} \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{e^{2x}} - e^{-2x} = 0$$

$$\text{Donc } -\frac{3}{e^2} \leq g'(x) < 0 < \frac{3}{e^2}$$

$$-\frac{3}{e^2} \leq g'(x) < \frac{3}{e^2} \Longrightarrow |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2} \ \ cqfd$$

Déduisons-en que pour tout $x \in J$, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

Pour $x \in [1\ ;\ +\infty[$, en appliquons le théorème de l'inégalité des accroissements finis à $(\alpha\ ; x)$,

Nous obtenons $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

D'autre part, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$

$$\text{Donc } |g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha| \ \ cqfd$$

3) $(U_n)_{n\geq 0} : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Montrons que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$.

D'après 2), $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$; pour $x = U_n, on\ a\ \ |g(U_n) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$

$$g(U_n) = U_{n+1} \Longrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha| \ \ cqfd$$

b) Déduisons-en que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$.

$$\forall\, p \geq 0 \left|U_{p+1} - \alpha\right| \leq \frac{3}{e^2}\left|U_p - \alpha\right|$$

$$\begin{array}{rl}
pour\ p = 0, & \cancel{|U_1 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|U_0 - \alpha| \\
pour\ p = 1, & \cancel{|U_2 - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_1 - \alpha|} \\
pour\ p = 2, & |U_3 - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_2 - \alpha|} \\
& \dots \\
& \dots \\
& \dots \\
pour\ p = n-2, & \cancel{|U_{n-1} - \alpha|} \leq \frac{3}{e^2}|U_{n-2} - \alpha| \\
pour\ p = n-1, & |U_n - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}\cancel{|U_{n-1} - \alpha|} \\
\hline
& |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha|
\end{array}$$

Produit des n facteurs

$$1 \leq \alpha \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\alpha \leq -1 \Leftrightarrow U_0 - 2 \leq U_0 - \alpha \leq U_0 - 1 \ ;\ U_0 = 1$$

$$-1 \leq U_0 - \alpha \leq 0 < 1 \Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$$

$$\text{D'où } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \quad cqfd$$

c) Déterminons la limite de la suite (U_n).

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n = 0 \quad \left(car\ \frac{3}{e^2} < 1\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{e^2}\right)^n = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n - \alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$$

d) Déterminons un entier p pour lequel on est sûr d'avoir $\left|U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$

$$\left|U_p - \alpha\right| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^p \ ;\ si\ \left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3}, alors\ il\ est\ certain\ que\ \left|U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$$

Il nous suffit donc de trouver $p\ tel\ que\ \left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3}$

$$\left(\frac{3}{e^2}\right)^p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow p\ln\frac{3}{e^2} \leq -3\ln 10 \Leftrightarrow p \geq -\frac{3\ln 10}{\ln\frac{3}{e^2}} \Leftrightarrow\ p \geq \frac{3\ln 10}{2 - \ln 3} = 7{,}66$$

$$\boxed{p = 8}$$

Calculer U_8 à 10^{-3} près

$$\left|U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3} \Longrightarrow U_8 = \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$1 \leq \alpha \leq 2$; par la méthode de balayage ou la méthode de dichotomie, on peut trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Correction Bac 2016

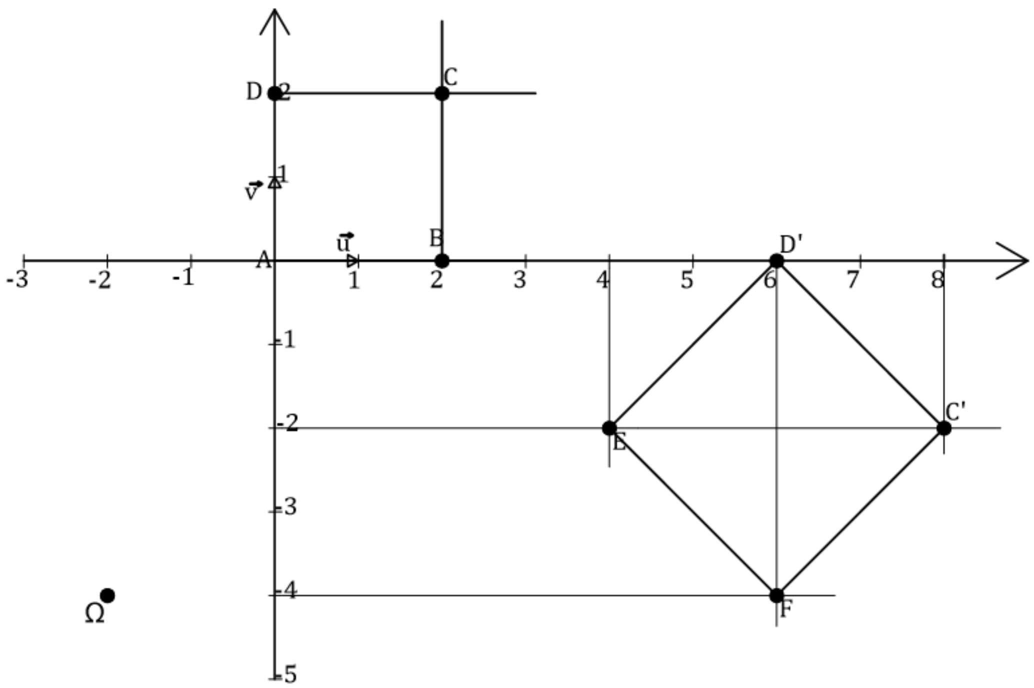
Exercice1 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(A;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1cm. On considère les points B, D et C définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{v}$ tel que ABCD soit un rectangle.

1) Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} \Longrightarrow Z_B = 2 \quad , \quad \overrightarrow{AD} = 2\vec{v} \Longrightarrow Z_D = 2i$$

$ABCD$ est un rectangle $\Longrightarrow (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}) \Longrightarrow (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \Longrightarrow (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Longrightarrow Z_C = 2 + 2i$



2) Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. *Déterminer* l'affixe Z_E *de* E. Construire E.

$$T_{\overrightarrow{DB}}(B) = E \Longleftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$$
$$\Longleftrightarrow Z_E = 2Z_B - Z_D = 4 - 2i$$
$$\boxed{Z_E = 4 - 2i}$$

3) Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $Z_F = 6 - 4i$ soit le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients a, b et 1.

$$F = bar\{(A\,;a)\,,(B\,;b),(C\,;1)\} \Longrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{b}{a+b+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a+b+1}\overrightarrow{AC}$$
$$\Longrightarrow Z_F = \frac{1}{a+b+1}(\,bZ_B + Z_C)$$
$$\Longrightarrow (a+b+1)(6-4i) = 2b + 2 + 2i$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 6a + 6b + 6 = 2b + 2 \\ -4a - 4b - 4 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ 2a + 2b = -3 \end{cases}$$
$$\boxed{a = 1}$$

$$a = 1 \Longrightarrow \boxed{b = -\frac{5}{2}}$$

4) On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ qui transforme A en E et B en F.

a) Exprimer Z' en fonction de Z *où* Z' est l'affixe du point M' image de M *par* $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ est une similitude directe, alors son expression complexe s'écrit $Z' = \alpha Z + \beta$ *où* α *et* β sont des nombres complexes. Calculons α *et* β

$$\mathcal{S}(A) = E \Longrightarrow Z_E = \alpha Z_A + \beta \Leftrightarrow \beta = 4 - 2i$$

$$\mathcal{S}(B) = F \Longrightarrow Z_F = \alpha Z_B + \beta \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 6 - 4i$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{6 - 4i - \beta}{2} = 1 - i$$

$$D'o\grave{u}\ \boxed{Z' = (1 - i)Z + 4 - 2i}$$

b) Déterminer le centre Ω, l'angle θ et le rapport k de la similitude $\mathcal{S}$.

- Centre Ω est le point invariant par $\mathcal{S}$. Donc $Z_\Omega = (1 - i)Z_\Omega + 4 - 2i$

$$Z_\Omega = (1 - i)Z_\Omega + 4 - 2i \Longrightarrow Z_\Omega = -2 - 4i$$

le centre de la similitude est $\Omega(-2\,;\,-4)$

- L'angle θ est l'argument de $\alpha = 1 - i$

$$\theta = \arg(\alpha) = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$$

- Le rapport $k\ est\ le\ module\ de\ \alpha. Donc$ $\boxed{k = \sqrt{2}}$

c) Déterminer les images de C et D par $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S}(C) = C' \Leftrightarrow Z_{C'} = (1 - i)Z_C + 4 - 2i = (1 - i)(2 + 2i) + 4 - 2i = 8 - 2i$$

$$Z_{C'} = 8 - 2i$$

$$\mathcal{S}(D) = D' \Leftrightarrow Z_{D'} = (1 - i)Z_D + 4 - 2i = (1 - i)2i + 4 - 2i = 6$$

$$Z_{D'} = 6$$

d) Calculer l'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle ABCD.

L'aire de l'image par $\mathcal{S}$ du rectangle ABCD est le produit de l'aire du rectangle ABCD par k^2.

$$aire(ABCD) = AB^2 = |Z_B|^2 = 4cm^2$$

$$\mathcal{S}(ABCD) = EFC'D' \Longrightarrow aire(EFC'D') = 4 \times k^2 = 4 \times 2 = 8cm^2.$$

<u>Exercice2 :</u>

I. Dimensions du champs à entourer : $L = 525m$; $\ell = 285m$

1) La distance comprise entre deux arbres.

Si le nombre d'arbres doit être minimal, alors l'espacement sera le plus grand possible. Puisque les côtés n'ont pas la mesure, alors il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur aux mesures des deux côtés. Autrement dit l'espacement $e = pgcd(525\,;285)$

$$e = pgcd(525\,;285) = 15 \times pgcd(35\,;19) = 15 \times 1 = 15$$

$$\boxed{e = 15m}$$

2) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Le nombre d'arbres d'un côté est le nombre d'espacements de ce côté augmenté de 1.

- Sur les deux côtés de mesure $L = 525m$, *le nombre d'arbre est*: $n_1 = 2 \times \left(\frac{525}{15} + 1\right)$

$$n_1 = 72 \; arbres$$

- Les arbres des sommets ne seront pas compter pour les deux autres côtés, donc le nombre d'arbres est : $n_2 = 2 \times \left(\frac{285}{15} + 1 - 2\right) = 36$

$$n_2 = 36 \; arbres$$

Le nombre total d'arbres est alors $n = 72 + 36 = \boxed{108 \; arbres}$

II. On considère l'équation (E): $11x - 26y = 1$, où x *et* y désignent deux nombres entiers relatifs.

1) Vérifier que le couple $(-7; -3)$ est une solution de (E).

$$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1 \Longrightarrow (-7\,;\,-3) \; est \; solution \; de \; (E).$$

2) Résoudre l'équation (E).

$$\begin{cases} 11x - 26y = 1 \\ 11(-7) - 26(-3) = 1 \end{cases}$$
$$\overline{11(x+7) - 26(y+3) = 0}$$

$$11(x+7) - 26(y+3) = 0 \Longrightarrow 11(x+7) = 26(y+3) \Longrightarrow 26/11(x+7)$$

$$\begin{cases} 26/11(x+7) \\ pgcd(26\,;11) = 1 \end{cases} \Longrightarrow (26/x+7) \Longrightarrow (x + 7 = 26k) \Longrightarrow \boxed{x = 26k - 7} \;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$De \; même \; 11(x+7) = 26(y+3) \Longrightarrow 11/26(y+3)$$

$$\begin{cases} 11/26(y+3) \\ pgcd(26\,;11) = 1 \end{cases} \Longrightarrow (11/y+3) \Longrightarrow (y + 3 = 11k) \Longrightarrow \boxed{y = 11k - 3} \;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \{(26k - 7\,; 11k - 3)\} \;\; k \in \mathbb{Z}}$$

3) En déduire le couple d'entiers $(p; q)$ solution de (E) tel que :$0 \leq p \leq 25$.

$$(p; q) \text{ solution de (E)} \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \; tel \; que \; p = 26k - 7$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq 25 &\Longrightarrow 0 \leq 26k - 7 \leq 25 \\ &\Longrightarrow 7 \leq 26k \leq 32 \\ &\Longrightarrow \frac{7}{26} \leq k \leq \frac{32}{26} \\ &\Longrightarrow 0{,}27 \leq k \leq 1{,}23 \Longrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

$$p = 26 - 7 = 19 \;\; et \;\; q = 11 - 3 = 8$$

$$\boxed{(p\,; q) = (19\,; 8)}$$

Problème :

A.

$$Q'(t) = -\beta.Q(t) \ ; \quad Q(0) = 2{,}5\ unité\text{, où } \beta \text{ est un nombre.}$$

1) Montrer qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

$$Q'(t) = -\beta.Q(t) \Rightarrow \frac{Q'(t)}{Q(t)} = -\beta \Rightarrow \ln|Q(t)| = -\beta t + c \ ; \ c \in IR$$
$$\Rightarrow |Q(t)| = e^c e^{-\beta t}$$
$$\Rightarrow Q(t) = \pm e^c e^{-\beta t} \ ; posons\ k = \pm e^c \in IR$$
$$\Rightarrow Q(t) = ke^{-\beta t} \ \ k \in IR$$

$$Q(0) = 2{,}5 \Rightarrow k = 2{,}5$$

$$D'où \ \boxed{Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}} \ cqfd$$

2) Calculer la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

$$Q(1) = 0{,}30 \times Q(0) = \frac{30}{100} \times 2{,}5 \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{3}{10} \Rightarrow \boxed{\beta = \ln\left(\frac{10}{3}\right)}$$

$$\boxed{\beta = 1{,}2040 \text{ à } 10^{-4}\ près}$$

3) Etudier le sens de variation de $Q\ pour\ t \geq 0$, déterminer sa limite en$+\infty$, et tracer la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan $\mathcal{P}$.

- Sens de variation de $Q\ pour\ t \geq 0$:

$$Q(t) = 2{,}5\, e^{-t\ln\left(\frac{10}{3}\right)} \Rightarrow Q'(t) = -2{,}5\ln\left(\frac{10}{3}\right) e^{-t\ln\left(\frac{10}{3}\right)} < 0 \quad \forall\, t \geq 0.$$

$Q\ est\ donc$ décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} 2{,}5\, e^{-t\ln\left(\frac{10}{3}\right)} = 0 \Rightarrow la\ droite\ d'équation\ y = 0\ est\ AH \text{ à } (\Gamma)$$

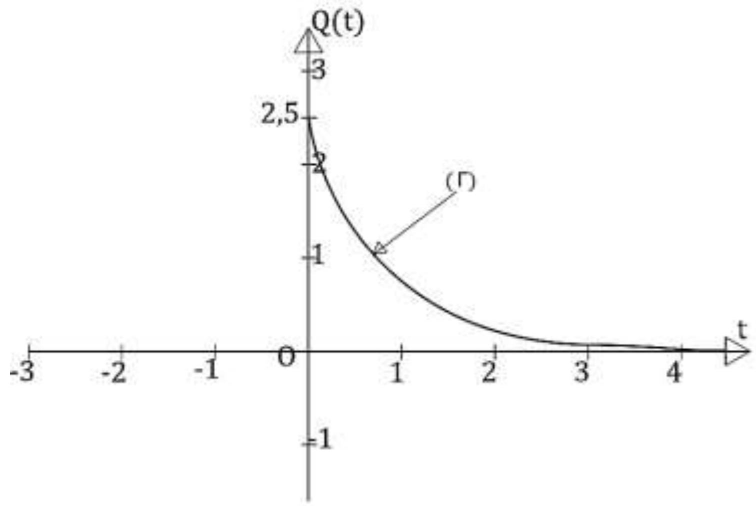
- Tableau de variation de $Q\ sur\ [0\ ;\ +\infty[$

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$Q'(t)$	$-$
$Q(t)$	$2{,}5 \searrow 0$

- Tableau des coordonnées $t\ et\ y$ de quelques points :

	$Q(t) = 2{,}5\, e^{-t\ln\left(\frac{10}{3}\right)}$			
t	1	2	3	4
$y = Q(t)$	0,75	0,22	0,07	0,02

Représentation graphique de (Γ):



4) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

$$Q(t) = \frac{2,5}{2} \Leftrightarrow e^{-t\ln\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln \frac{10}{3}} = 0,58h = 34,8\ min = 34min48s$$

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = 34min48s}$$

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

$$D_f = \{x \in IR,\ \ x - 1 \neq 0\ et\ x \neq 0\} = IR - \{0\ ,1\}$$

$$\boxed{D_f =]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; 1[\cup]1\ ; +\infty[}$$

2) Etudier les variations de f.

Sens de variations de f

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)} = \frac{(2-x)(x+1)}{2x(x-1)}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x(x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

f est décroissante sur$]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$;

f est croissante sur$]-1\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ 2[$.

Limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2 \qquad et \quad f(2) = -1 - \ln 2$$

Interprétation des limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \Longrightarrow la\ droite\ d'\text{é}quation\ x = 0\ est\ AV\ \text{à}\ la\ courbe\ de\ f$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \Longrightarrow la\ droite\ d'\text{é}quation\ x = 1\ est\ AV\ \text{à}\ la\ courbe\ de\ f$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\ \ et\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\ \Longrightarrow il\ ya\ possibilit\text{é}\ d'asymtote\ oblique$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$. (unité 2cm)

Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis la position par rapport à $(\mathcal{C})$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow la\ droite\ (D){:}\ y = -\frac{x}{2}\ est\ AO\ \text{à}\ (\mathcal{C})$$

Position relative de $(\mathcal{C})$ et (D)

Etudions le signe de $f(x) - y = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

$$\ln\left|1-\frac{1}{x}\right| < 0 \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Donc $pour\ x > \frac{1}{2},\ f(x) - y < 0\ \ et\ \ pour\ x < \frac{1}{2},\ f(x) - y > 0$

Interprétation :

$$Pour\ x > \frac{1}{2}, f(x) - y < 0 \Longrightarrow f(x) < y \Longrightarrow (\mathcal{C})\ est\ en\ dessous\ de\ (D)\ sur\ \left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

$$Pour\ x < \frac{1}{2}, f(x) - y > 0 \Longrightarrow f(x) > y \Longrightarrow (\mathcal{C})\ est\ au\ dessus\ de\ (D)\ sur\ \left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right[$$

$$Pour\ x = \frac{1}{2}, f(x) - y = 0 \Longrightarrow f(x) = y \Longrightarrow (\mathcal{C})\ et\ (D)\ se\ coupent$$

4) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

Il s'agit de montrer que $f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) + f(x) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-x\right)=f(1-x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

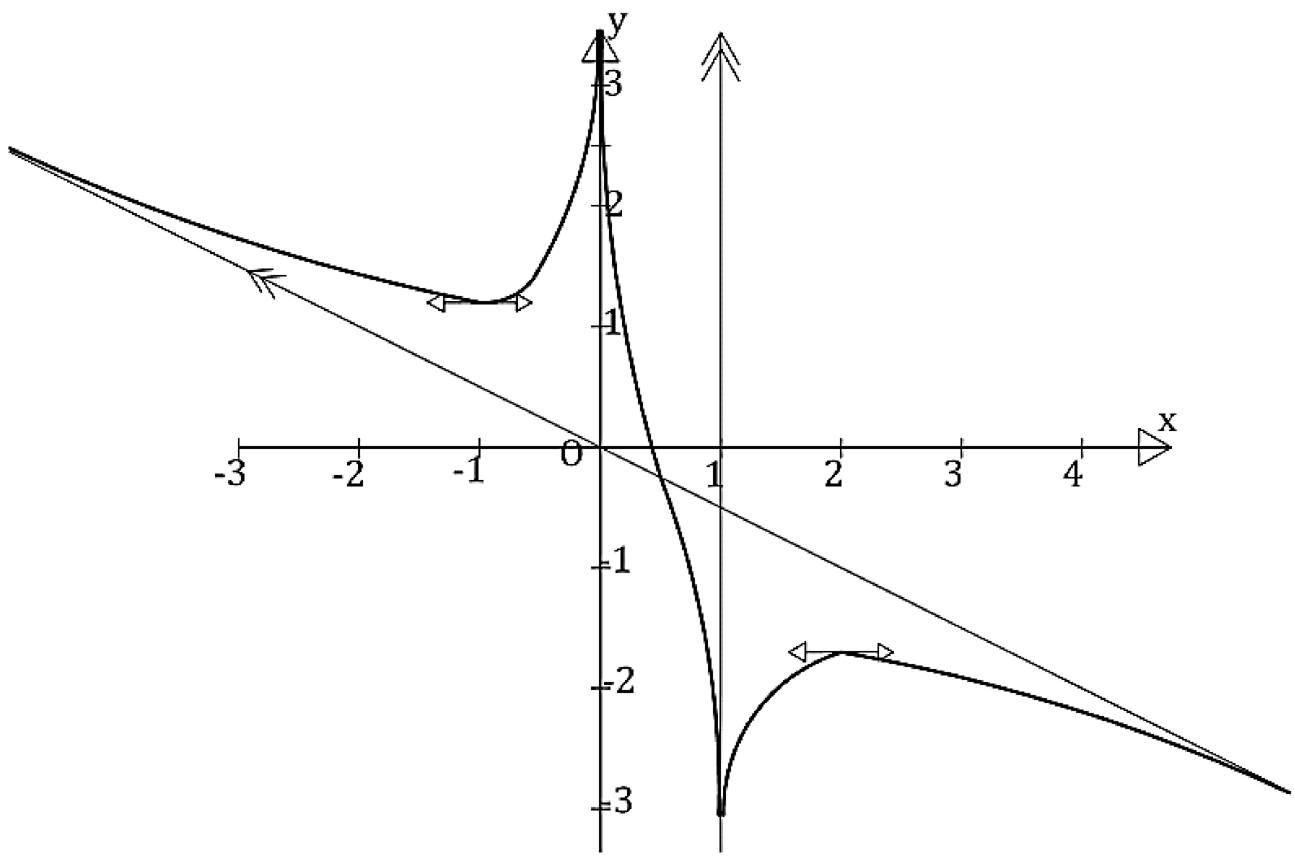
$$Donc\ f(1-x)+f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=-\frac{1}{2}\ \ cqfd$$

5) Construire $(\mathcal{C})$.

✍ Tableau des coordonnées x et y de quelques points :

	$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left\|\frac{x-1}{x}\right\|$					
x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
$y=f(x)$	1,4	1,35	0,97	−0,25	−1,85	−1,91

✍ Représentation graphique de $(\mathcal{C})$:



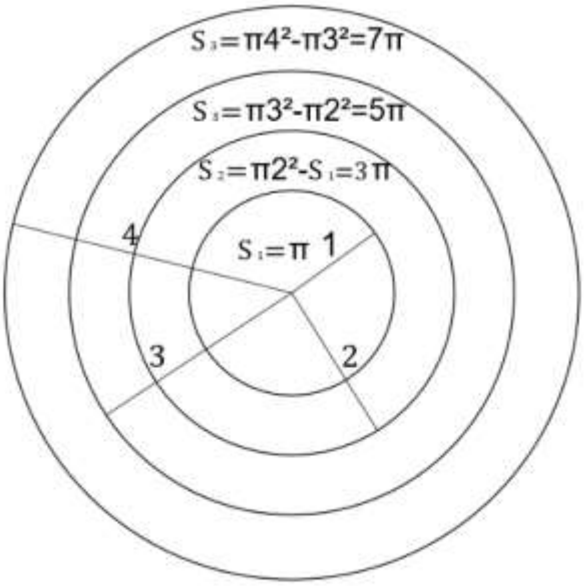
Correction Bac 2015

Exercice 1 : [5 points]

I.

1) Montrer que les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.

Les aires des zones sont données dans la figure ci-contre.



La probabilitéP_i *proportionnelle* à $S_i \Longrightarrow$

$$\exists \alpha \in IR \text{ tel que } P_i = \alpha S_i \text{ , avec } i = 1,2,3,4$$

$$Donc, P_1 = \alpha\pi = K \;;$$

$$P_2 = \alpha.3\pi = 3.\alpha\pi = 3K$$

$$P_3 = \alpha.5\pi = 5.\alpha\pi = 5K \;;$$

$$P_4 = \alpha.7\pi = 7.\alpha\pi = 7K$$

$$avec \;\; K = \alpha\pi$$

$$cqfd$$

2)

L'espérance mathématique de X est $\mathrm{E(X)} = \dfrac{4000P_1 + 3000P_2 + 2000P_3 + 1000P_4 - 30000P_5}{4000 + 3000 + 2000 + 1000 - 30000}$

$$\mathrm{E(X)} = \frac{4000K + 9000K + 10000K + 7000K - 30000P_5}{-20000} = \frac{3}{2}(P_5 - K)$$

a) Déterminer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 et la probabilité P_5 de manquer la cible.

- $E(X) = 0 \Leftrightarrow P_5 = K$
- Si on considère la variable aléatoire X, *on a*: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \Leftrightarrow 17K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{17}$$

Donc $\boxed{P_1 = \frac{1}{17} \;\; , \; P_2 = \frac{3}{17} \;\; , \;\; P_3 = \frac{5}{17} \;\; , \; P_4 = \frac{7}{17} \;\; et \;\; P_5 = \frac{1}{17}}$

b) Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

X_i	4 000	3 000	2 000	1 000	$-30\ 000$
$P(X) = P_i$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{1}{17}$

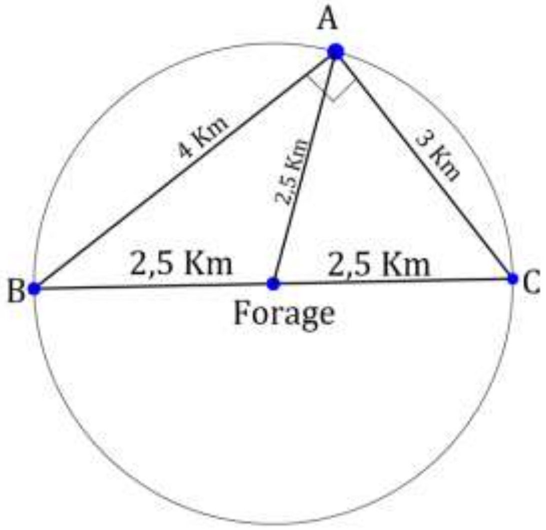
II. $AB = 4\ km, AC = 3\ km\ et\ BC = 5\ km$

Le forage est équidistant des trois villages si et seulement si son emplacement est le centre du cercle sur le quelle se trouve les trois villages. C'est-à-dire, l'emplacement du forage est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Par ailleurs, on remarque que :$AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2 = BC^2$. Donc le triangle ABC est rectangle en A (théorème de Pythagore).

ABC rectangle en A⟹ le diamètre du cercle circonscrit à ABC est l'hypoténuse BC du triangle ABC.

- Le forage sera donc placé au milieu du segment $[BC]$ et la distance qui le séparera de chacun des trois villages A, B et C est $d = \frac{BC}{2} = 2{,}5\ km$.



<u>Exercice 2</u> : [5 points]

I. $N = 2^\alpha \times 3^\beta \Leftrightarrow N^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$; *notons par* n_d , le nombre de diviseurs

$$\left|\begin{array}{c} N = 2^\alpha \times 3^\beta \\ N^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta} \\ 2\ et\ 3\ nombres\ premiers \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} n_d(N) = (\alpha+1)(\beta+1) \\ n_d(N^2) = (2\alpha+1)(2\beta+1) \end{cases}$$

Nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N⟺ $n_d(N^2) = 3n_d(N)$.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

$$\begin{aligned} n_d(N^2) = 3n_d(N) &\Leftrightarrow (2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1) \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\alpha + 2\beta + 4\alpha\beta = 3 + 3\alpha + 3\beta + 3\alpha\beta \\ &\Leftrightarrow 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta = 3 \\ &\Leftrightarrow -(\alpha-1) + \beta(\alpha-1) = 3 \Leftrightarrow \boxed{(\alpha-1)(\beta-1) = 3}\ cqfd \end{aligned}$$

2) En déduire les valeurs de N.

$$(\alpha-1)(\beta-1) = 3 > 0 \Rightarrow \alpha - 1\ \ et\ \ \beta - 1\ ont\ même\ signe$$

Si $\alpha - 1 < 0, alors\ \alpha = \beta = 0. D'où\ \ (\alpha-1)(\beta-1) = 1 \neq 3. donc\ \alpha \neq 0\ \ et\ \ \beta \neq 0$

$$\begin{aligned} (\alpha-1)(\beta-1) = 3 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases} ou \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow N = 2^4 \times 3^2\ \ ou\ \ N = 2^2 \times 3^4 \\ &\Rightarrow \boxed{N = 144}\ \ ou\ \ \boxed{N = 324} \end{aligned}$$

II. Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v}\,)$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives

$$a = -1 + 3i \quad , \quad b = -4 + 2i \quad et \quad c = 1 + 4i.$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

<u>Nature :</u> f est une similitude directe car son expression complexe s'écrit $z' = \alpha z + \beta$

$$\alpha = 2 - 2i \;\; et \;\; \beta = 1$$

<u>Eléments caractéristiques :</u>

- Le centre Ω est le point fixe par l'application f :$z_\Omega = (2 - 2i)z_\Omega + 1 \Longrightarrow z_\Omega = -\frac{1}{1-2i}$

$$z_\Omega = -1 - 2i \Leftrightarrow \Omega = (-1\,;\,-2)$$

- Le rapport $k = |\alpha| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$;
- L'angle $\theta = \arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$.

2) Déterminez l'affixe du point B' image de B par la transformation f. vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.

$$z_{B'} = (2 - 2i)z_B + 1 = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -3 + 12i$$

$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux ?

$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C\,; y_A - y_C) = (-2\,;\,-1) \quad et\; \overrightarrow{CB'} = (-4\,;8)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = x_{\overrightarrow{CA}}.x_{\overrightarrow{CB'}} + y_{\overrightarrow{CA}}.y_{\overrightarrow{CB'}} = (-2).(-4) + (-1).(8) = 8 - 8 = 0.$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{CA}\; et\; \overrightarrow{CB'} \text{ sont orthogonaux.}$$

3) Soit $M(x\,;y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son image par f. Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

Trouvons les coordonnées x' et y' de M' en fonction de x et y

$$f(M) = M' \Leftrightarrow x' + iy' = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2y + 1 + i(2y - 2x)$$

$x' = 2x + 2y + 1$ et $y' = 2y - 2x$. Donc $\overrightarrow{CM'} = (2x + 2y\,; 2y - 2x - 4)$

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow -4x - 4y - 2y + 2x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -2x - 6y = -4$$
$$\Leftrightarrow x + 3y = 2 \quad cqfd$$

4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à [– 5 ; 5].

$$pgcd(1\,;3) = 1 \;\; et \;\; 1/2 \Longrightarrow \text{l'équation } x + 3y = 2 \text{ admet des solutions dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

$$(-1\,;1) \text{ est une solution particulière.}$$

On a, ainsi le système :

$$(x+1)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+1=3(1-y)$$
$$\Leftrightarrow 3/x+1 \quad et \quad 1\,/\,3(1-y)$$

$$\begin{cases} 3/x+1 \\ 1/3(1-y) \\ pgcd(1\,;3)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3/x+1 \\ 1/1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=3k \\ 1-y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3k-1 \\ y=1-k \end{cases}$$

$$\boxed{S=\{(3k-1\,;1-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}}$$

<u>L'ensemble des points dont les coordonnées sont des éléments de $[-5\,;5]$</u>

$$x \text{ et } y \text{ appartiennent à } [-5\,;5] \Rightarrow \begin{cases} -5\le x\le 5 \\ -5\le y\le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\le 3k-1\le 5 \\ -5\le 1-k\le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}\le k\le 2 \\ -4\le k\le 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k\in\{-1,0,1,2\} \\ k\in\{-4,-3,\dots,6\} \end{cases} \Rightarrow k\in\{-1,0,1,2\}$$

Donc les points de coordonnées appartenant à $[-5\,;5]$ *sont*:

$$M_k(3k-1\,;1-k) \;\; avec\; k\in\{-1,0,1,2\}.$$

<u>Problème :</u> [10 points]

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Désignons par $M(x\,;\,y)$ un point du plan, (D): $y=x$, S_D la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) ; $S_{(O\,;\vec{\imath})}$ symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\vec{\imath})$.

$$S_{y=x}(M)=M_1(x_1\,;\,y_1) \;\; et\; S_{(O\,;\vec{\imath})}(M_1)=M'(x'\,;y')$$

a) Exprimer x' *et* y' *en fonction de* x *et* y.

$$S_D(M)=M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM_1}\perp\vec{u}(1\,;1) \text{ où } \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (D) \\ \text{le milieu du segment } [MM_1] \text{ est un point de } (D) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM_1}.\vec{u}=0 \\ y+y_1=x+x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+y_1=x+y \\ x_1-y_1=-x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y \\ y_1=x \end{cases}$$

$$S_{(O\,;\vec{\imath})}(M_1)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x_1 \\ y'=-y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}}$$

b) Caractérisez l'application qui transforme M en M'.

$$M'=S_{(O\,;\vec{\imath})}(M_1)=S_{(O\,;\vec{\imath})}\big(S_D(M)\big)=S_{(O\,;\vec{\imath})}\circ S_D(M)$$

L'application en question est une rotation (car c'est la composé de deux symétrie orthogonale)

<u>Les caractéristiques sont :</u>

- Le centre qui est le point invariant : $\Omega=(0\,;0)$;
- L'angle est $\theta=-\frac{\pi}{2}$ $(car\; l'expression\; complexe\; de\; la\; rotation\; s'écrit\; z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}.z)$

c) $r(M) = M''(x'' ; y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$

Montrez que r est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

L'application r est une rotation si et seulement si, elle est isométrie dont l'ensemble des point invariant est un singleton

<u>L'application r est une isométrie ?</u>

Soit $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$ deux points du plan.

$$r(M_1) = M_1''(x_1'' ; y_1'') \ et \ f(M_2) = M_2''(x_2'' ; y_2'')$$

$$M_1''M_2'' = \sqrt{(x_2'' - x_1'')^2 + (y_2'' - y_1'')^2}$$

$$\begin{cases} x_2'' - x_1'' = 1 + y_2 - 1 - y_1 \\ y_2'' - y_1'' = 1 - x_2 - 1 + x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2'' - x_1'')^2 = (y_2 - y_1)^2 \\ (y_2'' - y_1'')^2 = (x_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

$$D'où\ M_1''M_2'' = \sqrt{(x_2'' - x_1'')^2 + (y_2'' - y_1'')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2$$

Donc r est une isométrie.

<u>L'ensemble des points invariants par r est un singleton ?</u>

Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

$$M\ est\ invariant\ par\ r \Leftrightarrow r(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ y = 1 - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc r est une rotation de centre Ω(1 ; 0).

$$r\ étant\ ue\ rotation\ d'angle\ \theta, alors\ r(M) = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \cos(\theta) . x - \sin(\theta) . y + c = y + 1 \\ y'' = \sin(\theta) . x + \cos(\theta) . y + c' = -x + 1 \end{cases}$$

Par identification : $\begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = -1 \end{cases}$. donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : r est une rotation de centre Ω(1 ; 0) $et\ d'angle\ \theta = -\frac{\pi}{2}$.

2) Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M'' ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[MM'']$.

M décrit la droite d'équation $y = x$:

$$\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1 + x \\ y'' = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x'' + y'' - 2 = 0$$

- Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, M'' décrit la droite d'équation
$$x + y - 2 = 0$$
- Le milieu du $[MM'']$ a pour coordonnées $(x_I ; y_I) = \left(\frac{x+x''}{2} ; \frac{y+y''}{2}\right)$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x + x''}{2} = \dfrac{2x + 1}{2} \\ y_I = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow le\ milieu\ du\ segment\ [MM'']\ décrit\ la\ droite\ d'équation\ y = \frac{1}{2}.$$

3) Au point $M(x;\ y)$, on associe le point $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ définie par : $\begin{cases} x_2 = 1+3y \\ y_2 = 1-2x \end{cases}$

a) Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?

$$\begin{cases} x_2 = 1+3y \\ y_2 = 1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x_2-1) \\ x = -\frac{1}{2}(y_2-1) \end{cases}$$

M décrit le cercle unité de centre O$\Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}(y_2-1)^2+\frac{1}{9}(x_2-1)^2 = 1$

$$\Rightarrow 9(y_2-1)^2+4(x_2-1)^2 = 36$$

b) Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en 1)- c)

$$r(M) = M''(x''\ ;\ y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 1+y \\ y'' = 1-x \end{cases}$$

B. Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath};\vec{\jmath}\,)$. Préciser les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses $-1\ et\ -\frac{1}{2}$.

<u>Domaine de définition de f :</u>

$$D_f = \{x \in IR, x+1 \geq 0\} = [-1\ ;\ +\infty[$$

<u>Limites aux bornes du domaine de définition de f :</u>

$$f(-1) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

<u>Sens de variations de f :</u>

$$f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{x+1}+\frac{(2x-1)}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4x+4+2x-1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{6x+3}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Les asymptotes à la courbe de f :</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x+1}{2}} = +\infty \Rightarrow$ la courbe de f admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées.

<u>Les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$:</u>

La tangente au point d'abscisse x_0 à $(\mathcal{C}_f)$ a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- Au point d'abscisse -1 :

f *n'est pas dérivable en* -1 *et* $\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = -\infty$; donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse-1.

- Au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$:

f' *s'annule en* $-\frac{1}{2}$; *donc* $(\mathcal{C}_f)$ *admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse* $-\frac{1}{2}$

<u>Point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les axes de coordonnées</u>

- <u>Intersection avec (ox)</u>

C'est le point dont l'abscisse vérifie l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad ou \quad x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \; ou \; x = -1$$

Donc les intersections sont les points de coordonnées : $(-1\,;0)$ *et* $\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$

- <u>Intersection avec (oy)</u>

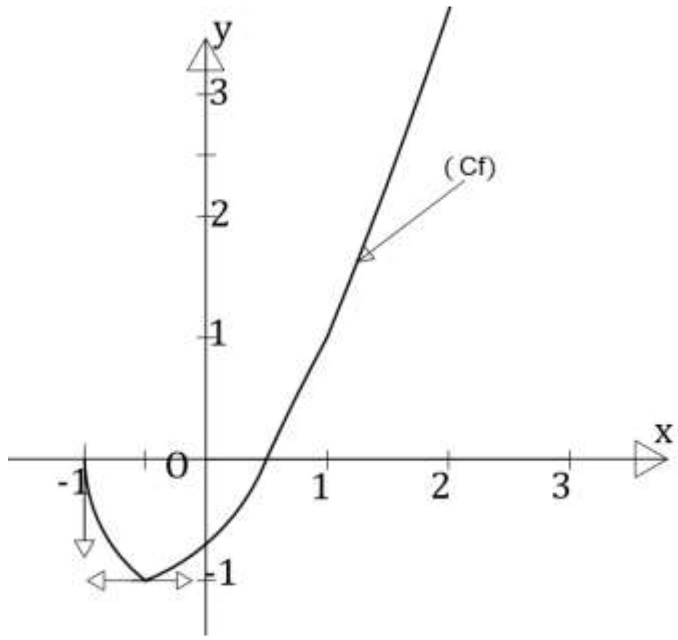
C'est le point d'abscisse 0.

$$f(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad donc\ l'intersection\ est\ le\ point\ de\ coordonnées\ \left(0\,; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

<u>Tableau des coordonnées x et y de quelques points :</u>

	$f(x) = (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$			
x	$-\frac{1}{4}$	1	2	3
y	$-\frac{3\sqrt{6}}{8}$	1	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$5\sqrt{2}$

<u>Tracer de $(\mathcal{C}_f)$</u>



2) Soit $(\mathcal{C}'_f)$ la courbe image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie orthogonale par rapport à $(O\,;\vec{\imath}\,)$. On pose $\Gamma = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}'_f)$. Tracez Γ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

Pour le tracer de la courbe $(\mathcal{C}'_f)$, on peut utiliser deux méthodes :

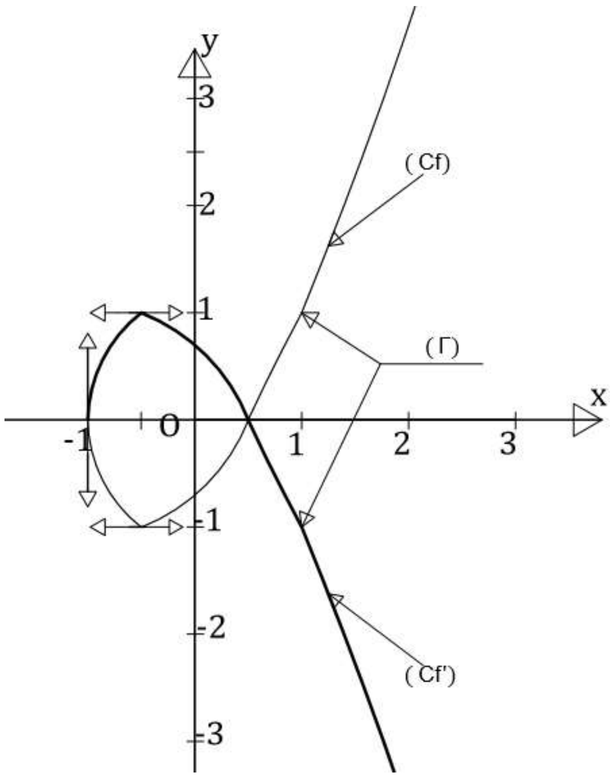
- Utiliser les matériels de géométrie pour placer les symétriques de tous les points remarquables de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(O\,;\vec{\imath}\,)$. Et tracer la courbe
- Déterminer la fonction dont l'image est $(\mathcal{C}'_f)$ en utilisant la définition de la symétrie :

$$M(x\,;y) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$M'(x'\,;y') \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow S_{(O\,;\vec{\imath})}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y = -f(x) \end{cases}$$

Ainsi on étudie et représente la fonction$-f$. Qui correspond à la courbe $(\mathcal{C}'_f)$.

<u>Tracer de la courbe</u> $\Gamma = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}'_f)$



3) On considère le point $A(-1;\ 0)$; $\Delta : x = -2$. Soit $m \in IR^*$, D : $y = mx$. (D): $y = mx \Longrightarrow \vec{u} = (1\,;m)$ *est un vecteur directeur de D*

- D' orthogonale à D en $O(0\,;\ 0)$ $\Longrightarrow \forall\, M(x\,;y) \in D', \overrightarrow{OM} \perp \vec{u} \Longrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{u} = 0$

$$\Longrightarrow x + my = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{m}x$$

Donc, $D' : y = -\frac{1}{m}x$

- D coupent Δ en P$\Longrightarrow P \in D \cap \Delta \Longrightarrow P \in D\ et\ P \in \Delta \Longrightarrow \begin{cases} x_P = -2 \\ y_P = -2m \end{cases}$. Donc $P(-2\,;\ -2m)$
- D' coupent Δ en P'$\Longrightarrow P' \in D' \cap \Delta \Longrightarrow P' \in D'\ et\ P \in \Delta \Longrightarrow \begin{cases} x_P = -2 \\ y_P = \frac{2}{m} \end{cases}$. Donc $P'\left(-2\,;\frac{2}{m}\right)$

- K milieu du segment $[PP']$ $\Longrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_P = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{-2-2}{2} = -2 \\ y_K = \frac{-2m+\frac{2}{m}}{2} = \frac{1-m^2}{m} \end{cases}$
- $\overrightarrow{AK} = \left(-1\,; \frac{1-m^2}{m}\right)$. $\forall M \in (AK), \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AK}\,; \overrightarrow{AM} = (x+1\,; y)$

$$\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}\,; \overrightarrow{AK}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y & \dfrac{1-m^2}{m} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(1-m^2) + my = 0 \Leftrightarrow (AK)\colon y = \frac{m^2-1}{m}x + \frac{m^2-1}{m}$$

a) Déterminer les coordonnées de M et M' en fonction de m.

- (AK) coupe D en $M(x\,; y) \Longrightarrow M \in (AK) \cap D \Longrightarrow \begin{cases} M \in (AK) \\ M \in D \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{m^2-1}{m}x + \dfrac{m^2-1}{m} \\ y = mx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = m^2 - 1 \\ y = m^3 - m \end{cases}$$

- (AK) coupe D' en $M'(x'\,; y') \Longrightarrow M' \in (AK) \cap D' \Longrightarrow \begin{cases} M' \in (AK) \\ M' \in D' \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{m^2-1}{m}x' + \dfrac{m^2-1}{m} \\ y' = -\dfrac{1}{m}x' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1-m^2}{m^2} \\ y = \dfrac{m^2-1}{m^3} \end{cases}$$

$$Donc, M(m^2-1\,; m^3-m) \ \ et \ \ M'\left(\frac{1-m^2}{m^2}\,; \frac{m^2-1}{m^3}\right)$$

b) On appelle Γ_1 l'ensemble des points M lorsque $m \in IR^*$ et Γ_1' celui des points M' lorsque $m \in IR^*$. Trouvez une relation entre Γ_1 et Γ_1' .

Correction Bac 2014

Exercice1 : 6pts

I. On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1-z)$$

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$.

$$h_n(z) = h_0(z) \Leftrightarrow z^n(1-z) = 1-z \Leftrightarrow z^n = 1$$

Il s'agit donc de trouver les racines nièmes de l'unité.

$$z_k = \left[1\,;\frac{2k\pi}{n}\right] \;\;;\;\; k \in \{0\,,1\,,\ldots\;\;,n-1\}$$

$$\boxed{S = \{z_k\}}$$

2) On se propose de résoudre le système suivant : $(1)\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases}$.

a) Montrer que l'équation $|z| = |1-z|$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$.

Posons $z = x + iy\,;\, 1 - z = (1-x) - iy$

$$|z| = |1-z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + iy$$

Donc tout nombre complexe de partie réel $\frac{1}{2}$ est solution de $|z| = |1-z|$. D'où elle admet une infinité de solutions.

b) Soit z_0 l'une de ces solutions, calculer, en fonction du module ρ *et* l'argument θ de z_0, l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1-z_0)$.

$$z_0 = [\rho\,;\,\theta]$$

$$z_0 \text{ solution de } |z| = |1-z| \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + iy \\ 1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy = \overline{z_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |1-z_0| = |\overline{z_0}| = \rho \\ \arg(1-z_0) = \arg(\overline{z_0}) = -\arg(z_0) = -\theta \end{cases}$$

$$1 - z_0 = [\rho\,;\,-\theta]$$

$$z_0^n(1-z_0) = [\rho^n\,;\,n\theta] \times [\rho\,;\,-\theta] = [\rho^{n+1}\,;(n-1)\theta]$$

$$\boxed{z_0^n(1-z_0) = [\rho^{n+1}\,;(n-1)\theta]}$$

c) En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.

$$\begin{cases} z_0^n(1-z_0) = 1 \\ z_0 = \frac{1}{2} + iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\rho^{n+1}\,;(n-1)\theta] = [1\,;2k\pi] \\ \cos(\theta) = \frac{\rho}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \;\; et \;\; (n-1)\theta = 2k\pi \\ \cos(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)\theta = 2k\pi \\ \theta = \pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \pm\frac{(n-1)\pi}{3} = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \pm 6k \Leftrightarrow n \equiv 1[6]\; cqfd$$

Quel est l'ensemble des solutions du système ?

$$z \text{ solution du système } (1) \Leftrightarrow z = \left[1\,;\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{S = \left\{\left[1\,;\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]_{k\in\mathbb{Z}}\right\}}$$

II.

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $11x + 8y = 79$.

a) Montrer que si $(x\,;y)$ est solution de (E) , alors $y \equiv 3[11]$.

$$(x\,;y) \text{ est solution de } (E) \Longrightarrow 11x + 8y = 79$$
$$\Longrightarrow 8y = 79 - 11x$$
$$\Longrightarrow 8y = 2 + 77 - 11x$$
$$\Longrightarrow 8y = 2 + 11(7 - x) \Longrightarrow 8y \equiv 2[11]$$
$$\Longrightarrow -3y \equiv -9[11]$$
$$\Longrightarrow 3(y-3) \equiv 0[11]$$
$$\Longrightarrow y \equiv 3[11] \;\; car\ 11\ est\ 1^{er}\ et\ 3 \not\equiv 0[11] \text{ cqfd}$$

b) Résoudre alors l'équation (E).

$$y \equiv 3[11] \Longrightarrow y = 11k + 3 \Longrightarrow 11x = 79 - 88k - 24$$
$$\Longrightarrow x = -8k + 5\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}$$
$$S = \{(-8k+5\,;11k+3)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

2) Soit $x, y\ et\ z\ respectivement\ le\ nombre\ de\ pièces\ du\ 1^{er}\ , 2^{\text{ème}}\ et\ 3^{\text{ème}}\ lot$. Nous avons le système : $\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 12x + 9y + z = 120 \end{cases} \Leftrightarrow 11x + 8y = 79$$

$$x = -8k + 5\ , \qquad y = 11k + 3 \quad et\ \ z = -3k + 33$$

$$\begin{cases} 0 < x < 41 \\ 0 < y < 41 \\ 0 < z < 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -8k + 5 < 41 \\ 0 < 11k + 3 < 41 \\ 0 < -3k + 33 < 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4{,}5 < k < 0{,}632 \\ -0{,}27 < k < 3{,}45 \\ -2{,}67 < k < 11 \end{cases} \Longrightarrow k = 0$$

$$Donc\ \ x = 5\ , \qquad y = 3\ \ et\ \ z = 33$$

Exercice2 : 4pts

I. $soit\ (x_i\,;n_i)\ et\ (y_i\,;m_i)\ respectivement\ la\ serie\ statistique\ de\ la\ taille\ des\ garçons\ et\ des\ filles\ de\ la\ cl$ $notons\ N_1, N_2\ et\ N\ respectivement\ l'effectif des\ garçons, des\ filles\ et\ totale\ de\ la\ classe.$

$$N = N_1 + N_2$$

$$On\ a: \frac{\sum x_i n_i}{N_1} = 173{,}5\ \ , \qquad \frac{\sum y_i m_i}{N_2} = 160\ \ et\ \ \frac{\sum(x_i n_i + y_i m_i)}{N} = 167$$

$$\frac{\sum x_i n_i}{N} + \frac{\sum y_i m_i}{N} = 167 \Leftrightarrow 173{,}5N_1 + 160N_2 = 167N$$
$$\Leftrightarrow 6{,}5N_1 - 7N_2 = 0 \Leftrightarrow 65N_1 - 70N_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 13N_1 = 14N_2$$
$$\Leftrightarrow 14/13N_1\ \ et\ \ \ 13\,/\,14N_2$$

$$\begin{cases} 14/13N_1 \\ 13/14N_2 \\ 14 \wedge 13 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 14/N_1 \\ 13/N_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} N_1 = 14k \\ N_2 = 13k \end{cases} \Longrightarrow N = 27k\ \ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$50 \le N \le 60 \Leftrightarrow 50 \le 27k \le 60 \Leftrightarrow 1{,}85 \le k \le 2{,}22 \Longrightarrow k = 2$$

$$Donc\ N = 54\ élèves$$

II. Quelle est la combinaison cherchée ?

$$\begin{cases} x \in \{0\,,2\,,4\,,6\,,8\} \\ x+y=15 \\ z=x-y \\ x=zt \\ x+y+z+t+h\equiv 0[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0\,,2\,,4\,,6\,,8\} \\ (x\,;y)\in\{(6\,;9)\,,(8\,;7)\} \\ x>y \\ t=\dfrac{x}{2x-15} \\ x+y+z+t+h\equiv 0[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7 \\ z=1 \\ t=8 \\ h\equiv 3[9] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7 \\ z=1 \\ t=8 \\ h=3 \end{cases}$$

Donc la combinaison est 87183

<u>Problème :</u>

A. Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1)

a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}+\frac{x}{e^x}+e^{-x}-1=-1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1 \Longrightarrow$ la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à la courbe de φ .

b) calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de φ .

$$\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1 \Longrightarrow \varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+1)e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x)=(x-x^2)e^{-x}$$

$$\varphi' \textit{ a le signe de } x-x^2 \textit{ car } e^{-x}>0\,, \textit{pour tout réel } x$$

✍ <u>Le tableau de variation de φ</u>

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3-e}{e}$	↘	-1

2) Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1\,;\,+\infty[$. Vérifier que $1{,}79\le\alpha\le 1{,}80$.

$$\varphi(0)=0 \Longrightarrow 0 \textit{ est une solution de l'équation } \varphi(x)=0.$$

D'autre part, d'après les variations de φ, elle réalise une bijection de $]1\,;\,+\infty[$ *vers* $\left]-1\,;\frac{3-e}{e}\right[$. De plus, $0\in\left]-1\,;\frac{3-e}{e}\right[$. Donc $\exists!\,\alpha\in\,]1\,;\,+\infty[$ *tel que* $\varphi(\alpha)=0$. D'où l'existence d'une deuxième solution de l'équation $\varphi(x)=0$.

$$\begin{cases} \varphi \searrow \textit{sur }]1\,;\,+\infty[\\ \varphi(1{,}80)=-0{,}0015<0=\varphi(\alpha)<0{,}0008=\varphi(1{,}79) \end{cases} \Longrightarrow 1{,}79<\alpha<1{,}80$$

3) En déduire le signe de φ sur IR.

On le signe de φ dans le tableau de variation :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in]-\infty\,;\ \alpha[, \varphi(x) \geq 0 \\ \text{Pour } x \in]\alpha\,;\ +\infty[, \varphi(x) < 0 \\ \varphi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

B. On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ leur courbe sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

1) Déterminer les domaines de définitions de f et g puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

- $f(x) = (2x+1)e^{-x}$

$$D_f = IR =]-\infty\,;\ +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

- $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$D_g = \{x \in IR\,, x^2+x+1 \neq 0\} = IR =]-\infty\,;\ +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0^- \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$$

2) $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0\,;1)$ une tangente commune (T) si et seulement si :

$$\begin{cases} f'(0) = g'(0) \\ f(0) = g(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} f'(x) = (1-2x)e^{-x} \\ g'(x) = -\dfrac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 1 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$$

Donc, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0\,;1)$ une tangente commune (T): $y = x+1$

3)

a) Vérifier que pour tout $x \in IR, f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A.

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x}-1]}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$$

b) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in IR$.

Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $(2x+1)\varphi(x)$ car $x^2+x+1 > 0$ $\forall x \in IR$

Tableau de signe de $f(x) - g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

c) En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ *et* $(\mathcal{C}_g)$.

$$\left|\begin{array}{c} \text{Pour } x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\,]\alpha\,;\,+\infty[\ ,\ \ (\mathcal{C}_f)\ est\ en\ dessous\ de\ (\mathcal{C}_g) \\ \text{Pour } x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right[\cup\,]0\,;\,\alpha[\,,(\mathcal{C}_f)\ est\ au\ dessus\ de\ (\mathcal{C}_g) \\ Pour\ x \in \left\{-\frac{1}{2}\,,0\,,\alpha\right\}\ ,\ \ (\mathcal{C}_f)\ et\ (\mathcal{C}_g)\ se\ coupent \end{array}\right.$$

4)

a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur IR.

$$g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \Longrightarrow G(x) = \ln(x^2+x+1)$$

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.

$$F(x) = (ax+b)e^{-x}\ \ est\ une\ primitive\ de\ f \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (-ax+a-b)e^{-x} = (2x+1)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -ax+a-b = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases} \Longrightarrow F(x) = -(2x+3)e^{-x}$$

c) En déduire une primitive H de $f - g$ sur IR.

$$H(x) = F(x) - G(x) = -(2x+3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$$

d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ *et* $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ *et* $x = 0$.

Soit D ce domaine. $Pour\ x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,0\right[\ ,\ f(x) > g(x) \Longrightarrow Aire(D) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f-g)(x)\,dx \times u.a$

$$Aire(D) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(f-g)(x)\,dx \times u.a = [H(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} \times u.a = \left(H(0) - H\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times u.a$$

$$\boxed{Aire(D) = \left(2e^{\frac{1}{2}} + \ln\left(\frac{3}{4}\right) - 3\right) \times u.a}$$

Correction Bac 2013

Exercice1 : 6pts

I.

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

$$x^3 - y^3 = 631 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1 \times 631$$

$$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y < x^2 + xy + y^2$$

$$\begin{cases} 631\ premier \\ x - y < x^2 + xy + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x - 210 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 14 \end{cases}$$

$$S = \{(15\,;14)\}$$

2)

a) Trouver le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel *n.*

$$111 = 7 \times 15 + 6 \Rightarrow le\ reste\ de\ la\ division\ euclidienne\ de\ 111\ par\ 7\ est\ 6$$

$$\begin{cases} 10^0 \equiv 1[7] \\ 10^1 \equiv 3[7] \\ 10^2 \equiv 2[7] \\ 10^3 \equiv 6[7] \\ 10^4 \equiv 4[7] \\ 10^5 \equiv 5[7] \\ 10^6 \equiv 1[7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} si\ n \equiv 0[6]\ , alors\ 10^n \equiv 1[7] \\ si\ n \equiv 1[6]\ , alors\ 10^n \equiv 3[7] \\ si\ n \equiv 2[6]\ , alors\ 10^n \equiv 2[7] \\ si\ n \equiv 3[6]\ , alors\ 10^n \equiv 6[7] \\ si\ n \equiv 4[6]\ , alors\ 10^n \equiv 4[7] \\ si\ n \equiv 5[6]\ , alors\ 10^n \equiv 5[7] \end{cases}$$

Le tableau ci-dessous donne l'interprétation du résultat ci-dessus

Reste de la division euclidienne de n par 6	0	1	2	3	4	5
Reste de la division euclidienne de 10^n par 7	1	3	2	6	4	5

b) Soit l'entier naturel $N = 999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111$.

- Montrer que N peut s'écrire en fonction de 111.

$$\begin{aligned} N &= 999\ 888\ 777\ 666\ 555\ 444\ 333\ 222\ 111 \\ &= 999.10^{24} + 888.10^{21} + 777.10^{18} + 666.10^{15} + 555.10^{12} + 444.10^9 + 333.10^6 + 222.10^3 + 111 \\ &= 111.(9.10^{24} + 8.10^{21} + 7.10^{18} + 6.10^{15} + 5.10^{12} + 4.10^9 + 3.10^6 + 2.10^3 + 1)\quad cqfd \end{aligned}$$

- Quel est le reste de la division euclidienne de N par 7 ?

$$le\ reste\ de\ la\ division\ euclidienne\ de\ 111\ par\ 7\ est\ 6$$

Nous utilisons les résultats du tableau pour trouver les restes de la division euclidienne des puissances de 10 par 7 : par exemple, le reste de la division euclidienne de 15 par 6 est 3, alors celui de 10^{15} $par\ 7\ est\ 6\ et\ \ 6 \equiv -1[7]$. Nous pouvons ainsi remplacer 6 $par -1$ dans la congruence modulo 7.

Donc,$N \equiv 6(9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1)[7]$

$$N \equiv 30[7] \Rightarrow N \equiv 2[7]$$

Le reste de la division euclidienne de N par 7 est 2.

II. $T_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases}$ où α est un paramètre réel.

1) Montrer que, pour tout α, T_α est bijective et admet un unique point invariant que l'on précisera.

- La matrice de l'application linéaire associée à T_α est $M_{\varphi_\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$T_\alpha \textit{ est bijective} \Leftrightarrow \det\left(M_{\varphi_\alpha}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\alpha \\ \alpha & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 \neq 0$$

$si\ \frac{1}{4} + \alpha^2 = 0, alors\ \alpha^2 = -\frac{1}{4}\ qui\ est\ impossible. Donc, \forall\alpha \in IR, \frac{1}{4} + \alpha \neq 0.$

<u>Conclusion :</u> T_α *est* bijective pour tout réelα.

- Si M est invariant par T_α , *alors* $T_\alpha(M) = M$

$$T_\alpha(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x - \alpha y \\ y = \alpha x - \dfrac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2\alpha y = 0 \\ 2\alpha x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$D'\text{où } M(0\,;0)\ est\ le\ point\ invariant\ par\ T_\alpha$$

2) Montrer qu'il existe une valeur unique de α pour laquelle T_α est une homothétie H dont on précisera le centre et le rapport.

$T_\alpha\ est\ une\ homothétie\ si\ et\ seulement\ si, il\ existe\ un\ réel\ k \neq 1\ et\ un\ point\ M_0(x_0\,; y_0)\ tq:$

$$T_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \quad ; \quad M_0\ est\ le\ point\ invariant\ par\ T_\alpha$$

$$\left(T_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} kx + (1-k).0 = -\dfrac{1}{2}x - \alpha y \\ ky + (1-k).0 = \alpha x - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow kx + ky = \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right)x + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right)y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} + \alpha \\ k = -\dfrac{1}{2} - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad cqfd$$

$$H = T_0\ est\ l'homothétie\ de\ centre\ O(0\,;0)\ et\ de\ rapport\ k = -\frac{1}{2}.$$

3) Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles T_α est une isométrie. On les note $R\ et\ R^{-1}$.

Nous allons faire cette démonstration par deux méthodes différentes.

- Première méthode :

$$T_\alpha \text{ est une isométrie si et seulement si, } \det\left(M_{\varphi_\alpha}\right) = \pm 1$$

$$\det\left(M_{\varphi_\alpha}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha^2 = -1 \text{ impossible.}$$

$$\text{Donc } \det\left(M_{\varphi_\alpha}\right) = 1\,;\, c'est-à-dire\ \frac{1}{4} + \alpha^2 = 1$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ cqfd$$

- Deuxième méthode :

T_α est une isométrie si et seulement si elle conserve la distance.
Soit $M_1(x_1\,;y_1)$, $M_2(x_2\,;y_2)$ deux points du plan.

$$T_\alpha(M_1) = M'_1(x'_1\,;\,y'_1)\ \ et\ \ T_\alpha(M_2) = M'_2(x'_2\,;\,y'_2)$$

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \alpha(y_2 - y_1) \\ y'_2 - y'_1 = \alpha(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x'_2 - x'_1)^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 + \alpha(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \alpha^2(y_2 - y_1)^2 \\ (y'_2 - y'_1)^2 = \alpha^2(x_2 - x_1)^2 - \alpha(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2 \end{cases}$$

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)(x_2 - x_1)^2 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)(y_2 - y_1)^2$$

T_α conserve la distance$\Leftrightarrow M_1M_2 = M'_1M'_2$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)(x_2 - x_1)^2 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)(y_2 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ cqfd$$

$$D'où\quad R = T_{\frac{\sqrt{3}}{2}} : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad et \quad R^{-1} = T_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} : \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Exercice2 : 4pts

$$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t}) \text{ où } t \geq 0$$

1) Etablir le tableau de variation de q.
   - $t \geq 0 \Longrightarrow$ *le domaine d'étude est* $[0\,;\,+\infty[$
   - Limites aux bornes de $[0\,;\,+\infty[$:

$$q(0) = 0\ \ et\ \ \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0$$

   - Sens de variations de q :

$$q(t) = q_0(e^{-0,5t} - e^{-t}) \Longrightarrow q'(t) = q_0(e^{-t} - 0,5e^{-0,5t})$$

$$q'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t} - 0,5e^{-0,5t} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t+0,5t} - 0,5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,5t} \geq 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0{,}5t \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t \leq 2\ln(2) = \ln(4)$$

$$Donc \begin{cases} Pour\ t \leq \ln(4)\ ,\ q'(t) \geq 0\ \ ;\ \ q \nearrow \\ Pour\ t \geq \ln(4)\ ,\ q'(t) \leq 0\ \ ;\ \ q \searrow \\ q'(\ln(4)) = 0\ \ ;\ \ \ q(\ln(4)) = \end{cases}$$

✍ Tableau de variations de q :

t	0	$\ln(4)$	$+\infty$
$q'(t)$	$+$	0	$-$
$q(t)$	0 ↗	$\frac{q_0}{4}$	↘ 0

2) $q_m = 1{,}2\ mg$ est le seuil d'efficacité et $q_M = 2{,}6mg$ est le seuil de toxicité.

Pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique, il que :

$$\forall t \geq 0, q(t) \leq q_M = 2{,}6$$

$$\forall t \geq 0, q(t) \leq 2{,}6 \Longrightarrow \max(q) \leq 2{,}6 \Leftrightarrow \frac{q_0}{4} \leq 2{,}6 \Leftrightarrow q_0 \leq 10{,}4$$

Donc, pour qu'à aucun moment, la quantité de substance dans le sang ne soit toxique, il faut que, $q_0\ soit\ inférieur\ ou\ égal$ à $10{,}4\ mg$

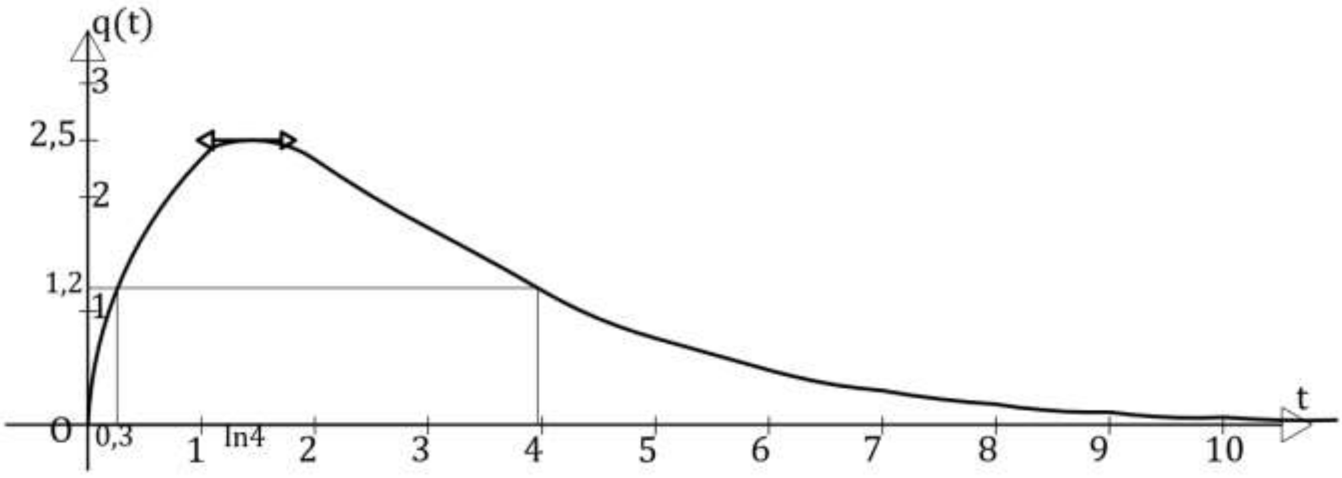
3) On pose $q_0 = 10$

a) Tracer soigneusement la courbe de q dans un repère de votre choix.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de q.

	$q(t) = 10(e^{-0{,}5t} - e^{-t})$			
t	ln 2	ln 3	2	3
$q((t)$	2,07	2,44	2,33	1,73

✍ <u>Courbe de q dans le repère orthonormé :</u>



b) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel le médicament est efficace.

L'intervalle de temps d'efficacité est : [0,3 ; 4] (Voir représentation graphique)

Problème :

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

A. **Etude de f_1**

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_1)$?

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

On en déduit que : $les\ droites\ d'équations\ x = 0\ \ et\ \ y = 0$ sont asymptotes à la courbe$(\mathcal{C}_1)$

2) Etudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau de variation de f_1.

✍ $D_{f_1} =]0\,;\,+\infty[$

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow f_1'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$$f_1'\ a\ le\ même\ signe\ que\ \ 1 - 2\ln(x)\ \ \ car\ \ x^3 > 0\ \forall x \in]0\,;\,+\infty[$$

$$f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\begin{array}{l} Pour\ x < e^{\frac{1}{2}}\ ,\ \ f_1'(x) > 0\ \ ;\ \ f_1 \nearrow \\ Pour\ x > e^{\frac{1}{2}}\ ,\ \ f_1'(x) < 0\ \ ;\ \ f_1 \searrow \\ \quad f_1'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0\ \ et\ \ f_1\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2e} \end{array}\right.$$

Tableau de variations de f_1 :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3) Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à $(\mathcal{C}_1)$.

$$Soit\ (T_1)\ cette\ tangente\ ;\ (T_1)\ a\ pour\ équation\ y = f_1'(1)(x-1) + f_1(1)$$

$$f_1'(1) = 1 \quad et \quad f_1(1) = 0\ ;\ Donc\ (T_1): y = x - 1$$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_2)$?

$$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0$$

On en déduit que : *les droites d'équations* $x = 0$ *et* $y = 0$ sont asymptotes à la courbe$(\mathcal{C}_2)$

5) Calculer $f'_2(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.

$$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2} \Longrightarrow f_2'(x) = \frac{2\ln(x)\,[1-\ln(x)]}{x^3}$$

$$f_2'(x)\ a\ le\ même\ signe\ que\ 2\ln(x)\,[1-\ln(x)]\ \ car\ \ x^3 > 0\ \forall x \in\,]0\,;\,+\infty[$$

$$f_2'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\ln(x)\,[1-\ln(x)] < 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\ln(x) > 0\\ 1-\ln(x) < 0\end{cases} ou \begin{cases}\ln(x) < 0\\ 1-\ln(x) > 0\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x > 1\\ x > e\end{cases} ou \begin{cases}x < 1\\ x < e\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x \in\,]1\,;\,+\infty[\\ x \in\,]e\,;\,+\infty[\end{cases} ou \begin{cases}x \in\,]0\,;\,1[\\ x \in\,]0\,;\,e[\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x \in\,]1\,;\,+\infty[\, \cap\,]e\,;\,+\infty[\quad ou \quad x \in\,]0\,;\,1[\,\cap\,]0\,;\,e[)$$

$$\Leftrightarrow\ x \in\,]0\,;\,1[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[$$

$$\begin{cases} Pour\ x \in\,]0\,;\,1[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[\,,\ f_2'(x) < 0\ ;\ f_2 \searrow \\ Pour\ x \in\,]1\,;\,e[\,,\ f_2'(x) > 0\ ;\ f_2 \nearrow \\ f_2'(1) = f_2'(e) = 0\ \ et\ \ f_2(1) = 0\ \ et\ \ f_2(e) = \frac{1}{e^2}\end{cases}$$

Le tableau de variation de f_2

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$				$\frac{1}{e^2}$		

$f_2(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0

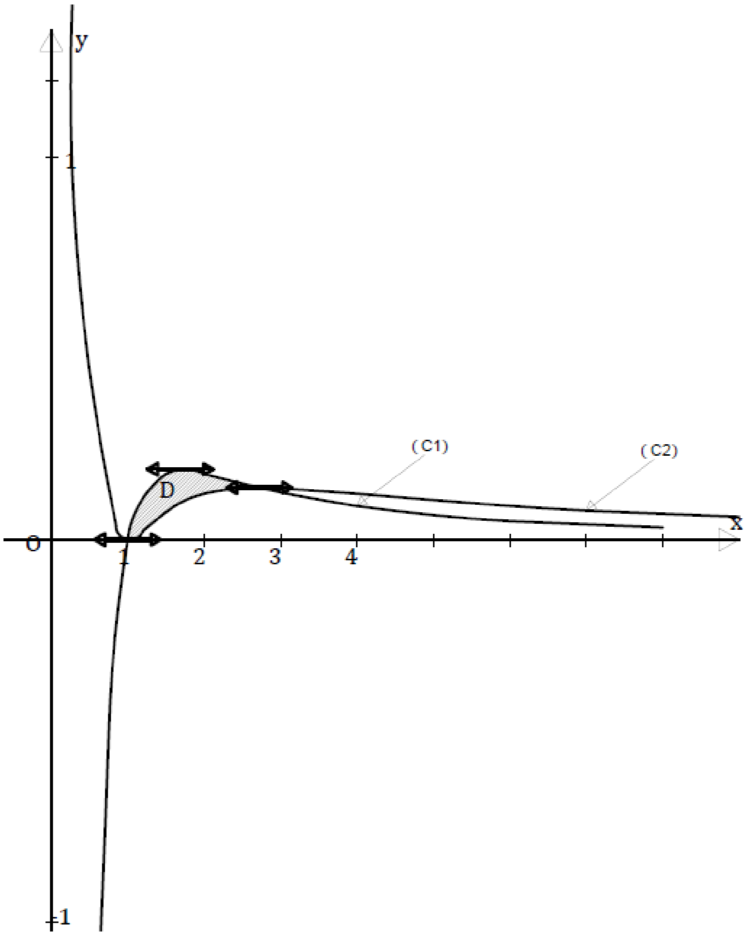
B.

1) Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$.

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x\,(1 - \ln x)}{x^2} \quad ; \; f_1(x) - f_2(x) \textit{ a le même signe que } f_2'$$

$$\left|\begin{array}{c} Pour\ x \in]0\,;\,1[\, \cup\,]e\,;\,+\infty[\,,\ \ f_1(x) - f_2(x) < 0 \ \ ;\ \ (\mathcal{C}_1)\ est\ en\ dessous\ de\ (\mathcal{C}_2) \\ Pour\ x \in]1\,;\,e[\ ,\ \ f_1(x) - f_2(x) > 0 \ \ ;\ \ (\mathcal{C}_1)\ est\ au\ dessus\ de\ (\mathcal{C}_2) \\ x \in \{1\,;e\}\ \ ,\ \ f_1(x) - f_2(x) = 0 \ \ ;\ \ (\mathcal{C}_1)\ et\ (\mathcal{C}_2)\ se\ coupent \end{array}\right.$$

2) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$ dans le même repère orthogonal.



C. m étant un entier naturel non nul, on pose $I_m = \int_1^e f_m(x)dx$.

1) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$. En déduire I_1.

$$F(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \Longrightarrow F'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} = -f_1(x)$$

$$I_1 = \int_1^e f_1(x)dx = -\int_1^e -f_1(x)dx = -\int_1^e F'(x)dx = [-F(x)]_1^e$$

$$I_1 = F(1) - F(e) = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} \quad ; \quad \boxed{I_1 = \frac{e-2}{e}}$$

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{m+1} = \frac{1}{e} + (m+1)I_m$.

$$I_{m+1} = \int_1^e f_{m+1}(x)dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^{m+1}}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} \times (\ln x)^{m+1}\, dx$$

$$Posons \quad U = (\ln x)^{m+1} \quad et \quad V' = \frac{1}{x^2}$$

$$U' = \frac{(m+1)(\ln x)^m}{x} \qquad et \qquad V = -\frac{1}{x}$$

$$I_{m+1} = \left[-\frac{(\ln x)^{m+1}}{x}\right]_1^e + (m+1)\int_1^e \frac{(\ln x)^m}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + (m+1)I_m \quad cqfd$$

3) Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2\frac{e-2}{e} = \boxed{\frac{e-5}{e}}$$

$$Soit\ D\ ce\ domaine.sur\ \ ]1\,;\ e[\ ,\ \ f_1(x) > f_2(x) \Rightarrow Aire(D) = \left(\int_1^e (f_1 - f_2)(x)\, dx\right) \times u.a$$

$$Aire(D) = \left(\int_1^e f_1(x)\, dx - \int_1^e f_1(x)\, dx\right) \times u.a \quad ; \quad u.a = 2 \times 10 = 20\ cm^2$$

$$Aire(D) = (I_1 - I_2) \times 20\ cm^2 = \left(\frac{e-2-e+5}{e}\right).20cm^2$$

$$\boxed{Aire(D) = \frac{60}{e}\ cm^2}$$

Correction Bac 2012

Exercice1 : 6pts

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x+2}{1-x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f $de\ f$.

$$D_f=\{x\in IR,\ \ 1-x^2\neq 0\}=]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;\ +\infty[$$

2) Déterminer les réels a, b et c :

$$\forall x\in D_f,\ \ f(x)=ax+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{1+x}\Leftrightarrow \forall x\in IR,\ \ \frac{x^3+2x+2}{1-x^2}=ax+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in D_f,\ \ x^3+2x+2=ax(1-x^2)+b(1+x)+c(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in D_f,\ \ x^3+2x+2=-ax^3+(a+b-c)x+b+c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\\ a+b-c=2\\ b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\\ b=\dfrac{5}{2}\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

3) En déduire l'ensemble des primitives de $f\ sur\ D_f$.

$$f(x)=-x+\frac{5}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\Longrightarrow F(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|+k\ \ ;\ \ k\in IR$$

B. $m_1=1x00y2\ \ en\ base\ 8$ et $m_2=x1y003$ en base 7.

1) Déterminer les chiffres $x\ et\ y$ pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

$$\begin{cases} m_1=\overline{1x00y2}^{8}\\ m_2=\overline{x1y003}^{7}\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x,y\in\{0\,,1\,,\dots,6\}\\ m_1=8^5+x.8^4+0.8^3+0.8^2+y.8+2=4096x+8y+32770\\ m_2=x.7^5+1.7^4+y.7^3+0.7^2+0.7+3=16807x+343y+2404\end{cases}$$

Les deux commerçantes achètent avec la totalité de leurs argents$\Longrightarrow \begin{cases} m_1\equiv 0[5]\\ m_2\equiv 0[5]\end{cases}$

$$\begin{cases} m_1\equiv 0[5]\\ m_2\equiv 0[5]\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x+3y\equiv 0[5]\\ 2x+3y+4\equiv 0[5]\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} -x-3y\equiv 0[5]\\ 2x+3y\equiv 1[5]\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x\equiv 1[5]\\ 3y\equiv 4[5]\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x\in\{1\,,6\}\\ y\equiv 3[5]\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x\in\{1\,,6\}\\ y=3\end{cases}$$

Les commerçantes achètent un nombre maximum de mangues$\Longrightarrow \begin{cases} x=6\\ y=3\end{cases}$

2) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

$$\begin{cases} m_1=57\ 370\\ m_2=104\ 275\end{cases}\ ;\ \begin{cases} la\ 1^{\text{ère}}\ achète\ n_1=\dfrac{m_1}{5}=11\ 474\ mangues\\ la\ 2^{\text{ème}}\ achète\ n_2=\dfrac{m_2}{5}=20\ 855\ mangues\end{cases}$$

3)

a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.

$$m_1 = 2 \times 5 \times 5737 \quad et \quad m_2 = 5^2 \times 4171$$

b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 $et\ de\ m_2\ puis\ le\ pgcd(m_1\,;m_2)$.

Notons nb_1 et nb_2 respectivement les nombres de diviseurs de m_1 et m_2

$$\begin{cases} m_1 = 2 \times 5 \times 5737 \\ m_2 = 5^2 \times 4171 \end{cases} \begin{cases} nb_1 = (1+1).(1+1).(1+1) = 8 \\ nb_2 = (2+1).(1+1) = 6 \\ pgcd(m_1\,;m_2) = 5 \end{cases} \quad ; \quad \boxed{\begin{cases} nb_1 = 8 \\ nb_2 = 6 \\ pgcd(m_1\,;m_2) = 5 \end{cases}}$$

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ $où$ u et v sont deux entiers relatifs.

$$m_1u + m_2v = 5 \Leftrightarrow 11474u + 20855v = 1 \quad et \quad 11474 \wedge 20855 = 1$$

A l'aide de l'algorithme d'Eclude, nous déterminons le couple $(3\,059\,;\ -1\,683)$ solution de l'équation. Ainsi, on a le système : $\begin{cases} 11474u + 20855v = 1 \\ 11474(3059) + 20855(-1683) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 11474u + 20855v = 1 \\ 11474(3059) + 20855(-1683) = 1 \end{cases}$$
$$\overline{11474(u - 3059) + 20855(v + 1683) = 0}$$

$$11474(u - 3059) + 20855(v + 1683) = 0 \Longrightarrow 11474(u - 3059) = 20855(-v - 1683)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 20855/u - 3059 \\ 11474/-v - 1683 \\ 11474 \wedge 20855 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 20855k + 3059 \\ v = -11474k - 1683 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Exercice2 :</u> 6pts

I. On considère le complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z^2}{z + i} \text{ où } z = x + iy, avec\ (x\,;y) \in IR^2$$

1) On note $Z = X + iY, (X\,;Y) \in IR^2$. Ecrire X et Y en fonction de x et y.

$$Z = \frac{z^2}{z + i} = \frac{(x+iy)^2}{x + i(1+y)} = \frac{x^3 + x(y+1)^2 - x}{x^2 + (1+y)^2} + i\frac{y^3 + y^2 + x^2(y-1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

$$X = \frac{x^3 + x(y+1)^2 - x}{x^2 + (1+y)^2} \quad Y = \frac{y^3 + y^2 + x^2(y-1)}{x^2 + (y+1)^2}$$

2) Au complexe z, on associe le point $M(x\,;y)$ du plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.

$$Z\ est\ un\ imaginaire\ pur\ non\ nul \Longrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0\ \ ou\ \ x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y^3 + y^2 + x^2(y-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0\ \ et\ \ y \neq -1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Donc, (Γ) est la réunion de (la droite d'équation $x = 0$) et (du cercle $C_{((0\,;-1)\,;1)}$) $privé\ des\ points\ O(0\,;0)\ et\ B(0\,;\ -1)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ).

$$z^2 + 2iz - 2 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1 + i)(z + 1 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 1 - i \;\; ou \;\; z_2 = -1 - i$$

$$\boxed{S = \{1 - i \;;\; -1 - i\}}$$

$$Soit\ M_1\ \ et\ \ M_2\ \ les\ images\ respectives\ de\ z_1\ \ et\ \ z_2. M_1 = (1\,;\,-1)\ \ et\ \ M_2 = (-1\,;\,-1)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = -2 \end{cases} \Rightarrow M_1 \in (\Gamma)\ \ et\ \ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = -2 \end{cases} \Rightarrow M_2 \in (\Gamma)\ \ cqfd$$

II.

1) $\begin{cases} ppcm(a\,;b) = 216 = 2^3 \times 3^3 \\ a = 72 = 2^3 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3^3 \times 2^\alpha \\ \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$(b < a) \Leftrightarrow (3^3 \times 2^\alpha < 2^3 \times 3^2) \Leftrightarrow \left(2^{\alpha-3} < \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (\alpha < 3 - \ln 3 = 1{,}9) \Rightarrow \alpha \in \{0\,,1\}$$

$$les\ valeurs\ possibles\ de\ a\ sont : 27\ \ et\ \ 54$$

2) Trouver les diviseurs dans IN de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que : $n^2 - 240$ *est un carré parfait.*

- $240 = 2^4 \times 3 \times 5 \Rightarrow$ *le nombre de diviseurs de* 240 *est* : $(4 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 20$
  L'ensemble des diviseurs de 240 est :
  $D_{240} = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5,6\,,8\,,10\,,12\,,15\,,16\,,20\,,24\,,30\,,40\,,48\,,60\,,80\,,120\,,240\}$
- $n^2 - 240$ *est un carré parfait* $\Rightarrow \exists m \in IN$ *tel que* $n^2 - 240 = m^2$ *et* $m < n$

$$n^2 - 240 = m^2 \Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 240$$

$$\begin{cases} n - m = 2 \\ n + m = 120 \end{cases} ou \begin{cases} n - m = 4 \\ n + m = 60 \end{cases} ou \begin{cases} n - m = 6 \\ n + m = 40 \end{cases} ou \begin{cases} n - m = 8 \\ n + m = 30 \end{cases} ou \begin{cases} n - m = 10 \\ n + m = 24 \end{cases} ou \begin{cases} n - m = 12 \\ n + m = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 61 \\ m = 59 \end{cases} ou \begin{cases} n = 32 \\ m = 28 \end{cases} ou \begin{cases} n = 23 \\ m = 17 \end{cases} ou \begin{cases} n = 19 \\ m = 11 \end{cases} ou \begin{cases} n = 17 \\ m = 7 \end{cases} ou \begin{cases} n = 16 \\ m = 4 \end{cases}$$

Problème :

Soit f la fonction de $[0\,;\,+\infty[$ *vers IR* définie par

$$f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}}$$

1)

a) Etudier le sens de variation de f.

$$f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 8}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{\sqrt{x^2 + 8}\left(x + \sqrt{x^2 + 8}\right)} < 0\ ,\ \ \forall x \in [0\,;\,+\infty[$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) Etudier la limite de f *en* $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow la\ droite\ d'équation\ y = 0\ est\ asymptote\ horizontale\ à\ la\ courbe\ de\ f$$

$$f(0) = \sqrt{8}$$

c) Dresser le tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\sqrt{8}$ $\searrow$ 0

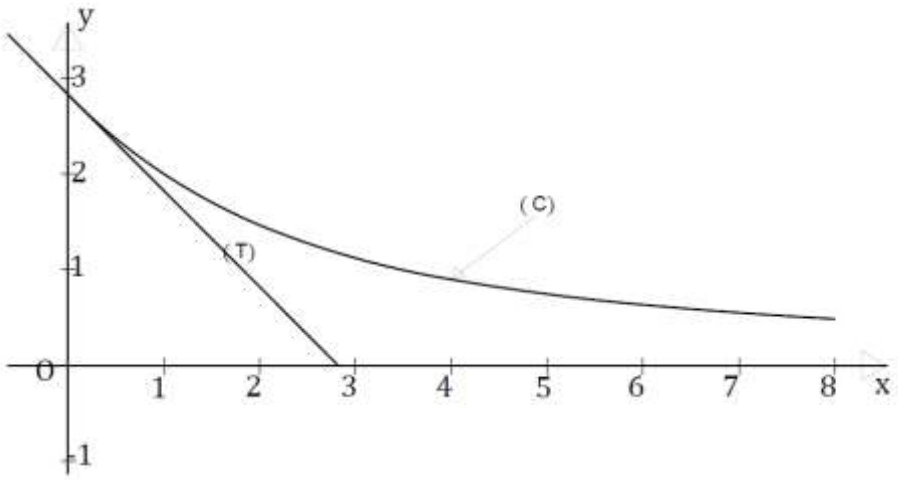
2)

a) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse nulle.

$$Cette\ tangente\ a\ pour\ équation : y = f'(0)(x-0) + f(0)\ \ avec\ f'(0) = -1\ \ et\ \ f(0) = \sqrt{8}$$

$$Donc\ (T): y = -x + \sqrt{8}$$

b) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$.



3) En utilisant les variations de f, démontrer que $\forall\, x \in [1\,;2], 1 \leq f(x) \leq 2$.

$$x \in [1\,;2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ f \searrow sur\ [1\,;2] \end{cases} \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{4}{1+\sqrt{3}} \leq f(x) \leq 2$$

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}} = 1{,}46 > 1 \Rightarrow\ 1 < f(x) \leq 2\ \ cqfd$$

4)

a) Démontrer que pour tout réel x de $[1\,;2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

$$1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}} \leq -1$$

D'autre part, $\left(\sqrt{x^2+8}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} >\ \ \forall x \in [1\,;2].\ donc\ x \longmapsto \sqrt{x^2+8}\ \ est\ croissante\ sur[1\,;2]$

$$\begin{cases} x \in [1\,;2] \\ \sqrt{x^2+8}\ \ croissante\ sur[1\,;2] \end{cases} \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x^2+8} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{2}{3}<-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ et\ \ -\frac{1}{3}<\frac{2}{3}\right)\Rightarrow-\frac{2}{3}<f'(x)<\frac{2}{3}\Rightarrow|f'(x)|<\frac{2}{3}\ \ cqfd$$

b)

Pour $x\in[1\,;2]$, *l'application du théorème de l'IAF au segment* $[1\,;x]$ *donne* :

$$|f(x)-f(1)|\leq\frac{2}{3}|x-1|\Leftrightarrow|f(x)-2|\leq\frac{2}{3}|x-1|\ \ cqfd$$

$$on\ end\acute{e}duit\ que\ \ -\frac{2}{3}|x-1|\leq f(x)-2\leq\frac{2}{3}|x-1|$$

$$-\frac{2}{3}|x-1|\leq f(x)-2\leq\frac{2}{3}|x-1|\Leftrightarrow-\frac{2}{3}|x-1|+2\leq f(x)\leq\frac{2}{3}|x-1|+2$$

Les fonctions affines sont :

$$y_1=-\frac{2}{3}|x-1|+2=\left|\begin{array}{l}\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\quad si\ \ x\in[0\,;1[\\ -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\quad si\ x\in\ ]1\,;\ +\infty[\\ \quad 2\ si\ x=1\end{array}\right.$$

$$et\qquad y_2=\frac{2}{3}|x-1|+2=\left|\begin{array}{l}-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\quad si\ \ x\in[0\,;1[\\ \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\quad si\ x\in\ ]1\,;\ +\infty[\\ \quad 2\ si\ x=1\end{array}\right.$$

Correction Bac 2011

Exercice1 : 4pts

$$\begin{cases} \text{B est un point de l'axe } (O\ ;\ \vec{u}) \\ \text{C est un point de l'axe } (O\ ;\ \vec{v}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{l'ordonné de B est nul} \\ \text{l'abscisse de C est nul} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (x\ ; 0) \\ C = (0\ ; y) \end{cases}$$

$$A = (12\ ; 18) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x - 12\ ;\ -18)\ \ et\ \ \overrightarrow{AC} = (-12\ ; y - 18)$$

1) Démontrer que le couple $(x\ ; y)$ est solution de l'équation : (E): $2x + 3y = 78$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -12x + 12^2 - 18y + 18^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 78\ \ cqfd$$

2) On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec $x\ et\ y$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$immédiat$$

   b) A partir de la définition de B et de C, trouver une solution particulière $(x_0\ ; y_0)$ de (E)

$$(x_0\ ; y_0) = (12\ ; 18)\ est\ une\ solution\ particulière\ de\ (E).$$

   c) Démontrer qu'un couple $(x\ ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x\ ; y) = (12 + 3k\ ; 18 - 2k)$ où k $est\ un\ entier\ relatif$.

$$nous\ avons\ le\ système:\ \begin{cases} 2x + 3y = 78 \\ 2(12) + 3(18) = 78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 78 \\ 2(12) + 3(18) = 78 \end{cases} \Rightarrow 2(x - 12) + 3(y - 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3/x - 12 \\ 2/18 - y \\ car\ 3 \wedge 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3/x - 12 \\ 2/18 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k + 12 \\ y = -2k + 18 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}\ \ cqfd$$

   d) Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :$-6 \leq x \leq 21\ \ et\ \ -5 \leq y \leq 14$?

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 3k + 12 \leq 21 \\ -5 \leq -2k + 18 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq k \leq 3 \\ -2 \leq k \leq 11{,}5 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq k \leq 3$$

$$Donc\ \ k \in \{-2\ , -1\ , 0\ , 1\ , 2\ , 3\}. D'où\ il\ y\ a\ 6\ couple\ de\ points\ (B\ ; C)\ vérifiant: \begin{cases} -6 \leq x \leq 21 \\ -5 \leq y \leq 14 \end{cases}$$

Exercice2 : 5pts

1) A $M(x\,;y)$, *on* associe le point $M'(x'\,;y')$ telles que :

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{8}{5} \\ y'=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{6}{5}y-\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad et\ \mathbb{C}\ l'ensemble des\ nombres\ complexes.$$

La matrice de l'application linéaire φ associée à f est $M_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

2)

a) f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

Oui f est bijective.

En effet, det $(M_\varphi) = \begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ *prouve que* f *est bijective.*

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

$$M(x\,;y)\ est\ invariant\ par\ f \Leftrightarrow f(M)=M$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{6}{5}y-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x-8y=-8 \\ 8x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow M=(0\,;1)$$

$$L'ensemble des\ points\ invariants\ par\ f\ est\ \{(0\,;1)\}$$

c) Quelle est l'image par f de la droite $(\mathcal{D})$: $y=2x+1$?

$$M(x\,;y)\ un\ point\ de\ (\mathcal{D}).\ alors\ y=2x+1$$

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{8}{5} \\ y'=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{6}{5}y-\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x'=-6x+8(2x+1)-8 \\ 5y'=8x+6(2x+1)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x \\ y'=4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y'=2x'+1$$

$$Donc\ l'image\ de\ (\mathcal{D})\ par\ f\ est\ (\mathcal{D}).$$

3) $z=x+iy\ \ et\ \ z'=x'+iy'$

a) Sachant que $f(M)=M'$, exprimer z' en fonction de z.

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{8}{5} \\ y'=\dfrac{8}{5}x+\dfrac{6}{5}y-\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x'=-6x+8y-8 \\ 5iy'=8ix+6iy-i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5(x'+iy')=-6(x-iy)+8i(x-iy)-(8+i)$$

$$\Leftrightarrow 5z'=(-6+8i)\overline{z}-(8+i)$$

$$Donc\ \ ,\ \ z'=\frac{1}{5}(-6+8i)\overline{z}-\frac{1}{5}(8+i)$$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

f est une similitude indirecte. Ses éléments caractéristiques sont :

- Le centre Ω : c'est le point invariant $\Omega = (0\,;1)$
- L'axe : c'est la droite $(D) : y = 2x + 1$
- Le rapport k : c'est le module de $a = \frac{1}{5}(-6 + 8i)$; $k = 2$

Problème :

A. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ *et* $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

$$D_f = \left\{x \in IR,\ \ \frac{1-x}{1+x} > 0\ \ et\ \ 1 + x \neq 0\right\} =]-1\,;1[$$

2) Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty\ \ et$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} la\ droite\ d'\text{é}quation\ x = -1\ est\ asymptote\ verticale\ \text{à}\ (\mathcal{C}) \\ la\ droite\ d'\text{é}quation\ x = 1\ est\ asymptote\ verticale\ \text{à}\ (\mathcal{C}) \end{cases}\quad cqfd$$

3) Calculer$f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$f'\ a\ le\ signe\ de\ x^2 - 1\ \ et\ \ x^2 - 1 < 0\ \forall x \in D_f$$

Tableau de variation de f

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4)

a) $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion ssi $\exists x \in D_f\ tq\ f''(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{x^2-1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Donc $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion au point $\mathrm{I}\big(0\,;f(0)\big) = (0\,;0)$

L'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$$(T) : y = -2x$$

b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).

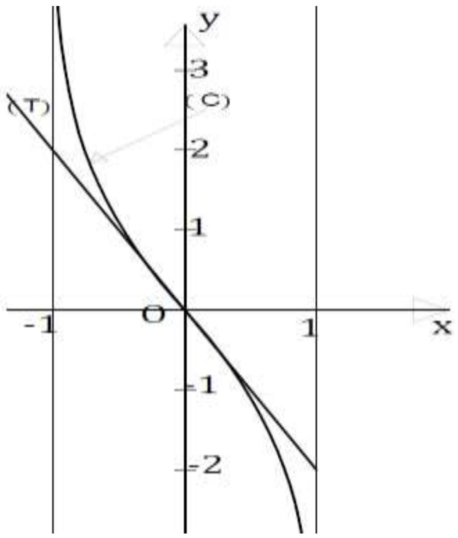
La position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) est donnée par le signe de $f(x) - y$

$$Posons\ \ g(x) = f(x) - y. Donc\ g'(x) = f'(x) + 2 = \frac{2x^2}{x^2 - 1} < 0\ \ \forall x \in]-1\,;1[$$

$$g\ est\ decroissante\ sur\ D_f\ ;\ De\ plus\ \left|\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \\ g(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$Donc\ \left|\begin{array}{c} \text{Pour } x \in]-1\,;\,0[\ \ , g(x) = f(x) - y > 0\ \ ,\ \ (\mathcal{C})\ est\ au\ dessus\ de\ (T) \\ \text{Pour } x \in]0\,;\,1[\ \ ,\ \ g(x) = f(x) - y < 0\ , (\mathcal{C})\ est\ en\ dessous\ de\ (T) \\ Pour\ x = 0\ \ , g(x) = f(x) - y = 0\ \ (\mathcal{C})\ et\ (T)\ se\ coupent \end{array}\right.$$

5) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le même repère.



6)

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\, dx$.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$$

$$Posons\ u(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ \ et\ \ v'(x) = 1$$

$$u'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}\ \ \ et\ \ \ v(x) = x$$

$$I = \left[x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(3) - [\ln(1-x^2)]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$\boxed{I = \frac{3}{2}\ln(3) - \ln(4)}$$

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}), (T)$ et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

$$Soit\ D\ ce\ domaine.\ pour\ x \in]-1\ ;\ 0[\ ,\ \ f(x) > y \Longrightarrow Aire(D) = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f-y)(x)\,dx\right) \times u.a$$

$$Aire(D) = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2x\,dx\right) \times 4\,cm^2 = \left(I + [x^2]_{-\frac{1}{2}}^{0}\right) \times 4\,cm^2$$

$$\boxed{Aire(D) = (6\ln(3) - 4\ln(4) - 1)\,cm^2}$$

B. Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x) \text{ où } f \text{ est la fonction définie en A.}$$

1) Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)\,.\,f'(\cos x) = -\frac{1}{2}\sin(x)\,.\frac{-2}{1-\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)}\quad cqfd$$

2) Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$.

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln(3)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\ln(3)}$$

3) Soit $(I_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx$.

a) Calculer $I_0\ et\ I_1$.

$$I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx = K = \frac{1}{2}\ln(3)\quad ;\quad I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(3) + \ln(2)$$

b) En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer $I_2, I_3, I_4\ et\ I_5$.

$$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2} x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{\sin x} - \frac{\cos^{n+2} x}{\sin x}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x\,dx = -\left[\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I_n - I_{n+2} = \frac{2^{-n-1}}{n+1}}$$

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$I_2 = I_0 - \frac{1}{2} \quad ; \quad I_3 = I_1 - \frac{1}{8} \quad ; \quad I_4 = I_2 - \frac{1}{24} \quad ; \quad I_5 = I_3 - \frac{1}{64}$$

Correction Bac 2010

Exercice1 : 5pts

On considère l'équation d'inconnue complexe z,

$$(E): z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

$$\begin{cases} z_0 \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow z_0^4 + 5z_0^3 + (11-3i)z_0^2 + (10-10i)z_0 - 8i = 0 \\ z_0 \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \exists x_0 \in IR^* \text{ tq } z_0 = ix_0 \end{cases}$$

$$z_0 = ix_0 \Leftrightarrow (x_0^4 - 11x_0^2 + 10x_0) + i(-5x_0^3 + 3x_0^2 + 10x_0 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 - 11x_0^2 + 10x_0 = 0 & (1) \\ -5x_0^3 + 3x_0^2 + 10x_0 - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Considérons l'équation (1). $x_0 \in IR^* \Longrightarrow x_0^3 - 11x_0 + 10 = 0$

1 est une solution de l'équation (1). De même 1 est solution de (2). Donc $x_0 = 1$

$$\boxed{z_0 = i}$$

2) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

(E) admet une solution réelle $\Leftrightarrow \exists x \in IR \text{ tq } x^4 + 5x^3 + (11-3i)x^2 + (10-10i)x - 8i = 0.$

$$x^4 + 5x^3 + (11-3i)x^2 + (10-10i)x - 8i = 0 \Leftrightarrow (x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 10x) - i(3x^2 + 10x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 10x = 0 & (1) \\ 3x^2 + 10x + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

La résolution de l'équation (2) $donne\ x_1 = -2\ \ et\ x_2 = -\frac{4}{3}$. et on vérifie que -2 est solution de (2). Donc $x = -2$.

3) Achever la résolution de (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

$$(z - i)(z + 2) = z^2 + (2 - i)z - 2i \text{ divise } z^4 + 5z^3 + (11-3i)z^2 + (10-10i)z - 8i.$$

Après factorisation, on trouve

$$z^4 + 5z^3 + (11-3i)z^2 + (10-10i)z - 8i = [z^2 + (2-i)z - 2i][z^2 + (3+i)z + 4]$$

$$(E) \Leftrightarrow [z^2 + (2-i)z - 2i][z^2 + (3+i)z + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (2-i)z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 + (3+i)z + 4 = 0$$

$$z^2 + (2-i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -2$$

$$z^2 + (3+i)z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = -1 + i \quad ou \quad z = -2 - 2i$$

$$\boxed{S = \{i, -2, -1+i, -2-2i\}}$$

4) $z_0 = i \ ,\ z_1 = -1 + i \ ,\ z_2 = -2 \ \ et \ \ z_3 = -2 - 2i$

$$z_0 \ ,\ z_1 \ ,\ z_2 \ ,\ z_3 \text{ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique ssi}: \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_0} = 1 + i \ ;\ \frac{z_2}{z_1} = 1 + i \ ;\ \frac{z_3}{z_2} = 1 + i \quad cqfd$$

5) Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E).

$$z_0 = \left[1 ; \frac{\pi}{2}\right] \ ,\ z_1 = \left[\sqrt{2} ; \frac{3\pi}{4}\right] \ ,\ z_2 = [2 ; \pi] \ ,\ z_3 = \left[2\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{4}\right]$$

Exercice2 : 5pts

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On désigne par S la réflexion d'axe la droite $(D): y = x$ et par σ la réflexion d'axe $(O\ ;\ \vec{\imath})$.

1) Soit M un point du plan et M_1 son image par S ; on pose $M' = \sigma(M_1)$.
   a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.

$$S(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = x \end{cases}$$

$$\sigma(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}}$$

   b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M'.

C'est la rotation de centre $O(0\ ;0)$ *et d'angle* $\theta = -\frac{\pi}{2}$

   c) Au point $M(x\ ;y)$, on associe le point $N(X\ ;Y)$ telles que :

$$\begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.

En posant $Z = X + iY$ *et* $z = x + iy$ *, l'expression complexe de cette transformation* s'écrit :

$Z - 1 = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z - 1)$ *qui est l'expression complexe de la rotation de centre* $\Omega(1\ ;0)$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

2) Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N.

$$y = x \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 + x \\ Y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow X + Y - 2 = 0$$

Donc, N décrit la droite d'équation $X + Y - 2 = 0$

Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint $(M\ ;N)$?

Le milieu du bipoint $(M\ ;N)$ *a pour coordonnées* $\left(\frac{x+X}{2}\ ;\frac{y+Y}{2}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = x + \dfrac{1}{2} \quad car\ y = x \\ \dfrac{y + Y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc, le milieu du bipoint $(M\ ;N)$ d'écrit la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

Problème :

A. Soit g la fonction numérique définie sur IR par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
   1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

$$g(x) = 2e^x - x - 2 \Longrightarrow g'(x) = 2e^x - 1$$

$$2e^x - 1 > \Longrightarrow x > -\ln(2)$$

Tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que zéro (0) en est une.

$$g(0) = 2e^0 - 2 = 2 - 2 = 0 \ \ \textit{Prouve que } 0 \textit{ est une solution de } g(x) = 0.$$

b) L'autre solution est appelée α. Montrer que$-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

$$g \textit{ est decroissante sur }]-\infty\,;\ -\ln 2[\ \ \textit{donc sur } [-1{,}6\,;\ -1{,}5]$$

$$\begin{cases} g(-1{,}6) = 0{,}004 \\ g(-1{,}5) = -0{,}054 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(-1{,}5) < g(\alpha) < g(-1{,}6) \\ g \searrow \ \ sur\ [-1{,}6\,;\ -1{,}5] \end{cases} \Longrightarrow -1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5 \ \ cqfd$$

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x. (voir T.V de g)

$$\left| \begin{array}{c} \text{Pour } x \in\,]-\infty\,;\ \alpha[\, \cup\,]0\,;\ +\infty[, g(x) > 0 \\ \text{Pour } x \in\,]\alpha\,;\ 0[, g(x) < 0 \\ g(\alpha) = g(0) = 0 \end{array} \right.$$

B. Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1) Déterminer les limites de f en$-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^x en facteur).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ *et* $g(x)$ ont même signe. (g est la fonction définie dans la partie A). Etudier les sens de variation de f.

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \Longrightarrow f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x+1)e^x = e^x(2e^x - x - 2)$$

$$f'(x) = e^x g(x).$$

$$\forall x \in IR,\ \ e^x > 0 \Longrightarrow f'(x) \textit{ et } g(x) \textit{ ont même signe. Donc les sens de variation de } g \textit{ sont}:$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{Pour } x \in\,]-\infty\,;\ \alpha[\, \cup\,]0\,;\ +\infty[, f'(x) > 0 \\ \text{Pour } x \in\,]\alpha\,;\ 0[, f'(x) < 0 \\ f'(\alpha) = f'(0) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} f \nearrow sur\ ]-\infty\,;\ \alpha[\, \cup\,]0\,;\ +\infty[\\ f \searrow sur\ ]\alpha\,;\ 0[\\ f'(\alpha) = f'(0) = 0 \end{array} \right.$$

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2} \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -\frac{(\alpha^2+2\alpha)}{4} \quad cqfd$$

Encadrement de $f(\alpha)$:

$$-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}1 \leq \frac{\alpha+2}{4} \leq 0{,}125 \Leftrightarrow 0{,}15 \leq f(\alpha) \leq 0{,}2$$

4) Etablir le tableau de variation de f.

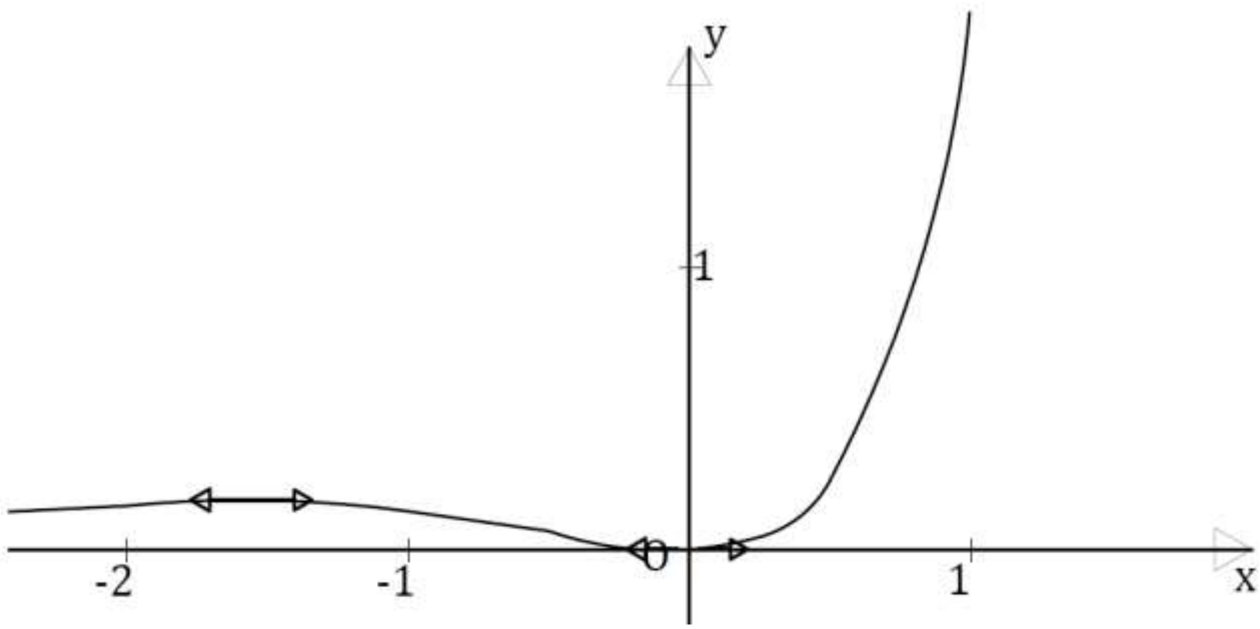
<u>Le tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique 2cm).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Donc, la courbe de f admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées.



C. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)\ dx$.

1) Montrer que pour tout entier naturel $n, \cos(n\pi) = (-1)^n$ *et* $\sin(n\pi) = 0$.

Montrons par récurrence :

- Pour $n = 0$, $\begin{cases} \cos(0.\pi) = \cos(0) = 1 = (-1)^0 \ \ vrai \\ \sin(0.\pi) = \sin(0) = 0 \end{cases}$
- Supposons $\forall n \geq 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ *et* $\sin(n\pi) = 0$
- Montrons $\forall n \geq 0$, $\cos\big((n+1)\pi\big) = (-1)^{n+1}$ *et* $\sin\big((n+1)\pi\big) = 0$

$$\begin{cases} \cos\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi + \pi) = -\cos(n\pi) = -1 \times (-1)^n = (-1)^{n+1} \\ \sin\big((n+1)\pi\big) = \sin(n\pi + \pi) = -\sin(n\pi) = -1 \times 0 = 0 \end{cases} \quad cqfd$$

On conclut que : pour tout entier naturel $n, \cos(n\pi) = (-1)^n$ *et* $\sin(n\pi) = 0$

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}$.

$$I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)\ dx \ ; \ posons \ \left| \begin{matrix} u = \cos(nx) \\ v' = e^x \end{matrix} \right. on\ trouve \ \left| \begin{matrix} u' = -n\sin(nx) \\ v = e^x \end{matrix} \right.$$

$$I_n = [e^x \cos(nx)]_0^\pi + n\int_0^\pi e^x \sin(nx)\ dx = e^\pi(-1)^n - 1 + n\int_0^\pi e^x \sin(nx)\ dx$$

$$Pour \int_0^\pi e^x \sin(nx)\ dx\ , posons \ \left| \begin{matrix} u = \sin(nx) \\ v' = e^x \end{matrix} \right. on\ trouve \ \left| \begin{matrix} u' = n\cos(nx) \\ v = e^x \end{matrix} \right.$$

$$\int_0^\pi e^x \sin(nx)\ dx = [e^x \sin(nx)]_0^\pi - n\int_0^\pi e^x \cos(nx)\ dx = -nI_n$$

$$Donc\ \ I_n = e^\pi(-1)^n - 1 - n^2 I_n \ \ , c-a-d \ , \ I_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2} \ \ cqfd$$

3) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{1+n^2}$.

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -e^\pi - 1 \leq (-1)^n e^\pi - 1 \leq e^\pi - 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(e^\pi + 1)}{n^2+1} \leq \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1} \leq \frac{e^\pi - 1}{n^2+1} < \frac{e^\pi + 1}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(e^\pi + 1)}{n^2+1} \leq I_n < \frac{e^\pi + 1}{n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow |I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{n^2+1} \quad cqfd$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^\pi+1}{n^2+1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Correction Bac 2009

Exercice1 : 3pts

1) z étant un nombre complexe, on considère l'équation $(E): z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.
   a) Vérifier que $u = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E).

$$u^4 = \left(\sqrt{2} + i\right)^4 = \sqrt{2}^4 + 4.\sqrt{2}^3.i + 6.\sqrt{2}^2.i^2 + 4.\sqrt{2}.i^3 + i^4$$

$$= 4 + 8i\sqrt{2} - 12 - 4i\sqrt{2} + 1 = -7 + 4i\sqrt{2}$$

$$u^4 = -7 + 4i\sqrt{2} \Leftrightarrow u \text{ est solution de } (E)$$

   b) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

$$Trouver\ les\ racines\ quatrièmes\ de\ l'unité\ , c'estrésoudre\ dans\ \mathbb{C}\ \ l'équation\ z^4 = 1$$

$$\mathfrak{z}^4 = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{z}^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathfrak{z}^2 - 1)(\mathfrak{z}^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathfrak{z} - 1)(\mathfrak{z} + 1)(\mathfrak{z} - i)(\mathfrak{z} + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{z}_0 = 1\ ,\ \ \mathfrak{z}_1 = -1\ \ ,\ \ \mathfrak{z}_2 = i\ \ ,\ \ \mathfrak{z}_3 = -i$$

Déduisons-en dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

$$(u\mathfrak{z}_k)^4 = u^4\mathfrak{z}_k^4 = \left(-7 + 4i\sqrt{2}\right) \times 1 = -7 + 4i\sqrt{2}\ ,\ \ k \in \{0\ ,1\ ,2\ ,3\}\ et\ \mathfrak{z}_k\ racine\ 4è\ de\ 1$$

$$Donc\ les\ solutions\ de\ (E)\ sont: z_k = u\mathfrak{z}_k$$

$$\begin{cases} z_0 = u\mathfrak{z}_0 = u = -7 + 4i\sqrt{2} \\ z_1 = u\mathfrak{z}_1 = -u = 7 - 4i\sqrt{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} z_2 = u\mathfrak{z}_2 = iu = -4\sqrt{2} - 7i \\ z_3 = u\mathfrak{z}_3 = -iu = 4\sqrt{2} + 7i \end{cases}$$

2) Soit ABCD un carré du plan.
   a) Ecrire A comme barycentre des points B, C et D. (On précisera les coefficients)

ABCD est un carré du plan$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}\right)$

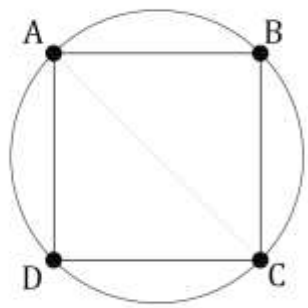
$$D'où\ \ A = bar\{(B\ ; 1)\ , (C\ ;\ -1)\ , (D\ ; 1)\}$$

   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0\ car\ A = bar\{(B\ ; 1)\ , (C\ ;\ -1)\ , (D\ ; 1)\}$$

L'ensemble des points M est donc le cercle de diamètre AC.



Exercice2 : 5,5pts

1) On considère la suite (U_n) définie par, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$

   a) Préciser le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = 2n + 3 > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N};\; donc\ la\ suite\ (U_n)\ est\ croissante.$$

   b) Démontrer que pour tout entier naturel $n, U_n > n^2$

Démontrons par récurrence :

- Pour $n = 0\,, U_0 = 1 > 0^2 \quad vrai$
- Supposons $\forall n \geq 0\,, U_n > n^2$
- Montrons $\forall n \geq 0\,, U_{n+1} > (n+1)^2$

$$(U_n > n^2) \Leftrightarrow (U_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3) \Leftrightarrow (U_{n+1} > (n+1)^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} > (n+1)^2 \quad cqfd$$

$$On\ conclut\ que : \forall n \geq 0\,, U_n > n^2$$

Déduisons-en la limite de la suite (U_n).

$$\begin{cases} \forall n \geq 0\,, U_n > n^2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

   a) Conjecturer une expression de U_n en fonction de n puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

$$U_0 = 1 = (0+1)^2 \;,\; U_1 = 4 = (1+1)^2 \;,\; U_2 = 9 = (2+1)^2 \;,\; U_3 = 16 = (3+1)^2$$

$$Par\ conjecture, on\ écrit\ U_n = (n+1)^2$$

<u>Démonstration :</u>

$$U_{p+1} = U_p + 2n + 3\ pour\ p\ variant\ dans\ IN.$$

$$faisons\ varier\ p\ de\ 0\ à\ n-1\ puis\ faisons\ la\ somme\ des\ n\ termes\ obtenus$$

$$\begin{array}{l} pour\ p = 0,\ \cancel{U_1} = U_0 + 2(0) + 3 \\ pour\ p = 1,\ \cancel{U_2} = \cancel{U_1} + 2(1) + 3 \\ pour\ p = 2,\ \cancel{U_3} = \cancel{U_2} + 2(2) + 3 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ pour\ p = n-2,\ \cancel{U_{n-1}} = \cancel{U_{n-2}} + 2(n-2) + 3 \\ pour\ p = n-1,\ U_n = \cancel{U_{n-1}} + 2(n-1) + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$U_n = U_0 + 2\sum_{p=0}^{n-1} p + 3n$$

$\sum_{p=0}^{n-1} p$ est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite arirmétique $V_p = p$

$$\sum_{p=0}^{n-1} p = \frac{n}{2}(0 + n - 1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$Donc\,, U_n = 1 + n^2 - n + 3n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad cqfd$$

2) Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :
   a) $(n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i!$

- Pour $n = 1$, $(1+1)! = 2! = 2$ et $\sum_{i=1}^{1} i! = 1! = 1$; $2 > 1$ $vrai$
- Supposons $\forall n \geq 1, (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i!$
- Montrons que $\forall n \geq 1, (n+2)! \geq \sum_{i=1}^{n+1} i!$

$$(n+2)! - \sum_{i=1}^{n+1} i! = (n+2)(n+1)! - (n+1) - \sum_{i=1}^{n} i!$$

$$= (n+1)! \times (n+1) - \sum_{i=1}^{n} i!$$

$$(n+1)! \times (n+1) \geq (n+1)! \geq \sum_{i=1}^{n} i! \Longrightarrow (n+1)! \times (n+1) - \sum_{i=1}^{n} i! \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n+2)! - \sum_{i=1}^{n+1} i! \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n+2)! \geq \sum_{i=1}^{n+1} i! \quad cqfd$$

   b) $\sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$

- Pour $n = 1$, $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$ et $\sum_{i=1}^{1} i \times i! = 1 \times 1! = 1$; $1 = 1$ $vrai$
- Supposons $\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$
- Montrons que $\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^{n+1} i \times i! = (n+2)! - 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i \times i! = \sum_{i=1}^{n} i \times i! + (n+1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+2-1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+2) \times (n+1)! - (n+1)!$$

$$= (n+2)! - 1 \quad cqfd$$

3) $L = 110\ cm$ et $\ell = 88\ cm.$

   a) Déterminer la longueur du côté du carré qui convient.

Il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur de L et ℓ

$$pgcd(L, \ell) = pgcd(110, 88) = 22 \times pgcd(5, 4) = 22$$

La longueur du côté du carré qui convient est $a = 22\ cm$

   b) Déterminer le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Si n est le nombre de carrés, alors l'aire de la plaque est $S = na^2$ $avec$ a^2 $l'aire d'un\ carré$.

Or, $S = L \times \ell = 110 \times 88 = 9\,680\ cm^2$. Donc, $n = \frac{S}{a^2} = \frac{9\,680}{22^2} = 20$

Le nombre de carrés qu'il pourra découper est n $= 20$

Problème :

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\ln x$$

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que la fonction

$$f(x) = e^{-x}\ln x \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}\ln(x) + \frac{e^{-x}}{x} = e^{-x}\left(-\ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

$$e^{-x} > 0 \Rightarrow f'(x)\ \textit{a même signe que}\ -\ln(x) + \frac{1}{x} = g(x)$$

2)

a) Etudier les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ *et* 2.

$$D_g =]0\,;+\infty[$$

- Les limites de g

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x\ln(x)+1}{x} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

- Sens de variations de g

$$g(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x+1)}{x^2} < 0 \ \ \forall x \in]0\,;+\infty[$$

$$g\ \textit{est donc decroissante sur}\ D_g$$

- Tableau de variations de g

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

D'après les variations de g , elle réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ *vers* IR. De plus $0 \in IR$; donc $\exists!\, \alpha \in\ ]0\,;+\infty[$ *tel que* $g(\alpha) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $g(x) = 0$.

$$\begin{cases} g(2) = -0{,}19 < 0 = g(\alpha) < 0{,}26 = g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2 \\ g \searrow \end{cases}$$

b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0\,;\ \alpha[$ *et* $]\alpha\,;\ +\infty[$.

$$\left|\begin{array}{l} Pour\ x \in]0\,;\ \alpha[\,, g(x) > 0 \\ Pour\ x \in]\alpha\,;\ +\infty[\,, g(x) < 0 \end{array}\right.$$

3) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$.

$$\left| \begin{array}{l} f(\alpha) = e^{-\alpha}\ln(\alpha) \\ g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \end{array} \right. \Rightarrow f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

$$\left(\frac{3}{2} < \alpha < 2\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(-2 < -\alpha < -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left(e^{-2} < e^{-\alpha} < e^{\frac{3}{2}}\right) \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left(\frac{e^{-2}}{2} < \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = f(\alpha) < \frac{2e^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$$

4) Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

- Les limites de f

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{\ln(x)}{x} = 0 \times 0 = 0$$

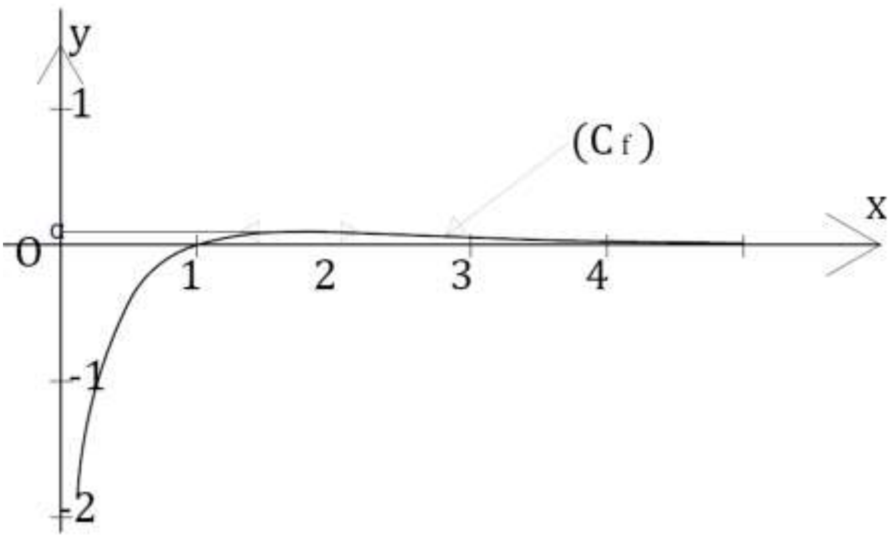
- Sens de variations de f : D'après 1), f' et g ont même signe.

$$Donc, \left| \begin{array}{l} Pour\ x \in]0\,;\,\alpha[\,, f'(x) > 0\ \ et\ \ f \nearrow \\ Pour\ x \in]\alpha\,;\,+\infty[\,, f'(x) < 0\ \ et\ \ f \searrow \\ \qquad f'(\alpha) = 0 \end{array} \right.$$

- Tableau de variations de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$	$\searrow$	0

- <u>Représentation graphique de f :</u>



B.

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

$$(g(x) = 0) \Leftrightarrow \left(-\ln(x) + \frac{1}{x} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} = \ln(x)\right) \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{x}} = x\right) \Leftrightarrow (h(x) = x)\ \ cqfd$$

2)

a) Calculer $h'(x)$ et vérifier que $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right], on\ a$: $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right] \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{\frac{2}{3}} \leq -e^{\frac{1}{x}} \leq -e^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}\ \ cqfd$$

En déduire qu'il existe un réel $k \in [0\ ;1]\ tel\ que\ \forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right], |h'(x)| \leq k$.

$$-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} < \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \Rightarrow |h'(x)| \leq \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} = 0{,}86 \in [0\ ;1] \Rightarrow \exists k \in [0\ ;1]\ tel\ que\ |h'(x)| \leq k\ \ cqfd$$

b) Prouver que pour tout couple de réels $(x\ ;y)$ choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;2\right], on\ a$:

$$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right], |h'(x)| \leq k$; *donc pour* $(x\ ;y)$ Choisis dans $\left[\frac{3}{2}\ ;2\right]$, l'application du théorème de l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2\ et\ \forall n \in IN, U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrer que $\forall\, n \in IN, U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right]$. Montrons par récurrence

- Pour $n = 0$, $U_0 = 2 \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right]$
- Supposons que $\forall\, n \in IN, U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right]$
- Montrons que $\forall\, n \in IN, U_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right]$

$$U_{n+1} = h(U_n) = e^{\frac{1}{U_n}}$$

$$U_n \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right] \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{U_n}} \leq e^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow (1{,}65 \leq U_{n+1} \leq 1{,}95)$$

$$\left(\frac{3}{2} < 1{,}65 < 1{,}95 < 2\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} < U_{n+1} < 2\right) \Rightarrow U_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}\ ;2\right]\ \ cqfd$$

b) En appliquant à $(U_n\ ;\ \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouver que

$$\forall n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|. (ce\ résultat\ est\ immédiat)$$

c) En déduire par un raisonnement par récurrence l'inégalité :

$\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$ et montrer que la suite U_n *est convergente*

- Pour $n = 0, k^0 \times |U_0 - \alpha| = |U_0 - \alpha|$ *vrai* ;
- Supposons que $\forall n \in IN, |U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$;
- Montrons que $\forall n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1}|U_0 - \alpha|$.

D'après 2), $\forall n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$ *et par supposition*, $|U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$

$$Donc, |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha| \leq k \times k^n|U_0 - \alpha| = k^{n+1}|U_0 - \alpha| \quad cqfm$$

$$\left(\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2\right) \Leftrightarrow \left(0 \leq U_0 - \alpha \leq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(|U_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{2} \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow la\ suite\ (U_n)_{n\in IN}\ \ est\ convergente$$

Quel est la limite de la suite U_n ?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}e^{n\ln k} = 0 \ \ car\ \ 0 \leq k \leq 1.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k^n}{2} = 0 \\ |U_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$$

4) Montrer en utilisant les variations de h *que* $(U_{n+1} - \alpha)$ *et* $(U_n - \alpha)$ sont de signe contraires. En déduire que α est compris entre U_n *et* U_{n+1}.

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} < 0 \Rightarrow h \searrow$$

- Premier cas : $U_n - \alpha > 0$

$$(U_n - \alpha > 0) \Rightarrow (U_n > \alpha) \Rightarrow \big(h(U_n) < h(\alpha)\big) \Rightarrow (U_{n+1} < \alpha) \ \ car \begin{cases} h(U_n) = U_{n+1} \\ h(\alpha) = \alpha \ \ d'après\ B.1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (U_{n+1} - \alpha < 0) \ \ cqfm$$

$$On\ en\ déduit\ que\ U_{n+1} < \alpha < U_n$$

- Deuxième cas : $U_n - \alpha < 0$

$$(U_n - \alpha < 0) \Rightarrow (U_n < \alpha) \Rightarrow \big(h(U_n) > h(\alpha)\big) \Rightarrow (U_{n+1} > \alpha)$$

$$\Rightarrow (U_{n+1} - \alpha > 0) \ \ cqfm$$

$$On\ en\ déduit\ que\ U_n < \alpha < U_{n+1}$$

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Par la méthode de Dichotomie

$$On\ sait\ que\ 1{,}5 < \alpha < 2\ ;\ g(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x}\ \ et\ \ g(\alpha) = 0$$

Intervalle I contenant la solution : $I = [a\,;b]$	Centre de I $c = \frac{a+b}{2}$	$g(a)$	$g(b)$	$g(c)$	Nouvel intervalle $I' = [a'\,;b']$	Amplitude de I' $\varepsilon = b' - a'$
$I_1 = [1{,}5\,;2]$	1,75	0,26	$-0{,}19$	0,01	$I_1' = [1{,}75\,;2]$	$0{,}25 > 0{,}01$
$I_2 = [1{,}75\,;2]$	1,875	0,01	$-0{,}19$	$-0{,}09$	$I_2' = [1{,}75\,;1{,}875]$	$0{,}125 > 0{,}01$
$I_3 = [1{,}75\,;1{,}875]$	1,8125	0,01	$-0{,}09$	$-0{,}04$	$I_3' = [1{,}75\,;1{,}8125]$	$0{,}0625 > 0{,}01$
$I_4 = [1{,}75\,;1{,}8125]$	1,78125	0,01	$-0{,}04$	$-0{,}02$	$I_4' = [1{,}75\,;1{,}78]$	$0{,}03 > 0{,}01$
$I_5 = [1{,}75\,;1{,}78]$	1,765	0,01	$-0{,}02$	$-0{,}002$	$I_5' = [1{,}75\,;1{,}765]$	$0{,}015 > 0{,}01$
$I_6 = [1{,}75\,;1{,}765]$	1,7575	0,01	$-0{,}002$	0,006	$I_6' = [1{,}7575\,;1{,}765]$	$0{,}0075 < 0{,}01$

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $1{,}7575 \leq \alpha \leq 1{,}765$

C. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et deux fois dérivables sur $]0\,;\ +\infty[$ solution de l'équation différentielle :

$$(E): y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$

1)

a) Vérifier que la fonction f définie dans la partie A est une solution de (E).

$$f\ est\ une\ solution\ de\ (E)\ ssi\ f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x}\ln x \\ f'(x) = e^{-x}\left(-\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right) \\ f''(x) = e^{-x}\left(\ln(x) - \dfrac{2x+1}{x^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) = 2e^{-x}\ln x \\ 3f'(x) = 3e^{-x}\left(-\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right) \\ \underline{f''(x) = e^{-x}\left(\ln(x) - \dfrac{2x+1}{x^2}\right)} \end{cases}$$

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = e^{-x}\left(\ln(x) - \frac{2x+1}{x^2} - 3\ln(x) + \frac{3}{x} + 2\ln(x)\right) = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}\ \ cqfv$$

b) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'' + 3y' + 2y = 0$

$$L'équation\ caractéristique\ de\ (E')\ est\ (E_c') : r^2 + 3r + 2 = 0\ qui\ admet\ pour\ solution$$

$$r_1 = -2\ \ et\ \ r_2 = -1$$

$$Donc, les\ solutions\ de\ (E')\ s'écrivent : y(x) = k_1e^{-x} + k_2e^{-2x}\ \ avec\ \ k_1, k_2 \in IR$$

2)

a) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - f$ est une solution de (E').

Supposons que g est une solution de (E).

$$\begin{cases} g \text{ solution de } (E) \\ D'aprèsC.1).a)\ f \text{ est solution de } (E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x} & (1) \\ f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x} & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Leftrightarrow (g'' - f'')(x) + 3(g' - f')(x) + 2(f - g)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g - f\ est\ une\ solution\ \ de\ (E')\ \ cqfm$$

b) En déduire toutes les solutions de (E).

$$g - f\ solution\ \ de\ (E') \Longrightarrow \exists k_1\ , k_2 \in IR\ tq\ y(x) = g(x) - f(x)$$

$$y(x) = g(x) - f(x) \Longrightarrow g(x) = y(x) + f(x)$$

$$Donc, les\ solutions\ de\ (E)\ s'écrivent\ :\ g(x) = y(x) + f(x)$$

$$\boxed{g(x) = k_1e^{-x} + k_2e^{-2x} + e^{-x}\ln(x)\ \ avec\ \ k_1\ , k_2 \in IR}$$