GÉOMÉTRIE

1

Vecteurs

Connaissances du collège nécessaires à ce chapitre

- Connaître les propriétés du parallélogramme
- Lire les coordonnées d'un point
- Additionner et soustraire des nombres relatifs
- Reconnaître une situation de proportionnalité

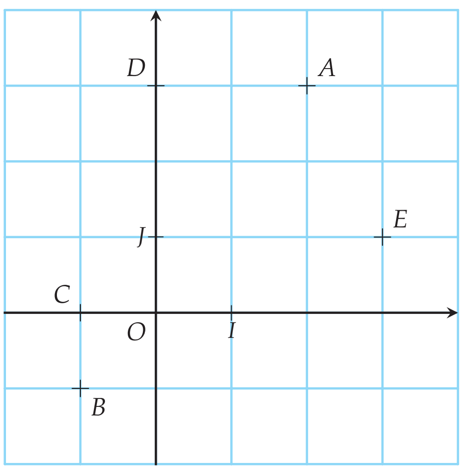
Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Lire les coordonnées des points suivants.

1) A **3)** C **5)** O **7)** J

2) B **4)** D **6)** I



2 Calculer mentalement.

1) $3-5+6-(-7)$

2) $\dfrac{-4+3}{-4-(-5)}$

3) $3-3\times(-2)+2$

4) $\dfrac{5+(-3-2)}{-3-(-4)}$

3 Dans chaque cas, peut-on affirmer que $ABCD$ est un parallélogramme ?

1) $AB=CD$

2) $AB=CD$ et $AD=BC$

3) $AB=CD$ et $(AB)//(CD)$

4) $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu

4 Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

-2	3
3	$-4,5$

$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

$\sqrt{2}$	2
1	$\sqrt{2}$

-6	3
1	$0,5$

Voir solutions p. 29

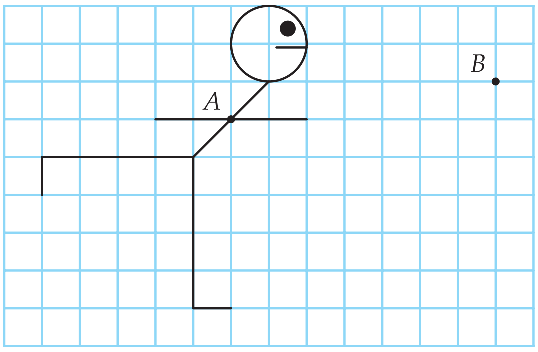
Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Patinage mathématique

L'entraîneur (un brin facétieux) de Ryan Gougère (troisième au championnat de troisième district inter-cantonal de patinage artistique) lui demande de travailler un mouvement.

Il le lui décrit de la façon suivante :

- La partie de ton corps, située en A doit finir en B.
- Tout point C de ton corps doit finir en un point D tel que les segments $[AD]$ et $[CB]$ aient le même milieu.

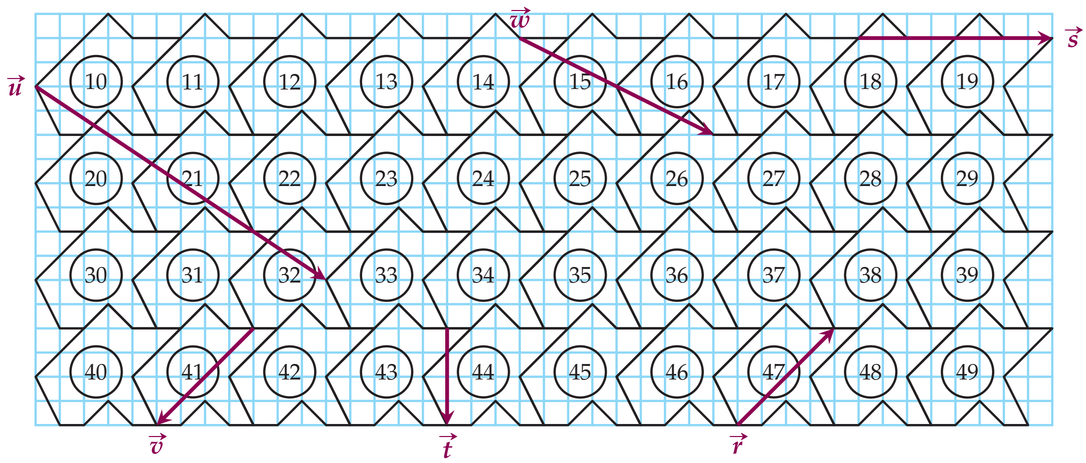


1) Reproduire la figure puis construire Ryan Gougère en position après le mouvement.

2) Quel est ce mouvement mystérieux ?
N'y aurait-il pas une manière plus simple de décrire l'image du point C ?

ACTIVITÉ 2 Zellige

Cette activité consiste à étudier l'enchaînement de deux translations sur un damier de carreaux Zellige, un carrelage décoratif originaire de l'Antiquité Méditerranéenne et du Moyen Orient.



1) Enchaînement 1

a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{u}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$?

c) Émettre une conjecture sur la nature de la transformation correspondant à l'enchaînement de ces deux translations.

> On notera $\vec{u} + \vec{v}$ les caractéristiques de cette nouvelle transformation.

2) Enchaînement 2

a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{s}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{t}$?

c) Émettre une conjecture sur $\vec{s} + \vec{t}$.

3) Enchaînement 3

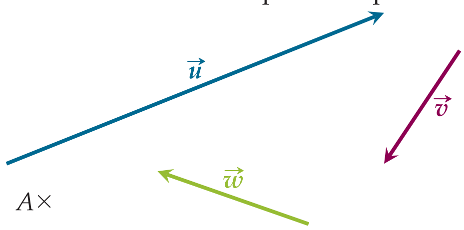
a) Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{v}$?

b) Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{r}$?

c) Émettre une conjecture sur $\vec{v} + \vec{r}$.

ACTIVITÉ 3 Sans carreaux

Tracer trois vecteurs et placer un point A comme sur la figure ci-dessous.

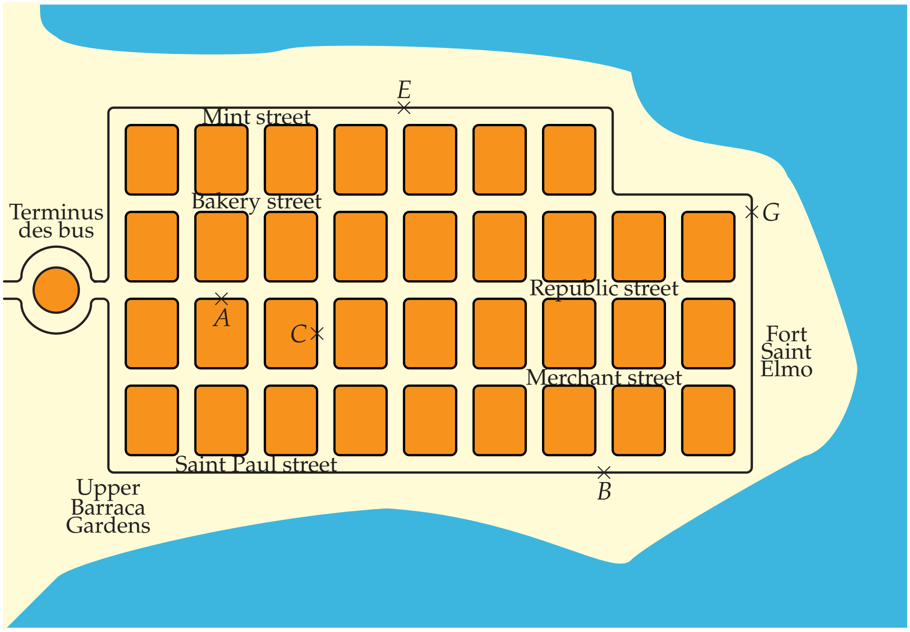


1) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{v}$.
2) Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

DÉBAT 4 La Valette

L'île de Malte, de par sa position stratégique dans la mer Méditerranée, a fait l'objet de grandes convoitises et invasions avant d'obtenir son indépendance en 1964.
Théotime a été fasciné par ce mélange de cultures dès sa première visite de l'île et conseille le voyage à tous ses amis. Il se fait un plaisir de fournir à ceux qui le désirent le plan ci-dessous de La Valette, capitale de l'île. Il y a marqué d'une croix quelques sites à visiter :

- A : Musée Archéologique
- C : Cathédrale Saint John
- G : Musée de la guerre
- B : Lower Barraca Gardens
- E : Église carmélite



Naïm veut visiter le musée d'archéologie, la cathédrale Saint John, Lower Baccara Gardens, le musée de la Guerre, l'église Carmélite dans cet ordre.
Naïm arrive à la Valette, au terminus des bus, avec le plan de Théotime et a la désagréable surprise de constater que le gouvernement maltais a remplacé tous les noms de rues en anglais par des noms maltais. Il n'arrive plus à se repérer.

1) Proposer une méthode pour repérer les sites sélectionnés par Naïm.
2) Proposer une méthode pour définir les déplacements entre chacun des sites.

Activités d'approche

ACTIVITÉ 5 Coordonnées

Partie 1 : coordonnées d'un vecteur

1) Construire un repère $(O; I, J)$. On notera $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$.

2) Placer dans ce repère les points M, P, R tels que :

a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{\imath}$ **b)** $\overrightarrow{OP} = 3\vec{\jmath}$ **c)** $\overrightarrow{OR} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

3) Quelles semblent être les relations entre les égalités vectorielles et les coordonnées des points ?

4) Placer dans le repère le point N de coordonnées $(-5; 1)$.

5) Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{ON}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

6) On considère un point quelconque E de coordonnées $(x_E; y_E)$.
Donner une égalité vectorielle liant $\overrightarrow{OE}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

> Les coefficients obtenus dans la décomposition du vecteur $\overrightarrow{OE}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelés coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OE}$.

Partie 2 : coordonnées de deux vecteurs

Compléter la figure de la partie **1** .

1) Placer le point S tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NS}$. Lire les coordonnées du point S.

2) Conjecturer une relation liant les coordonnées des points M, N, S.

3) Conjecturer une relation liant les coordonnées de deux vecteurs égaux.

ACTIVITÉ 6 Opérations

Partie 1 : coordonnées d'une somme

1) Dans un repère $(O; I, J)$, placer les points suivants.

- $A(1; 5)$ • $B(-4; 2)$ • $C(-2; -1)$ • $D(1; -2)$ • $E(4; 2)$

2) Construire les points R, S et T tels que :

a) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$ **c)** $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

3) Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AR}$ **b)** $\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{AS}$ **e)** $\overrightarrow{ED}$ **f)** $\overrightarrow{DB}$ **g)** $\overrightarrow{CT}$ **h)** $\overrightarrow{BC}$ **i)** $\overrightarrow{ED}$

4) Quelles relations lient les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Partie 2 : vecteurs colinéaires

On considère un repère $(O; I, J)$.

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\vec{w} = 2\vec{u}$ **b)** $\vec{t} = -3\vec{v}$ **c)** $\vec{z} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

2) Un cas simple et pratique

a) Placer un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Que peut-on dire de ces coordonnées ?

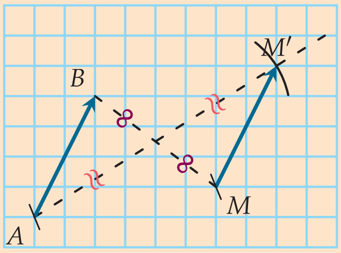
3) Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires ?

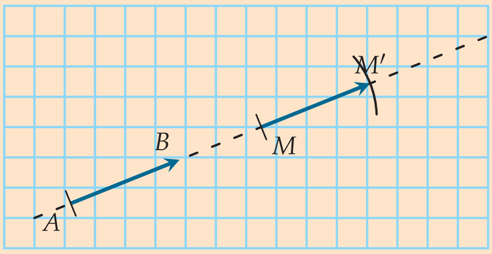
- $\vec{a}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ • $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ • $\vec{c}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ • $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ • $\vec{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Translations - Vecteurs associés

DÉFINITION : Translation

On considère deux points A et B du plan.
On appelle **translation qui transforme A en B** la transformation qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.





VOCABULAIRE :

- Le point M' est appelé **image** du point M.
- On dit également que M est le **translaté** de M'.

REMARQUE : Une **transformation** sert à **modéliser** mathématiquement un mouvement.

- La **symétrie centrale** est la transformation qui modélise le demi-tour.
- La **translation** est la transformation qui modélise le glissement rectiligne. Pour la définir, on indique la direction, le sens et la longueur du mouvement.

PROPRIÉTÉ

On considère quatre points A, B, C et D.
Dire que la translation qui transforme A en B transforme C en D
équivaut à dire que $ABDC$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).

PREUVE C'est la conséquence de la propriété : « *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu* ».

DÉFINITION : Vecteurs associés

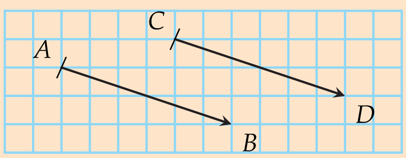
À chaque translation est associé un **vecteur**.
Pour A et B deux points, le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B.
La **notation** « vecteur $\overrightarrow{AB}$ » regroupe les trois informations la définissant :
la direction (celle de la droite (AB)), le sens (de A vers B) et la longueur AB.
A est l'**origine** du vecteur et B son **extrémité**.

DÉFINITION

Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.

Deux vecteurs égaux ont

- même direction ;
- même sens ;
- même longueur.



Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

MÉTHODE 1 **Construire un vecteur**

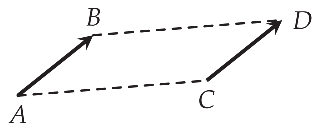
► Ex. 15 p. 12

Exercice d'application

Placer trois points A, B et C non alignés.
Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Correction

On construit le parallélogramme $ABDC$.



Remarque : Une translation peut être définie par un point quelconque et son translaté.
Il existe donc une **infinité** de vecteurs associés à une translation. Ils sont tous égaux.
Le vecteur choisi pour définir la translation est un **représentant** de tous ces vecteurs.
La translation **ne dépend pas** du représentant choisi pour la définir. On le note souvent $\vec{u}$.

DÉFINITION : Vecteur nul

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point quelconque en lui-même est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Ainsi, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots = \vec{0}$

DÉFINITION : Vecteur opposé

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ de la translation qui transforme B en A est appelé **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$.

Notation :

- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a l'égalité $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- La notation $\overleftarrow{AB}$ n'existe pas.

Remarque :
Deux vecteurs **opposés** ont même direction, même longueur mais sont de sens contraires.

2. Opérations sur les vecteurs

A. Additions

PROPRIÉTÉ : Enchaînement de translations

L'enchaînement de deux translations est également une translation.

PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles

Soit A, B, C trois points.
L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

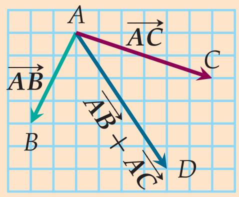
Remarque : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. Alors :
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ : Propriété du parallélogramme

Soit A, B, C, D quatre points.
Dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



PREUVE

On suppose que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
On utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
On ajoute $\overrightarrow{CA}$ aux deux membres de l'égalité : $\underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}$.
On utilise à nouveau la relation de Chasles avec $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
Donc, la relation de départ est équivalente à : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

MÉTHODE 2 Construire la somme de deux vecteurs

► Ex. 21 p. 13

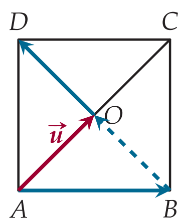
On remplace l'un des deux vecteurs par un représentant :

- soit de même origine afin d'utiliser la règle du parallélogramme ;
- soit d'origine l'extrémité de l'autre afin d'utiliser la relation de Chasles.

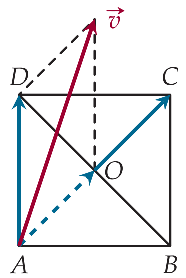
Exercice d'application

1) Construire un carré $ABCD$ de centre O.
2) Construire les vecteurs
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ et
$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$

Correction



Avec la relation de Chasles



Avec la règle du parallélogramme

REMARQUE : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment $[BC]$.

B. Soustraction

DÉFINITION

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Exemple

Soit trois points A, B et C non alignés.
Donner un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Correction

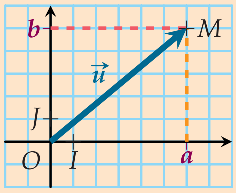
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ en utilisant la relation de Chasles.

Cours - Méthodes

3. Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.
On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

PREUVE Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

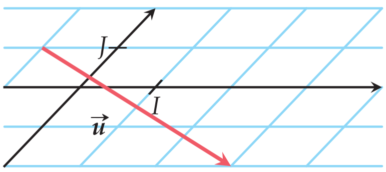
$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\[2mm] \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

MÉTHODE 3 Lire les coordonnées d'un vecteur

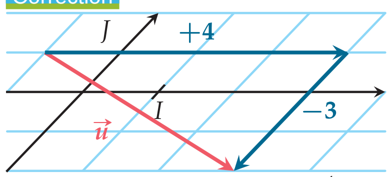
► Ex. 38 p. 15

Exercice d'application

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.



Correction



Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

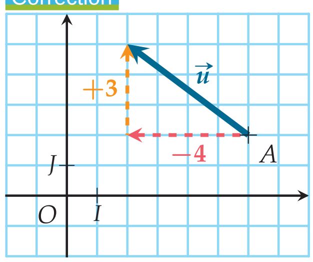
MÉTHODE 4 Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

► Ex. 42 p. 15

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6; 2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction



MÉTHODE 5 Repérer un point défini par une égalité vectorielle

► Ex. 44 p. 15

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on a les points $A(-2;3)$, $B(4;-1)$ et $C(5;3)$.
Calculer les coordonnées
1) du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -1-3 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) On cherche $(x_D; y_D)$, les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Or, « *si deux vecteurs sont égaux alors ils ont mêmes coordonnées* ».
Donc le couple $(x_D; y_D)$ est la solution du système :
$$\begin{cases} x_D - x_C = x_B - x_A \\ y_D - y_C = y_B - y_A \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_D - 5 = 6 \\ y_D - 3 = -4 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_D = 6+5 = 11 \\ y_D = -4+3 = -1 \end{cases}$$
Les coordonnées du point D sont $(11; -1)$.

PROPRIÉTÉ : Somme de deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 6 Repérer un point défini par une somme vectorielle

► Ex. 50 p. 16

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(5;3)$ et $D(-2;-1)$.
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

Correction

On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :
$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_E - 2 = (-2-2) + (4-5) \\ y_E - 3 = (-1-3) + (-1-3) \end{cases}$$
$$\text{soit} \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_E = -5+2 = -3 \\ y_E = -8+3 = -5 \end{cases}$$
Les coordonnées du point E sont $(-3; -5)$.

4. Multiplication par un réel

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et λ un réel. La **multiplication de $\vec{u}$ par λ** est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

MÉTHODE 7 Repérer le produit d'un vecteur par un réel

► Ex. 61 p. 17

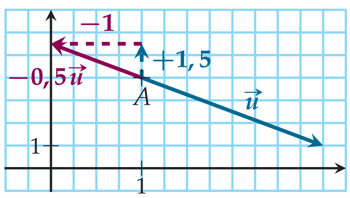
Exercice d'application

Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1;4)$ du vecteur $-0{,}5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $-0{,}5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0{,}5 \times 2 \\ -0{,}5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.



Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et λ un réel tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

- si $\lambda > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens et $AB = \lambda CD$.
- si $\lambda < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires et $AB = -\lambda CD$.

REMARQUE : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de λ.

5. Colinéarité

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**
si et seulement si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles.

REMARQUE : Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

MÉTHODE 8 Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

► Ex. 74 p. 18

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel λ non nul tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$;

possibilité 2 vérifier que les produits en croix, xy' et $x'y$, sont égaux.

Exercice d'application

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.

2) $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Correction

1) $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2) $-5 \times (-7) = 35$ et $3 \times 12 = 36$.
Les produits en croix ne sont pas égaux.
Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

PROPRIÉTÉ

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

$A(1; 2)$; $B(3; 1)$ et $C(5; 3)$ sont-ils alignés ?

Correction

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis les produits en croix : $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (3-1)(3-2) = 2 \times 1 = 2$ et ainsi : $(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (1-2)(5-1) = -1 \times 4 = -4$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Donc A, B, C ne sont pas alignés.

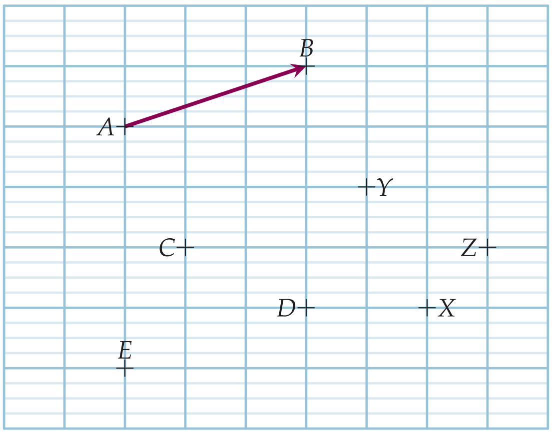
Activités mentales

1 À partir de la figure ci-dessous,

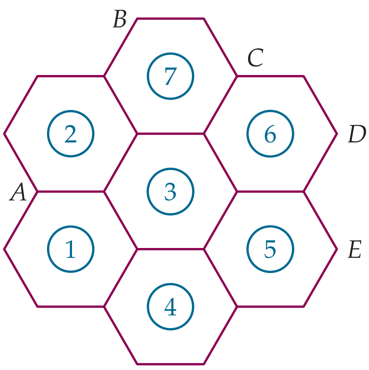
1) donner les images des points C, D, E dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

2) citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$;

3) citer les trois parallélogrammes définis par les trois égalités vectorielles du **2**.



2 La figure ci-dessous représente sept hexagones réguliers et numérotés.



Déterminer l'image :

1) de l'hexagone 1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;

2) de l'hexagone 4 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

3) de l'hexagone 7 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$.

3 Compléter avec les lettres qui conviennent.

1) $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots \quad \dots}$ **3)** $\overrightarrow{\dots E} = \overrightarrow{A \dots} + \overrightarrow{K \dots}$

2) $\overrightarrow{A \dots} = \overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{\dots B}$ **4)** $\overrightarrow{O \dots} = \overrightarrow{\dots \quad \dots} + \overrightarrow{\dots M}$

4 Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour :

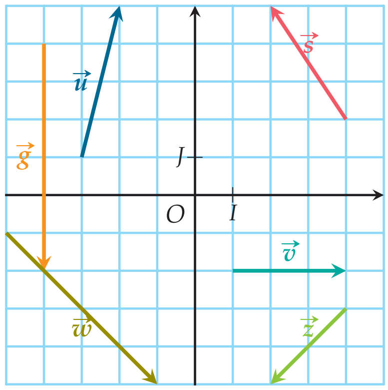
1) $A(2;5)$ et $B(6;7)$;

2) $A(-1;2)$ et $B(-2;-3)$.

5 Lire les coordonnées des vecteurs.

1) $\vec{u}$ **3)** $\vec{w}$ **5)** $\vec{z}$

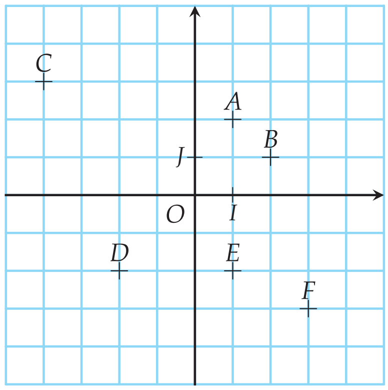
2) $\vec{v}$ **4)** $\vec{s}$ **6)** $\vec{g}$



6 Lire les coordonnées des points et des vecteurs.

1) A **3)** $\overrightarrow{OC}$ **5)** $\overrightarrow{FC}$

2) B **4)** $\overrightarrow{AE}$ **6)** $\overrightarrow{DO}$



7 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point $A(5;2)$.

Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

8 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point $A(1;-2)$.

Calculer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{CA} = \vec{v}$.

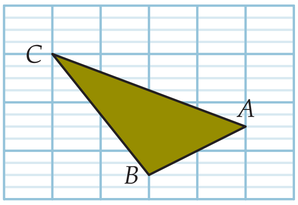
9 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $K(-2;-3)$, $L(3;-4)$ et $M(-1;5)$.

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$?

S'entraîner

Translation et vecteurs associés

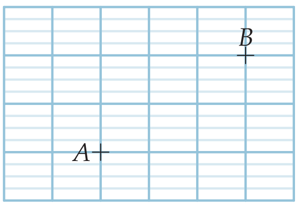
10 Reproduire la figure puis construire le translaté du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



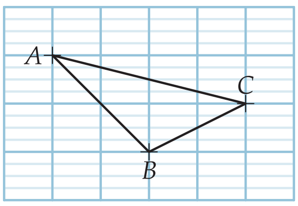
11 Construire un carré $ABCD$ de côté 5 cm et de centre O. Construire l'image de ce carré :

1) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
3) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

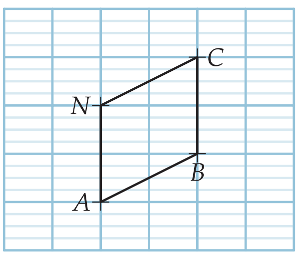
12 Reproduire la figure ci-dessous et construire deux représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



13 Reproduire la figure ci-dessous et construire deux représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



14 Reproduire la figure ci-dessous et construire trois représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



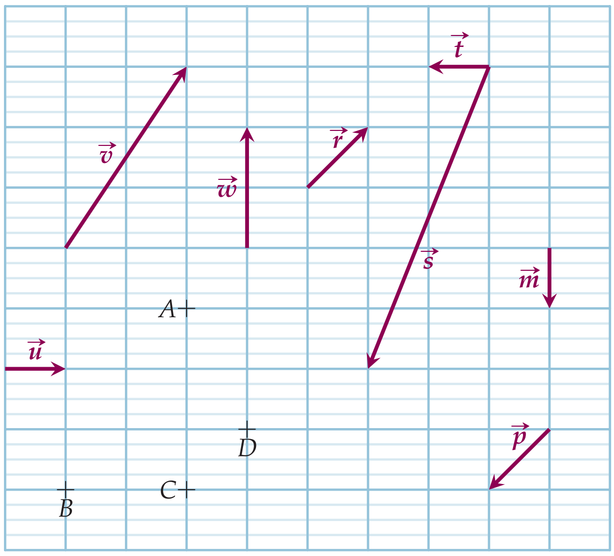
15 ► MÉTHODE 1 p. 6

Construire un triangle ABC rectangle en A.
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

16 Construire un losange $ABCD$.
Construire le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$.

17 À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

1) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;
3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire ;
4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.



18 Placer deux points A et B et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Construire un vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.
2) Construire un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.
3) Construire un vecteur de même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$.

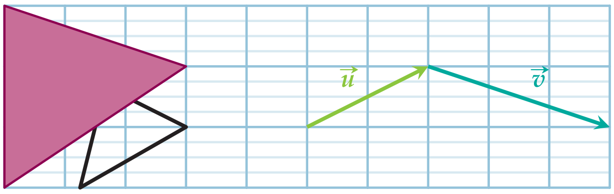
19 Avec la figure de l'exercice **17** :

1) Placer les points E, F, G et H, images respectives du point A par les translations de vecteurs suivants.
   a) $\vec{w}$ b) $\vec{v}$ c) $\vec{p}$ d) $\vec{m}$
2) Placer les points I, J, K et L, images respectives du point B par les translations de vecteurs suivants.
   a) $\vec{r}$ b) $\vec{u}$ c) $\vec{w}$ d) $\vec{m}$
3) En utilisant les lettres de la figure,
   a) citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$;
   b) citer deux vecteurs opposés à $\overrightarrow{AB}$.

Opérations sur les vecteurs

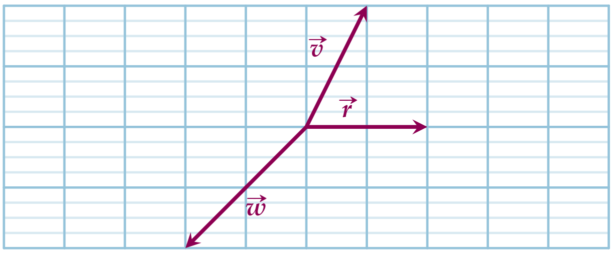
20 Un deltaplane se déplace suivant la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$.

1) Reproduire la figure ci-dessous.
2) Construire l'image du nouveau deltaplane dans sa position finale.



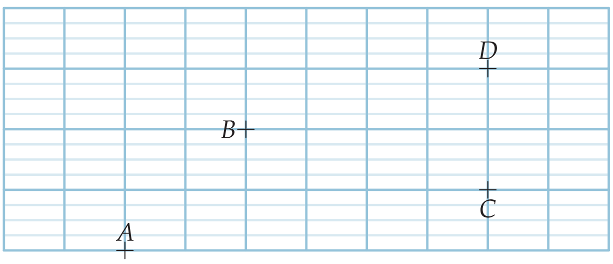
21 ► MÉTHODE 2 p. 7

1) Reproduire la figure ci-dessous.
2) Construire les vecteurs suivants.
   a) $\vec{w} + \vec{r}$ b) $\vec{r} + \vec{v}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$



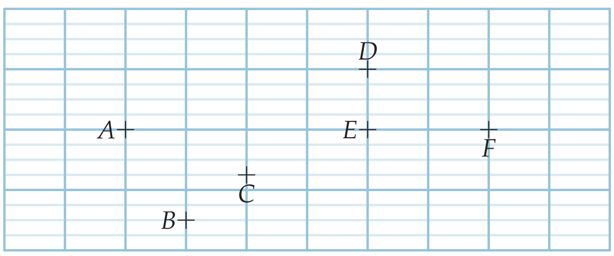
22 Même consigne qu'à l'exercice **21**.

1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



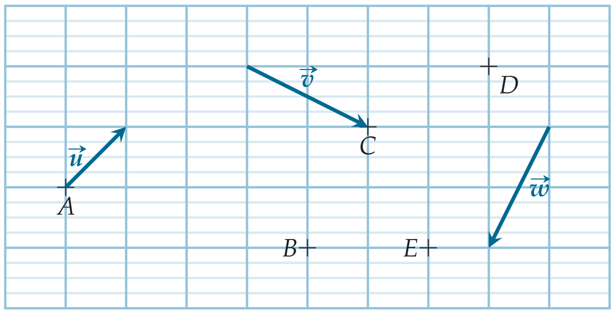
23 Même consigne qu'à l'exercice **21**.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF}$ 3) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE}$



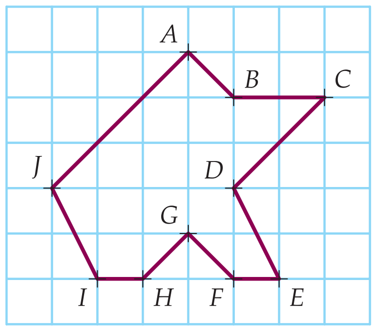
24 Reproduire la figure ci-dessous et construire un représentant des vecteurs suivants.

1) $\vec{u} + \overrightarrow{AB}$ 2) $\vec{v} + \overrightarrow{CB}$ 3) $\vec{w} + \overrightarrow{DE}$



25 Compléter les égalités en n'utilisant que les points de la figure ci-dessous.

1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{HF}$
3) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$
4) $\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{\ldots}$
5) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$
6) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots} = \vec{0}$



26 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$
2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$
3) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$
4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$
5) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

27 Écrire le plus simplement possible.

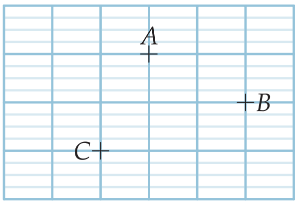
1) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$
2) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$
3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$
4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB}$
5) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC}$
6) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU}$

28 En utilisant le motif de l'exercice **25** :
donner un vecteur égal à :

1) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$
2) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$
3) $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IE}$
4) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$
5) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$
6) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE}$
7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$
8) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD}$

S'entraîner

29 **Vecteurs et représentants**



1) Reproduire la figure ci-dessus.
2) Placer les points E et F tels que :
   - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$
   - $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$
3) Déterminer le représentant :
   a) du vecteur $\overrightarrow{BC}$ d'origine A ;
   b) du vecteur $\overrightarrow{BA}$ d'extrémité C.
4) Représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
   - $\vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
   - $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
5) Quelle est la nature du quadrilatère $AEBF$? Justifier.

30 **Petites démonstrations**

Soit A, B et C trois points.
1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
3) Que peut-on dire du point E ? Justifier.

31 **Dans un parallélogramme...**

$EFGH$ est un parallélogramme de centre O.
1) Construire les points S et T vérifiant :
   - $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$
   - $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$
2) Démontrer que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$.
   Que peut-on en déduire ?

32 **Dans un triangle rectangle...**

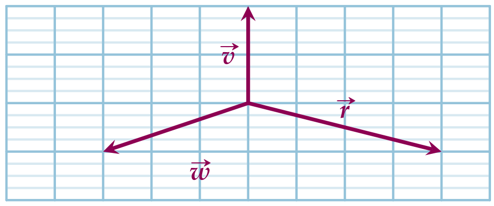
Soit ABC un triangle rectangle en A.
1) Construire les points D et E tels que :
   - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$
   - $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$
2) Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$? Justifier.

33 **Démonstration**

Tous les résultats devront être démontrés.
1) Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O. Nommer I le milieu de $[OC]$.
2) Construire A' le symétrique de A par rapport à D et O' le symétrique de O par rapport à B.
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.
   c) En déduire que I est le milieu de $[A'O']$.

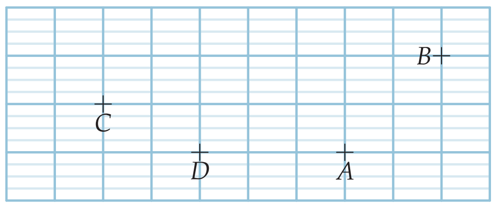
34 Reproduire la figure ci-dessous et construire les vecteurs suivants.

1) $\vec{u_1} = \vec{w} - \vec{r}$
2) $\vec{u_2} = \vec{r} - \vec{v}$
3) $\vec{u_3} = \vec{v} - \vec{w}$
4) $\vec{u_4} = \vec{r} - \vec{w}$
5) $\vec{u_5} = \vec{v} - \vec{r}$
6) $\vec{u_6} = \vec{w} - \vec{r}$
7) Quelles remarques peut-on faire ?



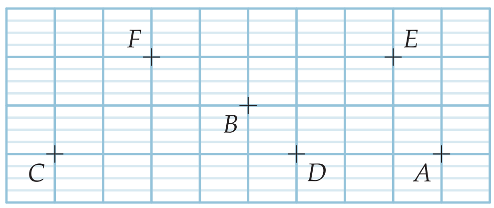
35 Même consigne qu'à l'exercice **34**.

1) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$



36 Même consigne qu'à l'exercice **34**.

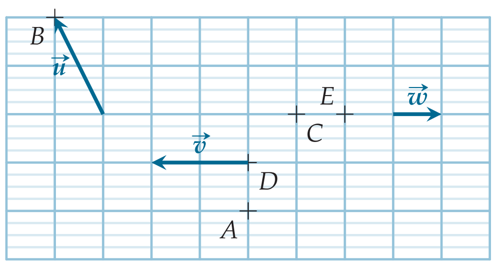
1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF}$
3) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE}$
4) Que dire du quadrilatère $CFEO$?



37 Reproduire la figure ci-dessous.

On considère les vecteurs suivants.
- $\vec{u_1} = \vec{u} - \overrightarrow{AB}$
- $\vec{v_1} = \vec{v} - \overrightarrow{CD}$
- $\vec{w_1} = \vec{w} - \overrightarrow{DE}$

Construire un représentant de :
1) $\vec{u_1}$ d'origine E ;
2) $\vec{u_2}$ d'origine A ;
3) $\vec{u_3}$ d'origine C ;
4) $\vec{u_1}$ d'extrémité C ;
5) $\vec{u_2}$ d'extrémité E ;
6) $\vec{u_3}$ d'extrémité A.



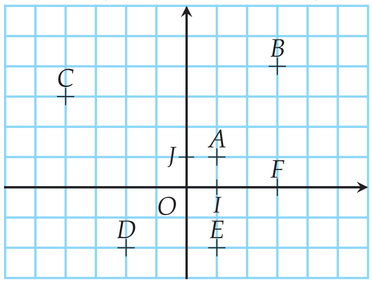
Coordonnées d'un vecteur

38 ► MÉTHODE 3 p. 8

Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{AF}$



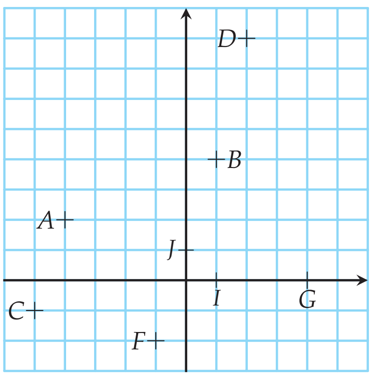
39 Dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous,

1) lire les coordonnées des points ;

2) calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

- $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{BJ}$ • $\overrightarrow{FA}$ • $\overrightarrow{GF}$
- $\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{BD}$ • $\overrightarrow{FJ}$ • $\overrightarrow{BG}$

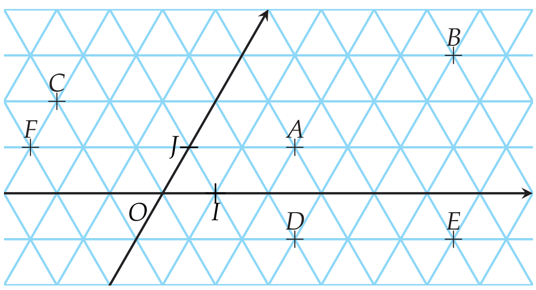
3) Dans cette liste, quels vecteurs sont égaux ? Lesquels sont opposés ?



40 Lire les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(O; I, J)$ ci-dessous.

1) $\overrightarrow{AB}$ 3) $\overrightarrow{CA}$ 5) $\overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{AD}$ 4) $\overrightarrow{DE}$ 6) $\overrightarrow{CF}$



41 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer le point $A(-3; 4)$.

2) Construire un représentant du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3) Placer les points B et C tels que :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ • $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$

4) Calculer les coordonnées des points B et C.

5) Que peut-on dire du point A ? Justifier.

42 ► MÉTHODE 4 p. 8

Construire un repère $(O; I, J)$ et tracer deux représentants du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'un d'origine I et l'autre d'extrémité J.

43 **Coordonnées de vecteurs**

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$ et $C(-3; -3)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

44 ► MÉTHODE 5 p. 9

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E(2; -1)$, $F(-3; 4)$ et $G(1; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

45 **Parallélogramme**

Dans un plan muni d'un repère, on considère les points $A(3; 5)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -4)$ et $D(-1; 2)$.

Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

46 Construire un repère $(O; I, J)$ orthogonal.

1) Placer les points $A(3; -9)$ et $B(-1; -5)$.

2) Placer les points C et D tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.

- $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{DC}$ • $\overrightarrow{AD}$

47 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(5; -6)$ et $(-2; 6)$.

Le point A est le milieu de $[BC]$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.

48 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B et C respectivement de coordonnées $(1; 4)$, $(4; 6)$ et $(2; 3)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

S'entraîner

49 Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées des points A, B et D sont respectivement $(-2;5)$, $(0;9)$ et $(8;0)$.

1) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

2) Prouver que $ABCD$ est aussi un rectangle.

50 ► MÉTHODE 6 p. 9

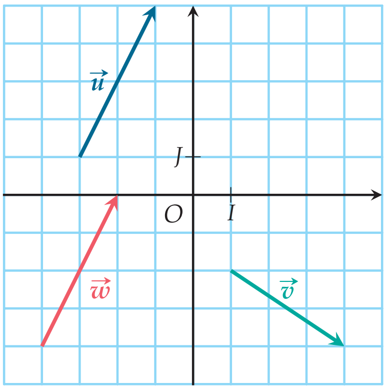
Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

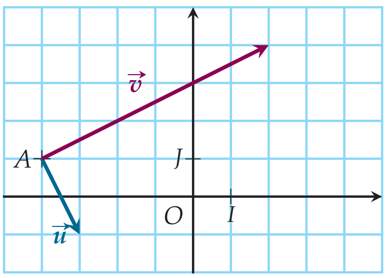
a) $\vec{u}+\vec{v}$ **c)** $\vec{u}+\vec{w}$

b) $\vec{u}-\vec{v}$ **d)** $\vec{u}-\vec{w}$

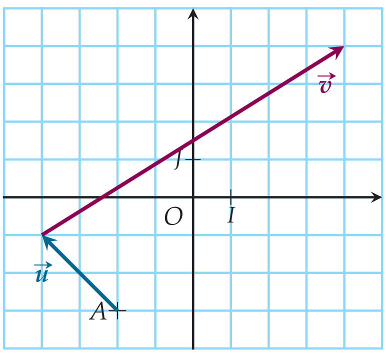


51 Reproduire la figure suivante et placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}+\vec{v}$.

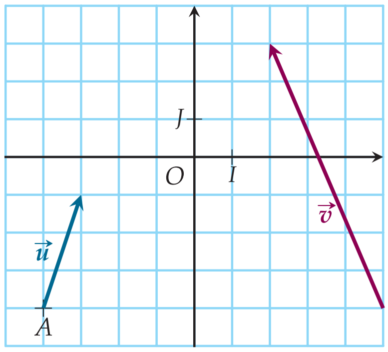
Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



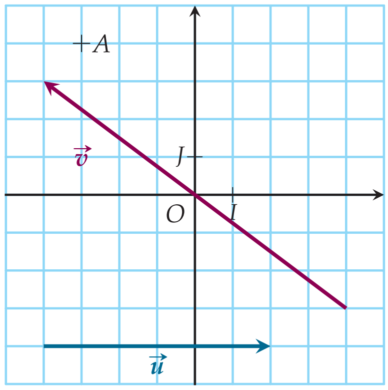
52 Même consigne que l'exercice **51**.



53 Même consigne que l'exercice **51**.



54 Même consigne que l'exercice **51**.



55 Reproduire la figure ci-dessous.

1) La compléter avec les points suivants.

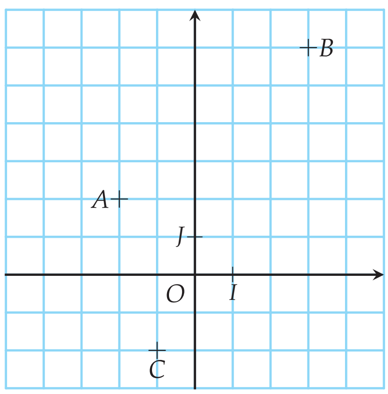
- $D(4,2)$
- $E(1;-2)$
- $F(-3;1)$

2) Placer les points G, H et K tels que :

- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$
- $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$

3) Lire leurs coordonnées.

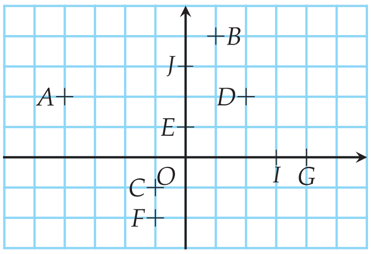
4) Les vérifier par le calcul.



56 Reproduire le graphique ci-dessous. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants et les représenter.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ **3)** $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$ **5)** $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{BD}$

2) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}$ **4)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ **6)** $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{CG}$



57 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;3)$ • $C(3;2)$ • $E(-3;1)$ • $G(2;3)$
- $B(-1;-2)$ • $D(4;-2)$ • $F(3;-3)$ • $H(5;1)$

2) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un représentant de $-\overrightarrow{AB}$. Lire leurs coordonnées.

3) Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GH}$

58 Dans le plan muni d'un repère, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{z}$ tels que :

- $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}$ • $\vec{u}-\vec{m}=\vec{v}$ • $\vec{z}-\vec{u}=\vec{v}$

59 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(0;0)$ • $C(2;-3)$ • $E(-3;1)$ • $G(1;5)$
- $B(1;-2)$ • $D(-5;-4)$ • $F(3;-3)$ • $H(-7;-2)$

2) Construire un représentant des vecteurs suivants et lire leurs coordonnées.

- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{DC}$, donne $\overrightarrow{DA}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{EF}$, donne $\overrightarrow{EH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $\overrightarrow{BC}$, donne $\overrightarrow{GH}$.
- Le vecteur qui, ajouté à $-\overrightarrow{AB}$, donne $\overrightarrow{EF}$.

60 Construire un repère orthogonal.

1) Placer les points suivants.

- $A(-2;2)$ • $D(4;0)$ • $F(2;-2)$
- $C(3;3)$ • $E(-2;0)$

2) Calculer les coordonnées des points B, G, H et K qui vérifient les relations vectorielles suivantes.

- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ • $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AD}$

Multiplication par un réel

61 ► MÉTHODE 7 p. 9

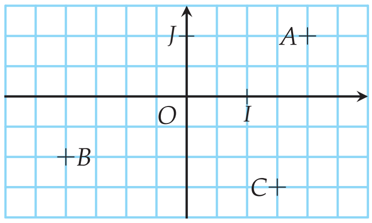
1) Reproduire la figure.

2) Construire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

- $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$ • $\vec{v}=-3\overrightarrow{BC}$ • $\vec{w}=0,5\overrightarrow{AB}$

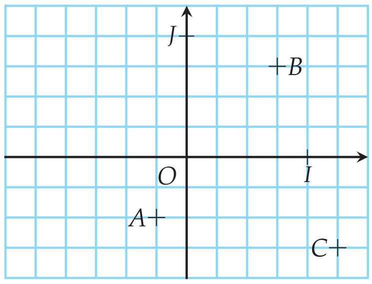
3) Lire leurs coordonnées.

4) Les vérifier par le calcul.



62 Même consigne qu'à l'exercice **61** avec :

- $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ • $\vec{v}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ • $\vec{w}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



63 Dans le plan muni d'un repère, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $3\vec{u}$ **2)** $-4\vec{u}$ **3)** $\frac{2}{3}\vec{u}$ **4)** $-4,5\vec{u}$

64 Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points $P(-3;-1)$ et $R(2;3)$.

Quelles sont les coordonnées du point N qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{ON}=4\overrightarrow{PR}$?

65 Dans un repère, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(3;-4)$ et $(-1;2)$. Quelles sont les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{AC}$?

66 Dans un repère, on considère les points suivants :

$A\left(\frac{2}{9};\frac{6}{25}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{6};\frac{9}{20}\right)$.

Calculer les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{AC}=\frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$.

S'entraîner

67 Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E\left(\frac{5}{6};-\frac{3}{5}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{8};\frac{7}{10}\right)$.
Quelles sont les coordonnées du point G pour que l'égalité $\overrightarrow{EG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{EF}$ soit vérifiée ?

68 Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(3;2)$, $(9;-5)$ et $(-9;16)$. Ces points sont alignés.
Calculer le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

69 Points et vecteurs

Dans un repère, on considère les points suivants.

- $A(3;-1)$
- $B(-5;5)$
- $M(-1,2)$

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, λ réel à déterminer.
3) Que peut-on dire du point M ?

70 Soient les points $A(3;-2)$, $B(-1;7)$, $C(2;3)$.
1) Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
2) Soit le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Calculer les coordonnées du point M.

71 Construction et calculs

Dans un repère on considère les points suivants.

- $A(3;-2)$
- $B(-1;2)$
- $C(2;3)$

1) Construire les vecteurs suivants.
a) $\overrightarrow{AB}$ **c)** $2\overrightarrow{AB}$ **e)** $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{BC}$ **d)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **f)** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$
2) Vérifier leurs coordonnées par le calcul.

72 Dans un repère, on considère les points :

- $A(-3;2)$
- $B(1;-3)$
- $C(1;2)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
a) $2\overrightarrow{AB}$ **c)** $2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{BC}$
b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **d)** $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

73 Avec des racines carrées

Dans un repère, on considère les points suivants.

- $A(2\sqrt{2};3)$
- $C(\sqrt{2};-3)$
- $B(2;-\sqrt{2})$
- $D(3\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
1) $\overrightarrow{AB}$ **3)** $\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{CA}$ **4)** $\overrightarrow{BD}$

Colinéarité

74 ► MÉTHODE 8 p. 10
Dans le plan muni d'un repère, les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$
2) $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$
3) $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$

75 Dans un repère orthogonal, placer les points :

- $A(-3;1)$
- $B(1;3)$
- $C(1,-4)$
- $D(7;-1)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (AC) et (BD)

76 Dans un repère orthogonal, placer les points :

- $A\left(-\frac{1}{3};0\right)$
- $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$
- $C\left(\frac{4}{3};-1\right)$
- $D\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
1) (AB) et (CD)
2) (BC) et (AD)

77 Vérification de parallélisme ALGO

Proposer un algorithme qui vérifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.

78 Dans un repère, on considère les points S, E et L dont les coordonnées sont respectivement $(2;5)$, $(-4;-3)$ et $(5;9)$.
Les points S, E et L sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SL}$?

79 Dans un repère orthogonal, les points M, E et R ont pour coordonnées respectives :

- $\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{8}\right)$
- $\left(\frac{5}{9};\frac{5}{2}\right)$
- $\left(-\frac{7}{6};\frac{7}{6}\right)$

Les points M, E et R sont-ils alignés ?
Si oui, quelle égalité vectorielle lie $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MR}$?

80 Vérification d'alignement ALGO

Proposer un algorithme qui vérifie que les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

81 Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ vérifiant l'égalité $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$?

82 Le plan est muni d'un repère.

1) Placer les points $V(-1;-1,5)$, $A(-2;0)$ et $T(5;0)$.
2) Placer E tel que $\overrightarrow{VA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{VE}$.
3) Placer U tel que $\overrightarrow{TU}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\0,5\end{pmatrix}$.
4) Que peut-on dire des droites (OU) et (ET) ? Justifier.

83 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(1;-2)$, $B(-3;1)$, $C(-17;15)$ et $D(-5;6)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

84 Dans un plan muni d'un repère, on place les points $A(3;-2)$, $B(-5;4)$ et $C(-2;-1)$.

1) Calculer les coordonnées de :
   - B' milieu de $[AC]$;
   - C' milieu de $[AB]$.
2) Prouver que $\overrightarrow{C'B'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer les coordonnées de G vérifiant $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
4) Les points B, G et B' sont-ils alignés ?
   Si oui, déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BB'}$.

85 Construire un triangle ABC.

1) Placer les points M, P et N :
   a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   b) $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA}$
   c) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MC}$
2) Prouver que $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$.
   Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

86 Placer trois points A, B et C dans un repère.

1) Représenter les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que :
   - $\vec{a} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$
   - $\vec{b} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$
2) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}$.
3) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{b} - \overrightarrow{AC}$.
4) Prouver que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$.
   Que peut-on en déduire pour les points A, C et D ?
5) Prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
   Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABEC$?

87 Soit I le milieu d'un segment [AB].

1) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?
2) Démontrer que $\overrightarrow{MI} = 0,5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$ pour tout point M.

88 **Le petit chaperon rouge**

Le petit chaperon rouge rend visite à sa mère-grand dans les bois. Il doit d'abord se rendre au village pour récupérer un pot de beurre puis passer par la clairière pour faire un bouquet de fleurs.
Dans un repère $(O;I,J)$, on a représenté la maison du petit chaperon rouge par le point $D(-1;-2)$, le village par le point $V(2;1)$, la clairière par le point $C(3;0)$ et enfin la maison de mère-grand par le point $M(0;-3)$.

Partie A

1) Faire une figure qui sera complétée par la suite.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs de déplacement du petit chaperon rouge : $\overrightarrow{DV}$, $\overrightarrow{VC}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$.

Partie B

1) Calculer les distances DV, VC, CM parcourues par le petit chaperon rouge depuis le village jusqu'à la maison de sa mère-grand, ainsi que la distance DM correspondant au trajet direct.
2) Montrer que le quadrilatère $DVCM$ sur lequel chemine le chaperon rouge est un rectangle.

Partie C

Le grand méchant loup fait peur au petit chaperon rouge. Afin de sécuriser la forêt, un chasseur part à la recherche de la tanière du loup. Une vielle sorcière lui dit qu'elle se situe au point T qui vérifie la relation
$\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{VM} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DV}$.

On cherche maintenant les coordonnées du point T.

1) Placer le point T sur la figure en laissant les traits de construction apparents.
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CT}$.
3) En déduire les coordonnées de T.

89 **Vers la droite d'Euler**

ABC est un triangle et A', B', C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

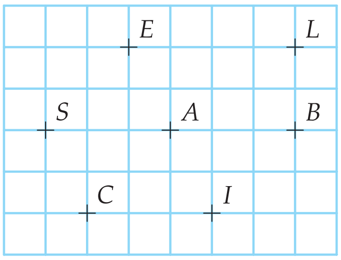
1) Appliquer la formule établie à l'exercice **87** aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
3) On note G le centre de gravité de ABC.
   En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Approfondir

90 Sommes algébriques dans une grille

Le réseau ci-dessous a un maillage rectangulaire.
Exprimer chacun des vecteurs suivants sous la forme d'un seul vecteur.

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}$
2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{LA}$
3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AL}$
4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AE}$
5) $\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{IB}$
6) $\overrightarrow{AE}-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{SC}\right)$



91 Sommes algébriques sans grille

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1) Démontrer les égalités suivantes.
   a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{DA}$
   b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$
2) Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.
   a) $\vec{u}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}\right)$
   b) $\vec{v}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

92 Autour d'un triangle

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU}=\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV}=\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{TR}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Que peut-on conjecturer ?
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{UV}=\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IT}+\overrightarrow{TR}$.
   b) Conclure.

93 Autour d'un triangle (bis)

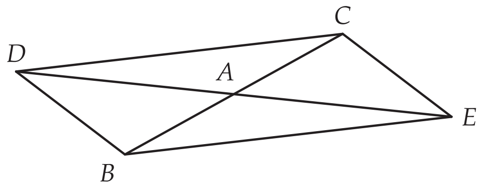
Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{RT}-\overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{RI}$
- $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{TI}$

1) Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2) Que peut-on conjecturer ?
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}$.
   b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

94 Vrai ou faux

$CDBE$ est un parallélogramme.
$[BC]$ et $[DE]$ sont sécants en A.



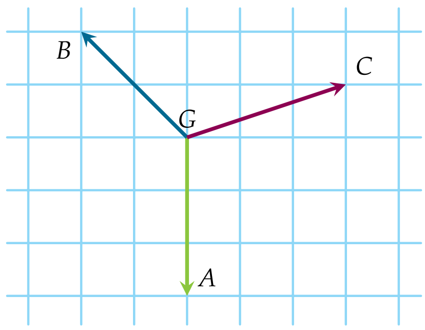
Des élèves ont écrit les phrases suivantes.
Indiquer celles qui sont fausses et les corriger pour qu'elles deviennent vraies.

1) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
2) A est le milieu $[DE]$ donc D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.
3) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ donc A est le milieu de $[AC]$.
4) $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CB}$.

95 Forces

L'action de trois forces sur un objet est modélisée par l'action des trois vecteurs appliquée sur le point G qui représente le centre de gravité.

1) Recopier sur un quadrillage la figure ci-dessous.
2) Rajouter une force, c'est-à-dire un vecteur d'origine G, de telle sorte que la somme des forces soit égale au vecteur nul. L'objet est ainsi en équilibre.



96 Faire apparaître un point

Soit ABC un triangle et soit M un point quelconque du plan. On pose $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$.

Montrer que :

1) $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$
2) $\vec{v}=3\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{CB}$
3) $\vec{v}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

97 **Alignement**

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure.

2) Que peut-on conjecturer sur les points B, F et E ?

On choisit $(A; D, B)$ comme repère.

3) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

4) En déduire les coordonnées du point C.

5) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$?

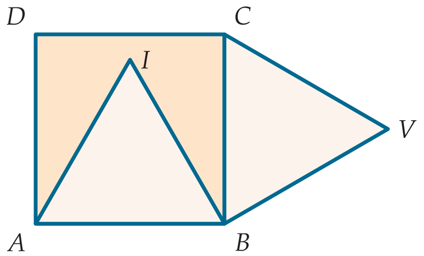
6) En déduire les coordonnées du point F.

7) Calculer les coordonnées du point E.

8) Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. Conclure.

98 **Un classique**

Sur la figure ci-dessous, on considère le carré $ABCD$ de côté 5 cm et les triangles équilatéraux ABI et BCV.



1) Construire la figure en vraie grandeur.

On se place dans le repère $(A; B, D)$.

2) Calculer les coordonnées des points I et V.

3) Démontrer que les points D, I et V sont alignés.

99 **Prendre des initiatives**

On considère un parallélogramme $OIJK$. Les points A, B et G sont définis par :

- $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OI}$
- $\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OK}$
- $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure.

2) Choisir un repère pour démontrer que les points O, G et J sont alignés.

100 On considère trois points dans un repère tel que :

- $A\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{12}\right)$
- $B\left(\dfrac{-3}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$
- $C\left(\dfrac{-1}{6}; \dfrac{-14}{3}\right)$

Calculer les coordonnées des points D, E et F tel que :

1) ABDC soit un parallélogramme ;

2) ABEC soit un parallélogramme ;

3) AFBC soit un parallélogramme.

101 **Parallélisme** INFO

On considère un triangle OST tel que :

- T' est le milieu de $[OS]$;
- S' est milieu de $[OT]$;
- O' est le milieu de $[TS]$;
- Δ et Δ' sont les droites perpendiculaires à la droite (OS) respectivement en O et en S ;
- la droite $(S'T')$ coupe la droite Δ en un point X ;
- la droite (XT) coupe la droite Δ' en un point Y.

Partie A : conjecture

1) Avec un logiciel de géométrie, construire la figure.

2) Déplacer le point T. Que dire de (OT) et $(O'Y)$?

Partie B : un exemple

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, les coordonnées des points S et T sont respectivement $(6; 0)$ et $(2; 4)$.

1) Déterminer les coordonnées des points T', S' et O'.

2) Quelle est l'abscisse de X ?

3) En exprimant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{T'S'}$ et $\overrightarrow{T'X}$, calculer l'ordonnée de X.

4) Vérifier que le point Y a pour coordonnées $(6; 6)$.

5) Vérifier la conjecture de la partie **A**.

102 **Colinéarité ?** ALGO

On considère l'algorithme ci-dessous qui vérifie si deux vecteurs $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$ sont colinéaires.

```
1.  Liste des variables utilisées
2.    a,b,c,d : nombres
3.  Entrées
4.    Demander a, b, c, d
5.  Traitements
6.    Si ··· Alors
7.      Afficher ('colinéaires')
8.    Sinon
9.      Afficher ('non colinéaires')
10.   Fin Si
```

1) Compléter la ligne 6.

2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il décide si 3 points sont alignés à partir de leurs coordonnées.

3) Les points suivants sont-ils alignés ?

a) $A(2; -7)$, $B(-2; 3)$ et $C(1; -7,5)$

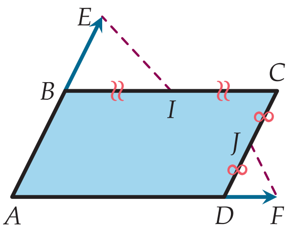
b) $J(0; 1)$, $K\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $L\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Approfondir

103 Avec des paramètres

Soit $ABCD$ un parallélogramme. I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$. a et b sont deux nombres réels et on considère les points E et F définis par

- $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CF} = b\overrightarrow{AD}$



On se place dans le repère $(A; D, B)$.

1) Calculer en fonction de a et de b :
   a) les coordonnées des points E et F ;
   b) les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$.
2) Établir une relation entre a et b afin que les droites (EI) et (FJ) soient parallèles.

104 Parallélisme et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Établir une conjecture sur les droites (CE) et (AB).
3) Démontrer que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.
4) Conclure.

105 Milieu et calcul vectoriel

On considère trois points non alignés A, B et C.
Les points P et Q sont définis par :

- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure.
2) Que peut-on conjecturer sur le point Q ? Et sur B ?
3) Démontrer que $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
   En déduire la position du point B.
4) Exprimer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   En déduire la position du point C.

106 Parallélogramme et alignement

On considère un parallélogramme $ABCD$.

1) Construire les points M et N définis par :
   - $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) Montrer que les points C, M et N sont alignés.

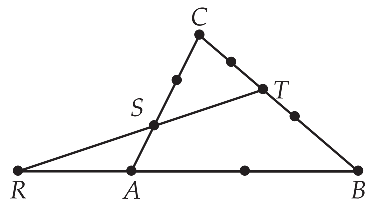
107 Médiane et calcul vectoriel

On considère un triangle MUV et I le milieu de $[UV]$.

1) Faire une figure.
2) Que dire de la somme vectorielle $\overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IV}$? Justifier.
3) Démontrer que $\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV} = 2\overrightarrow{MI}$.

108 Points alignés : deux méthodes

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).



À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A : méthode géométrique

Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

1) Montrer que
   a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
   b) $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B : méthode analytique

On considère le repère $(A; B, C)$.

1) Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.
2) Calculer les coordonnées du point T.
3) Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} ; \frac{4}{15} \end{pmatrix}$.
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.
5) Conclure.

109 Pour aller plus loin

On considère le triangle ABC et a un nombre réel. M, S et T sont définis par :

- $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Trouver la position du point M sur la droite (AB) afin que les points S, T et M soient alignés.

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Géométriquement

- Construire l'image d'une figure par une translation
- Construire un représentant d'un vecteur défini par
  - une translation
  - la somme ou la différence de vecteurs
  - le produit d'un vecteur par un nombre
- Utiliser la relation de Chasles

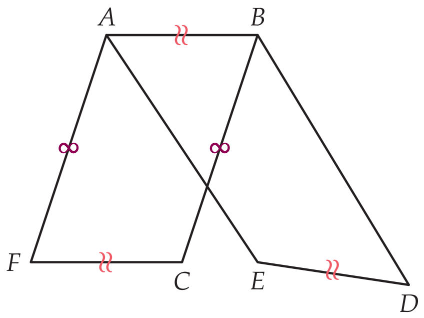
Analytiquement

- Calculer les coordonnées :
  - d'un vecteur à partir des coordonnées de deux points
  - de la somme ou la différence de deux vecteurs
  - du produit d'un vecteur par un nombre
  - d'un point défini par une condition vectorielle
- Reconnaître et utiliser la colinéarité de deux vecteurs

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.



110 L'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point :

a) C b) E

111 L'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$

a) est F
b) n'est pas tracée sur la figure

112 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

a) vrai b) faux

113 $AB + BD = AD$

a) vrai b) faux

114 $ABDE$ est un parallélogramme.

a) vrai b) faux

115 $FCBA$ est un parallélogramme.

a) vrai b) faux

116 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD}$

a) vrai b) faux

117 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$

a) vrai b) faux

118 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$

a) vrai b) faux

119 $DE = BA$

a) vrai b) faux

120 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}$

a) vrai b) faux

121 $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

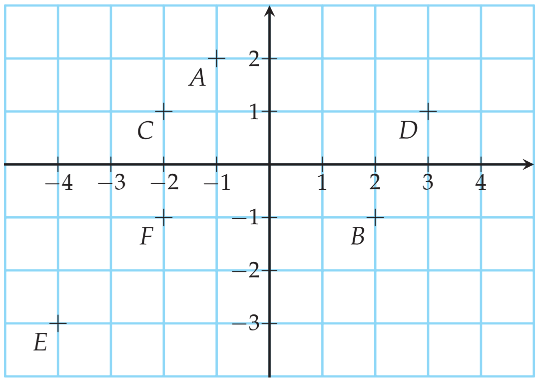
a) vrai b) faux

122 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$

a) vrai b) faux

123 $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

a) vrai b) faux



124 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

125 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

126 Les coordonnées du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FE}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

127 Les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{FA}$ sont :

(a) $(1;3)$ (b) $(3;2)$ (c) $(2;3)$ (d) $(1;-4)$

128 Les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}$ sont :

(a) $(-8;-2)$ (b) $(0;4)$ (c) $(4;-2)$ (d) $(-2;8)$

129 Les coordonnées du point I tel que $ACBI$ soit un parallélogramme sont :

(a) $(-1;1)$ (b) $(3;0)$ (c) $(1;-2)$ (d) $(-5;4)$

130 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

131 Les coordonnées du vecteur $\vec{k}$ tel que $\vec{k} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

132 Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est colinéaire au vecteur :

(a) $\overrightarrow{CA}$ (b) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{BD}$ (d) $\overrightarrow{ED}$

133 Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire au vecteur :

(a) $\overrightarrow{AD}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{z}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

TP 1 Soyons affine

INFO

On étudie un déplacement de points dans le plan muni d'un repère.
(Pour le dessin on prendra un repère orthonormé $(O ; I, J)$ d'unité 1 cm ou 1 carreau).
On se donne un couple de nombres $(a ; b)$ et on déplace un point en ajoutant le nombre a à son abscisse et le nombre b à son ordonnée. À partir d'un point M on obtient un point M', appelé image de M par ce déplacement.

1 On pose $a = 3$ et $b = -2$

On donne les points $A(-1 ; 1)$, $B(2 ; 3)$ et $C(-2 ; 4)$.

1) Calculer les coordonnées des points A', B' et C', images des points A, B et C.
2) Quelles sont les coordonnées du point D qui a pour image $D'(-0,4 ; -1,6)$?
3) D'une manière générale, quelles sont les coordonnées de M', l'image de $M(x ; y)$?
4) Démontrer que le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme.
5) Démontrer que ce déplacement est une translation
en démontrant que $AA'M'M$ est un parallélogramme.

2 Avec un logiciel de géométrie dynamique

Dans cette seconde partie, le couple $(a ; b)$ n'est pas donné : c'est une variable grâce à une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique.
Ouvrir un tel logiciel puis suivre les instructions.

1) Créer deux variables réelles a et b variant avec un pas de 0,1.
2) Construire l'image de $A(-1; 1)$.
3) Régler les variables a et b afin que l'image de A, notée A', ait pour coordonnées $(1 ; -2)$.
Noter ces valeurs. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$.
4) Soit B le point de coordonnées $(2 ; 0)$.
Déterminer les coordonnées de B', image de B par la même translation.
5) Montrer que $ABB'A'$ est un parallélogramme.
6) Construire un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a ; b)$ et le colorier en rouge.
(Rentrer dans la zone de saisie :"u=(a,b)".)
7) Faire varier a et b jusqu'à obtenir l'alignement des points A, B, A', B'.
Le parallélogramme $ABB'A'$ est alors aplati. Noter le couple $(a; b)$ correspondant.
8) Recommencer pour obtenir un autre couple $(a; b)$ tel que ces points soient à nouveau alignés.
Noter tous les couples $(a; b)$ qui semblent convenir.
9) Quelle conjecture peut-on émettre sur le vecteur $\vec{u}$ pour obtenir cet alignement ?
10) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
11) Prouver la conjecture par le calcul.

TP 2 Dans la peau d'un programmeur

ALGO

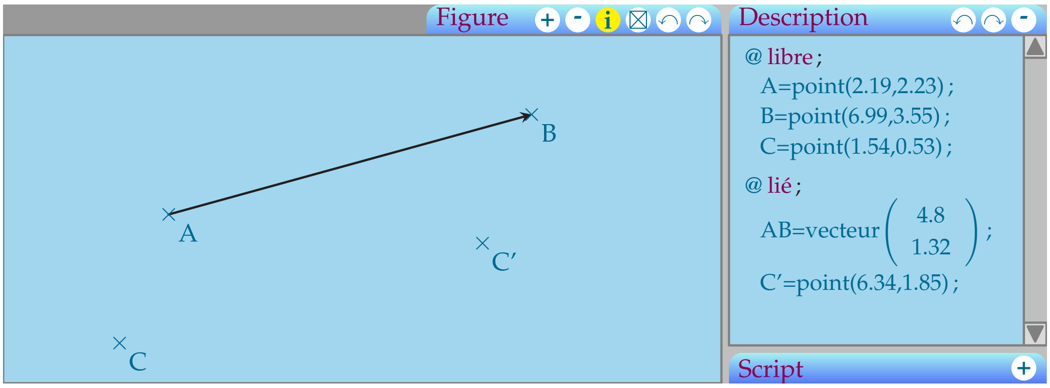
Vous êtes programmeur pour un concepteur de logiciel de géométrie dynamique.

1 Vecteur et translation

Voici une capture d'écran du logiciel sur lequel vous travaillez.

Votre mission : gérer l'affichage des coordonnées des objets dans le menu **Description**.

L'utilisateur a placé trois points libres A, B, C. Il a utilisé l'icône « vecteur » pour tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il a utilisé l'icône « translation » pour tracer C' le translaté de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Proposer un algorithme qui calcule les nouvelles coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du point C' à partir des nouvelles coordonnées des points A, B et C quand l'utilisateur déplace l'un de ces trois points à la souris.

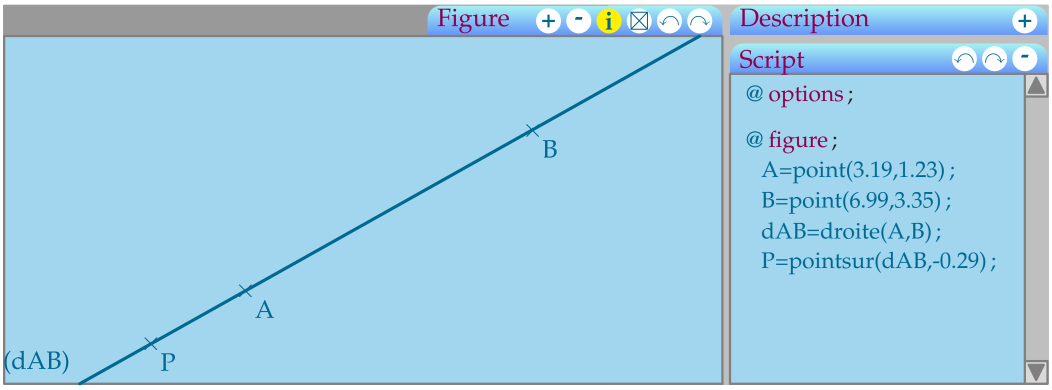
2 Point sur

Voici une deuxième capture d'écran du logiciel sur lequel vous travaillez.

Votre mission : gérer l'affichage des objets dans la fenêtre **figure** .

L'utilisateur a placé deux points libres A et B.

Il a tracé la droite (AB). Il a placé le point P sur la droite (AB).



Dans la fenêtre `script`, le point P est défini par `P=pointsur(dAB,-0.29)`.

$-0,29$ indique que $\overrightarrow{AP} = -0,29\overrightarrow{AB}$.

L'utilisateur substitue une nouvelle valeur, que l'on notera k, au -0.29 dans la fenêtre script et met la figure à jour. Proposer un algorithme qui calcule les nouvelles coordonnées du point P, en vue de l'affichage du point, à partir de k.

TP 3 Droite d'Euler

1 Préliminaires

Dans un plan d'un repère orthonormal $(A; I, J)$.

1) Placer les points $B(6;6)$ et $C(18;0)$.

2) Construire le triangle ABC.

3) Placer les points A', le milieu de $[BC]$, B', le milieu de $[AC]$, et C', le milieu de $[AB]$.

2 Un point spécial

1) Calculer les coordonnées de A', B' et C'.

2) Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Le placer sur la figure.

3) Vérifier que le point G est aligné avec B et B'.

4) Vérifier que le point G est aligné avec C et C'.

5) Que représente le point G pour le triangle ABC ?

3 Centre du cercle circonscrit

1) Construire les trois médiatrices du triangle ABC.

2) Placer O leur point de concours, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) L'une des médiatrices est parallèle à l'un des axes du repère.
Lequel ? Et pourquoi ? En déduire l'une des coordonnées du point O.

4) Sachant que $OA = OB$, calculer l'autre coordonnée du point O.

4 Orthocentre

1) Construire les trois hauteurs du triangle.

2) Placer leur point de concours, H, orthocentre du triangle ABC.

3) L'une des hauteurs est parallèle à l'un des axes du repère.
Lequel ? Et pourquoi ? En déduire l'une des coordonnées du point H.

4) Expliquer pourquoi les droites (AH) et (OA') sont parallèles.

5) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

6) Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{AH} = k \times \overrightarrow{OA'}$.

7) En déduire la deuxième coordonnée du point H.

5 Droite d'Euler

À partir de leurs coordonnées déterminées dans les parties 1 à 4,
vérifier que les points G, O et H sont alignés sur une droite qu'on appelle **la droite d'Euler**.

Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans, le 18 septembre 1783, à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse. Il a aussi montré que, pour tout triangle, les neuf points suivants : les pieds des trois hauteurs, les milieux des trois côtés et les milieux de chacun des segments reliant l'orthocentre aux sommets du triangle sont situés sur un même cercle dit « cercle d'Euler ».

Travaux pratiques

TP 4 Aller plus loin avec la translation

INFO

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et rechercher l'icône translation.

1) Placer trois points A, B et C.

2) Créer un vecteur $\vec{u}$.

3) Faire construire les translatés des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.

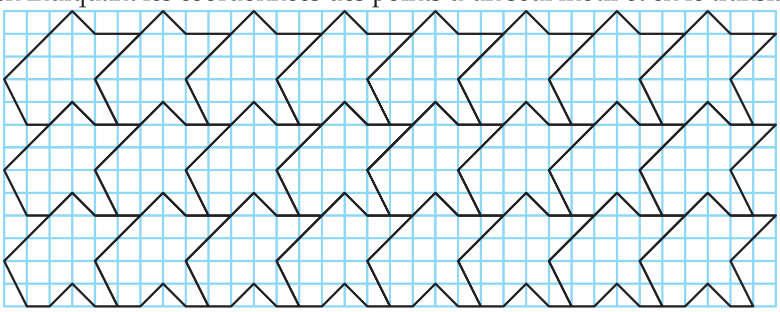
4) En faisant des simulations judicieuses que vous décrirez, émettre des hypothèses quant aux propriétés suivantes :

- **a)** la translation conserve les longueurs ;
- **b)** la translation conserve l'alignement ;
- **c)** la translation conserve les angles.

TP 5 Pavage

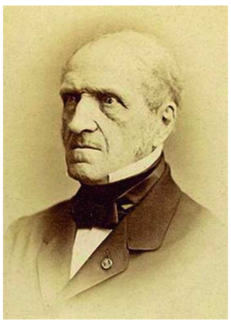
INFO ALGO

À l'aide du logiciel Algobox, programmer un algorithme qui permette de créer le motif de l'activité **2**, en indiquant les coordonnées des points d'un seul motif et en le translatant.



Récréation, énigmes

Chasles, l'histoire...



Michel Chasles fut un mathématicien français de la fin du XIXe siècle. La relation qui porte son nom est plus un hommage qui lui est rendu qu'une découverte de sa part car cette égalité était connue bien avant lui. Marc Bloch (grand historien français, 1886-1944) raconte dans son ouvrage posthume « *Apologie pour l'Histoire, ou métier d'historien* »Ed Armand Colin – p 98, une anecdote peu connue sur lui.

En 1857, Chasles présenta à l'Académie des sciences une série de lettres soit-disant inédites de Blaise Pascal (mathématicien philosophe du XVIIe). Ces documents établissaient que c'était Blaise Pascal qui avait découvert la fameuse loi sur l'attraction universelle, plus de trente ans avant Isaac Newton. Quel scoop ! Des scientifiques de l'Académie furent sceptiques, les anglais vexés, mais Chasles, mathématicien de renom avait du crédit et il s'embourba dans sa théorie fumeuse en ramenant régulièrement de nouveaux trésors pour répondre à ses critiques. Il rapporta aussi des lettres inédites de Pythagore, d'Alexandre le Grand à Aristote, de Cléopâtre à Jules César, etc. En fait, sans doute imbu de son savoir et de son rang, Chasles achetait en toute confiance ces documents à un faussaire, Vrain-Lucas, qui se faisait passer pour ignorant. Celui-ci fut jugé et condamné en 1870. Chasles quant à lui fût ridiculisé.

SOLUTIONS

Chapitre G1
Vecteurs

Auto-évaluation

1

1) $A(2;3)$
2) $B(-1;-1)$
3) $C(-1;0)$
4) $D(0;3)$
5) $O(0;0)$
6) $I(1;0)$
7) $J(0;1)$

2

1) 11
2) -1
3) 11
4) 0

3

1) non
2) oui
3) non
4) oui

4

1) oui
2) non
3) oui
4) non

S'entraîner

1

1) Y, Z, D.
2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{DZ}$
3) $ABYC$, $ABZD$, $CYZD$

2

1) 6
2) 7
3) 3

3

1) $\overrightarrow{HL}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CL}$
2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
3) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KE}$
4) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$

4

1) $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

5

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$
2) $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$
3) $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$
4) $\vec{s}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$
5) $\vec{z}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$
6) $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

6

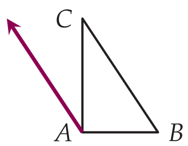
1) $A(1;2)$
2) $B(2;1)$
3) $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$
4) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$
5) $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$
6) $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

7 $B(3;5)$

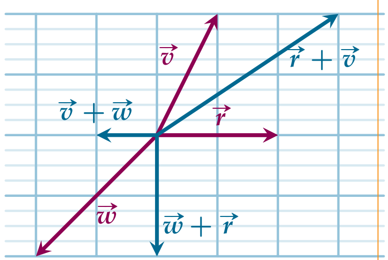
8 $C(-3;3)$

9 $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

15



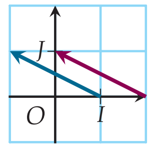
21



38

1) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$
6) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

42



44 $H(-1;6)$

50

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

2)
a) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

61

$\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-10,5\\1,5\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

74

1) oui
2) non
3) oui

Auto-évaluation QCM

110 a
111 b
112 a
113 b
114 b
115 a
116 a
117 b
118 b
119 a
120 a
121 b
122 a
123 b
124 c
125 d
126 d
127 b
128 a
129 b
130 c
131 d
132 a b
133 b c