Collection

La Perle du Succes

MATHEMATQIUES SECONDE D

Auteur

AVIANSOU C. Brice Espoir

Version revue et corrigee

LaTeX Prod

16 septembre 2019

Programme de Mathématiques de la classe de Seconde D/ APC BENIN

SA 1 : Configurations de l'espace

1. Représentation dans le plan d'objets de l'espace
2. Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace
3. Positions relatives de deux plans de l'espace
4. Positions relatives de deux droites de l'espace
5. Étude du parallélisme de deux droites

SA 2 : Organisations des données

1. Calculs dans $\mathbb{R}$
2. Généralités sur les fonctions
3. Études de quelques fonctions
4. Applications
5. Polynômes et fractions rationnelles
6. Équations - Inéquations dans $\mathbb{R}$
7. Statistique

SA 3 : Lieux géométriques dans le plan

1. Vecteurs du plan
2. Droites du plan
3. Homothétie
4. Symétrie orthogonale - symétrie centrale - translation
5. Angles inscrits - relations métriques dans un triangle
6. Angles orientés - trigonométrie
7. Produit scalaire
8. Rotation
9. Cercle dans le plan
10. Équations - Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sommaire

1 CONFIGURATIONS DE L'ESPACE **1**
1 Représentation dans le plan d'objets de l'espace . . . 1
2 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace . . . 2
2.1 Quelques axiomes . . . 2
2.2 Positions relatives . . . 2
2.3 Point logique . . . 3
3 Positions relatives de deux plans de l'espace . . . 3
4 Positions relatives de deux droites de l'espace . . . 4
4.1 Droites coplanaires - droites non coplanaires . . . 4
4.2 Positions relatives . . . 4
4.3 Caractérisation d'un plan . . . 5
5 Étude du parallélisme de deux droites de l'espace . . . 5
5.1 Parallélisme de deux droites de l'espace . . . 5
5.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace . . . 6
5.3 Parallélisme de deux plans de l'espace . . . 7
5.4 Construction des intersections . . . 8
Exercices . . . 9

2 ORGANISATION DES DONNÉES **10**
1 Calculs dans $\mathbb{R}$ . . . 10
1.1 Présentation de l'ensemble $\mathbb{R}$ . . . 10
1.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 11
1.3 Opérations dans $\mathbb{R}$ . . . 11
1.4 Ordre dans $\mathbb{R}$ . . . 12
1.5 Majorant et minorant - maximum et minimum . . . 13
1.6 Valeur absolue . . . 14
1.7 Calculs approchés . . . 15
Exercices . . . 16
2 Généralités sur les fonctions . . . 17
2.1 Notion de fonction numérique . . . 17
2.2 Ensemble de définition d'une fonction numérique . . . 17
2.3 Représentation graphique d'une fonction . . . 18
2.4 Etude graphique . . . 18
2.5 Égalité de deux fonctions - coïncidence de fonctions sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ . . . 19
2.6 Variation d'une fonction . . . 19
Exercices . . . 22
3 Études de quelques fonctions . . . 23
3.1 Fonctions élémentaires . . . 23
3.2 Comparaison des nombres a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ . . . 23
3.3 Fonctions affines par intervalle . . . 23
3.4 Résolution graphique d'équations et d'inéquations . . . 24
Exercices . . . 25
4 Applications . . . 26
4.1 Définition . . . 26

4.2 Applications injectives . . . 26
4.3 Applications surjectives . . . 26
4.4 Applications bijectives . . . 27
Exercices . . . 28
5 Polynômes et fractions rationnelles . . . 29
5.1 Polynômes . . . 29
5.2 Fractions rationnelles . . . 30
Exercices . . . 31
6 Équations - Inéquations dans $\mathbb{R}$ . . . 32
6.1 Équations équivalentes . . . 32
6.2 Équations du type $|x-a|=b$ . . . 32
6.3 Équations du second degré à une inconnue . . . 32
6.4 Inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ . . . 32
6.5 Inéquations du type $|x-a|\leq b$ . . . 32
Exercices . . . 33
7 Statistique . . . 34
7.1 Présentation d'une série statistique . . . 34
7.2 Représentations graphiques . . . 34
7.3 Paramètres de position de tendance centrale . . . 34
7.4 Paramètres de position non centrale . . . 35
7.5 Paramètres de dispersion . . . 35
7.6 Polygone des effectifs et des fréquences . . . 36
7.7 Diagramme cumulatif des effectifs et des fréquences . . . 36
7.8 Détermination graphique des médianes et des quartiles . . . 36
Exercices . . . 37

3 LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN **38**
1 Vecteurs du plan . . . 38
1.1 Notion de vecteur . . . 38
1.2 Opérations sur les vecteurs . . . 39
1.3 Combinaisons linéaires . . . 39
1.4 Bases du plan vectoriel . . . 40
1.5 Déterminant d'un couple de vecteurs relativement à une base . . . 40
1.6 Caractérisation vectorielle . . . 41
Exercices . . . 42
2 Droites dans le plan . . . 43
2.1 Représentation paramétrique d'une droite dans le plan muni d'un repère . . . 43
2.2 Équation cartésienne d'une droite dans le plan muni d'un repère . . . 43
2.3 Distance d'une point à une droite . . . 44
Exercices . . . 45
3 Homothétie . . . 46
3.1 Définition . . . 46
3.2 Les homothéties particulières . . . 46
3.3 Transformations du plan . . . 46
3.4 Point invariant . . . 46
3.5 Propriété fondamentale . . . 46
3.6 Homothétie et configuration du plan . . . 47
3.7 Constructions d'images . . . 47
Exercices . . . 48
4 Symétrie orthogonale - symétrie centrale - translation . . . 49
4.1 Utilisation de la symétrie orthogonale, de la symétrie centrale et de la translation dans les activités géométriques 49
4.2 Propriétés . . . 49
Exercices . . . 50
5 Angles inscrits - relations métriques dans un triangle . . . 51
5.1 Sinus d'un angle . . . 51
5.2 Radian . . . 51
Exercices . . . 53

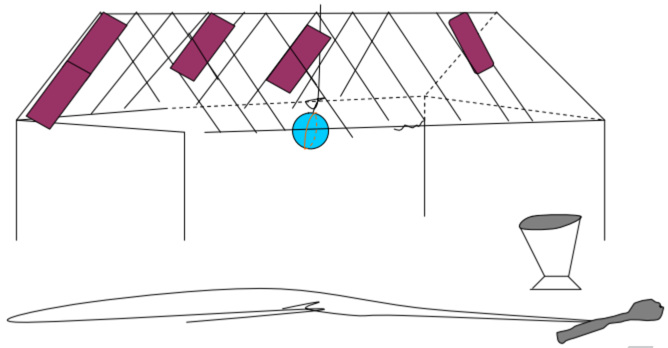
6 Angles orientés - trigonométrie 54
6.1 Angles orientés 54
6.2 Trigonométrie 55
Exercices 57
7 Produit scalaire 58
7.1 Mesure algébrique 58
7.2 Définition du produit scalaire par projection orthogonale 58
7.3 Propriétés du produit scalaire 59
7.4 Orthogonalité - base orthogonale - base orthonormée 59
7.5 Applications du produit scalaire au triangle 60
Exercices 61
8 Rotation 62
Exercices 64
9 Cercle dans le plan 65
9.1 Équation cartésienne d'un cercle dans le plan muni d'un repère orthonormé 65
9.2 Positions relatives de droites et de cercles 65
Exercices 66
10 Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 67
10.1 Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues 67
10.2 Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues 67
10.3 Programmation linéaire 67
Exercices 69

Situation d'Apprentissage 1

« Si vous aimez les mathématiques, alors elles seront faciles pour vous »
(Osé Sam)

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ :
Texte :
Un vent violent a décoiffé la toiture du domicile de Kodjo, un élève en classe de 2nde C au Lycée Mathieu Bouké. Pour l'informer, son frère lui adresse le message ci-dessous : "Voici ce qu'est devenue la toiture de notre maison après le passage du grand vent qui a précédé la pluie de la nuit dernière".



A la vue de ce dessin, Jean un ami de Kodjo voudrait étudier cette représentation de la toiture.

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Représentation dans le plan d'objets de l'espace

Activité 1.1

Définition

La perspective cavalière est une technique de représentation d'un objet de l'espace par une figure plane.

Règles de représentation en perspective cavalière

- **Règle 1** : Les arêtes de l'objet à supports parallèles sont représentées par des segments de supports parallèles sur le dessin.
- **Règle 2** : Les faces de l'objet qui sont dans un plan vertical de face sont représentées sans déformation.
- **Règle 3** : Les arêtes cachées de l'objet sont représentées par des traits en pointillés sur le dessin.
- **Règle 4** : Les arêtes de l'objet à supports perpendiculaires au plan vertical de face sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle de mesure α avec la représentation de l'horizontale sur le dessin.
  (α est appelé l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale)
- **Règle 5** : Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliées par un coefficient c.
  (c est appelé coefficient de réduction)

Retenons

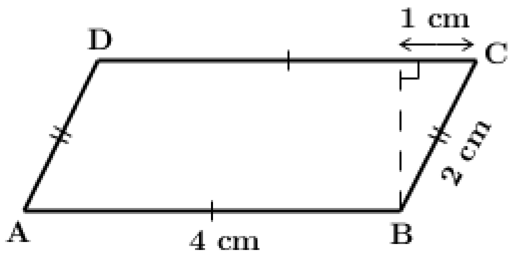
Le couple (α, c) est appelé **le code de la perspective**.

Consigne 1.1

En te servant des règles de la perspective cavalière, représente un pavé droit $ABCDEFGH$ en perspective cavalière sachant qu'il est posé sur la face $ABFE$ et que la face $ABCD$ est dans le plan vertical de face. On donne $AB = 6cm$, $AE = 5cm$ et $AD = 3cm$. On prendra $c = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = 30°$.

Consigne 1.2

Le parallélogramme ci-dessous est la représentation en perspective cavalière d'un carré situé dans un plan horizontal. Le segment $[AB]$, vu de face est dessiné en vraie grandeur.

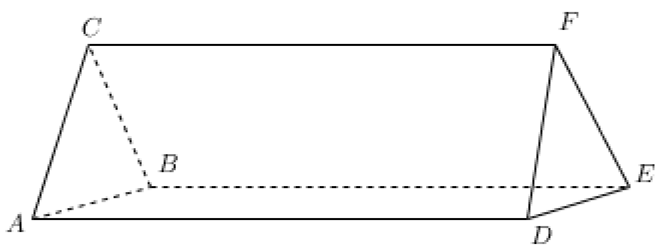


Détermine par calcul, le code de cette perspective.

2 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

Activité 1.2

La charpente de la maison se présente partiellement comme suit :



A la vue de la figure, Jean l'ami de Kodjo voudrait reconnaître les différentes positions relatives d'une droite et d'un plan.

2.1 Quelques axiomes

Rappels

1. Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une droite unique notée (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C de l'espace, il passe un plan unique noté (ABC).
3. Si A et B sont deux distincts d'un plan $(\mathscr{P})$ alors $(\mathscr{P})$ contient la droite (AB) et on note $(AB) \subset (\mathscr{P})$.

2.2 Positions relatives

Consigne 2.1

On considère le plan (ABC).

1. (a) Donne la position relative de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).
   (b) Détermine $(DE) \cap (ABC)$.
2. (a) Donne la position relative de la droite (CF) par rapport au plan (ABC).
   (b) Détermine $(CF) \cap (ABC)$.
3. (a) Donne la position relative de la droite (CB) par rapport au plan (ABC).
   (b) Détermine $(CB) \cap (ABC)$.

Propriété

Etant donné une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ les différentes positions relatives sont :

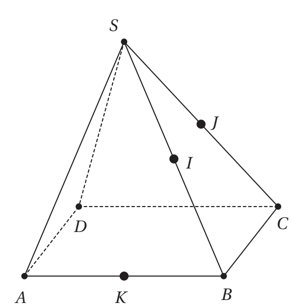
1. $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$ c'est-à-dire $(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P}) = (\mathscr{D})$.
2. $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants c'est-à-dire leur intersection est réduite à un seul point.
3. $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont disjoints c'est-à-dire $(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P}) = \{\}$.

Définition

1. On dit qu'une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ sont **parallèles** et on note $(\mathscr{D}) \parallel (\mathscr{P})$ lorsque la droite est incluse dans le plan ou lorsque la droite et le plan sont disjoints.
2. On dit qu'une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ sont **sécants** lorsque leur intersection est réduite à un point. On note $(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P}) = \{A\}$ avec A le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$.

Consigne 2.2

$SABCD$ est une pyramide telle que $ABCD$ est un parallélogramme. I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[SB]$, $[SC]$ et $[AB]$.



1. Montre que la droite (IJ) et le plan (SKB) sont sécants.
2. Montre que (IK) et le plan (SAB) sont parallèles.

2.3 Point logique

Consigne 2.3

On considère la figure de l'activité 2.

1. Dis si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.
   - ✓ (P_1) : "La droite (AB) est parallèle au plan (DEF)"
   - ✓ (P_2) : "Le plan (ADF) contient la droite (AB)"
   - ✓ (P_3) : "La droite (AD) est parallèle à la droite (CF) alors la droite (AD) est parallèle au plan (CFEB)"
2. Soit la phrase suivante :
   (P_4) : "La droite (AB) n'est pas parallèle au plan (DEF)"
   Que représente (P_4) pour (P_1) ?

Notions de proposition, implication, équivalence logique, connecteurs logiques « et » & « ou »

1. On appelle **proposition** toute phrase qui soit vraie ou fausse.
   Exemples :
   - ✓ "$15 > 8$" est une proposition vraie.
   - ✓ "$24 < 9$" est une proposition fausse.
   - ✓ "$x \in \mathbb{R}, x > 3$" n'est pas une proposition.
2. On appelle **négation d'une proposition** (P), la proposition notée $(nonP)$ ou $(\rceil P)$ ou $(\overline{P})$ qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

   Table de vérité

P	$\rceil P$
vrai	faux
faux	vrai

3. Soit P et Q sont deux propositions. Soit la phrase "**Si** P est vérifiée **alors** Q est vérifiée".
   On dit que P implique Q et on note $P \Longrightarrow Q$.
   "$\Longrightarrow$" est le symbole de l'implication.
   - ✓ Pour que Q soit vérifiée, il suffit que P le soit. On dit que P est ***une condition suffisante*** pour que Q soit vérifiée.
   - ✓ Il faut que Q soit vérifiée pour que P le soit. On dit que Q est ***une condition nécessaire*** pour que P soit vérifiée.

   Table de vérité

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai

4. Soit P et Q sont deux propositions. Soit la phrase " P est vérifiée **si et seulement si** Q est vérifiée".
   On dit que P équivaut à Q et on note $P \Longleftrightarrow Q$.
   "$\Longleftrightarrow$" est le symbole de l'équivalence logique.

   Table de vérité

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	vrai

5. Soit P et Q sont deux propositions. La proposition « P ou Q » notée $P \vee Q$ est vraie si l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie.
   Le symbole "$\vee$" est appelé **disjonction inclusive**.

   Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai
faux	faux	faux

6. Soit P et Q sont deux propositions. La proposition « P et Q » notée $P \wedge Q$ est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies.
   Le symbole "$\wedge$" est appelé **conjonction**.

   Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	faux
faux	faux	faux

7. Les symboles $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ sont appelés des **connecteurs logiques**.

3 Positions relatives de deux plans de l'espace

Activité 1.3

On considère la charpente de l'activité 2.

Consigne 3.1

1. Détermine : $(ABC) \cap (DEF)$; $(ABC) \cap (ABD)$ et $(ABD) \cap (ABE)$.

2. Que peut-on dire des plans : (ABC) et (DEF) ; (ABC) et (ABD) et (ABD) et (ABE) ?

Propriété

Etant donné deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ les différentes positions relatives sont :

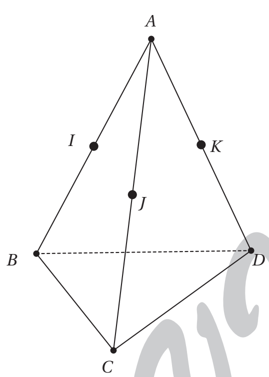
1. $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont confondus.
   Dans ce cas ils ont au moins trois points communs non alignés.
2. L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ est une droite.
   Dans ce cas, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ ont deux points communs distincts et ne sont pas confondus.
3. $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont disjoints (aucun point commun).

Définition

1. On dit que deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils sont confondus ou disjoints.
2. On dit que deux plans sont **sécants** lorsqu'ils ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.

Consigne 3.2

$ABCD$ est un tétraèdre. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.



1. Montre que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
2. Montre que les plans (IJK) et (ACD) sont sécants.

4 Positions relatives de deux droites de l'espace

Activité 1.4

On considère la charpente de l'activité 2.

4.1 Droites coplanaires - droites non coplanaires

Consigne 4.1

1. Indique les positions relatives des droites (AB) et (BC) ; (AD) et (CF) ; (EF) et (AC).
2. Les droites (AB) et (BC) ; (AD) et (CF) ; (EF) et (AC) sont-elles dans un même plan ?

Définition

1. Des points, des droites de l'espace qui appartiennent à un même plan sont dits **coplanaires**.
2. Des points, des droites de l'espace qui ne sont pas coplanaires sont dits **non coplanaires**.
3. Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

Propriété

1. Deux droites non coplanaires sont disjointes.
2. Deux droites coplanaires sont soit parallèles soit sécantes.

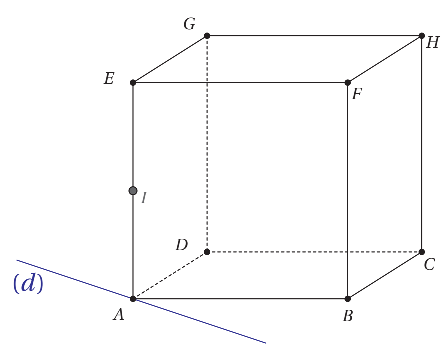
4.2 Positions relatives

Propriété

1. Deux droites sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont confondues ou lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.
2. Deux droites sont dites **sécantes** lorsque leur intersection est réduite à un point.

Consigne 4.2

$ABCDEFGH$ est un cube et I est le milieu de $[AE]$. (d) est la parallèle à (BD) passant par A.



1. Justifie que les droites (AB) et (FI) sont sécantes.
2. Montre que (d) et (FH) sont coplanaires.

4.3 Caractérisation d'un plan

Activité 1.5

On considère la charpente de l'activité 2.

Consigne 4.3

Combien y-a-t-il de plan(s) ?

1. Passant par les points A, B et C.
2. Passant par le point D et contenant la droite (EF).
3. Contenant les droites (BE) et (BC)
4. Contenant les droites (AD) et (FC)

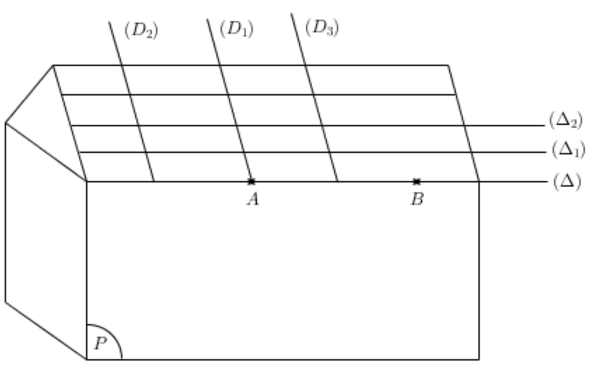
Propriété

1. Trois points non alignés définissent un plan et un seul.
2. Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite définissent un plan et un seul.
3. Deux droites sécantes définissent un plan et un seul.
4. Deux droites strictement parallèles définissent un plan et un seul.

5 Étude du parallélisme de deux droites de l'espace

Activité 1.6

Jean l'ami de Kodjo en observant la case décoiffée réalise la figure suivante :



5.1 Parallélisme de deux droites de l'espace

Consigne 5.1

1. Combien de droite peut-on tracer passant par le point B et parallèle à (D_3) ?
2. (a) Donne la position relative des droites (D_1) et (D_3).
   (b) Donne la position relative des droites (D_1) et (D_2).
   (c) Que peut-on dire des droites (D_2) et (D_3) ?

Propriété

1. Par un point donné de l'espace, on peut tracer une droite et une seule parallèle à une droite donnée.
2. Lorsque deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

Point de logique *Raisonnement par absurde*

Pour démontrer qu'une propriété P est vraie, on suppose que cette propriété est fausse. Puis par un raisonnement logique utilisant des théorèmes ou des techniques de calcul connus, on arrive à une contradiction.
Ce qui prouve que la supposition faite n'est pas bonne, donc la propriété P est vraie.

Consigne 5.2

(D_1) et (D_2) deux droites parallèles et (P) un plan sécant à (D_1) en A (figure de l'activité 6). (Q) est le plan déterminé par les droites (D_1) et (D_2), distinct de (P).

1. Montre que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ).
2. Montre que (Δ) est sécante à (D_2).
3. Déduis-en que (P) est sécant à (D_2).

Résultat attendu

1. Montrons que $(P) \cap (Q) = (\Delta)$.
   Raisonnons par l'absurde
   Supposons que (P) et (Q) sont parallèles.
   1^{er} cas : (P) et (Q) sont confondus
   $(D_1) \subset (Q)$ alors $(D_1) \subset (P)$ (absurde)
   Puisque $(D_1) \cap (P) = \{A\}$ donc (P) et (Q) ne sont pas confondus. ①
   2^{e} cas : (P) et (Q) sont disjoints
   $A \in (P)$, $A \in (D_1)$ or $(D_1) \subset (Q)$ alors $(P) \cap (Q) = (\Delta)$. Donc (P) et (Q) ne sont pas disjoints. ②
   De ① et ②, (P) et (Q) ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.
2. Montrons que (Δ) est sécante à (D_2).
   (D_1), (D_2) et (Δ) sont contenus dans le plan (Q).
   $(D_1) \cap (\Delta) = \{A\}$ or $(D_1) \parallel (D_2)$ donc (D_2) est sécante à (Δ).
3. Déduisons que (P) est sécant à (D_2).
   (D_2) est sécante à (Δ) et $(\Delta) \subset (P)$ donc $(P$ est sécant à (D_2).

Propriété
Lorsque deux droites de l'espace sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.

Point de logique : *Raisonnement par disjonction de cas*
Si pour démontrer une propriété, on examine plusieurs cas qu'on épuise l'un après l'autre, on dit qu'on mène un raisonnement par disjonction de cas.

5.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace

Point de logique : *Démonstration de l'équivalence logique*
Pour démontrer qu'une équivalence ($p \Longleftrightarrow q$) est vraie, on démontre que la double implication ($p \Longleftrightarrow q$) et ($q \Longleftrightarrow p$) est vraie.

Consigne 5.3

Démontre qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si il existe dans (P) une droite parallèle à (D).

Résultat attendu
• ($\Longrightarrow$) Supposons que $(D) \parallel (P)$ ie $(D) \subset (P)$ ou $(D) \cap (P) = \phi$
Montrons qu'il existe une droite (Δ) contenue dans (P) telle que $(D) \parallel (\Delta)$.
Si $(D) \subset (P)$ alors prenons (Δ) égale à (D).
Puisque $(D) \parallel (P)$ alors $(D) \parallel (\Delta)$.
Supposons que $(D) \cap (P) = \phi$
Soit $A \in (P)$ alors A et (D) déterminent un plan (Q) qui est sécant à (P).
Soit $(P) \cap (Q) = (\Delta)$
Montrons que $(D) \parallel (\Delta)$
$(D) \subset (P)$ et $(D) \cap (P) = \phi$ alors $(D) \cap (\Delta) = \phi$ ①
$(P) \cap (Q) = (\Delta) \Longrightarrow (\Delta) \subset (Q)$ or $(D) \subset (Q)$ donc (D) et (Δ) sont coplanaires. ②
De ① et ②, on a : $(D) \parallel (\Delta)$.
Ainsi, $(D) \parallel (P) \Longrightarrow \exists (\Delta) \subset (P) / (D) \parallel (\Delta)$.
• ($\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe une droite $(\Delta) \subset (P) / (D) \parallel (\Delta)$
Montrons que $(D) \parallel (P)$ ie $(D) \subset (P)$ ou $(D) \cap (P) = \phi$
Si $(D) \subset (P)$ alors $(D) \parallel (P)$
Supposons que $(D) \not\subset (P)$
Soit (Q) le plan contenant (D) et (Δ)
Le plan (Q) est sécant au plan (P) en (Δ)
Montrons que $(D) \cap (P) = \phi$
Supposons que $(D) \cap (P) = \{A\}$
$(D) \cap (P) = \{A\} \Longleftrightarrow A \in (D) \quad \text{et} \quad A \in (P)$
$A \in (D) \Longrightarrow A \in (Q)$
$A \in (Q)$ et $A \in (P) \Longrightarrow A \in (Q) \cap (P)$ or $(Q) \cap (P) = (\Delta)$ donc $A \in (\Delta)$
$A \in (\Delta)$ et $(D) \parallel (\Delta) \Longrightarrow (D) = (\Delta)$
$(D) = (\Delta) \Longrightarrow (D) \subset (P)$ (absurde) car $(D) \not\subset (P)$
donc $(D) \cap (P) = \phi$
Ainsi, $\exists (\Delta) \subset (P) / (\Delta) \parallel (D) \Longrightarrow (D) \parallel (P)$
Conclusion : $(D) \parallel (P) \Longleftrightarrow \exists (\Delta) \subset (P) / (D) \parallel (\Delta)$

Propriété
Une droite donnée de l'espace est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Point de logique : *Démonstration d'une implication*
Pour démontrer qu'une implication ($p \Longrightarrow q$) est vraie :

1. on peut supposer que l'hypothèse p est vraie et par des enchaînements de propositions déduites aboutir à la conclusion q : **c'est le raisonnement par la méthode directe**.

2. on peut supposer que l'hypothèse q est fausse et par des enchaînements de propositions déduites aboutir à ce que l'hypothèse p est fausse : **c'est le raisonnement par contraposée**.

Consigne 5.4

On considère les droites (Δ_1), (Δ_2) et (P) un plan tel que $(\Delta_1) \parallel (P)$ et $(\Delta_2) \parallel (\Delta_1)$.
Démontre que (Δ_2) est parallèle à (P).

Résultat attendu
Démontrons que (Δ_2) est parallèle à (P).
$(\Delta_1) \parallel (P) \Longrightarrow \exists (D) \subset (P) / (\Delta_1) \parallel (D)$
Comme $(\Delta_2) \parallel (\Delta_1)$ alors $(\Delta_2) \parallel (D)$
Or $(D) \subset (P)$ donc $(\Delta_2) \parallel (P)$.

Propriété
Si une droite $(\mathscr{D})$ est parallèle à un plan $(\mathscr{P})$ alors toute droite parallèle à $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$.

Consigne 5.5

(P) et (Q) sont deux plans sécants suivant une droite (Δ). On considère une droite (D) parallèle à (P) et à (Q).
Démontre que (D) est parallèle à (Δ).

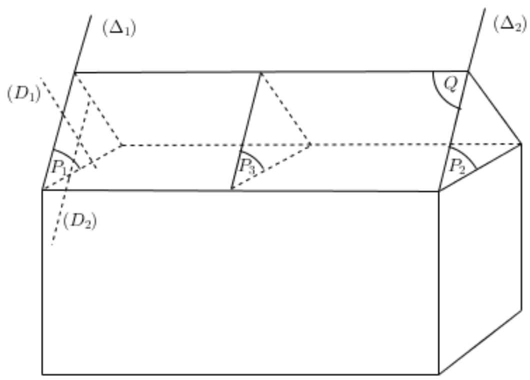
Résultat attendu
Démontrons que (D) est parallèle à (Δ).
$(P) \cap (Q) = (\Delta) \Longrightarrow (\Delta) \subset (P) \quad \text{et} \quad (\Delta) \subset (Q)$
$(D) \parallel (P) \Longrightarrow (D) \parallel (\Delta)$ ①
$(D) \parallel (Q) \Longrightarrow (D) \parallel (\Delta)$ ②
De ① et ②, on conclut que $(D) \parallel (\Delta)$

> **Propriété**
> Une droite de l'espace parallèle à deux plans sécants de l'espace est parallèle à leur droite d'intersection.

5.3 Parallélisme de deux plans de l'espace

Activité 1.7

Pour réfectionner la toiture de la maison, le menuisier propose à Kodjo le plan représenté par la figure suivante :



Consigne 5.6

On considère les plans (P_1) et (P_2) de la figure de l'activité 7, (D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes de (P_1).
Démontre que (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$.

Résultat attendu
Démontrons que (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$.
• $(\Longrightarrow)$ Supposons que $(P_1) \parallel (P_2)$ et montrons que $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$.
1^{er} *Cas* : (P_1) et (P_2) sont confondus
$(D_1) \subset (P_2)$ et $(D_2) \subset (P_2)$ alors $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$. ①
$2^{ème}$ *Cas* : (P_1) et (P_2) sont disjoints
$(D_1) \subset (P_1)$ et $(D_2) \subset (P_1)$ alors $(D_1) \cap (P_2) = \phi$ et $(D_2) \cap (P_2) = \phi$ donc $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$. ②
De ① et ②, on conclut que $(P_1) \parallel (P_2) \Longrightarrow (D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$.
• $(\Longleftarrow)$ Supposons que $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$ et montrons que $(P_1) \parallel (P_2)$.
Raisonnons par l'absurde
Supposons que (P_1) et (P_2) sont sécants suivants une droite (Δ).
$(D_1) \subset (P_1)$ alors $(D_1) \parallel (P_1)$. Or $(D_1) \parallel (P_2)$ alors $(D_1) \parallel (\Delta)$. ③
$(D_2) \subset (P_1)$ alors $(D_2) \parallel (P_1)$. Or $(D_2) \parallel (P_2)$ alors $(D_2) \parallel (\Delta)$. ④
De ③ et ④, on a : $(D_1) \parallel (D_2)$ ce qui est absurde car (D_1) et (D_2) sont sécantes. Donc $(P_1) \parallel (P_2)$.
En conclusion, (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si $(D_1) \parallel (P_2)$ et $(D_2) \parallel (P_2)$.

> **Propriété**
> Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

Consigne 5.7

On considère les plans (P_1), (P_2) et (P_3) de la figure de l'activité 7, tels que $(P_1) \parallel (P_2)$, et $(P_1) \parallel (P_3)$. Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes de (P_1).
Démontrer que $(P_2) \parallel (P_3)$ (On pourra raisonner par l'absurde).

Résultat attendu
Démontrons que $(P_2) \parallel (P_3)$.
Raisonnons par l'absurde
Supposons que (P_2) et (P_3) sont sécants suivant une droite (Δ).
$(D_1) \subset (P_1)$ et $(P_1) \parallel (P_2)$ alors $(D_1) \parallel (P_2)$.
$(D_1) \subset (P_1)$ et $(P_1) \parallel (P_3)$ alors $(D_1) \parallel (P_3)$.
or $(P_2) \cap (P_3) = (\Delta)$ donc $(D_1) \parallel (\Delta)$. ①
$(D_2) \subset (P_1)$ et $(P_1) \parallel (P_2)$ alors $(D_2) \parallel (P_2)$.
$(D_2) \subset (P_1)$ et $(P_1) \parallel (P_3)$ alors $(D_2) \parallel (P_3)$.
or $(P_2) \cap (P_3) = (\Delta)$ donc $(D_2) \parallel (\Delta)$. ②
De ① et ②, on a : $(D_1) \parallel (D_2)$ ce qui est absurde car (D_1) et (D_2) sont sécantes. Donc (P_2) et (P_3) ne sont pas sécants d'où $(P_2) \parallel (P_3)$.

> **Propriété**
> Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

Consigne 5.8

Soit A un point donné de l'espace et (P_1) un plan contenant les droites sécantes (D'_1) et (D'_2). Soit (D_1) et (D_2) les parallèles respectives des droites (D_1) et (D_2) passant par A.
Démontre qu'il existe un plan et un seul passant par A et parallèle à (P_1).

Résultat attendu
Démontrons que qu'il existe un plan et un seul passant par A et parallèle à (P_1).
$(D_1) \parallel (D'_1)$, $(D_2) \parallel (D'_2)$ et (D_1) et (D_2) sont sécantes alors (D'_1) et (D'_2) sont sécantes en A. Donc (D'_1) et (D'_2) déterminent un plan (Q) et un seul passant par A.
$(D'_1) \subset (Q)$ et $(D'_1) \parallel (D_1)$ alors $(D'_1) \parallel (Q)$.
$(D'_2) \subset (Q)$ et $(D'_2) \parallel (D_2)$ alors $(D'_2) \parallel (Q)$.
(D_1) et (D_2) sont sécantes dans (P_1) alors $(P_1) \parallel (Q)$. D'où il existe un plan (Q) et un seul passant par A et parallèle à (P_1).

> **Propriété**
> Par un point donné de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

Consigne 5.9

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Démontre que $(ADE) \parallel (BFC)$.
2. (a) Montre que les plans (ABH) et (ADE) sont sécants puis précise leur droite d'intersection (Δ_1).
   (b) Montre que les plans (ABH) et (BFC) sont sécants puis précise leur droite d'intersection (Δ_2).
3. Démontre que $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$.
4. Que peut-on conclure ?

Propriété
Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Consigne 5.10

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Démontre que $(ABC) \parallel (EFH)$.
2. (a) Montre que $(EG) \parallel (ABC)$.
   (b) Montre que $(EG) \parallel (EFH)$.
3. Que peut-on conclure ?

Propriété
Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Consigne 5.11

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Démontre que $(ABC) \parallel (EFH)$.
2. (a) Montre que la droite (AG) et le plan (ABC) sont sécants.
   (b) Montre que la droite (AG) et le plan (EFH) sont sécants.
3. Que peut-on conclure ?

Propriété
Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

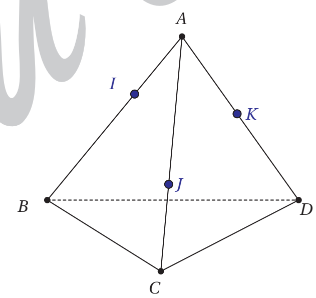
5.4 Construction des intersections

Retenons

1. Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, on peut :
   - chercher l'intersection de cette droite avec une droite du plan.
   - travailler dans un plan annexe contenant la droite.
2. Pour déterminer l'intersection de deux plans, on peut déterminer les intersections de deux droites de l'un des plans avec l'autre plan.
3. Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit :
   - soit de trouver deux points communs,
   - soit de trouver un point commun et une droite parallèle à ces deux plans.

Consigne 5.12

$ABCD$ est un tétraèdre, I un point de $[AB]$, J un point de $[AC]$ et K un point de $[AD]$.



1. (a) Détermine l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).
   (b) Détermine l'intersection de la droite (JK) avec le plan (BCD).
2. Déduis-en l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

Exercices

01

02

03

« Les mathématiques ne sont écrites que pour les mathématiciens »
(Nicolas Copernic)

ORGANISATION DES DONNÉES

Situation de départ :
Texte : *Zoé et les mathématiques*
Dans une classe de 2^{nde} d'un lycée de la place, c'est le moment de la remise des copies d'un devoir surveillé de mathématique. Le professeur a fabriqué des petits cartons carrés de côtés distincts sur chacun desquels il écrit la note de chaque élève et le lui remet avec sa copie.
Zoé, une élève de la classe, a ramassé les cartons de ses camarades pour en observer la forme. Elle constate que ces cartons peuvent être découpés dans un carton carré d'un mètre de côté, sur lequel on trace une diagonale $[AO]$. Il suffit alors de fixer un point de la diagonale et de mener à partir de ce point une parallèle à chacun des côtés issus du point O.
Zoé, très émerveillée par sa trouvaille, est curieuse de savoir s'il y a une formule mathématique à la base du calcul de l'aire de ces petits cartons carrés distribués par le professeur.
Par ailleurs, les notes obtenues sont les suivantes :

7	8	8	8	9	9	10	10	10	12
12	12	12	12	13	13	15	15	15	8
7	8	10	12	7	13	18	9	12	10

Zoé se demande quel pourcentage d'élèves ont une note plus petite ou égale à la moyenne des notes et comment ces dernières sont-elles dispersées autour de cette moyenne.

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Calculs dans $\mathbb{R}$

Activité 2.1

Avant d'amorcer toute analyse, Zoé désire réactualiser ses connaissances sur les nombres réels qu'elle a étudié en classe de $3^{ème}$.

1.1 Présentation de l'ensemble $\mathbb{R}$

Définition

L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. C'est l'ensemble des nombres réels.
Les principaux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et les intervalles de $\mathbb{R}$.
Nous avons les inclusions successives : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
NB : π n'est pas un nombre rationnel.
On note :

- $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.
- $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs.

On a : $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

Définition
Un ensemble A est contenu ou inclus ou encore est une partie d'un ensemble B si et seulement si tout élément de A est élément de B et on note $A \subset B$.

1.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition
On distingue deux types d'intervalles : **les intervalles bornés et les intervalles non bornés**.

- Les intervalles $]a;b[$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $[a;b]$ sont dits bornés.
- Les intervalles $]\longleftarrow;a[$, $[a;\longrightarrow[$, $]\longleftarrow;a]$ et $]a;\longrightarrow[$ sont dits non bornés.

Désormais, les intervalles $]\longleftarrow;a[$ et $]\longleftarrow;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ seront notés $]-\infty;a[$ et $]-\infty;a]$, et les intervalles $[a;\longrightarrow[$, et $]a;\longrightarrow[$ seront notés $[a;+\infty[$, et $]a;+\infty[$.
NB : $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels, ce sont des symboles.

Remarque
$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty$; $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty$; $\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$.

Propriété
Soit x, a et b des nombres réels avec $a < b$.

1. $x \in]-\infty, a] \iff x \leq a$
2. $x \in]-\infty, a[\iff x < a$
3. $x \in [a,+\infty] \iff x \geq a$
4. $x \in]a,+\infty] \iff x > a$
5. $x \in]a,b[\iff a < x < b$
6. $x \in]a,b] \iff a < x \leq b$
7. $x \in [a,b[\iff a \leq x < b$
8. $x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b$

Consigne 1.1

1. Traduis par une inégalité, les intervalles suivantes :

(a) $x \in]-\infty;2]$
(b) $x \in \left]\frac{2}{3};+\infty\right[$
(c) $x \in]-\sqrt{2};5]$
(d) $x \in [2;\sqrt{7}]$

2. Écris sous formes d'intervalles, les inégalités suivantes :

(a) $x \geq -1$
(b) $x < 3$
(c) $0 \leq x < \sqrt{3}$
(d) $-\sqrt{2} < x \leq 2\sqrt{5}$

Consigne 1.2

Soit $A =]-\infty;3[$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x\}$
Détermine : $A \cap B$ et $A \cup B$.

Centre et rayon d'un intervalle fermé ou ouvert
Soit a et b des nombres réels avec $a < b$.

1. On appelle **centre c** de l'intervalle $[a;b]$ ou $]a;b[$ le nombre réel $\frac{a+b}{2}$. On note $c = \frac{a+b}{2}$.
2. On appelle **rayon r** de l'intervalle $[a;b]$ ou $]a;b[$ le nombre réel positif $\frac{|b-a|}{2}$. On note $r = \frac{|b-a|}{2}$.

Consigne 1.3

Détermine le centre et le rayon de l'intervalle $]-1;3]$.

1.3 Opérations dans $\mathbb{R}$

1.3.1 Quotient

Définition
Soit a et b deux nombres réels avec b non nul. Le quotient de a par b est le nombre réel $\frac{a}{b}$.

Remarque
Soit a et b deux nombres réels.

1. $\frac{a}{b}$ existe si $b \neq 0$
2. si $b \neq 0$, son inverse est $\frac{1}{b}$.

1.3.2 Puissances

Définition
Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel, par définition :
$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$
De plus, si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété

Pour tous nombres entiers naturels m et n, et pour tous nombres réels a et b non nuls, on a :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^n \times b^n = (a.b)^n$
3. $(a^m)^n = a^{m\times n}$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = (a)^{m-n}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
7. $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Consigne 1.4

1. Calcule :
$$A = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} \text{ et } B = \frac{671088}{2^{26}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^{20}}}$$
2. Simplifie les expressions suivantes : $(a \neq 0, b \neq 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$
$$A = \frac{\left(27a^3b^6\right)^{n+1}}{\left(3ab^2\right)^{3n+3}}$$
$$B = \frac{\left(a^nb^{3n}\right)^4}{\left(a^4b^{12}\right)^{n+1}}$$
$$C = \frac{\left(8a^4b^7\right)^3}{\left(4a^2b^5\right)^4}$$

1.3.3 Racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif. On appelle **racine carrée de** a et on note $\sqrt{a}$ l'unique nombre réel dont le carré est a.

Remarque

Soit a un nombre réel.
$\sqrt{a}$ existe si $a \geq 0$

Propriété

Pour tous nombres réels positifs a et b et pour tous nombres entiers naturels m et n, on a :

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = |a|$
2. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Consigne 1.5

1. Calcule :
$$A = 3\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{5}{3}}} \text{ et } B = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$
2. Pour $a > 0$ et $b > 0$, on pose : $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$

Calcule $y = \dfrac{2b\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Propriété

Pour tout nombre réel positif a et pour tout nombre réel x, on a :
$x^2 = a \Longleftrightarrow x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$

1.4 Ordre dans $\mathbb{R}$

1.4.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition

Soit a et b deux nombres réels.

1. $a \leq b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}_+$
2. a est strictement inférieur à b $(a < b)$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{R}_+^*$

Remarque

1. $\leq$ et $\geq$ sont des inégalités larges.
2. $<$ et $>$ sont des inégalités larges.

Propriété

1. Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$
2. Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

Consigne 1.6

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, compare :

1. $\frac{a+b}{2}$ et b
2. $a^2 + b^2$ et ab
3. $\sqrt{a^2+b^2}$ et $a+b$

1.4.2 Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels.

1. $\forall c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
2. $\forall c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ alors $ac \leq bc$
3. $\forall c \in \mathbb{R}$, si $a \geq b$ alors $ac \geq bc$

Propriété

Pour tous nombres réels a, b, c et d, on a :

1. si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
2. De plus, si a, b, c et d sont tous positifs, on a : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Consigne 1.7

On donne les réels a et b vérifiant l'égalité : $4 < a < 10$ et $-6 < b < -2$. Encadre :

1. $\frac{a-b}{2a^2}$
2. $\frac{a+b}{ab}$
3. $\frac{b(a+b)}{2a}$
4. $\frac{a^2+b^2}{ab}$
5. $\frac{a^2}{b^2}$

Évaluation formative

1. Démontre pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \geq b \geq 0$, l'égalité : $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b)$
2. Rend rationnel le dénominateur du nombre : $x = \frac{2-\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$.
3. Donne l'encadrement à deux décimales du nombre : $y = \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$. On donne : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.
4. Compare $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ tout en justifiant ta réponse $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1.4.3 Partie entière

Définition

La partie entière d'un nombre réel x, notée $(E(x)$ est le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.
On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
Exemple : $E(4,8) = 4$, $E(-4,8) = -5$, $E(0) = 0$.

Propriété

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k, on a :

1. $E(x) \in \mathbb{Z}$
2. $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$
3. $E(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
4. $x \in [k; k+1[\Longleftrightarrow E(x) = k$

Consigne 1.8

Soit x un nombre réel. Démontre que :
$-\frac{1}{2} \leq x - E\left(x + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$

Consigne 1.9

Détermine les réels x vérifiant : $E(-3x+5) = -3$.

1.5 Majorant et minorant - maximum et minimum

Consigne 1.10

Dans ces travaux de recherche, Zoé a considéré les ensembles suivants :
$A = \{-1; 5; 0; -4; -15\}$, $B = [-6; 4[$, $C = [-1; 2]$.

1. (a) Trouve deux nombres réels plus petits que tous les éléments de l'ensemble A. Peux-tu en trouver d'autres ?
   (b) Trouve deux nombres réels plus grands que tous les éléments de l'ensemble B. Peux-tu en trouver d'autres ?
2. (a) Donne le minorant de B qui appartient à B.
   (b) Donne le majorant de C qui appartient à D.

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On dit qu'un nombre M est un **majorant** de A si pour tout élément x appartenant à A, $x \leq M$.
2. Un ensemble qui admet un majorant est dit **majoré**.
3. On dit qu'un nombre m est un **minorant** de A si

pour tout élément x appartenant à A, $x \geq m$.

4. Un ensemble qui admet un minorant est dit **minoré**.
5. Lorsque le majorant $M \in A$, on dit que M est le **maximum** de A.
6. Lorsque le minorant $m \in A$, on dit que m est le **minimum** de A.
7. L'ensemble $\mathbb{N}$ est minoré mais n'admet pas de majorant. 0 est le minorant de $\mathbb{N}$.

Consigne 1.11

Soit $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

1. Démontre que 1 est le maximum de A.
2. Démontre que l'ensemble A est minoré, mais n'admet pas de minimum.

Consigne 1.12

On considère l'ensemble $B = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

1. Montre que B est non vide.
2. Démontre que B admet 0 pour minimum.
3. Démontre que B est majoré par 1 mais n'admet pas de maximum.

Consigne 1.13

On considère les ensembles suivants :
$E_1 = \left\{\frac{2n+1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ et $E_2 = \left\{\frac{3n+7}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. (a) Résous dans $\mathbb{N}$, l'équation $\frac{2n+1}{n+1} = 1$ et l'inéquation $\frac{2n+1}{n+1} > 1$.
   (b) Peux-tu dire que $1 \in E_1$?
   (c) Quel est le minimum de E_1 ?
   (d) Trouve cinq éléments de E_1 supérieurs à 10.
   (e) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$. Déduis-en un majorant de E_1.
   (f) 2 est-il l'élément maximum de E_1 ?
2. Résous dans $\mathbb{N}$, l'équation $\frac{3n+7}{n+2} = \frac{7}{2}$ et l'inéquation $\frac{3n+7}{n+2} < \frac{7}{2}$.
3. Déduis-en ce que représente $\frac{7}{2}$ pour E_2.

1.6 Valeur absolue

1.6.1 Définition

Définition

Soit a un nombre réel. On appelle valeur absolue de a et on note $|a|$ le plus grand des deux nombres réels a et $-a$.
On écrit donc : $|a| = Sup(x; -x) = d(x; 0)$.
Autrement dit, $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre réel positif x, on a :

1. $|a| = 0 \Longrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a| = |b| \Longrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$
5. $|ab| = |a| \times |b|$
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalités triangulaires)
8. $|a| > r \Longrightarrow a < -r \quad \text{ou} \quad a > r$
9. $|a| \leq r \Longrightarrow -r \leq a \leq r$

Consigne 1.14

Résous dans $\mathbb{R}$:

1. $|2x-1| = |x-3|$
2. $|x^2 - 1| = 0$
3. $|2x-1| \leq 3$

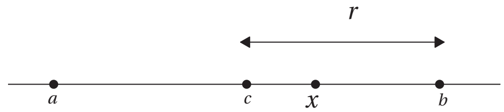
1.6.2 Distance de deux nombres

Définition

Soit x et y deux nombres réels.
Le réel positif $|x-y|$ est appelé distance de x à y. On note : $d(x; y) = |x-y|$.

Retenons

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On désigne par c le centre, r le rayon de $[a;b]$.
Caractérisons $d(c;x)$ avec $x \in [a;b]$.



$\forall x \in [a;b]$; $d(c;x) \leq r$ donc $x \in [a;b] \iff |x-c| \leq r$
soit $\left|x - \dfrac{a+b}{2}\right| \leq \dfrac{b-a}{2}$

1.7 Calculs approchés

1.7.1 Valeur approchée

Retenons

Étant donné un nombre réel x et un nombre réel strictement positif ε, on dit que **le nombre réel y est une valeur approchée de x à ε près** et on note $x \simeq y$ à ε près lorsque $|x-y| \leq \varepsilon$.
ε est appelée **l'incertitude de la valeur approchée**.

Remarque

D'après l'exemple précédent, $\left|x - \dfrac{a+b}{2}\right| \leq \dfrac{b-a}{2}$
Donc $\dfrac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\dfrac{b-a}{2}$ près.

Consigne 1.15

Soit le nombre réel x tel que $13,07 \leq x \leq 13,08$.

1. Trouve une valeur approchée de x.
2. Trouve l'incertitude de cette valeur approchée.
3. Donne un encadrement du nombre réel x sachant que $11,3$ est une valeur approchée de x à 10^{-3} près.

1.7.2 Notation scientifique

Consigne 1.16

Zoé obtient le nombre $0,005372$ en faisant certaines manipulations sur les notes.

1. Écris ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq |a| < 10$.
2. Comment appelle-t-on cette écriture pour le nombre $0,005372$?

Définition

Un nombre décimal A est exprimé en **notation scientifique** lorsqu'il est sous forme $A = a \times 10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et a un nombre réel décimal tel que
$1 \leq |a| < 10$.
Soit x un nombre réel écrit en notation scientifique tel que $x = a \times 10^p$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq |a| < 10$.
Soit α l'arrondi d'ordre 0 de a. Le nombre décimal $\alpha \times 10^p$ est appelé **un ordre de grandeur du nombre** x.

Consigne 1.17

Donne la notation scientifique puis l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants :
$A = 15,39$; $B = 245,2835$ et $C = 720347,637$

Exercices

01

02

03

2 Généralités sur les fonctions

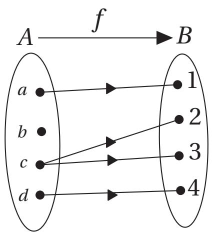
Activité 2.2

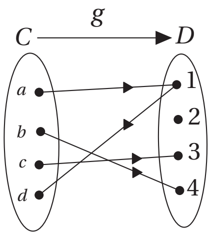
Zoé considère la correspondance entre l'ensemble des élèves de la classe et l'ensemble des notes obtenues à l'issue du devoir. Son professeur lui fait comprendre qu'elle est entrain de définir par ce biais une fonction. Zoé voudrait en savoir davantage sur la notion de fonction.

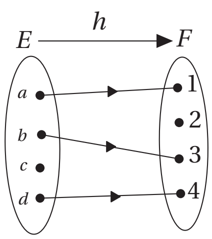
2.1 Notion de fonction numérique

Consigne 2.1

On considère les correspondances f, g et h ci-dessous :







1. Précise l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de chacune des correspondances f, g et h.
2. Parmi ces correspondances, précise celles qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.
3. Donne un nom à ces correspondances retenues.

Définition

Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle **fonction de** A **vers** B toute correspondance qui, à chaque élément de A associe au plus un (0 ou 1) élément de B.
Illustration

Vocabulaire

Soit la fonction f définie par : $\begin{array}{rl} f : A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$

1. L'écriture ci-dessus est lue : «f est la fonction définie de A vers B, qui à x on associe $f(x)$.»
2. A est appelé l'ensemble de départ de f.
3. B est appelé l'ensemble d'arrivée de f.
4. x est la variable ; $f(x)$ est l'image de x par f.
5. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction à variable réelle ou f est une fonction numérique.

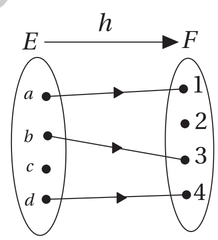
Retenons

1. Lorsque v est **l'image** de u par f, on dit que u est un **antécédent** de v par f. On écrit $v = f(u)$.
2. Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une **fonction numérique**.
3. Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une **fonction numérique d'une variable réelle**.

2.2 Ensemble de définition d'une fonction numérique

Consigne 2.2

On considère la fonction ci-dessous.



1. Donne l'ensemble $\mathscr{D}$ des éléments de A ayant d'image par h dans B.
2. Donne un nom à cet ensemble.
3. Écris en compréhension l'ensemble $\mathscr{D}$.

Définition

Soit A et B deux ensembles non vides et f une fonction de A vers B. On appelle **ensemble ou domaine de définition de** f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On le note habituellement D_f.
On écrit : $D_f = \{x \in A / f(x) \text{existe et} f(x) \in B\}$

Consigne 2.3

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^2+1$$

$$g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{x-2}{x+1}$$

$$h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{1}{x^2-3}$$

$$i:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sqrt{x+1}$$

$$j:\mathbb{R} \longrightarrow [-2;+\infty[,\quad x \longmapsto 2x-3$$

$$k:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{x-5}{E(x)+x}$$

$$l:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{x-3}{E(x)+1}$$

2.3 Représentation graphique d'une fonction

Définition

Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une fonction d'une variable réelle d'ensemble de définition D_f.
On appelle **représentation graphique de f ou courbe représentative de f**, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ où $x \in D_f$.

Remarque

La courbe représentative d'une fonction f est habituellement notée $(\mathscr{C}_f)$.
Un point $M(x;y) \in (\mathscr{C}_f) \Longleftrightarrow x \in D_f, y = f(x)$
$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ lorsque f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Consigne 2.4

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies comme suit :
$f(x) = 2x-3$ et $g(x) = x^2-4$

1. Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions f et g.
2. Complète les tableaux suivants :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

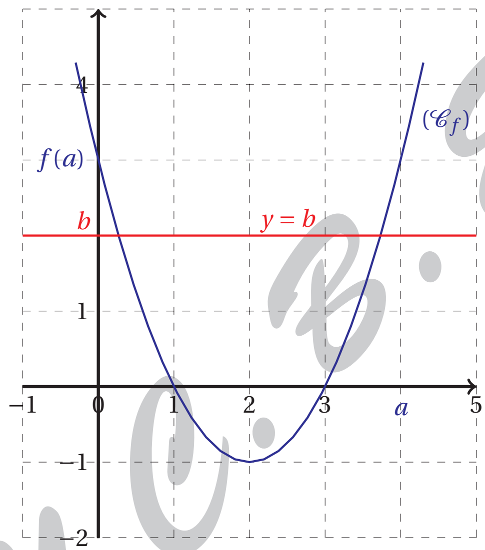
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

3. Dans deux différents plans munis chacun d'un repère orthonormé, représente les points de coordonnées $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$ en utilisant les valeurs contenues dans les tableaux ci-dessus.
4. Trace l'allure des représentations graphiques $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_f)$.

2.4 Etude graphique

2.4.1 Image et antécédent d'un nombre réel par une fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f la fonction numérique dont la représentation graphique est la suivante :



Retenons

1. **Lecture de l'image de a, $a \in D_f$**
   L'image de a par f est l'ordonnée du point d'abscisse a. Le point $M(a; f(a))$ est l'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $x = a$.
2. **Lecture des antécédents**
   Les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $y = b$.

Consigne 2.5 *Exercice 15 CIAM page 170*

2.4.2 Image directe d'un ensemble

Propriété

Soient A et B deux ensembles non vides, f est une fonction de A vers B. Soit E une partie non vide de A. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f des éléments de E. On la note $f(E)$ et on a :
$f(E) = \{f(x), x \in E\}$

2.4.3 Image réciproque d'un ensemble

Propriété

Soient A et B deux ensembles non vides, f est une fonction de A vers B. Soit F une partie non vide de B. On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de F. On la note $f^{-1}(F)$ et on a :
$f^{-1}(F) = \{x, f(x) \in F\}$

Consigne 2.6 *Exercice 20 CIAM page 171*

2.5 Égalité de deux fonctions - coïncidence de fonctions sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Consigne 2.7

On considère les fonctions f, g et h définies par :
$f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h.
2. Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h(x)$.
3. Démontre que : $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = g(x)$.

Définition

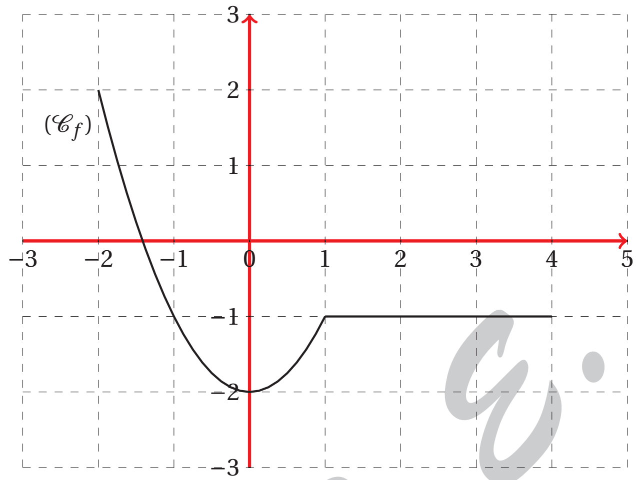
1. Deux fonctions numériques f et g sont **égales** lorsqu'elles ont même ensemble de définition et que $\forall x \in D_f = D_g, f(x) = g(x)$.
2. On dit que deux fonctions numériques f et g **coïncident sur un intervalle I** si et seulement si f et g sont définies sur I et que $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ ($I \subset D_f$ et $I \subset D_g$).

2.6 Variation d'une fonction

2.6.1 Sens de variation d'une fonction

Consigne 2.8

On considère la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-dessous.



Donne les intervalles où l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est :

1. ascendante. *Dans ce cas, on dit que la fonction f est strictement croissante.*
2. descendante. *Dans ce cas, on dit que la fonction f est strictement décroissante.*
3. ni ascendante ni descendante. *Dans ce cas, on dit que la fonction f est constante.*

Définition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I.

1. On dit que **f est croissante sur I** lorsque pour tout éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Lorsque $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, on dit que **f est strictement croissante sur I**.

   Tableau de variation

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	$f(b)$

2. On dit que **f est décroissante sur I** lorsque pour tout éléments x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) \geq f(x_2)$.
   Lorsque $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, on dit que **f est strictement décroissante sur I**.

   Tableau de variation

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	$f(b)$

3. On dit que **f est constante sur I** lorsque pour tout éléments x_1 et x_2 de I, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.

Tableau de variation

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ ⟶	$f(b)$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. f **est une fonction monotone sur** I lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante sur I.
2. f **est une fonction strictement monotone sur** I lorsqu'elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur I.

Retenons

Étudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle I, c'est déterminer les plus grands intervalles de I sur lesquels la fonction est strictement monotone ou constante.

Consigne 2.9

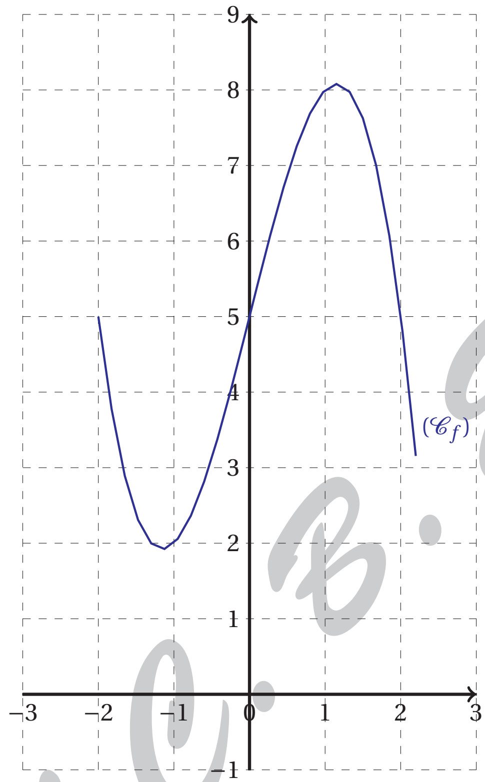
On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

1. Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(x-2)^2 + 9$.
2. Étudie le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty; 2]$ et $[2; +\infty[$.

2.6.2 Maximum - minimum d'une fonction

Consigne 2.10

On considère la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction f ci-dessous.



1. Détermine graphiquement l'abscisse du point de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ qui possède la plus grande ordonnée.
2. Détermine graphiquement l'abscisse du point de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ qui a la plus petite ordonnée.

Définition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle E. Soit $a \in E$,

1. Lorsque $\forall x \in E, f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le **maximum** de f sur E.
2. Lorsque $\forall x \in E, f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le **minimum** de f sur E.

Retenons

Le tableau de variations d'une fonction est un tableau récapitulatif des résultats suivants : ensemble de définition, sens de variation, maximums et minimums éventuels, images aux bornes.

Consigne 2.11

f est une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		1		4		7
$f(x)$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

1. Étudie le sens de variation de f.
2. f admet-elle un minimum ? un maximum ?
3. Donne une allure de la courbe de f.
4. Résous graphiquement l'équation $f(x) = 1$.

Consigne 2.12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^3 - x + 2$.

1. Vérifie que si :
   $u \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R}_+, f(u) - f(v) = (u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1.$
2. Déduis-en que f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[0; 10]$ et déduis-en le minimum de f sur cet intervalle.

.

Exercices

01

02

03

3 Études de quelques fonctions

Activité 2.3

3.1 Fonctions élémentaires

3.1.1 Fonction carrée

Consigne 3.1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.

1. Détermine D_f.
2. Étudie le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[-3; 3]$.
4. Donne l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3.1.2 Fonction cube

Consigne 3.2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3$.

1. Détermine D_f.
2. Étudie le sens de variation de f.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[-2; 2]$.
4. Donne l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3.1.3 Fonction racine carrée

Consigne 3.3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Détermine D_f.
2. Étudie le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[0; 9]$.
4. Donne l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3.1.4 Fonction inverse

Consigne 3.4

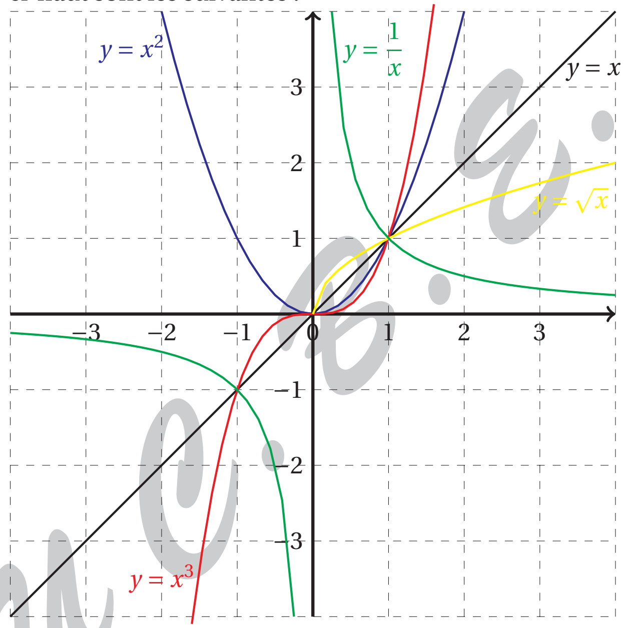
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Détermine D_f.
2. Étudie le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $[-4; 4]$.
4. Donne l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3.2 Comparaison des nombres a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$

Consigne 3.5

Les courbes représentatives des fonctions élémentaires étudiées ci-haut sont les suivantes :



En exploitant les courbes tracées,

1. Compare : a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ si $a \in]0; 1[$.
2. Compare : a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ si $a \in]1; +\infty$.
3. Compare : a, a^2, a^3, $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ si $a = 1$.

Propriété

1. Si $a \in]0; 1[$ alors $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$.
2. Si $a \in]1; +\infty$ alors $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$.
3. Si $a = 1$ alors $a = a^2 = a^3 = \sqrt{a} = \frac{1}{a}$.

Consigne 3.6

3.3 Fonctions affines par intervalle

3.3.1 Définition

Définition

On appelle **fonction affine par intervalle** toute fonction numérique d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalle sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.
Lorsque sur chacun des intervalles, f coïncide avec une fonction constante on dit que f est une **fonction en escalier**.

Consigne 3.7

Représente graphiquement chacune des fonctions affines définies si-dessous :

$$f(x)=\begin{cases}5x+1 & \text{si } x\in]-\infty;1]\\ 6x & \text{si } x\in[1;4]\\ -x & \text{si } x\in]4;+\infty[\end{cases} \quad \text{et } g(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x\in[1;2]\\ 4 & \text{si } x\in[2;3]\\ 7 & \text{si } x\in[3;+\infty[\end{cases}$$

3.3.2 Fonction valeur absolue

Signe de l'expression $ax+b, (a\neq 0)$

Pour étudier le signe de l'expression $ax+b$, on procède comme suit :

1. résoudre l'équation $ax+b=0$, on trouve donc $x=-\dfrac{b}{a}$.
2. utiliser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Consigne 3.8

On considère la fonction f définie par : $f(x)=|x|$.

1. Écris f sans le symbole de $|\quad|$.
2. Représente graphiquement f.

Consigne 3.9

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x-3|-|2x+1|\end{array}$

1. Justifie que f est une fonction affine par intervalle.
2. Construis la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f.

3.3.3 Fonction partie entière

Définition

On appelle **fonction partie entière** la fonction définie par : $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & E(x)\end{array}$

Consigne 3.10

Construis sur $[-2;3]$ la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f définie par : $f(x)=E(x)$.

3.4 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Consigne 3.11

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=x^2$ et $g(x)=3x-2$.

1. Construis dans un repère orthonormé les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ des fonctions f et g.
2. Déduis-en les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
3. Déduis graphiquement les solutions de l'équation $(E): x^2-3x+2=0$ et l'inéquation $(I): x^2-3x+2<0$.

Consigne 3.12 *Application*

Exercices

01

02

03

4 Applications

Activité 2.4

4.1 Définition

Consigne 4.1

On considère les ensembles : $A = \{1;2;3;4;5\}$, $B = \{0;1;2;3;4;5;6;8;9;10;11\}$ et $C = \{-7;-5;-1;0;2;4\}$.
Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{ll} A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto 2x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ll} C & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto |x| \end{array}$$

1. Détermine D_f et D_g.
2. Compare D_f et A puis D_g et C.

Définition

1. Une fonction $f : A \longmapsto B$ est une **application** lorsque $D_f = A$, D_f étant le domaine de définition de f.
2. Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle **application** de $A \longrightarrow B$ toute correspondance f de $A \longrightarrow B$, qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B.

Retenons

Toute application est une fonction tandis que toute fonction n'est pas nécessairement une application.

Consigne 4.2

Soit la fonction $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{|x|-1} \end{array}$

f est-elle une application ?

4.2 Applications injectives

Consigne 4.3

On considère les ensembles : $A = \{-2;-1;0;1;2;3\}$, $B = \{-3;-1;0;1;2;3\}$ et $C = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.
Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{ll} A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto |x| \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ll} A & \longrightarrow C \\ x & \longmapsto -x \end{array}$$

1. Justifie que f et g sont des applications.
2. Peux-tu trouver deux éléments qui ont la même image par f ? par g ?

Définition

Soit f une application de A vers B. On dit que f est **injective** ou **une injection** lorsque deux éléments quelconques de A ont des images distinctes dans B.
f injective $\Longleftrightarrow \forall x, y \in A$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Propriété

Soit f une application de A vers B, f est **injective** si et seulement si pour tous éléments a et b de A, on a : $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$.

Consigne 4.4

Soit la fonction f définie par : $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -3x+5 \end{array}$

Démontre que f est injective.

4.3 Applications surjectives

Consigne 4.5

On considère les ensembles : $A = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$, $B = \{0;1;2;3;4\}$ et $C = \{-1;0;1;2;4;9;16\}$.
Soient f et g deux applications définies par :

$$f : \begin{array}{ll} A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto |x| \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ll} A & \longrightarrow C \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$$

Peux-tu trouver un élément de :

1. B qui n'a pas d'antécédents par f dans A ?
2. C qui n'a pas d'antécédents par g dans A ?

Définition

Soit f une application de A vers B. On dit que f est **surjective** ou est **une surjection** lorsque tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.

Propriété

Soit f une application de A vers B, f est **surjective** si et seulement si pour tout élément $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans A.

Consigne 4.6

Soit f et g deux fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x-3 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ll} \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{x+3}{x-1} \end{array}$$

Vérifie si f et g sont surjectives.

4.4 Applications bijectives

Consigne 4.7

On considère les ensembles : $A = \{-2; 0; 1; 3\}$ et $B = \{-3; -1; 0; 2\}$.

Soit f l'application définie par : $\begin{array}{rl} f: A & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto x-1 \end{array}$

1. Peux-tu trouver un élément de B qui n'admet pas d'antécédent par f dans A ?
2. Combien d'antécédent possède chaque élément de B ?
3. Comment appelle-t-on cette application ?

Définition

1. Soit f une application de A vers B. On dit que f est **bijective** ou est **une bijection** lorsque tout élément de B est l'image d'un unique élément de A.
2. Toute application qui est à la fois injective et surjective est dite **bijective**.

Propriété

Soit f une application de A vers B, f est **bijective** si et seulement si pour tout élément $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet une solution unique dans A.

Définition *Bijection réciproque*

Soit f une application bijective de A sur B.
f admet **une bijection réciproque** notée f^{-1} définie de B sur A.

$$\begin{array}{rl} f^{-1}: A & \longrightarrow B \\ y & \longmapsto x \end{array}$$

Consigne 4.8

Soit la fonction f définie par : $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x-3 \end{array}$

f est-elle une bijection? si oui définis la bijection réciproque de f.

Consigne 4.9 *Évaluation formative*

.

Exercices

01

02

03

5 Polynômes et fractions rationnelles

Activité 2.5

5.1 Polynômes

5.1.1 Notion de polynômes

Consigne 5.1

On considère les fonctions suivantes :
$f(x) = \sqrt{2}x^7$ et $g(x) = 3x^5 - \sqrt{3}x^3 + 2$.

1. (a) Quel nom donne-t-on à la fonction f ?
   (b) Que représente les nombres $\sqrt{2}$ et 7 dans l'écriture de $f(x)$?
2. (a) Quel nom donne-t-on à la fonction g ?
   (b) Précise son degré.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Toute fonction numérique définie par $f(x) = ax^n (x \in \mathbb{R})$ est appelé **monôme** de coefficient a et de degré n.
2. On appelle **polynôme** toute somme algébrique de monômes.

Remarque

1. Tout monôme est aussi un polynôme.
2. Tout polynôme est défini sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction nulle $(x \longmapsto 0)$ est appelée **polynôme nulle**.

5.1.2 Racine d'un polynôme

Consigne 5.2

On considère le polynôme suivant :
$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x^2 - 6$.

1. Calcule $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P(2)$ et $P(-3)$.
2. Que constates-tu ?
3. Propose une définition du zéro d'un polynôme.

Définition

On appelle **racine** ou **zéro d'un polynôme** tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarque

Déterminer les racines d'un polynôme revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Consigne 5.3

Détermine les racines du polynôme suivant :
$P(x) = (2x+1)(x-3) - (4x+5)(3-x)$.

5.1.3 Méthode de factorisation d'un polynôme

Forme canonique

Consigne 5.4

Soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$.

1. Complète les égalités suivantes en remplaçant les pointillés par ce qui convient :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a[\cdots] \\ &= a\left[x^2 + 2(x)(\cdots) + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\cdots)^2 + \frac{c}{a}\right] \end{aligned}$$
2. Montre que $P(x)$ peut se mettre sous la forme
$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha\right]$ avec α à préciser.

Retenons

L'écriture $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Consigne 5.5

Mets sous forme canonique les polynômes suivants :
$P(x) = -2x^2 + 7x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 2x + 12$ et $H(x) = x^2 - 11x - 3$.

Factorisation par $x - \alpha$

Consigne 5.6

Soit le polynôme du second degré $P(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 4$.

1. Montre que -2 est un zéro de $P(x)$.
2. (a) Détermine les nombres réels a , b, c tels que : $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

(b) Déduis-en une factorisation de $P(x)$.
On dit qu'on a factorisé le polynôme $P(x)$ par la méthode d'identification des coefficients.

3. (a) Détermine un polynôme de degré 2 tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+2)Q(x)$.

(b) Déduis-en une factorisation de $P(x)$.
On dit qu'on a factorisé le polynôme $P(x)$ par la méthode de division euclidienne.

Propriété

Le polynôme P de degré n, $n \geq 1$, admet pour zéro le nombre réel α si seulement si il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout nombre réel x :
$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

5.1.4 Étude du signe d'un binôme du premier degré

Consigne 5.7

On considères les polynômes $P(x) = -3x+7$ et $Q(x) = 2x^2+3x-5$.

1. Étudie le signe du binôme $P(x)$.
2. (a) Mets sous forme canonique $Q(x)$.
   (b) Factorise $Q(x)$.
   (c) Détermine les racines de $Q(x)$.
   (d) Étudie le signe de $Q(x)$.

5.2 Fractions rationnelles

5.2.1 Généralités sur les fractions rationnelles

Définition

On appelle **fraction rationnelle** le quotient de deux fonctions polynômes.

5.2.2 Fractions rationnelles

Définition

On appelle **zéro d'une fraction rationnelle** f le réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Consigne 5.8

On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

1. Détermine le domaine de définition D_f de f.
2. Détermine un zéro du polynôme x^2+x-2 puis déduis-en une factorisation.
3. Simplifie $f(x)$ sur D_f.
4. Étudie le signe de $f(x)$.

Consigne 5.9

On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2+4x-12}{-2x^2-x+1}$.

1. Détermine le domaine de définition D_f de f.
2. Étudie le signe de $f(x)$.

Exercices

01

02

03

6 Équations - Inéquations dans $\mathbb{R}$

Activité 2.6

6.1 Équations équivalentes

Consigne 6.1

On considère les équations suivantes :
$(E_1): x^2+11x+8=-x^2+13x+11$; $(E_2): \dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{x}{2}+1$

1. Parmi les nombres -1 ; 1 et 2, trouve ceux qui sont solutions de (E_1).
2. Vérifie si les nombres 3 et 1 sont solutions de (E_2).

Consigne 6.2

1. Transforme l'équation (E_2) sous la forme $P(x)=0$ avec $P(x)$ un polynôme à préciser.
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E_3): P(x)=0$.
On dit que les équations (E_2) et (E_3) sont équivalentes.

Définition
Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont même ensemble solution.

6.2 Équations du type $|x-a|=b$

Consigne 6.3

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
$(E_1): |3x-2|=4$, $(E_2): |2x+3|=-1$, $(E_3): |x+3|=2x-5$.

6.3 Équations du second degré à une inconnue

Définition
On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $(b,c)\in\mathbb{R}^2$.

Consigne 6.4

Parmi les équations ci-dessous, identifie celles qui sont des équations du second degré à une inconnue.
$(E_1): 3x^2-2x=4$, $(E_2): -2x^2+3y+1=0$,
$(E_3): x^3+3x^2-2x=0$, $(E_4): x^2+1=0$,
$(E_5): -y^2+3y-2=0$, $(E_6): |3x^2-2x+1|=0$.

Consigne 6.5

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
$(E_1): x^2+x=2$, $(E_2): -x^2+4x-3=0$.

Consigne 6.6

Ben dépense le quart de son salaire à la nourriture, le tiers à la location et il lui reste 50.000 F CFA.
Quel est le montant du salaire de Ben ?

Consigne 6.7

6.4 Inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Consigne 6.8

On considère les inéquations suivantes :
$(I_1): 3x+5<2x-1$ et $(I_2): 2x^2\geq\dfrac{2-x}{5x-1}$.

1. Vérifions si les réels 0 et -8 sont solutions de (I_1).
2. Vérifions si les réels 1, -1 et 2 sont solutions de (I_2).

Consigne 6.9 *problème conduisant à une inéquation*

Consigne 6.10

1. Transforme l'inéquation (I_2) sous la forme $P(x)\geq 0$ avec $P(x)$ un polynôme à préciser.
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(I_3): P(x)\geq 0$.
On dit que les inéquations (I_2) et (I_3) sont équivalentes.

Définition
Deux inéquations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont même ensemble solution.

Consigne 6.11

Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :
$(I_1): 3x+2>0$, $(I_2): -x^2+4x-3\leq 0$,
$(E_3): -x^2+4x-3\leq 2x+2$, $(E_4): \dfrac{x+2}{x}\leq\dfrac{2x-1}{3}$.

6.5 Inéquations du type $|x-a|\leq b$

Consigne 6.12

Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :
$(I_1): |5x+7|\leq 3$, $(I_2): |-2x+9|<x+1$.

Remarque
Pour tout nombre réel a, on a :
$(a>0$ et $|x|\leq a) \iff (-a\leq x\leq a)$

Exercices

01

02

03

7 Statistique

Activité 2.7

Zoé veut étudier les notes et les poids de ses camarades. Pour cela, il considère deux séries statistiques :
Série 1 : Notes obtenues par les élèves de la 2^{nde} (voir situation de départ).

Série 2 :
Le relevé des poids des élèves de la 2^{nde} a donné les résultat suivant :

50	62	62	70	54	64	72	54	50	62
70	54	72	62	74	51	63	60	52	73
58	63	71	70	61	50	64	57	60	51

7.1 Présentation d'une série statistique

7.1.1 Série statistique à caractère quantitatif discret

Consigne 7.1

1. Dresse le tableau des effectifs et des fréquences de la série 1.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés (croissants et décroissants) de la série 1.
3. Dresse le tableau des fréquences cumulées (croissantes et décroissantes) de la série 1.

7.1.2 Série statistique à caractère quantitatif continu

Consigne 7.2

1. Dresse le tableau des effectifs et des fréquences de la série 2, en regroupant les modalités en des classes d'amplitudes égale à 5, la première classe étant $[50;55[$.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés (croissants et décroissants) de la série 2.
3. Dresse le tableau des fréquences cumulées (croissantes et décroissantes) de la série 2.

7.2 Représentations graphiques

Consigne 7.3

1. Représente le diagramme en bâtons des effectifs de la série 1.
2. Représente le diagramme en bâtons des effectifs cumulés de la série 1.
3. Représente le diagramme en bâtons des fréquences cumulées de la série 1.

Consigne 7.4

Représente l'histogramme de la série 2.

7.3 Paramètres de position de tendance centrale

7.3.1 Mode - Classe modale

Définition

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif.
Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, **la classe modale** est la classe de plus grand effectif.

Consigne 7.5

Détermine le mode de la série 1 et la classe modale de la série 2.

7.3.2 Moyenne

Définition

La moyenne d'une série statistique (d'effectif N) est le réel $\overline{x}$ tel que : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ avec n_i l'effectif associé à la valeur du caractère x_i.
Dans le cas d'une **série à caractère quantitatif continu** dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

On peut aussi calculer la moyenne avec les fréquences : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} f_i x_i$ avec f_i la fréquence associée à la valeur du caractère x_i.

Consigne 7.6

Détermine la moyenne des séries 1 et 2.

7.3.3 Médiane

Définition

On considère que les N données sont classées, et numérotées par ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_p$. Chaque valeur est répétée autant de fois que son effectif.
La médiane d'une série statistique est un réel noté M_e qui partage la série en deux sous-séries de même effectif :

1. Si N est impair, la médiane est la donnée de rang $\frac{N+1}{2}$ $\left(M_e = x_{\frac{N+1}{2}}\right)$.

2. Si N est pair, la médiane est la donnée de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ $\left(M_e = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)$.

Dans le cas d'une **série à caractère continu**, la médiane peut s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à 0,5 sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Consigne 7.7

Détermine les médianes des séries 1 et 2. *Pour la série 2, on utilisera la méthode d'interpolation linéaire.*

7.4 Paramètres de position non centrale

7.4.1 Quartiles

Définition

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 25% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Le deuxième quartile Q_2 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 50% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 75% des termes de la série aient une valeur qui lui soit inférieure ou égale.

Retenons

Dans le cas d'une série à **caractère discret** d'effectif total N, les quartiles s'obtiennent en ordonnant les valeurs dans l'ordre croissant puis :

1. Si N est multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang $\frac{3N}{4}$.
2. Si N n'est pas multiple de 4 alors Q_1 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{N}{4}$ et Q_3 est la valeur de rang immédiatement supérieur à $\frac{3N}{4}$.

Dans le cas d'une série à **caractère continu**, les quartiles peuvent s'obtenir à partir du polygone des fréquences cumulées croissantes où Q_1 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 25%, Q_2 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 50% et Q_3 est la valeur correspondant à la fréquence cumulée croissante égale 75%.

Consigne 7.8

Détermine les quartiles de la série 1.

7.5 Paramètres de dispersion

7.5.1 Étendue

Définition

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur du caractère et la plus petite.

Consigne 7.9

Détermine l'étendue des séries 1 et 2.

7.5.2 Écart interquartile

Définition

L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.
L'écart interquartile est le nombre $Q_3 - Q_1$. C'est la longueur de l'intervalle interquartile.

7.5.3 Variance - Écart-type

Définition

1. On appelle variance d'une série quelconque à caractère quantitatif discret le nombre :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

2. On appelle écart-type de cette série le nombre

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Propriété

On peut calculer la variance de la façon suivante :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \overline{x}^2$$

Consigne 7.10

Détermine la variance et l'écart-type de la série 1.

7.5.4 Écart moyen

Définition

L'écart moyen d'une série statistique à caractère quantitatif discret est la moyenne des distances à la moyenne.
Soit e_m l'écart-moyen d'une série statistique, on a :

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i|x_i - \overline{x}|$$

.

Consigne 7.11

Détermine l'écart moyen absolu de la série 1.

7.6 Polygone des effectifs et des fréquences

Définition

1. Le polygone des effectifs d'une série statistique à caractère quantitatif discret (x_i, n_i) est une ligne brisée que l'on obtient en joignant par des segments de droites les points successifs de coordonnées (x_i, n_i) où x_i est la modalité d'effectif n_i.
   Dans le cas d'une série statistique à caractère quantitatif continu, x_i désigne le centre des classes.
2. Le polygone des effectifs cumulés est celui obtenu en joignant par des segments de droites les points successifs de coordonnées (x_i, n_i) où x_i est la modalité d'effectif cumulé n_i (croissant ou décroissant) selon le cas.

Remarque

On définit de la même manière le polygone des fréquences et les polygones des fréquences cumulées.

Consigne 7.12

1. Construis le polygone des effectifs des séries 1 et 2.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés des séries 1 et 2.

Consigne 7.13

1. Construis le polygone des fréquences des séries 1 et 2.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées des séries 1 et 2.

7.7 Diagramme cumulatif des effectifs et des fréquences

Définition

(x_i, n_i) est une série statistique à caractère quantitatif.
Pour obtenir le diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants, il suffit de représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x_i) = N_i$, pour tout $x_i \in [x_i, x_{i+1}]$, x_i et x_{i+1} étant deux modalités successives et N_i l'effectif cumulé croissant de la modalité x_i.

Consigne 7.14

1. Construis le diagramme cumulatif des effectifs de la série 1.
2. Construis le diagramme cumulatif des fréquences de la série 1.

7.8 Détermination graphique des médianes et des quartiles

Consigne 7.15

En utilisant le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série 2, détermine graphiquement la médiane et les quartiles de cette série.

Exercices

01

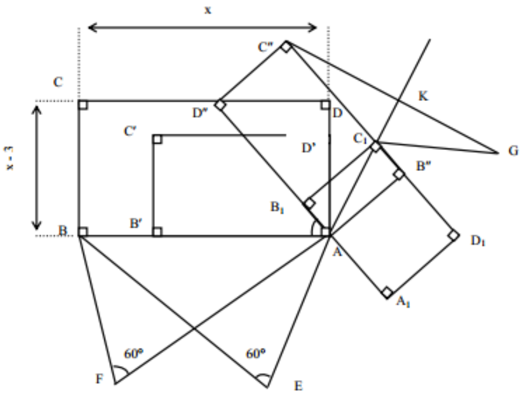
02

03

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer »
(Victor Hugo)

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ :
Texte :
Séro a terminé la classe de seconde C. Il est en vacances au village.
Pour faire face aux dépenses liées à la rentrée, il fabrique, en plusieurs exemplaires, avec des tiges fines de différentes couleurs, un objet d'art dont le plan est représenté par la figure ci-dessous. Les exemplaires ainsi produits seront vendus aux jeunes de sa commune pour décorer le salon de leurs cases.
Son jeune frère Sofiano ayant vu le plan voudrait connaître les principes qui en ont guidé la confection.



Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Vecteurs du plan

Activité 3.1

1.1 Notion de vecteur

Retenons

Tout couple (A, B) de point du plan représente le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

✓ **sa direction** : celle de la droite (AB)

✓ **son sens** : celui du parcours de A vers B

✓ **sa longueur** : celle du segment $[AB]$

Si le couple (A, B) est un représentant du vecteur noté $\vec{u}$ alors on notera $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

NB : On note un vecteur par une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{a}$, $\vec{u}$.

Retenons

Un vecteur a une infinité de représentant et l'ensemble des vecteurs du plan est appelé **plan vectoriel** noté $\mathcal{V}$.

Propriété

1. Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
2. $\vec{u}$ étant un vecteur et O un point donné du plan, il existe un point unique M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
3. $\vec{u}$ étant un vecteur et λ un nombre réel.
$\lambda\vec{u}$ $(\lambda \neq 0)$ est un vecteur qui a même direction que le vecteur $\vec{u}$.

   ✓ si $\lambda > 0$ alors $\lambda\vec{u}$ a même sens que $\vec{u}$.

- ✓ si $\lambda < 0$ alors $\lambda\vec{u}$ a le sens contraire de celui de $\vec{u}$.
- ✓ la longueur de $\lambda\vec{u}$ est : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$. Le symbole $\| \quad \|$ se lit norme.

4. $\vec{u}$ étant un vecteur et λ un nombre réel. $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$.

Consigne 1.1

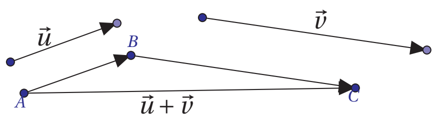
Construis le point B du plan tel que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$.

1.2 Opérations sur les vecteurs

1.2.1 Somme de vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. A, B, C les points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. On a : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels λ et α, on a :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $(\lambda + \alpha)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \alpha\vec{u}$
4. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
5. $\lambda(\alpha\vec{v}) = \lambda\alpha\vec{v} = \alpha(\lambda\vec{v})$

Consigne 1.2 *Exercice 3 CIAM page 43*

1.3 Combinaisons linéaires

Consigne 1.3

En considérant la figure de la situation de départ, détermine dans chacun des cas, les réels α et β s'ils existent.

1. $\overrightarrow{AC''} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AB_1} + \beta\overrightarrow{AD'}$

1.3.1 Définition

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des nombres réels est appelé **combinaison linéaire des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coefficients respectifs α et β.

Consigne 1.4

Soit ABC un triangle. Construis le point D du plan tel que $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

1.3.2 Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsque l'un d'eux est le vecteur nul ou lorsqu'ils ont la même direction.

NB : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

- ✓ si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.
- ✓ si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe des nombres réels α et β non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

- ✓ si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.
- ✓ si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

Consigne 1.5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tel que : $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$

Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires au vecteur $\vec{w}$.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **non colinéaires**

✓ si α et β sont des réels tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ alors $\alpha=\beta=0$.

Consigne 1.6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et λ un réel.
Détermine λ sachant que $(\lambda+2)\vec{u}+(\lambda^2-4)\vec{v}=\vec{0}$.

1.3.3 Points alignés

Définition

Soit A, B, C trois points du plan. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

1.3.4 Droites parallèles

Définition

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

1.4 Bases du plan vectoriel

1.4.1 Définition

Définition

On appelle base de l'ensemble $\mathcal{V}$, tout couple $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ de vecteurs non colinéaires.

Consigne 1.7

ABC est un triangle. Démontre que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$.

1.4.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Propriété

Soit $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels $(x;y)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
2. Le seul couple $(x;y)$ de nombres réels tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ est appelé coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$. On écrit $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$.

Consigne 1.8

On donne le triangle ABC et on désigne par A' le milieu de $[BC]$.
Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

Consigne 1.9

Représente dans le plan muni d'un repère le vecteur $\vec{u}(3;-2)$ d'origine $A(1;2)$.

1.5 Déterminant d'un couple de vecteurs relativement à une base

Définition

Soit $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.
On appelle **déterminant de** $\vec{u}$ **et de** $\vec{v}$ et on note $det\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ dans la base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ le nombre réel $xy'-x'y$. On a :

$$det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$$

Consigne 1.10

Dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$.

1. (a) Écris les vecteurs $\vec{w}=-2\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{t}=\vec{u}+2\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   (b) Déduis-en les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. Calcule $det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ et $det\left(\vec{w},\vec{t}\right)$.

Propriété

Soit $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$.
2. Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$.
3. Deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles** si et seulement si $det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$.
4. **Équation cartésienne d'une droite**
   Soit $A(x_0;y_0)$ un point du plan et $\vec{u}(a;b)$ un vecteur directeur d'une droite $(\mathcal{D})$.
   Si $A\in(\mathcal{D})$ alors le couple $(A,\vec{u})$ est un repère de $(\mathcal{D})$.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.

$M \in (\mathscr{D}) \Longleftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$

En effet,

$$det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

$$\Longleftrightarrow bx-ay+(ay_0-bx_0)=0$$

En posant $\alpha = ay_0-bx_0$, on a : $\underline{bx-ay+\alpha=0}$

Cette écriture est appelée **équation cartésienne de la droite** $(\mathscr{D})$.

Consigne 1.11

Dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}(5;\alpha)$.
Détermine α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Consigne 1.12

Dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$.

1. Démontre que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base.
2. Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

1.6 Caractérisation vectorielle

1.6.1 du centre de gravité

Retenons

Soit A, B et C un triangle et G le point de concours des trois médianes.
G est appelé le centre de gravité du triangle ABC, on a alors : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1.6.2 du milieu d'un segment

Retenons

Soit un point I milieu d'un segment $[AB]$.

$$I \text{ milieu de } [AB] \Longrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IB}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

1.6.3 du segment de droite

Retenons

Soit $[AB]$ un segment de droite.
$M \in [AB] \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0;1]$.

1.6.4 du demi-droite

Retenons

Soit $[AB)$ une demi-droite.
$M \in [AB) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in \mathbb{R}_+$.

Consigne 1.13 *CIAM Exercices 25, 26, 28, 35, 41 Page 43*

Exercices

01

02

03

2 Droites dans le plan

Activité 3.2

2.1 Représentation paramétrique d'une droite dans le plan muni d'un repère

Propriété

1. Pour tout point A et pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, il existe une droite et une seule passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Soit $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de $(\mathscr{D})$. Pour tout point M du plan on a :
$(M \in (\mathscr{D})) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires).

Consigne 2.1

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit (D) la droite de repère $(A, \vec{u})$ avec $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(a,b)$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

1. Traduis par une égalité vectorielle l'appartenance du point M à la droite (D).
2. En utilisant les coordonnées, trouve une relation pour x et y.

Propriété

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit a, b, x_0, y_0 des nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
L'ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) vérifient $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ est la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point $A(x_0, y_0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(a,b)$.

Définition

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b)$.
Le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ est appelé **une représentation paramétrique** ou **système d'équations paramétriques** de la droite $(\mathscr{D})$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Consigne 2.2

Soit $A(-4;3)$ et $B(2;5)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Détermine une représentation paramétrique de la droite (AB).

Consigne 2.3 *CIAM Exercice 14 Page 93*

2.2 Équation cartésienne d'une droite dans le plan muni d'un repère

Consigne 2.4 *démonstration de la propriété*

Propriété

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. soit $(\mathscr{D})$ une droite.
Il existe des nombres réels a, b et c tels que pour tout point $M(x,y)$ du plan, on ait :
$M \in (\mathscr{D}) \Longleftrightarrow ax + by + c = 0$.
2. soit a, b et c des nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
L'ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Définition

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan, $(\mathscr{D})$ est une droite du plan.
Toute équation du type $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$ est appelée **équation cartésienne de** $(\mathscr{D})$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Retenons

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan. Une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'obtient en considérant un point $M(x,y)$ et en annulant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.
$M \in \mathscr{D}(A, \vec{u}) \Longleftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0$

Consigne 2.5

Détermine une équation cartésienne de la droite (D) de repère $(A, \vec{u})$ sachant que $A\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ et $\vec{u}(1;2)$.

Consigne 2.6

Trouve un vecteur directeur et un point de la droite
$(D): 5x + 2y - 8 = 0$.

Consigne 2.7

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases}$
Détermine une équation cartésienne de (D).

Consigne 2.8

Soit (D) la droite d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$.
Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).

Consigne 2.9

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. On donne deux droites $(\mathscr{D}_1) : 2x + y - 1 = 0$; $(\mathscr{D}_2) : x - y + 2 = 0$ et $(\mathscr{D}_3) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

1. (a) Démontre que les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_3)$ sont sécantes.
   (b) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection.
2. (a) Démontre que les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes.
   (b) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection.

2.2.1 Vecteur normal

Définition *Vecteur normal*

1. On appelle **vecteur normal à une droite** $(\mathscr{D})$ tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à celle de $(\mathscr{D})$.
2. Soit $(\mathscr{D})$ un droite dont l'équation cartésienne dans un repère est $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ est $\vec{n}(a; b)$.

Propriété

1. Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ comme vecteurs normaux.
   $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}) \iff \vec{n} \perp \vec{n'}$.
2. Pour tout point A et pour tout vecteur non nul $\vec{n}$, il existe une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
3. Soit $(\mathscr{D})$ une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ et A un point de $(\mathscr{D})$. Pour tout point M du plan on a :
   $M \in (\mathscr{D}) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

2.3 Distance d'une point à une droite

Propriété

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormal du plan et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan, la distance de M_0 à $(\mathscr{D})$ est :
$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Consigne 2.10

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. On considère la droite $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

1. Détermine une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$.
2. Calcule la distance du point $A(-2, 2)$ à la droite $(\mathscr{D})$.

Consigne 2.11 *CIAM Exercice 39 Page 95*

Exercices

01

02

03

3 Homothétie

Activité 3.3

3.1 Définition

Définition

O est un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle **homothétie de centre O et de rapport k** noté $h(O,k)$ l'application du plan qui à tout point M associe le point M' défini par : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

1. Si M' est l'image de M par une homothétie, on dit que M' est **l'homothétique** de M.
2. Le centre d'une homothétie est sa propre image.

Consigne 3.1 *CIAM Exercices 1, 2 Page 113*

Consigne 3.2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construis les images des quatre sommets de ce parallélogramme par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

Remarque

Un point, son image par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

3.2 Les homothéties particulières

Propriété

1. L'homothétie de centre O et de rapport 1 est l'application identique du plan.
   L'application identique du plan est l'application du plan dans lui-même qui a tout point M du plan associe le point M. On la note $Id_{\mathscr{P}}$.
   $$Id_{\mathscr{P}} \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M \end{array}$$
   $h(0,1)$ est l'identité du plan.
2. Toute homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie de centre O.

3.3 Transformations du plan

3.3.1 Définition

Définition

Toute application f du plan dans lui-même pour laquelle tout point M' est l'image d'un unique point M est appelé **transformation du plan**.

Remarque

1. Homothétie, translation, symétries orthogonale et centrale sont des transformations du plan.
2. Par contre, les projections ne sont pas des transformations du plan.

3.3.2 Transformation réciproque d'une transformation

Définition

Soit f une transformation du plan. On appelle **transformation réciproque de** f, la transformation notée f^{-1} du plan qui a tout point M' associe un unique antécédent.

Propriété

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul et différent de 1. L'homothétie de centre O et de rapport k est une transformation du plan dont la transformation réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

$h(O,k)(M) = M'$ signifie $M = h\left(O, \dfrac{1}{k}\right)(M')$.

3.4 Point invariant

Définition

On appelle **point invariant**, tout point qui est égal à sa propre image par l'application considérée.

Propriété

Le seul point invariant par une homothétie de rapport différent de 1 est son centre.

Remarque

Lorsque le rapport est égal à 1, tout point du plan est invariant.

3.5 Propriété fondamentale

Propriété

$h(O, k)$ étant l'homothétie de centre O et de rapport k, M' et N' les homothétiques respectifs de deux points M et N par h, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

3.6 Homothétie et configuration du plan

Propriété

1. L'image par l'homothétie :
   - ✓ d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
   - ✓ d'une demi-droite est une demi-droite.
   - ✓ d'un segment de droite est un segment de droite.
2. L'homothétie conserve :
   - ✓ l'alignement des points
   - ✓ le milieu d'un segment
   - ✓ le parallélisme
   - ✓ l'orthogonalité
   - ✓ les angles inscrits (non orientés)

Propriété

L'homothétie de rapport k multiplie :

- ✓ les longueurs par $|k|$
- ✓ les aires par k^2
- ✓ les volumes par $|k^3|$

3.7 Constructions d'images

Consigne 3.3

.

Exercices

01

02

03

4 Symétrie orthogonale - symétrie centrale - translation

Activité 3.4

4.1 Utilisation de la symétrie orthogonale, de la symétrie centrale et de la translation dans les activités géométriques

4.1.1 Symétrie orthogonale

Consigne 4.1

$ABCD$ est un parallélogramme de centre I. A' et C' sont les symétriques respectifs des points A et C par rapport à (BD).

1. Fais une figure.
2. Démontre que $A'BC'D$ est un parallélogramme.
3. Démontre que $AA'CC'$ est un rectangle.

4.1.2 Symétrie centrale

Consigne 4.2

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $AB = 4acm (a > 0)$. E milieu de $[DC]$, F est le symétrique de A par rapport à E et G le symétrique de B par rapport à E.

1. Fais une figure.
2. Montre que la droite (AC) est parallèle à (FD).
3. Montre que la droite (BD) est perpendiculaire à (FD).
4. Quelle est la nature du triangle BDF?
5. Détermine l'image du carré $ABCD$ par la symétrie centrale de centre E puis calcule son aire.

4.1.3 Translation

Consigne 4.3

On considère un carré $ABCD$ inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O. On pose $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = E$.

1. Montre que C est milieu de $[DE]$.
2. Montre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.
3. Construis l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABED$?

Consigne 4.4

On considère un triangle rectangle ABC tel que $AB = 4cm$, $AC = 3cm$ et $BC = 5cm$ inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre I. On pose $t_{\overrightarrow{AI}}(C) = C'$ et $t_{\overrightarrow{AI}}(B) = B'$.

1. Détermine $t_{\overrightarrow{AI}}(A)$.
2. Montre que les droites $(B'I)$ et $(C'I)$ sont perpendiculaires.
3. Calcule les distances IC', IB' et $B'C'$.
4. Construis l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la translation $t_{\overrightarrow{AI}}$.
5. Détermine le rayon de $(\mathscr{C}')$.

4.2 Propriétés

Propriété 1

1. La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires est la symétrie centrale dont le centre est le point de concours des deux axes.
2. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.
3. La composée de deux symétries centrales de centres distincts est une translation.
   Étant donnés deux points distincts I et J du plan, si M et N sont des points du plan tels que
   $S_I[S_J(M)] = N$ alors $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{JI}$.

Propriété 2

Étant donnés deux points distincts I et J du plan, si M et N sont des points du plan tels que
$S_I[S_J(M)] = N$ alors $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{JI}$.

Propriété 3

La composée de deux translations est une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des deux translations.

Consigne 4.5 *Application*

Exercices

01

02

03

5 Angles inscrits - relations métriques dans un triangle

Activité 3.5

5.1 Sinus d'un angle

Consigne 5.1

ABC est un triangle quelconque. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. Fais une figure dans chacun des cas suivants :
   (a) l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu
   (b) l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus
2. Sachant que deux angles supplémentaires ont même sinus, exprime $\sin\widehat{BAC}$ dans les deux cas.
3. Que peut-on conclure?

Définition *Sinus d'un angle*

Consigne 5.2

ABC est un triangle tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. On désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et S l'aire de ce triangle. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1. Exprime S en fonction de AB et HC.
2. Démontre alors qu'on a les égalités suivantes :
   $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.
3. Déduis-en que $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$.

Propriété

ABC est un triangle tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. R est le rayon de son cercle circonscrit et S est son aire. Alors on a :

1. $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$
2. $S = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$
3. $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$
4. $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$
   (**Formule des sinus**)

Consigne 5.3

ABC est un triangle tel que $BC = 8cm$, $mes\widehat{B} = mes\widehat{C} = 50°$.

1. Calcule le périmètre du triangle ABC, son aire et le rayon de son cercle circonscrit.
2. Soit O le centre de ce cercle. Calcule $mes\widehat{BOC}$.

Consigne 5.4

ABC est un triangle tel que $BC = 5cm$, $mes\widehat{B} = 50°$ et $mes\widehat{C} = 75°$.
Calcule AB et AC.

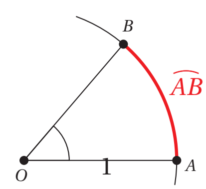
5.2 Radian

Définition

Le radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur un cercle un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.

Retenons

La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la notera $mes\widehat{AOB}$.



Conversion

Pour convertir des degrés en radians ou des radians en degrés, il suffit de savoir que :

$$\pi rad = 180°$$

On déduit immédiatement de cette égalité :
$1rad = \frac{\pi}{180°}degré$ et $1° = \frac{\pi}{180°}rad$

Consigne 5.5

1. Convertis en radian(s) : 20°, 40°, 120°, 180° et 270°.
2. Convertis en degrés : $\frac{\pi}{6}rad$, $\frac{2\pi}{5}rad$, $\frac{7\pi}{6}rad$ et $\frac{\pi}{12}rad$.

Longueur d'un arc de cercle

Dans un cercle de rayon r , la longueur l d'un arc intercepté par un angle au centre de mesure θrad, vérifie :

$$l = r\theta$$

Consigne 5.6

1. Calcule la longueur d'un arc de cercle de rayon 3 intercepté par un angle au centre mesurant $\frac{2\pi}{3} rad$.
2. Dans un cercle, un angle au centre de mesure $\frac{5\pi}{6} rad$ intercepte un arc de longueur 6.
   Détermine le rayon du cercle.
3. Dans un cercle de rayon 4, détermine la mesure en radian(s) puis en degrés de l'angle au centre interceptant un arc de longueur $\frac{3}{2}$.

.

Exercices

01

02

03

6 Angles orientés - trigonométrie

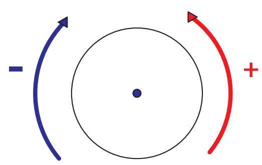
Activité 3.6

6.1 Angles orientés

6.1.1 Orientation du plan

Retenons

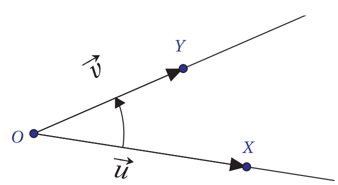
Sur un cercle donné, il existe deux sens de parcours. Orienter le plan, c'est choisir **un sens positif** ou **direct**, de parcours des cercles du plan. Par convention on choisit le sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme sens positif.
L'autre sens est dit **négatif** ou **rétrograde**.



6.1.2 Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls. Soit X et Y deux points du plan tels que $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$.



On appelle **angle orienté** $(\vec{u}, \vec{v})$, l'angle de sommet O et dont la demi-droite $[OX)$ est le côté origine et la demi-droite $[OY)$ est le côté extrémité. Cet angle est donc orienté de $[OX)$ vers $[OY)$.

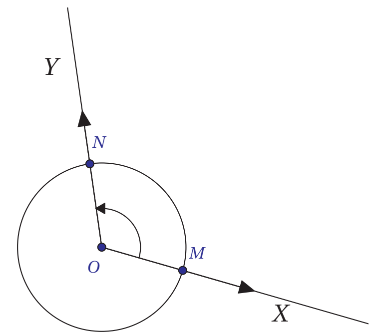
Consigne 6.1

ABC est un triangle équilatéral orienté dans le sens direct.
Donne la mesure de chacun des angles suivants : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

6.1.3 Mesure principale d'un angle orienté

Définition 1

$\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$ est un angle orienté, M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OX)$ et $[OY)$ avec un cercle de centre O.



La mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$, notée $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$, est définie par :

1. Si l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$ est nul alors
   $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right) = 0$
2. Si l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$ est plat alors
   $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right) = \pi$
3. Si l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right)$ n'est ni nul ni plat alors on a :
   - ✓ $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right) = mes(\widehat{XOY})$ lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens direct.
   - ✓ $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right) = -mes(\widehat{XOY})$ lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens indirect.

Définition 2

On appelle mesure principale d'un angle orienté α le nombre réel β défini par : $\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in]-\pi, \pi]$.

Remarque

Soit a un entier relatif non nul.

1. Si $|a|$ est pair alors la mesure principale d'un angle de mesure $a\pi$ est 0.
2. Si $|a|$ est impair alors la mesure principale d'un

angle de mesure $a\pi$ est π.

Consigne 6.2

Détermine la mesure principale de chacun des angles suivants : $-\frac{\pi}{3}$, 121π, $\frac{126\pi}{5}$ et $-\frac{141\pi}{4}$.

Définition

Deux angles orientés sont égaux si leurs mesures principales sont égales.

Consigne 6.3

Vérifie si les angles orientés de mesures $\frac{814\pi}{13}$ et $\frac{1945\pi}{13}$ sont égaux.

Propriété

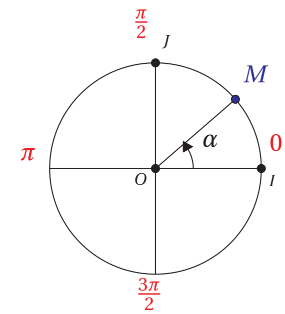
1. Pour toute demi-droite $[OX)$ du plan et pour tout nombre réel α élément de $]-\pi, \pi[$, il existe une unique demi-droite $[OY)$ telle que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}\right) = \alpha$.
2. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $mes\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = -mes\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)$.

6.2 Trigonométrie

6.2.1 Le cercle trigonométrique

Définition

le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. **Le cercle trigonométrique**, est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi le sens direct.
A tout point M du cercle trigonométrique, on associe le nombre réel α, mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}\right)$. Réciproquement, à tout nombre réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$ est associé un point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}\right)$. Le point M est appelé **image de** α sur le cercle.



Consigne 6.4

Placer sur le cercle trigonométrique les images des nombres suivants : $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Consigne 6.5

M est l'image sur le cercle trigonométrique de $\frac{1903\pi}{4}$.
Détermine la mesure principale de $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$ et place le point M.

6.2.2 Lignes trigonométriques

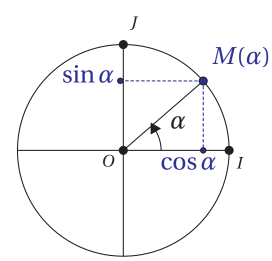
Sinus et cosinus d'un angle orienté

Définition

Soit α la mesure principale d'un angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ et M l'image de α sur le cercle trigonométrique. On a :

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \cos\alpha = x_M$$

$$\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \sin\alpha = y_M$$



Propriété

Pour tout réel x, on a :

1. $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $-1 \leq \cos x \leq 1$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Consigne 6.6

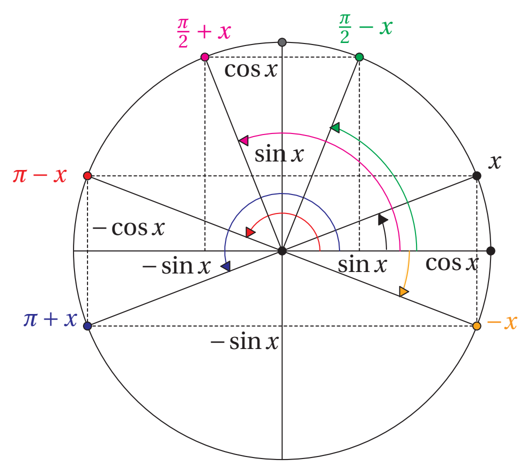
1. Calcule $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.
2. Démontre que $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$.

Angles associés

Propriété

Pour tout réel x, on a :

1. $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$
2. $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$
4. $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \end{cases}$
5. $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \end{cases}$



Consigne 6.7

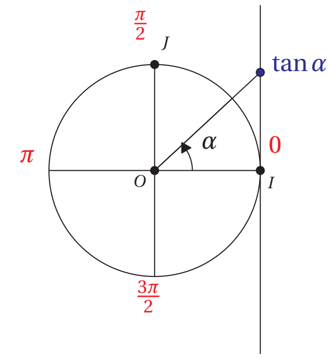
Démontre que : $\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10} = 0$

Tangente d'un angle orienté

Définition

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ non droit de mesure principale α ($\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{2}$). La tangente de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est définie par :

$$\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Consigne 6.8

Soit un nombre réel $x \in]-\pi, \pi]$ tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$.

Démontre que : $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Propriété

Pour tout réel $x \in]-\pi, \pi]$ tel que $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $x \neq -\dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Consigne 6.9 *Application*

Exercices

01

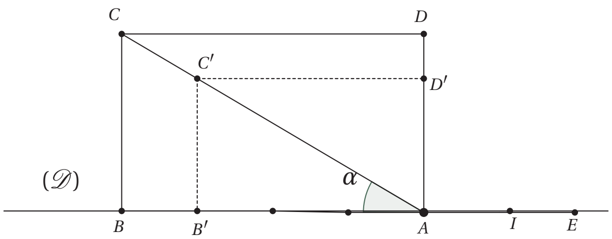
02

03

7 Produit scalaire

Activité 3.7

On considère le modèle de décoration de la situation de départ.



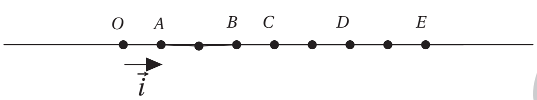
7.1 Mesure algébrique

Définition

Soit $(\mathscr{D})$ une droite orienté par l'un de ces vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$. A et B sont deux points de $(\mathscr{D})$. On appelle **mesure algébrique du couple** (A, B) **relativement à** $\vec{i}$, l'unique nombre réel noté $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$.

Consigne 7.1

On considère la droite graduée ci-dessous dirigée par le vecteur unitaire $\vec{i}$.



Calcule relativement à $\vec{i}$, les mesures algébriques suivantes : $\overline{OA}$, $\overline{CA}$, $\overline{CE}$ et $\overline{BA}$.

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite orienté par l'un de ces vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$. A, B et C sont des points de $(\mathscr{D})$, λ est un nombre réel.

1. $\left|\overline{AB}\right| = AB$
2. $\overline{AB} = -\overline{BA}$
3. Lorsque A et B sont distincts :
   - ✓ $\overline{AB} = AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens.
   - ✓ $\overline{AB} = -AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraire.
4. $\overline{AB} = 0 \Longleftrightarrow A$ et B sont confondues.
5. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overline{AC} = \lambda\overline{AB}$
6. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (**Relation de Chasles**)

7.2 Définition du produit scalaire par projection orthogonale

Consigne 7.2

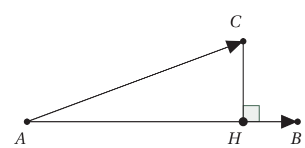
La droite $(\mathscr{D})$ est munie du repère (A, I).

1. Donne le projeté orthogonal de C sur $(\mathscr{D})$.
2. Calcule $\overline{AB'} \bullet \overline{AB}$.
   *Le produit $\overline{AB'} \bullet \overline{AB}$ où B est le projeté orthogonal de C sur $(\mathscr{D})$ est appelé **produit scalaire** du vecteur $\overrightarrow{AB'}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$.*

Définition

A, B et C sont trois points du plan. On appelle **produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$**, le nombre réel noté $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$, lu $\overrightarrow{AB}$ scalaire $\overrightarrow{AC}$ défini par :

1. Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$
2. Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



Remarque

1. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} > 0$;
2. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} < 0$;
3. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

Retenons

Plus généralement, si A, B, C et D sont quatre points du plan, tels que A et B sont distincts, alors on a :

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HH'}$$

où H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB).

Consigne 7.3

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. O est le milieu du segment $[BC]$.
Calcule $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{BC}$.

7.3 Propriétés du produit scalaire

Consigne 7.4

1. (a) Exprime AB en fonction de AC et $\cos\alpha$.
   (b) Sachant que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}$, déduis-en que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2. Justifie que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$
3. Justifie que pour tout nombre réel λ, on a : $\left(\lambda\overrightarrow{AB}\right) \bullet \overrightarrow{AC} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}\right)$

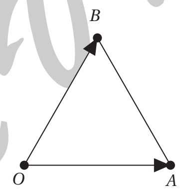
Propriété

1. A, B et C étant trois points du plan.
   - ✓ Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
   - ✓ Si $A = B$ ou si $A = C$ alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$.

   L'expression $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est appelée **expression trigonométrique du produit scalaire**.
2. Pour tout couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vecteurs, $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
3. Pour tout couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vecteurs et pour tout nombre réel α, $\left(\alpha\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = \alpha\left(\vec{v} \bullet \vec{u}\right)$.
4. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{v} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

Consigne 7.5

Sur la figure ci-contre, le triangle OAB est équilatéral et $OA = 2$.



Calcule $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$.

Définition *Carré scalaire*

On appelle carrée scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ le nombre réel noté $\vec{u} \bullet \vec{u} = \vec{u}^2$.

Consigne 7.6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. (a) Calcule $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$
   (b) Déduis-en que $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$.
2. Démontre que : $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Propriété

1. Pour tout couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vecteurs, on a : $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2$
2. Pour tout couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vecteurs, $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

Consigne 7.7 *Application*

7.4 Orthogonalité - base orthogonale - base orthonormée

Définition

1. **La norme d'un vecteur** $\vec{u}$ est le réel noté $\|\vec{u}\|$ défini par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$.
2. On appelle **vecteur unitaire** tout vecteur de norme égale à 1.
   Pour déterminer un vecteur unitaire $\vec{i}$ à partir d'un vecteur $\vec{u}$ non nul, on peut utiliser l'une des formules suivantes :
   $$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$
   ou
   $$\vec{i} = \frac{-\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

Définition

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est égal à zéro.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Remarque

Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Définition

1. Une base du plan est dite **orthogonale** lorsque les vecteurs de la base sont orthogonaux.
2. Une base du plan est dite **orthonormée** lorsqu'elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires.

Expression analytique du produit scalaire

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée, $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ deux vecteurs de cette base. On a :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$$

Notons donc que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Consigne 7.8

Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.
Calcule $\vec{u} \bullet \vec{v}$, $\vec{u} \bullet \vec{w}$ et $\vec{w} \bullet \vec{v}$.

7.5 Applications du produit scalaire au triangle

Consigne 7.9 *Théorème de la médiane*

ABC est un triangle quelconque et A' le milieu de $[BC]$.

1. (a) En utilisant la relation de Chasles, démontre que : $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2AA' + A'B^2 + A'C^2$.
   (b) Exprime $A'C^2$ et $A'B^2$ en fonction de BC.
   (c) Déduis-en que : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$
2. En remarquant que :
   $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right]$,
   démontre que : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$

Théorème de la médiane

ABC étant un triangle quelconque et A' le milieu de $[BC]$, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

et

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Consigne 7.10

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$.
Calcule AI où I est le milieu de $[BC]$.

Consigne 7.11 *Théorème de la médiane*

ABC est un triangle quelconque. On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.
Démontre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$.

Théorème d'AL-KASHI

ABC étant un triangle quelconque avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Consigne 7.12

ABC est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $mes\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$.
Calcule BC.

Exercices

01

02

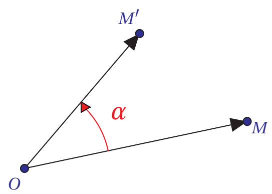
03

8 Rotation

Activité 3.8

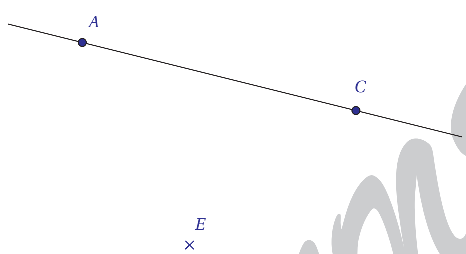
Définition

O est un point du plan orienté, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
La rotation de centre O et d'angle α est l'application du plan dans lui-même qui laisse O invariant et qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' défini par : $OM = OM'$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \alpha$. On pourra noter $r(O, \alpha)$.



Consigne 8.1

Construis l'image de chacun des points A et C par la rotation de centre E et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.



Remarque

Soit $r(O, \alpha)$ la rotation de centre O et de rayon r.

1. Si $\alpha = 0$ alors $r(O, \alpha)$ est l'identité du plan.
2. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ alors $r(O, \alpha)$ est appelée un quart de tour direct.
3. Si $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ alors $r(O, \alpha)$ est appelée un quart de tour indirect.
4. Si $\alpha = \pi$ alors $r(O, \alpha)$ est appelée la symétrie centrale de centre O ou demi-tour de centre O.
5. L'image du point O par une rotation de centre O est le point O lui-même. On dit que le point O est **invariant**.

Consigne 8.2

(D) et (D') sont deux droites sécantes en O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $mes(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\pi}{3}$. Soit M, M_1 et M_2 des points du plan tels que : $S_D(M) = M_1$ et $S_{D'}(M_1) = M_2$.

1. Fais une figure.
2. Démontre que $OM = OM_2$ et vérifie que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}}\right) = mes\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.
3. Déduis-en que M_2 est l'image de M par une transformation du plan à préciser.

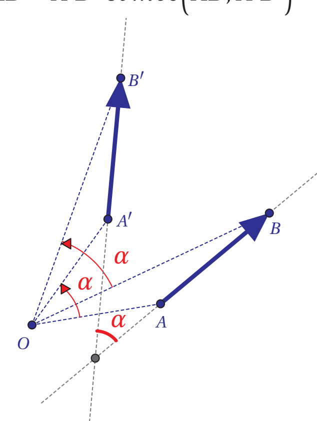
Propriété

1. $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ étant deux droites sécantes en O, $S_{\mathscr{D}}$ et $S_{\mathscr{D}'}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, l'application $S_{\mathscr{D}'} \circ S_{\mathscr{D}}$ est une rotation de centre O.
2. r étant une rotation de centre O, on peut trouver deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sécantes en O telles que la rotation r soit l'application $S_{\mathscr{D}'} \circ S_{\mathscr{D}}$.

Consigne 8.3 *Application*

Propriété

Soit $r(O, \alpha)$ la rotation de centre O et d'angle α, A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B', on a : $AB = A'B'$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$



Consigne 8.4 *Application*

Propriété

L'image par une rotation :

1. d'une droite est une droite ;
2. d'une demi-droite est une demi-droite ;
3. d'un segment de droite est un segment de droite de

même mesure;

4. d'un cercle est un cercle de même rayon et de centre le transformé du centre.

Consigne 8.5 *Application*

Propriété

La rotation conserve :

1. l'alignement des points;
2. le milieu d'un segment;
3. le parallélisme;
4. l'orthogonalité;
5. les angles orientés;
6. les distances;
7. les aires.

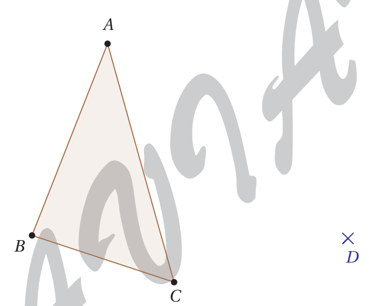
Remarque

La rotation conserve aussi les angles géométriques (angles non orientés).

Consigne 8.6 *Application*

Consigne 8.7

1. Construis l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.



2.

.

Exercices

01

02

03

9 Cercle dans le plan

Activité 3.9

9.1 Équation cartésienne d'un cercle dans le plan muni d'un repère orthonormé

Consigne 9.1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $A(x_0, y_0)$ et rayon $r(r > 0)$.

1. Écris une égalité traduisant l'appartenance d'un point $M(x, y)$ au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Déduis alors une relation liant x, y, x_0, y_0 et r.
   La relation ainsi établie est appelée équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.

Équation cartésienne d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
$I(a, b)$ est un point du plan. $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre I et de rayon $r(r > 0)$.
Une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est :

$$(\mathscr{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Consigne 9.2

On donne dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points $A(-1;4)$ et $B(3;1)$.
Détermine une équation cartésienne du cercle de centre A et de diamètre $[AB]$.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. L'ensemble des points M du plan tel que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ avec a, b et r sont des nombres réels et $r > 0$, est le cercle de centre de coordonnées (a, b) et de rayon r.
2. L'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec a, b et c étant des nombres réels est soit **vide**, soit **un singleton**, soit **un cercle**.

Consigne 9.3

On donne dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points $A(-1;2)$ et $B(3;1)$.

1. Détermine l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant :
   (a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$
   (b) $x^2 + y^2 - 4y + 6x + 15 = 0$
   (c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y + 5 = 0$
2. Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 2$.

9.2 Positions relatives de droites et de cercles

Consigne 9.4

(D) est une droite du plan et (C) un cercle de centre I et de rayon r. Doit $d = d(I, (D))$.

1. Construis dans chacun des cas suivants la droite (D) et le cercle (C) :
   (a) $d < r$
   (b) $d = r$
   (c) $d > r$
2. Déduis-en la position relative de (D) et (C) dans chaque cas.

Propriété

I étant un point du plan, $(\mathscr{C})$ le cercle de centre I et de rayon R, $(\mathscr{D})$ une droite et d la distance de I à $(\mathscr{D})$.

1. Si $d < R$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ se coupent en **deux points**.
2. Si $d = R$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ ont **un point commun et un seul**.
3. Si $d > R$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ n'ont **aucun point commun**.

Consigne 9.5

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne $A(3;1)$, $B(-1;-3)$ et $C(1;-1)$. Soit la droite (D_1) de repère $(C, \vec{u})$, la droite $(D_2) : 2x + y - 5 = 0$ et la droite $(D_3) : 5x - y + 11 = 0$. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Étudie la position relative de : (D_1) et $(\mathscr{C})$, (D_2) et $(\mathscr{C})$, (D_3) et $(\mathscr{C})$.

Exercices

01

02

03

10 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Activité 3.10

10.1 Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues

Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' six réels. Le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ est appelé système d'équations du premier degré à deux inconnues.

Méthode de résolution à l'aide du déterminant : Méthode de CRAMER

Soit le système de équations du premier degré à deux inconnues x et y.

$$\begin{cases} ax+by=c & (E_1) \\ a'x+b'y=c' & (E_2) \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.
Pour résoudre ce système, on calcule :

Le déterminant principal : $Dét = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Le déterminant principal en x : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

Le déterminant principal : $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

1. Si $Dét \neq$ alors les droites (E_1) et (E_2) sont sécantes en un point $I(x, y)$. Le système admet un couple unique (x, y) de solution tel que :
   $x = \dfrac{D_x}{Dét}$ et $y = \dfrac{D_y}{Dét}$
   L'ensemble solution S est : $S = \{(x, y)\}$
2. Si $\begin{cases} Dét = 0 \\ \text{et} \\ D_x \neq 0 \quad \text{ou} \quad D_y \neq 0 \end{cases}$ alors alors les droites (E_1) et (E_2) sont parallèles. Le système n'admet pas de solution.
   L'ensemble solution S est : $S = \phi$
3. Si $\begin{cases} Dét = 0 \\ \text{et} \\ D_x = 0 \quad ; \quad D_y = 0 \end{cases}$ alors alors les droites (E_1) et (E_2) sont confondues. Le système admet une infinité de solution.
   L'ensemble solution S est : $S = \{(x; \alpha x + \beta), x \in \mathbb{R}$ ou $S = \{(\alpha y + \beta; y), y \in \mathbb{R}$

Consigne 10.1

1. Résous chacun des systèmes suivants par la méthode du déterminant :
   $(S_1) : \begin{cases} 2x-5y=11 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} 2x-3y=8 \\ -4x+6y=-1 \end{cases}$
   $(S_3) : \begin{cases} x-2y=2 \\ 4x-8y=8 \end{cases}$
2. Résous et discute suivant les valeurs du paramètre m, le système suivant : $\begin{cases} x-3y=m \\ mx+6y=1 \end{cases}$

Consigne 10.2

Résous chacun des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-7y=5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} 5x^2+4y^2=21 \\ 4x^2+y^2=8 \end{cases}$

10.2 Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Consigne 10.3

Résous graphiquement l'inéquation : $2x+3y \leq 4$

Consigne 10.4

Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$(I_1) : \begin{cases} x-2y+2<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$ $\quad (I_2) : \begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ 2x+2y+3 \geq 0 \end{cases}$

10.3 Programmation linéaire

Consigne 10.5

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 € de matière première et 125 € de main-d'oeuvre.La réalisation d'un objet B demande 70 € de matière première et 75 € de main-d'oeuvre.Les profits réalisés sont de 54 € par objet A et de 45 € par objet B. On note x le nombre d'objets A fabriqués et y le nombre d'objets B fabriqués en une journée.La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 €. La dépense journalière en main-d'oeuvre ne doit pas dépasser 1250 €.

1. Écris un système d'inéquations traduisant les contraintes du problème.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm). Représente graphiquement l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient les contraintes.

3. Exprime le bénéfice journalier en fonction de x et de y.
4. Trace la droite correspondant à un bénéfice de 540 €.
5. Trace la droite correspondant au bénéfice maximum.
6. Détermine la production d'objets A et B qui assurerait ce bénéfice maximum. On précisera cette production journalière. En déduire le montant du bénéfice.

Remarque

Soit B le bénéfice réalisé après une vente.
Soit $B = ax + by$.
On a : $y = \frac{B}{b} - \frac{a}{b}x$
Soit $(\Delta_B) : y = \frac{B}{b} - \frac{a}{b}x$
On pose $B = 0$
$(\Delta_0) : y = -\frac{a}{b}x$
Pour obtenir le bénéfice maximal, on trace dans un repère orthonormé la droite $(\Delta_0) : y = -\frac{a}{b}x$. On cherche la parallèle à cette droite de manière à avoir l'ordonnée à l'origine maximale. De cette ordonnée, on détermine les coordonnées du point permettant d'obtenir le bénéfice maximal.

.

Exercices

01

02

03