

MATHEMATIQUES

3^e



[23]



4²

NATHAN

MATHÉMATIQUES^e 3



par une équipe d'enseignants

* 105 * 1234 * 1234 # et
* 105 * 3 * 14.100 * 1234 # et

055602827

NATHAN

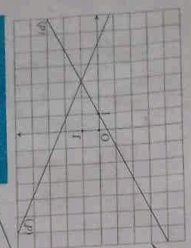
JE ME SOUVIENS

Numéro de la leçon

Ces bulles sont là pour attirer ton attention hors de ton apprentissage.

Titre	de chapitre
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	28
29	29
30	30
31	31
32	32
33	33
34	34
35	35
36	36
37	37
38	38
39	39
40	40
41	41
42	42
43	43
44	44
45	45
46	46
47	47
48	48
49	49
50	50
51	51
52	52
53	53
54	54
55	55
56	56
57	57
58	58
59	59
60	60
61	61
62	62
63	63
64	64
65	65
66	66
67	67
68	68
69	69
70	70
71	71
72	72
73	73
74	74
75	75
76	76
77	77
78	78
79	79
80	80
81	81
82	82
83	83
84	84
85	85
86	86
87	87
88	88
89	89
90	90
91	91
92	92
93	93
94	94
95	95
96	96
97	97
98	98
99	99
100	100

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRER



• Quand deux équations forment un système, on les écrit l'une au-dessous de l'autre derrière une accolade. En général, on numérote les équations.

• Pour résoudre graphiquement le système de deux équations du premier degré à deux variables, on peut utiliser la méthode suivante :

inconnues $\begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$

Si les deux droites sont sécantes, le système admet une solution et une seule.

Si les deux droites sont confondues, le système admet une infinité de solutions.

11 Représentes l'exercice comme ci-dessus.

Pour cela, utilise la première équation pour montrer que $y = \frac{x-1}{2}$ et la seconde pour montrer que

$$y = \frac{4x-21}{-9}.$$

Résois l'équation $\frac{x-1}{2} = \frac{4x-21}{-9}$ puis calcule y .

« Les transformations d'un espace euclidien sont les translations, les rotations et les symétries. »

Si nous avons débute l'étude des rotations planes en 1970, nous avons repoussé celle de l'homothétie en Seconde. En revanche, nous avons préféré, lors de l'étude du théorème de Thalès, parler de triangles homothétiques plutôt que de triangles « en position de Thalès ». L'adjectif nous a semé préférable à l'usage actuellement répandu.

SOMMAIRE	P. 72
8 - Théorème de Thalès	P. 73
9 - Trigonométrie	P. 83
10 - Angles inscrits et angles au centre : polygones réguliers	P. 94
11 - Vecteurs	P. 101
12 - Equations de droites: cas général	P. 112
13 - Equations réduites des droites	P. 119
14 - Transformations planes	P. 126
15 - Géométrie dans l'espace	P. 133
Sujets du B.E.C.	P. 142
Annexes	P. 143
Tables trigonométriques	P. 144

Illustrations : Laurent Lalo. - Composition : Évolution. -
Couverture et maquette : PCL/Christian Bianco

Conformément à cette recommandation, l'usage de la calculatrice a été signalé pour différents calculs numériques : calcul d'une puissance, calcul d'une racine carrée, calculs trigonométriques. Cependant, les calculatrices n'étant pas autorisées d'un usage courant, nous avons donné en annexe un **table des racines carrées** ainsi qu'un **table trigonométrique**, toutes les deux à quatre décimales.

La notion de valeur absolue
à commission précise que cette notion « difficile à
comprendre dans le premier cycle, est la cause d'erreurs
enconues jusqu'en fin de second cycle...

SOMMAIRE	P. 4
Polynômes et fractions rationnelles	P. 5
Ensemble des nombres réels	P. 17
Équations du premier degré à une inconnue	P. 31
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 37
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 52
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 59
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 66
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 142
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 143
Équations du premier degré à deux inconnues	P. 143

Adrian/VUEF, Paris, 2002.
1303-2

PUISSANCES À EXPOSANTS ENTIERS RELATIFS

JE ME SOUVIENS

Si n est un entier naturel non nul, l'écriture 10^n désigne le produit de n facteurs égaux à 10.
L'écriture 10^{-n} désigne le nombre $\frac{1}{10^n}$; produit de n facteurs égaux à 0,1. C'est aussi l'inverse du nombre 10^n .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Le nombre 0,000 1 s'écrit aussi 10^{-4} . Écris les nombres 0,001 ; 0,000 001 et 0,000 000 001 sous forme de puissances de 10.
- Écris les inverses des nombres 5^2 ; 2^5 ; 4^3 et $0,25^4$. Montre que ces inverses sont respectivement égaux à $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ et $\left(\frac{1}{0,25}\right)^4$ et démontre qu'ils sont décimaux.
- Écris les inverses des nombres 3^5 ; 6^3 ; 9^4 et $0,3^4$. Montre que ces nombres sont respectivement égaux à $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; $\left(\frac{1}{6}\right)^3$; $\left(\frac{1}{9}\right)^4$ et $\left(\frac{1}{0,3}\right)^4$ et démontre qu'ils ne sont pas décimaux.
- On convient de noter respectivement 5^{-2} ; 5^{-4} et 5^{-6} les trois nombres $\frac{1}{5^2}$; $\frac{1}{5^4}$ et $\frac{1}{5^6}$. Démontre qu'avec ces notations on peut écrire $5^{-6} = 5^{-4} \times 5^{-2}$.

JE RETIENS

- Soit a un nombre différent de 0 et soit n un entier naturel non nul. Par convention, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0,008$; $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = 0,0003125$.
- L'écriture a^{-n} désigne le nombre $\frac{1}{a^n}$, c'est-à-dire l'inverse de a^n ; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

J'APPLIQUE

- Recopie et ajoute les exposants qui manquent :

$$\frac{1}{12^3} = 12^{\square} ; \frac{1}{(-2)^8} = (-2)^{\square} ; \frac{1}{5^3} = 5^{\square} ; \frac{1}{(-9)^{10}} = (-9)^{\square}.$$

- Recopie et ajoute les exposants qui manquent :

$$\frac{1}{7^{\square}} = 7^{-3} ; \frac{1}{9^{\square}} = 9^{-4} ; \frac{1}{11^{\square}} = 11^{-7} ; \frac{1}{20^{\square}} = 20^{-5}.$$

- Écris les nombres $\frac{1}{5^9}$; $\frac{1}{(-8)^7}$; $\frac{1}{5^{12}}$ et $\frac{1}{(-3)^6}$ sous la forme de puissances dont les exposants sont négatifs.

- Donne des approximations décimales à l'ordre 0,000 1 des nombres 3^{-4} ; $(-2)^{-6}$; 7^{-2} ; $(-5)^{-3}$ et 8^{-1} .

NUMÉRIQUE

1 - Polynômes et fractions rationnelles	P. 5	32 - Propriétés des applications affines	43
1 - Puissances à exposants entiers relatifs	5	33 - Sens de variation d'une application affine	44
2 - Calculer avec des puissances	6	34 - Applications affines par morceaux	45
3 - La calculatrice	7	35 - Fonctions en escalier	46
4 - Polynômes	8	36 - Résolution graphique d'un problème	47
5 - Addition et soustraction des polynômes	9	Exercices d'application et problèmes	48
6 - Produit de deux polynômes	10	Exercices de recherche et problèmes	51
7 - Fractions rationnelles	11		
8 - Égalité des fractions rationnelles	12	5 - Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues	P. 52
9 - Simplification des fractions rationnelles	13	37 - Résolution graphique d'un système	52
10 - Calculer avec des fractions rationnelles	14	38 - Résolution d'un système : méthode de substitution	53
Exercices d'application et problèmes	15	39 - Résolution d'un système par combinaison	54
Exercices de recherche et problèmes	16	40 - Problèmes qui se résolvent à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues	55
		Exercices d'application et problèmes	56
		Exercices de recherche et problèmes	57
2 - L'ensemble des nombres réels	P. 17	6 - Inéquations du premier degré	P. 59
11 - Racines carrées	17	41 - Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$	59
12 - Calcul approché d'une racine carrée	18	42 - Résolution graphique d'une inéquation du premier degré à une inconnue	60
13 - Opérations et racines carrées	19	43 - Résolution graphique de problèmes à l'aide d'une inéquation du premier degré à une inconnue	61
14 - Utilisation d'une table de racines carrées	20	44 - Inéquations du premier degré à deux inconnues réelles	62
15 - Calculer avec des radicaux	21	45 - Résolution graphique d'un système d'inéquations à deux inconnues	63
16 - L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	22	Exercices d'application et problèmes	64
17 - Comparaison des nombres réels	23	Exercices de recherche et problèmes	65
18 - Intervalle de $\mathbb{R}$	24		
19 - Comparer des inverses, des carrés et des racines carrées	25	7 - Statistiques	P. 66
20 - Encadrer une somme et une différence	26	46 - Regroupement en classes des valeurs d'une série statistique	66
21 - Encadrer un produit et un quotient	27	47 - Histogrammes	67
22 - Valeur absolue d'un nombre réel	28	48 - Effectifs et fréquences cumulés	68
Exercices d'application et problèmes	29	49 - Valeurs centrales d'une série statistique	69
Exercices de recherche et problèmes	30	Exercices d'application et problèmes	70
		Exercices de recherche et problèmes	71
3 - Équations du premier degré à une inconnue	P. 31	Sujets du B.E.P.C.	P. 142
23 - Équations du premier degré à une inconnue	31	Annexes	P. 143
24 - Équations qui se ramènent à des équations du premier degré à une inconnue	32	Tables de racines carrées	143
25 - Équations et problèmes	33		
Exercices d'application et problèmes	34		
Exercices de recherche et problèmes	35		
		4 - Applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	P. 37
		26 - Généralités sur les applications	37
		27 - Applications linéaires	38
		28 - Représentation graphique d'une application linéaire	39
		29 - Propriétés des applications linéaires	40
		30 - Sens de variation d'une application linéaire	41
		31 - Applications affines	42

JE ME SOUVIENS

- Soit a un nombre différent de 0.
• Pour tout entier naturel n non nul, l'écriture a^{-n} désigne l'inverse de a^n , c'est-à-dire le nombre $\frac{1}{a^n}$.
- Si m et n sont deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq n$, alors $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Soit a un nombre non nul. Démontre que $a^3 \times a^{-3} = 1$ et démontre que $a^8 \times a^{-8} = 1$.
- Soit a un nombre non nul. En utilisant les définitions des puissances à exposants entiers relatifs, démontre chacune de ces égalités :
 $a^3 \times a^5 = (a^3) \times (a^5) = (a^8)$; $a^3 \times a^8 = (a^3) \times (a^8) = (a^{11})$; $a^{-3} \times a^8 = (a^{-3}) \times (a^8) = (a^5)$.
- Soit a et b deux nombres non nuls. En utilisant les définitions des puissances à exposants entiers relatifs, démontre que $a^3 \times b^{-3} = (ab)^{-3}$.

JE RETIENS

- Soit n un entier relatif. Pour tout nombre a non nul, on a $a^{-n} \times a^n = 1$.
- Soit m et n deux entiers relatifs. Pour tout nombre a non nul, on a $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
 $(a^m)^n = a^{mn}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- Soit a et b deux nombres non nuls. Pour tout entier relatif n , on a $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.

J'APPLIQUE

- Recopie et complète les calculs suivants : $5^3 \times 5^{-4} = 5^{\square}$; $4^{-7} \times 4^{-2} = 4^{\square}$; $3^8 \times 3^{-3} = 3^{\square}$; $5^{-3} \times 5^9 = 5^{\square}$; $(-4)^{-3} \times (-4)^7 = (-4)^{\square}$; $7^{-3} \times 7^{-2} = 7^{\square}$; $2^{-12} \times 2^{-18} = 2^{\square}$; $(-2)^{-9} \times (-2)^3 = (-2)^{\square}$.
- Recopie et complète les calculs suivants : $(4^{-3})^{-5} = 4^{\square}$; $(8^{-3})^5 = 8^{\square}$; $(7^6)^{-1} = 7^{\square}$; $(9^2)^{-1} = 9^{\square}$; $[(-2) \times (-4)]^{-1} = (-2)^{\square}$; $(5^{-1})^3 = 5^{\square}$; $(5^{-4})^{-3} = 5^{\square}$.
- Recopie et complète les calculs suivants : $\frac{4^{-9}}{4^{-8}} = 4^{\square}$; $\frac{4^3}{4^8} = 4^{\square}$; $\frac{4^3}{4^{12}} = 4^{\square}$; $\frac{4^{-1}}{4^4} = 4^{\square}$.
- Recopie et complète les calculs suivants : $7^{-4} \times 2^{-4} = (\square)^{-4}$; $3^{-3} \times 2^{-3} = (\square)^{-3}$; $3^{-3} \times 2^{-1} = 6^{\square}$; $2^{-6} \times 9^{-6} = 18^{\square}$; $(-3)^{-5} \times (-4)^{-5} = 12^{\square}$; $(-2)^{-9} \times (-3)^{-9} = 6^{\square}$.
- Simplifie les expressions suivantes : $5^2 \times 3^4$; $7^6 \times 2^{-4}$; $9^2 \times 3^4$; $\frac{(-4)^3 \times 5^1}{10^2 \times (-4)^3}$; $\frac{3^{-1} \times 8^3}{5^6 \times 3^3}$; $\frac{2^{-3} \times 7^1}{2^3 \times 3^6}$; $\frac{10^2 \times (-4)^3}{(-2)^6 \times 3^1}$.

JE ME SOUVIENS

Les touches y^x , x^2 et $1/x$ d'une calculatrice scientifique permettent de calculer respectivement des puissances, des carrés et des inverses.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Voici le schéma d'une calculatrice scientifique :

- Compare les séquences 2^3 , 3^2 et $1/5$ et $5/1$.



Démontre que pour tout entier naturel n , 2^{-n} est un nombre décimal. Pour quelles valeurs de n la calculatrice affiche-t-elle des valeurs exactes de 2^{-n} ?

Calcule $(-5)^{-3}$; $(-7)^{-3}$; $(-2)^8$; $(0,4)^{-4}$.

JE RETIENS

- La touche y^x permet de calculer des puissances ayant pour exposants des entiers relatifs.
- Une calculatrice scientifique permet les opérations sur les puissances. Les résultats sont affichés en écriture décimale ou en écriture scientifique.
- Sur une calculatrice scientifique, les touches $\frac{\square}{\square}$ et $\frac{\square}{\square}$ ont priorité sur les touches d'opération.

Exemple.

La séquence $5^3 \times 5^7$ permet de calculer 5^{-7} .

Exemple.

Pour calculer $5^3 + 5^7$, on tape une seule séquence : $5^3 + 5^7 =$.

J'APPLIQUE

- Utilise la calculatrice pour calculer :
a) les inverses des nombres 200 ; -35 ; 4^3 ; 2^3 ; 3^3 et 5^{-4} ;
b) les carrés des nombres 2,5 ; 7,25 ; $-4,5$; $-12,5$ et 2^8 ;
c) $3,4^5$; $2,5^4$; $8,005^3$; 125^3 ; 20^4 et $37,4^3$.
- Utilise la calculatrice pour calculer $3,54 + 4,85^2 \times 2,8^3 - 4,5^4$. Écris la séquence utilisée.

JE ME SOUVIENS

Soit a un nombre quelconque et soit n un entier naturel non nul. L'écriture a^n désigne la puissance d'exposant n du nombre a . C'est le produit de n facteurs égaux à a .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- 1 Calcule la valeur de $4x^3$ pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3,5$ et $x = -4$.
- 2 Calcule la valeur de $4x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3,5$ et $x = -4$.

JE RETIENS

- Des expressions telles que $3x^4$ ou $-7x^2$ sont des monômes en x . On dit que le monôme $3x^4$ est de degré 4 et que le monôme $-7x^2$ est de degré 2. Comme $x^0 = 1$, tout nombre peut être considéré comme un monôme en x de degré 0.
- Une somme algébrique de monômes en x est un polynôme en x . Chacun des monômes qu'on trouve dans un polynôme est un terme du polynôme. Le degré d'un polynôme est le degré de son terme le plus haut degré.
- Des écritures telles que $A(x)$, $B(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, etc. désignent toutes des polynômes en x . Quand aucune confusion n'est à craindre, on se contente d'écrire A , B , P et Q .
- Lorsqu'un polynôme comprend plusieurs monômes de même degré, on peut le réduire en ajoutant les termes de même degré.

- Ordonner un polynôme en x selon les puissances décroissantes de x , c'est ranger les termes de ce polynôme de la gauche vers la droite dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

- Soit a un nombre quelconque. Pour calculer la valeur numérique prise par un polynôme en x quand on fait $x = a$, on remplace la variable x par le nombre a dans chaque terme du polynôme et on calcule la somme algébrique ainsi obtenue.

J'APPLIQUE

- Réduis et ordonne chacun des polynômes suivants :
a) $P(x) = 7x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 10x - 4 - 2x^4 + 8x - 4$,
b) $Q(x) = 5x^3 - 7x + 1 - 2x^2 - x - 3$,
c) $R(x) = -x^3 + 3x - 2 + 5x^2 - 12x + 9$.
- Calcule les valeurs que prend le polynôme $P(x) = 2x^2 - 7x + 4$ pour $x = 0$, $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$ et $x = 5$.

JE ME SOUVIENS

On peut réduire la somme ou la différence de deux monômes en x à condition qu'ils aient le même degré.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Réduis chacun des polynômes suivants :
 $A = (3x^3 - 9x^2 + 3x - 7) + (3x^3 - 8x - 7)$; $B = (2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) - (x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$;
 $C = (-3x^2 - 2x + 12) - (-7x^2 - 11x - 1)$.
- On appelle respectivement A , B et C les polynômes $2x^3 + 5x + 1$, $-5x^2 - 8x + 9$ et $4x^2 - x - 7$. Réduis les polynômes $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$ et $-A + B - C$.

JE RETIENS

- Pour additionner deux polynômes P et Q , on ajoute les termes de P et de Q qui ont le même degré. On note $P + Q$ le polynôme obtenu.
- Pour soustraire un polynôme Q à un polynôme P , on ajoute à P le polynôme obtenu en changeant les signes des termes de Q . On note $P - Q$ le polynôme obtenu.
- Pour réduire une somme algébrique de polynômes en x , on peut procéder comme pour les sommes algébriques de nombres : on écrit la somme algébrique en utilisant des parenthèses, on supprime les parenthèses, on regroupe les termes de même degré puis on réduit le polynôme obtenu.

- On peut aussi disposer les polynômes l'un au-dessous de l'autre en faisant correspondre verticalement les termes de même degré.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } P &= 5x^3 - 2x^2 + 6x - 4 \text{ et } Q = 9x^2 + 7x + 10. \\ P + Q &= (5x^3 - 2x^2 + 6x - 4) + (9x^2 + 7x + 10) \\ &= 5x^3 - 2x^2 + 6x - 4 + 9x^2 + 7x + 10 \\ &= 5x^3 - 2x^2 + 9x^2 + 6x + 7x - 4 + 10 \\ &= 5x^3 + 7x^2 + 13x + 6. \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } P &= 5x^3 - 2x^2 + 6x - 4 \text{ et } Q = 9x^2 + 7x + 10. \\ P - Q &= (5x^3 - 2x^2 + 6x - 4) - (9x^2 + 7x + 10) \\ &= 5x^3 - 2x^2 - 9x^2 + 6x - 7x - 4 - 10 \\ &= 5x^3 - 11x^2 - x - 14. \end{aligned}$$

Pour ajouter ou pour soustraire des polynômes, il n'est pas nécessaire qu'ils aient le même degré.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } P &= 3x^2 + 5x - 2, Q = 7x^2 - 4x - 6 \text{ et } R = -2x^2 + 3x - 1. \\ P - Q + R &= (3x^2 + 5x - 2) - (7x^2 - 4x - 6) + (-2x^2 + 3x - 1) \\ &= 3x^2 + 5x - 2 - 7x^2 + 4x + 6 - 2x^2 + 3x - 1 \\ &= 3x^2 - 7x^2 - 2x^2 + 5x + 4x + 3x - 2 + 6 - 1 \\ &= -6x^2 + 12x + 3. \end{aligned}$$

Exemple

Représentons le calcul de $P - Q + R$ donné plus haut. On écrit :

$$\begin{array}{r} P = 3x^2 + 5x - 2 \\ - Q = -7x^2 + 4x + 6 \\ + R = -2x^2 + 3x - 1 \\ \hline P - Q + R = -6x^2 + 12x + 3 \end{array}$$

J'APPLIQUE

- On donne les polynômes $A = 4x^3 - 3x^2 + 9x + 2$ et $B = -2x^3 + 2x^2 - 6x + 4$. Calcule les polynômes $A + B$ et $A - B$.
- Soit $P = -5x^2 + 3x + 2$, $Q = 7x^2 - 9x + 5$ et $R = x^2 - 7x - 7$. Simplifie les polynômes $P + Q + R$, $P - Q + R$, $P - (Q + R)$ et $(P + Q) - R$.

JE ME SOUVIENS

Pour multiplier une somme algébrique par une somme, on multiplie chaque terme de la somme algébrique par ce nombre.

Pour multiplier une somme algébrique par une autre somme algébrique, on multiplie chaque terme de la première somme par chaque terme de la seconde somme, on ajoute les produits obtenus.

Exemple

$$3(2x + 5y - 2) = 6x + 15y - 6$$

Exemple

$$\begin{aligned} A &= 5 - 3x \text{ et } B = x - 7y + 2, \text{ alors} \\ AB &= (5 - 3x)(x - 7y + 2) \\ \text{On a donc : } AB &= 5x - 35y + 10 - 3x^2 + 21xy - 6x \\ &= -3x^2 + 21xy - x - 35y + 10. \end{aligned}$$

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Effectue chacun des produits suivants : $(3x^2)(7x^3)$; $(-5x^4)(2x)$; $(-7x^2)(-2x)$; $(x^2)(4x)$; $(-3x^3)(x^2)$; $(-x^2)(-x^2)$; $(3x^2)(-x^2)$.
- Développe puis réduits chacun des produits suivants : $5(2x^2 - 3x^2 + 5x - 1)$; $x(-2x^2 + 5x - 3)$; $(2x - 3)(3x + 5)$; $(x + 1)(x^2 + 3x + 1)$.
- Soit $A = 3x^2 + 2x + 1$, $B = -4x^2 - 3x + 1$ et $C = 2x^2 - 2x - 1$. Calcule $xA + 3B - (x - 1)C$.

JE RETIENS

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second.

Si les polynômes à multiplier sont de degrés m et n , leur produit est de degré $m + n$.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } A &= -2x^2 + 6x - 4 \\ \text{et soit } B &= 7x + 10 \\ AB &= (-2x^2 + 6x - 4)(7x + 10) \\ &= -14x^3 + 20x^2 + 42x^2 \\ &\quad + 60x - 28x - 40 \\ &= -14x^3 + 22x^2 + 32x - 40. \end{aligned}$$

Disposition pratique

Après les avoir ordonnés, on écrit les polynômes l'un au-dessous de l'autre puis on calcule les produits partiels des termes du premier par chacun des termes du second en alignant verticalement les termes de même degré :

$$\begin{array}{r} A = -2x^2 + 6x - 4 \\ B = 7x + 10 \\ \hline AB = -14x^3 + 22x^2 + 32x - 40 \end{array}$$

J'APPLIQUE

- On donne les polynômes $A = 2x^3 - x^2 + 2x + 3$ et $B = 5x^2 - 3x + 4$. Calcule le produit AB .
- Soit $P = -3x^3 + 5x - 4$, $Q = 3x^2 - 2x + 7$ et $R = x^2 - 3x - 1$. Calcule les polynômes $P(Q + R)$, $P(Q - R)$ et $PQ + PR + QR$.

JE ME SOUVIENS

Des écritures telles que $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc., désignent des polynômes en x . On désigne alors par $P(a)$, $Q(a)$, $R(a)$, etc., les valeurs numériques respectives de ces polynômes quand on prend $x = a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Calcule les valeurs numériques prises par l'expression $\frac{x+1}{x-1}$ pour $x = 2$, $x = -4$ et $x = \frac{2}{3}$. Peut-on donner à x la valeur 1 ? Justifie ta réponse.
- Quelle est la valeur numérique de x qui rend nul le dénominateur de l'expression $\frac{3x-4}{x+5}$?
- Calcule les valeurs numériques prises par l'expression $\frac{3x^2 - 2x + 1}{3 - x}$ pour $x = -3$, $x = 2$ et $x = \frac{3}{7}$. Peut-on donner à x la valeur 3 ? Justifie ta réponse.

JE RETIENS

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. On dit que l'expression $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle de numérateur $P(x)$ et de dénominateur $Q(x)$.

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle et soit a un nombre. Si $Q(a) \neq 0$, la valeur numérique de cette fraction rationnelle pour $x = a$ est le nombre $\frac{P(a)}{Q(a)}$.

Si $Q(a) = 0$, il est impossible de diviser le nombre $P(a)$ par 0 : on dit alors que la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ n'est pas définie pour $x = a$.

Exemples

$$\frac{x+1}{x-1}, \frac{3x-4}{x+5}, \frac{3x^2-2x+1}{3-x}$$

sont des fractions rationnelles.

Exemple

$$\frac{x^2+1}{x-1}$$

prend la valeur $\frac{17}{3}$ pour $x = 4$ mais n'est pas définie pour $x = 1$.

J'APPLIQUE

- Pour quelles valeurs de x la fraction rationnelle $\frac{3x+5}{x-2}$ est-elle définie ? Calcule ses valeurs numériques pour $x = -1$, $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$.
- Quelles sont les valeurs numériques de x qui rendent nuls les dénominateurs des fractions rationnelles $\frac{6-2x}{3x-5}$, $\frac{1+4x}{(x-2)(x-4)}$, $\frac{3x-7}{x^2-4}$?
- Calcule les valeurs numériques prises par $\frac{2x^2-3x+1}{2-x}$ pour $x = -5$, $x = 0$ et $x = \frac{3}{5}$.

JE ME SOUVIENS

Si $Q(x) = 0$, la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ n'est pas définie pour $x = a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1 Calcule les valeurs numériques prises par les fractions rationnelles $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ et $\frac{x+1}{x-1}$ pour $x = -2, x = 0, x = 2, x = 3$ et pour $x = \frac{2}{3}$. Qu'observes-tu ? Pour quelles valeurs de x les deux fractions sont-elles définies ? Montre que, pour $x \neq 1$, $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}$. Déduis-en que, pour $x \neq 1$, $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x+1}{x-1}$.

JE RETIENS

On dit que deux fractions rationnelles sont égales si elles sont définies pour les mêmes valeurs de x et si elles prennent les mêmes valeurs numériques pour toutes les valeurs de x pour lesquelles elles sont définies.

On obtient une fraction rationnelle égale à une fraction rationnelle donnée, pour les valeurs de x qui les définissent, en multipliant ou en divisant ses deux termes par une même expression algébrique ou par un même nombre non nul.

Exemples :
a) Soit $x \neq \frac{1}{3}$. Multiplions les deux termes de la fraction $\frac{\frac{1}{2}x + 4}{\frac{3}{5}x - 2}$ par 10.
On obtient $\frac{5x + 40}{6x - 20}$. Par suite, $\frac{\frac{1}{2}x + 4}{\frac{3}{5}x - 2} = \frac{5x + 40}{6x - 20}$.

b) Soit $x \neq \frac{1}{3}$. En divisant les deux termes de $\frac{3x - 1}{2x - 1}$ par $3x - 1$, on obtient $\frac{1}{2}$.

J'APPLIQUE

1 Vérifie que les fractions rationnelles $\frac{\frac{1}{3}x + 4}{\frac{2}{3}x - 1}$ et $\frac{x + 12}{2x - 3}$ prennent les mêmes valeurs numériques pour $x = -2, x = 0, x = 1$ et $x = 3$. Démontre qu'elles sont définies et égales pour $x \neq \frac{3}{2}$.

2 Soit $x \neq \frac{1}{2}$. Vérifie que $\frac{10x - 15}{10x - 5}$ et $\frac{2x - 3}{2x - 1}$ prennent la même valeur numérique pour $x = -2$, pour $x = 0$, pour $x = 1$ et pour $x = 3$. Démontre l'égalité de ces fractions.

JE ME SOUVIENS

Factoriser une somme algébrique ou un polynôme, c'est écrire cette somme algébrique ou ce polynôme sous la forme d'un produit.

Si tous les termes d'une somme algébrique sont des produits qui ont un même facteur en commun, on peut factoriser cette somme algébrique.

Une somme algébrique peut être le développement d'un produit remarquable. Dans ce cas, on peut la factoriser.

Exemples :
 $3x + 6$ peut s'écrire $3(x + 2)$ ou $10x - 20$ peut s'écrire $10(x - 2)$.

Exemples :
 $x^2 + 3x = x(x + 3)$; $5x + 5 = 5(x + 1)$.

Exemples :
 $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$;
 $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$;
 $9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1 Développe $(x - 3)(x + 1)$ et $(x - 3)(x - 2)$.
Déduis-en que, pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 1}{x - 2}$.
2 Développe $(x + 3)(x - 1)$ et $(x + 3)^2$. Déduis-en que, pour $x \neq -3$, $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x - 1}{x + 3}$.
3 Développe $(x - 2)(x + 2)$ et $(x + 2)^2$. Déduis-en que, pour $x \neq 2$ et $x \neq -2$, $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{x - 2}$.

JE RETIENS

Supposons qu'on puisse factoriser les deux termes d'une fraction rationnelle de façon à faire apparaître un facteur commun. On peut alors simplifier cette fraction en divisant ses deux termes par ce facteur commun à condition que ce facteur commun ne soit pas nul.

Exemple :
 $\frac{(x + 1)(x - 2) + (x + 1)(x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)[(x - 2) + (x - 3)]}{(x + 1)(x + 1)} = \frac{(x + 1)(2x - 5)}{(x + 1)(x + 1)} = \frac{2x - 5}{x + 1}$ pour $x \neq -1$.

En général, il est très difficile, voire impossible, de factoriser un polynôme quelconque.

J'APPLIQUE

1 Simplifie : $\frac{5x + 10}{5x + 25} \cdot \frac{8x - 6}{10x - 8}$ et $\frac{9x + 12}{15x - 6}$.
2 Simplifie : $\frac{\frac{1}{3}x + 2}{\frac{2}{3}x - 1} \cdot \frac{\frac{1}{4}x - 1}{\frac{3}{4}x + 2}$ et $\frac{-\frac{2}{7}x + 2}{\frac{1}{14}x + 3}$.
3 Simplifie : $\frac{(x - 1)(2x + 3)}{x^2 - 1} + \frac{(x + 1)(x + 5)}{4x^2 - 4x + 1}$ et $\frac{9x^2 + 12x + 4}{9x^2 - 4}$.

JE ME SOUVIENS

Pour simplifier une fraction rationnelle, il faut factoriser chacun de ses termes. S'il existe un facteur commun aux deux termes, alors on peut les diviser par ce facteur commun à condition que ce facteur commun ne soit pas nul.

Exemple : $\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+2)^2} = \frac{x-1}{x(x+2)}$ si $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Effectue les calculs suivants en réduisant au même dénominateur : $\frac{5}{14} - \frac{4x}{21} + \frac{3x-1}{6}$.
- x est un nombre quelconque mais différent de 0 et de -1.
- Simplifie les fractions $\frac{x^2}{x}$ et $\frac{6x}{2(x+1)}$ puis trouve, pour chacune, une fraction égale de dénominateur $x(x+1)$.
- Factorise le dénominateur de $\frac{1}{x^2+x}$.
- Effectue $\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{3x^2}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)}$ et déduis-en $\frac{6x}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+x}$.

JE RETIENS

- Pour calculer la somme algébrique de plusieurs fractions rationnelles, il faut :
 - simplifier autant que possible chaque fraction ;
 - réduire les fractions au même dénominateur ;
 - faire la somme algébrique des numérateurs et conserver le dénominateur commun ;
 - réduire et simplifier le résultat autant que possible.
- Pour multiplier des fractions rationnelles, il faut :
 - multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; simplifier le résultat autant que possible.
- Pour diviser une fraction rationnelle A par une fraction rationnelle B, il faut :
 - multiplier A par l'inverse de B ;
 - simplifier le résultat autant que possible.

Ces règles sont analogues à celles qui ont été vues pour les fractions ordinaires.

Exemple : $\frac{x+1}{x-2} \times \frac{5}{x} = \frac{5(x+1)}{x(x-2)}$.

Exemple : $\frac{x-2}{x-1} \div \frac{x-2}{x-1} \times \frac{x-1}{3x} = \frac{x-2}{3x}$.

J'APPLIQUE

- Effectue les calculs suivants : $\frac{2x+1}{x(x+1)} + \frac{5(3x-7)}{x+1} - \frac{9x+1}{2} - \frac{2(x-3)}{5} - \frac{4(3x-1)}{3} + 1 - x$; $\frac{1}{x(x+1)} - \frac{x}{x+1} + 2$; $\frac{7}{x+1} + \frac{4}{x-1} - \frac{11}{x}$.
- Effectue les calculs suivants : $\frac{2}{3x-3} \times \frac{5}{x+1} \times \frac{x^2-1}{5x}$; $\left(\frac{x-1}{2x}\right) \left[\frac{x+1}{x-1} - 1\right] \left[\frac{x^2-4}{x^2-1} - \frac{x+1}{x+2}\right]$.

EXERCICES D'APPLICATION

et PROBLÈMES

Polynômes

- Calcule les valeurs que prend le polynôme $P(x) = -5x^2 - 2x + 3$ pour $x = 0$, $x = -2$, $x = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{2}{3}$.
- Soit $A(x) = 3x^2 + 4x - 4$. Calcule les valeurs de $A(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$ et pour $x = -2$. Vérifie que $A(x) = (3x-2)(x+2)$.
- Exercices 12 à 14 : Réduis et ordonne selon les puissances décroissantes de x chacun des polynômes indiqués.
 - $P(x) = -3x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 7x - 4 - 5x^4 + 9 - 7$;
 - $Q(x) = 3x^2 - 2x + 3 - 5x^2 - 3x - 7$;
 - $R(x) = -5x^2 + 8x - 4 + 3x^2 - 7x + 2$.
- $P(x) = (x+3)(5x-1) - (3x-1)^2 + (5x+2)^2$; $Q(x) = (2x+1)^2 - (3x+5)^2 + (1-3x)^2$; $R(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{5} - 1\right)^2$.
- $P(x) = 5 + (x-2)(2x-1) - (2x+1)^2$. Calcule la valeur prise par $P(x)$ pour $x = \frac{3}{2}$.
- Exercices 15 et 16 : Développe, réduis et ordonne selon les puissances décroissantes de x le polynôme $A(x)$; factorise ce polynôme.
 - $A(x) = (2x-1)^2 - (3x-1)^2 + (4x-3)^2 + 2$.
 - $A(x) = (2x-10)(x+4) - (x+4)^2$.
- Exercices 17 à 21 : Calcule $A(x) + B(x)$ et $A(x) - B(x)$ dans chacun des cas indiqués. Dans chaque cas, calcule les valeurs numériques prises par les polynômes $A(x)$, $B(x)$, $A(x) + B(x)$ et $A(x) - B(x)$ pour $x = 1$.
 - $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1$; $B(x) = -5x^3 + 5x^2 + 2x - 3$.

Calculer avec des puissances

Exercices 5 à 8 : Recopie et complète les calculs indiqués en ajoutant les exposants qui manquent.

- $8^5 \times 8^{-6} = 8^{\square}$; $12^{-4} \times 12^{-5} = 12^{\square}$; $2^9 \times 2^{-3} = 2^{\square}$; $7^{-4} \times 7^6 = 7^{\square}$; $(-6)^{-5} \times (-6)^{10} = (-6)^{\square}$; $3^{-8} \times 3^{-5} = 3^{\square}$; $2^{-11} \times 2^{-9} = 2^{\square}$; $(-5)^{-7} \times (-5)^6 = (-5)^{\square}$.
- $(7^{-3})^{-4} = 7^{\square}$; $(9^{-1})^3 = 9^{\square}$; $(2^5)^{-3} = 2^{\square}$; $(8^4)^{-1} = 8^{\square}$; $[(-7)^{-1}]^{-4} = (-7)^{\square}$; $(6^{-1})^5 = 6^{\square}$.
- $\frac{7^{-8}}{7^6} = 7^{\square}$; $\frac{5^4}{5^{-5}} = 5^{\square}$; $\frac{2^7}{2^{10}} = 2^{\square}$; $\frac{9^{-3}}{9^{-5}} = 9^{\square}$.
- $5^{-3} \times 4^{-3} = \dots$; $7^{-6} \times 3^{-6} = \dots$; $8^{-5} \times 3^{-5} = \dots$; $2^{-10} \times 5^{-10} = \dots$; $(-4)^{-9} \times (-3)^{-9} = \dots$.
- Simplifie les expressions suivantes : $7^5 \times 2^3$; $8^5 \times 3^{-9}$; $4^5 \times 2^6$; $\frac{(-9)^2 \times 5^6}{7^8 \times 2^3}$; $3^{-8} \times 8^3$; $4^{-4} \times 2^8$; $10^{-4} \times (-3)^{-4}$; $\frac{5^{-8} \times 6^3}{(-2)^5 \times 5^4}$.

18 $A(x) = -x^3 + 7x^2 - x + 2$;

$B(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$.

19 $A(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 4$;

$B(x) = -3x^3 + 3x^2 + x + 1$.

20 $A(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x + 1$;

$B(x) = \frac{1}{8}x^3 + 2x - 1$.

21 $A(x) = (3x + 2)^2$; $B(x) = (2x - 1)^2$.

Produit de deux polynômes

Exercices 22 à 24. Effectue le produit des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

22 $P(x) = -3x^2 - 5x^2 + x - 1$;

$Q(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

23 $P(x) = 3x^2 + 5x - 3$; $Q(x) = 4x^2 + 2x + 1$.

24 $P(x) = -2x^2 - 7x + 3$; $Q(x) = -x^2 - 5x + 2$.

Fractions rationnelles

25 Calcule les valeurs numériques prises par $7x - 3$ pour $x = -5$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ et $x = \frac{8}{3}$.

26 Pour quelles valeurs de x les dénominateurs des fractions $\frac{1-2x}{2-5x}$, $\frac{1+x}{(4-x)(x+4)}$, $\frac{5x-7}{4x^2-9}$ et $\frac{3x}{x^2+2x+1}$ sont-ils nuls ?

27 Pour quelles valeurs de x les fractions rationnelles $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{5x+1}{x}$, $\frac{2x-5}{3x-8}$ et $\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}$ sont-elles définies ? Calcule leurs valeurs numériques pour $x = -1$, $x = 3$ et $x = \frac{2}{3}$.

Égalité des fractions rationnelles

28 Montre que $\frac{3x-1}{5} = \frac{6x-10}{10-7x}$.

29 Quelle valeur faut-il donner au nombre a

pour avoir $\frac{x+1}{2} = \frac{3x+a}{x-1}$?

Simplification des fractions rationnelles

Exercices 30 à 31. Simplifie les fractions rationnelles indiquées.

30 $\frac{3x-9}{15x-6}$; $\frac{x+1}{5}$; $\frac{x}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{x-3}{x-4}$.

31 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$; $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}$.

Calculer avec des fractions rationnelles

Exercices 32 à 35. Simplifie chacune des expressions indiquées.

32 $\frac{x+1}{2} + \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x-1}{4}$.

33 $\frac{x}{x+4} - \frac{2(1-x)}{3} - \frac{3(2x-1)}{2}$.

34 $\frac{-1}{x(x-1)} + \frac{x}{x-1} + 1$.

35 $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-3}$.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

36 Soit $E = \frac{20x}{4x^2-9} + \frac{8x-12}{4x^2-12x+9} - \frac{5x}{2x^2+3x}$. Montre qu'il existe trois nombres a , b et c tels que $E = \frac{c}{ax+b}$.

37 Soit $P(x) = (x^2-1)(x^2-4)$.

a) Développe, réduis et ordonne $P(x)$.
b) Écris $P(x)$ sous forme d'un produit de quatre facteurs. Pour quelles valeurs de x a-t-on $P(x) = 0$?

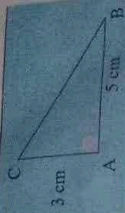
38 Soit $A(x) = x^2 - 9 - \frac{1}{2}(x+3)$ et $B(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Factorise $A(x)$ et $B(x)$. Simplifie $\frac{A(x)}{B(x)}$.

RACINES CARRÉES

JE ME SOUVIENS

Puisque le triangle ABC est rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
On en tire $BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$, d'où $BC = \sqrt{34}$.
Une calculatrice scientifique donne $\sqrt{34} \approx 5,83$, donc $BC \approx 5,83$ cm.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

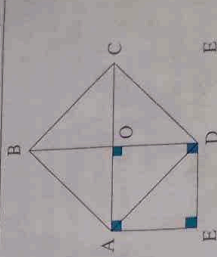
1 Calcule la longueur des côtés d'un carré dont l'aire est égale à 6,25 cm².

2 Sur la figure ci-contre, AODE est un carré de 3 cm de côté. B et C sont les symétriques respectifs de D et de A par rapport à O.

a) Reproduis la figure.

b) Montre que $AB^2 = 18$.

c) Vérifie que la longueur AB est comprise entre 4,242 6 cm et 4,242 7 cm.



3 OAB, OBC, OCD et ODE sont des triangles rectangles respectivement en A, en B, en C et en D.

OA = AB = BC = CD = DE = 1 cm.

Montre que $OB^2 = 2$ cm², $OC^2 = 3$ cm², $OD^2 = 4$ cm² et $OE^2 = 5$ cm².

Le symbole $\sqrt{\quad}$ est une lettre R transformée.

JE RETIENS

• Soit a un nombre positif. On appelle racine carrée du nombre a et on note $\sqrt{a}$ le nombre positif dont le carré est égal à a .

• Le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé radical. On l'écrit en longueur ou en hauteur selon l'importance du nombre dont on veut désigner la racine carrée.

Le mot radical vient du mot latin radix qui signifie racine.

• Soit a un nombre positif. Par définition d'une racine carrée on a $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples.
7 est la racine carrée du nombre 49 car $7^2 = 49$; 0 et 1 sont les racines carrées respectives de 0 et de 1.

Exemples.
On écrit $\sqrt{3+4+5} = \sqrt{12}$.

L'écriture $b = \sqrt{a}$ est donc équivalente aux trois conditions suivantes :
1° a est un nombre positif ;
2° b est un nombre positif ;
3° $b^2 = a$.

J'APPLIQUE

1 Simplifie les expressions suivantes : $\sqrt{25}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{10\,000}$.

2 Simplifie les expressions suivantes : $(\sqrt{24})^2$, $(\sqrt{35})^2$, $(\sqrt{\frac{3}{4}})^2$, $(\sqrt{\frac{2}{3}})^2$, $(\sqrt{2})^2$.

3 Montre que chaque diagonale d'un carré de 5 cm de côté a pour longueur $\sqrt{50}$ cm.

JE ME SOUVIENS

On appelle racine carrée du nombre positif a le nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Une calculatrice scientifique affiche des nombres de 10 chiffres. Quand on utilise la touche pour calculer les racines carrées des nombres 1225 et 8 084, on obtient respectivement 35 et 89,91106717. Vérifie que 35 est la valeur exacte de $\sqrt{1225}$. Démontre que 89,91106717 n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{8084}$. (Coup de pouce : utilise le dernier chiffre du nombre 89,91106717.)

Une méthode de calcul, inventée par des mathématiciens grecs et perfectionnée par des mathématiciens arabes, permet de déterminer des valeurs approchées d'une racine carrée de façon très rapide, en faisant uniquement des divisions. À titre d'exemple, voici comment on l'utilise pour calculer une valeur approchée à 0,0001 près de $\sqrt{30}$.

- $\sqrt{30}$ est un nombre compris entre 5 et 6 car $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$; choisissons la moyenne de 5 et de 6, soit 5,5, comme première estimation de $\sqrt{30}$.
- Le quotient de 30 par 5,5 à 0,001 près est 5,454 ; choisissons la moyenne de 5,5 et de 5,454 soit 5,477 comme deuxième estimation de $\sqrt{30}$.
- Le quotient de 30 par 5,477 à 0,0001 près est 5,477 4 ; choisissons la moyenne de 5,477 et de 5,477 4 soit 5,477 2, comme troisième estimation de $\sqrt{30}$.
- Le quotient de 30 par 5,4772 à 0,00001 près est 5,47725 ; on peut alors affirmer que 5,4772 est une valeur approchée à 0,0001 près de $\sqrt{30}$.

En calculant les carrés de 5,477 2 et de 5,477 3, vérifie qu'on a bien $5,4772 < \sqrt{30} < 5,4773$.

Utilise la méthode qui vient d'être exposée pour déterminer des valeurs approchées à 0,0001 près des nombres $\sqrt{10}$ et $\sqrt{240}$. Vérifie tes calculs en élevant au carré les nombres trouvés.

JE RETIENS

- Étant donné un nombre positif a , on peut déterminer un nombre décimal qui approche le nombre $\sqrt{a}$ d'autant plus qu'on veut.
- En général, la touche d'une calculatrice scientifique ne donne qu'une valeur approchée du nombre affiché sans qu'on sache si la valeur indiquée est une valeur approchée par défaut ou par excès.

J'APPLIQUE

- Détermine des valeurs approchées à 0,001 près de $\sqrt{15}$, de $\sqrt{5,4}$ et de $\sqrt{120}$.
- Vérifie que 11,180 33 et 11,180 34 sont des valeurs approchées de $\sqrt{125}$, respectivement par défaut et par excès.
- Détermine des valeurs approchées à 0,0001 près des nombres $\sqrt{10}$ et $\sqrt{1000}$. Qu' observes-tu ?

C'est la méthode qu'utilisent souvent les calculateurs et les calculatrices pour calculer des racines carrées.

En pratique, quatre à cinq divisions suffisent si la première estimation est bien choisie.

Exemple : $7071067 < \sqrt{50} < 7071068$. Une calculatrice à 10 chiffres donne $\sqrt{2} \approx 1,414\ 213\ 562$; en fait on a $1,414\ 213\ 562 < \sqrt{2} < 1,414\ 213\ 563$.

JE ME SOUVIENS

La racine carrée du nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Recopie et complète le tableau suivant :

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a-b}$
1	4	...	...	...	...
4	9	...	...	...	...
16	25	...	...	...	...
36	64	...	...	...	...

Qu' observes-tu ?

Recopie et complète le tableau suivant :

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
1	4	...	...	...	...
4	9	...	...	...	...
16	25	...	...	...	...
36	64	...	...	...	...

Qu' observes-tu ?

Soit a et b deux nombres positifs.

- Calcule $(\sqrt{ab})^2$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$. Déduis-en que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- On suppose que b n'est pas nul. Calcule $\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right]^2$ et $\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right]^2$. Déduis-en que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.
- Soit a et b deux nombres positifs différents de 0. Développe $(\sqrt{a+b})^2$ et $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Déduis-en que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

JE RETIENS

- Soit a et b deux nombres réels positifs. On a : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- Soit a et b deux nombres réels positifs. Si b est différent de 0, alors $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemple : $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Attention ! Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b}$ est différent de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b}$ est différent de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

J'APPLIQUE

- Écris de manière plus simple $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{27} \times \sqrt{3}$, $\sqrt{24} \times \sqrt{6}$, $\sqrt{10} \times \sqrt{40}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{50}$ et $\sqrt{15} \times \sqrt{60}$.
- Écris de manière plus simple $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$, $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}}$.

JE ME SOUVIENS

La racine carrée du nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

La table de la page 143, dont on voit un extrait ci-dessous, donne les racines carrées à 0,000 1 près des entiers naturels compris entre 1 et 200.

Nombres	Racines carrées	Nombres	Racines carrées	Nombres	Racines carrées
1	1	26	5,099	51	7,141 4
2	1,414 2	27	5,196 2	52	7,211 1
3	1,732 1	28	5,291 5	53	7,280 1
4	2	29	5,385 2	54	7,348 5
5	2,236 1	30	5,477 2	55	7,416 2
6	2,449 5	31	5,567 8	56	7,483 3
				81	9

Certaines sont exactes, comme par exemple $\sqrt{4}$, mais la plupart sont des valeurs approchées, comme par exemple $\sqrt{7}$ ou encore $\sqrt{54}$.

Utilisons cette table pour trouver une valeur approchée à 0,0001 près du nombre $\sqrt{53,45}$. Observons que 53,45 est compris entre 53 et 54. D'après la table, $\sqrt{53} \approx 7,2801$ et $\sqrt{54} \approx 7,3485$. Quand on passe du nombre 53 au nombre 54, le nombre augmente de 1 tandis que sa racine carrée augmente de 0,068 4.

Quand on passe du nombre 53 au nombre 53,45 le nombre augmente de 0,45 tandis que sa racine carrée augmente d'une valeur inconnue x .

Admettons qu'il y a proportionnalité entre ces deux augmentations. On peut alors écrire

$$\frac{x}{0,0684} = \frac{0,45}{1}, \text{ d'où } x \approx 0,0308.$$

Par suite, une valeur approchée de $\sqrt{53,45}$ est 7,280 1 + 0,030 8, soit 7,310 9.

En utilisant la même méthode, détermine des valeurs approchées à 0,000 1 près de $\sqrt{32,40}$ et de $\sqrt{24,82}$.

Le nombre 5 345 ne figure pas dans la table puisqu'il est supérieur à 200 mais on peut remarquer que $5\,345 = 100 \times 53,45$.

$$\text{On a donc } \sqrt{5\,345} = \sqrt{100 \times 53,45} = \sqrt{100} \times \sqrt{53,45} = 10 \times \sqrt{53,45} \approx 73,11.$$

Utilise la même méthode pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2\,000}$ à 0,01 près.

JE RETIENS

Soit x un nombre positif. La table des racines carrées des entiers naturels compris entre 1 et 200 permet de calculer une valeur approchée de $\sqrt{x}$.

Si $1 \leq x \leq 200$, on fait un calcul par interpolation linéaire. Si $x > 200$, on fait un calcul par extrapolation linéaire. Dans ce dernier cas, la précision du résultat est moins bonne.

J'APPLIQUE

- Calcule des valeurs approchées de $\sqrt{15,58}$, de $\sqrt{90,82}$ et de $\sqrt{160,82}$.
- Calcule des valeurs approchées de $\sqrt{348}$, de $\sqrt{895}$ et de $\sqrt{49,56}$.

JE ME SOUVIENS

Si a est un nombre positif, alors $(a^2)^2 = a$. Si b est un autre nombre positif, alors $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$. Quels que soient les nombres a et b on a $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

En remarquant que $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$, montre que $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. De la même manière, montre que $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et que $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Utilise ces résultats pour simplifier l'écriture de l'expression $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{27}$.

Montre qu'en multipliant les deux termes de $\frac{3}{\sqrt{5}}$ par $\sqrt{5}$ on obtient $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Déduis-en une simplification de l'écriture de l'expression $\frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{10}$.

Montre qu'en multipliant les deux termes de $\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ par $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ on obtient $5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

JE RETIENS

Soit N un nombre positif. S'il existe deux nombres positifs a et b tels que $N = a^2 b$, alors $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$. En remplaçant $\sqrt{N}$ par $a\sqrt{b}$, on dit qu'on a simplifié l'écriture du radical.

Soit a et b deux nombres strictement positifs. On suppose de plus que b n'est pas nul. Le quotient $\frac{a}{b}$ peut être écrit sans radical au dénominateur : il suffit pour cela de multiplier ses deux termes par $\sqrt{b}$. On a alors $\frac{a}{b} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$.

D'une façon plus générale, on peut écrire un quotient sans radical au dénominateur en multipliant ses deux termes par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemples.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5};$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Plus familièrement, on dit parfois qu'on a « sorti » a du radical.

Exemples.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$a + \sqrt{b}$ et $a - \sqrt{b}$ sont conjuguées, $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ également.

Exemple.

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4}.$$

J'APPLIQUE

- Simplifie les radicaux suivants : $\sqrt{28}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{80}$ et $\sqrt{112}$.
- Écris les expressions conjuguées de chacune des expressions suivantes : $\sqrt{3} - \sqrt{7}$; $\sqrt{2} - \sqrt{8}$; $1 - \sqrt{5}$; $\sqrt{10} - 4$. Effectue le produit de chaque expression par son expression conjuguée.
- Écris ces quotients sans radical au dénominateur et simplifie les nouveaux quotients si c'est possible : $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{4}{\sqrt{8}}$, $\frac{5}{\sqrt{20}}$, $\frac{11}{6 + \sqrt{3}}$, $\frac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ et $\frac{5}{\sqrt{15} - \sqrt{10}}$.

JE ME SOUVIENS

Le quotient de deux entiers relatifs est un **nombre rationnel**.
L'ensemble des nombres rationnels est désigné par $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs sont des parties de $\mathbb{Q}$. On écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemples

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ et } \frac{10}{5}$$

les nombres décimaux 0,5 ; 0,75 et 3,6.

$$\frac{2}{3} \text{ et } \frac{5}{11} \text{ représentent des nombres rationnels non décimaux puisque } \frac{2}{3} = 0,666\overline{666} \dots \text{ et } \frac{5}{11} = 0,454\overline{545} \dots$$

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Soit $a = 0,453453453453\dots$. On dit que a est un **nombre périodique** car les chiffres 4, 5 et 3 de sa partie décimale se succèdent à l'infini, toujours dans le même ordre.

Montre que $1\,000a = 453 + 0,453453453453\dots$. Déduis-en que $a = \frac{453}{999}$.
Écris une fraction irréductible qui représente le nombre a . Déduis-en une fraction irréductible qui représente le nombre périodique $2,453453453453\dots$.

Ce genre de raisonnement permet de montrer qu'un nombre périodique est toujours un nombre rationnel.

Supposons que le nombre $\sqrt{2}$ soit rationnel : il existerait alors une **fraction irréductible** $\frac{p}{q}$ formée de deux entiers naturels p et q telle que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

- Montre que $p^2 = 2q^2$.
- Montre que le carré d'un entier naturel se termine par 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
- Montre que le double du carré d'un entier naturel se termine par 0, 2 ou 8. Déduis-en que le nombre p est pair.

Puisque p est un entier naturel pair, il existe alors un entier naturel m tel que $p = 2m$.

Dans ces conditions, on aurait $4m^2 = 2q^2$ d'où $q^2 = 2m^2$. Le même raisonnement que celui qui a été fait pour p montre alors que le nombre q est pair. On pourrait donc simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, ce qui est faux puisque cette fraction a été supposée irréductible.

En conclusion, il n'existe aucune fraction égale à $\sqrt{2}$.

JE RETIENS

- Des nombres comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$ ne sont pas des nombres rationnels. On dit que ce sont des nombres **irrationnels**.
- L'ensemble formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'**ensemble des nombres réels**. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est une partie de $\mathbb{R}$.

J'APPLIQUE

Soit $a = 0,2727272727\dots$. Montre que $100a = 27 + 0,2727272727\dots$.
Déduis-en que $a = \frac{3}{11}$.

Déduis-en une fraction irréductible qui représente le nombre périodique $5,2727272727\dots$.

JE ME SOUVIENS

Soit a et b deux nombres quelconques. Si $b - a > 0$, on dit que le nombre a est **inférieur** au nombre b . On écrit alors $a < b$ ou $b > a$.
Lorsque $b - a$ est un nombre positif ou nul, on dit que a est **inférieur ou égal** à b et on écrit alors $a \leq b$ ou $b \geq a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Soit a , b et c trois nombres réels tels que $a < b$ et $b < c$. Montre que $c - a = (c - b) + (b - a)$. Déduis-en $a < c$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit c un nombre réel quelconque. Quel est le signe de $(b + c) - (a + c)$? Déduis-en $a + c < b + c$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit c un nombre réel. Factorise l'expression $bc - ac$.

- On suppose $c > 0$. Quel est le signe de $bc - ac$? Déduis-en $ac < bc$.
- On suppose $c < 0$. Quel est le signe de $bc - ac$? Déduis-en $ac > bc$.

JE RETIENS

Soit a , b et c trois nombres réels : si $a < b$ et si $b < c$, alors $a < c$.

Soit a , b et c trois nombres réels : si $a < b$, alors $a + c < b + c$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre à chacun de ses deux membres.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit c un nombre réel différent de 0.

Si c est positif alors $ac < bc$, mais si c est négatif alors $ac > bc$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant ses deux membres par un nombre positif et différent de 0.

En revanche, on change le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant ses deux membres par un nombre négatif et différent de 0.

Exemple

$$\text{Si } x < y + 1, \text{ alors } x + (-1) < y + 1 + (-1) \text{ donc } x - 1 < y.$$

Exemple

$$\text{Si } 5x < 10(y + 1), \text{ alors } x < 2(y + 1); \text{ si } x < y, \text{ alors } \frac{x}{2} < \frac{y}{2}.$$

Exemples

$$\text{Si } -x > 3 - y, \text{ alors } x < -(3 - y) \text{ donc } x < y - 3; \text{ si } -3x > 5, \text{ alors } x < \frac{5}{-3} \text{ donc } x < -\frac{5}{3}.$$

J'APPLIQUE

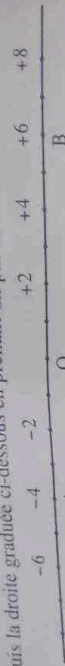
- a et b sont deux nombres tels que $(a + 3) - (b + 3) \geq 0$. Compare a et b .
- x et y sont deux nombres tels que $(2 - x) - (2 - y) \leq 0$. Compare x et y .
- a et b sont deux nombres tels que $(3x - 1) + (1 - 3y) \leq 0$. Compare x et y .
- On a $3x - 1 < 5 + y$. Montre qu'on a aussi $x < \frac{y}{3} + 2$.
- Résous l'inéquation $2 - 3x > 5x$ en ajoutant $3x$ à ses deux membres.
- Résous l'inéquation $\frac{x}{-5} < \frac{7-x}{-2}$ en multipliant ses deux membres par -10 .

JE ME SOUVIENS

- Soit a et b deux nombres quelconques. Écrire $a < b$ signifie que a est différent de b et inférieur à b . Écrire $a \leq b$ signifie que a est inférieur ou bien égal à b .
- Soit a , b et x trois nombres réels. Au lieu d'écrire $a \leq x$ et $x \leq b$, on peut écrire $a \leq x \leq b$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Reproduis la droite graduée ci-dessous en prenant un pas de 1 cm.



Caractérise par une double inégalité l'abscisse x d'un point du segment $[AB]$.

- Trace un axe Δ en prenant un pas de 1 cm. Colorie le segment $[AB]$ qui contient les points M dont l'abscisse x vérifie les relations $x \geq -\frac{7}{2}$ et $x \leq \frac{5}{2}$.

- Trouve deux entiers consécutifs a et $a+1$ tels que $a < \sqrt{30}$ et $\sqrt{30} < a+1$.

JE RETIENS

- Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$. On dit que l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un **intervalle fermé**. On le note $[a, b]$.
- L'intervalle ouvert $]a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$. L'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $[a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.
- L'intervalle ouvert à gauche et fermé à droite $]a, b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$.

Un intervalle fermé peut ne contenir qu'un seul nombre : $[2, 2]$ par exemple.

Un intervalle ouvert peut être vide : $]1, 1[$ par exemple.

Dans tous ces cas, les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle. Le nombre $\frac{b+a}{2}$ est le **centre** de l'intervalle.

On définit de même les intervalles $]a, a[$ et $]a, a]$.

- On note $]-\infty, a[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$. On note $]a, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$. Par convention, on dit que ces ensembles de nombres sont encore des intervalles de $\mathbb{R}$.

- On dit que deux intervalles sont **disjoints** quand ils n'ont aucun élément commun.

J'APPLIQUE

- Représente sur un axe les intervalles suivants : $[-3; -1,5]$; $] -4; 0[$; $]2,5; 4,5[$; $[-5; 1]$.
- Ecris sous forme d'intervalles les ensembles de nombres définis ci-après : $-5 \leq x \leq 7$; $-3 < x \leq 2$; $-\frac{3}{5} \leq x < 1$; $0 < x < 4$; $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$. Donne les amplitudes de ces intervalles.
- Traduis par une double inégalité chacune des relations d'appartenance qui suivent : $x \in [-8; -5]$; $x \in]2; 9[$; $x \in [-5; 4]$; $x \in [0; 3[$; $x \in [-4; 0]$.
- Que peut-on dire d'un nombre x qui appartient à la fois à l'intervalle $[-3; 2]$ et à l'intervalle $[-2; 1]$? Fais une représentation graphique.
- Détermine le milieu de chacun des intervalles suivants : $[-8; 2]$; $] -4,5; 0[$; $]2,5; 5,5[$.

JE ME SOUVIENS

Quels que soient les nombres x et y on a toujours $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Nombres	-8	-5	-3	0	2	4	5
Carrés	64	25	9	0	4	16	25

- Compare les carrés de deux nombres du tableau. Quand sont-ils rangés dans le même ordre que les deux nombres ? Quand sont-ils rangés dans l'ordre contraire ? Qu'observes-tu si les deux nombres n'ont pas le même signe ?
- De la même façon, compare les inverses de deux nombres non nuls du tableau.

Soit x et y deux nombres tels que $x < y$. On a alors $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$.

Quel est le signe de $y+x$ si x et y sont positifs ? si x et y sont négatifs ? si x et y n'ont pas le même signe ?

Quel est le signe de $y^2 - x^2$ si x et y sont positifs ? si x et y sont négatifs ? si x et y n'ont pas le même signe ?

Soit x et y deux nombres non nuls tels que $x < y$. On a alors $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy} = \frac{x-y}{xy}$.

Quel est le signe de $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ si x et y sont positifs ? si x et y sont négatifs ? si x et y n'ont pas le même signe ?

Soit x et y deux nombres positifs tels que $x < y$. On a alors $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$.

Quel est le signe de $\sqrt{y} - \sqrt{x}$?

JE RETIENS

- Si deux nombres sont positifs, alors leurs carrés sont rangés dans le même ordre qu'eux.

Si deux nombres sont négatifs, alors leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

- Si deux nombres non nuls ont le même signe, alors leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.

- Deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Si les deux nombres ont des signes contraires, on ne peut pas conclure.

Si les deux nombres ont des signes contraires, on ne peut pas conclure.

Conséquence importante : pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Exemple

$$3 < 7 \text{ donc } 3^2 < 7^2$$

Exemple

$$-7 < -3 \text{ donc } (-7)^2 < (-3)^2$$

Exemples

$$-8 < -2 \text{ donc } \frac{1}{-8} > \frac{1}{-2}$$

$$2 < 8 \text{ donc } \frac{1}{2} < \frac{1}{8}$$

Exemple

$$3 < 5 \text{ donc } \sqrt{3} < \sqrt{5}$$

J'APPLIQUE

- Compare $7\sqrt{2}$ à 10 sans calculer de valeur approchée de $7\sqrt{2}$.
- Sans en calculer des valeurs approchées, compare les nombres $\frac{1}{25,6}$ et $\frac{1}{23,9}$.
- $5\sqrt{3}$ et $3\sqrt{5}$ sont des nombres positifs. Compare leurs carrés puis les nombres eux-mêmes.

JE ME SOUVIENS

Encadrer un nombre x c'est trouver deux nombres a et b tels que $a < x < b$.
On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre à chacun de ses deux membres.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Utilise la table des racines carrées de la page 143 pour donner des valeurs approchées à 0,001 près de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

a) Vérifie que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

b) Vérifie que $1,41 + 1,73 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1,42 + 1,74$.

c) a, a', b, b', x et y sont des nombres réels tels que $a < x < b$ et $a' < y < b'$.

a) Démontre chacune des inégalités suivantes : $a + a' < x + a', x + a' < x + y, x + y < b + y$ et $b + y < b + b'$.

b) Déduis-en $a + a' < x + y < b + b'$.

d) a, b et x sont des nombres réels tels que $a < x < b$; a', b' et y sont des nombres réels tels que $a' < y < b'$.

a) Démontre que $-x > -a$ et que $-b < -x$. Déduis-en $-b < -x < -a$.

b) Déduis-en $a' - b < y - x < b' - a$.

c) Application : donne un encadrement de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ sachant que $1,42 < \sqrt{2} < 1,43$ et que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.



JE RETIENS

On peut encadrer la somme de deux nombres x et y connaissant des encadrements de x et de y grâce à la règle suivante : si $a < x < b$ et si $a' < y < b'$, alors $a + a' < x + y < b + b'$.

On peut encadrer l'opposé d'un nombre connaissant un encadrement de ce nombre x grâce à la règle suivante : si $a < x < b$, alors $-b < -x < -a$.

Pour trouver un encadrement de $y - x$ connaissant des encadrements de x et de y , on détermine un encadrement de la somme $y + (-x)$.

Exemple.

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \text{ et } 2,64 < \sqrt{7} < 2,65 \\ \text{donc } 1,73 + 2,64 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 1,74 + 2,65; \\ \text{on en tire } 4,37 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,39.$$

Exemple.

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \\ \text{donc } -2,24 < -\sqrt{5} < -2,23.$$

Exemple.

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \text{ et } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ \text{on a } 2,23 - 1,42 < \sqrt{5} - \sqrt{2} < 2,24 - 1,41; \\ \text{on en tire } 0,81 < \sqrt{5} - \sqrt{2} < 0,83.$$

J'APPLIQUE

Utilise la table des racines carrées de la page 143 pour trouver des encadrements à 0,001 près des nombres $\sqrt{20}$ et $\sqrt{50}$. Détermine ensuite des encadrements de $\sqrt{50} + \sqrt{20}$ et de $\sqrt{50} - \sqrt{20}$. Vérifie tes résultats avec une calculatrice.

Utilise la table des valeurs trigonométriques de la page 144 pour trouver des encadrements à 0,001 près des nombres $\cos 25^\circ$ et $\sin 35^\circ$. Détermine ensuite des encadrements de $\cos 25^\circ + \sin 35^\circ$ et de $\cos 25^\circ - \sin 35^\circ$. Vérifie tes résultats avec une calculatrice.

ENCADRER UN PRODUIT ET UN QUOTIENT

JE ME SOUVIENS

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant ses deux membres par un nombre positif et différent de 0.

Si deux nombres non nuls ont le même signe, alors leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Grâce à la table des racines carrées de la page 143, vérifie que $3,46 < \sqrt{12} < 3,47$ et que $6,32 < \sqrt{40} < 6,33$. Vérifie ensuite que $3,46 \times 6,32 < \sqrt{12} \times \sqrt{40} < 3,47 \times 6,33$.

a, a', b, b', x et y sont des nombres réels positifs et non nuls tels que $0 < a < x < b$ et $0 < a' < y < b'$. Range les nombres aa', xa', xy, by et bb' dans un ordre croissant, puis montre que $aa' < xy < bb'$.

a, b, x, a', b' et y sont six nombres réels positifs non nuls tels que $0 < a < x < b$ et $0 < a' < y < b'$. Démontre que $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$ puis déduis-en $\frac{a'}{b} < \frac{y}{x} < \frac{b'}{a}$. On doit avoir $0 < a < x < b$ et $0 < a' < y < b'$.

Application : utilise les encadrements $\sqrt{12}$ et de $\sqrt{40}$ ci-dessus pour déterminer des encadrements de $\frac{1}{\sqrt{40}}$ et de $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{40}}$.



JE RETIENS

On peut encadrer le produit de deux nombres positifs x et y connaissant des encadrements de x et de y grâce à la règle suivante : si $0 < a < x < b$ et si $0 < a' < y < b'$, alors $0 < aa' < xy < bb'$.

On peut encadrer l'inverse d'un nombre positif x non nul connaissant un encadrement de x grâce à la règle suivante : si $0 < a < x < b$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$.

Soit x et y deux nombres positifs non nuls. Pour déterminer un encadrement du quotient connaissant des encadrements de x et de y , on détermine un encadrement du produit $y \times \frac{1}{x}$.

Exemple.

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \text{ et } 2,64 < \sqrt{7} < 2,65 \\ \text{donc } 1,73 \times 2,64 < \sqrt{3} \times \sqrt{7} < 1,74 \times 2,65; \\ \text{on en tire } 4,56 < \sqrt{3} \times \sqrt{7} < 4,62.$$

Exemple.

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \\ \text{donc } \frac{1}{2,24} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2,23} \\ \text{soit } 0,444 < \frac{1}{\sqrt{5}} < 0,445.$$

Il existe des règles analogues pour des nombres négatifs.

Exemple.

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \text{ et } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ \text{Puisque } 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \text{ et } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ \text{donc } 1,41 \times \frac{1}{2,24} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2,23} < 1,42 \times \frac{1}{2,23}; \\ \text{et } 0,62 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 0,64.$$



J'APPLIQUE

Utilise la table des racines carrées de la page 143 pour déterminer des encadrements à 0,001 près de $\sqrt{6}$ et de $\sqrt{15}$. Détermine ensuite des encadrements de $\sqrt{6} \times \sqrt{15}$ et de $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$.

Utilise la table trigonométrique de la page 143 pour trouver des encadrements à 0,001 près de $\cos 25^\circ$ et de $\sin 25^\circ$. Détermine ensuite des encadrements de $\tan 25^\circ$ et de $\sin 25^\circ \times \cos 25^\circ$.

JE ME SOUVIENS

Un réel positif est un nombre supérieur ou égal à 0.

Un réel négatif est un nombre inférieur ou égal à 0.

Deux nombres réels sont opposés quand leur somme est égale à 0.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1 (d) est une droite graduée de repère (O, I) tel que $OI = 1$ cm. Place les points A, B, C et D ayant pour abscisses respectives -4 ; -3 ; 2,5 et 5. Place leurs symétriques A', B', C' et D' par rapport à O. Quelles sont les abscisses de ces points ?

Quelles sont les distances qui séparent A et A' de l'origine O de l'axe ? B et B' ? C et C' ? D et D' ?

2 (d) est une droite graduée de repère (O, I) tel que $OI = 1$ cm. Place le point M dont la distance à l'origine O est égale à 3,2 cm. Combien y a-t-il de solutions ?

3 (d) est une droite graduée de repère (O, I) tel que $OI = 1$ cm. A est le point de (d) d'abscisse = 3. À quel intervalle appartient l'abscisse du point M, sachant que la distance de M au point A est inférieure à 2 cm ?



JE RETIENS

• Soit x un nombre réel quelconque. On peut lui associer un nombre positif appelé valeur absolue de x et noté $|x|$.

Si x est positif sa valeur absolue est le nombre x lui-même.

Si x est négatif sa valeur absolue est son opposé.

• $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

• $|x + y| \leq |x| + |y|$.

• La racine carrée du carré d'un nombre est la valeur absolue de ce nombre : pour tout nombre réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples : $|-4,5| = 4,5$; $|3,75| = 3,75$; $|\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4}$; $|\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$; $|(-4,5)^2| = |-4,5| = 4,5$.

Exemple : $\sqrt{(-4,5)^2} = |-4,5| = 4,5$.



J'APPLIQUE

1 Donne la valeur absolue de chacun des nombres suivants : -12,7 ; $-\frac{6}{11}$; -0,001 ; 0 ; $\frac{17}{25}$.

2 Trouve les nombres qui ont respectivement pour valeur absolue 3 ; 2,4 ; $\frac{7}{9}$ et 15.

3 Écris plus simplement chacun des nombres suivants : $\sqrt{(-2,4)^2}$; $\sqrt{(-1,8)^2}$; $\sqrt{(\frac{-3}{4})^2}$.

4 Trouve un nombre x tel que $|x| + 1 = 2$. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

5 Montre que la valeur absolue de $\frac{\sqrt{2}-8}{8-\sqrt{2}}$ est 1.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Racines carrées

Exercices 1 à 3 : Simplifie les nombres suivants :

1 $\sqrt{16}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{0,49}$; $\sqrt{0,01}$.

2 $\sqrt{12}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

3 $\sqrt{5,4}$; $\sqrt{7,5}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{\frac{6}{5}}$; $\sqrt{4,34}$.

Exercices 4 à 6 : Développe les nombres suivants :

4 $(5 + \sqrt{6})^2$; $(1 - \sqrt{3})^2$; $(1 + \sqrt{3})^2$; $(3 - \sqrt{2})^2$; $(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})$; $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})$.

5 $(1 + \sqrt{5})^2$; $(3 - \sqrt{3})^2$; $(3 + \sqrt{5})^2$; $(5 - \sqrt{3})^2$; $(10 - \sqrt{2})(10 + \sqrt{2})$.

6 $(3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1)^2$.

7 On donne $P(x) = x^2 + x\sqrt{5} + 10$. Calcule $P(x)$ pour $x = \sqrt{5}$.

Calcul approché d'une racine carrée

8 Calcule des approximations décimales à 0,0001 près des nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{300}$ et $\sqrt{3000}$. Donne des valeurs approchées des quotients $\sqrt{30}$, $\sqrt{300}$ et $\sqrt{3000}$.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{30}$ et $\sqrt{300}$

9 Calcule des valeurs approchées à 0,0001 près de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{10}$ et de $\sqrt{20}$. Déduis-en une valeur approchée de $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}$. Qu' observes-tu ?

Opérations et racines carrées

Exercices 10 à 12 : effectue les opérations suivantes et simplifie les résultats.

10 $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{45} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{80} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{20} \times \sqrt{45}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{27} \times \sqrt{6}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{15} \times \sqrt{5}$.

11 $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{98}}$; $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{20}}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$; $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$; $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{48}}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{48}}$; $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}$.

12 $\sqrt{50} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{80} \times \sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt{\frac{9}{10}} \times \sqrt{\frac{40}{81}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\sqrt{\frac{3}{60}}$.

13 Soit $x = 2\sqrt{75}$ et $y = \sqrt{27}$. Calcule xy et montre que $x + y = 13\sqrt{3}$.

Utilisation d'une table de racines carrées
Exercices 14 et 15 : Utilise la table des racines carrées pour calculer des valeurs approchées à 0,001 près des nombres indiqués.

14 $\sqrt{34}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{150}$; $\sqrt{4\,000}$; $\sqrt{6\,500}$.

15 $\sqrt{9,56}$; $\sqrt{110,4}$; $\sqrt{704,5}$.

Calculer avec des radicaux

Exercices 16 à 18 : Écris sous la forme $a\sqrt{b}$ chacune des sommes indiquées (a et b sont des entiers, b est positif).

16 $\sqrt{75} + \sqrt{48}$; $\sqrt{700} - 4\sqrt{28} + 5\sqrt{7}$; $\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{180}$; $3\sqrt{80} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$.

17 $2\sqrt{75} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{3}$; $3\sqrt{20} - \sqrt{5} + \sqrt{45}$; $\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + \sqrt{300}$; $\sqrt{200} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18}$.

18 $\sqrt{300} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}$; $\sqrt{72} + \sqrt{98} - \sqrt{18}$; $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}$; $\sqrt{32} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{72}$.

19 Soit $x = \sqrt{2}$ et $y = 1 - \sqrt{2}$. Écris chacun des nombres $x - y$, xy , x^3 , y^3 , x^2y^2 sous la forme $a + b\sqrt{2}$ (a et b sont des entiers avec $b > 0$).

Exercices 20 et 21 : Écris les expressions conjuguées des expressions indiquées ; effectue le produit de chaque expression par son expression conjuguée.

20 $1 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{5}$; $\sqrt{12} - 3 + \sqrt{2}$.

21 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; $\sqrt{20} - \sqrt{10}$.

Exercices 22 et 23 : Écris chacun des quotients suivants sans radical au dénominateur.

22 $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{8}{\sqrt{6}}$; $\frac{10}{\sqrt{12}}$; $\frac{15}{\sqrt{40}}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

23 $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{5} - 1}$; $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Comparaison des nombres réels

Exercices 24 à 26 : Compare les nombres x et y sachant qu'ils vérifient la relation indiquée.

24 $(x - 5) - (y - \sqrt{3}) \geq 0$.

25 $(4 - x) - (\sqrt{12} - y) \leq 0$.

26 $(3x + \sqrt{3}) - (1 + 3y) \leq 0$.

Intervalles de $\mathbb{R}$

27 Représente sur un même axe les intervalles $[-4; -2]$, $[-3; 0]$ et $[-\sqrt{8}; 5]$. Hachure la partie commune à ces trois intervalles.

28 Écris sous forme d'intervalles les ensembles de nombres qui vérifient les inégalités suivantes :

$$-7 \leq x \leq \sqrt{5}; -2 < x \leq \sqrt{8}; -\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}; 0 < x < 3.$$

Donne les amplitudes de ces intervalles.

29 Traduis par une double inégalité chacune des relations d'appartenance suivantes :

$$x \in [-4; -1]; x \in [\sqrt{3}; 2]; x \in [-3; \frac{5}{\sqrt{2}}]; x \in [0; 1]; x \in [-3; 0].$$

30 Détermine le milieu des intervalles :

$$[-5; 1]; [-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}]; [\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{5}]; [\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}].$$

Comparer des inverses, des carrés et des racines carrées

31 Calcule $(5\sqrt{3})^2$ et 10^2 . Compare ensuite $5\sqrt{3}$ et 10, puis $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}}$.

32 Compare $(2\sqrt{3})^2$ et $(3\sqrt{2})^2$. Compare ensuite $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

33 On a $2 < \sqrt{5} < 3$. Montre que $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$. Trouve deux entiers consécutifs a et b tels que $a < \frac{1}{\sqrt{5} - 1} < b$.

Encadrer une somme et une différence

Exercices 34 et 35 : Utilise une table pour donner des encadrements avec deux décimales des nombres suivants :

34 $\sqrt{80} + \sqrt{30}$; $\sqrt{80} - \sqrt{30}$.

35 $\cos 55^\circ + \sin 55^\circ$; $\cos 15^\circ + \cos 30^\circ$.

Encadrer un produit et un quotient

Exercices 36 et 37 : Utilise une table pour donner des encadrements avec deux décimales des nombres suivants :

36 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{35} \times \sqrt{82}$; $(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})$.

37 $\sin 45^\circ \times \cos 15^\circ$; $\frac{1}{\tan 65^\circ}$.

Valeur absolue d'un nombre réel

38 Quels sont les nombres qui ont respectivement 2; 5; $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{8}$ pour valeurs absolues ?

39 Calcule $1 + |-3|$; $5 - |-4|$; $|-3| - |-2|$; $3 - \frac{1}{|-5|}$; $|- \sqrt{3} - \sqrt{12}|$.

40 Trouve un nombre x tel que $|x| - 3 = 5$. Combien y a-t-il de solutions ?

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

41 L'aire d'un disque de rayon R est égale à $32,36 \text{ m}^2$. On donne $3,14 < \pi < 3,15$.

- a) Donne un encadrement de R avec 4 chiffres décimaux, en utilisant la table des carrés.
b) Déduis-en un encadrement de R avec deux chiffres décimaux.

42 On veut construire un réservoir cylindrique de 2 250 litres de capacité et de 75 cm de hauteur. On appelle R le rayon du réservoir. Donne un encadrement de R^2 . Puis, à l'aide de la table des carrés, déduis-en la valeur de R à 1 cm près. On donne $3,14 < \pi < 3,15$.

43 Donne un encadrement de $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 5\sqrt{2}$ sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

44 Soit $x = \sqrt{37} + 12\sqrt{7}$ et $y = \sqrt{37} - 12\sqrt{7}$.

Calcule $(3 + 2\sqrt{7})^2$ et $(3 - 2\sqrt{7})^2$, puis simplifie x et y . Calcule $x + y$ et $x - y$.

Calcule des valeurs approchées de $x + y$ et de $x - y$ avec deux décimales sachant que $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$.

JE ME SOUVIENS

L'équation $2x + 5 = 4x - 1$ est une équation d'inconnue x . C'est une équation à une seule inconnue. Elle est du premier degré car elle ne contient aucune puissance de x d'exposant supérieur à 1. Toute équation du premier degré à une inconnue peut se mettre sous la forme $ax + b = 0$, a et b étant deux nombres connus. Si a n'est pas nul, l'équation $ax + b = 0$ d'inconnue x possède une seule solution qui est $x = -\frac{b}{a}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Voici, étape par étape, la résolution de l'équation $2(5x - 7) - 4 = (x + 6) - 5(x + 2)$ d'inconnue x et sa vérification.

Étape n°	Résultats des calculs	Étape n°	Résultats des calculs
1	$(10x - 14) - 4 = (x + 6) - (5x + 10)$	7	$14x = 14$
2	$10x - 14 - 4 = x + 6 - 5x - 10$	8	$x = 1$
3	$10x - 18 = -4x - 4$	9	si $x = 1$, $(10x - 14) - 4 = (10 \times 1 - 14) - 4 = -8$
4	$10x - 18 + 4x = -4$	10	si $x = 1$, $(x + 6) - (5x + 10) = (1 + 6) - (5 \times 1 + 10) = -8$
5	$14x - 18 = -4$	11	donc $(10x - 14) - 4 = (x + 6) - (5x + 10)$ pour $x = 1$
6	$14x = -4 + 18$		

Pour chaque étape, indique la règle de calcul qui a été employée puis rédige la résolution complète de l'équation.

Soit l'équation $\frac{2}{3}x - \frac{1}{12} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}$. Multiplie les deux membres de l'équation par un multiple commun aux dénominateurs qui figurent dans cette équation. Résous l'équation obtenue et vérifie que sa solution est aussi la solution de l'équation donnée.

JE RETIENS

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on utilise les règles du calcul algébrique ainsi que les propriétés suivantes :

- on peut ajouter ou retrancher la même expression ou le même nombre aux deux membres d'une équation;
 - on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par le même nombre à condition qu'il ne soit pas nul;
 - dans une équation, on peut faire passer un terme d'un membre à l'autre à condition de changer le signe qui le précède.
- Pour résoudre une équation qui contient des dénominateurs, on peut les supprimer en multipliant les deux membres de l'équation par un multiple commun à ces dénominateurs.



J'APPLIQUE

1 Résous chacune des équations suivantes : $4x = \frac{4}{5}$; $-3x + 4 = 7$; $5x - 3 = 2x$; $7x - 3 = 3x + 2$;

$$x\sqrt{3} - \sqrt{2} = 5$$
; $3(2x - 5) + 2(1 - 3x) + 1 = -4x + 3(2 - 5x)$; $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$.

JE ME SOUVIENS

Un produit de deux facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

Exemple.

$$(a-5)(b-4) = 0 \text{ pour } a = 5 \text{ ou } b = 4.$$

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1. Résous les trois équations suivantes : $(x-3)(x+2) = 0$; $4x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9} = 0$; $x^2 = 8$.

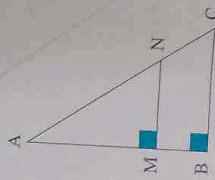
2. AMIN et ABC sont deux triangles rectangles. On a $AN - AM = 1$ cm, $MB = 2$ cm et $NC = 2,4$ cm.

a) On pose $AM = x$. Le nombre x peut-il être négatif ? Peut-il être nul ?

b) Exprime AB, AN et AC en fonction de x . Montre que x est une solution de l'équation $\frac{x}{x+2} = \frac{x+1}{x+3,4}$.

c) Déduis-en que x est solution de l'équation $x(x+3,4) - (x+1)(x+2) = 0$. Développe puis réduis le premier membre de cette nouvelle équation. Résous cette équation.

d) Dessine la figure en vraie grandeur.



JE RETIENS

L'ensemble des solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d) = 0$ est formé des solutions des deux équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$. Pour résoudre une équation de ce type, il faut donc résoudre séparément les équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$.

Pour résoudre une équation de degré supérieur à 1, on fait la différence des deux membres pour obtenir une équation dont le second membre est 0. On essaye de factoriser le premier membre. Si on n'y arrive pas, on essaye de développer et de réduire pour voir si les termes de degré supérieur à 1 ne s'éliminent pas.

Pour résoudre une équation du type $x^2 = a$ avec $a > 0$, on l'écrit sous la forme $x^2 - a = 0$, qui peut encore s'écrire $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$.

J'APPLIQUE

1. Résous les équations suivantes : $(2x+4)(9-4x) = 0$; $(4-5x)(3x-1) = 0$; $(2x - \frac{1}{2})^2 = 0$; $x^2 = 16$; $3x^2 = 27$; $5x^2 = 4$; $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 4$.

2. Résous les équations suivantes : $(3-2x)(5x+4) - (3-2x)(6x+5) = 0$; $\frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x-2}$; $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-1}$.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES

JE ME SOUVIENS

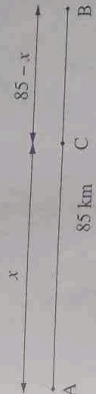
L'égalité $1+x = 13-5x$ est une équation du premier degré à une inconnue. Résoudre cette équation c'est trouver la valeur de l'inconnue pour lesquelles les deux membres sont égaux. Dans l'exemple proposé, il y a une seule solution qui est $x = 2$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Voici un problème à résoudre à l'aide d'une équation : Deux localités A et B sont distantes de 85 km. Un premier camion part de A à 8 h et se dirige vers B avec une vitesse constante de 45 km/h. Un deuxième camion part de B à 9 h et se dirige vers A en roulant à la vitesse constante de 75 km/h. À quelle distance de A vont-ils se croiser ? À quelle heure ? La résolution de ce problème se déroule en quatre étapes.

a) Première étape : choix d'une inconnue.

Désignons par x la distance, exprimée en km, qui sépare A de l'endroit C où se fait le croisement des deux camions.



b) Deuxième étape : mise en équation.

Distance qui sépare B de C, endroit où se fait le croisement : $85 - x$ (en km).

Temps pendant lequel le premier camion a roulé : $\frac{x}{45}$ (en heures).

Temps pendant lequel le deuxième camion a roulé : $\frac{85-x}{75}$ (en heures).

Puisque le deuxième camion a roulé 1 heure de moins que le premier, on peut former l'équation suivante : $\frac{85-x}{75} + 1 = \frac{x}{45}$.

c) Troisième et quatrième étapes : résolution de l'équation, vérification et interprétation du résultat. À toi de terminer ! N'oublie pas de vérifier la solution trouvée.

JE RETIENS

La résolution algébrique d'un problème comprend plusieurs étapes : il faut successivement choisir une inconnue, mettre le problème en équation, résoudre l'équation, vérifier le résultat obtenu et discuter sa validité.

J'APPLIQUE

1. Refais le problème qui t'a été proposé ci-dessus en prenant comme inconnue le temps t (en heures) pendant lequel a roulé le premier camion. Il te faut exprimer en fonction de t et en km les distances parcourues par les deux camions et écrire que leur somme est égale à 85 km. Compare les deux méthodes.

18 $(3x-2)^2 - (5x+1)^2 = 0$.

Exercices 19 à 21 : x désigne un nombre réel ; pour résoudre chacune des équations suivantes, développe puis réduis le premier membre.

19 $(x-2)(2x+5) - 2(x-3)(x+1) = 0$.

20 $(x+3)(4x+1) - (2x-3)^2 = 0$.

21 $6x(x+1) - (2x+1)(3x-2) = 0$.

Exercices 22 à 25 : x désigne un nombre réel ; pour résoudre chacune des équations suivantes, fais la différence des deux membres afin d'obtenir une équation ayant 0 comme second membre.

22 $x^2 = 25$; $2x^2 = 50$; $2x^2 = 9,4$.

23 $(x-4)(x-3) = x^2 - 7x + 5$.

24 $(3-2x)(5x+4) = (3-2x)(6x+5)$.

25 $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} = \frac{x}{6}$.

Exercices 26 à 28 : Dans les équations suivantes, x désigne un nombre réel et $|x|$ sa valeur absolue.

26 $|x| - 4 = 2$; $3 - 2|x| = 1$.

27 $|x| - 1 = 3 - |x|$; $3|x| + 1 = 10$.

28 $5 + 3|x| = 9 - |x|$; $|x-5| = 3$.

Exercices 29 à 32 : x désigne un nombre réel ; pour résoudre les équations indiquées, effectue le produit des moyens et des extrêmes.

29 $\frac{x}{2} = \frac{3}{x}$; $\frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{4}$.

30 $\frac{x-1}{2+x} = \frac{3x-4}{3x+1}$.

31 $\frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x-2}$.

32 $\frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$.

Équations et problèmes

33 À un examen, les mathématiques et le français ont coefficient 2. L'histoire-géographie a un coefficient 1. Pierre a obtenu 12 en français et 14 en histoire-géographie. Quelle note x lui faut-il obtenir en mathématiques pour que sa moyenne aux trois épreuves soit 10 sur 20 ?

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Équations du premier degré à une inconnue
Exercices 1 à 8 : x désigne un nombre réel ; résous chacune des équations proposées.

1 $8x = \frac{1}{5}$; $-2x + 4 = -12$; $3x - 4 = 5x$.

2 $-3x - 3 = 3x + 1$; $x\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = -1$.

3 $2(5x-3) + 4(1+2x) + 1 = -2x + 5(3-4x)$.

4 $3(2x-5) + 3(4+3x) - 2 = -3(2x-1)$.

5 $x\sqrt{2} + 3 = x\sqrt{5} - 3$.

6 $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = \frac{7}{5}$.

7 $\frac{5x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{3}{8}$.

8 $\frac{-3x}{4} + \frac{x-1}{6} = 1$.

Équations qui se ramènent à des équations du premier degré à une inconnue
Exercices 9 à 11 : x désigne un nombre réel ; résous chacune des équations proposées.

9 $(3x+5)(4-x) = 0$; $(1+5x)(2x-1) = 0$.

10 $(7x - \frac{1}{2})^2 = 0$; $(3x + \frac{3}{4})^2 = 0$.

11 $(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{5} + 2) = 0$.

Exercices 12 à 15 : x désigne un nombre réel ; pour résoudre chacune des équations suivantes, factorise d'abord son premier membre.

12 $x - 2x^2 = 0$.

13 $x - 2 + (5x - 3)(x - 2) = 0$.

14 $(4x+3)(5x-2) - (x-1)(3+4x) = 0$.

15 $\frac{x+\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2}) = 0$.

Exercices 16 à 18 : x désigne un nombre réel ; pour résoudre chacune des équations suivantes, factorise son premier membre en utilisant un produit remarquable.

16 $4x^2 - 25 = 0$; $9x^2 - 16 = 0$; $x^2 - 8 = 0$.

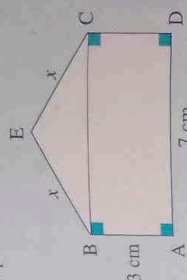
17 $x^2 - 6x + 9 = 0$; $25x^2 + 40x + 16 = 0$.

34 Trouve trois nombres entiers consécutifs ayant pour somme 213.

35 Trouve trois nombres entiers impairs consécutifs ayant pour somme 357.

36 Montre que les trois exercices qui suivent se résolvent à l'aide de la même équation.

a) Trouve x pour que le triangle BCE ait le même périmètre que le rectangle ABCD.



b) Le frère d'Abdou a 20 ans. Son âge représente le double de celui d'Abdou plus 7 ans. Quel est l'âge x d'Abdou ?

c) La somme des poids de deux paquets est égale à 20 kg. L'un des paquets pèse 7 kg de plus que l'autre. Quel est le poids x du plus léger ?

37 ABC est un triangle dans lequel $\hat{B} = \frac{1}{5} \hat{A}$ et $\hat{C} = 3\hat{B}$. On désigne par x la mesure de l'angle $\hat{A}$. Trouve les mesures des trois angles.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

38 En doublant le carré d'un nombre x , on trouve le tiers de ce nombre. Que vaut x ?

39 Le carré d'un nombre x est égal à l'opposé du cube de ce nombre. Que vaut x ?

40 Un premier rectangle a pour dimensions $x+5$ et $x-2$. Un deuxième rectangle a pour dimensions $x+8$ et $x-3$. Les aires des deux rectangles sont égales.

a) Quel est le signe du nombre x ?

b) Quelles sont les dimensions de chaque rectangle ?

41 On désigne par x la longueur des arêtes d'un cube. Le même nombre mesure à la fois le volume du cube et la somme des aires de toutes les faces du cube. Trouve x .

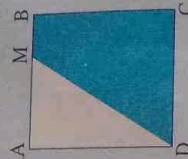
42 On désigne par R le rayon d'une boule. Le même nombre mesure son aire et son volume. Que vaut R ?

43 Quel nombre entier x faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de $\frac{4}{7}$ pour obtenir une fraction égale à $\frac{4}{5}$?

44 On ajoute un nombre x au numérateur de la fraction $\frac{15}{17}$ et on le retranche à son dénominateur. On obtient $\frac{5}{3}$. Trouve x .

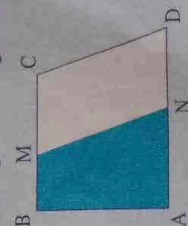
45 Un trapèze a une hauteur de 6 cm. Son aire est égale à 26 cm². La différence des deux bases est 3 cm. On désigne par x la longueur de sa petite base. Exprime la longueur de sa grande base en fonction de x . Trouve x .

46 Les côtés d'un carré ABCD ont une longueur de 6 cm. On marque un point M sur [AB] et on désigne par x la longueur AM.



Calcule x pour que l'aire du triangle AMD soit le tiers de celle du carré ABCD.

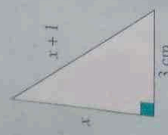
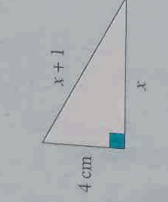
47 ABCD est un trapèze rectangle de bases [AD] et [BC]. AB = 10 cm, BC = 12 cm et AD = 15 cm. Soit M un point du segment [BC]. La parallèle à (CD) qui passe par M coupe (AD) en N. On désigne par x la longueur BM.



Détermine x pour que l'aire du trapèze ABMN soit égale à celle du parallélogramme MCDN.

48 Vérifie que $(6x + 5)(x + 1) - 1 = (3x + 4)(2x + 1)$. Déduis-en les solutions de l'équation $6x^2 + 11x + 4 = 0$.

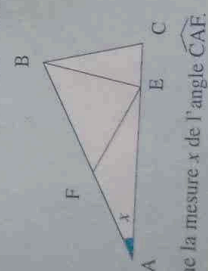
49 Soit $P(x) = (x + 7)x^2 - (2 - 3x)x^2$.
 a) Développe et réduis $P(x)$.
 b) Factorise $P(x)$ et résous l'équation $P(x) = 0$.
 c) Résous les équations $P(x) = -8x^2$ et $P(x) = (2x - 9)^2$.

50 L'unité de longueur est le cm. Calcule x dans chacun des deux cas suivants.
 a)  b) 

51 L'unité de longueur est le cm. x désignant un nombre positif, on considère un carré dont les côtés ont pour longueur $2x + 3$ et un rectangle dont les dimensions sont $4x$ et x . La différence des aires des deux figures est 33 cm^2 . Calcule les dimensions des deux figures.

52 Dans une classe de 60 élèves, la moyenne trimestrielle est 11,5. Celle des filles est 13, celle des garçons est 11. Quel est le nombre x des filles?

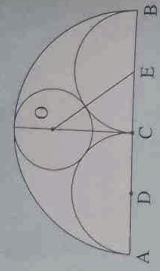
53 Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle en A et $AF = FE = EB = BC$.



Détermine la mesure x de l'angle CAF.

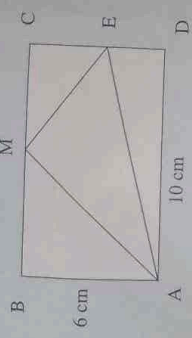
54 Les cercles de centre D, E et O sont tangents entre eux et tangents au cercle de centre C et de rayon 8 cm. D et E sont les milieux

respectifs de [AC] et de [CB]. On désigne par x le rayon du cercle de centre O.



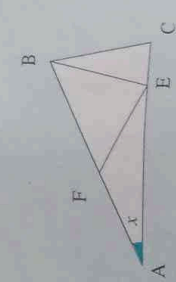
a) Exprime les longueurs des côtés OE, OC et CE du triangle rectangle OCE en fonction de x .
 b) Détermine x .
 c) Construis la figure.

55 ABCD est un rectangle tel que $AD = 10 \text{ cm}$ et $AB = 6 \text{ cm}$. E est un point de [CD] tel que $CE = 3,5 \text{ cm}$. M est un point variable de [BC].



On pose $BM = x$.
 a) Développe et réduis $2(x - 3)(x - 7)$.
 b) Trouve x pour que le triangle AME soit rectangle en M.
 c) Le cercle de diamètre [AE] coupe (BC) en N et en N'. Démontre que N et N' correspondent aux solutions cherchées.

56 On marque un point M sur un segment [AB] qui mesure 8 cm. On construit le carré ACDM et le demi-cercle de diamètre [MB].



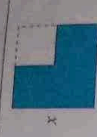
On désigne par x la longueur AM.
 a) Trouve x pour que le carré ait le même périmètre que le demi-disque (prendre $\pi = 3,14$).
 b) Trouve x pour que $AC + CD + DM$ soit égale à la longueur du demi-cercle.

JE ME SOUVIENS

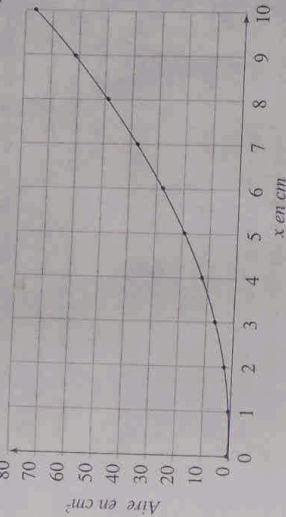
Des grandeurs correspondantes peuvent être présentées dans un tableau. Elles peuvent également être représentées graphiquement.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

On considère un carré dont les côtés ont une longueur de $x \text{ cm}$. On enlève le quart de ce carré et on désigne par y l'aire de la surface restante. Exprime y en fonction de x .



On a représenté graphiquement les variations de y en fonction de celles de x pour $x \leq 10 \text{ cm}$.



Reproduis ce graphique sur ton cahier. Utilise-le pour donner une valeur approchée de l'aire restante lorsque $x = 6,5 \text{ cm}$. Explique ta méthode.

JE RETIENS

- Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit x un nombre quelconque pris dans cette partie A . Définir une application f de A dans $\mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel x de A un nombre réel unique noté $f(x)$. On dit alors que le nombre $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent du nombre $f(x)$.
- Soit f une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le plan étant muni d'un repère, on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont x et $f(x)$.

J'APPLIQUE

1 Recopie et complète le tableau suivant à l'aide de la table trigonométrique de la page 144 :

Mesure de l'angle (en °)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Cosinus	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Représente graphiquement les variations du nombre $\cos x$ quand x varie de 0° à 90° , avec un pas de 10° .

2 On associe à tout entier naturel n compris entre 2 et 20 le nombre de ses diviseurs. On définit ainsi une application f d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Détermine $f(n)$. Ce nombre se calcule-t-il à l'aide d'une formule?

JE ME SOUVIENS

Définir une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel x un nombre réel unique noté $f(x)$. On dit alors que le nombre $f(x)$ est l'image de x par f .



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Une voiture consomme en moyenne 8 litres d'essence aux 100 km.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

Distance parcourue (en km)	50	75	120	150	300	450
Quantité d'essence consommée (en litre)	...	...	...	...	...	...

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie ta réponse.

b) On désigne par q (en litres) la quantité d'essence nécessaire pour parcourir une distance d (en km). Exprime q en fonction de d .

L'unité de longueur étant le cm, on désigne par x la longueur des côtés d'un carré et par $p(x)$ son périmètre. Recopie et complète le tableau suivant :

x	2	3	5	8	10	13
$p(x)$	...	...	...	...	...	...

Ce tableau est appelé tableau des valeurs de p .

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifie ta réponse.

Comment peux-tu caractériser l'application qui fait de $p(x)$ l'image de x ?

JE RETIENS

Soit a un nombre connu et constant. On dit que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe le nombre réel ax au nombre réel x est une application linéaire de coefficient a .

Si x et y sont deux nombres réels non nuls connus, il existe une seule application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fait de y l'image de x . Le coefficient de cette application est le nombre $\frac{y}{x}$.

À tout tableau de proportionnalité on peut associer une application linéaire. Réciproquement, un tableau de valeurs d'une application linéaire est un tableau de proportionnalité.

Exemple.

Les applications f et g définies respectivement, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2x$ et $g(x) = x/2$ sont des applications linéaires dont les coefficients sont respectivement 2 et $1/2$.

Exemple.

Si 5 est l'image de -2 par l'application linéaire f , le coefficient de f est $\frac{5}{-2} = -2,5$.

J'APPLIQUE

1 Soit f l'application linéaire définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{2}{3}x$. Calcule les images par f des nombres -2 , 0 , 3 et $2\sqrt{3}$. Calcule les antécédents de -4 et de $\frac{3}{4}$.

2 f est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 8$. Quel est son coefficient ? Calcule $f(2)$ et $f(1)$.

JE ME SOUVIENS

Soit (O, I, J) un repère quelconque. Une droite qui passe par l'origine O du repère et qui est différente de la droite (OJ) a une équation réduite de la forme $y = px$ (voir page 119).



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Soit f l'application linéaire définie, pour x réel, par $f(x) = \frac{3}{2}x$. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Marque les points de coordonnées x et $f(x)$. Qu' observes-tu ?

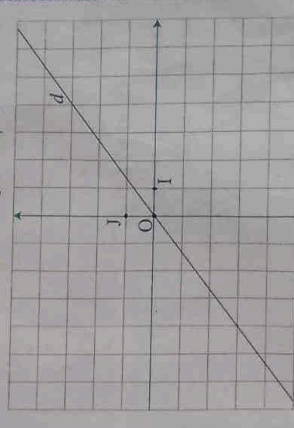
JE RETIENS

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) quelconque, la représentation graphique d'une application linéaire de coefficient a est la droite d'équation réduite $y = ax$. Cette droite passe par l'origine.

Pour construire une représentation graphique d'une application linéaire, il suffit de calculer les coordonnées d'un seul point d'abscisse non nulle puisqu'on sait que la droite représentative passe toujours par l'origine du repère.

Exemple.

La figure ci-dessous montre une représentation graphique de l'application linéaire f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{3}{4}x$. La droite passe par l'origine du repère.



J'APPLIQUE

1 On munit le plan d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Représente graphiquement l'application linéaire définie par $f(x) = -3x$. Lis les images par f des nombres -2 et $\frac{3}{2}$.

2 (O, I, J) est un repère orthonormal du plan tel que $OI = OJ = 1$ cm.

Représente graphiquement dans ce repère l'application linéaire f définie par $f(x) = \frac{5}{3}x$. Pour quelles valeurs de x le nombre $f(x)$ est-il entier ?

3 On munit le plan d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Représente graphiquement les applications linéaires f et g définies respectivement par $f(x) = -3x$ et $g(x) = \frac{1}{3}x$. Qu' observes-tu ?

JE ME SOUVIENS

a étant un nombre connu, l'application qui associe le nombre réel ax au nombre réel x est appelée application linéaire de coefficient a .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Madame Koffi vend du tissu. Pour aller plus vite dans le calcul de ses prix, elle a constitué le tableau suivant :

Longueur	1 m	2 m	5 m	8 m
Prix	1 200 F	2 400 F	6 000 F	9 600 F

Comment utilise-t-elle ce tableau pour calculer mentalement les prix des longueurs de tissu suivantes : 3 m, 4 m, 6 m, 7 m, 9 m, 10 m et 15 m ?

Soit f l'application définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$.

a) En calculant $f(x') - f(x)$, démontre que deux nombres différents x et x' ont des images par f différentes.

b) Détermine les nombres qui ont pour images respectives 6, -3, 4, $\frac{3}{5}$ et 8.

c) Démonstre que $f(0) = 0$. Réciproquement, résous l'équation $f(x) = 0$.

d) Démonstre les égalités $f(2x) = 2f(x)$ et $f(3x) = 3f(x)$.

Plus généralement, démontre que $f(kx) = kf(x)$ pour tout nombre k .

e) Soit x_1 et x_2 deux nombres réels. Démonstre que $f(x_2) + f(x_1) = 3(x_2 + x_1)$. Dédus-en que $f(x_2 + x_1) = f(x_2) + f(x_1)$.

JE RETIENS

Toute application linéaire f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le coefficient n'est pas nul possède les deux propriétés suivantes :

- si deux nombres sont différents, alors leurs images par f sont différentes ;
- tout nombre réel a un antécédent, donc il est l'image par f de cet antécédent.

Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f(0) = 0$. Réciproquement si $f(x) = 0$ et si le coefficient de f n'est pas nul alors $x = 0$.

Toute application linéaire f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possède les deux propriétés suivantes :

- quels que soient les nombres réels k et x , $f(kx) = kf(x)$;
- quels que soient les nombres réels x et x' , $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

Exemple.

Soit f l'application linéaire définie par $f(x) = 5x$:
 $f(2) = 10$, $f(4) = 20$, $f(6) = 30$ et $f(2) = 60$.
 On a alors $f(2 + 4) = f(2) + f(4) = 30$ et $3f(2) = 3f(2) = 60$.

Quand une application possède ces deux propriétés on dit qu'elle est bijective.

J'APPLIQUE

1 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2}{3}x$. Calcule $f(3)$. Montre que

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 5f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et que } f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) = f(3). \text{ Dédus-en que } 6f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ et que } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

JE ME SOUVIENS

a étant un nombre connu, l'application qui associe le nombre réel ax au nombre réel x est appelée application linéaire de coefficient a .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Représente graphiquement les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = 2x$ et $g(x) = -2x$.
 a) Calcule $f(-3)$, $f(1)$ et $f(5)$. Ces nombres sont-ils rangés dans le même ordre que les nombres -3, 1 et 5 ?
 b) Calcule $g(-3)$, $g(1)$ et $g(5)$. Ces nombres sont-ils rangés dans le même ordre que les nombres -3, 1 et 5 ?

Soit f une application linéaire de coefficient $a \neq 0$ et soit x et x' deux nombres réels tels que $x < x'$.

- Montre que $f(x') - f(x) = a(x' - x)$.
- On suppose $a > 0$. Démonstre que $f(x') > f(x)$.
- On suppose $a < 0$. Démonstre que $f(x') < f(x)$.

JE RETIENS

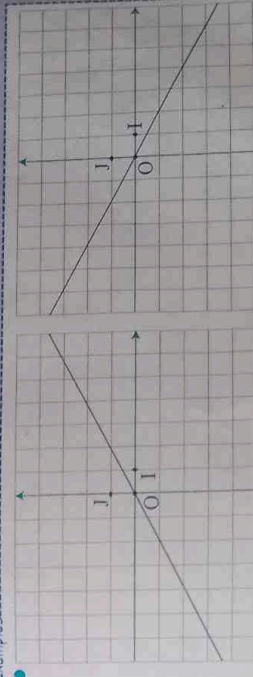
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de coefficient a .

Si $a = 0$ alors tout nombre réel x a pour image 0. On dit que l'application f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ et si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$. On dit que l'application f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$ et si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$. On dit que l'application f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples.



L'application f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

L'application g définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

J'APPLIQUE

1 Soit f , g , h et l les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = -3x$, $g(x) = 4x$, $h(x) = \frac{2}{5}x$ et $l(x) = -x\sqrt{3}$. Quelles sont les applications croissantes sur $\mathbb{R}$? Quelles sont les applications décroissantes sur $\mathbb{R}$?

2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{5}}$. Cette application est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?

JE ME SOUVIENS

Soit (O, I, J) un repère quelconque. L'équation réduite $y = ax + b$ est celle d'une droite non parallèle à l'axe (OJ) (voir page 119).

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

On considère les applications f, g et h définies, pour x réel, par $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 2x + 3$ et $h(x) = 2x$.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$g(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$h(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b) Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Marque les points de coordonnées x et $f(x)$, ceux de coordonnées x et $g(x)$ et enfin ceux de coordonnées x et $h(x)$. Qu' observes-tu ?

JE RETIENS

Si $b = 0$, on retrouve une application linéaire. Les applications linéaires sont donc des applications affines.

• Soit a et b deux nombres réels connus et soit f l'application qui fait correspondre le nombre réel $ax + b$ au nombre réel x . On dit que f est une **application affine** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit aussi que f est associée à l'application linéaire de coefficient a .

• Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) quelconque, la **représentation graphique** d'une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation réduite $y = ax + b$.

Pour représenter graphiquement une application affine, il suffit de calculer les coordonnées de 2 points de la droite représentative.

J'APPLIQUE

1 Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4}{5}x + 1$. Calcule les images par f des

nombre -3 , -1 , $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ et les antécédents des nombres -2 , 1 et $\frac{2}{3}$.

2 f est l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax - 1$. Détermine le nombre a sachant que $f(2) = 5$.

3 Représente graphiquement les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = -3x + 2$ et $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$. Qu' observes-tu ?

JE ME SOUVIENS

a et b étant deux nombres réels connus, l'application qui associe le nombre réel $ax + b$ au nombre réel x est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1 Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$.

a) Calcule les images par f des nombres -2 , 0 , $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{3} + 1$.

b) Détermine les nombres qui ont pour images respectives -3 , $\frac{3}{5}$ et $\sqrt{8}$.

En calculant $f(x') - f(x)$, démontre que deux nombres différents x et x' ont des images par f différentes.

Montre que, pour $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ existe et est constant.

JE RETIENS

• Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Si $a \neq 0$, alors f est une application bijective.

• Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$, et soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 \neq x_2$. On dit que :

- le nombre $x_2 - x_1$ est l'**accroissement** de x entre les valeurs x_1 et x_2 ;
- le nombre $f(x_2) - f(x_1)$ est l'**accroissement** de f entre les valeurs x_1 et x_2 ;
- le nombre $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est le **taux d'accroissement** de f entre les valeurs x_1 et x_2 .

Cela veut dire que deux nombres réels différents ont des images par f différentes et que tout nombre réel a un antécédent.

Exemple

$$\text{Avec } f(3) - f(1) = \frac{(5 \times 3 + 2) - (5 \times 1 + 2)}{2} = \frac{17 - 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Exemple

Cherchons une application affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 1$ et $f(5) = 2$. Le taux d'accroissement de f est égal à $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$.

On a donc $a = \frac{1}{2}$. Comme $f(3) = 3a + b$, on en tire $b = f(3) - 3a = 1 - 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Finalement, $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

J'APPLIQUE

1 Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2}{3}x + 5$. Calcule les images par f des nombres -3 , 0 et 4 . Calcule les antécédents de -7 et de 9 . Calcule son taux d'accroissement. Représente graphiquement cette application.

2 Soit f une application affine telle que $f(3) = -2$ et $f(1) = -8$. Donne l'expression de $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b$.

JE ME SOUVIENS

- 3- La valeur absolue d'un nombre x est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif.
 • Les notations $]-\infty; a]$ et $[a; +\infty[$ désignent respectivement les intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $x \leq a$ et $x \geq a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- 1- Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Représente graphiquement les applications affines f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 5$.
- a) Calcule $f(-2)$, $f(2)$ et $f(3)$. Ces nombres sont-ils rangés dans le même ordre que les nombres -2 , 2 et 3 ?
- b) Calcule $g(-2)$, $g(2)$ et $g(3)$. Ces nombres sont-ils rangés dans le même ordre que les nombres -2 , 2 et 3 ?

- 2- Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Soit x et x' deux nombres réels tels que $x < x'$.
- a) Montre que $f(x') - f(x) = a(x' - x)$.
- b) On suppose $a > 0$. Démontre que $f(x') > f(x)$.
- c) On suppose $a < 0$. Démontre que $f(x') < f(x)$.

JE RETIENS

- Soit f une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$.

Si $a = 0$, alors tout nombre réel x a pour image b .

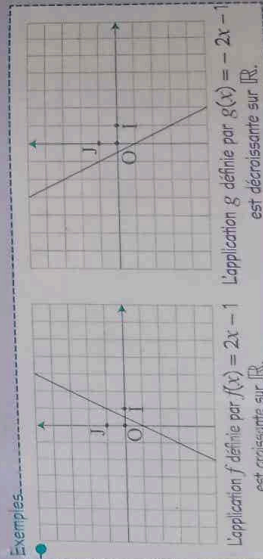
On dit que l'application f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$ et si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$.

L'application f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$ et si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$.

L'application f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



J'APPLIQUE

- 1- Soit f, g, h et l les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -5x - 3$, $h(x) = \frac{2}{5}x - 1$ et $l(x) = -x + 3$.

- a) Quelles sont les applications croissantes sur $\mathbb{R}$? Quelles sont les applications décroissantes sur $\mathbb{R}$? Justifie tes réponses.
- b) Représente graphiquement chacune de ces applications et vérifie tes réponses.

JE ME SOUVIENS

- 3- La valeur absolue d'un nombre x est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif.
 • Les notations $]-\infty; a]$ et $[a; +\infty[$ désignent respectivement les intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $x \leq a$ et $x \geq a$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- 1- Soit g et h les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $g(x) = x - 1$ et $h(x) = 1 - x$.
- a) On munit le plan d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm. Représente graphiquement les applications g et h dans ce repère. Montre que $g(1) = h(1)$.
- b) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe le nombre $|x - 1|$ au nombre réel x . Montre que $f(x) = g(x)$ pour $1 \leq x$ et $f(x) = h(x)$ pour $x \leq 1$.
- c) Utilise les représentations graphiques de g et de h pour obtenir celle de f . Justifie ta réponse.

JE RETIENS

- Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f et g coïncident sur une partie A de $\mathbb{R}$ si $f(x) = g(x)$ pour tout nombre x de A .

- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une application affine par morceaux si elle coïncide avec plusieurs applications affines sur des parties de $\mathbb{R}$.

Exemple

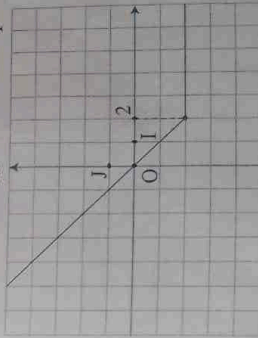
Soit f, g et h les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = |x|$, $g(x) = -x$ et $h(x) = x$. L'application f coïncide avec g pour $x \leq 0$ et avec h pour $x \geq 0$.

Exemple

La figure ci-contre montre une représentation graphique de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 2|$. Pour $x \leq 2$, f coïncide avec l'application affine g définie par $g(x) = 2 - x$. Pour $x \geq 2$, f coïncide avec l'application affine h définie par $h(x) = x - 2$.

J'APPLIQUE

- 1- Voici la représentation graphique d'une application affine par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:



Écris les expressions qui donnent $f(x)$ quand $x \leq 2$ et quand $x \geq 2$.

- 2- Représente graphiquement les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = 1 + |x|$ et $g(x) = x + |x - 1|$.

JE ME SOUVIENS

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit x un nombre quelconque pris dans cette partie A . Définir une application f de A dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de A un nombre réel unique noté $f(x)$. On dit alors que le nombre $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent du nombre $f(x)$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

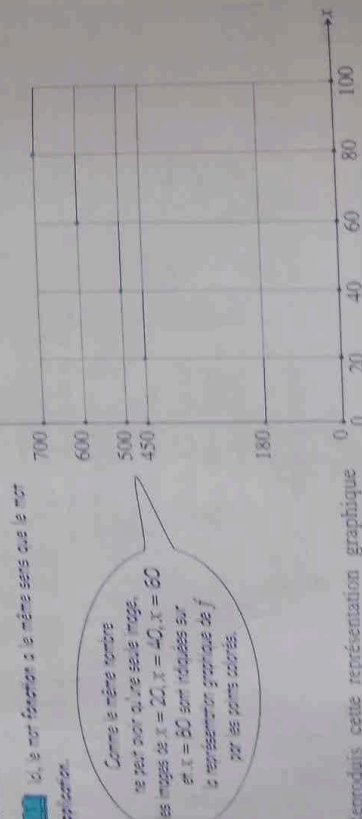
Voici un extrait de tarif postal qui permet de connaître le montant à payer pour affranchir une lettre pesant moins de 100 g :

Masses d'une lettre	de 0 à 20 g	de 20 à 40 g	de 40 à 60 g	de 60 à 80 g	de 80 à 100 g
Tarif en francs CFA	180	450	500	600	700

On désigne par x la masse d'une lettre et par $f(x)$ le montant de l'affranchissement de cette lettre. Le tableau devient :

x	$0 \leq x < 20$	$20 \leq x < 40$	$40 \leq x < 60$	$60 \leq x < 80$	$80 \leq x < 100$
$f(x)$	180	450	500	600	700

$f(x)$ existe bien pour toute valeur de x ; 100. Voici une représentation graphique de la fonction f pour $0 \leq x < 100$:



Reproduis cette représentation graphique sur ton cahier.

JE RETIENS

On dit que la fonction f représentée graphiquement ci-dessus est une **fonction en escalier**. On peut observer que sa représentation graphique n'est pas une ligne continue.

J'APPLIQUE

1 Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau suivant :

x	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 5$	$5 \leq x < 8$	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$
$f(x)$	2	-1	3	4	2	5

JE ME SOUVIENS

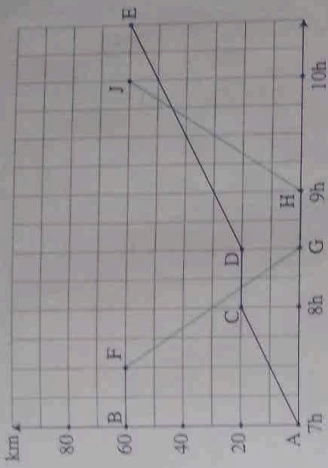
Soit f une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le plan étant muni d'un repère, on appelle **représentation graphique** de f l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont x et $f(x)$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Hamidou quitte à vélo la ville A à 7 heures. Il part pour la ville B en roulant à la vitesse constante de 20 km/h mais s'arrête une demi-heure de 8 h à 8 h 30.

Un autocar part de B à 7 h 30 et arrive en A une heure plus tard. Après un arrêt d'une demi-heure, il repart et est de retour à B à 10 h.

Sur le graphique ci-dessous, le déplacement de Hamidou est représenté par la ligne ACDE, tandis que celui de l'autocar est représenté par la ligne BFGHJ.



a) Vérifie que les lignes ACDE et BFGHJ représentent bien les deux déplacements. Reproduis le graphique sur ton cahier.

b) Dans son déplacement, Hamidou croise deux fois l'autocar. Utilise ton graphique pour déterminer l'heure de chaque rencontre et dire à quelle distance de A elle a lieu.

JE RETIENS

On peut souvent modéliser un problème par une représentation graphique et utiliser celle-ci pour résoudre le problème. Les réponses obtenues par cette méthode sont trouvées plus facilement que par le calcul mais sont en général moins précises.

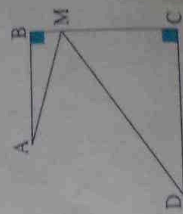
J'APPLIQUE

1 Sur la figure ci-contre, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $CD = 6$ cm. M est un point variable de $[BC]$. On pose $BM = x$ cm.

a) Démontre que les aires des triangles ABM et MCD sont respectivement égales à $2x$ et à $15 - 3x$.

b) Représente graphiquement, avec le même repère, les deux applications f et g définies respectivement par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 15 - 3x$ en te limitant aux valeurs de x comprises entre 0 et 5.

c) Lis sur ton graphique la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales.



Applications linéaires

- 3 Soit f l'application linéaire définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{3}{4}x$. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-5	-3,5	0	2,4	9,1
$f(x)$	...	...	...	...	...

- 4 Soit f l'application linéaire définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = -\frac{5}{2}x$. Recopie et complète le tableau suivant :

x	...	...	...	...	...
$f(x)$	-4	-1	0	2	8

- 5 Soit f l'application linéaire définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = -2x$. Calcule les images par f des nombres -2, 0, 3 et $2\sqrt{5}$.

- 6 Soit f l'application linéaire définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = -3x$. Calcule les antécédents par f des nombres 5, 3, -2 et $-\frac{7}{3}$.

- 7 f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = \frac{4}{5}$. Quel est son coefficient ? Calcule $f(-2)$ et $f(5)$.

Représentation graphique d'une application linéaire

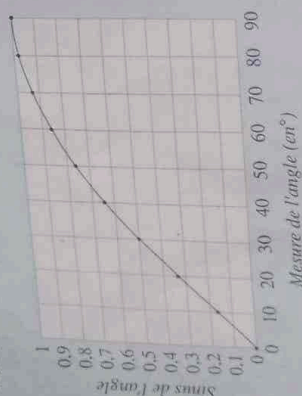
Exercices 8 et 9 : le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.

- 8 Représente graphiquement la fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(3) = -4$. Lis les nombres $f(-3)$ et $f(3)$ sur ce graphique.

- 9 Représente graphiquement la fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de coefficient $-\frac{3}{8}$.

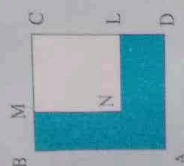
Généralités sur les applications

- 1 La représentation graphique ci-dessous est celle du sinus d'un angle aigu x qui varie de 0° à 90° .



Reproduis cette représentation graphique sur ton cahier.

- 2 ABCD est un carré de 5 cm de côté. M et L sont deux points de [BC] et de [CD] tels que $BM = LD$. On pose $BM = x$.



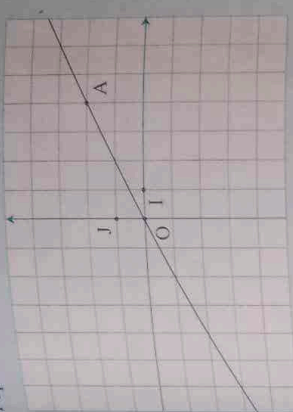
- a) Montre que l'aire y du polygone ADLNM est donnée par $y = x(10 - x)$.

- b) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- c) Représente graphiquement les variations de y en fonction de celles de x .

- 10 Quel est le coefficient de la fonction linéaire représentée graphiquement sur la figure ci-après ?



Propriétés des applications linéaires

- 11 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 3$.
Montre que $\frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1} = \frac{f(4)}{4}$. Déduis-en les valeurs de $f(1)$ et de $f(4)$.

- 12 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$. Montre que $f(4) = 10$ et $f(10) = 25$.

Sens de variation d'une application linéaire

- 13 f est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}x$. Cette application est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?

- 14 g est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}x$. Cette application est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?

Applications affines

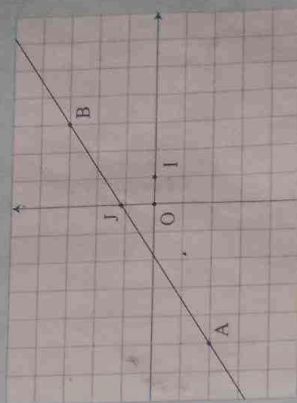
- 15 Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$. Calcule les images par f des nombres -5, -1, $\frac{3}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcule les antécédents des nombres -6, 3 et $\frac{2}{3}$.

- 16 f est l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + \frac{5}{3}$. Détermine le nombre a sachant que $f(-3) = 1$.

Exercices 17 et 18 : le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.

- 17 Représente graphiquement les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = -4x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{4}x - 3$. Qu' observes-tu ?

- 18 Vérifie que la représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{5}{8}x + \frac{9}{8}$.



Reproduis cette représentation graphique.

Propriétés des applications affines

- 19 Le taux d'accroissement d'une fonction affine f est $-\frac{1}{2}$. On sait que $f(1) = -3$. Donne l'expression de $f(x)$.

- 20 f est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(-4) = 2$ et $f(3) = -4$.

- a) Représente graphiquement l'application f .
b) Calcule son taux d'accroissement. Déduis-en l'expression de $f(x)$.

- 21 La représentation graphique d'une application affine f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ contient les points $A(-5; -4)$ et $B(2; 6)$.

- a) Construis cette représentation graphique.
b) Donne l'expression de $f(x)$.

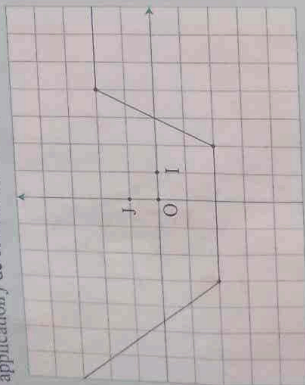
Sens de variation d'une application affine

22 f et g sont les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x + \frac{3}{5}$ et $g(x) = -2x + \frac{2}{5}$.

- Détermine le sens de variation de chacune de ces deux applications.
- Représente-les graphiquement et vérifie tes réponses.

Applications affines par morceaux

23 La représentation ci-dessous est celle d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ affine par morceaux.



Reproduis cette représentation puis détermine les quatre expressions qui donnent $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

24 Représente graphiquement les fonctions f et g définies respectivement, pour $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x - |x - 2|$ et $g(x) = |x - 3| - |5 - x|$.

Fonctions en escalier

25 Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau suivant :

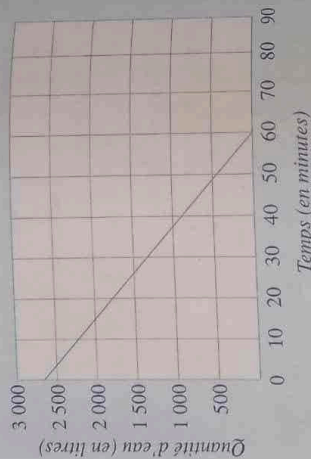
x	-10	$-3 < x < -3$	$-3 < x < 5$	$5 < x < 8$
$f(x)$	5	-4	-4	2

26 Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau ci-après :

x	$-6 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$
$f(x)$	-4	-2	0	3

Résolution graphique d'un problème

27 On décide de vider une citerne qui contient 2700 litres d'eau. Le graphique ci-dessous représente les variations de la quantité d'eau contenue dans la citerne en fonction du temps.



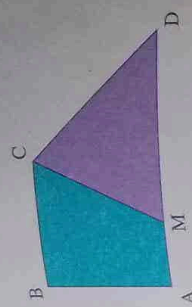
a) En utilisant le graphique et en faisant les calculs nécessaires, complète le tableau ci-dessous :

Temps t (en min)	0	10	30	40	60
Volume d'eau restant V (en l)	...	...	...	...	...

b) Quelle est la nature de la fonction qui lie la quantité V d'eau qui est contenue dans la citerne au temps t (en min) ?

c) Exprime la relation qui existe entre V et t .

28 ABCD est un trapèze rectangle (voir page suivante) en A et en B, de bases [AD] et [BC]. $AD = 10$ cm et $AB = BC = 5$ cm. M est un point variable de [AD]. On pose $AM = x$.



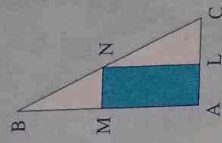
a) Montre que les aires du trapèze AMCB et du triangle MDC sont respectivement $\frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $\frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

b) Représente graphiquement les deux fonctions affines f et g définies respectivement par $f(x) = \frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $g(x) = \frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Que représente la solution trouvée ?

a) Représente graphiquement ces deux applications. Utilise cette construction pour résoudre b) Résous exactement cette équation.

32 ABC est un triangle rectangle en A. On a $AC = 4$ cm et $AB = 8$ cm. M est un point variable de [AB]. On construit le rectangle MNLA et on pose $AM = x$.



a) Démontre que $MN = \frac{8-x}{2}$ et démontre que l'aire y du rectangle MNLA est égale à $\frac{x(8-x)}{2}$.

b) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

Utilise ce tableau pour représenter graphiquement les variations de y en fonction de x .

33 f , g , h et l sont des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de coefficients respectifs a , b , $a+b$ et ab . Démontre que, pour tout nombre réel x , $h(x) = f(x) + g(x)$ et $l(x) = g[f(x)]$.

34 Deux villes A et B sont distantes de 70 km. Un premier cycliste part de A et se dirige vers B à la vitesse constante de 15 km/h. Au même instant, un autre cycliste part de B et se dirige vers A à la vitesse constante de 20 km/h.

a) Exprime en fonction du temps la distance qui sépare chaque cycliste de A.

b) Représente graphiquement les fonctions obtenues. Que représentent les coordonnées du point commun aux deux droites ?

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

29 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de coefficient $a \neq 0$. Démontre qu'on a toujours $f(3x + 5y) = 3f(x) + 5f(y)$ quels que soient les nombres x et y .

30 Soit a un nombre réel différent de 1 et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{a+1}{a-1}x$.

a) Étudie le signe de $\frac{a+1}{a-1}$ et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) Construis les représentations graphiques de f pour $a = -1$, $a = 2$ et $a = \frac{1}{3}$.

c) Détermine a pour que la représentation graphique de f passe par le point $A(1; \sqrt{2})$.

31 Soit f et g deux applications affines définies par $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{2}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{8}$.

JE ME SOUVIENS

Soit (O, I, J) un repère du plan.

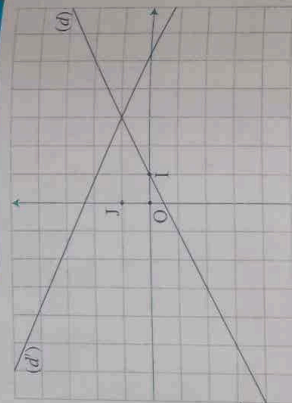
- Toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ relativement à ce repère. Le vecteur $\vec{v}(b; -a)$ est un vecteur directeur de cette droite : son support est parallèle à la droite.
- Dire que deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires équivaut à dire que le nombre $xy' - x'y$ est nul.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

On appelle x et y deux nombres qui vérifient, s'ils existent, les deux égalités $x - 2y = 1$ et $4x + 9y = 21$. On peut trouver graphiquement le couple $(x; y)$ en construisant les droites (d) et (d') d'équations respectives $x - 2y - 1 = 0$ et $4x + 9y - 21 = 0$ relativement à un repère du plan (O, I, J) : si les deux droites sont distinctes et sécantes alors x et y représentent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection des deux droites.

Lis sur la figure les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Reproduis cette figure sur ton cahier.

Dans un couple, l'ordre des éléments est important. Le couple $(x; y)$ est différent du couple $(y; x)$.



On dit que les deux égalités sont des équations. On dit aussi que les deux équations forment un système de deux équations à deux inconnues.

JE RETIENS

- Quand deux équations forment un système, on les écrit l'une au-dessous de l'autre derrière une accolade. En général, on numérote les équations.

Pour résoudre graphiquement le système de deux équations du premier degré à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, on trace les droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

Si les deux droites sont sécantes, le système admet une solution et une seule. Si les deux droites sont distinctes et parallèles, le système n'admet aucune solution. Si les deux droites sont confondues, le système admet une infinité de solutions.

Les deux droites sont sécantes si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Il faut donc que le nombre $ab' - a'b$ soit différent de 0.

J'APPLIQUE

1 Reprends l'exercice donné dans « J'observe et je démontre » et calcule les deux nombres x et y .

Pour cela, utilise la première équation pour montrer que $y = \frac{x-1}{2}$ et la seconde pour montrer que $y = \frac{4x-21}{-9}$. Résous l'équation $\frac{x-1}{2} = \frac{4x-21}{-9}$ puis calcule y .

JE ME SOUVIENS

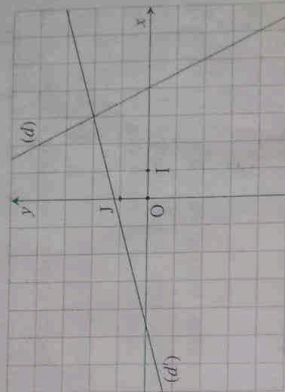
Le système de deux équations du premier degré à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ possède une solution unique si $ab' - a'b \neq 0$. Si $ab' - a'b = 0$, alors il possède soit une infinité de solutions soit aucune.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- On veut résoudre le système de deux équations du premier degré à deux inconnues $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 & (1) \\ 4x - 15y + 18 = 0 & (2) \end{cases}$

a) La figure ci-contre montre une représentation graphique des deux droites (d) et (d') d'équations respectives $2x + y - 8 = 0$ et $4x - 15y + 18 = 0$.

Lis les coordonnées x et y du point d'intersection des deux droites. Reproduis la figure. b) Utilise l'équation (1) pour exprimer y en fonction de x . Remplace y dans l'équation (2) par la valeur trouvée. Résous l'équation en x ainsi formée. Calcule y . Vérifie que la solution trouvée est correcte.



JE RETIENS

- Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, on élimine l'une des inconnues pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

Dans l'exemple, on a utilisé une méthode de substitution : on a exprimé y en fonction de x à l'aide de la première équation, on a remplacé y par l'expression obtenue dans la seconde puis on a résolu l'équation en x qui a été formée.

Pour calculer y , on a remplacé x par sa valeur dans l'expression donnant y en fonction de x .

Exemple.

Soit à résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y + 12 = 0 & (1) \\ -2x + 7y - 25 = 0 & (2) \end{cases}$

De l'équation (1), on tire $2y = 3x + 12$ puis $y = \frac{3x + 12}{2}$.

On reporte cette expression dans l'équation (2) qui devient $-2x + 7 \left(\frac{3x + 12}{2} \right) - 25 = 0$.

En résolvant cette équation en x , on obtient $x = -2$. On obtient également $y = \frac{3 \times (-2) + 12}{2} = 3$. La solution du système est donc le couple $(-2; 3)$.

J'APPLIQUE

1 Résous chacun des systèmes suivants : $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 7x - 5y = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x - 10y = 62 \\ 5x - 7y = 6 \end{cases}$

JE ME SOUVIENS

Le système de deux équations du premier degré à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ possède une solution unique si $ab' - a'b \neq 0$. Si $ab' - a'b = 0$, alors il possède soit une infinité de solutions soit aucune.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- On considère le système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 & (1) \\ 5x - 3y = 4 & (2) \end{cases}$$
 Additionne membres à membres les deux équations. Déduis-en la valeur de x puis celle de y .
- On considère le système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

$$\begin{cases} 4x - 5y = -21 & (1) \\ 3x + y = 4 & (2) \end{cases}$$
 Multiplie les deux membres de l'équation (2) par 5. Additionne membres à membres la nouvelle équation à l'équation (1). Déduis-en la valeur de x puis celle de y .
- On considère le système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 & (1) \\ 3x - 5y = 5 & (2) \end{cases}$$
 Multiplie les deux membres de l'équation (1) par 5 et les deux membres de l'équation (2) par -4. Additionne membres à membres les deux nouvelles équations. Déduis-en la valeur de x puis celle de y .

JE RETIENS

- Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues par combinaison des équations, on multiplie chaque équation par un nombre bien choisi de façon que l'une des inconnues disparaisse quand on additionne membres à membres les deux nouvelles équations. On résout ensuite l'équation à une inconnue qui a été obtenue puis on termine par le calcul de l'autre inconnue.

Exemple

Pour résoudre le système $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$, on multiplie la première équation par 5 et la seconde par -3. On obtient le nouveau système $\begin{cases} 15x + 20y = 20 \\ -15x - 21y = -18 \end{cases}$. En additionnant membre à membre les deux nouvelles équations, on obtient $15x + (-15x) + 20y + (-21y) = 20 + (-18)$ soit $0x - y = 2$. On en tire $y = -2$. En reportant la valeur $y = -2$ dans la première équation du système initial, on obtient successivement $3x + 4 \times (-2) = 4$, $3x - 8 = 4$, $3x = 4 + 8$ et $3x = 12$. On en tire $x = 4$. La solution du système est le couple $(4; -2)$.

J'APPLIQUE

- Résous par la méthode de combinaison des équations chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 4x - 3y = -13 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 4x - y = -15 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -3x + 4y = -7 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$$

JE ME SOUVIENS

Le système de deux équations du premier degré à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ possède une solution unique si $ab' - a'b \neq 0$. Si $ab' - a'b = 0$ il possède soit une infinité de solutions soit aucune.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Voici un problème qu'on peut résoudre en écrivant un système de deux équations du premier degré à deux inconnues : Moussa possède 155 F en pièces de 5 F et de 10 F. Il a 22 pièces en tout. Combien a-t-il de pièces de 5 F et combien a-t-il de pièces de 10 F ? La résolution de ce problème nécessite quatre étapes.
 - Première étape : choix des inconnues. Désignons par x le nombre des pièces de 5 F que possède Moussa et par y celui des pièces de 10 F.
 - Deuxième étape : mise en équation.
 - Valeur des pièces de 5 F : $5x$
 - Valeur des pièces de 10 F : $10y$
 - Valeur totale : $5x + 10y$.
 - On a donc $5x + 10y = 155$.
 - La solution du problème est donc celle du système $\begin{cases} x + y = 22 \\ 5x + 10y = 155 \end{cases}$.
- Étapes suivantes : résolution du système et vérification de la solution obtenue. À toi de terminer !

JE RETIENS

- On peut souvent résoudre un problème à l'aide d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. La résolution comprend quatre étapes : le choix des inconnues, l'écriture du système, la résolution du système, la vérification des résultats trouvés.

Exemple

La longueur x d'un rectangle mesure 2,6 cm de plus que la largeur y . Le périmètre du rectangle mesure 23,8 cm. La solution du problème est celle du système $\begin{cases} x - y = 2,6 \\ 2(x + y) = 23,8 \end{cases}$ qui admet pour solution le couple $(7,25; 4,65)$.

J'APPLIQUE

- Trouve deux nombres x et y sachant que $x + y = 41$ et que $x - y = 16,4$.
- Trouve deux nombres x et y sachant que $x + y = 21,2$ et que $y = 3x$.
- Aïcha a 9 heures d'enregistrement de musique. Elle possède 13 cassettes, les unes de 60 min, les autres de 90 min. Combien a-t-elle de cassettes de chaque sorte ?

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Résolution graphique d'un système

Exercices 1 à 4 : Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations proposés en construisant les droites associées aux équations du système.

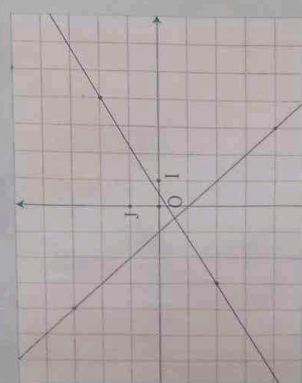
1
$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 3y + 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} 2y + 5x - 1 = 0 \\ 4y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

5 La figure ci-dessous montre une représentation graphique des droites d'équations respectives $y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7}$ et $y = -x - 1$.



Reproduis cette figure puis lis les coordonnées x et y du point commun aux deux droites. Calcule x en résolvant l'équation $\frac{4}{7}x - \frac{2}{7} = -x - 1$. Déduis-en y .

Résolution d'un système : méthode de substitution

Exercices 6 et 7 : Résous chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode indiquée ci-dessus ; fais une vérification graphique en construisant les droites associées aux équations du système.

6 a)
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y - 3x = -4 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y - 5x = 10 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$$

7 a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x - 3y = -3 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -3y - 4x = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 5y + 2x = 3 \\ -3x + 4y = -5 \end{cases}$$

Résolution d'un système par combinaison des équations

Exercices 8 et 9 : Résous chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode indiquée ci-dessus ; fais une vérification graphique en construisant les droites associées aux équations du système.

8 a)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3y - 4x = 1 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 7y + 2x = 5 \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -4x + 7y = 29 \end{cases}$$

9 a)
$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 9x - y = -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2(x - y) = 1 \\ 2(x + y) = 3 \end{cases}$$

Problèmes qui se résolvent à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues

Exercices 10 à 14 : Pour résoudre les exercices proposés, tu devras écrire un système de deux équations à deux inconnues.

10 Deux nombres x et y ont pour somme 86 et pour différence 38. Trouve ces deux nombres.

11 La somme de deux nombres x et y est 106,3. Le plus grand des deux nombres vaut 3,5 fois l'autre. Trouve ces deux nombres.

EXERCICES DE RECHERCHE

PROBLÈMES

12 Le périmètre d'un rectangle de longueur x et de largeur y est 148 mm. La longueur mesure 1,8 cm de plus que la largeur. Calcule l'aire du rectangle.

13 On répartit 18 kg de farine dans x boîtes de 2 kg et dans y boîtes de 1 kg. En tout, il y a 11 boîtes. Combien y a-t-il de boîtes de chaque sorte ?

14 Une boutique vend des cahiers de 100 pages x francs et des cahiers de 200 pages y francs. Abou a acheté 2 cahiers de 100 pages et deux cahiers de 200 pages. Il a payé 1 480 F. Aminata a acheté 3 cahiers de 100 pages et un seul cahier de 200 pages. Elle a payé 1 260 F. Trouve x et y .

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

15 Deux nombres entiers x et y ont pour somme 37. Dans la division euclidienne de x par y , le quotient est 6 et le reste 2. Trouve x et y .

16 Si on ajoute 1 au numérateur d'une fraction $\frac{x}{y}$, on obtient $\frac{1}{3}$. Si on ajoute 1 à son dénominateur, on obtient $\frac{1}{4}$. Quelle est cette fraction ?

17 Le système
$$\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 8y - 11 = 0 \end{cases}$$
 a-t-il une solution ? Pour vérifier ta réponse, construis les deux droites associées aux deux équations qui composent le système.

18 Soit f l'application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(-3) = -14$ et $f(2) = 1$. On pose $f(x) = ax + b$. Trouve a et b .

19 La droite (d) passe par les points $A(-3; 4)$ et $B(5; -2)$. L'équation réduite de cette droite est de la forme $y = ax + b$. Trouve a et b en résolvant un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

20 Il y a 4 ans, Komo était 6 fois plus âgé que sa sœur Aissatou. Aujourd'hui, Komo est 2 fois plus âgé que sa sœur. Quels sont les âges de chacun aujourd'hui ?

21 Madame Koffi et madame Akame font leurs courses chez le même marchand. Madame Koffi a acheté 2 kg de farine et 5 kg de riz pour 2 280 F. Madame Akame a acheté 3 kg de farine et 2 kg de riz pour 1 440 F. Quels sont les prix du kilo de farine et du kilo de riz ?

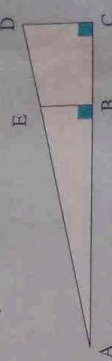
22 Pour préparer différentes sortes de café, un importateur mélange les contenus de sacs de deux variétés : arabica et robusta. Les sacs qui contiennent la même variété ont tous le même poids.

Avec deux sacs d'arabica et trois sacs de robusta, il obtient 9 kg de café appelé Bon Arôme.

Avec trois sacs d'arabica et un sac de robusta, il obtient 10 kg d'un café appelé Le Bon Café. Combien pèse chaque sac d'arabica ? Et combien pèse chaque sac de robusta ?

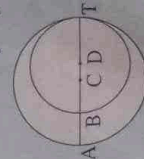
23 Trouve deux nombres entiers x et y tels que $x + y = 36$ et que $(x - 4)(y - 6) = xy - 160$.

24 Sur la figure ci-dessous, $BC = 5$ cm, $CD = 4$ cm et $BE = 3$ cm. On pose $AB = x$ et $AC = y$.



a) Construis la figure.
b) Calcule x et y .

25 Sur la figure qui suit, le cercle de centre D et de rayon x est tangent intérieurement en T au cercle de centre C et de rayon y .



Trouve x et y sachant que $AB = 24$ mm et que la somme des longueurs des deux cercles est égale, en mm, à 96π . Fais une figure.

26 Démonstre que les droites (d) , (d') et (d'') d'équations respectives $2x - 3y - 3 = 0$, $3x - 5y - 1 = 0$ et $x - y - 5 = 0$ sont concourantes.

27 « Les systèmes $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1,001y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0,999y = 2 \end{cases}$ doivent avoir des solutions très voisines », dit Paul. « Je ne pense pas ! » répond Malika.

Qui a tort ? qui a raison ?

28 ABC est un triangle isocèle et rectangle en A. Son périmètre est 16 cm.

- Calcule les longueurs de ses côtés.
- Construis le triangle.

29 Une entreprise possède 5 camions identiques de marque Renault et 7 autres camions, identiques eux aussi, de marque Peugeot. Avec 3 camions Renault et 5 camions Peugeot, elle peut transporter 182 tonnes de marchandises. Avec tous les camions, il peut transporter 278 tonnes. calcule la capacité de chaque camion.

30 À 8 heures, Moussa prend son vélo et roule à la vitesse constante de 20 km/h vers le village voisin. Sans s'arrêter, il dépose un paquet et revient immédiatement chez lui en roulant à la vitesse constante de 15 km/h. Il est de retour à 9 h 24.

- Calcule la durée x du trajet aller et la durée y du retour.
- Calcule la longueur totale du trajet effectué par Moussa.

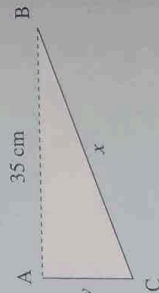
31 En descendant le fleuve, un bateau a mis deux heures pour parcourir 60 km. Pour revenir au point de départ, il a mis trois heures. Quelle est la vitesse du courant supposée constante ? On supposera que la vitesse propre du bateau est constante également et identique à la remontée du fleuve comme à la redescente.

32 Un entier naturel n s'écrit avec deux chiffres dont la somme est 9. Si on échange le chiffre des unités avec celui des dizaines, on obtient un nombre égal à trois fois le premier moins 9. Trouve le nombre n .

33 Un avion décolle de sa base à 8 h, vole jusqu'à une balise radio et retourne vers sa base sur laquelle il atterrit à 11 h 30. A l'aller, l'avion volait à la vitesse constante de 960 km/h. Au retour, il volait à la vitesse constante de 720 km/h. Calcule les temps mis pour aller jusqu'à la balise et le temps mis pour en revenir.

34 Sur sa moto, Walter monte une côte à la vitesse de 54 km/h. Il redescend par une autre route à la vitesse de 75,6 km/h. Le parcours total a duré 270 secondes. La montée est plus longue que la descente de 128 m. Quelle est la longueur x de la montée et quelle est la longueur y de la descente ?

35 Une ficelle de 49 cm de longueur est fixée en A et B à deux clous distants de 35 cm. On tend la ficelle de façon à former un triangle ABC rectangle en A. On pose $BC = x$ et $AC = y$.



a) Montre que x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 49 \\ x^2 - y^2 = 35^2 \end{cases}$.

b) Factorise $x^2 - y^2$ et déduis-en $x - y$.
c) Écris un nouveau système vérifié par x et y . Résous ce système et vérifie que la solution obtenue est bien la solution du problème.

36 ABCD et EFGH sont deux carrés. La différence de leurs aires est 40 cm^2 , celle de leurs périmètres est 16 cm. Trouve les longueurs de leurs côtés puis construis les deux carrés.

JE ME SOUVIENS

- Si on ajoute ou si on retranche le même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens.
- Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inégalité par le même nombre non nul, on obtient une inégalité de même sens si ce nombre est positif mais de sens contraire s'il est négatif.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Résous séparément dans $\mathbb{R}$ les inéquations $3 - x > 5x - 2$ et $3 - 4x < 1 + 2x$. Les deux inéquations ont-elles des solutions communes ? Si oui, lesquelles ?
- Résous séparément dans $\mathbb{R}$ les inéquations $x - 1 > 3$ et $5 - 2x > 1 + x$. Les deux inéquations ont-elles des solutions communes ?



JE RETIENS

- Soit x un nombre réel. Une inégalité telle que $5 > -x + 2$ est une **inéquation du premier degré à une inconnue** x définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $] -3 ; +\infty[$ qui contient les nombres réels supérieurs à -3 .
- Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, on utilise les règles du calcul algébrique (développer, réduire, supprimer les parenthèses, etc.) ainsi que les règles applicables aux inégalités.
- Un système d'inéquations du premier degré à une inconnue comprend plusieurs inéquations. Résoudre un tel système c'est rechercher les solutions communes à toutes les inéquations du système.

Quand des inéquations forment un système, on les écrit les unes en dessous des autres, derrière une accolade.

Exemple

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x - 2 \geq -3x + 1$, donnons $3x + 2$ aux deux membres de cette inéquation. On obtient $5x - 2 + 3x + 2 \geq -3x + 1 + 3x + 2$, soit $8x \geq 3$ d'où $x \geq \frac{3}{8}$.

Les solutions de l'inéquation sont donc les nombres de l'intervalle $[\frac{3}{8} ; +\infty[$.

Exemple

Considérons le système $\begin{cases} 2x - 5 < x - 1 \\ x - 5 < 1 + 3x \end{cases}$. Les solutions de la première inéquation sont les nombres de l'intervalle $] -4 ; 4[$. Celles de la seconde inéquation sont les nombres de l'intervalle $] -3 ; +\infty[$. Les solutions communes aux deux inéquations appartiennent donc à l'intervalle $] -3 ; 4[$.



J'APPLIQUE

- Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes : $x \leq 3x - 7$; $5x - 3 < 3x + 4$;
 $\frac{2}{3}x - 3 \leq \frac{4}{5}x + 1$.
- Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes $\begin{cases} 3x > 5x - 2 \\ 1 - 2x < 7 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + 2 \geq 3 - 2x \\ x + 5 > 8 - 7x \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 1 \geq 5x + 2 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$
- Résous dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} 5x - 3 < 1 - 2x \\ 3(2 - 5x) + 4 > 3(2x + 1) \\ 5 + 2x > x - 1 \end{cases}$

JE ME SOUVIENS

Soit (O, I, J) un repère quelconque. Une droite non parallèle à l'axe (OJ) a une équation réduite de la forme $y = ax + b$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

On a représenté ci-dessous les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ relativement à un repère (O, I, J) .

a) Lis sur le graphique les coordonnées du point commun aux deux droites.

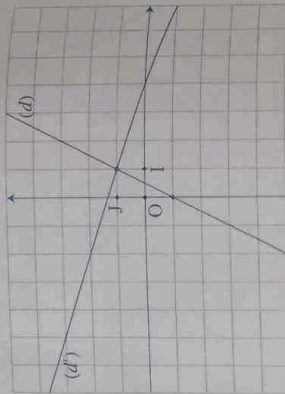
b) Quels sont les points de (d) qui sont au-dessus de la droite (d') ?

c) Résous graphiquement l'inéquation

$$2x - 1 > -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

d) Reproduis le graphique sur ton cahier.

Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = 3x - 5$ et $y = 3 - 5x$, puis résous graphiquement l'inéquation $3 - 5x > 3x - 5$.



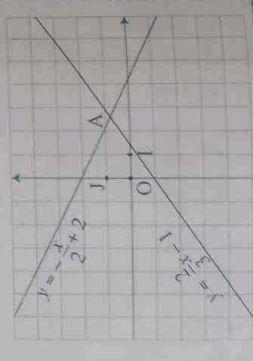
JE RETIENS

Pour résoudre graphiquement une inéquation de type $ax + b < cx + d$, on construit les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ relativement à un repère (O, I, J) . Les abscisses des points de (d) qui se trouvent au-dessous de (d') correspondent aux solutions cherchées.

Exemple. Pour résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{2}{3}x - 1 < -\frac{x}{2} + 2$,

on construit les droites d'équations $y = -\frac{x}{2} + 2$ et $y = \frac{2}{3}x - 1$.

La partie colorée montre les points dont les abscisses vérifient l'équation proposée.



J'APPLIQUE

Résous dans $\mathbb{R}$, graphiquement et par le calcul, chacune des inéquations suivantes :

$$3x - 2 \leq -4x + 1; 5x - 4 \geq 2x + 8; -2x + 5 > -3x - 4; \frac{1}{2}x - 3 < \frac{3}{4}x.$$

JE ME SOUVIENS

Pour résoudre graphiquement une inéquation de type $ax + b < cx + d$, on construit les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ relativement à un repère (O, I, J) . Les abscisses des points de (d) qui se trouvent au-dessous de (d') correspondent aux solutions cherchées.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Voici un problème qui peut se résoudre à l'aide d'une inéquation du premier degré à une inconnue : L'école d'un village doit acheter des cahiers de 100 pages. On les trouve à 250 F pièce dans un magasin A et à 200 F pièce dans un magasin B. Les frais d'expédition s'élèvent à 5 000 F dans le magasin A contre 10 000 F dans le magasin B. Quelle est la solution la plus avantageuse ?

a) Première étape : choix de l'inconnue.

Désignons par x le nombre des cahiers à acheter.

b) Deuxième étape : mise en équation.

Si on achète dans le magasin A, on paye $250x + 5 000$ (en francs).

Si on achète dans le magasin B, on paye $200x + 10 000$ (en francs).

Il faut donc résoudre l'inéquation $250x + 5 000 < 200x + 10 000$.

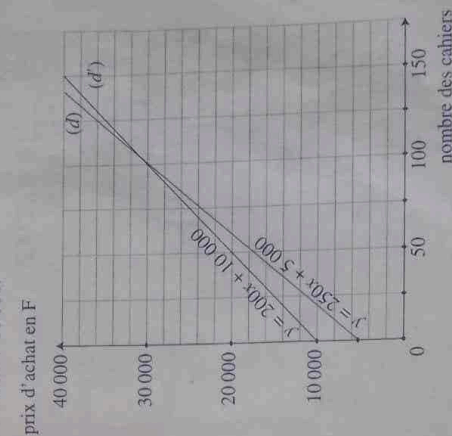
c) Troisième étape : résolution de l'inéquation.

Le graphique ci-contre montre deux droites (d) et (d') qui représentent respectivement les variations des deux prix d'achat $y = 250x + 5 000$ et $y = 200x + 10 000$ en fonction de x .

Pour quelles valeurs de x le premier prix est-il inférieur au second ? Reproduis le graphique sur ton cahier.

d) Vérifie tes conclusions en résolvant par le calcul l'inéquation $250x + 5 000 < 200x + 10 000$.

e) Existe-t-il une valeur de x pour laquelle les deux prix d'achat sont égaux ? Comment trouver cette valeur par le calcul ?



JE RETIENS

La résolution graphique d'un problème qui se traduit par une inéquation du premier degré à une inconnue est une méthode relativement simple et assez rapide. Toutefois, elle peut manquer de précision. Elle doit donc s'accompagner d'une résolution qui repose sur le calcul.

J'APPLIQUE

Un cinéma propose deux tarifs. Avec le tarif A, on paye 2 000 F par séance. Avec le tarif B, on paye une carte de réduction de 6 000 F qui permet de ne payer que 1 200 F par séance. Compare graphiquement les deux tarifs.

JE ME SOUVIENS

Une droite (d) partage le plan en trois parties disjointes deux à deux : la droite elle-même et les deux demi-plans ouverts de frontière (d) .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis la droite (d) d'équation $2x - 3y + 1 = 0$ relativement à un repère (O, I, J) . Place les points dont les noms et les coordonnées sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Points	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
abscisse x	-5	-1	2	4	1	4	-4	-3	0	4
ordonnée y	2	3	3	4	1	3	-4	-3	-3	-2

Recopie et complète le tableau. Quel est le signe du nombre $2x - 3y + 1$ pour chacun des points A, B, C et D ? et pour chacun des points G, H, K, L et O ? Place un point $P(x; y)$ tel que $2x - 3y + 1 > 0$ et un point $R(x; y)$ tel que $2x - 3y + 1 < 0$.

$ax + by + c > 0$, $ax + by + c < 0$ et $ax + by + c = 0$ sont d'autres inéquations du premier degré à deux inconnues.

JE RETIENS

- Soit a , b et c trois nombres fixes non nuls. L'inégalité $ax + by + c \geq 0$ est une inéquation du premier degré à deux inconnues.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + by + c \geq 0$ est représenté par un demi-plan qui a pour frontière la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Pour déterminer ce demi-plan, il faut calculer $ax + by + c$ en utilisant les coordonnées x et y d'un point arbitrairement choisi mais non situé sur la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Si le résultat est positif, le point appartient au demi-plan cherché. S'il est négatif, il ne lui appartient pas et le demi-plan cherché est donc l'autre demi-plan.

Attention ! Selon les cas, les points de la frontière font partie ou non de la représentation graphique l'ensemble des solutions cherchées.

J'APPLIQUE

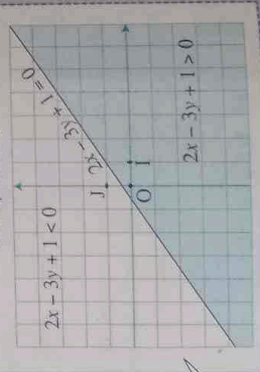
- 1 Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Hachure la partie du plan qui contient les points dont les coordonnées x et y vérifient $4x - y > 0$.
- 2 Résous graphiquement les inéquations suivantes : $x - y - 1 > 0$; $x + y - 2 \leq 0$; $-4x + 3y + 1 < 0$.

Exemple

Résolvons $2x - 3y + 1 \geq 0$. Les coordonnées de l'origine O du repère sont $x = 0$ et $y = 0$. On a donc pour le point O ,

$$2x - 3y + 1 = 2 \times 0 - 3 \times 0 + 1 = 1.$$

Comme 1 est positif, le point O appartient à la représentation de l'ensemble des solutions de l'inéquation. Sur la figure ci-dessous, l'ensemble des solutions de $2x - 3y + 1 \geq 0$ est donc représenté par le demi-plan colorié.



JE ME SOUVIENS

Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan. Le signe du nombre $ax + by + c$ dépend de la position de M : il est nul, positif ou négatif selon que M appartient à la droite (d) elle-même ou bien à l'un des demi-plans de frontière (d) .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Vérifie que les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) qui sont tracées relativement au repère (O, I, J) ont pour équations respectives $2x - y - 1 = 0$; $x + y + 4 = 0$ et $x - 3y + 6 = 0$.

a) Reproduis cette figure sur ton cahier. Nomme chacune des droites tracées.

b) Hachure le demi-plan qui contient les points dont les coordonnées x et y vérifient la relation $2x - y - 1 \leq 0$.

c) Hachure le demi-plan qui contient les points dont les coordonnées x et y vérifient la relation $x + y + 4 \geq 0$.

d) Hachure le demi-plan qui contient les points dont les coordonnées x et y vérifient la relation $x - 3y + 6 \geq 0$.

e) Quelle est la région du plan qui contient les points dont les coordonnées x et y vérifient le système d'inéquations

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 \leq 0 \\ x + y + 4 \geq 0 \\ x + 3y + 6 \geq 0 \end{cases}$$

JE RETIENS

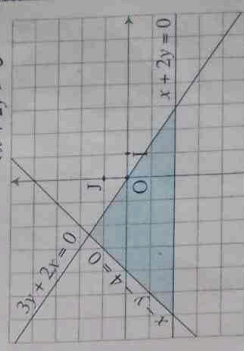
- Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de plusieurs inéquations du premier degré à deux inconnues, il faut déterminer l'intersection des demi-plans qui sont les représentations graphiques des solutions de chaque inéquation du système.

Attention aux frontières !

Exemple

Sur la figure ci-dessous, la région coloriée montre les points dont les coordonnées x et y vérifient le système

$$\begin{cases} 3y + 2x \leq 0 \\ x - y - 4 \leq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$



J'APPLIQUE

- 1 Résous graphiquement le système $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$
- 2 Résous graphiquement le système $\begin{cases} 2x + 2y + 5 \geq 0 \\ x + 4y - 6 \leq 0 \\ y - 5 \leq 0 \end{cases}$

réponse en résolvant également ces inéquations par le calcul.

- 9** $3x - 8 > 6$; $2x + 1 < -3x + 2$,
10 $-x + 2 > 2x + 3$; $\frac{1}{3}x - 2 < \frac{4}{5}x$,
11 $2(x - 1) + 4 > 3(2x - 2)$,
12 $\frac{x-1}{5} < 1 + \frac{2(x-3)}{3}$.

Inéquations du premier degré à deux inconnues

Exercices 13 à 17: Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) ; x et y désignent deux nombres réels, résous graphiquement les inéquations proposées.

- 13** $x - 2y > 0$; $3x + 5y - 4 > 0$,
14 $3x + \frac{1}{2}y > 0$; $-2y + 3x - 9 > 0$,
15 $-2x + y + 3 > 0$; $x - y + 5 < 0$,
16 $\frac{1}{3}x - y + \frac{1}{2} > 0$; $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + 6 < 0$,
17 $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} + 1 > 0$; $\frac{2}{7}x > \frac{2}{3}y + 1$.

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Exercices 18 et 20: Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J) , résous graphiquement les systèmes d'inéquations proposés.

- 18** $\begin{cases} y < 4 \\ x + 2y > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$
19 $\begin{cases} 2x - y + 1 > 0 \\ x + y - 1 < 0 \\ x - 3y + 9 < 0 \end{cases}$
20 $\begin{cases} y - 2x > -3 \\ x + y < 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Exercices 1 à 5: Résous ces inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ et représente graphiquement l'ensemble de leurs solutions.

- 1** $3x + 5 > 0$; $2 - 5x \geq 0$;
 $7 - 4x < 0$; $8x - 4 \leq 0$,
2 $3(5x + 2) - x \leq 0$;
 $2(x - 1) + 3(1 - 2x) > 0$;
 $3x + 2(3x + 1) < 0$;
 $-2(x - 3) + 5x \geq 3(1 - 3x)$,
3 $5x - 7 < 9x - 12$; $3x - 4 - 5(x - 1) > 0$;
 $3(x - 1) \geq 6x + 1$; $1 + 2(3x - 4) \geq 5(3 - x)$,
4 $\frac{2x+1}{3} \geq \frac{x}{5}$; $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{3x}{2}$;
 $\frac{2}{3} - \frac{x}{6} \geq 1 + \frac{x}{2}$; $\frac{7x}{5} + \frac{3}{10} > \frac{4}{5} - \frac{7x}{20}$,
5 $\frac{x+1}{3} \leq \frac{x+2}{2}$; $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \leq 1$;
 $\frac{3x}{4} - \frac{1-2x}{5} < 2$; $\frac{x}{4} + \frac{3(x-1)}{2} < 0$.

Exercices 6 à 8: Résous ces systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$; représente graphiquement l'ensemble de leurs solutions.

- 6** $\begin{cases} 2x > 7x - 12 \\ 3 - 2x > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 1 \geq 7 \\ x < 18 - 2x \end{cases}$
7 $\begin{cases} x \leq -x + 6 \\ x > 2x - 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 5 < \frac{x}{2} + 1 \\ x - 2 < -x + 12 \end{cases}$
8 $\begin{cases} x - 6 \leq 2(1 - x) \\ x \geq 3 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 2(1 - x) \leq x - 4 \\ 2(x - 2) > -2x \end{cases}$

Écris ces ensembles sous forme d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Résolution graphique d'une inéquation du premier degré à une inconnue

Exercices 9 à 12: Résous graphiquement chacune des inéquations proposées en associant une droite à chacun de ses membres; vérifie ta

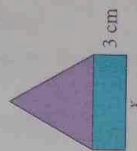
EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

21 Aminata a 5 ans et son père 30 ans, pendant combien d'années encore l'âge d'Aminata sera-t-il inférieur à la moitié de l'âge de son père?

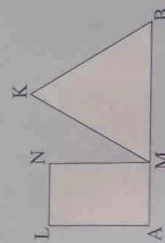
22 Un commerçant achète des crayons 70 F pièce. Il les revend 120 F pièce. Quel que soit le nombre des crayons achetés, il a des frais qui s'élèvent à 8000 F.

- a) Exprime le bénéfice réalisé sur la vente de x crayons.
 b) Combien doit-il vendre de crayons pour faire au moins 10 000 F de bénéfice sur leur vente?

23 Pour quelles valeurs de x , le périmètre du rectangle est-il plus grand que celui du triangle équilatéral?



24 M est un point variable d'un segment [AB] de longueur 8 cm. AMNL est un rectangle tel que $AL = 4$ cm. MBK est un triangle équilatéral. On pose $AM = x$.



- a) Montre que le périmètre du rectangle AMNL est $2x + 8$ et que celui du triangle MBK est $3(8 - x)$.
 b) Construis les droites d'équations respectives $y = 2x + 8$ et $y = 3(8 - x)$.
 c) Résous graphiquement l'inéquation suivante : $2x + 8 < 3(8 - x)$. Interprète la solution obtenue.

25 Un club de tennis propose deux tarifs. On peut être membre du club pour 12 000 F par an et payer ainsi 800 F chaque heure de jeu. On peut aussi, sans être membre du club, payer 1 800 F chaque heure de jeu. Compare les deux tarifs pour x heures de jeu dans l'année.

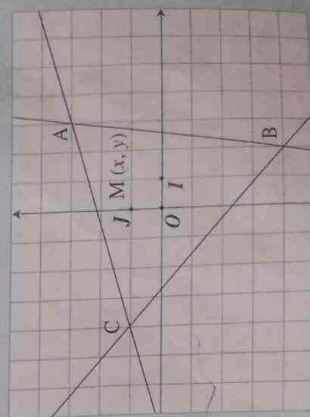
26 Pour se connecter à l'Internet, on a le choix entre deux tarifs mensuels: un forfait de 8 500 F et 4 600 F par heure de connexion ou bien un forfait de 8 000 F et 4 800 F par heure de connexion.

- a) On désigne par x (en heures) la durée mensuelle des connexions. Montre que les sommes mensuelles à payer sont données respectivement, en francs, par $4 600x + 8 500$ et $4 800x + 8 000$.
 b) Trace les droites d'équations respectives $y = 4 600x + 8 500$ et $y = 4 800x + 8 000$ pour $0 \leq x \leq 5$. Utilise ces représentations pour comparer les deux tarifs.

27 On veut acheter x cahiers de 100 pages à 250 F l'un et y cahiers de 200 pages à 450 F l'un. On veut dépenser moins de 2500 F.

- a) Montre qu'on doit avoir $x + 1.8y - 10 < 0$.
 b) Trace la droite d'équation $x + 1.8y - 10 = 0$.
 c) Montre graphiquement qu'il existe au moins six solutions et donne ces solutions.

28 Quelles inégalités vérifient les coordonnées x et y d'un point M intérieur au triangle ABC de la figure ci-dessous?



JE ME SOUVIENS

Quand une série statistique contient N observations, on dit que son effectif total est N . Si la même observation figure n fois dans la série, on dit que l'effectif de cette observation est n . On définit la fréquence de celle-ci par le quotient $\frac{n}{N}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Un devoir, noté de 0 à 20, a été donné aux élèves de 3^e A. Voici le relevé des notes :

4	10	15	15	6	14	7	6	11	8
7	16	20	19	19	12	12	8	4	
9	12	7	5	18	3	11	18	11	10
7	5	8	14	13	5	12	14	20	5
15	5	19	16	12	3	9	7	17	4
7	8	9	4	5	17	7	14	20	16
10	6	15	7	14	12	5	14	16	9

Combien de notes y a-t-il dans ce relevé ? Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Notes des devoirs	Nombre de devoirs	Nombre de devoirs en pourcentage du total
de 0 compris à 4 non compris		
de 4 compris à 8 non compris		
de 8 compris à 12 non compris		
de 12 compris à 16 non compris		
de 16 compris à 20 non compris		

En général, on prend un nombre impair de classes et on choisit la même amplitude pour toutes.

JE RETIENS

- On regroupe souvent les observations d'une série statistique en classes. Chaque classe est caractérisée par ses bornes. Par convention, une observation qui a une valeur égale à la borne inférieure d'une classe est rangée dans cette classe. Si sa valeur est égale à la borne supérieure d'une classe, elle est rangée dans la classe suivante.
- On appelle effectif de classe le nombre des observations qui figurent dans une classe donnée et fréquence de classe le nombre $\frac{n}{N}$, n désignant l'effectif de la classe concernée et N l'effectif total de la série.
- Une classe dont les bornes sont les nombres a et b , avec $a < b$, est notée $[a; b[$. Le nombre $b - a$ est son amplitude et le nombre $\frac{b+a}{2}$ sa valeur centrale.

J'APPLIQUE

1 Dans l'exercice de la rubrique *J'observe et je découvre*, les notes ont été réparties en cinq classes. Représente cette répartition par un diagramme circulaire.

2 Voici la distribution des tailles des élèves d'une classe de troisième :

Tailles en cm	[150; 155[	[155; 160[	[160; 165[	[165; 170[	[170; 175]
Effectifs	9	12	21	18	10

Calcule les fréquences de classe et représente cette distribution par un diagramme circulaire.

JE ME SOUVIENS

Les observations d'une série statistique sont représentées graphiquement par divers diagrammes : en bâtons, à barres verticales ou horizontales, circulaires ou semi-circulaires.

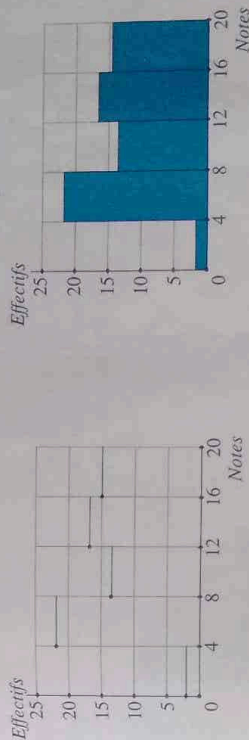
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le tableau ci-contre montre la répartition des notes obtenues par les élèves de 3^e A au dernier devoir de mathématiques.

a) Recopie et complète ce tableau. Le total des nombres de la colonne de droite est-il 100 ?

Classes	Effectifs	Fréquences
[0; 4[	2	 %
[4; 8[	22	 %
[8; 12[	14	 %
[12; 16[	17	 %
[16; 20]	15	 %
Total		 %

b) Voici deux diagrammes qui représentent les données du tableau précédent :



Celui de gauche est une fonction en escalier. Celui de droite est un histogramme : les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes. Reproduis les deux diagrammes avec les échelles de ton choix.

c) Construis des représentations graphiques semblables en remplaçant les effectifs par les fréquences.

JE RETIENS

- Quand les observations d'une série statistique sont réparties en classes, on représente graphiquement leur répartition par une fonction en escalier ou par un histogramme. On fait de même pour les fréquences.
- Les histogrammes des effectifs et des fréquences sont formés de rectangles accolés dont les aires sont, selon le cas, proportionnelles aux effectifs des classes ou aux fréquences de classe. Lorsque les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles soit aux effectifs des classes soit aux fréquences de classe.

C'est le cas dans la majorité des études statistiques.

J'APPLIQUE

1 Construis une fonction en escalier et un histogramme qui représentent la distribution des fréquences des notes de l'exercice donné plus haut.

2 Construis l'histogramme des effectifs et l'histogramme des fréquences de la série statistique donnée dans la rubrique *J'applique* de la page précédente.

JE ME SOUVIENS

Quand une série statistique contient N observations, on dit que son effectif total est N . Si la même observation figure n fois dans la série, on dit que l'effectif de cette observation est n . On définit la fréquence de celle-ci par le quotient $\frac{n}{N}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Un devoir, noté de 0 à 20, a été donné aux élèves de 3^e A. Voici le relevé des notes :

4	10	15	15	6	14	7	6	11	8
7	16	20	19	19	12	12	8	4	
9	12	7	5	18	3	11	18	11	10
7	5	8	14	13	5	12	14	20	5
15	5	19	16	12	3	9	7	17	4
7	8	9	4	5	17	7	14	20	16
10	6	15	7	14	12	5	14	16	9

Combien de notes y a-t-il dans ce relevé ? Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Notes des devoirs	Nombre de devoirs	Nombre de devoirs en pourcentage du total
de 0 compris à 4 non compris		
de 4 compris à 8 non compris		
de 8 compris à 12 non compris		
de 12 compris à 16 non compris		
de 16 compris à 20 compris		

En général, on prend un nombre impair de classes et on choisit la même amplitude pour toutes.

JE RETIENS

- On regroupe souvent les observations d'une série statistique en classes. Chaque classe est caractérisée par ses bornes. Par convention, une observation qui a une valeur égale à la borne inférieure d'une classe est rangée dans cette classe. Si sa valeur est égale à la borne supérieure d'une classe, elle est rangée dans la classe suivante.
- On appelle effectif de classe le nombre $\frac{n}{N}$, n désignant l'effectif de la classe concernée et N l'effectif total de la série.
- Une classe dont les bornes sont les nombres a et b , avec $a < b$, est notée $[a; b[$. Le nombre $b - a$ est son amplitude et le nombre $\frac{b + a}{2}$ sa valeur centrale.

J'APPLIQUE

1 Dans l'exercice de la rubrique *J'observe et je découvre*, les notes ont été réparties en cinq classes. Représente cette répartition par un diagramme circulaire.

2 Voici la distribution des tailles des élèves d'une classe de troisième :

Tailles en cm	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
Effectifs	9	12	21	18	10

Calcule les fréquences de classe et représente cette distribution par un diagramme circulaire.

JE ME SOUVIENS

Les observations d'une série statistique sont représentées graphiquement par divers diagrammes : en bâtons, à barres verticales ou horizontales, circulaires ou semi-circulaires.

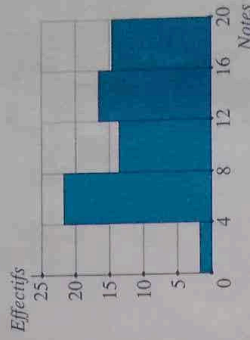
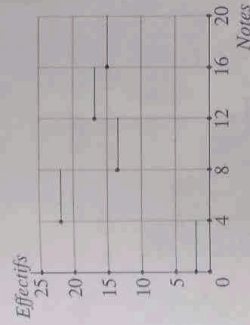
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le tableau ci-contre montre la répartition des notes obtenues par les élèves de 3^e A au dernier devoir de mathématiques.

a) Recopie et complète ce tableau. Le total des nombres de la colonne de droite est-il 100 ?

Classes	Effectifs	Fréquences
[0 ; 4[	2	 %
[4 ; 8[	22	 %
[8 ; 12[	14	 %
[12 ; 16[	17	 %
[16 ; 20]	15	 %
Total		 %

b) Voici deux diagrammes qui représentent les données du tableau précédent :



Celui de gauche est une **fonction en escalier**. Celui de droite est un **histogramme** : les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes. Reproduis les deux diagrammes avec les échelles de ton choix.

c) Construis des représentations graphiques semblables en remplaçant les effectifs par les fréquences.

JE RETIENS

- Quand les observations d'une série statistique sont réparties en classes, on représente graphiquement leur répartition par une **fonction en escalier** ou par un **histogramme**. On fait de même pour les fréquences.
- Les histogrammes des effectifs et des fréquences sont formés de rectangles accolés dont les aires sont, selon le cas, **proportionnelles** aux effectifs des classes ou aux fréquences de classe. Lorsque les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles soit aux effectifs des classes soit aux fréquences de classe.

C'est le cas dans la majorité des études statistiques.

J'APPLIQUE

1 Construis une fonction en escalier et un histogramme qui représentent la distribution des fréquences des notes de l'exercice donné plus haut.

2 Construis l'histogramme des effectifs et l'histogramme des fréquences de la série statistique donnée dans la rubrique *J'applique* de la page précédente.

JE ME SOUVIENS

Quand le nombre des valeurs de la variable statistique étudiée est très important, on regroupe ces valeurs en classes.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le tableau n° 1 montre la répartition des notes de 65 élèves.

Tableau n° 1

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs	6	14	20	15	10

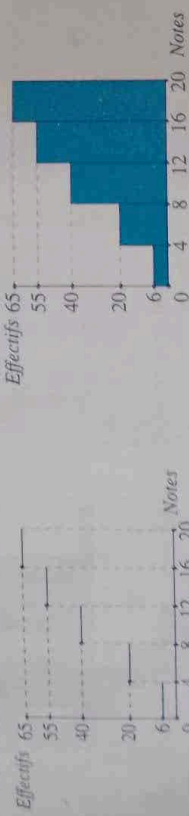
a) Le tableau n° 2 a été établi à partir du tableau n° 1.

Tableau n° 2

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs	6	20	40	55	65

Quelle signification donnes-tu aux nombres qui y figurent ?

b) Les deux graphiques ci-dessous représentent les données de ce tableau. L'un est constitué d'une fonction en escalier, l'autre est un histogramme. Reproduis ces deux graphiques.



c) Le tableau n° 3 a lui aussi été établi à partir du premier. Quelle signification donnes-tu aux nombres qui y figurent ? Représente ces nombres par une fonction en escalier et par un histogramme.

Tableau n° 3

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectifs	65	59	45	25	10



JE RETIENS

Calculer les effectifs cumules croissants d'une série statistique, c'est déterminer le nombre des observations dont les valeurs sont inférieures ou égales à chacune des bornes supérieures des classes. Calculer les effectifs cumules décroissants d'une série statistique, c'est déterminer le nombre des observations dont les valeurs sont supérieures ou égales à chacune des bornes inférieures des classes.

En remplaçant les effectifs par les fréquences, on obtient respectivement les fréquences cumules croissantes et les fréquences cumules décroissantes.



J'APPLIQUE

1 Remplace les effectifs par les fréquences dans le tableau n° 1, puis calcule les fréquences cumules croissantes et les fréquences cumules décroissantes correspondantes. Construis des représentations graphiques des fréquences cumules croissantes et décroissantes.

JE ME SOUVIENS

Pour calculer la moyenne d'une série statistique, on multiplie chaque valeur observée par son effectif, on fait la somme des résultats obtenus puis on divise cette somme par l'effectif total.

Exemple.

La série des notes 6; 6; 9; 9; 10; 11; 11; 11 a pour moyenne $\frac{2 \times 6 + 2 \times 9 + 10 + 3 \times 11}{8} \approx 9,1$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le tableau suivant montre la distribution de 80 notes de devoirs.

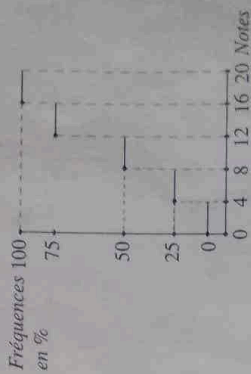
Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20]
Effectif E	7	13	20	27	13
Valeur centrale V de la classe					
Produit de E par V					

Recopie et complète ce tableau. Comme il ne permet pas de connaître le détail des notes, on admet que chaque note est égale à la valeur centrale de la classe qui la contient. Explique pourquoi cette manière de voir est statistiquement admissible. Déduis-en une estimation de la moyenne des notes.

La fonction en escalier ci-contre représente les fréquences cumules croissantes de la distribution des notes précédentes.

a) Reproduis ce graphique.

b) D'après ce graphique, quelle est la note qui partage l'ensemble des notes des devoirs en deux groupes de même effectif ?



JE RETIENS

On dit que la valeur la plus fréquente d'une série statistique est le mode de la série. Si les valeurs de la série ont été regroupées en classes, on dit que la classe qui possède l'effectif le plus grand est la classe modale.

Pour calculer la moyenne d'une série statistique dont les observations sont regroupées en classes, on multiplie l'effectif de chaque classe par la valeur centrale de cette classe, on fait la somme des résultats obtenus puis on divise cette somme par l'effectif total de la série.

La médiane d'une série statistique est une valeur de la variable telle que 50 % des valeurs de la série lui soient supérieures ou égales. On la détermine graphiquement à l'aide de l'une des fonctions en escalier qui représente les fréquences cumules.



J'APPLIQUE

1 Voici la distribution des tailles des élèves d'une classe de troisième :

Tailles en cm	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175]
Effectifs	9	12	21	18	10

Détermine la classe modale de la série, la taille moyenne des élèves puis la médiane de la série.

Histogrammes

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Regroupement en classes des valeurs d'une série statistique

1 Un entomologiste étudie l'envergure des ailes d'une espèce de papillon. Le tableau suivant montre les mesures qu'il a effectuées.

Envergure en mm	55	56	57	58	59	60	61	62
Nombre de femelles	0	0	0	2	5	4	6	8
Nombre de mâles	7	13	22	24	18	15	12	9

Envergure en mm	63	64	65	66	67	68	69	70
Nombre de femelles	10	14	26	32	18	16	8	3
Nombre de mâles	6	4	0	0	0	0	0	0

a) Répartis les envergures étudiées en trois classes : [55 ; 60[, [60 ; 65[et [65 ; 70].
b) Calcule les fréquences de classes. Représente la répartition de ces fréquences par un diagramme circulaire.

2 Le tableau qui suit montre la répartition estimée des réserves de pétrole dans le monde selon leur profondeur :

Profondeur P (en m)	Superficie des gisements (en milliers de km ²)
$0 \leq P < 20$	9,4
$20 \leq P < 100$	15,2
$100 \leq P < 300$	3,1
$300 \leq P < 1\,000$	15
$1\,000 \leq P < 2\,000$	15
$2\,000 \leq P < 3\,000$	26,3

a) Répartis ces données en trois classes de même amplitude.
b) Calcule les fréquences de classes et représente la nouvelle répartition par un diagramme circulaire.

3 Un fabricant d'ampoules électriques a testé la durée de vie de 1 600 ampoules. Il a obtenu les résultats suivants :

Durée de vie t (en h)	Nombre d'ampoules
$0 \leq t < 400$	50
$400 \leq t < 600$	100
$600 \leq t < 800$	300
$800 \leq t < 1\,000$	500
$1\,000 \leq t < 1\,200$	600
$1\,200 \leq t < 1\,400$	50

Représente ces données par une fonction en escalier puis par un histogramme.

4 Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'une école selon la distance d qui sépare leur domicile de l'école.

Distance d (en m)	Effectif
$0 \leq d < 1\,000$	50
$1\,000 \leq d < 2\,000$	200
$2\,000 \leq d < 3\,000$	300
$3\,000 \leq d < 4\,000$	250
$4\,000 \leq d < 5\,000$	100
$5\,000 \leq d < 6\,000$	50

a) Représente ces données par un histogramme.
b) Calcule les fréquences de classes et représente-les par un histogramme.

5 Le tableau suivant montre la répartition des temps mis par des élèves de 4^e pour courir le 60 m.

Temps t (en s)	Nombre d'élèves
$8 \leq t < 8,5$	10
$8,5 \leq t < 9$	15
$9 \leq t < 9,5$	30
$9,5 \leq t < 10$	20
$10 \leq t < 10,5$	5

a) Représente ces données par un histogramme.
b) Calcule les fréquences de classes et représente-les par un histogramme.

Effectifs et fréquences cumulés

6 Le tableau suivant montre la répartition des tailles des élèves de troisième d'un collège.

Tailles T en cm	Garçons	Filles
$140 \leq T < 150$	5	20
$150 \leq T < 160$	75	90
$160 \leq T < 170$	85	80
$170 \leq T < 180$	25	10

a) Quel est le nombre d'élèves dont la taille est strictement inférieure à 170 cm ?

b) Quel est le nombre des élèves dont la taille est supérieure ou égale à 160 cm ?

c) Calcule les fréquences de classes cumulées croissantes et représente-les par un histogramme.

7 Une épreuve d'examen a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous :

Notes N sur 40	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$0 \leq N < 10$	25		
$10 \leq N < 20$	45		
$20 \leq N < 30$	75		
$30 \leq N < 40$	55		

a) Recopie et complète ce tableau.

b) Représente les effectifs cumulés croissants par une fonction en escalier.

c) Représente les effectifs cumulés décroissants par un histogramme.

8 Le tableau ci-dessous montre les temps réalisés par des coureurs lors d'un marathon.

Temps t	Effectifs
$2\text{h}10 \leq t < 2\text{h}20$	20
$2\text{h}20 \leq t < 2\text{h}30$	40
$2\text{h}30 \leq t < 2\text{h}40$	100
$2\text{h}40 \leq t < 2\text{h}50$	130
$2\text{h}50 \leq t < 3\text{h}$	250
$3\text{h} \leq t < 3\text{h}10$	280
$3\text{h}10 \leq t < 3\text{h}20$	180

a) Calcule les fréquences de classes cumulées croissantes et décroissantes.
b) Représente ces fréquences cumulées par des histogrammes.

Valeurs centrales d'une série statistique

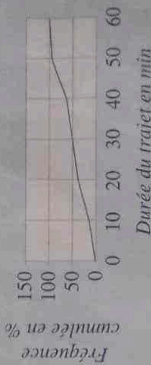
9 Pour calibrer ses fruits, un producteur a mesuré leurs diamètres. Il a obtenu les résultats suivants :

Diamètre en mm	60 à 65	65 à 70	70 à 75	75 à 80	80 à 85
Effectifs	150	350	400	250	100

a) Détermine le diamètre moyen des fruits.

b) Quelle est la classe médiane ?

10 On a demandé aux élèves d'un collège combien de temps ils mettent pour aller de leur domicile au collège. Le graphique ci-dessous indique les fréquences cumulées croissantes des durées.



a) Reproduis ce graphique.

b) Quel est le pourcentage des élèves qui mettent moins de 10 min ? moins de 50 min ?
c) Quel est le temps maximum mis par 70 % des élèves ?

d) Quelle est la durée médiane du trajet d'un élève ?

11 Le tableau suivant montre la répartition des 64 matchs de la dernière Coupe du monde de football selon le nombre des buts marqués.

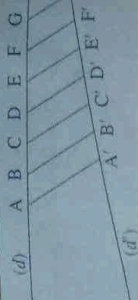
Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de matchs	3	12	11	18	10	6	1	2	1

a) Quelle est la médiane de cette série statistique ?

b) Quel est le nombre moyen des buts marqués par match ?

JE ME SOUVIENS

La projection d'une division régulière est une division régulière.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Trace deux droites (d) et (d') . Marque trois points A, B et C sur la droite (d) . Marque un point A' sur la droite (d') . La parallèle à (AA') qui passe par B coupe (d') en B'. La parallèle à (AA') qui passe par C coupe (d') en C'. Mesure les longueurs AB, AC, BC, A'B', A'C' et B'C'.

Que peux-tu dire des rapports $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{A'C'}{AC}$ et $\frac{B'C'}{BC}$?

Soit deux droites (d) et (d') . A, B et C sont trois points placés dans cet ordre sur (d) et $A'B' = 2,4$ cm et $BC = 3,6$ cm. A' est un point quelconque de la droite (d') . J est le milieu de $[AB]$. K et L sont les points de $[BC]$ tels que $BK = KL = LC$. Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par J, par B, par K, par L et par C coupent la droite (d') respectivement en J', B', K', L' et C'. Démontre que $BC = \frac{3}{2} AB$, $AC = \frac{5}{2} AB$, $B'C' = \frac{3}{2} A'B'$ et $A'C' = \frac{5}{2} A'B'$. Déduis-en que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

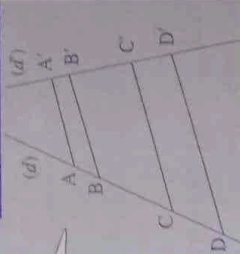


Dans les pays francophones, cet énoncé constitue le théorème de Thalès du nom d'un géomètre grec de l'Antiquité. Ce n'est pas le cas dans les pays anglophones.

JE RETIENS

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants dont les longueurs sont proportionnelles.

Hypothèses : (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont parallèles.
Conclusion : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$.

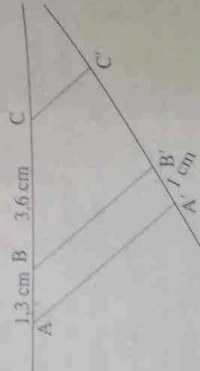


Remarque : les droites (d) et (d') peuvent être sécantes ou parallèles.

Le théorème de Thalès permet d'affirmer l'égalité de certains rapports de longueurs. Il va donc servir principalement à faire des calculs de longueurs.

J'APPLIQUE

1 Sur la figure ci-contre, les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles. Calcule $B'C'$ et $A'C'$.



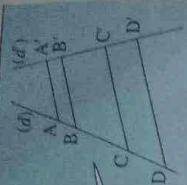
2 A, B et C sont trois points pris dans cet ordre sur une droite (d) tels que $AB = 2,7$ cm et $BC = 4,5$ cm. A' est un point d'une droite (d') . Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par B et par C coupent la droite (d') en B' et en C'. Démontre que $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{3}{8}$ et $B'C' = \frac{5}{3} A'B'$.

JE ME SOUVIENS

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants dont les longueurs sont proportionnelles.

Hypothèses : (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont parallèles.

Conclusion : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 6$ cm. Marque deux points M et P sur la demi-droite $[BA]$ tels que $BM = 4$ cm et $BP = 9$ cm.

Les parallèles à (AC) qui passent respectivement par M et par P coupent la droite (BC) en N et en Q. Mesure les longueurs BN et BQ puis compare les rapports $\frac{BN}{BM}$, $\frac{BC}{BA}$ et $\frac{BQ}{BP}$.

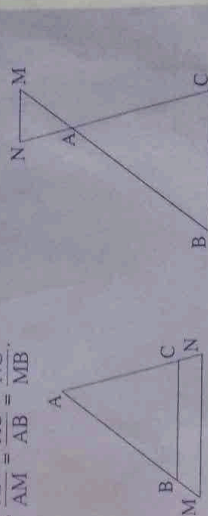
Soit un triangle ABC et soit M un point de (AB) . La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N.

a) Quels sont les projetés respectifs des points B, M et A sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC) ?

b) En utilisant le théorème de Thalès, démontre que $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$.

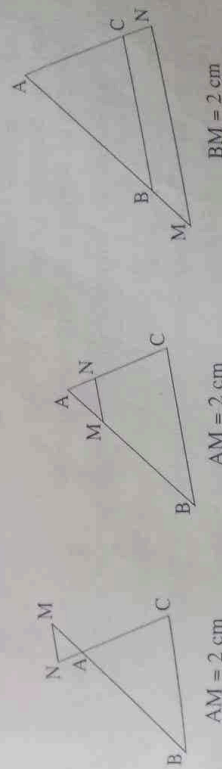
JE RETIENS

Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et soit N un point de (AC) . Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC) , alors $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$.



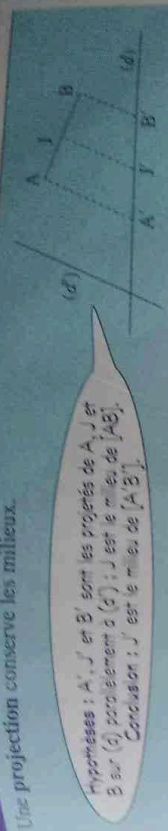
J'APPLIQUE

1 Dans chaque figure, $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 7,5$ cm. (MN) est parallèle à (BC) . Calcule AN.



JE ME SOUVIENS

Une projection conserve les milieux.



Hypothèses : A, J et B sont les projetés de A', J' et B' sur (d) parallèlement à (d'). J est le milieu de [AB].
Conclusion : J' est le milieu de [A'B'].

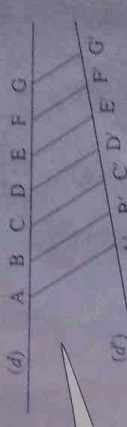
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- 1 Trace deux droites (d) et (d') et une troisième droite (Δ) qui coupe (d) et (d'). Marque cinq points A, B, C, D et E dans cet ordre sur la droite (d) de façon à avoir $AB = BC = CD = DE = 2 \text{ cm}$. Construis les points A', B', C', D' et E' projetés respectifs des points A, B, C, D et E sur la droite (d') parallèlement à la droite (Δ).
- a) Mesure les longueurs A'B', B'C', C'D' et D'E'. Qu' observes-tu ?
- b) Démontre l'égalité de ces longueurs.

JE RETIENS

- On dit que des points alignés et régulièrement espacés forment une division régulière.
- La projection d'une division régulière est encore une division régulière.

Les points A, B, C, D, E, etc., forment une division régulière.



Les segments [AB] et [A'B'], [BC] et [B'C'], etc., sont dits correspondants.

J'APPLIQUE

- 1 Trace un segment [AB] de 7 cm et une demi-droite [Ax] quelconque ne contenant pas B. Marque un point J sur [Ax], puis construis sur la demi-droite [Ax] quatre segments consécutifs [AJ], [JK], [KL] et [LM] de même longueur. Construis ensuite les parallèles à (MB) qui passent respectivement par J, K et L. Ces droites coupent [AB] en J', K' et L' respectivement. Démontre que les points A, J', K', L' et B forment une division régulière.
- 2 Construis deux droites (d) et (d') distantes de 2,5 cm. Construis une troisième droite (d'') différente de (d) et située à 2,5 cm de (d'). Trace une droite (Δ) qui coupe respectivement les droites (d), (d') et (d'') en M, N et P. Démontre que N est le milieu de [MP].
- 3 Construis un triangle ABC tel que $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 9 \text{ cm}$ et $AC = 6,5 \text{ cm}$. Soit J le milieu de [AB], K celui de [AJ], L celui de [JB] et J' celui de [BC]. La parallèle à (JJ') qui passe par K coupe (BC) en K'. La parallèle à (JJ') qui passe par L coupe (BC) en L'. Démontre que les points K', J' et L' partagent le segment [BC] en quatre parties égales.

12 - Équations de droites : cas général

79 - Équations d'une droite	P. 112
80 - Comment trouver l'une des deux coordonnées d'un point d'une droite d'équation connue ?	113
81 - Construction d'une droite d'équation connue	114
82 - Signification géométrique des coefficients d'une équation de droite	115
83 - Déterminer une équation de droite (1)	116
84 - Déterminer une équation de droite (2)	117
85 - Intersection de deux droites	118

13 - Équations réduites de droites

86 - Forme réduite des équations d'une droite	P. 119
87 - Coefficients directeurs d'une droite	120
88 - Positions relatives de deux droites	121
Exercices d'application et problèmes	122
Exercices de recherche et problèmes	124

14 - Transformations planes

89 - Symétries centrales successives	P. 126
90 - Translations successives	127
91 - Symétries orthogonales successives	128
92 - Rotations planes (1)	129
93 - Rotations planes (2)	130
Exercices d'application et problèmes	131
Exercices de recherche et problèmes	132

15 - Géométrie dans l'espace

94 - Pyramides (1)	P. 133
95 - Pyramides (2)	134
96 - Cônes de révolution (1)	135
97 - Cônes de révolution (2)	136
98 - Volume d'une pyramide et d'un cône	137
99 - Section d'une pyramide et d'un cône	138
100 - Agrandissement et réduction	139
Exercices d'application et problèmes	140
Exercices de recherche et problèmes	141

SUJETS DU B.E.P.C

P. 142

ANNEXES

P. 143
143
144

Tables trigonométriques

8 - Théorème de Thalès

50 - Projection d'une division régulière	P. 73
51 - Théorème de Thalès : cas général	74
52 - Théorème de Thalès : cas du triangle	75
53 - Construction d'une quatrième proportionnelle	76
54 - Partager un segment dans un rapport donné	77
55 - Triangles homothétiques	78
56 - La réciproque du théorème de Thalès : cas du triangle	79
Exercices d'application et problèmes	80
Exercices de recherche et problèmes	82

9 - Trigonométrie

57 - Cosinus et sinus d'un angle aigu	P. 83
58 - Utilisation d'une table trigonométrique	84
59 - Tangente d'un angle aigu	85
60 - Utilisation d'une calculatrice scientifique	86
61 - Calculs dans le triangle rectangle (1)	87
62 - Calculs dans le triangle rectangle (2)	88
63 - Relations trigonométriques	89
64 - Sinus et cosinus d'angles particuliers	90
Exercices d'application et problèmes	91
Exercices de recherche et problèmes	93

10 - Angles inscrits et angles au centre

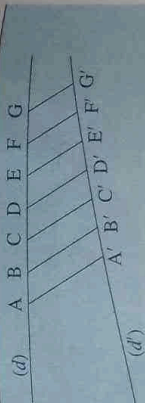
65 - Angles inscrits et angles au centre	P. 94
66 - Angles inscrits de même mesure	94
67 - Polygones réguliers (1)	95
68 - Polygones réguliers (2)	96
69 - Polygones réguliers (3)	97
Exercices d'application et problèmes	98
Exercices de recherche et problèmes	99
	100

11 - Vecteurs

70 - Produit d'un vecteur par un nombre	P. 101
71 - Vecteurs colinéaires	101
72 - Utilisation des vecteurs colinéaires	102
73 - Coordonnées d'un vecteur	103
74 - Coordonnées et opérations sur les vecteurs	104
	105
75 - Coordonnées de deux vecteurs égaux	106
76 - Caractérisation des vecteurs colinéaires	107
77 - Calcul de la distance de deux points	108
78 - Caractérisation des vecteurs orthogonaux	109
Exercices d'application et problèmes	110
Exercices de recherche et problèmes	111

JE ME SOUVIENS

La projection d'une division régulière est une division régulière.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Trace deux droites (d) et (d') . Marque trois points A, B et C sur la droite (d) . Marque un point A' sur la droite (d') . La parallèle à (AA') qui passe par B coupe (d') en B'. La parallèle à (AA') qui passe par C coupe (d') en C'. Mesure les longueurs AB, AC, BC, A'B', A'C' et B'C'.

Que peux-tu dire des rapports $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{A'C'}{AC}$ et $\frac{B'C'}{BC}$?

Soit deux droites (d) et (d') . A, B et C sont trois points placés dans cet ordre sur (d) et $A'B' = 2,4$ cm et $BC = 3,6$ cm. A' est un point quelconque de la droite (d') . J est le milieu de $[AB]$, K et L sont les points de $[BC]$ tels que $BK = KL = LC$. Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par J, par B, par K, par L et par C coupent la droite (d') respectivement en J', B', K', L' et C'. Démontre que $BC = \frac{3}{2} AB$, $AC = \frac{5}{2} AB$, $B'C' = \frac{3}{2} A'B'$ et $A'C' = \frac{5}{2} A'B'$. Dédus-en que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

JE RETIENS

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants dont les longueurs sont proportionnelles.

Hypothèses : (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont parallèles.
Conclusion : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$.

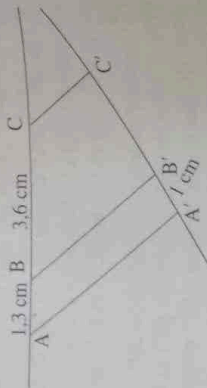
Remarque : les droites (d) et (d') peuvent être sécantes ou parallèles.

Le théorème de Thalès permet d'affirmer l'égalité de certains rapports de longueurs. Il va donc servir principalement à faire des calculs de longueurs.

J'APPLIQUE

1 Sur la figure ci-contre, les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles. Calcule $B'C'$ et $A'C'$.

2 A, B et C sont trois points pris dans cet ordre sur une droite (d) tels que $AB = 2,7$ cm et $BC = 4,5$ cm. A' est un point d'une droite (d') . Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par B et par C coupent la droite (d') en B' et en C'. Démontre que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2}$ et $B'C' = \frac{5}{3} A'B'$.



JE ME SOUVIENS

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants dont les longueurs sont proportionnelles.

Hypothèses : (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont parallèles.

Conclusion : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 6$ cm. Marque deux points M et P sur la demi-droite $[BA]$ tels que $BM = 4$ cm et $BP = 9$ cm.

Les parallèles à (AC) qui passent respectivement par M et par P coupent la droite (BC) en N et en Q. Mesure les longueurs BN et BQ puis compare les rapports $\frac{BN}{BM}$, $\frac{BQ}{BP}$.

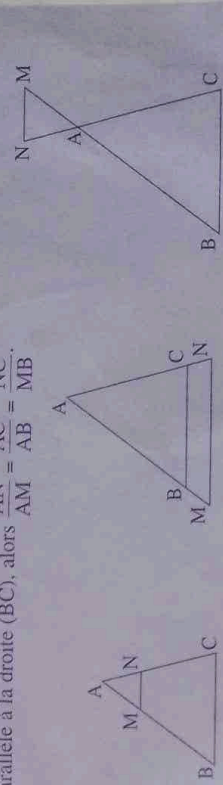
Soit un triangle ABC et soit M un point de (AB) . La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N.

a) Quels sont les projetés respectifs des points B, M et A sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC) ?

b) En utilisant le théorème de Thalès, démontre que $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$.

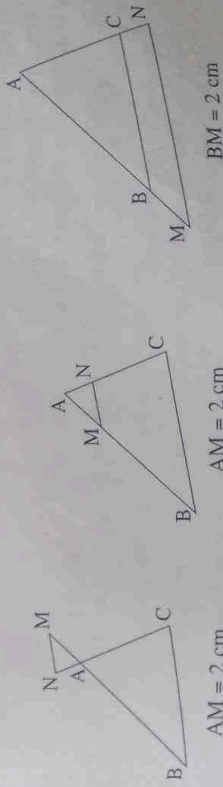
JE RETIENS

Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et soit N un point de (AC) . Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC) , alors $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$.



J'APPLIQUE

1 Dans chaque figure, $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 7,5$ cm. (MN) est parallèle à (BC) . Calcule AN.



AM = 2 cm

AM = 2 cm

BM = 2 cm

JE ME SOUVIENS

Étant donné trois nombres non nuls a , b et c , il existe un nombre d et un seul tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
On dit que d est la quatrième proportionnelle des nombres a , b et c pris dans cet ordre.

Exemple : si $\frac{6}{5} = \frac{9}{d}$ alors $d = \frac{5 \times 9}{6} = 7,5$.

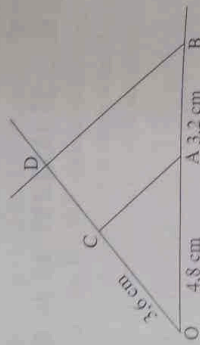
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis la figure ci-contre en tenant compte des indications qui y sont portées et sachant que les droites (BD) et (AC) sont parallèles. Mesure la longueur CD et compare les rapports $\frac{OA}{AB}$ et $\frac{OC}{CD}$. Qu' observes-tu ?

Utilise le théorème de Thalès pour démontrer que, dans l'exercice précédent, on a bien $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$.

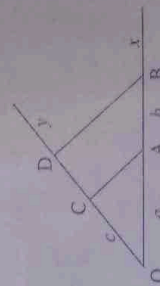
Dans cette proportion, que représente la longueur inconnue CD par rapport aux trois longueurs connues OA, AB et OC prises dans cet ordre ?

Calcule-la.



JE RETIENS

- Considérons trois longueurs connues a , b et c . Voici comment construire, à la règle et au compas, un segment de longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:
 - trace deux demi-droites (Ox) et (Oy) ;
 - marque A et B sur (Ox) tels que OA = a et AB = b ;
 - marque C sur (Oy) tel que OC = c ;
 - pour obtenir le point D, construis la parallèle à (AC) qui passe par B, elle coupe (Oy) en D.
- La longueur CD est la longueur cherchée.
- La longueur du segment [CD] est la quatrième proportionnelle aux nombres a , b et c pris dans cet ordre.



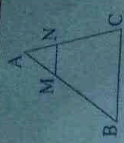
J'APPLIQUE

- Calcule la quatrième proportionnelle des nombres 3, 4 et 5 pris dans cet ordre.
- Construis la quatrième proportionnelle des longueurs suivantes en les prenant dans l'ordre indiqué :
 - a) $a = 5$ cm ; $b = 3$ cm ; $c = 4$ cm.
 - b) $a = 3$ cm ; $b = 2,5$ cm ; $c = 1,8$ cm.
 Vérifie la qualité de tes constructions par des calculs directs.
- Construis la quatrième proportionnelle des longueurs suivantes en les prenant dans l'ordre indiqué :
 - a) $a = 4,4$ cm ; $b = 3,3$ cm ; $c = 6$ cm.
 - b) $a = 3,3$ cm ; $b = 4,4$ cm ; $c = 6$ cm.
 - c) $a = 3,3$ cm ; $b = 6$ cm ; $c = 4,4$ cm.

Les résultats obtenus sont-ils les mêmes ? Pourquoi ?

JE ME SOUVIENS

Soit un triangle ABC. Soit M un point de (AB) et soit N un point de (AC). Si la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), alors $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$ et $\frac{NC}{MB} = \frac{AC}{AB}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Trace un segment [AB] de 8 cm de longueur. Marque J sur [AB] tel que AJ = 2,4 cm et marque K sur [BA] tel que KB = 1,4 cm. Vérifie que $\frac{JA}{JB} = \frac{KA}{KB} = \frac{3}{7}$.

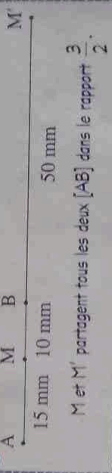
Trace un segment [AB] de 8 cm de longueur puis une demi-droite quelconque [Ax] ne contenant pas B. Marque C et D sur [Ax] tels que AC = 3 cm et CD = 7 cm. Construis la parallèle à (BD) qui passe par C ; elle coupe [AB] en J.

Mesure AJ et vérifie que $\frac{JA}{JB} = \frac{3}{7}$.

Utilise le théorème de Thalès pour démontrer que $\frac{JA}{JB} = \frac{3}{7}$.

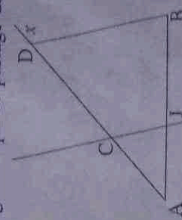
JE RETIENS

- Soit n et d deux entiers naturels non nuls. Dire qu'un point M partage un segment [AB] dans le rapport $\frac{n}{d}$ c'est dire qu'on a $\frac{MA}{MB} = \frac{n}{d}$.
Exemple : Il existe deux points de la droite (AB) qui partagent le segment [AB] dans un rapport donné. L'un appartient au segment [AB], l'autre est extérieur au segment [AB].



Soit un segment [AB] et soit deux longueurs ℓ_1 et ℓ_2 exprimées avec la même unité. On peut construire, à la règle et au compas, le point J intérieur au segment qui le partage dans le rapport $\frac{\ell_1}{\ell_2}$; il faut :

- tracer une demi-droite quelconque [Ax] ne contenant pas B ;
- marquer C et D sur [Ax] tels que AC = ℓ_1 et CD = ℓ_2 ;
- construire la parallèle à (BD) qui passe par C ; elle coupe [AB] au point cherché J.



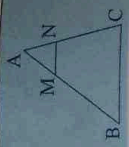
J'APPLIQUE

- Trace un segment [AB] de 5,7 cm de longueur. Marque un point L sur ce segment tel que AL = 3,8 cm. Dans quel rapport L partage-t-il le segment [AB] ?
- Soit un segment [AB] de 6 cm de longueur. Construis, à la règle et au compas, le point J intérieur au segment qui le partage dans le rapport $\frac{3}{5}$.

JE ME SOUVIENS

Puisque la droite (MN) est parallèle à la droite (BC), on a

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$$



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 8,5$ cm. Marque un point M sur [AB] tel que $BM = 2$ cm. La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N. Mesure les segments [MN] et [AN] puis compare les rapports et $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$. Qu' observes-tu ?

M est un point du côté [AB] d'un triangle ABC. La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N. La parallèle à (AB) qui passe par N coupe (BC) en L.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \quad \frac{NL}{BC} = \frac{BL}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{NL}{BC} = \frac{BL}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

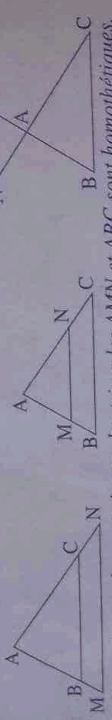
Démontre chacune des égalités suivantes : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$, $\frac{NL}{BC} = \frac{BL}{AB}$ et $\frac{NL}{BC} = \frac{BL}{AB}$.

Utilise les résultats précédents pour démontrer que $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$.

JE RETIENS

Deux triangles sont homothétiques quand ils ont un sommet commun, deux côtés dont les supports sont parallèles et deux autres côtés dont les supports sont confondus.

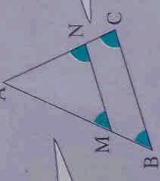
Homothétiques signifie qu'ils ont la même forme. Tu verras plus tard, au lycée, une définition plus générale de ce terme.



Dans chacun de ces trois cas, les triangles AMN et ABC sont homothétiques.

Si deux triangles sont homothétiques, leurs angles homologues ont la même mesure et leurs côtés homologues ont des longueurs proportionnelles.

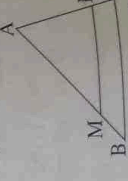
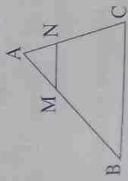
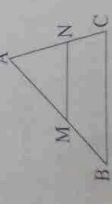
Hypothèse : ABC et AMN sont des triangles homothétiques.
Conclusion : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$;
 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



On dit que M et N, que N et C sont des sommets homologues.
On dit que [AM] et [AB], que [AN] et [AC] sont des côtés homologues.
On dit que $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$, que $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$ sont des angles homologues.

J'APPLIQUE

Dans chacune de ces 3 figures, $AB = 6,4$ cm, $AC = 4,4$ cm, $BC = 6$ cm et (MN) est parallèle à (BC).



AM = 3,8 cm. Calcule MN.

MN = 2 cm. Calcule AM.

BM = 1,4 cm. Calcule MN.

JE ME SOUVIENS

Un théorème est généralement présenté sous cette forme : « Si une propriété n° 1 est vraie, alors une propriété n° 2 est vraie aussi. » S'il est vrai, le théorème réciproque consiste à dire que « si la propriété n° 2 est vraie, alors la propriété n° 1 est vraie aussi ».

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC tel que $AB = 6,5$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 9$ cm. Marque M sur [AB] tel que $AM = 3,9$ cm et marque N sur [AC] tel que $AN = 4,8$ cm.

Montre que $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$. Vérifie avec l'équerre et la règle que (MN) et (BC) sont parallèles.

ABC est un triangle, M un point de [AB] et N un point de [AC] tels que $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB}$.

On se propose de prouver que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Pour cela, on considère la parallèle à (BC) qui passe par M. Cette droite coupe [AC] en N'.

a) Montre que $\frac{N'A}{N'C} = \frac{MA}{MB}$.

b) Que peux-tu conclure pour N et N' ? et pour les droites (MN) et (MN') ?

JE RETIENS

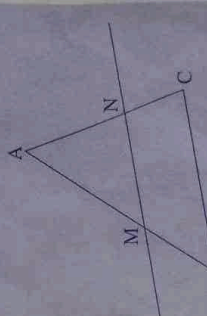
Lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle, elle y détermine quatre segments. Si les segments correspondants ont des longueurs proportionnelles, alors la droite est parallèle au troisième côté du triangle.

Hypothèses :

- M appartient au support du côté [AB] ;
- N appartient au support du côté [AC] ;
- A, C et N sont dans le même ordre que A, B et M ;
- $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$

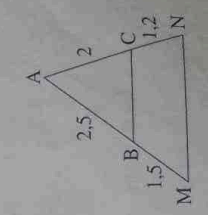
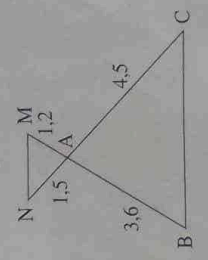
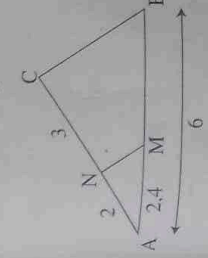
Conclusion :

(MN) est parallèle à (BC).



J'APPLIQUE

Reproduis chacune des figures ci-dessous puis, dans chaque cas, démontre que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. L'unité de longueur est le cm.

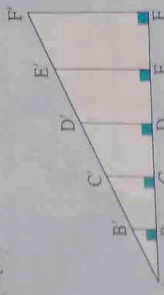


Dans chaque cas, les points A, M et B sont alignés ainsi que les points N, A et C.

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

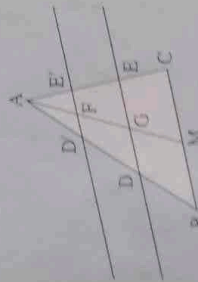
Projection d'une division régulière

- 1 Sur la figure ci-dessous, les points B, C, D et E partagent le segment [AF] en cinq segments de même longueur. $AF = 12$ cm et $FF' = 5$ cm. Les droites (BB') , (CC') , (DD') , (EE') et (FF') sont perpendiculaires à la droite (AF) .



Calcule les longueurs AB' , $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ et $E'F'$.

- 2 Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. F est le milieu de [AG] et M celui de [BC]. La parallèle à (BC) qui passe par G coupe (AB) en D et (AC) en E. La parallèle à (BC) qui passe par F coupe (AB) en D' et (AC) en E'.

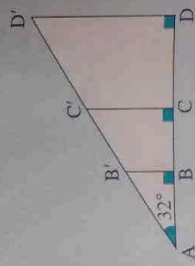


Montre que $BD = DD' = D'A$ et $CE = EE' = E'A$.

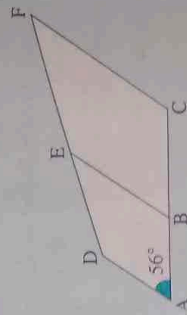
- 3 ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle E le milieu de [DO] et F celui de [OB]. La parallèle à (AE) qui passe par O coupe (AB) en K. La parallèle à (AE) qui passe par F coupe (AB) en L. Fais une figure puis démontre que $AK = KL = LB$.

Théorème de Thalès : cas général

- 4 Sur la figure ci-après, $AB' = 3$ cm, $CD' = 3,5$ cm et $BC = 2,1$ cm.



- 5 Sur la figure ci-dessous, [AD], [BE] et [CF] sont parallèles. $AB = 2,7$ cm et $BC = 3,6$ cm.



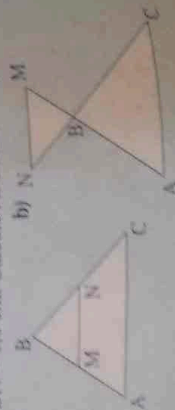
- 6 Sur la figure qui suit, $OA = 4,2$ cm, $AB = 1,8$ cm, $BC = 2,7$ cm et $OA' = 3,3$ cm. Les parallèles à (AA') qui passent respectivement par B et C coupent (OA') en B' et C'.



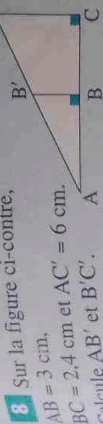
Construis la figure en la complétant, puis calcule OB' et OC' .

Théorème de Thalès : cas du triangle

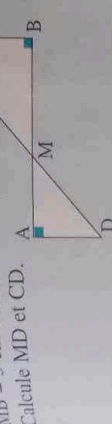
- 7 Dans chacune des figures ci-dessous, (MN) est parallèle à (AC), $AB = 3,6$ cm, $BC = 4,5$ cm et $BN = 1,8$ cm. Calcule AM dans chaque cas.



- 8 Sur la figure ci-contre, $AB = 3$ cm, $BC = 2,4$ cm et $AC' = 6$ cm. Calcule AB' et $B'C'$.



- 9 Sur la figure ci-contre, $AB = 5$ cm, $MB = 3$ cm et $MC = 4$ cm. Calcule MD et CD.



construction d'une quatrième proportionnelle

- 10 Construis avec la règle et le compas un segment de longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dans chacun des cas suivants :
- $a = 4$ cm ; $b = 5$ cm ; $c = 3$ cm.
 - $a = 3,5$ cm ; $b = 4,2$ cm ; $c = 2,5$ cm.
 - $a = 5$ cm ; $b = 2$ cm ; $c = 3,5$ cm.

Partager un segment dans un rapport donné

- 11 Marque deux points A et B sur une droite (d). Avec la règle non graduée et le compas, construis un point C intérieur au segment [AB] tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$.

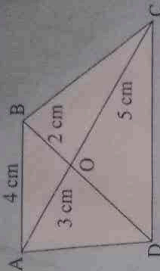
- 12 [AB] est un segment de 6 cm de longueur. Construis, à la règle et au compas, les points I et J qui le partagent dans le rapport $\frac{3}{4}$.

Triangles homothétiques

- 13 Dans chacune de ces deux figures, $AB = 4,5$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm et $AM = 2,5$ cm. (MN) est parallèle à (BC). Calcule AN et MN dans chaque cas.



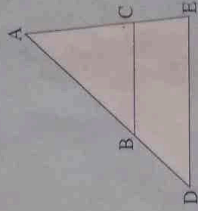
- 14 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD].



Reproduis la figure puis calcule OD et CD.

La réciproque du théorème de Thalès : cas du triangle

- 15 Sur cette figure, $AB = 4,4$ cm ; $AD = 6,6$ cm ; $AC = 3,2$ cm et $AE = 4,8$ cm.



Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

- 16 Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.



- 17 Sur la figure qui suit, $AB = 2$ cm, $BD = 2,6$ cm, $AC = 3$ cm et $CE = 3,9$ cm.

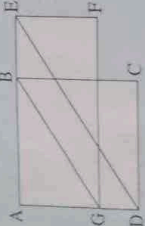


Démontre que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

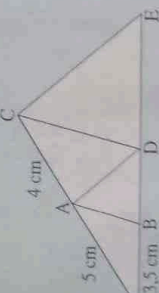
18 Dans un triangle ABC, M est le milieu de [BC]. Soit B' un point de [AB]. La parallèle à (BC) qui passe par B' coupe (AM) en M' et (AC) en C'. Démontre que $\frac{BM'}{BM} = \frac{M'C'}{MC}$.
Dédus-en que M' est le milieu de [B'C'].

19 ABCD et AEFG sont deux rectangles. A, B et E sont alignés ; A, G et D sont alignés ; (BG) et (ED) sont parallèles.



Fais une figure puis démontre que les deux rectangles ont la même aire.

20 Sur la figure qui suit, (AB) et (CD) sont parallèles, (AD) et (CE) le sont aussi.



Calcule les longueurs BD et DE.

21 Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. La parallèle à (AC) qui passe par G coupe (AB) en B'. La parallèle à (BC) qui passe par G coupe (AB) en A'. Démontre que $AA' = \frac{2}{3} AB$ et $BB' = \frac{2}{3} AB$. Dédus-en que $AB' = B'A' = A'B$.

22 Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle BAC coupe (BC) en I et la parallèle à (AB) qui passe par C en D. Démontre que le triangle ACD est isocèle en C puis démontre que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

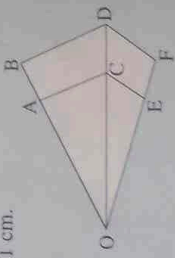
23 ABCD est un parallélogramme tel que AB = 6,3 cm et AD = 5,1 cm. F est le point de [AB] tel que AF = 2,1 cm. Les droites (AD) et (FC) se coupent en E. Calcule AE et DE.

24 ABCD est un parallélogramme. Une droite passant par D coupe les droites (AB), (BC) et (AC) respectivement en M, N et I. Compare les nombres $\frac{IM}{ID}$, $\frac{IA}{IC}$ et $\frac{IN}{ID}$. Démontre que $ID^2 = IM \times IN$.

25 Dans un triangle ABC, AB = 8 cm et AC = 10 cm. D est le point de [AC] tel que AD = 6 cm. La parallèle à (AB) qui passe par D coupe (BC) en E. La parallèle à (BC) qui passe par D coupe (AB) en F. On pose $BC = a$.

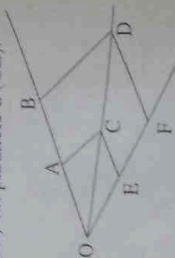
- Calcule DE et montre que $CE = \frac{2}{5} a$.
- Calcule BF. Exprime BE en fonction de a.
- Quelle est la nature du quadrilatère DEBF ? Quelle valeur doit-on donner à a si on veut que DEBF soit un rectangle ?

26 Sur la figure qui suit, les droites (AC) et (BD) sont parallèles. On a OA = 14 cm, OB = 18 cm, OC = 15,3 cm, OE = 13,3 cm et OF = 17,1 cm.



- Calcule OD.
- Les droites (EC) et (DF) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

27 Sur la figure qui suit, (AC) est parallèle à (BD) et (DF) est parallèle à (CE).



Les droites (AE) et (BF) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

JE ME SOUVIENS

Un triangle rectangle possède un angle droit. Ses deux autres angles sont des angles aigus. Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse du triangle.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Reproduis la figure ci-contre en prenant $AB = 4$ cm. Mesure les segments [AC] et [BC] puis calcule les nombres $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{BC}{AB}$. Les résultats obtenus sont-ils des valeurs exactes de ces quotients ? Pourquoi ?
- Refais la même construction et les mêmes calculs en prenant $AB = 6$ cm. Qu'observes-tu ?



Un triangle ABC est rectangle en A. M est un point variable de (AB). La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N. Démontre que $AMN = ABC$ et que $ANM = ACB$. Utilise le théorème de Thalès pour démontrer que $\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$ et que $\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC}$.

Ceci montre que les rapports $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{AC}{BC}$ ne dépendent que des angles du triangle rectangle ABC.

JE RETIENS

- Soit ABC un triangle rectangle en A.

Le sinus de l'angle $\hat{B}$ est le nombre $\frac{AC}{BC}$, celui de l'angle $\hat{C}$ est le nombre $\frac{AB}{BC}$.

On écrit $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$ et $\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$.

Le cosinus de l'angle $\hat{B}$ est le nombre $\frac{AB}{BC}$, celui de l'angle $\hat{C}$ est le nombre $\frac{AC}{BC}$.

On écrit $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ et $\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$.



- Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1.

C'est parce que $AB < BC$ et $AC < BC$.

Pour te rappeler ces définitions, retiens ceci :
 $\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
 $\sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

J'APPLIQUE

- Avec les mesures de ton choix, construis un triangle ABC rectangle en A en donnant à l'angle $\hat{B}$ les mesures suivantes : 35° ; 48° ; 55° ; 75° . Dans chaque cas, détermine des valeurs approchées de $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{C}$ et $\cos \hat{C}$.

JE ME SOUVIENS

À chaque angle aigu sont attachés deux nombres compris entre 0 et 1 : son sinus et son cosinus. Ces deux nombres ont été définis à l'aide des triangles rectangles.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le côté [AB] d'un triangle ABC rectangle en A mesure 4 cm. Construis le triangle dans chacun des cas suivants : $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ et $\hat{B} = 70^\circ$. Détermine dans chaque cas des valeurs approchées des nombres $\sin \hat{B}$ et $\cos \hat{B}$. Range ces valeurs dans un ordre croissant. Qu' observes-tu ?

JE RETIENS

- Le tableau de la page 144 est une **table trigonométrique**. Il donne les arrondis d'ordre 5 des sinus et des cosinus des angles aigus dont les mesures sont des nombres entiers.
- Comment utiliser la table pour trouver un arrondi au dixième de la mesure d'un angle aigu dont le sinus ne figure pas dans la table ?

Cherchons par exemple la mesure α d'un angle aigu tel que $\sin \alpha = 0,648$.
D'après la table, 0,648 est compris entre $\sin 40^\circ = 0,642\ 79$ et $\sin 41^\circ = 0,656\ 06$. Quand on passe de 40° à 41° , la mesure de l'angle augmente de 1° et son sinus augmente de 0,013 27. Quand on passe de 40° à α , la mesure de l'angle augmente d'une valeur inconnue x et son sinus augmente de 0,005 21.
En admettant qu'il y ait proportionnalité entre ces deux augmentations, on peut écrire $\frac{x^\circ}{1^\circ} = \frac{0,005\ 21}{0,013\ 27}$, d'où $x \approx 0,4^\circ$. Par suite, une valeur approchée de l'angle cherché est $40^\circ + x$, soit $40,4^\circ$.

Comment utiliser la table pour trouver un arrondi au dixième de la mesure d'un angle aigu dont le cosinus ne figure pas dans la table ?
Cherchons par exemple la mesure α d'un angle aigu tel que $\cos \alpha = 0,520$. D'après la table, 0,520 est compris entre $\cos 59^\circ = 0,515\ 04$ et $\cos 58^\circ = 0,529\ 92$. Quand on passe de 58° à 59° , la mesure de l'angle augmente de 1° mais son cosinus diminue de 0,014 88. Quand on passe de 58° à α , on augmente la mesure de l'angle d'une valeur inconnue x et on diminue son cosinus de 0,009 92.
En admettant qu'il y ait proportionnalité entre ces deux variations, on peut écrire $\frac{x^\circ}{1^\circ} = \frac{0,009\ 92}{0,014\ 88}$, d'où $x \approx 0,7^\circ$. Par suite, une valeur approchée de l'angle cherché est $58 + 0,7^\circ$, soit $58,7^\circ$.

J'APPLIQUE

- Lis dans la table $\cos 56^\circ$, $\sin 47^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\sin 54^\circ$, $\cos 20^\circ$.
- Lis dans la table la mesure α d'un angle aigu sachant que $\sin \alpha = 0,927\ 18$.
- À l'aide de la table donnant les sinus et les cosinus des angles aigus, calcule les mesures des angles aigus α_1 , α_2 , α_3 et α_4 sachant que $\sin \alpha_1 = 0,425$, $\sin \alpha_2 = 0,820$, $\cos \alpha_3 = 0,9$ et $\cos \alpha_4 = 0,70$.

JE ME SOUVIENS

Dans un triangle ABC rectangle en A :
- [BC] est l'hypoténuse ;
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\hat{B}$ et le côté opposé à l'angle $\hat{C}$;
- [AC] est le côté adjacent à l'angle $\hat{C}$ et le côté opposé à l'angle $\hat{B}$.

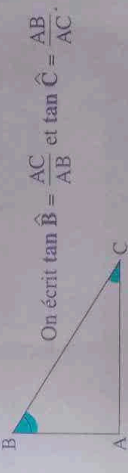
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 4,2$ cm et $\hat{ACB} = 32^\circ$. Mesure le segment [AB] puis calcule une valeur approchée du nombre $\frac{AB}{AC}$. Compare le résultat obtenu au nombre $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 32^\circ}$. Qu' observes-tu ?

Démontre que, dans tout triangle ABC rectangle en A, on a $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BC} : \frac{AC}{BC}$.
Déduis-en que $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}}$. Démontre qu'on a de même $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

JE RETIENS

- Dans un triangle rectangle, la **tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté qui lui est opposé par la longueur du côté qui lui est adjacent.



Attention ! Ici, le mot **tangente** désigne un nombre.

- La tangente d'un angle aigu est le quotient du sinus de cet angle par son cosinus.
- Le tableau de la page 144 est une **table trigonométrique** qui donne les arrondis d'ordre 4 des tangentes des angles aigus dont les mesures sont des nombres entiers.

Comment utiliser la table pour trouver un arrondi au dixième de la mesure d'un angle aigu quand sa tangente n'est pas dans la table ?

Cherchons par exemple la mesure α d'un angle aigu tel que $\tan \alpha = 2,45$. D'après la table, 2,45 est compris entre $\tan 67^\circ = 2,355\ 9$ et $\tan 68^\circ = 2,475\ 1$. Quand on passe de 67° à 68° , la mesure de l'angle augmente de 1° et la tangente augmente de 0,1192. Quand on passe de 67° à α , on augmente la mesure de l'angle d'une valeur inconnue x et on augmente sa tangente de 0,094 1. En admettant qu'il y ait proportionnalité entre ces deux augmentations, on peut écrire $\frac{x^\circ}{1^\circ} = \frac{0,094\ 1}{0,1192}$, d'où $x \approx 0,8^\circ$. Par suite, une valeur approchée de l'angle cherché est $67^\circ + x$, soit $67,8^\circ$.

J'APPLIQUE

- ABC est un triangle rectangle en A dans lequel $AB = 3,8$ cm et $AC = 5,7$ cm. Construis le triangle. Calcule $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$, puis détermine des valeurs approchées à $0,1^\circ$ près des mesures des angles aigus $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

JE ME SOUVIENS

Une calculatrice scientifique, beaucoup plus perfectionnée qu'une simple calculatrice, permet d'effectuer des calculs trigonométriques.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Utilise les tables trigonométriques du livre pour obtenir $\sin 75^\circ$, $\cos 28^\circ$ et $\tan 62^\circ$.
Sur ta calculatrice, tape les séquences suivantes :

$\sin$ $\rightarrow$ 7 5 = $\sin$
 $\cos$ $\rightarrow$ 2 8 = $\cos$
 $\tan$ $\rightarrow$ 6 2 = $\tan$

Quels sont les résultats affichés ?

- Utilise les tables trigonométriques du livre pour obtenir les mesures des angles aigus qui ont respectivement 0,406 74 pour sinus, 0,104 53 pour cosinus et 1,880 7 pour tangente. Sur ta calculatrice, affiche le premier nombre puis tape la séquence $\sin^{-1}$; affiche le deuxième nombre puis tape la séquence $\cos^{-1}$; affiche le troisième nombre puis tape la séquence $\tan^{-1}$.

Quels sont les résultats obtenus ?

JE RETIENS

- Pour obtenir le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle mesuré en degrés, il faut :

- afficher la mesure de l'angle ;
- appuyer selon le cas sur la touche $\sin$ ou sur la touche $\cos$ ou sur la touche $\tan$;
- Pour obtenir la mesure en degrés d'un angle connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente, il faut :

- afficher le nombre correspondant ;
- taper la séquence $\sin^{-1}$ si c'est le sinus de l'angle ;
- taper la séquence $\cos^{-1}$ si c'est le cosinus de l'angle ;
- taper la séquence $\tan^{-1}$ si c'est la tangente de l'angle.

Compris entre 0 et 1 pour un sinus ou pour un cosinus.

J'APPLIQUE

- Utilise la calculatrice pour calculer chacun des nombres suivants : $\sin 46^\circ$, $\cos 35^\circ$, $\tan 76^\circ$, $\sin 56,4^\circ$, $\cos 34,45^\circ$ et $\tan 34,5^\circ$.
- Trouve la mesure en degrés de l'angle x dans chacun des cas suivants : $\sin x = 0,775$; $\sin x = 0,2$; $\cos x = 0,21$; $\cos x = 0,99$; $\tan x = 3,56$; $\tan x = 0,005$.
- Utilise la seule calculatrice pour trouver la mesure en degrés de l'angle x sachant que $\sin x = \frac{5}{12}$.

JE ME SOUVIENS

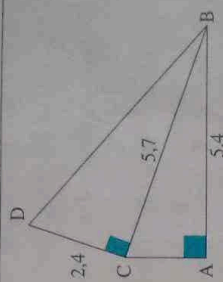
Dans tout triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ce résultat constitue le théorème de Pythagore étudié en quatrième.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- En tenant compte des indications portées sur la figure ci-contre, calcule la longueur AC et les mesures des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$.
Calcule ensuite la longueur BD et les mesures des angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{CBD}$.



JE RETIENS

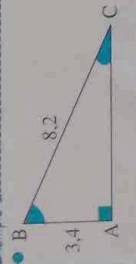
- Quand on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle, on peut calculer la longueur du troisième avec le théorème de Pythagore et déterminer les mesures des deux angles aigus avec l'aide d'une table trigonométrique ou bien une calculatrice scientifique.

Exemple 1



- D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
On a donc $BC^2 = 2,6^2 + 4,8^2 = 29,8$.
On en tire $BC = \sqrt{29,8} \approx 5,46$ cm.
- On a $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$ donc $\widehat{B} \approx 28,4^\circ$.
- $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 61,6^\circ$.

Exemple 2



- D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
On a donc $8,2^2 = AC^2 + 3,4^2$.
On en tire $AC^2 = 8,2^2 - 3,4^2 = 55,68$ puis $AC = \sqrt{55,68} \approx 7,46$ cm.
- On a $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{3,4}{8,2}$ donc $\widehat{B} \approx 65,5^\circ$.
- $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 24,5^\circ$.

Pour calculer la mesure de $\widehat{C}$, on a utilisé le fait que B et C sont des angles complémentaires.

J'APPLIQUE

- ABC est un triangle rectangle en A. On a $AB = 3,5$ cm et $AC = 4,5$ cm. Calcule la longueur de l'hypoténuse de ce triangle et les mesures de ses deux angles aigus.
- DEF est un triangle rectangle en E. On a $ED = 4,5$ cm et $DF = 8,5$ cm. Calcule la longueur du côté [EF] et les mesures des deux angles aigus du triangle DEF.

JE ME SOUVIENS

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$, $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ et $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

ABC est un triangle rectangle en A. On sait que $BC = 7,8$ cm et que $\hat{B} = 50^\circ$. Construis le triangle puis calcule les longueurs AC et AB et la mesure de l'angle $\hat{C}$.

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a) On suppose connus AB et $\hat{B}$. Montre que $BC = \frac{AB}{\cos \hat{B}}$, $AC = AB \tan \hat{B}$, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$.

b) On suppose connus AB et $\hat{C}$. Montre que $BC = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$, $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$.

c) On suppose connus BC et $\hat{B}$. Montre que $AC = BC \sin \hat{B}$, $AB = BC \cos \hat{B}$, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$.

d) On suppose connus BC et $\hat{C}$. Montre que $AB = BC \sin \hat{C}$, $AC = BC \cos \hat{C}$, $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$.

JE RETIENS

Quand on connaît la longueur de l'un des côtés d'un triangle rectangle et la mesure de l'un de ses angles aigus, on peut calculer la longueur des deux autres côtés ainsi que la mesure du deuxième angle aigu.

Exemple :

$BC = \frac{AB}{\cos \hat{B}} = 4,73$
 $AC = AB \tan \hat{B} = 4,22$
 $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 25^\circ$

$AC = \frac{AB}{\tan \hat{B}} = 4,43$
 $BC = \frac{AB}{\sin \hat{B}} = 5,23$
 $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 58^\circ$

$AB = BC \sin \hat{B} = 2,01$
 $AC = BC \cos \hat{B} = 2,25$
 $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 30^\circ$

Pour calculer la mesure de $\hat{C}$, on utilise le fait que les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires.

Observe que les calculs à effectuer sont tout à fait différents selon les données du problème !

J'APPLIQUE

- ABC est un triangle rectangle en A. Son hypoténuse mesure 6,5 cm. L'angle $\hat{B}$ mesure 36° . Calcule les longueurs AB et AC. Calcule la mesure de l'angle $\hat{C}$.
- DEF est un triangle rectangle en E. Son côté [DE] mesure 4 cm et son angle $\hat{F}$ mesure 48° . Calcule les longueurs DF et EF. Calcule la mesure de l'angle $\hat{E}$.

JE ME SOUVIENS

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$, $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ et $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

ABC est un triangle rectangle en A. On sait que $AB = 4$ cm et que $\hat{B} = 50^\circ$. Calcule $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{C}$ et $\cos \hat{C}$.

a) Compare $\sin \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$ puis $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{B}$.

b) Calcule $(\sin \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2$ puis calcule $(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2$. Qu' observes-tu ?

DEF est un triangle rectangle en E. On sait que $DE = 4,8$ cm et que $EF = 3,6$ cm.

a) Calcule DF puis $\sin \hat{F}$, $\sin \hat{D}$, $\cos \hat{F}$ et $\cos \hat{D}$. Que peux-tu observer ?

b) Calcule $(\sin \hat{D})^2 + (\cos \hat{D})^2$ puis calcule $(\cos \hat{F})^2 + (\sin \hat{F})^2$. Que peux-tu observer ?

Soit xOy un angle aigu de mesure α . Soit M un point quelconque de [Oy) et soit H son projeté orthogonal sur [Ox).

a) Exprime $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ en fonction des longueurs OM, MH et OH.

b) Démontre que $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

JE RETIENS

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Pour tout angle aigu de mesure α , on a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Pour tout angle aigu de mesure α , on a $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ et $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Exemples : $\sin 54^\circ = 0,80902$; $\cos 54^\circ = 0,58779$; $\sin 36^\circ = 0,58779$; $\cos 36^\circ = 0,80902$.

Au lieu d'écrire $(\sin \alpha)^2$ et $(\cos \alpha)^2$, on convient d'écrire $\sin^2 \alpha$ et $\cos^2 \alpha$.

J'APPLIQUE

- ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\sin B = 0,15$. Calcule des arrondis à 0,000 1 près de $\cos B$, $\sin C$ et $\cos C$. Calcule des arrondis à 0,000 1 près de $\tan B$ et de $\tan C$.
- DEF est un triangle rectangle en E. On donne $\cos D = 0,8$. Calcule des arrondis à 0,000 1 près de $\sin D$, $\sin F$ et $\cos F$.
- Soit α la mesure de l'angle aigu tel que $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Montre que $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.
- Soit α la mesure de l'angle aigu tel que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Montre que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

JE ME SOUVIENS

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A avec $AB = AC = 4$ cm. Mesure [BC] puis donne des valeurs approchées des nombres $\sin 45^\circ$ et $\cos 45^\circ$.

Construis un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté puis marque le milieu H de [BC].

- a) Que peux-tu dire du triangle AHB ? Quelles sont les mesures de ses angles aigus ?
b) Mesure AH et donne des valeurs approchées des nombres $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ et $\cos 60^\circ$.

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. On pose $AB = AC = a$. Utilise le théorème de Pythagore pour montrer que $BC = a\sqrt{2}$. Déduis-en les valeurs exactes des nombres $\sin 45^\circ$ et $\cos 45^\circ$.

Soit H le milieu du côté [BC] d'un triangle équilatéral ABC. On pose $BH = a$.

- a) Montre que $AC = 2a$ et $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
b) Déduis-en les valeurs exactes des nombres $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ et $\cos 60^\circ$.

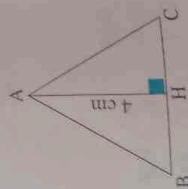
JE RETIENS

Le tableau ci-dessous résume quelques valeurs trigonométriques qu'il est utile de bien connaître.

Angle	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

J'APPLIQUE

- 1 Calcule les valeurs exactes de $\tan 45^\circ$, $\tan 30^\circ$ et $\tan 60^\circ$.
2 ABC est un triangle équilatéral de hauteur [AH]. Calcule la longueur exacte de son côté [AB].



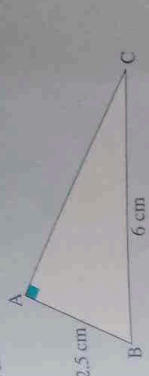
- 3 En tenant compte des indications portées sur la figure ci-contre, calcule le périmètre du triangle ABC.

EXERCICES D'APPLICATION et PROBLÈMES

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

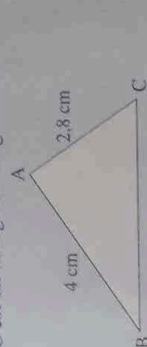
Cosinus et sinus d'un angle aigu

- 1 ABC est un triangle rectangle en A.



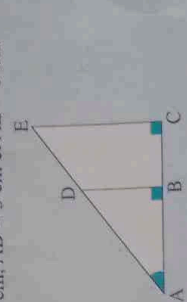
Calcule des valeurs approchées à 0,001 cm près des nombres $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{C}$.

- 2 ABC est un triangle rectangle en A.



Calcule des valeurs approchées à 0,001 cm près des nombres $\cos \hat{B}$, $\sin \hat{B}$, $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{C}$.

- 3 Sur la figure ci-dessous, B est un point de [AC] et D est un point de [AE]. On a $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 8$ cm.



Construis la figure. Après avoir écrit le cosinus de l'angle $\hat{A}$ de deux façons différentes, calcule BC.

utilisation d'une table trigonométrique

- 4 Lis dans la table la mesure α d'un angle aigu dans chacun des cas suivants :
a) $\sin \alpha = 0,882\ 95$, b) $\cos \alpha = 0,829\ 04$,
c) $\sin \alpha = 0,642\ 79$, d) $\cos \alpha = 0,996\ 19$.

- 5 Utilise la table de la page 144 pour calculer ces différences :

- a) $\sin 22^\circ - \sin 21^\circ$, b) $\cos 54^\circ - \cos 53^\circ$,
c) $\sin 81^\circ - \sin 80^\circ$, d) $\cos 15^\circ - \cos 14^\circ$.

- 6 À l'aide de la table donnant les sinus et les cosinus des angles aigus, calcule à $0,1^\circ$ près la mesure de l'angle α dans chacun des cas suivants :
a) $\sin \alpha = 0,420$, b) $\sin \alpha = 0,875$,
c) $\cos \alpha = 0,21$, d) $\cos \alpha = 0,8$.

Tangente d'un angle aigu

- 7 Lis dans la table de la page 144 les mesures des angles aigus qui ont pour tangentes respectives 0,424 5 ; 0,726 5 ; 2,747 5 et 5,144 6.

- 8 Utilise la table de la page 144 pour calculer à $0,1^\circ$ près les mesures des angles aigus dont les tangentes respectives valent 0,25 ; 1,45 et 3,455.

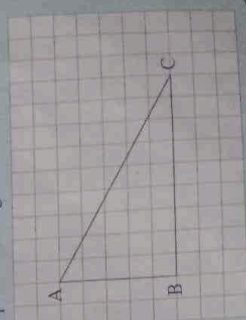
- 9 ABC est un triangle rectangle en A dans lequel $AB = 5,2$ cm et $AC = 6,4$ cm. Construis le triangle. Calcule $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$ à 0,000 1 près puis détermine des valeurs approchées à $0,1^\circ$ près des mesures des angles aigus $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

Calculs dans le triangle rectangle (1)

- 10 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2,8$ cm et $AC = 5$ cm. Calcule la longueur BC ainsi que les mesures des angles $\hat{ABC}$ et $\hat{ACB}$.

- 11 Le triangle ABC est rectangle en A. On donne $BC = 6,4$ cm et $AB = 4,6$ cm. Calcule la longueur AC et détermine les mesures des angles du triangle.

- 12 Reproduis la figure ci-dessous :



Calcule des valeurs approchées des angles $\hat{BAC}$ et $\hat{ACB}$ à $0,1^\circ$ près.

13 Un poteau [SH] de 4 m de longueur est maintenu verticalement par une corde [AT] de 6 m de longueur. La corde est attachée au poteau en un point A situé aux $\frac{4}{5}$ de [SH].



Détermine des valeurs approchées de HT et de l'angle ATH.

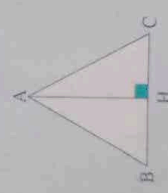
calculs dans le triangle rectangle (2)

14 ABC est un triangle rectangle en A. On donne $BC = 8$ cm et $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Construis le triangle ABC. Détermine la mesure de l'angle ACB. Calcule les longueurs AB et AC.

15 ABC est un triangle rectangle en A. [AB] mesure 5,2 cm. L'angle ACB mesure 54° . Construis le triangle. Détermine la mesure de l'angle ACB. Calcule AC et BC.

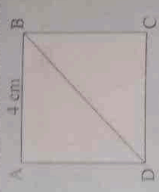
16 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4,4$ cm et $\widehat{ACB} = 35^\circ$. Construis le triangle. Détermine la mesure de l'angle ABC. Calcule AC et BC.

17 Construis un triangle équilatéral ABC de 5 cm de côté et de hauteur [AH].



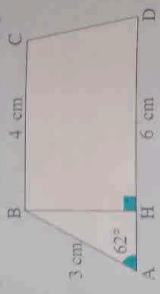
Calcule une valeur approchée de AH à 0,01 mm près.

18 Construis un carré ABCD de 4 cm de côté.



Calcule une valeur approchée de la longueur de sa diagonale [BD] à 0,01 mm près.

19 ABCD est un trapèze de base [AD] et [BC].



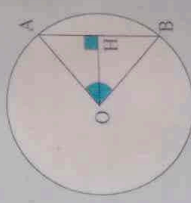
Calcule les longueurs BH, AH et HD. Calcule une valeur approchée à 0,01 cm près de l'aire du trapèze ABCD.

20 ABCD est un parallélogramme de hauteur [BH] tel que $\widehat{BAD} = 52^\circ$, $AB = 4$ cm et $BC = 6$ cm.



Calcule BH et détermine une valeur approchée à 0,01 cm près de l'aire du parallélogramme.

21 A et B appartiennent à un cercle (C) de centre O, de 4 cm de rayon. L'angle AOB mesure 82° . [OH] est une hauteur du triangle AOB.



Quelle est la mesure de HOA? Justifie ta réponse. Calcule AB à 0,01 mm près.

relations trigonométriques

22 ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\sin \widehat{ABC} = 0,3$. Calcule des valeurs approchées des nombres $\cos \widehat{B}$, $\sin \widehat{C}$ et $\cos \widehat{C}$, puis détermine des valeurs approchées des angles B et C.

23 ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\cos \widehat{ABC} = 0,9$. Calcule des valeurs approchées des nombres $\sin \widehat{B}$, $\sin \widehat{C}$ et $\cos \widehat{C}$, puis détermine des valeurs approchées des angles B et C.

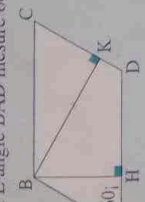
24 Le sinus d'un angle aigu est égal à $\frac{20}{29}$. Montre que son cosinus vaut $\frac{21}{29}$ et sa tangente

20. Détermine une valeur approchée de cet angle.

sinus et cosinus d'angles aigus particuliers

25 On désigne par c la longueur des côtés d'un carré. Démontre sans utiliser le théorème de Pythagore que ses diagonales ont pour longueur $c\sqrt{2}$.

26 ABCD est un parallélogramme dont les hauteurs [BH] et [BK] mesurent respectivement 4 cm et 6 cm. L'angle BAD mesure 60° .

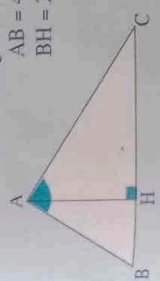


Construis ce parallélogramme puis calcule les longueurs exactes de ses côtés.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

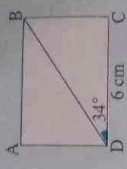
27 ABC est un triangle rectangle en A. [AH] est une hauteur de ce triangle.

AB = 4,2 cm et BH = 2,2 cm.



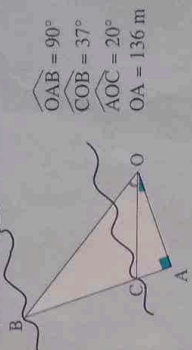
- a) Calcule des valeurs approchées des angles aigus du triangle ABH.
- b) Calcule des valeurs approchées des longueurs AC et BC.

28 Calcule à 0,01 cm près le périmètre du rectangle ABCD.



Calcule son aire à 0,01 cm² près.

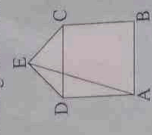
29 Pour déterminer la largeur d'un fleuve, un cartographe a fait un certain nombre de mesures. Il a dessiné le croquis ci-dessous sur lequel il a noté ses mesures :



a) Exprime les longueurs AC et AB en fonction de tan 20° et de tan 57° .

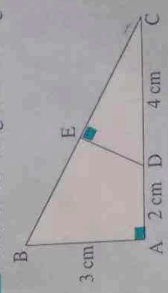
b) Détermine, à 1 m près, une valeur approchée de la largeur BC du fleuve.

30 ABCD est un carré de 6 cm de côté. CDE est un triangle rectangle et isocèle en E.



Calcule à $0,1^\circ$ près la mesure de l'angle BAE.

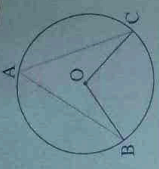
31 Calcule la longueur du segment [DE].



32 Démontre que, pour tout angle aigu de mesure α , on a $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ et aussi $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

JE ME SOUVIENS

Sur la figure ci-contre, A, B et C sont trois points d'un cercle de centre O.
 L'angle BAC est un angle inscrit dans le cercle : on dit qu'il intercepte l'arc BC (c'est l'arc qui ne contient pas le point A).
 L'angle BOC est un angle au centre. On dit qu'il intercepte le même arc que l'angle BAC.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Trace un cercle de centre O, de 4 cm de rayon. Marque trois points A, B et C sur le cercle puis mesure les angles BAC et BOC. Qu' observes-tu ? Recommence avec un cercle de 3 cm de rayon.
- A, B et C sont trois points d'un cercle de centre O tels que l'angle BAC soit aigu, O étant à l'intérieur de l'angle. On appelle A' le symétrique de A par rapport à O.
 a) Démontre que $\widehat{AOB} = 180^\circ - 2\widehat{BAO}$. Déduis-en que $\widehat{BOA} = 2\widehat{BAO}$.
 b) Démontre que $\widehat{AOC} = 180^\circ - 2\widehat{OCA}$. Déduis-en que $\widehat{AOC} = 2\widehat{OCA}$.
 c) Démontre que $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. Quelle est la mesure de BAC si [BC] est un diamètre du cercle ?

Rappelle-toi que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

JE RETIENS

- La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Hypothèses :
 - BAC est inscrit dans le cercle ($^{\circ}$) ;
 - BOC est un angle au centre du cercle ($^{\circ}$) ;
 - BAC intercepte le même arc que BOC.
Conclusion : $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Hypothèses :
 - BAC est inscrit dans le cercle ($^{\circ}$) ;
 - [BC] est un diamètre du cercle ($^{\circ}$).
Conclusion : $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

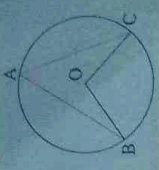
J'APPLIQUE

- Trace un cercle de centre O de 3 cm de rayon. Construis un angle ABC de 55° inscrit dans ce cercle. L'angle AOC est-il obtus ? Pourquoi ?
- Construis un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O, de rayon 3,5 cm. Marque deux points A et B sur ($\mathcal{C}$) tels que $\widehat{AOB} = 100^\circ$. Place le point C sur le cercle ($\mathcal{C}$) de telle façon que l'angle ACB intercepte le même arc que l'angle AOB et que le triangle ACB soit isocèle en C. Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?
- Refais le deuxième exercice de la rubrique « J'observe et je démontre » quand O est à l'extérieur de l'angle BAC.

ANGLES INSCRITS DE MÊME MESURE

JE ME SOUVIENS

Sur la figure ci-contre, A, B et C sont trois points d'un cercle de centre O.
 L'arc BC qui ne contient pas le point A est intercepté par l'angle inscrit BAC et par l'angle au centre BOC.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Trace un cercle de centre O, de 4 cm de rayon. Marque des points A, B, C, D, E, F et G sur ce cercle. Mesure les angles EAF, EBF, ECF et EDF. Mesure également l'angle EOF. Qu' observes-tu ? Peux-tu démontrer ce résultat ?
- ($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O et de rayon R. Les arcs AB et CD ont la même longueur ℓ .
 a) Démontre que les angles au centre AOB et COD qui interceptent respectivement les arcs AB et CD ont la même mesure α .
 b) Démontre que les angles inscrits qui interceptent respectivement les arcs AB et CD ont la même mesure.

Rappelle-toi que la longueur ℓ d'un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle au centre de mesure α est $\ell = \pi R \times \frac{\alpha}{180}$.

JE RETIENS

- Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Hypothèses :
 - BAC et B'AC sont tous deux inscrits dans le cercle ($^{\circ}$) ;
 - Ils interceptent le même arc BC.
Conclusion : $\widehat{BAC} = \widehat{B'AC}$.

Hypothèses :
 - BAC intercepte l'arc BC ;
 - B'AC intercepte l'arc B'C ;
 - les arcs BC et B'C ont la même longueur.
Conclusion : $\widehat{BAC} = \widehat{B'AC}$.

J'APPLIQUE

- Trace un cercle de 3 cm de rayon. Construis trois angles inscrits ABC, DBC et ECB de 40° chacun.
- Trois points A, B et C sont placés dans cet ordre sur un cercle de centre O et de rayon 3 cm, de telle façon que les angles au centre AOB et BOC mesurent 80° .
 a) Calcule les longueurs des arcs AB, BC et AC.
 b) Soit M un point du cercle, calcule les mesures des angles BMC, AMC et AMB.

POLYGONES RÉGULIERS (1)

67

JE ME SOUVIENS

n points placés régulièrement sur un cercle le partagent en n arcs consécutifs de même longueur. Ils déterminent des angles au centre qui mesurent tous $\frac{360^\circ}{n}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

1 Trace un cercle ($\odot$) de centre O et de rayon 4 cm. Avec ton rapporteur, partage-le en 9 arcs consécutifs de même longueur. Décris les polygones obtenus en joignant les points marqués de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3 et de 4 en 4. Calcule les angles des polygones ainsi construits.

2 Un polygone régulier convexe a n côtés. Exprime la mesure de ses angles en fonction de n .

JE RETIENS

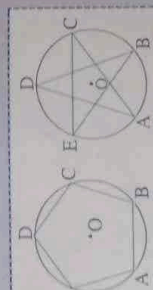
On dit qu'un polygone est régulier lorsque ses côtés ont la même longueur et lorsque ses angles ont la même mesure.

Exemple :
• Un pentagone régulier a 5 côtés.
• Son angle mesure 108° .
• Un hexagone régulier a 6 côtés.
• Son angle mesure 120° .



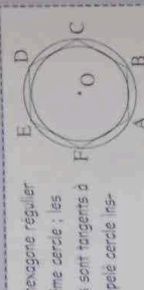
Lorsqu'on partage un cercle en arcs consécutifs de même longueur, on peut obtenir un polygone régulier convexe, mais aussi un ou plusieurs polygones réguliers étoilés en joignant les points de partage.

Exemple :
• Avec 5 points, on obtient un pentagone régulier convexe ou un pentagone régulier étoilé.



Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre. Les deux cercles ont le même centre.

Exemple :
Les 6 sommets d'un hexagone régulier appartiennent à un même cercle ; les supports de ses côtés sont tangents à un deuxième cercle appelé cercle inscrit dans l'hexagone.



J'APPLIQUE

- Construis un décagone régulier convexe et un décagone régulier étoilé avec le rapporteur, la règle et le compas.
- Dessine tous les polygones réguliers étoilés différents qui ont 7 côtés.
- Calcule les angles d'un dodécagone régulier convexe (le dodécagone a 12 côtés).

POLYGONES RÉGULIERS (2)

68

JE ME SOUVIENS

n points placés régulièrement sur un cercle le partagent en n arcs de cercle consécutifs de même longueur. Ils déterminent des angles au centre qui mesurent tous $\frac{360^\circ}{n}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

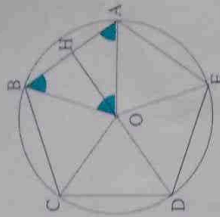
1 Soit ($\odot$) un cercle de centre O de rayon 4 cm. Les points A , B , C , D et E le partagent en 5 arcs de même longueur.

a) Calcule la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

b) Calcule la mesure des angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BAO}$ puis celle de l'angle $\widehat{ABC}$.

c) Soit H le milieu de $[AB]$. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$, puis calcule les longueurs OH , AH et AB à 0,01 mm près.

d) Calcule le périmètre et l'aire du pentagone régulier convexe $ABCDE$.



2 Un polygone régulier convexe de n côtés est inscrit dans un cercle de rayon R . Montre que ses côtés ont une longueur c donnée par la formule $c = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

JE RETIENS

Considérons un polygone régulier convexe inscrit dans un cercle de centre O . Soit H le projeté orthogonal de O sur l'un des côtés du polygone. La longueur OH est l'apothème du polygone.

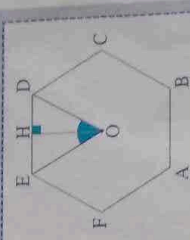
Soit ($\mathcal{P}$) un polygone régulier convexe de n côtés. Soit c la longueur de ses côtés, a son apothème, R le rayon de son cercle circonscrit et α la mesure de ses angles.

$$\text{Alors } c = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, a = R \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ et } \alpha = 180^\circ \times \frac{n-2}{n}.$$

Si A et p désignent respectivement l'aire et le périmètre de ($\mathcal{P}$), alors $A = \frac{pa}{2}$.

Exemple

Sur la figure à côté, la longueur OH est l'apothème de l'hexagone régulier $ABCDEF$.



J'APPLIQUE

- Avec le compas, la règle et le rapporteur, construis un polygone régulier convexe de 8 côtés inscrit dans un cercle de 5 cm de rayon. Calcule, à 0,001 mm près, la longueur de ses côtés et son périmètre. Calcule la mesure de ses angles et son aire à 0,01 mm².
- On veut inscrire un pentagone régulier de 3 cm de côté dans un cercle de rayon R . Quelle valeur doit-on choisir pour R ?
- Calcule la mesure des angles d'un polygone régulier convexe de 20 côtés.

JE ME SOUVIENS

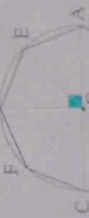
Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle. Dans certains cas, on peut réaliser la construction avec seulement la règle et le compas, mais ce n'est pas général !

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Trace un cercle de 4 cm de rayon et inscris un triangle équilatéral ABC dans ce cercle en utilisant la règle et le compas. Calcule à 0,001 mm près la longueur des côtés du triangle ABC.
- Trace un cercle de 4 cm de rayon et inscris un hexagone régulier ABCDEF dans ce cercle en utilisant seulement la règle et le compas. Calcule la longueur des côtés de cet hexagone.

JE RETIENS

- Marquons un point A sur un cercle (O). Le cercle de centre A qui passe par O coupe le cercle (O) en B et en F. Les cercles de centres B et F qui passent par O coupent le cercle (O) en C et en E. Enfin le cercle de centre E qui passe par O coupe le cercle (O) en D.
- A, B, C, D, E et F sont les sommets d'un hexagone régulier.*
- Marquons un point A sur un cercle (O). Construisons le diamètre [AC] et le diamètre [BD] qui lui est perpendiculaire.
- A, C et E sont les sommets d'un triangle équilatéral.*



En construisant les bissectrices des angles AOB et BOC, on obtient les points E, F, G et H. A, B, C, D, E, F, G, H et I sont les sommets d'un octogone régulier convexe.

J'APPLIQUE

- Construis quatre cercles ayant chacun un rayon de 4 cm. Inscris un triangle équilatéral dans le premier, un carré dans le deuxième, un hexagone régulier dans le troisième et un octogone régulier convexe dans le dernier. Calcule à 0,01 mm près les longueurs des côtés des quatre polygones réguliers.
- Trace un cercle de centre O, de 4 cm de rayon. Partage ce cercle en huit arcs consécutifs de même longueur en y plaçant les points A, B, C, D, E, F, G et H. Construis l'octogone étoilé ADGBEHCF.

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Angles inscrits et angles au centre

- A, B, C et D sont quatre points d'un cercle de centre O. $\widehat{BOD} = 130^\circ$. Calcule les mesures des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$.
- A, B, C sont trois points d'un cercle de centre O. $\widehat{ABO} = 50^\circ$. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
- A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un cercle de centre O. Démontre que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont des angles supplémentaires.

Angles inscrits de même mesure

- A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un cercle de centre O. $\widehat{BOC} = 130^\circ$. Calcule les mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$.
- Soit ABC un triangle. Un cercle de centre O passe par B et par C et recoupe [AB] en D et [AC] en E. Fais une figure puis démontre que $\widehat{BDC} = \widehat{CEB}$ et $\widehat{EBA} = \widehat{DCA}$.
- Sur la figure suivante, $\widehat{BED} = 104^\circ$ et $\widehat{BCD} = 48^\circ$.



Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Polygones réguliers : définitions

- ABCDEFG est un heptagone composé de deux carrés et de trois triangles équilatéraux.



ABCDEFG est-il un polygone régulier ? Justifie la réponse.

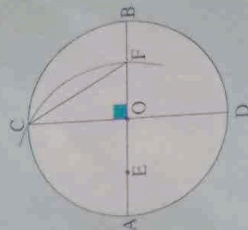
Polygones réguliers : calculs

- Calcule le périmètre et l'aire d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de 5 cm de rayon.
- Calcule la longueur de l'apothème d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de 4 cm de rayon. Calcule le périmètre et l'aire de cet hexagone.
- Calcule la longueur des côtés d'un polygone régulier de 96 côtés inscrit dans un cercle de 10 cm de rayon. Calcule son périmètre et son aire.

Constructions des polygones réguliers avec la règle et le compas

- Construis un dodécagone régulier convexe (il a 12 sommets) inscrit dans un cercle de 5 cm de rayon.
Un coup de pince : construis d'abord un hexagone régulier.

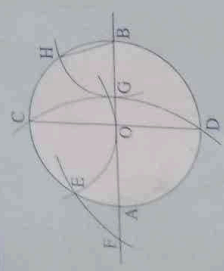
- La figure ci-dessous montre la construction d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle (O) de centre O :



E est le milieu de [OA]. L'arc de centre E qui passe par C coupe [AB] en F. FC est la longueur du côté du pentagone inscrit dans le cercle (O). Utilise cette méthode pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle de 4 cm de rayon.

14 Construis un décagone régulier inscrit dans un cercle de 5 cm de rayon.
Un coup de pouce : construis d'abord un pentagone régulier !

15 La figure ci-dessous montre la construction d'un polygone régulier de 9 côtés inscrit dans un cercle ($\odot$) de centre O :



L'arc de centre C qui passe par O coupe le cercle ($\odot$) en E. L'arc de centre D qui passe par E coupe (AB) en F. L'arc de centre F qui passe par C coupe (AB) en G. L'arc de centre B qui passe par G coupe le cercle ($\odot$) en H. La longueur HB est le côté du polygone cherché. Inscris un polygone régulier de 9 côtés dans un cercle de 4 cm de rayon avec cette méthode.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

16 Construis un triangle ABC tel que $BC = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 70^\circ$ et $\widehat{ACB} = 55^\circ$. Construis son cercle circonscrit. Soit O le centre de ce cercle. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

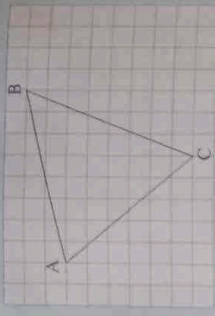
17 A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un cercle de centre O. $\widehat{ADC} = 80^\circ$ et $\widehat{BCD} = 60^\circ$. 20° . Calcule les mesures des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$.

18 Soit ABC un triangle. Un cercle de centre O qui passe par A et par B recoupe [AC] en E et [BC] en D.

a) Fais une figure puis démontre que les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{ABD}$ sont supplémentaires. Déduis-en que $\widehat{CED} = \widehat{ABD}$.

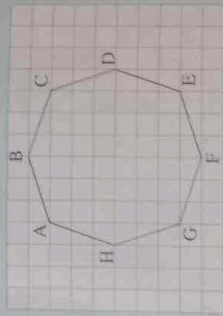
b) Démonstre que $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$.

19 Le triangle ABC est-il équilatéral ?



Justifie ta réponse.

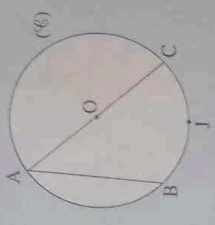
20 Le polygone ABCDEFGH est-il régulier ?



Justifie ta réponse.

21 ABCD est un rectangle de longueur L et de largeur ℓ . On souhaite marquer, avec la règle et le compas, un point E sur [BC] tel que $\widehat{AED} = 90^\circ$.
a) Fais la construction pour $L = 8$ cm et $\ell = 3$ cm. Combien de solutions obtiens-tu ?
b) La construction est-elle possible si $L < 2\ell$?

22 Sur la figure ci-dessous, J partage l'arc $\widehat{BC}$ en deux arcs de même longueur. A est un point quelconque du cercle ($\odot$).



Démontre que (AJ) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

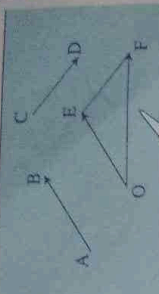
23 Calcule le rayon du cercle circonscrit à un décagone régulier de 3 cm de côté.

JE ME SOUVIENS

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, il faut :

- choisir un point O quelconque ;
 - construire un vecteur $\vec{OE}$ égal au vecteur $\vec{AB}$;
 - construire un vecteur $\vec{EF}$ égal au vecteur $\vec{CD}$.
- La somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ est représentée par le vecteur $\vec{OF}$. On écrit $\vec{OF} = \vec{OE} + \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{CD}$.

En choisissant un point O' différent de O, on obtiendrait un vecteur égal à $\vec{OF}$.

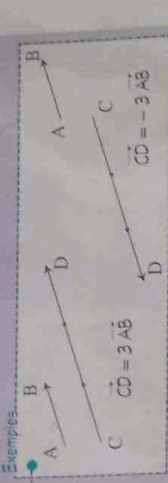


J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Trace un vecteur $\vec{v}$ de 3 cm de longueur.
- Marque un point A et construis le vecteur $\vec{AB}$ tel que $\vec{AB} = \vec{v} + \vec{v}$. Quelle est la longueur du vecteur $\vec{AB}$?
- Marque un point C et construis le point D tel que $\vec{DC} = \vec{v} + \vec{v}$. Quelle est la longueur du vecteur $\vec{CD}$? Compare les sens des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{CD}$.
- Marque un point E et construis le point F tel que $\vec{v} = \vec{EF} + \vec{EF}$. Quelle est la longueur du vecteur $\vec{EF}$?

JE RETIENS

- Soit $\vec{AB}$ un vecteur, k un nombre quelconque non nul et C un point quelconque. Il existe un vecteur unique $\vec{CD}$ qui possède les propriétés suivantes :
 - $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ ont des supports parallèles ;
 - $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ ont le même sens si k est positif ou des sens opposés si k est négatif ;
 - $|\vec{CD}| = |k| |\vec{AB}|$.



$|k|$ est la valeur absolue de k . Ce nombre est égal à k si k est positif et à $-k$ si k est négatif.

On écrit alors $\vec{CD} = k \vec{AB}$ et on dit qu'on a multiplié le vecteur $\vec{AB}$ par le nombre k . On dit aussi que $\vec{CD}$ est le produit du vecteur $\vec{AB}$ par le nombre k .

- Au lieu d'écrire $1 \vec{AB}$ et $-1 \vec{AB}$, on écrit respectivement $\vec{AB}$ et $-\vec{AB}$.
- Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre :
 - Quels que soient les nombres h et k , $k(h\vec{AB}) = (kh)\vec{AB}$ et $(k+h)\vec{AB} = k\vec{AB} + h\vec{AB}$.
 - Quels que soient le nombre k et les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, $k(\vec{AB} + \vec{CD}) = k\vec{AB} + k\vec{CD}$.
 - Pour tout vecteur $\vec{AB}$, le produit de ce vecteur par 0 est le vecteur nul $\vec{0}$.
 - Quel que soit le nombre k , $k \vec{0} = \vec{0}$.

J'APPLIQUE

- Trace un vecteur $\vec{AB}$ puis construis les vecteurs $\vec{CD} = \frac{5}{2} \vec{AB}$ et $\vec{EF} = 4 \vec{AB}$.
- A, B et C étant trois points du plan, démontre que $5(\vec{AB} + \vec{BC}) - 3\vec{AC} = 2\vec{AC}$.
- Soit un triangle ABC. Construis le vecteur $\vec{AD} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$.

JE ME SOUVIENS

L'écriture $\vec{MN} = k\vec{AB}$ équivaut aux trois propriétés suivantes :

- les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{AB}$ ont des supports parallèles ;
- $\vec{MN} = k\vec{AB}$;
- $\vec{MN}$ et $\vec{AB}$ ont le même sens si k est positif ou de sens opposés si k est négatif.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Sur la figure ci-contre, $\vec{AD} = \frac{5}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AE} = \frac{5}{3}\vec{AC}$.
a) Reproduis la figure sur ton cahier en prenant $AD = 5$ cm, $AE = 10$ cm et $\widehat{BAC} = 55^\circ$.
- À l'aide de la réciproque du théorème de Thalès étudiée dans le cas du triangle, démontre que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
- Démontre que les triangles ABC et ADE sont homothétiques.

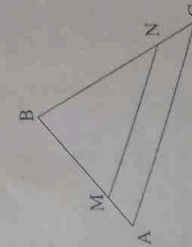
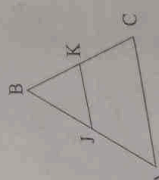
Déduis-en que $\vec{DE} = \frac{5}{3}\vec{BC}$.

JE RETIENS

- On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **colinéaires** lorsque leurs supports sont parallèles.
- Par convention, le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur du plan.
- Soient $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs non nuls. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires ;
 - il existe un nombre k tel que $\vec{CD} = k\vec{AB}$.

J'APPLIQUE

- ABC est un triangle, J et K sont les milieux respectifs de [AB] et de [BC].
a) Démontre que $\vec{JK} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
b) Démontre que les vecteurs $\vec{JK}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Déduis-en que les droites (JK) et (AC) sont parallèles.
c) Le résultat que tu viens de démontrer est un théorème connu de la classe de quatrième. Lequel ?
- Construis un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 9$ cm. Marque M sur [AB] tel que $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et marque un point N sur [AC] tel que $\vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AC}$. Démontre que $\vec{MN} = \frac{3}{4}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{3}{4}\vec{BC}$. Déduis-en que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.



JE ME SOUVIENS

Soit $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **colinéaires** ;
- leurs supports sont parallèles ;
- il existe un nombre $k \neq 0$ tel que $\vec{CD} = k\vec{AB}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Construis un triangle ABC. Marque le point M tel que $\vec{AM} = -3\vec{BC}$ et le point N tel que $\vec{AN} = 2\vec{BC}$. Démontre que $\vec{AN} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$. Déduis-en que les points A, M, et N sont alignés.
- ABC et ADC sont deux triangles. J et K sont les milieux respectifs de [AB] et de [BC]. M est un point de [AD] tel que $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AD}$. N est un point de [DC] tel que $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{CD}$.
a) Démontre que $\vec{AC} = 2\vec{JK}$.
b) Démontre que $\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{MN}$.
c) Démontre que $\vec{JK} = \frac{3}{4}\vec{MN}$. Déduis-en que les droites (JK) et (MN) sont parallèles.

Quelle est la nature du quadrilatère IJKNM ?

JE RETIENS

- Pour démontrer que trois points A, B et C sont **alignés**, il suffit de démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont **colinéaires**.
- Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan. Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont **parallèles**, il suffit de démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **colinéaires**.

Hypothèse :
 $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont des vecteurs colinéaires.
Conclusion : A, B et C sont alignés.

Hypothèse :
 $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont des vecteurs colinéaires.
Conclusion : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

J'APPLIQUE

- Construis un triangle ABC. Soit D le point tel que $\vec{AD} = 2\vec{BC}$. Démontre que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
- ABCD est un parallélogramme. I, J et K sont les milieux respectifs de [AD], de [BD] et de [BC].
a) Démontre que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{JK} = \frac{1}{2}\vec{DC}$.
b) Démontre que I, J et K sont alignés.

JE ME SOUVIENS

Trois points O, I et J non alignés définissent un repère (O, I, J) d'origine O . Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et si $OI = OJ$, le repère (O, I, J) est dit orthonormal.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Reproduis la figure ci-contre puis, en tenant compte de cette figure, remplace les pointillés par les nombres qui conviennent :
 $AB = \dots OI + 2 OJ$; $CD = 3 OI + \dots OJ$;
 $EF = \dots OI + \dots OJ$; $GH = \dots OI + \dots OJ$.
- Dessine un repère orthonormal (O, I, J) . Marque les points A $(-2; -3)$ et B $(4; 1)$. La parallèle à (OI) qui passe par A coupe en C la parallèle à (OJ) qui passe par B . En utilisant l'égalité vectorielle $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$, démontre que $\vec{AB} = 6OI + 4OJ$.

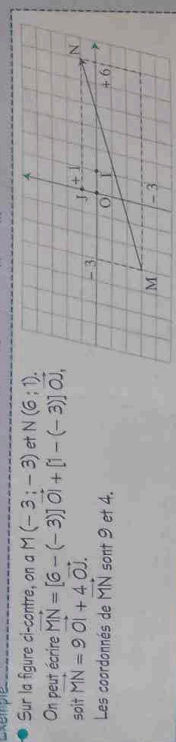
JE RETIENS

- Le plan étant muni d'un repère quelconque (O, I, J) , tout vecteur $\vec{MN}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{MN} = xOI + yOJ$. On dit que les nombres x et y sont respectivement la première et la seconde coordonnée du vecteur $\vec{MN}$ dans la base (OI, OJ) .

Exemple.
 Sur la figure ci-contre, $\vec{AB} = 7OI + 5OJ$.
 On écrit $\vec{MN} (7; 5)$ ou bien $\vec{MN} \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 5 \end{smallmatrix} \right)$.

Par convention, les écritures $\vec{v}(x; y)$ et $\vec{v} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$ signifient que les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont x et y .

- Le plan étant muni d'un repère quelconque (O, I, J) , soit deux points $M(x_M; y_M)$ et $N(x_N; y_N)$. Le vecteur $\vec{MN}$ a donc pour coordonnées $x = x_N - x_M$ et $y = y_N - y_M$.



J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque.

- Marque les points $A(2; -2)$, $B(4; -6)$, $C(0; -3)$ et $D(5; 3)$. Trouve les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ et $\vec{DA}$ dans la base (OI, OJ) par simple lecture, puis calcule ces mêmes coordonnées.
- On donne les points $A(-3; 4)$, $B(5; -2)$ et $C(5; 0)$. Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ dans la base (OI, OJ) .
- Marque le point $A(2; 3)$ puis construis le vecteur $\vec{AB}(-4; 5)$. Quelles sont les coordonnées du point B ?

JE ME SOUVIENS

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) , tout vecteur $\vec{MN}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{MN} = xOI + yOJ$. Les nombres x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{MN}$ dans la base (OI, OJ) .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Reproduis la figure 1 ci-dessous, puis construis le vecteur $\vec{AB} + \vec{BC}$. Lis sur la figure les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AB} + \vec{BC}$. Que constates-tu?
- Reproduis la figure 2 ci-dessous, puis construis le vecteur $\vec{AC} = 3\vec{AB}$. Lis sur la figure les coordonnées du vecteur $\vec{AC}$. Que constates-tu?

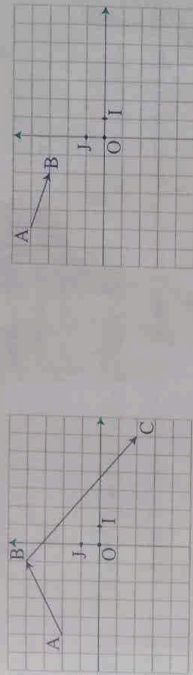


Figure 1

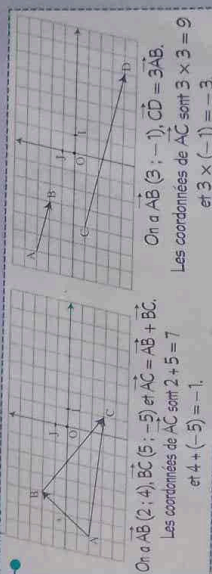
- Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) . Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et soit k un nombre réel. Exprime les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $k\vec{u}$ en fonction des vecteurs OI et OJ . Déduis-en les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et celles du vecteur $k\vec{u}$. Quels résultats obtient-on en prenant $k = -1$ puis $k = 0$?

Figure 2

JE RETIENS

- (O, I, J) est un repère quelconque. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et soit k un nombre quelconque. Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $x + x'$ et $y + y'$. Celles de $k\vec{u}$ sont kx et ky .

Exemples



- Quand deux vecteurs sont opposés, leurs coordonnées de même rang sont opposées.
- Les coordonnées du vecteur $\vec{0}$ sont nulles.

J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- Marque les points $A(-3; -2)$, $B(4; -1)$ et $C(2; 5)$. Construis le vecteur $\vec{AB} + \vec{BC}$ et lis directement les coordonnées de ce vecteur. Calcule ensuite ses coordonnées.
- Marque les points $A(-3; 2)$, $B(-1; -4)$, $C(3; 0)$ et $D(5; -3)$. Construis le vecteur $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ puis calcule ses coordonnées.
- Marque les points $A(-4; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(1; 3)$ et $D(-3; -4)$. Construis le vecteur d'origine D égal à $3\vec{AB} + 2\vec{BC}$. Calcule les coordonnées de ce vecteur.

JE ME SOUVIENS

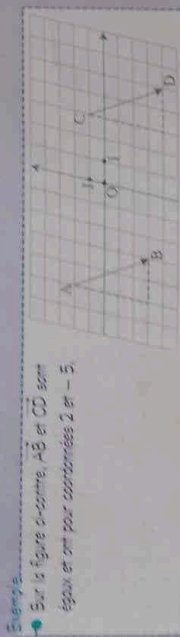
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points. Les coordonnées x_M et y_M du milieu M du segment $[AB]$ sont $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.
Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont deux vecteurs, leur somme a pour coordonnées $x + x'$ et $y + y'$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- La figure ci-contre montre deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.
Lis sur la figure les coordonnées des points A, B, C et D .
 - Calcule les coordonnées du milieu de $[AD]$ et celles du milieu de $[BC]$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
 - Que peux-tu dire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$?
 - Calcule les coordonnées dans la base $(\vec{OI}, \vec{OJ})$ des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$. Que constates-tu?
- $\vec{u} = x\vec{OI} + y\vec{OJ}$. Soit $\vec{v} = (x - x')\vec{OI} + (y - y')\vec{OJ}$.
- Montre que $\vec{u} + \vec{v} = (x - x')\vec{OI} + (y - y')\vec{OJ}$.
 - On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux. Démontre qu'on a alors $(x - x')\vec{OI} + (y - y')\vec{OJ} = \vec{0}$.
Dédit-en que $x' = x$ et que $y' = y$.
 - Réciproquement, on suppose que $x' = x$ et que $y' = y$. Calcule $(x - x')\vec{OI} + (y - y')\vec{OJ}$ et montre que $\vec{u} = \vec{v}$.

JE RETIENS

- Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $x = x'$ et $y = y'$. Réciproquement, si $x = x'$ et $y = y'$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.



J'APPLIQUE

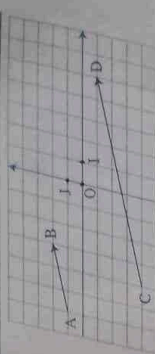
- Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère.
- Utilise le quadrillage de ton cahier pour construire trois vecteurs égaux. Construis ensuite un repère et lis les coordonnées des vecteurs construits.
 - Marque $A(-3; -2)$, $B(-1; 4)$ et $C(3; 1)$. Construis le point D tel que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ soient égaux.
 - Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Marque les points $A(-2; -2)$, $B(2; 4)$, $C(3; -1)$ et $D(7; 5)$. Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ et démontre que $ABDC$ est un parallélogramme.

JE ME SOUVIENS

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand ils ont des supports parallèles. Il existe alors un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

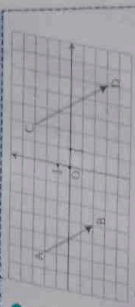
- La figure ci-contre montre deux vecteurs colinéaires $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ dans un repère quelconque. Lis les coordonnées x et y du vecteur $\vec{AB}$ et les coordonnées x' et y' du vecteur $\vec{CD}$. Compare les nombres $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$ puis calcule le nombre $xy' - x'y$.
 - Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) , on considère deux vecteurs $\vec{AB}(x; y)$ et $\vec{CD}(x'; y')$.
a) Construis les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ en prenant $x = 4, y = \frac{5}{2}, x' = 8$ et $y' = 5$. Démontre qu'ils sont colinéaires. Compare les nombres $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$, puis calcule le nombre $xy' - x'y$.
b) Recommence en prenant cette fois $x = 3, y = 4, x' = 5,4$ et $y' = 7,2$. Qu' observes-tu ?
- Le plan est muni d'un repère (O, I, J) , $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.
- Montre qu'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k(\vec{xOI} + yOJ)$.
 - Utilise l'égalité précédente pour montrer que $x' = kx$ et $y' = ky$. Dédit-en les égalités $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ et $xy' - x'y = 0$.



JE RETIENS

- Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) . Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
- il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$;
- il existe un nombre k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$;
- le nombre $xy' - x'y$ est nul.

Si x' et y' ne sont pas nuls, on a également $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. Les coordonnées de même rang de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles.



J'APPLIQUE

- Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère quelconque.
- Parmi les vecteurs $\vec{CD}(-1; 5)$, $\vec{EF}(-5; 1)$, $\vec{GH}(-1; \frac{1}{5})$, $\vec{KL}(\frac{4}{5}; -4)$, $\vec{MN}(7; 5)$, trouve ceux qui sont colinéaires à $\vec{AB}(5; -1)$.
 - Soit $\vec{AB}(3; \frac{1}{4})$ et $\vec{CD}(-4; \frac{1}{3})$. Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
 - Soit $\vec{AB}(-2; 4)$ et $\vec{AM}(\frac{-25}{8}; \frac{25}{4})$. Démontre que les points A, B et M sont alignés.

JE ME SOUVIENS

Si le triangle MNK est rectangle en K, alors $MN^2 = MK^2 + KN^2$.

C'est le théorème de Pythagore.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Reproduis la figure ci-contre.
- Quelles sont les coordonnées des points M, N et K dans le repère orthonormal (O, I, J) ?
- Calcule les longueurs MK et KN.
- Utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur MN.

- Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). Soit M (x_M ; y_M) et N (x_N ; y_N) deux points quelconques. La parallèle à (OJ) qui passe par M coupe en K la parallèle à (OI) qui passe par N.
- Quelle est la nature du triangle MNK ?
- Exprime les longueurs MK et KN en fonction des coordonnées des points M et N.
- Applique le théorème de Pythagore au triangle MNK pour exprimer MN^2 en fonction des coordonnées des points M et N.

JE RETIENS

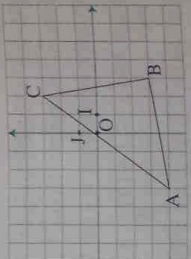
Le plan est muni d'un repère orthonormal. Si M (x_M ; y_M) et N (x_N ; y_N) sont deux points quelconques, alors $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2$ et $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

Sur la figure ci-dessus on a M (-3; 4) et N (5; -2).
 $MN^2 = [5 - (-3)]^2 + [(-2) - 4]^2 = 8^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100$.
 On en tire $MN = \sqrt{100} = 10$.

J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormal.

- On donne les points A (-3; -4), B (2; 5) et C (7; -3). Fais une figure puis calcule les distances OA, OB, OC, AB, AC et BC.
- Sur la figure ci-contre, les coordonnées des points A, B et C sont des nombres entiers. Lis ces coordonnées puis calcule les longueurs AB, BC et AC. Démontre que le triangle ABC est rectangle.

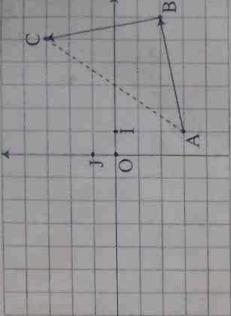


JE ME SOUVIENS

Le plan est muni d'un repère orthonormal. Si A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) sont deux points du plan, alors $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- Sur la figure ci-contre, (O, I, J) est un repère orthonormal. a) Calcule les longueurs AB, BC et AC, puis démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. Que peux-tu dire des vecteurs AB et BC ?
- Lis sur la figure les coordonnées x et y du vecteur AB et les coordonnées x' et y' du vecteur BC. Calcule le nombre $xx' + yy'$. Que constates-tu ?



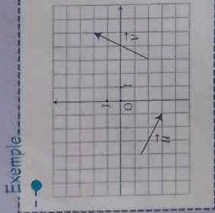
Utilise la relation $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

- Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Soit A, B et C trois points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$. a) Quelles sont les coordonnées des vecteurs AB, BC et AC ?
- Montre que $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2(xx' + yy')$. Démontre ensuite que la condition « le triangle ABC est rectangle en B » équivaut à la condition $xx' + yy' = 0$.

JE RETIENS

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

- On dit que deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** lorsque leurs supports sont perpendiculaires. Par convention, le vecteur $\vec{0}$ est **orthogonal** à tout autre vecteur.
- Soit deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors le nombre $xx' + yy'$ est nul. Réciproquement, si le nombre $xx' + yy'$ est nul, alors les deux vecteurs sont orthogonaux.



Sur la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées 3 et $\frac{2}{3}$.
 celles du vecteur $\vec{v}$ sont respectivement égales à 2 et 4.
 Or $3 \times 2 + 4 \times \frac{2}{3} = 0$.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.

Attention, cela n'est vrai qu'avec un repère orthonormal !!

J'APPLIQUE

Pour chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormal.

- Parmi les vecteurs $\vec{CD}(3; 2)$, $\vec{EF}(3; -2)$, $\vec{GH}(5; -3)$, $\vec{KL}(4; -6)$, $\vec{MN}(\frac{7}{2}; \frac{7}{3})$, trouve ceux qui sont orthogonaux au vecteur $\vec{AB}(2; -3)$.
- Trouve le nombre x pour que les vecteurs $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(x; 2)$ soient orthogonaux.
- Trouve le nombre y pour que les vecteurs $\vec{u}(-5; 9)$ et $\vec{v}(4; y)$ soient orthogonaux.

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Produit d'un vecteur par un nombre

- 1 Marque trois points non alignés A, B et C. Construis les points M et N tels que $\vec{CM} = 3\vec{AB}$ et $\vec{CN} = -2\vec{AB}$.
- 2 Trace un triangle ABC puis construis les vecteurs $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{CE} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$.
- 3 Trace un triangle ABC puis construis les vecteurs $\vec{AD} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ et $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{AC}$.

Vecteurs colinéaires

- 4 Trace un triangle ABC puis construis les vecteurs $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ et $\vec{AN} = 3\vec{AC}$. Démonstre que MN et BC sont colinéaires.
- 5 Trace un triangle ABC puis construis les vecteurs $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. Démonstre que les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

Utilisation des vecteurs colinéaires

- 6 ABCD est un quadrilatère tel que $\vec{AB} = 2\vec{DC}$. Que peux-tu dire du quadrilatère ABCD? Justifie ta réponse.
- 7 Trace un triangle ABC, puis construis les vecteurs $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 2\vec{CA}$ et $\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{CA}$. Montre que $\vec{AM} = 3\vec{AN}$. Déduis-en que A, M et N sont alignés.
- 8 Trace un triangle ABC, puis construis les vecteurs $\vec{CD} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ et $\vec{CE} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$. Démonstre que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

Coordonnées d'un vecteur

Pour les exercices 9 à 11, le plan est muni d'un repère qui n'est pas nécessairement orthonormal.

- 9 Marque les points A (-5; 2), B (5; -3), C (0; 5) et D (2; 0). Lis les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{BD}$ et $\vec{CD}$.
- 10 On donne A (-4; 3), B (-2; -5), C (0; -4) et D (3; 4). Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$, $\vec{BD}$ et $\vec{CD}$.
- 11 Soit A (-4; 5) et B (x; y). Trouve x et y pour que la première coordonnée du vecteur AB soit 3 et la seconde 7.

Coordonnées et opérations sur les vecteurs

Pour les exercices 12 à 14, le plan est muni d'un repère qui n'est pas nécessairement orthonormal.

- 12 Soit A (-5; -3), B (3; -1), C (3; 3) et D (4; -2). Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB} + \vec{CD}$, $\vec{AB} - \vec{CD}$, $3\vec{AB}$, $2\vec{CD}$ et $5\vec{AB} + 2\vec{CD}$.
- 13 Soit A (-5; -2), B (-3; 4), C (2; 5) et D (-4; -5). Calcule les coordonnées des vecteurs $2\vec{AB} + 3\vec{CD}$ et $-4\vec{AC} + 2\vec{BD}$.
- 14 Marque les points A (-3; -4), B (-2; 3), C (4; 0) et D (3; -4). Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ et $2\vec{AB} - 3\vec{CD}$.

Coordonnées de deux vecteurs égaux

Pour les exercices 15 à 17, le plan est muni d'un repère qui n'est pas nécessairement orthonormal.

- 15 Marque les points A (-4; 3), B (-2; 5) et C (1; -3). Construis le point D tel que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ soient égaux.
- 16 Marque les points A (-4; -3), B (2; 1), C (-2; 2) et D (4; 6). Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ et démontre que ABCD est un parallélogramme.

- 17 Calcule les deux nombres x et y pour que les vecteurs $\vec{AB}$ (x - 2; -4) et $\vec{CD}$ (5; 4 - y) soient égaux.

Caractérisation des vecteurs colinéaires

Pour les exercices 18 à 20, le plan est muni d'un repère qui n'est pas nécessairement orthonormal.

- 18 Soit $\vec{AB}$ (3; -5) et $\vec{CD}$ (-2,4; 4). Démonstre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- 19 Soit $\vec{AB}$ (5; 4) et $\vec{AM}$ (3; 2,4). Démonstre que les points A, B et M sont alignés.

- 20 Calcule le nombre réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ (2; x + 1) et $\vec{v}$ (5; x - 2) soient colinéaires.

Caractérisation des vecteurs orthogonaux

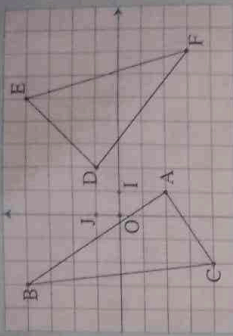
Pour les exercices 21 à 23, le plan est muni d'un repère orthonormal.

- 21 Démonstre que les vecteurs $\vec{AB}$ (-15; 9) et $\vec{CD}$ (3; 5) sont orthogonaux.
- 22 Trouve le nombre x pour que les vecteurs $\vec{u}$ (7; 5) et $\vec{v}$ (x; 3) soient orthogonaux.
- 23 Trouve le nombre y pour que les vecteurs $\vec{u}$ (-3; y) et $\vec{v}$ (2; 5) soient orthogonaux.

Distance de deux points en repère orthonormal

Pour les exercices 24 et 25, le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

- 24 On donne les points A (-3; 5), B (2; -4) et C (4; 5). Calcule les distances OA, OB, OC, AB, AC et BC.
- 25 Sur la figure suivante, les coordonnées des points A, B, C, D, E et F sont des nombres entiers.



Lis ces coordonnées puis calcule les longueurs AB, BC et AC. Les triangles ABC et DEF sont-ils rectangles?

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

Pour les exercices 26 à 30, le plan est muni d'un repère orthonormal.

- 26 Soit A (-3; 2) et B (1; -2). Calcule les coordonnées du symétrique A' de A par rapport à B.
- 27 Soit A (-1; 2), B (-3; -2), C (2; 0) et D (4; 4). Calcule les coordonnées de AD et de BC. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?
- 28 Soit A (-3; 2), B (-1; -4), C (4; -1) et D (x; y). Calcule x et y pour que ABCD soit un parallélogramme.
- 29 Soit A (-2; -3), B (4; 1) et C (2; 4). Montre que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux. Quelle est la nature du triangle ABC?
- 30 Soit A (5; 0), B (2; 6), C (-4; 3) et D (-1; -3).
a) Démonstre que $\vec{AD} = \vec{BC}$. Que peux-tu dire du quadrilatère ABCD?
b) Démonstre que $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux. Que peux-tu dire du quadrilatère ABCD?
c) Calcule BC et CD. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?
- 31 Soit un triangle ABC. On appelle M le milieu de [BC] et A' le symétrique de A par rapport à M. Démonstre que $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Déduis-en que $\vec{AA'} = (\vec{AB} + \vec{AC})$.

JE ME SOUVIENS

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, alors les points A, B et M sont alignés.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère (O, I, J).

■ Marque les points A (-5 ; -7), B (-3,2 ; -4,3), C (2,8 ; 4,7), D (3,4 ; 5,6) et E (5 ; 8). Qu' observes-tu ? Montre que les coordonnées x et y de chaque point vérifient la relation $3x - 2y + 1 = 0$.

□ On donne A (-2 ; -2) et B (4 ; 6). M est un point variable dont les coordonnées x et y vérifient la relation $4x - 3y + 2 = 0$.

a) Vérifie que les coordonnées x et y de A et de B vérifient aussi la relation $4x - 3y + 2 = 0$.
b) Démontre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Montre que M est un point de (AB).

□ Soit A (-3 ; 2), B (2 ; 5) et M (x ; y) un point variable tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires. Démontre que les coordonnées de M vérifient la relation $3x - 5y + 19 = 0$.

JE RETIENS

• Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J). L'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient la relation $ax + by + c = 0$ est une droite (d).

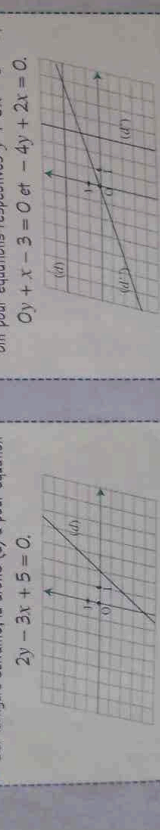
• L'égalité $ax + by + c = 0$ s'appelle une équation cartésienne de la droite (d) dans le repère (O, I, J).

Si $a = 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, la droite (d) est parallèle à l'axe des x.

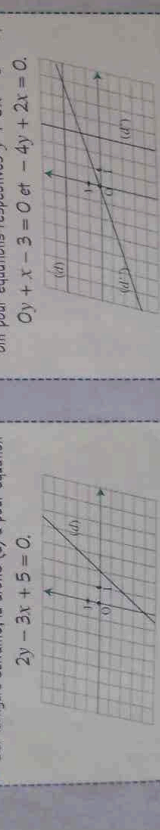
Si $a \neq 0$, $b = 0$ et $c \neq 0$, la droite (d) est parallèle à l'axe des y.

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$, la droite (d) passe par l'origine du repère.

Exemple 1 : Sur la figure suivante, la droite (d) a pour équation $2y - 3x + 5 = 0$.



Exemple 2 : Sur la figure suivante, les droites (d), (d') et (d'') ont pour équations respectives $y + 0x - 3 = 0$, $0y + x - 3 = 0$ et $-4y + 2x = 0$.



J'APPLIQUE

Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J).

1 Marque les points A (-4 ; -3), B (-2 ; -5/3), C (2 ; 1), D (3 ; 5/3) et E (5 ; 3). Qu' observes-tu ? Vérifie qu'ils appartiennent tous à la droite (d) d'équation $2x - 3y - 1 = 0$.

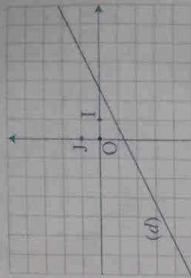
2 Les points K (-3 ; 5/2) et L (2 ; -2) appartiennent-ils à la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$? Pourquoi ?

JE ME SOUVIENS

Dans un repère (O, I, J), chaque droite du plan est caractérisée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$, l'un au moins des nombres a et b n'étant pas nul.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- La droite (d) a pour équation $2x - 4y - 5 = 0$ dans un repère (O, I, J). Elle coupe l'axe (OI) en A et l'axe (OJ) en B.
- Calcule les coordonnées de A et de B.
- Quelle est l'ordonnée du point C de (d) d'abscisse -5 ?
- Quelle est l'abscisse du point D de (d) d'ordonnée +2 ?
- Reproduis la figure ci-contre et marque les points A, B, C et D sur ton dessin.



JE RETIENS

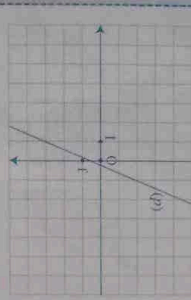
• Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère quelconque (O, I, J).

Si (d) n'est parallèle à aucun des deux axes, elle rencontre l'axe (OI) en un point d'ordonnée 0 et l'axe (OJ) en un point d'abscisse 0.

• Soit (d) une droite d'équation connue $ax + by + c = 0$ dans un repère quelconque (O, I, J). Quand on connaît l'une des deux coordonnées d'un point de la droite (d), on peut facilement calculer l'autre à l'aide de l'équation de la droite.

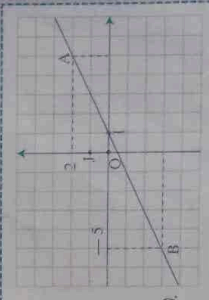
Exemple

(d) a pour équation $-5x + 2y - 1 = 0$.
Si $x = 0$ alors $2y - 1 = 0$
et $y = \frac{1}{2}$. La droite (d) coupe l'axe (OJ) au point $(0 ; \frac{1}{2})$.
Si $y = 0$, alors $-5x - 1 = 0$ et $x = -\frac{1}{5}$. La droite (d) coupe l'axe (OI) au point $(-\frac{1}{5} ; 0)$.



Exemple

(d) a pour équation $x - 2y - 1 = 0$.
Si A (x ; 2) appartient à (d), on peut écrire $x - 2 \times 2 - 1 = 0$.
On en tire $x = 5$.
Si B (-5 ; y) appartient à (d), on peut écrire $-5 - 2y - 1 = 0$.
On en tire $y = -3$.



J'APPLIQUE

1 Calcule les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) avec les axes (OI) et (OJ) du repère quand (d) a pour équation :

a) $2x - 5y - 4 = 0$.

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 4 = 0$.

2 Les cinq points A (-3 ; y_A), B (x_B ; 2), C (5/2 ; y_C), D (x_D ; -7/3) et E (x_E ; -5) appartiennent tous à la droite d'équation $3x + 4y - 2 = 0$. Retrouve les coordonnées manquantes.

JE ME SOUVIENS

Quand on connaît une équation d'une droite (d) et l'une des deux coordonnées d'un point M de cette droite, on peut calculer la coordonnée manquante.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère quelconque.

Soit (d) la droite d'équation $2x + 0y + 4 = 0$.

- Montre que tous les points de (d) ont la même abscisse. Que peux-tu dire de cette droite ?
- Donne les coordonnées de deux points de la droite (d) puis construis la droite (d) .

Soit (d_1) la droite d'équation $0x + 2y + 5 = 0$.

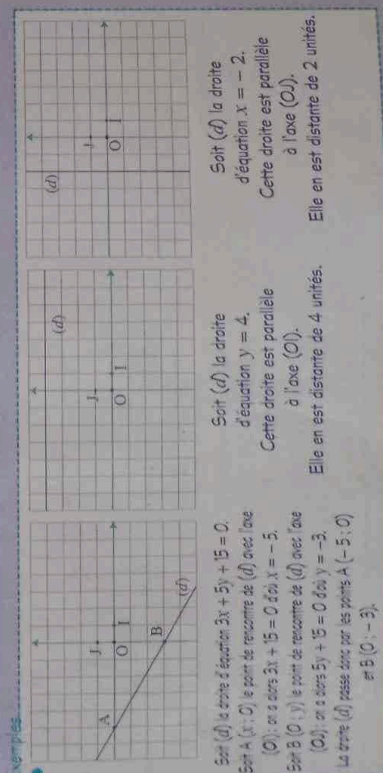
- Montre que tous les points de (d_1) ont la même ordonnée. Que peux-tu dire de cette droite ?
- Donne les coordonnées de deux points de la droite (d_1) puis construis la droite (d_1) .

Soit (d_2) la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$.

- Calcule les nombres x et y pour que les points $A(0; y)$ et $B(x; 0)$ appartiennent à (d_2) .
- Marque les points A et B puis construis la droite (d_2) .

JE RETIENS

- Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) . Pour construire une droite dont on connaît une équation, il suffit de marquer deux de ses points. Pour chaque point, on choisit une coordonnée et on calcule l'autre.



J'APPLIQUE

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- Construis les droites qui ont respectivement pour équations $-3x + 4y = 0$; $-3x + 4y - 3 = 0$ et $-3x + 4y - 9 = 0$.
- Construis la droite d'équation $\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$.
- Construis la droite (d) d'équation $4x - 9 = 0$ puis la droite (d') d'équation $5y - 2 = 0$. Lis les coordonnées de leur point d'intersection.

JE ME SOUVIENS

Étant donné un repère (O, I, J) , on peut associer à chaque droite du plan une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Dans cette équation, l'un au moins des nombres a et b n'est pas nul.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans un repère (O, I, J) , (d) est la droite d'équation $2x + 3y + 5 = 0$.

- Soit A et B les points d'intersection respectifs de (d) avec les axes (OI) et (OJ) . Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Démontre que le vecteur $\vec{v}(3; -2)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- On suppose maintenant que le repère (O, I, J) est **orthonormal**. Démontre que le vecteur $\vec{v}(2; 3)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Que représentent les nombres 2 et 3 pour la droite (d) ?

Étant donné un repère (O, I, J) et trois nombres non nuls a , b et c , on appelle (d) la droite d'équation $ax + by + c = 0$. On appelle A et B les points d'intersection respectifs de (d) avec les axes (OI) et (OJ) .

- Montre que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\frac{c}{a}$ et $-\frac{c}{b}$.

Démontre que le vecteur $\vec{v}(b; -a)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- On suppose que le repère (O, I, J) est **orthonormal**. Démontre que le vecteur $\vec{v}'(a; b)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

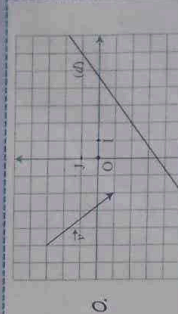
Le vecteur $(-b; a)$ est également un vecteur directeur de la droite (d) .

JE RETIENS

Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère (O, I, J) . On suppose $a \neq 0$ ou bien $b \neq 0$.

- Le support du vecteur $\vec{v}(b; -a)$ est parallèle à la droite (d) . On dit que le vecteur $\vec{v}$ est un **vecteur directeur** de cette droite (d) .

- Si le repère (O, I, J) est **orthonormal**, le support du vecteur $\vec{v}'(a; b)$ est perpendiculaire à la droite (d) .



D'une façon générale, on appelle **vecteur directeur d'une droite (d)** tout vecteur dont le support est parallèle à (d) .

J'APPLIQUE

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormal.

- Calcule les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d) et celles d'un vecteur dont le support est perpendiculaire à (d) sachant qu'une équation de (d) est :
a) $5x - 3y + 1 = 0$; b) $-3x - 2y + 8 = 0$; c) $3y - 8 = 0$; d) $5x - 10 = 0$; e) $2x - 3y = 0$.
- Le vecteur $\vec{v}(-4; 5)$ est un vecteur directeur d'une droite (d) qui passe par l'origine du repère. Détermine une équation de la droite (d) . Trouve les coordonnées d'un vecteur dont le support est perpendiculaire à (d) .

JE ME SOUVIENS

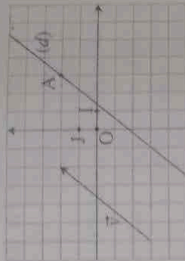
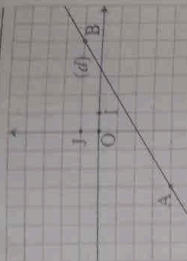
Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs non nuls. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que le nombre $xy' - x'y$ est nul.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans chaque exercice, le plan est muni d'un repère (O, I, J) pas forcément orthonormal.

- On donne $A(-3; -4)$ et $B(5; 1)$ et on appelle $M(x; y)$ un point quelconque de la droite (AB) .
- Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ et celles du vecteur $\vec{AM}$.
- En écrivant que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, montre qu'une équation de la droite (AB) est $5x - 8y - 17 = 0$.

- Soit (d) la droite qui passe par le point $A(3; 2)$ et qui admet le vecteur $\vec{v}(4; 5)$ comme vecteur directeur. On appelle $M(x; y)$ un point quelconque de la droite (d) .
- Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{AM}$.
- En écrivant que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, montre qu'une équation de la droite (d) est $5x - 4y - 7 = 0$.

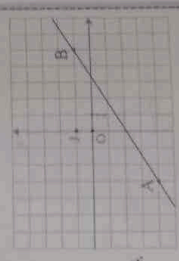


JE RETIENS

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque.

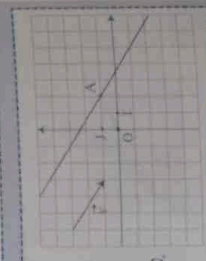
- Si on connaît les coordonnées de deux points A et B d'une droite (d) , le calcul permet de déterminer une équation de la droite (d) dans le repère (O, I, J) .

Exemple
On donne $A(-3; -4)$ et $B(5; 1)$.
Soit $M(x; y)$ un point quelconque de la droite (AB) .
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $5 - (-3) = 8$ et $1 - (-4) = 5$.
Le vecteur $\vec{AM}$ a pour coordonnées $x - (-3) = x + 3$ et $y - (-4) = y + 4$.
Comme les deux vecteurs sont colinéaires, on a $8(y + 4) - 5(x + 3) = 0$.
Ceci nous donne l'équation $8y - 5x + 17 = 0$.



- Si on connaît les coordonnées d'un point A d'une droite (d) et celles d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de cette droite, le calcul permet de déterminer une équation de la droite (d) dans le repère (O, I, J) .

Exemple
Soit (d) la droite de vecteur directeur $\vec{v}(3; -2)$ qui passe par $A(2; 1)$.
Soit $M(x; y)$ un point quelconque de (d) .
On a $\vec{AM}(x - 2; y - 1)$ et, puisque $\vec{v}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, on peut écrire $3(y - 1) - 2(x - 2) = 0$.
Une équation de (d) est donc $3y - 2x - 7 = 0$.



J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- Détermine une équation de la droite (AB) qui passe par $A(4; 2)$ et $B(-3; -2)$.
- Détermine une équation de la droite qui passe par $A(-4; 3)$ et qui admet $\vec{v}(3; 5)$ comme vecteur directeur.

JE ME SOUVIENS

Soit (d) la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le repère (O, I, J) . Le vecteur $(b; -a)$ est un vecteur directeur de (d) . Si le repère est orthonormal, le support du vecteur $(a; b)$ est perpendiculaire à (d) .

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

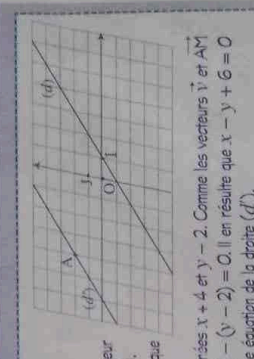
Le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque. Soit $A(-3; -2)$ et soit (d) la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$. Soit (d') la parallèle à (d) qui passe par A et soit $M(x; y)$ un point quelconque de (d') .

- Calcule les coordonnées de $\vec{AM}$.
 - Montre que $\vec{v}(3; -2)$ est un vecteur directeur de (d) .
 - En écrivant que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, trouve une équation de la droite (d') .
- Le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormal. Soit $A(-4; 3)$ et soit (d) la droite d'équation $3x - 2y - 1 = 0$. Soit (d') la perpendiculaire à (d) qui passe par A et soit $M(x; y)$ un point quelconque de la droite (d') .
- Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{AM}$.
 - Montre que $\vec{v}(3; -2)$ est orthogonal à la droite (d) .
 - En écrivant que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, trouve une équation de la droite (d') .

JE RETIENS

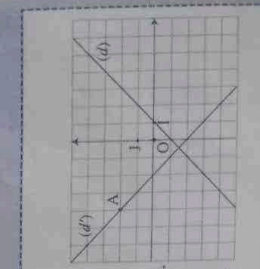
- Si on connaît les coordonnées d'un point A et l'équation d'une droite (d) dans un repère quelconque, le calcul permet de déterminer une équation de la droite (d') qui passe par A et qui est parallèle à (d) .

Exemple
On donne $A(-4; 2)$ et la droite (d) d'équation $y - x + 1 = 0$.
Le vecteur $\vec{v}(1; 1)$ est un vecteur directeur de (d) donc de (d') .
Soit $M(x; y)$ un point quelconque de (d') .
Le vecteur $\vec{AM}$ a pour coordonnées $x + 4$ et $y - 2$. Comme les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, on a $(x + 4) - (y - 2) = 0$. Il en résulte que $x - y + 6 = 0$ est une équation de la droite (d') .



- Si on connaît les coordonnées d'un point A et l'équation d'une droite (d) dans un repère orthonormal, le calcul permet de déterminer une équation de la droite (d') qui passe par A et qui est perpendiculaire à (d) .

Exemple
On donne $A(-4; 2)$ et la droite (d) d'équation $y - x + 1 = 0$.
Le vecteur $\vec{v}(-1; 1)$ est un vecteur orthogonal à (d) ; c'est donc un vecteur directeur de (d') .
Soit $M(x; y)$ un point quelconque de (d') .
Le vecteur $\vec{AM}$ a pour coordonnées $x + 4$ et $y - 2$. Comme les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, on a $(x + 4) + (y - 2) = 0$. Il en résulte que $x + y + 2 = 0$ est une équation de la droite (d') .



J'APPLIQUE

- Le plan est muni d'un repère orthonormal. La droite (d) a pour équation $-4x + 3y - 9 = 0$. Détermine l'équation de la droite (d') qui est parallèle à (d) et qui passe par $A(4; 3)$. Détermine également l'équation de la droite (d'') qui est perpendiculaire à (d) et qui passe par $A(4; 3)$. Réalise une figure.

85 JE ME SOUVIENS

Si (O, I, J) est un repère du plan, chaque droite est caractérisée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$, l'un au moins des nombres a et b n'étant pas nul. Le vecteur $(b; -a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

85 J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans un repère (O, I, J) , les droites (d) et (d') ont pour équations respectives $2x + 3y + 1 = 0$ et $4x + 6y + 5 = 0$. Construis les deux droites puis détermine un vecteur directeur de chacune. Démonstre que (d) et (d') sont parallèles.

Dans un repère (O, I, J) , les droites (d) et (d') ont pour équations respectives $x - 3y + 4 = 0$ et $5x + 4y + 1 = 0$.

a) En calculant des vecteurs directeurs des deux droites, montre qu'elles sont sécantes.
b) Construis ces deux droites et lis sur ton dessin les coordonnées de leur point d'intersection M. Vérifie les valeurs trouvées.

On reprend les données de l'exercice précédent afin de calculer les coordonnées x et y du point M au lieu de simplement les lire.

a) Utilise l'équation de la droite (d) pour montrer que $y = \frac{x+4}{3}$ et utilise l'équation de la droite (d') pour montrer que $y = \frac{-1-5x}{4}$.

b) Montre que x est solution de l'équation $\frac{x+4}{3} = \frac{-1-5x}{4}$ puis résous cette équation.

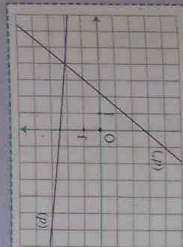
c) Détermine les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') .

Utilise la propriété suivante :
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

85 JE RETIENS

Quand on connaît les équations de deux droites sécantes dans un repère quelconque, le calcul permet de déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exemple
Soit (d) et (d') les deux droites qui ont pour équations respectives $x + 2y - 22 = 0$ et $6x - 5y - 14 = 0$.
De la première équation, on déduit $y = \frac{22-x}{2}$.
De la seconde équation, on déduit $y = \frac{6x-14}{5}$.
L'équation $\frac{22-x}{2} = \frac{6x-14}{5}$ a pour solution $x = 4$.
On en déduit $y = 2$. Le point commun aux deux droites (d) et (d') a pour coordonnées $x = 4$ et $y = 2$.



85 J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) .

- Montre que les droites d'équations respectives $-2x + 3y + 1 = 0$ et $3x - \frac{9}{2}y + 5 = 0$ sont parallèles. Construis les deux droites.
- Deux droites ont pour équations respectives $3x - 2y + 4 = 0$ et $-5x - y + 2 = 0$. Construis les deux droites et calcule les coordonnées de leur point d'intersection.

86 JE ME SOUVIENS

Si (O, I, J) est un repère du plan, chaque droite est caractérisée par une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, l'un au moins des nombres a et b n'étant pas nul. Le vecteur $(b; -a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

86 J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dans un repère (O, I, J) , la droite (d) a pour équation $2x - y + 5 = 0$.

a) Montre que $4x - 2y + 10 = 0$ est une autre équation de la droite (d) .

b) Montre que les deux équations données pour la droite (d) conduisent à écrire $y = 2x + 5$. On dit que cette égalité est l'équation réduite de la droite (d) .

c) Utilise l'équation réduite de (d) pour calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de la droite (d) avec les axes (OI) et (OJ) . Construis la droite (d) .

d) Montre que le vecteur $(1; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (d) .

Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère (O, I, J) . On suppose $b \neq 0$.

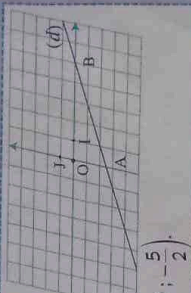
a) Montre que l'équation réduite de (d) est $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

b) Calcule les coordonnées y et y' des points A $(0; y)$ et B $(1; y')$ de la droite (d) . Déduis-en que le vecteur $(1; -\frac{a}{b})$ est un vecteur directeur de la droite (d) .

86 JE RETIENS

Soit (O, I, J) un repère quelconque. Une droite non parallèle à l'axe (OJ) a une équation réduite de la forme $y = px + q$. Le nombre q est l'ordonnée de son point de rencontre avec l'axe (OJ) . Le vecteur $(1; p)$ est un vecteur directeur de la droite.

Exemple
La droite d'équation réduite $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ est représentée ci-contre.
Son coefficient directeur est $\frac{1}{2}$.
Elle a pour vecteur directeur $(1; \frac{1}{2})$ et coupe l'axe (OJ) en $A(0; -\frac{5}{2})$.



- Une droite parallèle à l'axe (OI) a une équation réduite de la forme $x = \text{constante}$. Elle admet le vecteur $(0; 1)$ comme vecteur directeur.
- Une droite parallèle à l'axe (OJ) a une équation réduite de la forme $y = \text{constante}$. Elle admet le vecteur $(1; 0)$ comme vecteur directeur.

86 J'APPLIQUE

Dans chacun des exercices suivants, le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- Trouve les équations réduites des droites d'équation $-4x + 3y - 7 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$, $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y + 1 = 0$ et $5x - 4 = 0$.
- Construis les droites d'équations $y = -x + 3$, $y = x - 2$, $y = -3x + 4$ et $x = 2$.
- Calcule les coordonnées des points de rencontre avec les axes du repère de la droite d'équation $y = -3x + 5$.
- On donne A $(-2; 3)$ et B $(3; -4)$. Trouve l'équation réduite de la droite (AB) .

JE ME SOUVIENS

Si (O, I, J) est un repère du plan, une droite non parallèle à l'axe (OJ) est caractérisée par une équation réduite de la forme $y = px + q$. Le vecteur $(I; p)$ est un vecteur directeur de la droite (d) . L'équation réduite d'une parallèle à l'axe (OJ) est de la forme $x = k$, k étant un nombre fixe.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Le plan est muni d'un repère quelconque. Détermine l'équation réduite $y = px + q$ de la droite qui passe par $A(-2; 1)$ et $B(4; 3)$. Vérifie que $p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = px + q$ avec $p \neq 0$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'abscisses différentes de (d) . Démonstre que $y_B - y_A = p(x_B - x_A)$. Déduis-en une expression du nombre p en fonction des nombres x_A, x_B, y_A et y_B .

JE RETIENS

Soit $y = px + q$ l'équation réduite d'une droite (d) dans un repère (O, I, J) . On dit que le nombre p est le **coefficient directeur** de la droite (d) .

Si $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ sont deux points de la droite (d) , alors $p = \frac{y' - y}{x' - x}$.

Si le repère est orthonormal et si $p > 0$, on dit que p est la **pente** de la droite.

Quand on connaît le coefficient directeur d'une droite et les coordonnées d'un point de cette droite, on peut déterminer l'équation réduite de cette droite.

L'expression **coefficient directeur** a été choisie pour rappeler que le nombre p détermine la direction de la droite (d) , c'est-à-dire son inclinaison sur l'axe (OJ) .

Exemple

La figure ci-contre montre la droite (d) d'équation

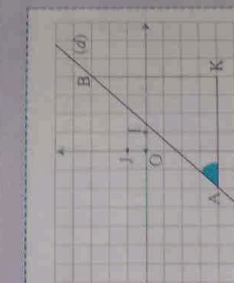
$$y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{6}$$

qui passe par $A(-2; -4)$ et $B(4; 3)$.

On a donc

$$p = \frac{3 - (-4)}{4 - (-2)} = \frac{7}{6}$$

Comme le repère est orthonormal, on a $\frac{KB}{KA} = \tan \widehat{KAB}$.



Exemple

La droite (d) , de coefficient directeur $p = -3$, passe par le point $A(2; 5)$. Quelle est son équation réduite ?

Cette équation est de la forme $y = px + q$.

On peut donc écrire $5 = 2 \times (-3) + q$, il en résulte $q = 11$.

L'équation réduite de la droite (d) est donc $y = -3x + 11$.

J'APPLIQUE

Détermine l'équation réduite de la droite (d) sachant que son coefficient directeur est -2 et qu'elle passe par $A(3; 7)$.

La droite (d) passe par les points $A(-4; 5)$ et $B(2; -5)$. Détermine son coefficient directeur puis son équation réduite.

JE ME SOUVIENS

Le vecteur $\vec{v}(1; p)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = px + q$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Construis les droites d'équations respectives $y = 3x - 5$ et $y = 3x + 4$. Démonstre qu'elles sont parallèles.

Le repère étant orthonormal, construis les droites d'équations respectives $y = 2x - 5$ et $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Démonstre qu'elles sont sécantes et calcule les coordonnées de leur point d'intersection.

Démonstre qu'elles sont perpendiculaires. Que vaut le produit de leurs coefficients directeurs ?

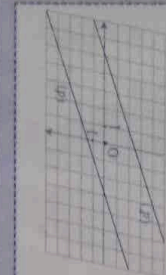
Deux droites (d) et (d') ont pour équations respectives $y = px + q$ et $y = p'x + q'$ relatives à un repère orthonormal. Montre que si $pp' = -1$, les deux droites sont perpendiculaires. Étudie la propriété réciproque.

JE RETIENS

Dire que deux droites (d) et (d') sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

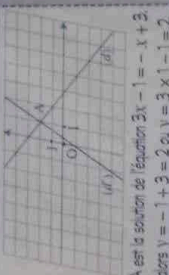
Exemple

Les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ et $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ sont parallèles.



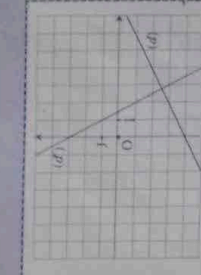
Exemple

Si deux droites d'équations respectives $y = px + q$ et $y = p'x + q'$ sont sécantes en A , on obtient l'abscisse x de A en résolvant l'équation $px + q = p'x + q'$. On calcule ensuite l'ordonnée y de A en reportant la valeur trouvée dans l'une des deux équations de droite.



Exemple

Soit deux droites d'équations respectives $y = px + q$ et $y = p'x + q'$ relatives à un repère orthonormal. Dire que ces droites sont perpendiculaires équivaut à dire que $pp' = -1$.



J'APPLIQUE

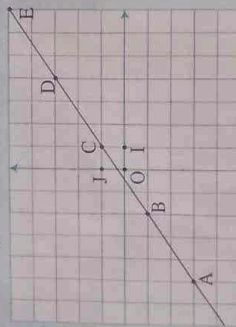
Les droites (d) , (d') et (d'') ont pour équations respectives $y = -\frac{2}{3}x + 3$, $y = -\frac{2}{3}x - 4$ et $y = \frac{3}{2}x + 3$ relativement à un repère orthonormal. Construis ces trois droites. Démonstre que (d) et (d') sont parallèles. Démonstre que (d'') est perpendiculaire à (d) et à (d') . Calcule les coordonnées des points d'intersection de (d'') avec (d) et avec (d') .

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère. Bien que ce ne soit pas toujours nécessaire, on le prendra orthonormal.

Équations d'une droite

- 1 Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C, D et E sont alignés.



Lis leurs coordonnées. Vérifie qu'ils appartiennent tous à la droite d'équation $2x - 3y + 1 = 0$.

- 2 Soit A (8 ; -4), B (-7 ; 5), C (-2 ; -3). Quel est le point qui n'appartient pas à la droite d'équation $3x + 5y - 4 = 0$? Justifie ta réponse.

Comment trouver l'une des deux coordonnées d'un point d'une droite d'équation connue ?

- 3 Calcule les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) avec les axes (OI) et (OJ) du repère quand (d) a pour équation :

a) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + 2 = 0$, b) $-3x + 2y + 8 = 0$,
c) $\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}y + 1 = 0$, d) $4x + 7y - 9 = 0$.

- 4 Le point M (x ; y) appartient à la droite d'équation $-2x + 3y - 2 = 0$.

Trouve y quand $x = -4$ puis quand $x = \frac{1}{2}$.
Trouve x quand $y = 5$ puis quand $y = \frac{7}{6}$.

- 5 Soit (d) la droite d'équation $5x + 3y - 8 = 0$. Trouve l'abscisse du point de (d) dont l'ordonnée est 5,7.

- 6 Soit (d) la droite d'équation $-3x + \frac{1}{5}y - 2 = 0$. Trouve l'ordonnée du point de (d) dont l'abscisse est -4.

- 7 Soit (d) la droite d'équation $\frac{1}{2}x - 5y + \frac{1}{3} = 0$. A, B, C et D sont quatre points de cette droite. Calcule leurs ordonnées respectives sachant que leurs abscisses sont -2 , $\frac{1}{2}$, 0 et $\sqrt{5}$.

Construction d'une droite d'équation connue

- 8 Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $5 - y = 0$ et $3x - 8 = 0$. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

- 9 Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $3x - 4y - 2 = 0$ et $5x + 2y - 8 = 0$. Lis sur ta construction les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. Que peux-tu dire quant à la précision de cette lecture ?

- 10 Construis les droites ayant pour équations :
a) $2x - 5y + 8 = 0$, b) $-3x + 4y + 1 = 0$,
c) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$, d) $\frac{2}{3}x + 3y - 1 = 0$.

Justifie chacune de tes constructions.

Signification géométrique des coefficients d'une équation de droite

- 11 Calcule les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d) quand une équation de cette droite est :

a) $3x - y + 4 = 0$, b) $-4x - 3y + 5 = 0$,
c) $\frac{3}{4}x - 5y + \frac{4}{3} = 0$, d) $3x + \frac{2}{5}y + 2 = 0$.

- 12 Calcule les coordonnées d'un vecteur dont le support est perpendiculaire à (d) sachant qu'une équation de (d) est :

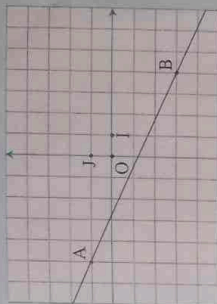
a) $2x - 7y + 1 = 0$, b) $-x - 4y + 9 = 0$,
c) $y - 8 = 0$, d) $3x - 9 = 0$,
e) $3x - 4y = 0$.

Déterminer une équation de droite

- 13 A et B sont deux points d'une droite (d). Trouve une équation de la droite (d) dans chacun des cas suivants :

a) A (2 ; 1) et B (-3 ; 0),
b) A (-3 ; 2) et B (1 ; -2),
c) A (2 ; 5) et B (-4 ; -3),
d) A (3 ; 0) et B (0 ; -4).

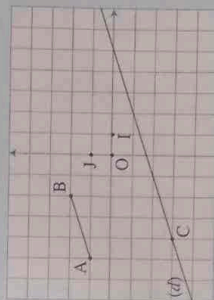
- 14 Trouve une équation de la droite (d) qui a été tracée sur la figure ci-dessous :



- 15 Une droite (d) passe par le point A et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur. Trouve une équation de la droite (d) dans chacun des cas suivants :

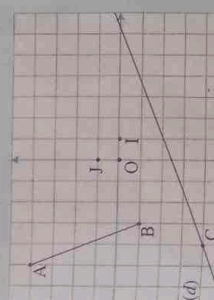
a) A (-3 ; 2) et $\vec{v}(-2 ; 3)$,
b) A (-2 ; -2) et $\vec{v}(-1 ; 1)$,
c) A (0 ; 5) et $\vec{v}(\frac{1}{2} ; 1)$.

- 16 Sur la figure ci-dessous, la droite (d) passe par le point C. Elle admet le vecteur AB comme vecteur directeur.



Trouve une équation de la droite (d).

- 17 Sur la figure ci-dessous, la droite (d) passe par le point C. Le support du vecteur AB est perpendiculaire à (d).



Détermine les coordonnées du vecteur AB puis calcule celles d'un vecteur orthogonal à AB. Détermine enfin une équation de la droite (d).

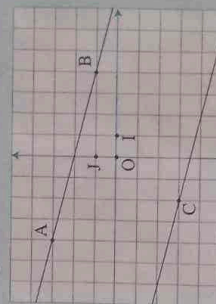
- 18 Une droite (d) passe par le point A (-1 ; 3). Elle est perpendiculaire au support du vecteur $\vec{v}(2 ; 1)$.

- a) Trouve un vecteur directeur de (d).
b) Détermine une équation de (d).

Parallèles et perpendiculaires

- 19 Soit (d) la droite d'équation $-4x + 3y - 9 = 0$.
a) Fais une figure.
b) Détermine l'équation de la droite (d') qui est parallèle à (d) et qui passe par A (4 ; 3).

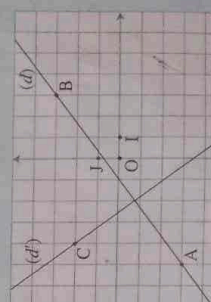
- 20 Sur la figure ci-dessous, lis les coordonnées des points A, B et C.



Détermine une équation de la droite (AB) puis une équation de la parallèle à la droite (AB) qui passe par C.

- 21 Soit (d) la droite d'équation $-4x + 3y - 9 = 0$. Détermine l'équation de la droite (d') qui est perpendiculaire à (d) et qui passe par A (4 ; 3). Construis une figure.

- 22 Sur la figure ci-dessous, la droite (d) passe par A et par B. La droite (d') est perpendiculaire à (d) et passe par C.



Lis les coordonnées des points A, B et C puis détermine une équation de la droite (d). Détermine ensuite une équation de la droite (d').

Intersection de deux droites

23 Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $-3x + 2y - 2 = 0$ et $-\frac{3}{2}x + y - 2 = 0$. Démonstre qu'elles sont parallèles.

24 Deux droites ont pour équations respectives $2x - 3y + 21 = 0$ et $x + 2y + 7 = 0$. Vérifie que le point $A(-3; 5)$ est le point d'intersection de ces deux droites. Trace les droites (d) et (d') .

25 On considère les droites d'équations respectives $-2x + 5y + 10 = 0$ et $4x - y - 2 = 0$. Montre qu'elles ne sont pas parallèles. Calcule les coordonnées de leur point d'intersection.

Forme réduite des équations d'une droite

26 Trouve les équations réduites des droites qui ont ces équations :

- a) $2x - 3y + 5 = 0$, b) $-4x - 5y + 3 = 0$,
c) $\frac{4}{5}x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$, d) $\frac{3}{4}x - 4 = 0$,
e) $-3y + 8 = 0$.

27 Construis les droites d'équations respectives $y = 3$, $y = -x$, $y = 3x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 3$ et $x = 2$. Explique ta méthode de construction.

28 Calcule les coordonnées des points de rencontre de la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 5$ avec chacun des axes du repère.

29 On donne $A(-3; 5)$ et $B(3; -5)$. Trouve l'équation réduite de la droite (AB) .

Coefficient directeur d'une droite

30 Détermine l'équation réduite de la droite (d) sachant que son coefficient directeur est $\frac{1}{2}$ et qu'elle passe par le point $A(2; \frac{7}{2})$.

31 Une droite (d) passe par les points A et B . Détermine son coefficient directeur puis son équation réduite dans chacun des cas suivants :

a) $A(-2; 4)$ et $B(4; 1)$,
b) $A(0; 5)$ et $B(-3; -1)$,
c) $A(1; 0)$ et $B(-3; 6)$.

Positions relatives de deux droites

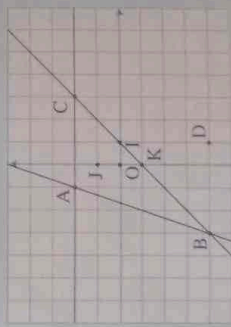
32 Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 5$. Sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

33 Construis la droite (d) d'équation $y = \frac{3}{5}x$. Trouve l'équation de la droite (d') qui passe par le point $A(-3; 5)$ et qui est parallèle à (d) .

34 Construis les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = \frac{1}{3}x - 2$ et $y = -3x + 1$. Démonstre que (d) et (d') sont perpendiculaires. Calcule les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

35 Soit $A(-1; 2)$, $B(-3; -4)$ et $C(3; 2)$. K est le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à K .



- a) Détermine les équations réduites des droites (AB) , (AC) et (BC) .
b) Calcule les coordonnées de K et de D .
c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
d) Trouve les équations réduites des droites (CD) et (BD) .

Médianes d'un triangle

Soit $A(-3; -3)$, $B(-1; 5)$ et $C(7; 1)$.
a) Détermine les équations réduites des droites (AB) , (AC) et (BC) .

b) Calcule les coordonnées des milieux respectifs J , K et L des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

c) Détermine les équations réduites des supports des médianes $[CJ]$, $[BK]$ et $[AL]$ du triangle ABC .

d) Vérifie que le point $G(1; 1)$ appartient aux trois médianes du triangle.

e) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{GA}$, $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$. Vérifie que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Hauteurs d'un triangle

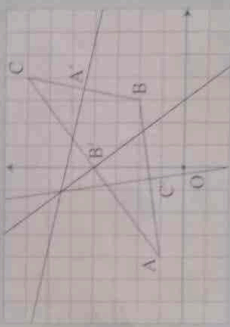
Soit $A(0; 6)$, $B(-3; 0)$ et $C(6; 0)$.

- a) Détermine les équations réduites des droites (AB) , (AC) et (BC) .
b) Détermine les équations réduites de deux des hauteurs du triangle ABC .
c) Calcule les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .

Médiatrices d'un triangle

On donne $A(-4; 1)$, $B(3; 2)$ et $C(4; 7)$.

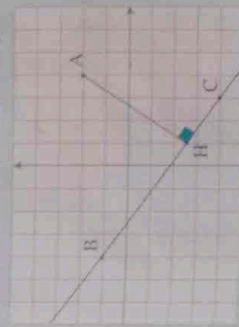
- a) Détermine les équations réduites des droites (AB) , (AC) et (BC) .
b) Calcule les coordonnées des milieux A' , B' et C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
c) Détermine les équations réduites des médiatrices des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
d) Vérifie que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes en un point P .



e) Calcule les coordonnées de P et vérifie que $PA = PB = PC$.

Distance d'un point à une droite

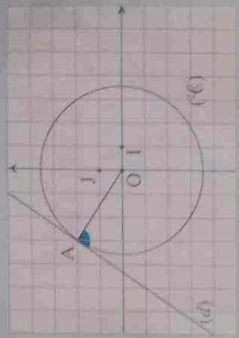
Soit $A(4; 2)$, $B(-4; 1)$ et $C(3; -4)$.



H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) . Calcule les coordonnées de H et la distance de A à la droite (BC) .

Tangente à un cercle

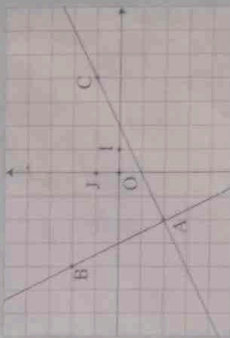
Soit (C) le cercle de centre O qui passe par le point $A(-3; 2)$.



Détermine l'équation réduite de la tangente (d) au cercle (C) qui passe par A .

Comparaison de méthodes

Soit $A(-2; -2)$, $B(-4; +2)$ et $C(4; 1)$. Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A , on va utiliser trois méthodes différentes.



- a) Détermine les équations réduites des droites (AB) et (AC) . Démonstre que ces deux droites sont perpendiculaires. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
b) Calcule les distances AB , AC et BC . Vérifie que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
c) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Montre que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
d) Compare les trois méthodes.

JE ME SOUVIENS

Soit O un point fixe et M un point variable. Dire que N est l'image de M dans la symétrie de centre O , c'est dire que les vecteurs $\vec{MO}$ et $\vec{ON}$ sont égaux. N est alors le symétrique de M par rapport à O .

Soit $\vec{AA'}$ un vecteur. Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AA'}$ équivaut à dire que $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Marque deux points O et O' et trace un triangle ABC . Construis le triangle DEF symétrique du triangle ABC par rapport à O puis construis le triangle $A'B'C'$ symétrique du triangle DEF par rapport à O' . Trace les vecteurs $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$ et $\vec{CC'}$.

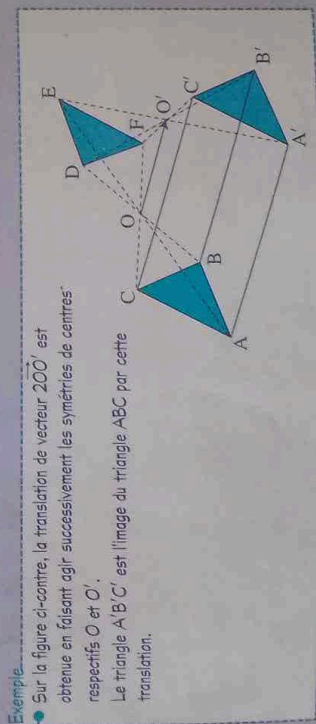
a) Qu' observes-tu ?
b) Quelle peut être la transformation qui fait de $A'B'C'$ l'image de ABC ?

O et O' sont deux points fixes, M est un point variable. On appelle N le symétrique de M par rapport à O et M' celui de N par rapport à O' .

a) Démontre que $\vec{MM'} = 2\vec{OO'}$.
b) Quelle est la transformation qui fait de M' l'image de M ?

JE RETIENS

La succession de deux symétries de centres respectifs O et O' est la translation de vecteur $2\vec{OO'}$.



J'APPLIQUE

1 Trace un cercle (C) de centre O , de rayon 3 cm, puis marque deux points A et B en dehors du cercle. Construis l'image du cercle (C) par la translation de vecteur $2\vec{AB}$.

2 Trace un carré $ABCD$ puis marque deux points O et O' en dehors du carré. En faisant agir successivement les symétries de centres respectifs O et O' , on obtient l'image $A'B'C'D'$ du carré $ABCD$. En faisant agir successivement les symétries de centres respectifs O' et O , on obtient l'image $A''B''C''D''$ du carré $ABCD$. Construis $A'B'C'D'$ et $A''B''C''D''$. Qu' observes-tu ? Démontre ce résultat.

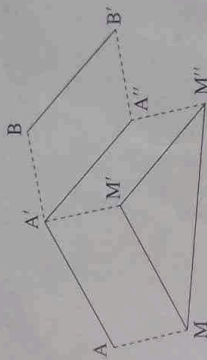
JE ME SOUVIENS

Soit $\vec{AA'}$ un vecteur. Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AA'}$ équivaut à dire que $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

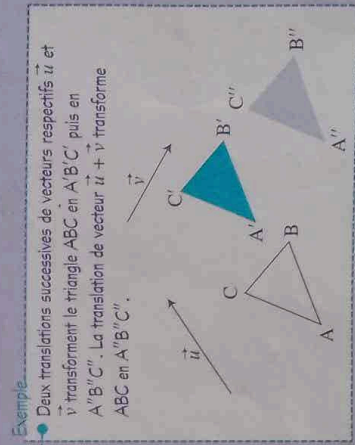
Soit A, A', B et B' quatre points fixes différents et soit M un point quelconque. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AA'}$, A'' et M'' sont les images respectives de A' et de M' par la translation de vecteur $\vec{BB'}$.

- Reproduis la figure ci-contre sur ton cahier.
- Démontre que $\vec{AA''} = \vec{AA'} + \vec{BB'}$.
- Démontre que $\vec{AA''} = \vec{MM''}$.
- Déduis de ce qui précède que M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AA''}$.



JE RETIENS

La succession de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ est une translation de vecteur $\vec{v} + \vec{v'}$.



J'APPLIQUE

1 Trace un triangle ABC puis construis ses images par les translations de vecteurs respectifs $\vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{AB} + \vec{AC}$. Justifie ta construction.

2 Construis un carré $ABCD$ puis construis ses images par les translations de vecteurs respectifs $\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$. Justifie tes constructions.

JE ME SOUVIENS

On définit une symétrie orthogonale d'axe (d) en associant à tout point M du plan son symétrique M' par rapport à (d) .



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Trace deux droites parallèles (d) et (d') . Marque un point O sur (d) et construis son projeté orthogonal O' sur (d') . Marque un point M puis construis son symétrique M' par rapport à (d) . Construis le symétrique M'' de M' par rapport à (d') . La droite (MM'') coupe (d) en H et (d') en H' .

a) Démontre que M, M' et M'' sont alignés.
b) Que peux-tu dire des triangles OMM' et $O'M'M''$? Que représentent les points H et H' pour les segments $[MM']$ et $[M'M'']$? Démontre que $MM'' = 2OO'$.

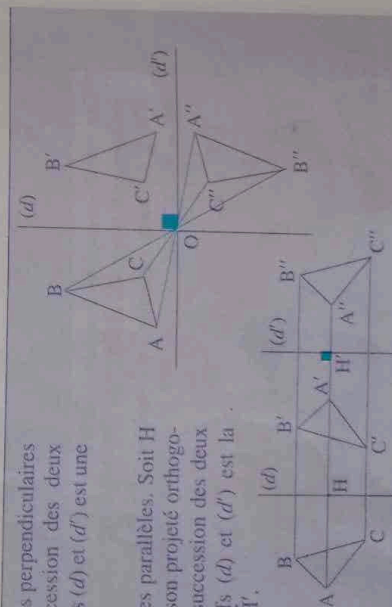
Trace deux droites perpendiculaires (d) et (d') qui se coupent en O . Marque un point M et construis son symétrique M' par rapport à (d) , puis construis le symétrique M'' de M' par rapport à (d') . (MM'') coupe (d) en H et $(M'M'')$ coupe (d') en H' . On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{MOH}$.

a) Quelle est la nature du triangle OMM' ? Montre que $\widehat{MOM'} = 2\alpha$ et que $\widehat{MM'O} = 90^\circ - \alpha$.
b) Démontre que les angles $\widehat{HMO}$ et $\widehat{MOH'}$ sont alternes-internes et que $\widehat{MOM''} = 180^\circ - 2\alpha$.
c) En calculant la mesure de $\widehat{MOM''}$, montre que O, M et M'' sont alignés.
d) Démontre que M'' est le symétrique de M par rapport à O .

JE RETIENS

Soit (d) et (d') deux droites perpendiculaires sécantes en O . La succession des deux symétries d'axes respectifs (d) et (d') est une symétrie de centre O .

Soit (d) et (d') deux droites parallèles. Soit H un point de (d) et soit H' son projeté orthogonal sur la droite (d') . La succession des deux symétries d'axes respectifs (d) et (d') est la translation de vecteur $2HH'$.



J'APPLIQUE

- Construis deux droites parallèles (d) et (d') distantes de 4 cm. Construis un cercle $(\mathcal{C})$ de centre K , de 2,5 cm de rayon. On appelle $(\mathcal{C}')$ son symétrique par rapport à (d) et $(\mathcal{C}'')$ le symétrique de $(\mathcal{C}')$ par rapport à (d') . Construis $(\mathcal{C}'')$ de la façon la plus simple possible.
- Construis deux droites perpendiculaires (d) et (d') qui se coupent en O . Construis un cercle $(\mathcal{C})$ de centre K , de 3 cm de rayon. On appelle $(\mathcal{C}')$ son symétrique par rapport à (d) et $(\mathcal{C}'')$ le symétrique de $(\mathcal{C}')$ par rapport à (d') . Construis $(\mathcal{C}'')$ de la façon la plus simple possible.

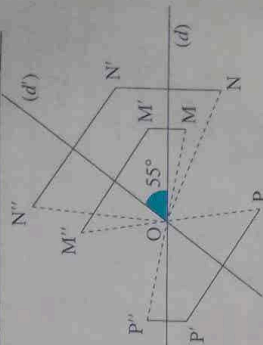
JE ME SOUVIENS

Soit (d) une droite et M un point quelconque du plan. On définit une symétrie orthogonale d'axe (d) en associant à M son symétrique M' par rapport à (d) . Une symétrie orthogonale est une transformation plane qui conserve les longueurs et les angles.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Sur la figure ci-contre :
- (d) et (d') sont sécantes en O et font entre elles un angle de 55° ;
- M' et N' sont les symétriques respectifs des points M et N par rapport à (d) ;
- M'' et N'' sont les symétriques respectifs de M' et de N' par rapport à (d') ;
- P' est le symétrique de P par rapport à (d) et P'' est celui de P' par rapport à (d') .

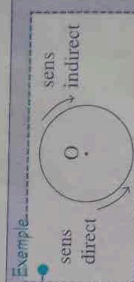
a) Reproduis la figure puis démontre que $OM'' = OM$, $ON'' = ON$ et $OP'' = OP$.
b) Vérifie qu'on passe de M à M'' et de N à N'' en « tournant autour de O » d'un angle de 110° dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Vérifie qu'on passe de P à P'' en « tournant autour de O » d'un angle de 110° dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre et en « tournant autour de O » d'un angle de 250° dans le sens des aiguilles d'une montre.



JE RETIENS

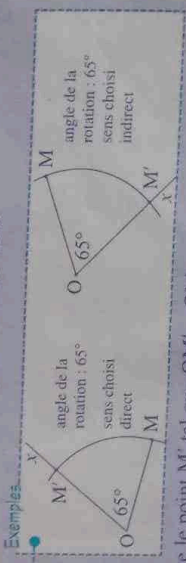
Il existe deux sens de parcours sur un cercle : le sens direct et le sens indirect. Le premier correspond au sens des aiguilles d'une montre, l'autre est le sens contraire.

O est associé à lui-même.



Choisissons un point fixe O , un angle α et l'un des deux sens de parcours possibles sur les cercles. À tout point M du plan on peut alors associer un point M' et un seul tel que $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$, le sens de M à M' étant celui qui a été choisi. On appelle rotation de centre O et d'angle α la transformation qui associe M' à M .

Pour construire M' , il faut :
- tracer la demi-droite $[Ox)$ telle que $\widehat{MOx} = \alpha$, en tenant compte du sens de la rotation qui a été choisi ;
- marquer sur cette demi-droite le point M' tel que $OM' = OM$.



J'APPLIQUE

- Construis un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côté. Construis les images A', B' et C' des points A, B et C dans la rotation de sens direct, de centre A et d'angle 120° .
- Construis un carré $ABCD$ de 3 cm de côté. Marque un point O en dehors du carré, puis construis les images A', B', C' et D' des sommets A, B, C et D du carré $ABCD$ dans la rotation de sens direct, de centre O et d'angle 150° .

On parle alors de rotation de sens direct ou de rotation de sens indirect.

JE ME SOUVIENS

Il existe deux sens de parcours sur un cercle : le sens indirect et le sens direct. Le premier correspond au sens des aiguilles d'une montre, l'autre est le sens contraire. Il existe donc deux types de rotations : celle de sens direct et celle de sens indirect.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Marque trois points alignés A, B et C. Construis leurs images A', B' et C' dans la rotation de sens direct, d'angle 70° , de centre O dans les deux cas suivants :

- O appartient à la droite (AB).
- O n'appartient pas à la droite (AB). Dans chacun des deux cas, le point C' appartient-il à la droite (A'B') ?

Marque deux points O et M.

- Construis l'image M' de M dans la rotation de centre O, d'angle 80° et de sens direct.
- Place un point L sur l'arc $\widehat{MM'}$ puis construis le symétrique N de M par rapport à la droite (OL). Démontre que $ON = OM$.
- Démontre que M' est le symétrique de N par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{NOM}$.
- Démontre que la rotation de centre O, d'angle 80° et de sens direct, équivaut à deux symétries axiales successives d'axes sécants en O.

JE RETIENS

Soit A', B', C' les images respectives des points A, B et C par une rotation de centre O et d'angle α .

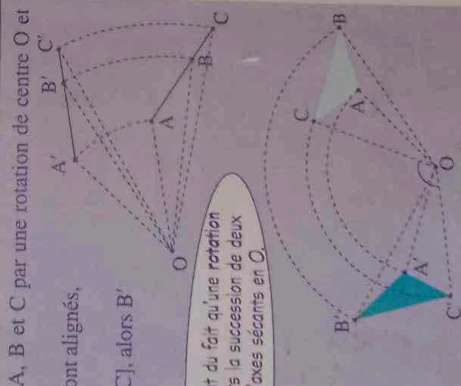
La rotation conserve l'alignement : si A, B et C sont alignés, alors A', B' et C' le sont aussi.

Elle conserve les milieux : si B est le milieu de [AC], alors B' est celui de [A'C'].

Elle conserve les distances :

$$A'B' = AB, A'C' = AC.$$

- Elle transforme une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite et un segment en un segment de même longueur. Elle transforme un cercle en un cercle de même rayon.
- Elle conserve les angles : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- Elle conserve les aires : les aires des triangles A'B'C' et ABC sont égales.



J'APPLIQUE

- Construis l'image A'B'C'D' d'un rectangle ABCD de 5 cm de longueur et de 3 cm de largeur par la rotation de sens direct, de centre A et d'angle 150° .
- Construis un rectangle ABCD de 4 cm de longueur et de 3 cm de largeur. Marque un point O en dehors du rectangle. Construis l'image A'B'C'D' du rectangle ABCD par la rotation de centre O, d'angle 90° et de sens direct.

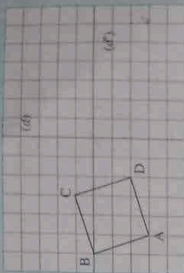
EXERCICES D'APPLICATION

et PROBLÈMES

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

Symétries orthogonales successives

- Reproduis la figure ci-dessous.



Transforme le carré ABCD en faisant agir successivement la symétrie d'axe (d) puis la symétrie d'axe (d'). Fais de même en changeant l'ordre des symétries. Le résultat final est-il le même ? Justifie ta réponse.

- Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AC], J est le milieu de [AB]. Soit (Δ) la perpendiculaire à (BC) qui passe par J et soit (d) la parallèle à (Δ) qui passe par I. Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (d) et le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (Δ). Montre que A''B''C'' est l'image de ABC par une translation. Quel est son vecteur ?

- ABC est un triangle de hauteur [AH]. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. La droite (AH) coupe la droite (IJ) en O. Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (AH), puis le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (IJ). Démontre que A''B''C'' est le symétrique de ABC par rapport à O.

Rotations planes

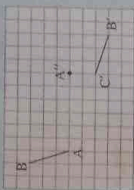
- Construis un rectangle ABCD de centre O. On appelle A'B'C'D' son image par une rotation de centre O, de sens direct et d'angle α . Construis A'B'C' dans chacun des cas suivants :
a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 90^\circ$
d) $\alpha = 120^\circ$ e) $\alpha = 150^\circ$ f) $\alpha = 215^\circ$.

- Construis un rectangle ABCD de centre O. On appelle A'B'C'D' son image par une rotation de centre O, de sens indirect et d'angle α . Construis A'B'C' dans chacun des cas suivants :
a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 90^\circ$
d) $\alpha = 120^\circ$ e) $\alpha = 150^\circ$ f) $\alpha = 215^\circ$.

Symétries centrales successives

- A'B'C' est le symétrique de ABC par rapport à S. A''B''C'' est le symétrique de A'B'C' par rapport à S'.

Reproduis la figure ci-contre et retrouve les éléments qui manquent.

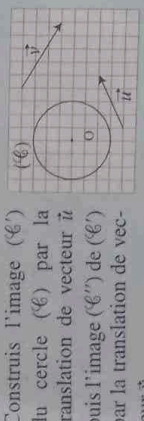


- Construis un triangle équilatéral ABC et marque deux points O et O'. Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport à O puis le symétrique A''B''C'' du triangle A'B'C' par rapport à O'. Compare les vecteurs $\vec{AA''}$, $\vec{BB''}$ et $\vec{CC''}$.

- Marque quatre points M, N, S et S'. Construis les symétriques M' et N' de M et de N par rapport à S puis les symétriques M'' et N'' de M' et de N' par rapport à S'. Démontre que les vecteurs $\vec{MM''}$ et $\vec{NN''}$ sont égaux.

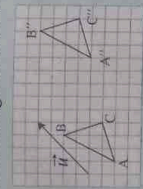
Translations successives

- Reproduis la figure suivante.



Démontre que les cercles (C'') et (C') ont le même rayon.

- Une première translation de vecteur $\vec{v}$ transforme un triangle ABC en A'B'C'. Une seconde translation, de vecteur $\vec{v'}$ cette fois, transforme A'B'C' en A''B''C''. Sur la figure ci-dessous, il manque le triangle A'B'C' et le vecteur $\vec{v'}$.



Reproduis cette figure et complète-la en dessinant le vecteur $\vec{v'}$ et le triangle A'B'C'.

11 De quels angles ont tourné les aiguilles d'une horloge entre midi et 14 h 47 ?

EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

12 ($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O. Soit A un point de ce cercle et soit I le milieu de [OA]. On appelle (d) la médiatrice de [OA] et (Δ) la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en A.

a) Fais une figure. Construis le symétrique ($\mathcal{C}'$) de ($\mathcal{C}$) par rapport à (d) puis le symétrique ($\mathcal{C}''$) de ($\mathcal{C}'$) par rapport à (Δ).

b) Démontre que ($\mathcal{C}''$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\vec{IA}$.

13 Soit un triangle ABC. J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC]. Soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à J, P est le symétrique de N par rapport à K, Q est le symétrique de P par rapport à L et M' est le symétrique de Q par rapport à J. Démontre que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{BA}$.

14 Des symétries centrales successives

Soit ABCD un parallélogramme et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de P par rapport à C et M' est le symétrique de Q par rapport à D.

a) Fais une figure. Qu' observes-tu ?

b) Quelle est la translation qui peut remplacer les deux premières symétries ? Quelle est la translation qui peut remplacer les deux autres ?

c) Montre que ces deux translations effectuées successivement correspondent à une translation unique de vecteur nul. Déduis-en que $M' = M$.

15 Symétries centrales successives

Soit ABCD un quadrilatère quelconque et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de P par rapport à C et M' est le symétrique de Q par rapport à D.

a) Construis le vecteur $\vec{v} = 2(\vec{AB} + \vec{CD})$. Compare ce vecteur au vecteur $\vec{MM'}$. Qu' observes-tu ?

b) Montre que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

16 Translation et symétrie centrale

Soit $\vec{v}$ un vecteur et M et S deux points du plan. On appelle N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$, M' le symétrique de N par rapport à S et A l'antécédent de S par la translation de vecteur $\vec{v}$. Soit O le milieu de [AS].

Démontre que O est le milieu de [MM'].

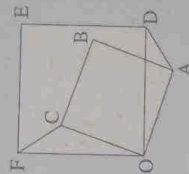
Déduis-en que M' est le symétrique de M par rapport à O.

17 Trois symétries centrales successives

Utilise le résultat de l'exercice 16 pour démontrer que trois symétries centrales successives par rapport à trois points non alignés peuvent être remplacées par une seule symétrie centrale.

18 Rotation

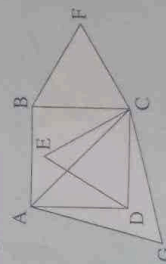
Sur la figure qui suit, OABC et ODEF sont des carrés.



Soit $\mathcal{R}$ la rotation d'un quart de tour, de centre O et de sens indirect. Montre que les images respectives de C et de F par cette rotation sont A et D. Que peux-tu dire des longueurs AD et FC ?

19 Rotation

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré. Les triangles CDE, BCF et ACG sont des triangles équilatéraux.



a) Démontre que G, D et B sont alignés.

b) Quelles sont les images respectives de G et de B par la rotation de centre C qui transforme D en E ? Déduis-en que les points A, E et F sont alignés.

JE ME SOUVIENS

La perspective cavalière est une technique de dessin qui permet de donner une impression de relief et de profondeur. On l'utilise pour représenter des solides car elle conserve certaines propriétés géométriques comme l'alignement ou le parallélisme.

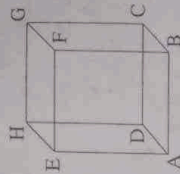
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Dessinée en perspective cavalière, la figure ci-dessous représente un pavé droit tel que $AE = 6$ cm, $AB = 5$ cm et $BC = 4$ cm.

a) Reproduis le dessin sachant que l'angle de fuite est 45° et le coefficient de réduction 0,5.

b) Les diagonales de la face EFGH se coupent en S. Construis S sur ton dessin puis dessine les segments [SA], [SB], [SC] en traits forts et le segment [SD] en tirets.

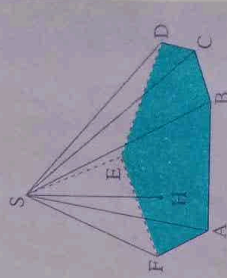
c) Décris le solide SABCD. Quel est le nombre de ses faces ? Quel est le nombre de ses arêtes ? Combien a-t-il de sommets ?



JE RETIENS

Le solide dessiné ci-contre en perspective cavalière est une pyramide qui a 7 sommets, 12 arêtes et 7 faces. Sauf S, tous les autres sommets appartiennent à un même plan. S est le **sommet principal** de la pyramide, le polygone ABCDEF en est la base.

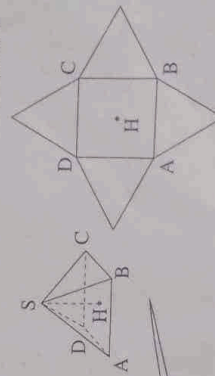
Les triangles SAB, SBC, SCD, SDE, SEF et SFA sont les faces latérales de la pyramide. Les segments [SA], [SB], [SC], [SD], [SE] et [SF] sont les **arêtes latérales** de la pyramide. H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABCDEF). Le segment [SH] est la **hauteur** de la pyramide.



On dit qu'une pyramide est **régulière** lorsque sa base est un polygone régulier et lorsque le projeté orthogonal de son sommet principal coïncide avec le centre de la base.

Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles. Les arêtes latérales d'une pyramide régulière ont toutes la même longueur.

La figure ci-dessous montre, dessinée en perspective cavalière, une pyramide régulière à base carrée SABCD et l'un de ses patrons.



Il s'agit vraiment de la même pyramide. N'oublie pas que la perspective cavalière ne conserve généralement ni les longueurs ni les angles.

J'APPLIQUE

1 SABCD est une pyramide régulière à base carrée de sommet principal S. Les côtés de la base mesurent 3 cm. Les arêtes latérales mesurent 4,5 cm. Dessine deux patrons différents de cette pyramide.

2 Dessine en perspective cavalière une pyramide régulière à base carrée SABCD de sommet principal S, de base ABCD et de hauteur [SH]. On donne $AB = 6$ cm et $SH = 4$ cm.

JE ME SOUVIENS

Le théorème de Pythagore a été étudié en quatrième : si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

SABCD est une pyramide régulière à base carrée, de sommet principal S et de hauteur [SH]. On donne $AB = 4$ cm et $SH = 3$ cm. Calcule la longueur des arêtes latérales de la pyramide sachant que les triangles SHA, SHB, SHC et SHD sont rectangles en H.

SABCD est une pyramide régulière à base carrée, de sommet principal S et de hauteur [SH]. On donne $AB = 3,2$ cm et $SA = 5,6$ cm.

a) Calcule AH.

b) Calcule SH sachant que le triangle SHA est rectangle en H.

SABCD est une pyramide régulière à base carrée, de sommet principal S et de hauteur [SH]. Les côtés de sa base mesurent 4 cm, sa hauteur mesure 5,5 cm.

a) Calcule SB.

b) Soit K le milieu de [BC]. Calcule SK sachant que le triangle SHK est rectangle en H.

c) Démontre que [SK] est une hauteur du triangle SBC.

d) Calcule l'aire de la face SBC.

e) Quelle est la somme des aires de toutes les faces de la pyramide ?

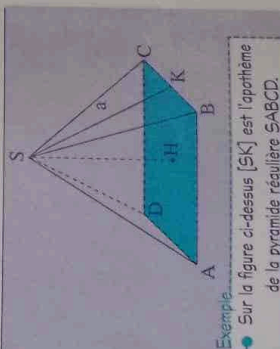
JE RETIENS

Pour effectuer des calculs de longueur et d'aires relativement à une pyramide régulière, on utilise le théorème de Pythagore ou la trigonométrie.

On appelle **aire latérale d'une pyramide** la somme des aires de ses faces latérales. L'aire totale d'une pyramide est la somme des aires de toutes ses faces.

On appelle **apothème d'une pyramide régulière** la hauteur d'une face issue du sommet principal de la pyramide.

L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale au produit du demi-périmètre de la base par la longueur de l'apothème de la pyramide.



Exemple : Sur la figure ci-dessus [SK] est l'apothème de la pyramide régulière SABCD.

Exemple : On désigne, pour la pyramide de la figure ci-dessus, la longueur des arêtes de la base par a , le périmètre de la base par p et la longueur de l'apothème par a . L'aire latérale de cette pyramide est $A = \frac{1}{2} pa = 2ac$.

J'APPLIQUE

1 Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée. Sa hauteur mesure 6 cm, le côté de sa base mesure 4 cm.

a) Dessine la pyramide en perspective cavalière d'angle de fuite 45° et de coefficient de réduction 0,5.

b) Calcule la longueur de ses arêtes latérales.
c) Calcule son aire latérale et son aire totale.

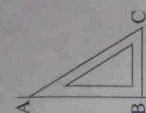
CÔNES DE RÉVOLUTION (1)

JE ME SOUVIENS

La Terre tourne autour du Soleil et chacune de ses révolutions dure une année. Le mot *révolution* évoque ici le fait de *tourner* autour d'un centre ou d'une droite.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Fais tourner le plus rapidement possible autour de la droite (AB) ton équerre en la tenant en A et en B. Quelle est la trajectoire du point C ? Justifie ta réponse. Décris le solide que le mouvement de rotation de l'équerre semble engendrer.



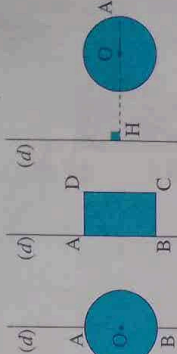
Le verbe *engendrer* signifie *donner naissance*.

Quels solides de révolution peut-on observer en faisant tourner :

a) un disque autour de la droite passant par le diamètre [AB] ?

b) un rectangle ABCD autour de son côté [AB] ?

c) un disque de centre O autour d'une droite (d) située dans le plan du disque et perpendiculaire en H à (OA) ?



JE RETIENS

Les deux figures ci-contre montrent, dessinés en perspective cavalière, deux solides qu'on appelle des cônes. Celui de gauche est un **cône de révolution**, celui de droite n'en est pas un.

Un cône est un cône de révolution s'il possède les deux propriétés suivantes :

- sa base est un disque ;
- la droite qui joint le sommet S du cône au centre H de sa base est perpendiculaire au plan de la base.

On dit que [SH] est la **hauteur du cône**.

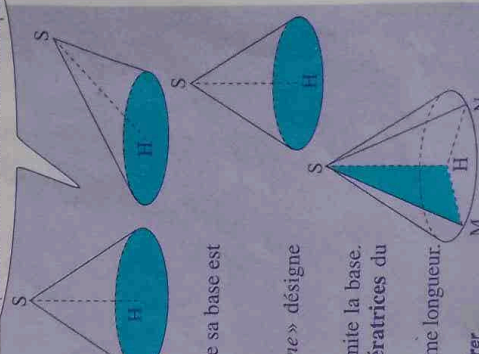
Par abus de langage, l'expression « la hauteur du cône » désigne aussi la longueur SH.

Soit M et N deux points quelconques du cercle qui limite la base. On dit que les segments [SM] et [SN] sont des **génératrices** du cône de révolution.

Toutes les génératrices d'un cône de révolution ont la même longueur.

Le mot *génératrice* est de la même famille que le verbe *engendrer*.

En perspective cavalière, la courbe qui représente le cercle de base est une ellipse.



J'APPLIQUE

1 Dessine un cône en perspective cavalière en prenant un angle de fuite de 45° et un coefficient de réduction de 0,5 et en tenant compte des données suivantes : la hauteur [SH] du cône mesure 4 cm et la base du cône a un diamètre [AB] qui mesure 5 cm. L'ellipse qui représente le cercle de base sera dessinée à main levée, d'une façon approximative.

2 Démontre, à l'aide du théorème de Pythagore, que les génératrices [SM] et [SN] d'un cône de révolution ont la même longueur.

JE ME SOUVIENS

Toutes les génératrices d'un cône de révolution ont la même longueur.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Soit h la hauteur d'un cône de révolution, R le rayon de sa base et g la longueur de ses génératrices. Montre que $g^2 = R^2 + h^2$. Calcule g , à 0,01 mm près, pour $h = 4$ cm et $R = 2,5$ cm.

On considère un secteur circulaire de 135° de rayon g et un disque de rayon R .

- Exprime la longueur de l'arc AA' en fonction de g et le périmètre p du disque en fonction de R .
- Pour que le secteur et le disque soient respectivement la surface latérale et la base d'un cône de révolution, la longueur de l'arc AA' doit être égale au périmètre p du disque. Montre que cette condition équivaut à $\frac{R}{g} = \frac{135}{360}$. Calcule R pour $g = 10$ cm.



Si α est l'aire de la surface latérale, montre que $\alpha l = \frac{1}{2} p g$.

Rappelle-toi que l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle α est égale à $\pi R^2 \frac{\alpha}{360}$.

JE RETIENS

- Soit R le rayon de la base d'un cône de révolution, h la hauteur de ce cône et g la longueur de ses génératrices. On a $g^2 = R^2 + h^2$.

- Une fois développée, la surface latérale de ce cône est un secteur circulaire de rayon g et de mesure $\alpha^\circ = 360 \times \frac{R}{g}$, d'aire $\alpha l = \frac{1}{2} p g$.

Par abus de langage, l'expression mesure en degrés d'un secteur circulaire ASB désigne la mesure en degrés de l'angle au centre ASB.

J'APPLIQUE

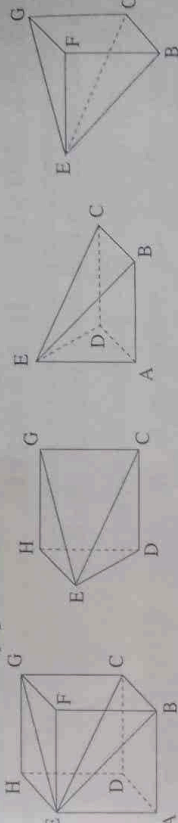
- La base d'un cône de révolution a un diamètre [AB] qui mesure 6 cm. Sa hauteur [SH] mesure 8 cm. Calcule la longueur de ses génératrices ainsi que l'angle ASB. Dessine le développement de sa surface latérale.
- Le diamètre [AB] de la base d'un cône de révolution de sommet S mesure 6 cm. Quelle est la hauteur SH de ce cône si ASB = 90° ?

JE ME SOUVIENS

Soit a la longueur des arêtes d'un cube. Le volume V de ce cube est $V = a^3$.

J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

Les figures ci-dessous représentent un cube ABCDEFGH et trois pyramides à bases carrées qui proviennent du découpage du cube.

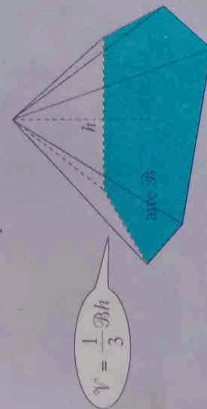


- Reproduis le dessin sur ton cahier en donnant une longueur de 5 cm aux arêtes du cube.
- Montre que l'assemblage des trois pyramides permet de reconstituer un cube identique au cube ABCDEFGH.
- Soit $\mathcal{B}$ l'aire de la base d'une pyramide et h sa hauteur. Exprime son volume en fonction de $\mathcal{B}$ et de h .

JE RETIENS

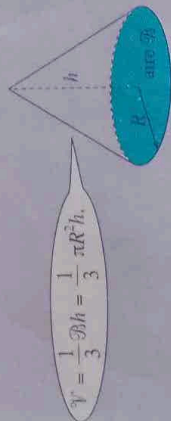
- Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Exemple. Si $\mathcal{B} = 60 \text{ cm}^2$ et si $h = 9 \text{ cm}$, alors $V = \frac{60 \times 9}{3} = 180 \text{ cm}^3$.



Ces formules sont difficiles à démontrer. Elles seront admises.

- Le volume d'un cône de révolution est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

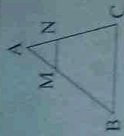


J'APPLIQUE

- Calcule le volume d'une pyramide à base carrée sachant que les côtés de la base mesurent 4,8 cm et que la hauteur de la pyramide est 8,2 cm.
- La base d'un cône de révolution a un rayon de 9 cm. Le cône a 18 cm de hauteur. Calcule son volume.

JE ME SOUVIENS

Si (MN) est parallèle à (BC), alors $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{NC}{MB}$.



J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- SABCD est une pyramide régulière de 4,5 cm de hauteur. Sa base ABCD est un carré de centre H et de 4 cm de côté. Soit K un point de l'arête [SA] tel que $\frac{SK}{SA} = \frac{2}{3}$. Le plan (P) qui passe par K et qui est parallèle au plan (ABCD) coupe les autres arêtes respectivement en L, en M et en N. Il coupe [SH] en H'.
- En admettant que les côtés des quadrilatères ABCD et KLMN sont parallèles deux à deux, démontre que $KL = \frac{2}{3}$ de AB et que $KL = LM = MN = NK$.

Démontre que $KM = \frac{2}{3}$ de AC. Démontre que KLMN est un carré.

- Calcule SH' et démontre que $\frac{SH'}{SH} = \frac{2}{3}$.

Un cône de révolution a 4 cm de hauteur. Sa base a 3 cm de rayon. Soit M et N deux points diamétralement opposés du cercle de base.

Soit M' un point de la génératrice [SM] tel que $\frac{SM'}{SM} = \frac{2}{5}$. Le plan (P) parallèle au plan qui contient la base du cône et qui passe par M' coupe [SH] en H'.

- Démontre que (H'M') est parallèle à (HM) et perpendiculaire à (SH).
- Calcule H'M'. Déduis-en la nature de la section du cône par le plan (P).

Le mot *section* vient du verbe *sectionner*, qui veut dire *couper*.

JE RETIENS

- La section d'une pyramide par un plan parallèle à celui de la base est un polygone de même nature que la base. Ses côtés et ceux de la base sont parallèles deux à deux.
- La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à celui de la base est un disque dont le centre appartient à la hauteur du cône.

J'APPLIQUE

- SABCD est une pyramide à base carrée de 6 cm de hauteur. On a AB = 8 cm. Un plan (P) parallèle au plan (ABCD) coupe sa hauteur [SH] en H' tel que SH' = 4 cm. Fais un dessin en perspective cavalière et calcule les dimensions de la section.
- Un cône de révolution de sommet S a une hauteur de 10 cm et une base circulaire de 6 cm de rayon. Un plan (P) parallèle au plan de sa base coupe sa hauteur [SH] en H' tel que SH' = 7,5 cm. Calcule le diamètre de la section.

JE ME SOUVIENS

Quand on coupe une pyramide ou un cône par un plan parallèle au plan qui contient la base de cette pyramide ou de ce cône, on obtient une pyramide ou un cône de dimensions réduites.

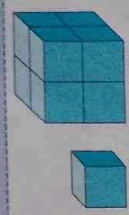
J'OBSERVE ET JE DÉMONTRE

- SABCD et S'A'B'C'D' sont deux pyramides régulières ayant respectivement 10 cm et 5 cm de hauteur. Leurs bases ABCD et A'B'C'D' sont des carrés ayant respectivement 8 cm et 4 cm de côté. Démontre que SA = 2 SA', que l'aire d'une face latérale de SABCD vaut 4 fois celle d'une face latérale de S'A'B'C'D' et que le volume de SABCD vaut 8 fois celui de S'A'B'C'D'.

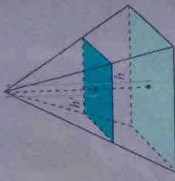
JE RETIENS

- Si on multiplie les dimensions d'un solide par un nombre k, alors on multiplie l'aire de chaque face du solide par k² et on multiplie le volume du solide par k³.

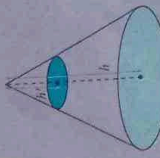
Exemple : Si on double les dimensions d'un cube, alors on multiplie son volume par 8.



- Si on coupe une pyramide de hauteur h par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une pyramide plus petite et un tronc de pyramide. Désignons par h' la hauteur de cette petite pyramide et par k le quotient $\frac{h}{h'}$. Alors :
 - les dimensions de la petite pyramide sont k fois plus petites que les dimensions correspondantes de la grande ;
 - l'aire d'une face de la petite pyramide est k² fois plus petite que celle de la face correspondante de la grande ;
 - le volume de la petite pyramide est k³ fois plus petit que celui de la grande.



- Si on coupe un cône de révolution de hauteur h par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient un cône plus petit et un tronc de cône. Désignons par h' la hauteur de ce petit cône et par k le quotient $\frac{h}{h'}$. Alors :
 - le rayon de la base du petit cône est k fois plus petit que celui de la base du grand ;
 - l'aire de la surface latérale du petit cône est k² fois plus petite que celle du grand ;
 - le volume du petit cône est k³ fois plus petit que celui du grand.



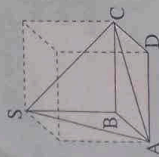
J'APPLIQUE

- SABCD est une pyramide régulière de hauteur 6 cm. Sa base ABCD est un carré de 10 cm de côté. On la coupe par un plan parallèle au plan (ABCD) qui passe par le milieu I de [SA]. Calcule l'aire et le périmètre de la section.
- On coupe un cône de révolution au tiers de sa hauteur par un plan (P) parallèle au plan contenant la base du cône. La hauteur du cône mesure 12 cm, le rayon de la base mesure 4,5 cm. Calcule les volumes des deux solides déterminés par le plan (P).

EXERCICES D'APPLICATION ET PROBLÈMES

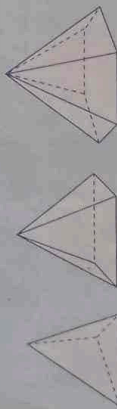
Pyramides : description et vocabulaire

- 1 La pyramide $SABC$ est inscrite dans un cube dont les arêtes mesurent 6 cm.



Décris la pyramide puis dessine un patron de cette pyramide.

- 2 Voici trois pyramides différentes :



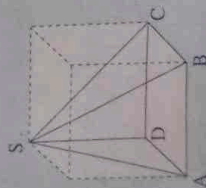
Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de côtés de la base	3	4	6
Nombre A des arêtes	...	...	...
Nombre F des faces	...	...	...
Nombre S des sommets	...	...	...

- 3 $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée. Sa hauteur et les côtés de sa base mesurent 5 cm. Dessine la pyramide en perspective cavalière.

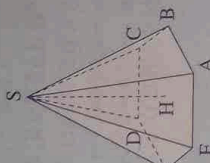
Pyramides : calculs de longueurs

- 4 La figure montre une pyramide $SABCD$ inscrite dans un cube de 6 cm d'arête :



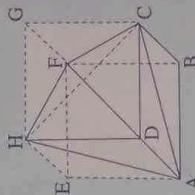
Dessine un patron de la pyramide et calcule les longueurs de ses arêtes.

- 5 $SAB CDEF$ est une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier de 4 cm de côté. Sa hauteur SH mesure 8 cm.



Calcule la longueur de ses arêtes latérales. Calcule son aire totale.

- 6 La pyramide $FACH$ est appelée un tétraèdre régulier. Elle est inscrite dans un cube.



Démontre que ses arêtes ont toutes la même longueur. Calcule cette longueur pour $AB = 6$ cm. Construis un patron.

Cônes de révolution : calculs de longueurs

- 7 On désigne par h , R et g respectivement la hauteur, le rayon et la génératrice d'un cône de révolution. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

h (cm)	24	...	10
R (cm)	9	5	...
g (m)	...	12	15

- 8 Le développement de la surface latérale d'un cône de révolution est un secteur circulaire de 100° et de 9 cm de rayon. Calcule la hauteur de ce cône.

Volume d'une pyramide et d'un cône

- 9 On désigne par a la longueur des côtés de la base d'une pyramide régulière à base carrée, par h

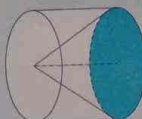
sa hauteur et par V son volume. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

a (cm)	5	4,5	6	...
h (cm)	12	8,5	...	12
V (cm ³)	...	...	540	400

- 10 On désigne par R le rayon de la base d'un cône de révolution, par h sa hauteur et par V son volume. Recopie et complète le tableau suivant en justifiant tes calculs :

R (cm)	5	8	4	...
h (cm)	9	12	...	7,5
V (cm ³)	...	...	800	600

- 11 Un cône de révolution est inscrit dans un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h . Compare le volume du cône à celui du cylindre.



Section d'une pyramide et d'un cône

- 12 On coupe une pyramide régulière $SABCD$ de hauteur $[SH]$ par un plan perpendiculaire en H' à la droite (SH) . Calcule les dimensions de la section dans chacun des cas suivants :

- a) $SH = 8$ cm ; $AB = 4$ cm ; $SH' = 5$ cm.
b) $SH = 12,4$ cm ; $AB = 4,8$ cm ; $SH' = 4$ cm.
c) $SH = 9,8$ cm ; $AB = 3,2$ cm ; $SH' = 8$ cm.

- 13 Un cône de révolution de sommet S , de hauteur $[SH]$ et de rayon R est coupé par un plan perpendiculaire en H' à la droite (SH) . Calcule le rayon R' de la section dans chacun des cas suivants :

- a) $R = 5$ cm ; $SH = 8,5$ cm ; $SH' = 3$ cm.
b) $R = 6,4$ cm ; $SH = 9$ cm ; $SH' = 5$ cm.
c) $R = 6$ cm ; $SH = 7$ cm ; $SH' = 3$ cm.

Agrandissement et réduction

- 14 On coupe un cône de révolution de volume $V = 3\ 200$ cm³ au cinquième de sa hauteur à partir du sommet. Calcule les volumes des deux morceaux obtenus. Quel est le rapport des aires des deux disques ?

- 15 On coupe une pyramide régulière de volume $V = 1\ 200$ cm³ au quart de sa hauteur à partir du sommet. Calcule les volumes des deux morceaux obtenus. Quel est le rapport des aires latérales des deux morceaux ?

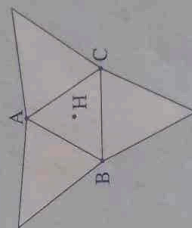
EXERCICES DE RECHERCHE ET PROBLÈMES

- 16 Un plan (P) contient un carré $ABCD$ de centre O . On désigne par a la longueur de ses côtés. Soit (d) la perpendiculaire en O au plan (P) . E et F sont deux points de (d) symétriques par rapport à O tels que $OE = OF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- a) Exprime les longueurs des arêtes latérales des pyramides $EABCD$ et $FABCD$ en fonction de a .

- b) Décris le solide $EAB C D F$ et fais-en un patron en prenant $a = 4$ cm. Exprime son volume en fonction de a .

- 17 La figure ci-dessous montre le patron d'une pyramide régulière qui a pour base le triangle équilatéral ABC .



On donne $AH = 2,5$ cm et $SA = 6,5$ cm. Calcule la hauteur et le volume de cette pyramide.

- 18 La base d'une pyramide est un polygone de n côtés. On désigne respectivement par A , F et S le nombre de ses arêtes, de ses faces et de ses sommets. Calcule le nombre $F + S - A$.

- 19 On découpe un secteur circulaire de 120° dans un disque de 20 cm de rayon et on en fait un cône de révolution. Avec le deuxième secteur, on fait un deuxième cône de révolution. Calcule les dimensions de ces deux cônes ainsi que leurs volumes.

PREMIER SUJET

A. Activités numériques : 3 exercices indépendants I, II et III.

I. On donne l'expression $q = \frac{2\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 3}$. Vérifier en donnant les détails de vos calculs que $q = -7 + 5\sqrt{5}$. Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, en déduire en donnant les détails de vos calculs que $1,045 < q < 1,046$.

II. Monsieur IRS gagne 1000 F de plus par jour que Madame IRS. Ce mois-ci, il a travaillé 22 jours et elle, 20 jours. Ensemble, les deux époux ont perçu 127000 F. Calculer le salaire mensuel de chacun des deux époux.

III. Un chef d'établissement a relevé les années de naissance des élèves d'une classe de troisième et a noté ceci :
1980 1980 1979 1981 1982 1980 1983 1979 1979 1983 1983
1980 1979 1982 1983 1981 1980 1981 1982 1983 1981 1981
1981 1979 1980 1981 1980 1981 1981 1983

I. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (pour le calcul des fréquences, on arrondira à l'unité la plus proche).

Modalités	1979	1980	1981	1982	1983
Effectifs					
Fréquences en %					

2. Représenter le tableau des fréquences en fonction des années de naissance par un diagramme en bâtons. On prendra en ordonnées 1 cm pour 10 % : une année sera représentée par 1 cm, l'origine étant fixée à l'année 1978.

B. Activités géométriques : deux exercices indépendants I et II.

I. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. L'unité de longueur dans le centimètre, on donne $AB = AC = 4$, $BC = 6$. D et E sont des points du plan tel que $BA + BC = BD$; $CE = AB$. a) Réaliser la figure puis démontrer que ABEC est un losange. On note K son centre.

b) Calculer CK en justifiant votre démarche.
II. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J). On donne les droites (d₁) et (d₂) d'équations respectives $y = 2x + 3$ et $y = -0,5x + 3$. a) Tracer ces deux droites puis démontrer qu'elles sont perpendiculaires.
b) Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de (d₁) et (d₂), puis calculer la distance OH.

C. Problème

Tous les calculs devront être justifiés. Rappel : $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. On prendra $\pi = 3,14$.

A et B sont deux points du plan. On considère un demi-cercle (C) de centre O et de diamètre (AB). H est un point de (C) tel que $\widehat{ABH} = 60^\circ$. La droite perpendiculaire en O au support du segment (AB) rencontre le segment [BH] au point T. On donne $OB = 4$ cm.

a) Calculer les mesures des angles $\widehat{HAB}$, $\widehat{BOH}$ et $\widehat{OTB}$.
b) Calculer BH et OT.
c) En faisant tourner le demi-cercle (C) autour de la droite (AB), on obtient une sphère de centre O. Calculer le volume de cette sphère.

SECOND SUJET

Activités numériques : deux exercices indépendants I et II.

Exercice I

On a relevé les tailles en cm des 25 élèves d'une classe de troisième et on a obtenu la série suivante : 165 145 150 150 166 165 160 158 162 165 158 165 162 154 158 160 162 154 165 160 160 158 154 158 160.

I. a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Tailles (en cm)	145	150	154	158	160	162	165	166
Effectifs								
Pourcentages								

b) Déterminer la médiane de la série.
c) Calculer la taille moyenne.
2. a) On répartit les tailles en trois classes selon le tableau suivant. Recopier et compléter ce tableau.

Classes	[145 ; 153]	[153 ; 161]	[161 ; 169]
Centre des classes			
Effectifs			

b) Représenter l'histogramme des effectifs.
c) Déterminer la classe modale.
d) Calculer la taille moyenne.

Exercice II

1. Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = 625 \\ 6x + 13y = 3975 \end{cases}$
2. Tanté Adja dit à sa fille : « Avec 6250 francs CFA, j'achète 10 kg de pommes de terre et 20 kg d'oignons. Après la dévaluation du franc CFA, je dois payer 7950 F pour avoir les mêmes quantités. »
Trouver le prix d'un kg de pommes de terre et celui d'un kg d'oignons avant la dévaluation sachant que ces prix ont été multipliés respectivement par 1,2 et 1,3 après la dévaluation.

Activités géométriques : deux exercices indépendants I et II.

Exercice I

On donne un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = \sqrt{3} - 1$ et $BC = 2\sqrt{2}$.
a) Calculer AB puis en déduire que $AB = \sqrt{3} + 1$.
b) En déduire l'aire du triangle ABC.
c) Calculer $\frac{1}{AC}$ sans radical au dénominateur sachant que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{AC}$ en précisant l'amplitude.

Exercice II

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne A(6; -1), B(2; -2) et C(5; 3).
1. Placer les points A, B et C puis montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux. En déduire la nature du triangle ABC.
2. Calculer les longueurs AB, AC, BC.
3. (C) étant le cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer les coordonnées de son centre I. Calculer son rayon R.
4. Calculer le sinus et la tangente de l'angle A. En déduire la mesure de l'angle ABC.
5. On appelle (Δ) la droite qui est perpendiculaire à la droite (BC) et qui passe par le point B. Déterminer l'équation réduite de (Δ). Que représente (Δ) pour le cercle (C) ?
6. La droite (Δ') qui passe par A et qui est parallèle à la droite (BC) coupe la droite (Δ) en J. Montrer que la droite (IJ) est un axe de symétrie du quadrilatère AIBJ.
7. Montrer que les points A, I, B et J appartiennent à un même cercle (C').

RACINES CARRÉES À 0,0001 PRÈS DES ENTIERS COMPRIS ENTRE 1 ET 200

Nombres	Racines carrées	Nombres	Racines carrées	Nombres	Racines carrées
1	1	51	7,141 4	101	10,049 9
2	1,414 1	52	7,211 1	102	10,099 5
3	1,732 1	53	7,280 1	103	10,148 9
4	2	54	7,348 5	104	10,198
5	2,236 1	55	7,416 2	105	10,247
6	2,449 5	56	7,483 3	106	10,295 6
7	2,645 8	57	7,549 8	107	10,344 1
8	2,828 4	58	7,615 8	108	10,392 3
9	3	59	7,681 1	109	10,440 3
10	3,162 3	60	7,746	110	10,488 1
11	3,316 6	61	7,810 2	111	10,535 7
12	3,464 1	62	7,874	112	10,583
13	3,605 6	63	7,937 3	113	10,630 1
14	3,741 7	64	8	114	10,677 1
15	3,873	65	8,062 3	115	10,723 8
16	4	66	8,124	116	10,770 3
17	4,123 1	67	8,185 4	117	10,816 7
18	4,242 6	68	8,246 2	118	10,862 8
19	4,358 9	69	8,306 6	119	10,908 7
20	4,472 1	70	8,366 6	120	10,954 5
21	4,582 6	71	8,426 1	121	11
22	4,690 4	72	8,485 3	122	11,045 4
23	4,795 8	73	8,544	123	11,090 5
24	4,899	74	8,602 3	124	11,135 5
25	5	75	8,660 3	125	11,180 3
26	5,099	76	8,717 8	126	11,225
27	5,196 2	77	8,775	127	11,269 4
28	5,291 5	78	8,831 8	128	11,313 7
29	5,385 2	79	8,888 2	129	11,357 8
30	5,477 2	80	8,944 3	130	11,401 8
31	5,567 8	81	9	131	11,445 5
32	5,656 9	82	9,055 4	132	11,489 1
33	5,744 6	83	9,110 4	133	11,532 6
34	5,831	84	9,165 2	134	11,575 8
35	5,916 1	85	9,219 5	135	11,619
36	6	86	9,273 6	136	11,661 9
37	6,082 8	87	9,327 4	137	11,704 7
38	6,164 4	88	9,380 8	138	11,747 3
39	6,245	89	9,434	139	11,789 8
40	6,324 6	90	9,486 8	140	11,832 2
41	6,403 1	91	9,539 4	141	11,874 3
42	6,480 7	92	9,591 7	142	11,916 4
43	6,557 4	93	9,643 7	143	11,958 3
44	6,633 2	94	9,695 4	144	12
45	6,708 2	95	9,746 8	145	12,041 6
46	6,782 3	96	9,798	146	12,083
47	6,855 7	97	9,848 9	147	12,124 4
48	6,928 2	98	9,899 5	148	12,165 5
49	7	99	9,949 9	149	12,206 6
50	7,071 1	100	10	150	12,247 4
				200	14,142 1

ANNEXES - INDEX

SINUS, COSINUS ET TANGENTES DES ANGLES AIGUS

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente
0	0	1	0
1	0,017 45	0,999 85	0,017 46
2	0,034 9	0,999 39	0,034 92
3	0,052 34	0,998 63	0,052 41
4	0,069 76	0,997 56	0,069 93
5	0,087 16	0,996 19	0,087 49
6	0,104 53	0,994 52	0,105 1
7	0,121 87	0,992 55	0,122 78
8	0,139 17	0,990 27	0,140 54
9	0,156 43	0,987 69	0,158 38
10	0,173 65	0,984 81	0,176 33
11	0,190 81	0,981 63	0,194 38
12	0,207 91	0,978 15	0,212 56
13	0,224 95	0,974 37	0,230 87
14	0,241 92	0,970 3	0,249 33
15	0,258 82	0,965 93	0,267 95
16	0,275 64	0,961 26	0,286 75
17	0,292 37	0,956 3	0,305 73
18	0,309 02	0,951 06	0,324 92
19	0,325 57	0,945 52	0,344 33
20	0,342 02	0,939 69	0,363 97
21	0,358 37	0,933 58	0,383 86
22	0,374 61	0,927 18	0,404 03
23	0,390 73	0,920 5	0,424 47
24	0,406 74	0,913 55	0,445 23
25	0,422 62	0,906 31	0,466 31
26	0,438 37	0,898 79	0,487 73
27	0,453 99	0,891 01	0,509 53
28	0,469 47	0,882 95	0,531 71
29	0,484 81	0,874 62	0,554 31
30	0,5	0,866 03	0,577 35

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente
31	0,515 04	0,857 17	0,600 86
32	0,529 92	0,848 05	0,624 87
33	0,544 64	0,838 67	0,649 41
34	0,559 19	0,829 04	0,674 51
35	0,573 58	0,819 15	0,700 21
36	0,587 79	0,809 02	0,726 54
37	0,601 82	0,798 64	0,753 55
38	0,615 66	0,788 01	0,781 29
39	0,629 32	0,777 15	0,809 78
40	0,642 79	0,766 04	0,839 1
41	0,656 06	0,754 71	0,869 29
42	0,669 13	0,743 14	0,900 4
43	0,682	0,731 35	0,932 52
44	0,694 66	0,719 34	0,965 69
45	0,707 11	0,707 11	1
46	0,719 34	0,694 66	1,035 53
47	0,731 35	0,682	1,072 37
48	0,743 14	0,669 13	1,110 61
49	0,754 71	0,656 06	1,150 37
50	0,766 04	0,642 79	1,191 75
51	0,777 15	0,629 32	1,234 9
52	0,788 01	0,615 66	1,279 94
53	0,798 64	0,601 82	1,327 04
54	0,809 02	0,587 79	1,376 38
55	0,819 15	0,573 58	1,428 15
56	0,829 04	0,559 19	1,482 56
57	0,838 67	0,544 64	1,539 86
58	0,848 05	0,529 92	1,600 33
59	0,857 17	0,515 04	1,664 28
60	0,866 03	0,5	1,732 05

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente
61	0,874 62	0,484 81	1,804 05
62	0,882 95	0,469 47	1,880 73
63	0,891 01	0,453 99	1,962 61
64	0,898 79	0,438 37	2,050 3
65	0,906 31	0,422 62	2,144 51
66	0,913 55	0,406 74	2,246 04
67	0,920 5	0,390 73	2,355 85
68	0,927 18	0,374 61	2,475 09
69	0,933 58	0,358 37	2,605 09
70	0,939 69	0,342 02	2,747 48
71	0,945 52	0,325 57	2,904 21
72	0,951 06	0,309 02	3,077 68
73	0,956 3	0,292 37	3,270 85
74	0,961 26	0,275 64	3,487 41
75	0,965 93	0,258 82	3,732 05
76	0,970 3	0,241 92	4,010 78
77	0,974 37	0,224 95	4,331 48
78	0,978 15	0,207 91	4,704 63
79	0,981 63	0,190 81	5,144 55
80	0,984 81	0,173 65	5,671 28
81	0,987 69	0,156 43	6,313 75
82	0,990 27	0,139 17	7,115 37
83	0,992 55	0,121 87	8,144 35
84	0,994 52	0,104 53	9,514 36
85	0,996 19	0,087 16	11,430 1
86	0,997 56	0,069 76	14,300 7
87	0,998 63	0,052 34	19,081 1
88	0,999 39	0,034 9	28,636 3
89	0,999 85	0,017 45	57,29
90	1	0	

INDEX

Accroissement de l'application 32
de la variable x 32
Additionner (des polynômes) 5
Affine (application) 31
par morceaux (application) 34
Amplitude d'un intervalle 18
d'une classe 46
Angle au centre 65
inscrit 65, 66
Antécédent 26
Apothème 68
Application (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) 26
Bornes 9, 46
Centre d'une classe 46
Classe 46
Coefficient d'une application linéaire 27
directeur (d'une droite) 87
Combinaison (méthode de) 39
Cône de révolution 96, 97
Conjugée (expression) 15
Constante (application) 30, 33
Coordonnées d'un vecteur 73, 74, 75
Cosinus d'un angle aigu 57
Croissante (application) 30, 33
Décroissante (application) 30, 33
Degré d'un monôme 4
d'un polynôme 4
Distance de 2 points 77

Diviser par une fraction rationnelle 10
Division régulière 50
Effectif 22
Effectifs cumulés décroissants 22
En escalier (fonction) 35
Encadrer l'inverse d'un nombre 21
un produit 21
un quotient 20
une différence 20
une somme 20
Equation 23
d'une droite 79, 82, 83, 84, 86
Exposant 1, 3
Fermé (intervalle) 26
Fonction 35
Fraction rationnelle 7
Fréquence(s) 46
cumulées croissantes 48
cumulées décroissantes 48
Histogramme 47
Homothétiques (triangles) 55
Image d'un nombre 26
Inéquation à deux inconnues 41
à une inconnue 41
Intervalle 18
Irrationnel (nombre) 16
Linéaire (application) 27

Médianes d'une série statistique 49
Membre d'une équation 23, 24
Modale (classe) 49
Monôme 42
Moyenne d'une série statistique 49
Multiplier des fractions rationnelles 10
des polynômes 6
Ordonner un polynôme 4
Ouvert intervalle 18
Périodique (nombre) 16
Polygones réguliers 67, 68, 69
Polynôme 4
Projection 50
Puissance 1, 2, 3
Pyramide 94, 95
Pythagore (théorème de) 61
Q(ensemble $\mathbb{R}$) 16
Qatrième proportionnelle 53
R(ensemble $\mathbb{P}$) 16
Racine carrée 11
Radical 11
Réciproque du théorème de Thalès 56
Réel (nombre) 16
Résolution graphique d'un problème 36, 43
d'un système 37, 45
d'une inéquation 42
Résoudre une équation 23, 24
Rotation plane 92, 93

Scientifique (écriture) 3
Section d'un cône 99
d'une pyramide 99
Sens de variation d'une application 30, 33
Simplifier un radical 15
une fraction rationnelle 9
Sinus d'un angle aigu 57
Somme algébrique de fractions rationnelles 66
de polynômes 5
Soustraire un polynôme 5
Substitution (méthode de) 38
Système d'inéquations 68
de deux équations 37, 38, 39
Tangente d'un angle aigu 59
Taux d'accroissement 32
Thalès (théorème de) 51, 52
Trigonométrie(s) (table) 58
(relations) 63
Tronc de pyramide, de cône 100
Valeur absolue d'un nombre 22
Vecteurs colinéaires 71, 72, 76
égaux 75
orthogonaux 76

Dans la même collection :

Mathématiques 6^e, élève

Mathématiques 5^e, élève

Mathématiques 4^e, élève

Mathématiques 6^e, Guide pédagogique

Mathématiques 5^e, Guide pédagogique

Mathématiques 4^e, Guide pédagogique

Mathématiques 3^e, Guide pédagogique



NATHAN

