FONCTION LOGARITHME NEPERIEN (Ln)

1- Définition :

On appelle une fonction logarithme népérien toute expression ayant pour forme $ln(u(x))$ avec $u(x)$ étant une fonction (polynôme ou rationnelle ou irrationnelle ou exponentielle ou ln ou circulaire).

NB : $u(x)$ représente toute écriture ou expression se trouvant après la fonction ln tout en sachant qu'elle est toujours attachée avec cette fonction.

Exemples :

- $f(x) = ln\sqrt{2x+1}$ avec $u(x) = \sqrt{2x+1}$
- $f(x) = lnx^2 + 2x$ avec $u(x) = x^2$
- $g(x) = 2xlnx$ avec $u(x) = x$

2- Ensemble de définition d'une fonction logarithme népérien (ln) :

L'ensemble de définition d'une fonction ln dépend de la forme qu'elle dispose :

- **1^er cas** : $\boldsymbol{f(x) = ln(u(x))}$

$f(x)$ existe ssi $u(x) > 0$

Exemple : $f(x) = ln(2x+1)$ avec $u(x) = 2x+1$

$f(x)$ existe ssi $2x+1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ alors $E_f = \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

- **2^e cas** : $\boldsymbol{f(x) = ln\sqrt{u(x)}}$

$f(x)$ existe ssi $u(x) > 0$

Exemple : $f(x) = ln\sqrt{x-1}$ avec $u(x) = x-1$

$f(x)$ existe ssi $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ alors $E_f =]1\,;\,+\infty[$

- **3^e cas** : $\boldsymbol{f(x) = ln|u(x)|}$

$f(x)$ existe ssi $u(x) \neq 0$

Exemple : $f(x) = ln|-x+1|$ avec $u(x) = -x+1$

$f(x)$ existe ssi $-x+1 \neq 0 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow x \neq 1$ alors $E_f =]-\infty\,;\,1[u]1\,;+\infty[$

- **4^e cas** : $\boldsymbol{f(x) = ln[u(x)]^n}$

Lorsqu'on a ce genre de cas, l'ensemble de définition va dépendre de la nature de l'entier n (pair ou impair) : $\begin{cases} si\ n\ est\ pair\ alors\ u(x) \neq 0 \\ si\ n\ est\ impair\ alors\ u(x) > 0 \end{cases}$

* Exemple 1 : $f(x) = x + x\, lnx^2$ avec $u(x) = x$ et $n = 2$ (n est pair)

$f(x)$ existe ssi $x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ alors $E_f =]-\infty\,;\, 0[u]0\,;+\infty[$

* Exemple 2 : $f(x) = x + 1 + \ ln(x-2)^3$ avec $u(x) = x - 2$ et $n = 3$ (n est impair)

$f(x)$ existe ssi $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ alors $E_f =]2\,;\, +\infty[$

3- Notion des limites classiques d'une fonction logarithme népérien (ln)

Les limites classiques ont pour but de faciliter la résolution d'une limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (x^n lnx \text{ ou } xlnx) = 0 \ (avec\ n > 1)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{lnx}{x} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{lnx} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n lnx \text{ ou } xlnx) = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{lnx}{x} \text{ ou } \frac{lnx}{x^n}) = 0 \ (avec\ n > 1)$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x}{lnx} \text{ ou } \frac{x^n}{lnx}) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{ln(x+1)}{x} \text{ ou } \frac{ln(ax+1)}{ax}) = 1$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

NB : La limite quand x tend vers moins l'infini d'une fonction ln ($\lim\limits_{x\to -\infty} lnx$) n'existe pas. A moins qu'il y ait la présence d'une valeur absolue.

4- Propriétés :

Elle dispose de plusieurs propriétés qui ont pour rôle de faciliter la résolution des équations ou à débloquer des expressions difficilement manipulables.

a) $ln(a \times b) = lna + lnb$

b) $\frac{lna}{lnb} = lna - lnb$

c) $ln(a)^n = nlna$

d) $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$

e) $lna = lnb \Rightarrow a = b$

f) $lne^u = u$ (Exemples : $lne^x = x\,;\ lne^2 = 2$)

Remarques :

R_1 : $ln0$ n'existe pas (impossible)

R_2 : $ln1 = 0$

R_3 : $ln(-2)$ impossible car la fonction ln ne possède pas de valeur négative à moins qu'il y ait la présence d'une valeur absolue.

NB : Que le nom de fonction logarithme népérien ne t'intimide pas car au sein des propriétés, elle possède les mêmes réalités que celui des logarithmes (log) que t'as eu à étudier en classe de 4e et 3e.

5- La dérivée d'une fonction ln :

Soit une fonction f , définie par $f(x) = lnu(x)$. Elle possède pour fonction dérivée f' ayant pour forme : $(lnu(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemples :

$f(x) = ln(2x+1)$. forme : $lnu = \frac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u = 2x+1 \\ et \\ u' = 2 \end{cases}$ d'où $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$

$g(x) = lnx$. forme : $lnu = \frac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u = x \\ et \\ u' = 1 \end{cases}$ d'où $g'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \ln(2x^2+x)$. forme : $lnu = \frac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u = 2x^2+x \\ et \\ u' = 2(2x)+1 = 4x+1 \end{cases}$ d'où $g'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x}$

FONCTION EXPONENTIELLE (Exp)

1- Définition :

On appelle une fonction exponentielle toute expression ayant pour forme $e^{u(x)}$ avec $u(x)$ étant une fonction (polynôme ou rationnelle ou irrationnelle ou circulaire).

NB : $u(x)$ représente toute écriture ou expression se trouvant en haut (sous forme de degré) de la fonction exponentielle.

Exemples :

- $f(x) = e^{-x}$ avec $u(x) = -x$
- $f(x) = e^{cosx}$ avec $u(x) = cosx$
- $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ avec $u(x) = \frac{x+1}{x}$

2- Ensemble de définition d'une fonction exponentielle (exp) :

L'ensemble de définition d'une fonction expo dépend de la nature que possède la fonction $\boldsymbol{u(x)}$:

- **1^er^ cas** : $\boldsymbol{f(x) = e^{ax+b}}$ $\boldsymbol{avec\, u(x) = ax + b\ (fonction\, polynôme)}$

$f(x)$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Exemple : $f(x) = e^{2x+1}$ avec $u(x) = 2x + 1$

$f(x)$ existe ssi $\forall\, x \in \mathbb{R}$ alors $E_f =]-\infty\,;\,+\infty[$

- **2^e^ cas** : $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{ax+b}{cx+d}}}$ $\boldsymbol{avec\, u(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\ (fonction\, rationnelle)}$

$f(x)$ existe ssi $cx + d \neq 0$

Exemple : $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ avec $u(x) = x - 1$

$f(x)$ existe ssi $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ alors $E_f =]-\infty\ ;\ 1]u[1\,;\,+\infty[$

- **3^e^ cas** : $\boldsymbol{f(x) = e^{\sqrt{ax+b}}}$ $\boldsymbol{avec\, u(x) = \sqrt{ax+b}\ (fonction\, irrationnelle)}$

$f(x)$ existe ssi $ax + b \geq 0$

Exemple : $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$ avec $u(x) = \sqrt{2x+1}$

$f(x)$ existe ssi $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ alors $E_f = \left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

- **4^e^ cas** : $\boldsymbol{f(x) = e^{|ax+b|}}$ $\boldsymbol{avec\, u(x) = |ax+b|\ (fonction\, valeur\, absolue)}$

$f(x)$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Exemple : $f(x) = e^{|x|}$ avec $u(x) = |x|$

$f(x)$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$ alors $E_f =]-\infty\,;\,+\infty[$

3- Notion des limites classiques d'une fonction exponentielle (exp)

Les limites classiques ont pour but de faciliter la résolution d'une limite.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^n e^x \text{ ou } xe^x) = 0$ $(avec\ n > 1)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{e^x}{x} \text{ ou } \frac{e^x}{x^n}) = 0$ $(avec\ n > 1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} = a$ $mais\ si\ a = 1\ alors$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^n e^x \text{ ou } xe^x) = +\infty$ $avec\ (n > 1)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} \text{ ou } \frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$ $(avec\ n > 1)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{e^x} \text{ ou } \frac{x^n}{e^x}) = 0$

4- Propriétés :

Elle dispose de plusieurs propriétés qui ont pour rôle de faciliter la résolution des équations ou à débloquer des expressions difficilement manipulables.

a) $e^a \times e^b = e^{a+b}$

b) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

c) $(e^a)^n = e^{na}$

d) $\left(\frac{1}{e^a}\right) = e^{-a}$

e) $e^a = e^b \Rightarrow a = b$

f) $e^{lnu} = u$ (Exemples : $e^{lnx} = x\,;\, e^{ln2} = 2$)

Remarques :

R1 : $e^{-\infty}$ n'existe pas (impossible) à moins s'il s'agit d'une limite.

R2 : $e^0 = 1$

NB : Que le nom de fonction exponentielle ne t'intimide pas car au sein des propriétés, elle possède les mêmes réalités que celle des puissances de base **a** que t'as eu à étudier en classe de 5e ; 4e et 3e.

5- La dérivée d'une fonction exponentielle :

Soit une fonction f , définie par $f(x) = e^{u(x)}$. Elle possède pour fonction dérivée f' ayant pour forme : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemples :

$f(x) = e^{2x+1}$. forme : $e^u = u' \times e^u$ avec $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \quad et \\ u' = 2 \end{cases}$ d'où $f'(x) = 2e^{2x+1}$

$g(x) = e^x$. forme : $e^u = u' \times e^u$ avec $\begin{cases} u = x \\ \quad et \\ u' = 1 \end{cases}$ d'où $g'(x) = e^x$

$g(x) = e^{2x^2+x}$. forme : $e^u = u' \times e^u$ avec $\begin{cases} u = 2x^2 + x \\ \qquad et \\ u' = 4x+1 \end{cases}$ d'où $g'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$