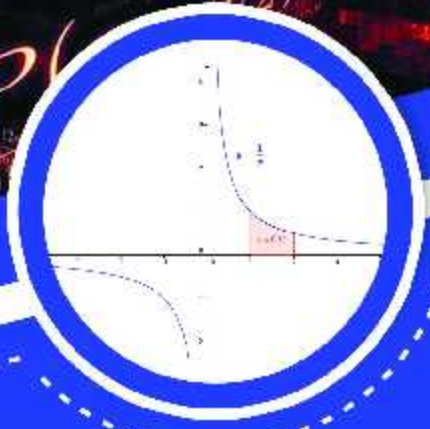
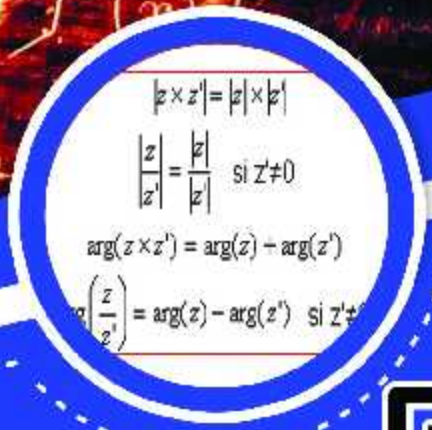
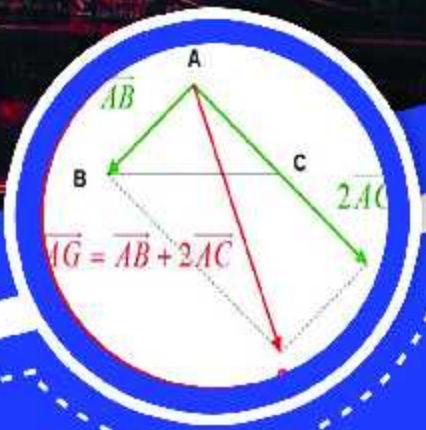
MATHEMATIQUES en 1ere D-TI

100% GRATUIT







EXERCICES

Des exercices de savoir, savoir-faire, et savoir-etre après chaque leçon

COURS

Cours détaillés et illustrés selon l'Aproche Par Compétence (APC)

NOUVEAU PROGRAMME

Cours et exercices selon le nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp Les grandprofs de Maths

CE DOCUMENT EST LIBRE ET GRATUIT! NE PEUT ETRE VENDU!

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est l'œuvre des enseignants du groupe WhatsApp dénommé « Grand profs de maths(GPM) ». Ce groupe a vu le jour le 12-05-2017. Cette collection est la mise en pratique de l'un de ses objectifs majeurs. Rendu à sa deuxième édition, c'est le fruit de près de trois mois de travail organisé par les administrateurs dans des sous-groupes (13 ateliers).

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette collection n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, encore moins le cours de l'enseignant. Il vient juste en appuis à ces documents. Dans le fond et la forme, chaque chapitre de cette collection est conforme au nouveau programme et respecte la structure de l'APC pour les classes de la 6ème en première.

Cette deuxième édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner aux administrateurs qui ont travaillé inlassablement pour mener le projet à bon port. Il s'agit de : *M. Guela Kamdem Pierre* **,** *M. Pouokam Léopold Lucien* **,** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **et le fondateur du groupe** *M. Ntakendo Emmanuel.* **Un coup de chapeau est à donner à certains enseignants qui ont fait de la réussite de ce projet, un objectif à atteindre pendant les vacances : ce sont les chefs d'ateliers. Nous avons** *M. Siyapdje Henri* **(6ème),** *M.Joseph Fogang* **(5ème),** *M.Ngongang Nivel* **(4ème),** *M.Jidas Tchouan* **(3ème),** *M. Simplice Dongmo* **(2ndeA$_4$),** *M. Guela Kamdem Pierre* **(2ndeC),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(1èreA$_4$),** *M. Nguefo Takongmo* **(1èreC),** *M. Jidas Tchouan* **(1èreD-TI),** *M. Bayiha André Ghislain* **(T^{le}A$_4$),** *M.*

Ouafeu Tokam Guy Paulin **(T^{le} C) et** *M. Nganmeni Konguep Hervé Battiston* **(T^{le} D-TI). Nous ne saurons terminer sans féliciter tous les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet et y ont consacré leur précieux temps non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 164 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours réalisés.**

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que des éventuelles coquilles que pourrait contenir chacun des documents de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants voulant intégrer ce groupe WhatsApp ou désirant prendre part à la 3ème édition qui débutera en Mai 2020 sont priés bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre* **(697 473 953 / 678 009 612),** *M. Pouokam Léopold Lucien* **(696 090 236/651 993 749),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(699 494 671) et** *M. Ntakendo Emmanuel (***676 519 464).**

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Projet Grandprofs de math(GPM)

2ème édition

Atelier 1èreD-TI

Table des matières

1. Équations, inéquations, systèmes linéaires **Page 6 - 14**

WAFO WAFO Calvin, **Lycée Technique de GALIM, 693445317**

2. Barycentres et lignes de niveau **Page 15 - 19**

AZEBOP PASCAL, **Lycée Batouri trypao(AP), collège Bary(AP) ,697459481**

3. Généralités sur les fonctions numériques **Page 20 - 33**

Noah Clément **collège ITSE, Collège la grâce de tchetgna, 696767021/651323266**

4. Limites, continuités et dérivabilité **Page 34 – 47**

JIDAS TCHOUAN, **Collège Roger Mfupa, 676054953/691752901 (Chef d'atelier)**

5. Étude de fonctions **Page 48 – 61**

MOUNKPOUOKOUI YOUCHAHOU, **Lycée Bilingue de Foumbot, 695916229/675832897**

6. Suites numériques **Page 62 – 70**

NANA NJONTCHOU SAMBALIS, **LYCÉE BILINGUE DE BATCHAM, 694546080**

7. Géométrie analytique du plan **Page 71 – 76**

Ouafeu tokam Guy Paulin, **CES bilingue d'AWAE, Collège champs du lys,676093969**

8. Trigonométrie **Page 77 - 89**

JOSEPH FOGANG, **Lycée de kékem, 697703423 / 670829037**

9.Dénombrement **Page 88 - 96**

Etienne Njanko, **CES de Ngompem, 694650323**

10. Statistique **Page 97 - 103**

SIYAPDJE HENRI, **LYCÉE BILINGUE DE MBANKOMO, 696956391**

11.Introduction à la théorie des graphes **Page 104- 107**

Mme Kouesseu, **collège évangélique de New-bell**

12. Orthogonalité dans l'espace (uniquement D) **Page 108 - 116**

DJONTU TAJOUO ACHILLE, **Lycée classique de Dschang, 677606423.**

13. Transformation affine (uniquement D). **Page 117 - 130**

Ngayap Siwe Augustin, **Lycée de lam, 673898411**

14. Nombres complexes (Uniquement TI) **Page 131 - 137**

Angandji Roméo, **Lycée bilingue de Lomié, 698302433**

15. Espaces vectoriels et applications linéaires **Page 138- 144**

16. Arithmétique **Page 145 – 151**

Mani Boris, **Lycée bilingue de Buea, 691787525**

Module 21 :

RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 1 ***: POLYNOMES, EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES***

Leçon 1 : **EQUATIONS DU SECOND DEGRE**

Date : **période : 2h**

Motivation

Plusieurs problèmes de la vie peuvent se mettre sous la forme d'équation du second degré à savoir certains problèmes de double augmentation ou double réduction, le problème de calcul de dimension voir encore il arrive parfois de connaitre la surface et le périmètre d'un rectangle et de chercher souvent à trouver la longueur et la largeur rapidement et surement, etc ….Notre leçon d'aujourd'hui nous donner des méthodes rapides et efficaces pour résoudre de tels problèmes

Compétence visée

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une équation du second degré

Les pré requis

1- Donner le degré de chaque polynôme : $2x+3$, $3x^2+2x-1$,$3x^2-2$,x^2+x+1
2- Donner la forme canonique des polynômes de degré 2 ci-dessus

Situation problème

Un groupe d'élèves de la classe de Première est parti à la librairie pour acheter des stylos de couleur pour leur exposé. Ils devraient partager équitablement la facture qui s'élevait à $5000\ fcfa$.Mais deux d'entre eux sont partis sans payer et chacun restant a vu sa part augmenter de $125\ fcfa$. trouver le nombre d'élèves du groupe et le montant que chaque élève restant après le départ des deux camarades devra payer.

Activité

1- On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$
   a- Quelle est la condition pour que P soit un polynôme du second degré
   b- En considérant que $a\neq 0$, donner la forme canonique de P
   c- Si $a=0$ et $b\neq 0$, résous l'équation $P(x)=0$
   d- Si $a\neq 0$, en utilisant la forme canonique et en posant $\Delta= b^2-4ac$, discute sur le nombre de solution de l'équation $P(x)=0$ suivant le signe de Δ
   e- Dans le cas où l'équation admet deux solution
      - Calculer la somme de ses solutions
      - Calculer le produit de ses solutions
      - Développer $a(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$
2- Résoudre les équations suivantes et donner la somme, le produit des racines des solutions, la forme factoriser dans le cas où nous avons deux racines les polynômes

a) $x^2+3x-4=0$
b) $4x^2+4x+1=0$
c) $3x^2+x+1=0$

3- Répondre à la question posée dans la situation problème

Résolution

1- a. condition pour que P soit un polynome du degré 2 : $a \neq 0$

b. Forme canonique de P lorsque $a \neq 0$

$$P(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

c. Supposons $a=0$ et $b\neq 0$ et résolvons l'équation $P(x)=0$

$$P(x)=0 \iff bx+c=0 \iff x=-\frac{c}{b} \quad \text{d'où } S=\left\{-\frac{c}{b}\right\}$$

d. Supposons $a\neq 0$ et résolvons $P(x)=0$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

Discussion

Si $\Delta<0$ alors $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]>0$ d'où $S=\emptyset$

Si $\Delta=0$ On a : $P(x)=0 \Leftrightarrow a\left[(x+\frac{b}{2a})^2\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

$$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Si $\Delta>0$ On a $P(x)=0 \Leftrightarrow a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Calculons la somme de ses racines $S = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$

Calculons le produit $P = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = (-\frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a}$

Développons $a\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = a[x^2 - Sx + P]$

Résumé

1- Une équation du second degré est toute relation mathématique pouvant se ramener sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

2- Pour résoudre une telle équation du second degré, on peut procéder comme suit :
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$
   a) Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet aucune solution réel soit $S = \emptyset$
   b) Si $\Delta = 0$ alors on a une racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
   c) Si $\Delta > 0$ alors on a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ soit $S = \{x_1; x_2\}$

3- Dans le cas où $\Delta > 0$,on désigne par x_1,x_2 les deux racines ; P et S le produit et la somme des racines respectivement
   a) $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ et $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
   b) $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
   c) Connaissant x_1 et x_2 ,une équation du second degré dont ils peuvent vérifier est : $X^2 - SX + P = 0$ ou $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$

4- Remarques

   a) Lorsque $\Delta = 0$ on a $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$
   b) Pour résoudre une équation du second degré, on commence généralement par le calcul du discriminant
   c) Si l'équation est de degré supérieur à deux, on cherche une racine ou une solution puis on fait la division euclidienne ou l'identification

Exercice d'application

1- Résoudre les équations suivantes

$x^2 - 3x - 70 = 0$; $2x^2 + 9x + 4 = 0$; $-2x^2 - 12x - 26 = 0$, $3mx^2 - (4m + 3)x + m + 1 = 0$

2- Déterminer la deuxième solution de chacune des équations
   a- $x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad x_0 = -1$
   b- $4x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0 \qquad x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3- Donner une équation du second degré dont les nombres suivants sont solutions
   a- $x_0 = 2$, $x_1 = 1$
   b- $x_0 = \sqrt{3}$, $x_1 = \frac{1}{2}$

4- Résoudre les systèmes suivants

$\begin{cases} x+y=2\sqrt{3} \\ xy=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ xy=2 \end{cases}$

5- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^4-7x^2+12=0$

6- On considère le polynôme $P(x)=2x^3-x^2+x-2$

a- Calculer $P(1)$ et conclure

b- Résoudre l'équation $P(x)=0$

Leçon 2 : **INEQUATIONS**

Date : période :2h

Motivation

La recherche du profit nous amène souvent à vouloir prévoir ou à prévoir sur certaines de nos mises. Nous voulons parfois trouver entre quelles valeurs nous pouvons souvent faire nos choix pour réaliser un plus de profits ou pour obtenir ce que l'on veut par majoration ou minoration ; par exemple on veut savoir pour quelles valeurs du côtés d'un carré la surface est inférieure a une valeur donnée ou les valeurs possibles d'une inconnue pour obtenu ce qu'on veut. Notre leçon nous permettra de répondre ou de trouver les solutions facilement lorsque nous auront un problème de genre se ramenant à une inéquation du second degré.

Compétence visée

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une inéquation du second degré

Les pré requis

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2+3x-4=0$, $x^2+x+1=0$

Situation problème

M. Paul veut fabriquer un jouet de forme rectangulaire pour son enfant et aimerait que la longueur dépasse la largeur de 3 et que la surface soit plus petit que 2. Aider M. Paul à faire les différents choix de la longueur

Activité

On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c=0$

1- Si $a=0$, donner suivant les valeurs de b les solutions de chacune des inéquations suivantes :

a) $P(x) \geq 0$
b) $P(x) < 0$

2- Si $a \neq 0$
a) Donner la forme canonique de P
b) Si $\Delta = 0$; donner le signe de P en fonction du signe de a
c) Si $\Delta < 0$;donner le signe de P en fonction du signe de a
d) Si $\Delta > 0$; $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en supposant $x_1 < x_2$ donner le signe de P en fonction du signe de a

3- Résoudre les inéquations suivantes
$x^2 - 3x - 70 \geq 0$; $2x^2 + 9x + 4 < 0$; $-2x^2 - 12x - 26 \geq 0$

Résolution

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$

1- Si $a = 0$, donnons suivant les valeurs de b $(b \neq 0)$ la solution de chacune des inéquations suivantes :

$P(x) = bx + c$ $\quad P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{b}$

Tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{c}{b}$	$+\infty$
$bx + c$	$Signe\ de - b$	$signe\ de\ b$	

2- Si $a \neq 0$
a- Donnons la forme canonique de P
$P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$
b- Si $\Delta = 0$; donnons le signe de P en fonction du signe de a
$\Delta = 0 \Leftrightarrow P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	$Signe\ de\ a$	$signe\ de\ a$	

c- Si $\Delta < 0$;donnons le signe de P en fonction du signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$Signe\ de\ a$	

a) Si $\Delta > 0$; $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en supposant $x_1 < x_2$ donnons le signe de P en fonction du signe de a

x	$-\infty$	x_1	x_2
$x-x_1$	$-$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$+$
a	$signe\ de\ a$	$signe\ de\ a$	$signe\ de\ a$
$P(x)$	$signe\ de\ a$	$-signe\ \ de\ a$	$signe\ de\ a$

Résumé

Pour déterminer le signe d'un polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$, on peut proceder comme suit :

a) On calcule le discriminant $\Delta= b^2-4ac$

1- Si $\Delta< 0$ alors on n'a aucune solution réelle et le signe du polunome est celui de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	$Signe\ de\ a$	

2- Si $\Delta= 0$ alors on a deux racine double et le signe du polynôme est toujours celui de a

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	$Signe\ de\ a$	$Signe\ de\ a$	

3- Si $\Delta> 0$ alors on a deux racines distinctes x_1 et x_2 et en supposant $x_1 < x_2$ on a le tableau

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)=ax^2+bx+c$	$signe\ (a)$	$signe(-a)$	$signe\ (a)$	

4- Principe de résolution des équations ou inéquations pouvant se ramener à ceux du second degré

Soit f et g deux polynômes

a- $|f(x)|=|g(x)| \iff (f(x))^2=(g(x))^2$

b- $|f(x)|=g(x) \iff \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ (f(x))^2=(g(x))^2 \end{cases}$

c- $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

d- $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)\geq (g(x))^2 \end{cases}$

e- $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

f- $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}$

g- $f(x) \leq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} ou \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ (f(x))^2 \leq g(x) \end{cases}$

Exercice d'application

1- Résoudre les inéquations suivantes :
$x^2 + 4x - 5 \leq 0$ $\quad -2x^2 - 5x + 3 < 0$ $\quad -2x^2 + 5x - 4 \geq 0$
2- On considère le polynôme $P(x) = 2\sqrt{2}x^3 - (6 - \sqrt{2})x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3$
   a- Calculer $P(-1)$ et conclure
   b- Mettre $P(x)$ sous la forme : $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ ou a, b et c sont à déterminer
   c- Résoudre l'équation $P(x) = 0$
   d- Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$
3- Résoudre les équations et inéquations suivantes
$2x + 3 \leq \sqrt{x^2 + 4x - 5}$, $|-2x^2 - 5x + 3| = |x^2 + 4x - 5|$

Leçon 3 ***systèmes d'équations***

Date : ***periode : 2h***

Motivation

Cette leçon nous donnera une méthode pratique pour la résolution des problèmes ayant deux ou trois inconnus

Compétence visée

Résoudre tout problème pouvant se ramener à un système d'équations à deux ou trois inconnus

Situation problème

Les fidèles d'une localité voudraient terminer leur chapelle. Ils constatent qu'il leur manque des lattes, des tôles et des chevrons. Trois personnes du groupe ont chacune un magasin contenant tous ces matériels. Tous les trois magasins ont la même grille des prix.

Ils achètent dans :
*le premier magasin ; 20 lattes, 15 toles et 5 chevrons pour un montant total de 134500

* le premier magasin ; 10 lattes, 20 toles et 5 chevrons pour un montant total de 143500
* le premier magasin ; 10 lattes, 25 toles et 5 chevrons pour un montant total de 170500

Aider les fidèles à déterminer le prix d'une tôle, d'un chevron et d'une latte

Activité

1- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes
$2x + 3y = 0$, $2x - y = 1$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par une façon au choix le système suivant
$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

3- On considère le système de trois de trois équations a trois inconnues suivant :
$\begin{cases} x + y - 2z = 7 & L_1 \\ 2x - y + z = 0 & L_2 \\ 3x + y + z = 8 & L_3 \end{cases}$

a- Ecrire le système correspondant à $\begin{cases} L_1 & L_1 \\ 2L_1 - L_2 & L_2{}' \\ 3L_1 - L_3 & L_3{}' \end{cases}$ que remarquez-vous?

b- Ecrire le système correspondant à $\begin{cases} L_1 & L_1 \\ L_2{}' & L_2{}' \\ 2L_2{}' - 3L_3{}' & L_4{}' \end{cases}$ puis déduire la valeur de z

c- Déduire la valeur de y de $L_2{}'$ puis celle de x de L_1

4- En utilisant la méthode similaire à celle de la question précédente c'est à dire en nommant chaque équation et en éliminant progressivement les variables, résoudre le système suivant
$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$

Résumé

1- Une équation de la forme $ax + by = c$ admet une infinité de solution dans $\mathbb{R}^2$.Pour résoudre une telle équation, on exprime une inconnue en fonction de l'autre.
Si $a \neq 0$ on a : $x = \frac{c-by}{a}$ et $S = \left\{\left(\frac{c-by}{a}, y\right)\ y \in \mathbb{R}\right\}$
Si $b \neq 0$ on a $y = \frac{c-ax}{a}$ et $S = \left\{\left(x, \frac{c-ax}{a}\right); x \in \mathbb{R}\right\}$

2- Pour résoudre un système de la forme (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$; on peut utiliser plusieurs méthodes à savoir : la substitution, la combinaison, la comparaison et la méthode de Cramer ou des déterminants qu'on va développer ci-dessous
Pour résoudre (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ par la methode de Cramer, on peut proposer comme suit :

a) Calcul du déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

b) Le déterminant lié à la première variable x $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$

c) Le déterminant lié à la deuxième variable y $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Discussion

Si $D = D_x = D_y = 0$, le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ se reduit à une équation à deux inconnues et admet une infinité de solution dans $\mathbb{R}^2$comme vu ci-dessus au premier point du resumé

Si $D = 0$ et ($D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$) alors (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ n'admet aucune solution d'où $S = \{\quad\}$

Si $D \neq 0$ alors (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admet un unique couple solution :

$x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$ et $S = \left\{\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)\right\}$

3- Pour résoudre un système de trois équations a trois inconnues, on peut procéder par substitution ou par la méthode du pivot. Nous insisterons ici sur la méthode du pivot de Gauss qui consiste à éliminer progressivement les variables afin d'avoir la forme triangulaire comme vu dans l'activité

Un tel système peut soit voir une infinité de solution, soit un unique couple solution soit aucune solution

S'agissant d'un système de deux équations à trois inconnues de la forme :

$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, on fixe une variable comme un paramètre et on obtient un système de deux équation a deux inconnues.

Par exemple en posant $z = \alpha$, on obtient $\begin{cases} ax + by = -c\alpha - d \\ a'x + b'y = -c'\alpha - d' \end{cases}$ que nous avons appris a resoudre au deuxieme point du resumé

Exercice d'application

1- Résoudre et discuter éventuellement suivant les valeurs du paramètre m les systèmes suivant dans $\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 7 \\ 2x^2 + y^2 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} mx\sqrt{2} - 3y\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -x\sqrt{3} + 2my\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 900 \\ 6x + 12y + 7z = 2000 \\ x + 14y + z = 600 \end{cases}$, $\begin{cases} -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

Cours élaboré par ***WAFO WAFO CALVIN***

MODULE 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ELEMENTAIRE DU PLAN

CHAPITRE 2 : ***BARYCENTRES ET LIGNES DE NIVEAU***

Leçon 1 : Barycentre de deux points et plus de deux points pondérés.

Nombres d'heures prévues : 2 heures

Compétences Visées :

- Reconnaitre et construire le barycentre de 2, 3, …. Pondérés par des relations vectorielles et ses propriétés.
- Utilisation des propriétés vectorielles construire un barycentre de manière performante.

Motivation : De nombreux problèmes dans la vie font appel aux barycentres, d'où la nécessité maitrisés la manipulation des outils barycentriques. Nous notons ainsi la recherche du centre de gravité d'un solide.

Pré-requis : Définir le centre de gravité.

Situation Problème : Votre grande mère possède trois sacs dont un sac d'arachide de 9kg , un sac de pistache de 7 kg et un paquet du poisson fumé de 4 kg .Pour éviter les souris elle vous demande d'accrocher les trois sacs au sommet d'une plaque triangulaire par l'entreprise d'une corde , cette plaque sera accrocher au grenier par un support. Qu'elle sera le point où il faudra placer ce support pour que cette plaque soit en équilibre ?

Activité d'apprentissage :

Soient A ,B et C trois points distincts du plan. Soit G un point du plan et a , b et c des réels tels que : $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

1-a)Montrer que $(a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.

b)G existe-t-il pour $a+b+c=0$?

2)On suppose $a+b+c \neq 0$.

a)Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b)Si $c=0$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

1-Définition et notation

Soient $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$; n points du plan et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$; n nombres réels tous non nuls et G un point quelconque du plan. On appelle barycentre des points $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ affecté des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ l'unique G vérifiant : $\alpha_1\overrightarrow{A_1G} + \alpha_2\overrightarrow{A_2G} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_nG} = \vec{0}$ avec $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n \neq 0$.

Exemple :

-Le milieu d'un segment est un barycentre car I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.on note I=bar $\{(A,1);(B,1)\}$, on lit I est le barycentre des points A et B affecté des coefficients 1, 1.

-Le centre de gravité G d'un triangle quelconque ABC est un barycentre car : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.Lorsque les points sont affectés des même coefficient on dit que ce point est ***isobarycentre***.

2-Ecriture vectorielle d'un barycentre.

Soit G=bar $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ avec $a+b+c \neq 0$.

$$a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{AG} + b\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) + c\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Si $\boldsymbol{c=0}$ ***alors*** $\boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}}$ ou G=bar $\{(A,a);(B,b)\}$; on dit que G est le barycentre des A et B affecté des coefficients a et b .

Si $a+b+c=0$ on dira que l'expression $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG}$ est indépendante du point M.

Exemple d'application N°1:

1-A et B sont deux points du plan tel que : AB=6cm.Construis les I, J et F tel que : I=bar $\{(A,1);(B,3)\}$

I=bar $\{(A,4);(B,-1)\}$ et $-\overrightarrow{AF}+4\overrightarrow{BF}=\vec{0}$.

2-Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3cm. On considère le point G tel que :

$3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

a)Montrer que le point G est le barycentre des points A , B et C affectés des coefficient à déterminer.

b) Construire le point G.

3)Proprieté et contruction d'un barycentre

P_1) *Homogénéité*

Le barycentre de deux (ou plus) points pondérés est inchangé lorsqu'on multipie tous les coefficients par un même nombre réel non nul. On a $G=\{(A,a);(B,b);(C,c\}=bar\{(A,ka);(B,kb);(C,kc\}$.

P_2) *Barycentre Partiel*

Soit G=bar $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ avec $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$.Si $H=bar\{(A,a);(B,b)\}$ alors G=bar $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}=bar\{(H,a+b);(C,c)\}$.H est appelé barycentre partielle. On peut donc remplacer deux points pondérés d'un système par leur barycentre (dit ''partielle'') affecté de la somme de leurs coefficients.

Exemple d'application N°2:

ABC est un trianble quelconque tel que $AC=4\ cm$,$BC=6\ cm$ et $AB=5\ cm$.Les point I,J et K sont tel que $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et I=bar $\{(B,1);(C,2)\}$.

1-Construire le triangle ABC ainsi que les points I, J et K.

2-a)Ecrire J comme barycentre des points A et C affecté des coefficients à déterminés.

b) Ecrire k comme barycentre des points A et B affecté des coefficients à déterminés.

3)Soit le point D tel que $D=bar\{(A,2);(B,3);(C,6)\}$

a)Ecrire D comme barycentre de K et C affecté des coefficients à déterminer.(ou K est le barycentre partielle).

b) Construire le point D.

Exemple d'application N°3:

ABC est un trianble quelconque.Déterminer et construire le point G tel :

G= bar $\{(A,-2)(B,-1);(C,1)\}$

Leçon 2 : Utilisation des Barycentres

1-Alignement des points

Nombres d'heures prévues : 40 minutes

Compétences Visées :

- Utiliser les propriétés barycentriques pour démontrer l'alignement des points.

Motivation : En géométrie on utilise les barycentres pour repérer des points par rapport à d'autre points ;

Pré-requis :Les points H,G et E sont tels que $\overrightarrow{EH}=\frac{-5}{2}\overrightarrow{EG}$.

a)Exprimer H comme barycentre des points E et G, puis construire le point H.

b) Que peut-on dire des points H,G et E.

Activité d'apprentissage :

1)ABC est un triangle, I milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[IC]$ et K un point tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

a)Recopie et complète par les nombre qui convient :

a)$K=bar\{(A,..);(C,..)\}$; b) $J=bar\{(I,..);(C,..)\}$ et $I=bar\{(A,..);(B,..)\}$

b)En utilisant la règle des barycentres partiels, vérifier que $J = bar\{(K,3);(B,1)\}$,Que peut-on dire des points J, K et B ?

Résumé

Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un des points s'écrit comme barycentre des deux autres points.

Exemple d'application N°4: (Référence :1d Page 113 Excellence Pc)

ABC est un triangle.

1) Construire les point L, M et N tels que $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{8}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

2) Exprimer B comme barycentre des point A et M d'une part ,C comme barycentre des points A et L d'autre part.

3) Exprimer N comme barycentre des point M et L, puis en déduire que les point L, M et N sont alignés.

Exemple d'application N°5:*(A faire à la maison)* ***CIAM Pc P 16***

ABD est un triangle et M le milieu du segment $[AD]$.

1)Placer les points I et C tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DI}$.

2)Démontrer que les point s B, C, et M sont alignés.

2-Point de concourt des droites

Pour montrer que deux (ou plus de deux) droites sont concourantes ,il suffit de montrer que qu'il existe un point appartenant à toutes ces droites.

Exemple d'application N°6:*(I à faire en classe et II à faire la maison)*

I-ABC est un triangle équilatéral de coté 4 cm.Soient P, Q et R des points du plan tels que : $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.On pose G= bar $\{(A,1)(B,2);(C,1)\}$

1)Faire la figure.

2)Démontrer que les droites (AR) , (BP) et (CQ) sont concourantes.

II-ABC est un triangle quelconque, G le milieu de $[AB]$, E et F deux points définis par : $\overrightarrow{EB} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

1-Exprimer E et F comme barycentres des systèmes de points pondérés à préciser. 1pt

2-Monter que les droites (AE), (BF) et (CG) passent par un point commun qu'on précisera. 1,5pt

3-Soit H le barycentre de $\{(B,3);(C,-1)\}$; Montrer que H , F et G sont alignés. 1pt

Leçon 3 : Lignes de Niveau

Nombres d'heures prévues : 4 heures

Compétences Visées :

- **Réduire l'expression vectorielle $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$**
- **Déterminer, caractériser et construire l'ensemble des points M du plan tels que :**

$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\| = k$, $MA^2 + MB^2 = k$, $MA^2 - MB^2 = k$, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

Motivation : En géométrie on utilise les barycentres pour repérer des points par rapport à d'autres points ; en statistique pour repérer la moyenne des points pondérer …

Pré-requis : Soit A un point du plan. Construit l'ensemble des points M du plan tel que MA=3cm.

Situation Problème : Une ONG veut construire un forage qui doit être utilisé par les habitants de deux quartiers distant d'un kilomètre. Où va-t-on placé le forage pour quel soit à la même distance de chacun des deux quartiers ?

1) Réduction d'un vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ et ligne de niveau $\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\| = k$.

a) Réduction d'un vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

-Si la somme des coefficients de pondération est non nul $(a+b+c \neq 0)$ la réduction du vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ s'effectue en introduisant le point G tel que : G=bar $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$. On obtient :$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

-Si $a+b+c=0$ alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.

b) Ligne de niveau $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right\| = k$

En utilisant la réduction de sommes vectorielles au paragraphe précédent, on peut facilement en déduire la nature de certains lieux géométriques.

On a : $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}\right\| = k \Longrightarrow \left\|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots \ldots . + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right\| = k$

$\Longrightarrow \left\|\alpha_1\overrightarrow{MG} + \alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MG} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots \ldots . + \alpha_n\overrightarrow{MG} + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right\| = k$

$\Longrightarrow \left\|(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n)\overrightarrow{MG}\right\| = k$ (avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n \neq 0$)

$\Longrightarrow MG = \frac{k}{|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n|}$

- Si k=0 alors M=G
- Si $k < 0$ alors l'ensemble solution est le vide
- Si $k > 0$ alors l'ensemble des points cherchés est le cercle de centre G et de rayon $\frac{k}{|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots . + \alpha_n|}$.

Exemple d'application N°7 *(Probatoire F_1 2018)*

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4cm.

1- Construire le barycentre I des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$ puis le barycentre J des points pondérés $(A,3)$ et $(C,1)$.

2- Soit M un point du plan .Construire l'ensemble des point du plan tel que :

a)(Γ_1): $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 4$; b) (Γ_2): $\left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$; c)(Γ_3): $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$

2) Ligne de niveau du type $MA^2 + MB^2 = k$ et $MA^2 - MB^2 = k$.

Activité d'apprentissage :

On considère le segment $[AB]$ de longueur 4 cm ;I son milieu.

1-a)Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI^2.

b) Déterminer l'ensemble des positions du point M puis representer si possible lorsque :

a) $MA^2 + MB^2 = 8$ b) $MA^2 + MB^2 = -9$ c) $MA^2 + MB^2 = 0$

Résumé

Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment$[AB]$.

- En introduisant le point I dans l'expression $MA^2 + MB^2$, on obtient : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k$.Donc la ligne de niveau $MA^2 + MB^2 = k$ est soit l'ensemble vide (si $k < 0$) , soit réduit au point I ou soit un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$.
- L'ensemble des points M tel que $MA^2 - MB^2 = k$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) au point H tel que $\overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$.

Exemple d'application N°8

I-Probatoire C 2019

Soient A et B deux points du plan tel que AB=5cm. On désigne par I le milieu de $[AB]$.

a)Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 25$.

b) Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = 0$.

c) Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = -20$.

II-Probatoire C 2005

ABC est un triangle rectangle en C tel que BC=2 et AC =3.I est le barycentre du système $\{(A,2)(B,5);(C,-3)\}$ et j le point du plan tel que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

1) Montrer que le point J est barycentre des points B et C affectés des coefficients que l'on précisera.

2) Montrer que les points A,I et J sont alignés.

3)a)Placer les points I et J.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $AM^2 + JM^2 = 35$.

c)Tracer (C).

3) Ligne de niveau du type $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

Activité d'apprentissage :

1-Utiliser la relation de Chasles pour établir que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

2-Déterminer l'ensemble des positions du point M lorsque :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 21$, b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, c) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -5$

Résumé

Pour déterminer la ligne de niveau k de l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ on tranforme l'écriture en introduisant le point I milieu du segment $[AB]$ on obtient alors :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$.Posons $\beta = k + \frac{AB^2}{4}$.

- Si $\beta < 0$ alors la ligne de niveau k est l'ensemble vide.
- Si $\beta = 0$ alors la ligne de niveau k est le point I.
- Si $\beta > 0$ alors la ligne de niveau k estnle cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\beta}$.

Exemple d'application N°9

A et B étant deux point du plan tel que AB= 4 cm.Déterminer et construire dans chacun des cas l'ensemble des points M du plan tel que :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -12$ *b)* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ *c)* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 5$

4) Ligne de niveau du type $\frac{MA}{MB} = k$

Activité d'apprentissage :

1)En introduisant le point G dans l'expression : $MA^2 - k^2MB^2 = 0$, Montrer *MG=kGB*.

2) En utilise l'expression : $MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$.Introduire les points I et J tel que : I= bar $\{(A,1)(B,k)\}$ et J= bar $\{(A,1)(B,-k)\}$ et montre que : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.

Résumé

Ligne de niveau du type $\frac{MA}{MB} = k$

- Si $k < 0$ alors la ligne de niveau k est l'ensemble vide.
- Si $k = 0$ alors la ligne de niveau est le point A.
- Si $k = 1$ alors la ligne de niveau k est la médiatrice du segment$[AB]$.
- Si $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ alors on a :
  - ✓ Première méthode

$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$ .Soit G= bar $\{(A,1)(B,-k^2)\}$

En introduisant le point G dans l'expression : $MA^2 - k^2MB^2 = 0$, on obtient : *MG=kGB*. Ainsi l'ensemble des points cherchés est le cercle de centre G et rayon *kGB.*

  - ✓ Deuxième méthode

On utilise l'expression : $MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$.Introduire les points I et J tel que : I= bar $\{(A,1)(B,k)\}$ et J= bar $\{(A,1)(B,-k)\}$ on obtient : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$.

Conclusion : La ligne de niveau (E_k) est le cercle de diamètre $[IJ]$ avec I et J tel que : I= bar $\{(A,1)(B,k)\}$ et J= bar $\{(A,1)(B,-k)\}$.

Exemple d'application N°10

A et B étant deux point du plan tel que AB= 6 cm.Déterminer et construire dans chacun des cas l'ensemble des points M du plan tel que :

a)$\frac{MA}{MB} = -12$ *b)* $\frac{MA}{2MB} = \frac{1}{2}$ *c)* $\frac{MA}{MB} = 2$

MODULE 21 RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L ENSEMBLES DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 3 GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

LECON1 APPLICATIONS

COMPETENCES EXIGEES Résolution des équations

MOTIVATION Déployer un raisonnement mathématiques pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux applications

LES PRE REQUIS

- Définir une fonction
- Donner la condition d'existe d'une expression littérale
- Faire la différence entre une fonction et un nombre

SITUATION PROBLEME

Dans un pays ,les maires des villes A ,B et C aimeraient délivrer les actes de mariage de la manière suivante :

- Dans la ville A ,tous les hommes n'ont droit qu'à la monogamie ou le célibat
- Dans la ville B ,les hommes ne peuvent signer que la polygamie
- Dans la ville C ,la monogamie s'impose à tous les hommes

Aidez les à établir une correspondance entre l'ensemble des femmes et l'ensemble des hommes de chaque ville sachant que ne peuvent se marier que les personnes issues d'une meme ville .

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **une fonction**

$x \longrightarrow 3x + 2$

1) $\forall x, y \epsilon \mathbb{R}, suppose\ f(x) = f(y)\ puis\ montre\ que\ x = y$

2) $soit\ y \in \mathbb{R} Résoudre\ l'équation\ f(x) = y$

RESUME

1) APPROCHE

Nous avons vu en classe de seconde,qu'une fonction f de A→B(A et B non vides) ,est une correspondance de A→B qui à chaque élément de A associe 1 ou 0 élément de B.

A est appelé ensemble de départ et B ensemble d'arrivé .Les éléments de A sont les antécédents tandis que ceux de B sont les images . L'ensemble de définition d'une fonction f définit de A→B noté Df est constitué des éléments de A qui ont une image dans B

2) Définition et exemple

Ayant définit plus haut ce que c'est qu'une fonction,en revanche une application f : A→B(A et B non vides) est une correspondance qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B .

Une application est aussi une fonction donc le Df est égale à son ensemble de départ .

Exemple : vérifier si les s'il s'agit d'une application ou d'une fonction.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{4x-2}$ $x \to x^2+1$

Le domaine de définition de f est ; f existe si et seulement si $x \neq \frac{1}{2}$ d'où $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}$ donc f n'est pas une application. Le domaine de g est $D_g = \mathbb{R}$ donc g est une application.

Remarque

Toute fonction n'est pas une application mais toute application est une fonction.

I)Applications injectives , suIrjectives et bijectives

A)applications injectives

A et B sont ensembles non vides. L'application est injective si et seulement deux éléments distincts de A ont des images distincts par f. f est injective si et seulement si $\forall$ a, b ϵ A si a≠b alors f(a)≠f(b). f est injective si et seulement si $\forall$ a, b ϵ A tel que f(a)=f(b) on forcement a=b. f n'est pas injective si $\exists\ a; b \in$ A a ≠ b et f(a)=f(b)

Exemple f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \to x^2$ On a 2∈ $\mathbb{R}$, -2∈ $\mathbb{R}$, 2≠-2 mais f(2)=f(-2) donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

1) Résumé

Une application de A↦B est injective si l'une des assertions suivantes est vraie.

- Tout élément de B admet au plus un antécédent par f.
- La courbe de f admet au plus un seul point commun avec toute parallèle à l'axe des abscisses.
- $\forall$ a,b ∈A si f(a)=f(b) ⇔ a=b

2) Exercices parmi les applications suivantes ,lesquelles sont injectives ?

f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \to x^2+1$

f : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ x↦ $2x^2$ -1

f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ x⟶ x^3

f : $\mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ x⟶ $\frac{2}{x-1}$

B) Applications surjective

1)Définition

A et B sont deux ensembles non vides ; f est une application de A→B. f est dite surjective si et seulement si tout élément de B admet au moins un antécédent dans A par f.

- f est surjective si et seulement si $\forall$ y ϵ B, ∃x∈A tel que f(x)=y
- f est surjective si et seulement si la courbe (C_f) rencontre toute parallèle à l'axe des abscisses en au moins un point.

2)Exemple

soit l'application f : $\mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{2}{x-2}$ f est-elle surjective ?

Solution soit yϵ $\mathbb{R}$, cherchons x ϵ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que f(x)=y $\Longrightarrow \frac{2}{x-2}$=y

$\Longrightarrow$ x= $\frac{2+2y}{y}$

x n'est pas définie pour y=0 donc f n'est pas surjective de$\mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$; f serait surjective si x existe c'est-à-dire y≠0, $x \neq 2 \Longrightarrow \frac{2+2y}{y} \neq 2$

$\Longrightarrow$ 2≠0 ce qui est vraie donc f est surjective de$\mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$.

3) Exercices d'applications

Dire si les applications suivantes sont surjectives au cas où ce serais faux, déterminer le plus grand ensemble pour lequel il aurait surjection

f :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$; g : [-2 ; 2]$\longrightarrow \mathbb{R}$; t :$\mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$; h :] 4, +∞[$\longrightarrow \mathbb{R}$; v : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

x$\mapsto x^2$ x$\longmapsto \sqrt{4-x^2}$ x$\longmapsto \frac{x+1}{x+2}$ x$\longmapsto x^2$-2x x x$\mapsto x^3$

C)Applications bijectives

1) Définition soient A et B deux ensembles non vides. f est dit bijective de A$\longrightarrow$I Si tout élément de B admet un et un seul antécédent par f.une application bijective est une application qui est à la fois injective et surjective. f A$\longrightarrow$B est une application. f est bijective si et seulement si ∀yϵB, ∃! $x\epsilon$ A tel que f(x)=y.

2) Exemple

Soit f :$\mathbb{R} \longrightarrow [-1; +\infty[$

x$\longmapsto x^2$-1

injection

Soit -1$\epsilon\mathbb{R}$, 1 $\epsilon\mathbb{R}$ -1≠ 1 mais f (-1)=f(1). Donc f n'est pas injective par conséquent f n'est pas bijective.

Exercices d'applications

Dire si les applications suivantes sont bijectives ou non

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g :]-\infty; 0] \longrightarrow [0; +\infty[$ $l : [-2; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

x$\longmapsto x^2$ x $\longmapsto x^2$+2 x$\longmapsto \sqrt{4-x^2}$ x$\longmapsto \frac{x\mp 1}{x}$

Bijection réciproque

Soit f une application de A$\longrightarrow B$ qui à x associe y alors il existe une application f^{-1} défini de B$\longrightarrow A$ qui à tous élément de B associe son antécédent par f dans A .l'application f^{-1} est appelé bijection réciproque.

Soit f : A$\longrightarrow B$ alors f^{-1}: B$\longrightarrow A$

$x \longmapsto y$ $y \longmapsto x$

Si f est bijective alors soit aϵA et bϵB $f(a) = b \Longrightarrow f^{-1}(b) = a$ si f^{-1} est la bijection réciproque de$f$.

Dans un repère orthonormé (o,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) la courbe (c_f) de f et (c_f^{-1}) de f^{-1} sont

symétrique par rapport à la première bissectrice (c'est la droite d'équation y=x)

Exemple soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto x^2$

1) Montrer que f est bijective.
2) Tracer (c_f) sur $[0; +\infty[$ *et déduire* (c_f^{-1}).

III)compositions d' applications

Soient f : A⟶B et g : B⟶C deux applications. On appelle composé de l'application $f \longrightarrow g$ l'application notée gof(g rond f) défini par

$$gof : A \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto g[f(x)]$$

En effet gof est l'application f suivie de g et $g[f(x)]$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \epsilon D_f \\ f(x) \epsilon D_g \end{cases}$

Exemple : on donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x-1}{2x+3}$ $\qquad x \longmapsto \sqrt{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de $g, fog \; et \; gof$.
2) Donner l'expression explicite de $fog(x) \; et \; gof(x)$ en fonction de x.

Remarque en générale $fog \neq gof$ et $fold = f$ et $Idof = f$

Bijection réciproque de la composée

Soit f : A⟶B et g : B⟶C deux applications. Soit aϵA et bϵC tel que $gof(a) = b$
Si fog est bijective alors $gof(a) = b \Longrightarrow g^{-1}ogof(a) = g^{-1}(b)$
$\Longrightarrow f(a) = g^{-1}$(b)
$\Longrightarrow f^{-1}of(a) = f^{-1}g^{-1}o$(b)
$\Longrightarrow \quad a = f^{-1}g^{-1}o$(b)

Retenons : si gof est bijective alors la bijection réciproque de gof est $f^1 o g^{-1}$

Exercice d'application

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ $\qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$

1) Montrer que f et g sont bijectives.
2) Déterminer D_{fog} et exprimer $fog(x)$ en fonction de x
3) Justifier de fog est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution de la situation probleme

Soit M l'ensemble des femmes d'une meme ville et N l'ensemble des hommes d'une meme ville f une correspondance de M vers N ,alors

- **Dans la villeA la correspondance suggerée est une application injective**
- **Dans la ville B la correspondance suggerée est une application surjective**
- **Dans la ville C la correspondance suggerée est une application BÏjective**

LECONS2

IMAGES-ANTECEDENTS-LECTURE GRAPHIQUE –PARITE ET ELEMENTS DE SYMETRIE

COMPETENCES EXIGEES Calculer l'image d'un point ou d'une variable par une fonction

MOTIVATION Déployer un raisonnement mathématiques pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux fonctions numériques

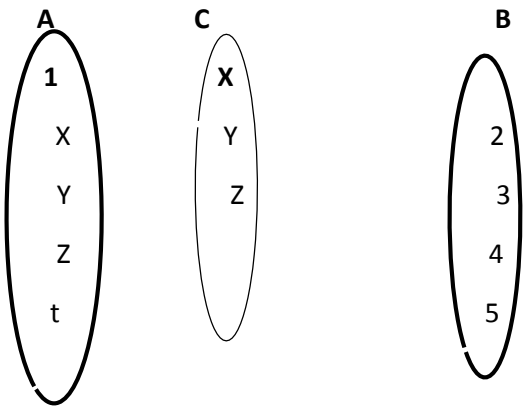
LES PRE REQUIS

- Définir une fonction numérique
- Donner la condition d'existe d'une expression littérale
- Faire la différence entre une fonction numérique et un nombre

SITUATION PROBLEME

Dans une ville, la population en age de se marier est constituée de 750hommes et de 300 femmes. Sachant que le maire de cette ville ne délivre que les actes issus des mariages monogamiques, quelle correspondance peut on établir entre l'ensemble des hommes et l'ensemble des femmes de cette ville ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE **Soit f une correspondanece de Avers B**



a) A chaque élément de A ,associe un et un seul élément de B que constates tu ?
b) A chaque élément de C,associe un et un seul élément de B
c) Considérons les fonctions $h(x) = x^2, j(x) = x^3, f(x) = x^2 - 6x + 5, g(x) = \frac{2x}{x-1}$
d) Calcul f(x) et f(-x) puis compare les
e) Calcul j(x) et j(-x) puis compare les
f) Calcul f(3-x) et f(3+x) et compare les
g) Calcul g(1-x) ;g(1+x); g(1-x) +g(1+x) puit compare g(1-x) +g(1+x) et 2× 2

RESUME

Soit une fonction f définie de E vers F, on appelle domaine de définition ou ensemble de définition que l'on note D_f le sous ensemble de E constitué des éléments qui ont une image par f; autrement dit l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction f a un sens.

Toute fonction polynome est définie sur$\mathbb{R}$,toute fontion rationnelle existe si et seulement si son dénominateur $\neq 0$,toute fonction racine carrée existe si et seulement si l' expression se trouvant sous le radicale est≥ 0

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies de IR vers IR :

$f(x)=x^2-3x+7$; $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$; $h(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$; $k(x)=\dfrac{x^2+3x}{2+x^2}$; $m(x)=\sqrt{3-6x}$

Remarque :

Généralement, l'ensemble de définition des fonctions numériques se donnent sous forme d'intervalles de IR

I-Notion élémentaires sur les fonctions

Une fonction numérique est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à chaque éléments de $\mathbb{R}$ associe 0 ou un élément de $\mathbb{R}$

On note $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x)$

" f est la fonction défini de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe f(x) ". Soit $x, y\in\mathbb{R}$ tels que $y=f(x)$ on dit que y est l'image de x par f et x est l'antécédent de y par f.

A et B sont deux ensembles non vides. f. est une fonction de A→B.

La fonction f est une application si et seulement si son domaine de définition D_f est égal à l'ensemble de départ.

1) COURBE REPRESENTATIVE D UNE FONCTION

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition Df .On appelle courbe représentative de f ou représentation graphique de f l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ $tels\ que\ x\in Df. On\ note\ (cf)$.

$M(x,y)\in(cf)\Leftrightarrow y=f(x)\ et\ x\in Df$

2) IMAGE DIRECTE IMAGE RECIPROQUE D UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION

Activité

Soit les ensembles suivants : E= {-3 ;-2 ;-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3}

F= {-2 ;-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9} et A= {0 ; 1 ; 4 ; 9}. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f: x\longmapsto x^2$

a- Déterminer l'ensemble des images des éléments de E par f.

b- Déterminer les ensembles des antécédents par f de chaque élément de A, puis de F.

Definition

Soit f une fonction de domaine de définition E, a est un réel qui appartient à E.

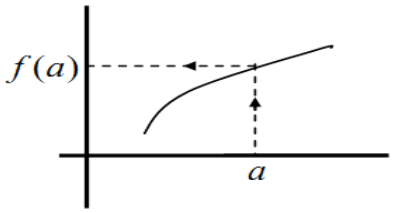
Si $f(a)=b$ alors b est l'image de a par f et a est l'antécédent de b par f.

Propriétés

P1 : L'image d'un réel est unique lorsqu'elle existe.

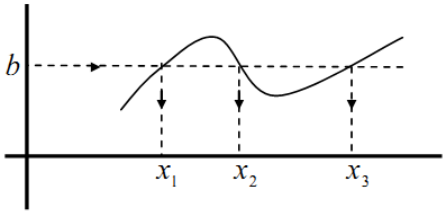
P2 : Un réel peut avoir plusieurs antécédents par une fonction.

P3 : détermination graphique d'une image



$f(a)$ est l'image de a

P4 : détermination graphique des antécédents



x_1 , x_2 et x_3 sont les antécédents de b

Exemple1 :

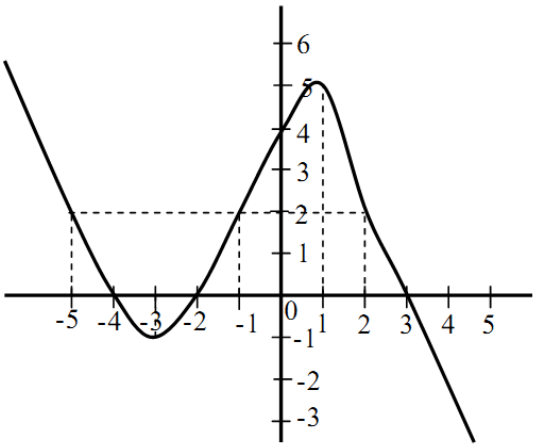
On donne la fonction polynôme f définie de IR vers IR par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$

1- Déterminer les images par f de : -1 et $\sqrt{2}$

2- Déterminer les antécédents par f de 6

Exemple 2 :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR



1- Déterminer le domaine de f

2- Déterminer $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$

3-a) Déterminer les antécédents par f de :
0 ; 2

b) Résoudre graphiquement :
$f(x) = 0$; $f(x) = 2$; $f(x) \geq 0$
$f(x) < 2$; $0 \leq f(x) \leq 2$

4- Discuter suivant les valeurs du paramètre de m les solutions de l'équation $f(x) = m$

3) Restrction et prolongement d'une fonction

Soit $f: E \longrightarrow F$ une fonction où E et F sont deux ensembles non vides. Soit A une partie de E

On appelle restriction à A de la fonction f ; la fonction g définie de A vers F par $\forall x \epsilon A, g(x) = f(x)$ on note $g = f_{/A} \ll g\ est\ la\ restriction\ de\ f$ à $A \gg$

Exemple $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |x|$

Sur $\mathbb{R}_-$=]-∞; 0] $x \epsilon \mathbb{R}; x \leq 0 \Longrightarrow f(x) = |x| = -x$

Sur $\mathbb{R}_+$= [0 ; +∞[$x \epsilon \mathbb{R}; x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = |x| = x$

Exercice

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |2x - 1| + |x - 3|$

1) Ecrire $f(x)$ sans symbole de valeur absolue
2) Déterminer la restriction de f à chacun des intervalles suivantes

]-∞; $\frac{1}{2}$[;] $\frac{1}{2}$; 3[;] 3 ; + ∞[

NB f est le prolongement de la fonction g

II-Opérations sur les fonctions-comparaisons de fonctions

II.1- Opération sur les fonctions

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions numériques d'ensemble de définition respectif D_f et D_g on appelle :

- Somme de $f\ et\ g$ la fonction notée $f + g$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- *le* produit de $f\ et\ g$ la fonction notée $f.g$ définie par $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- *quotient* de $f\ et\ g$ la fonction notée $\frac{f}{g}$ défini par $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, avec\ g(x) \neq 0$

Remarque

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$; $D_{f.g} = D_f \cap D_g$;

$x \epsilon D(\frac{f}{g}) \Leftrightarrow x \epsilon D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

a- Fonction inverse d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f

On appelle **fonction inverse** de$f$, la fonction noté $\frac{1}{f}$ définie par $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$x\ \epsilon D(\frac{1}{f}) \Leftrightarrow x \epsilon D_f et\ f(x) \neq 0$

b- Fonction puissance

Soit f une fonction numérique $n \epsilon \mathbb{N}^*\ f^n = f \times f \times \ldots \ldots \times f$ n fois et $D(_{f^n}) = D_f$

II.2- Composition de fonctions

Cette partie est faite sur les applications plu haut.

II.3- Comparaison de fonctions

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions numériques défini sur un ensemble E. on dit que

- f est supérieure à g sur E si $\forall x \epsilon E; f(x) \geq g(x)$. on note $f \geq g$
- f est inférieure à g sur E si $\forall x \epsilon E; f(x) \leq g(x)$. on note $f \leq g$
- f est égale à $g$sur E si $\forall x \epsilon E$ $f(x) = g(x)$. on note $f = g$

Position des courbes de f et g

Si $f \leq g$ sur E, alors (C_f) est en dessous de (C_g) sur E.

Si $f \geq g$ sur E, alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur E

Si $f = g$ sur E, $(C_f) et\ (C_g)$ coïncident sur E.

Remarques

1- Pour étudier la position relative de $(C_f) et\ (C_g)$ il suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$

2- Les points d'intersections sous les courbes $(C_f) et\ (C_g)$ sont les points des points d'intersections dont les abscisses sont solution de l'équation

$$f(x) = g(x)$$

III) Eléments de symétrie d'une courbe périodicité d'une fonction

Soit f une fonction, D_f son domaine de définition on dit que :

i) f est paire si $\forall x \epsilon D_f - x \epsilon D_f\ on\ a\ f(-x) = f(x)$

ii) f est impaire si $\forall x \epsilon D_f - x \epsilon D_f\ on\ a\ f(-x) = -f(x)$

Exemple

1- $f(x) = x^2\ ; D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \epsilon \mathbb{R}; f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ f\ est\ paire$

2- $g(x) = x^3\ ; D_g = \mathbb{R}$

Soit $x \epsilon \mathbb{R}; g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x) donc\ g\ est\ une\ fonction\ impaire$

3- $h(x) = x^2 - x\ \ D_h = \mathbb{R}$

Soit $x \epsilon \mathbb{R}\ h(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x\ ;\ h(-x) \neq h(x)$

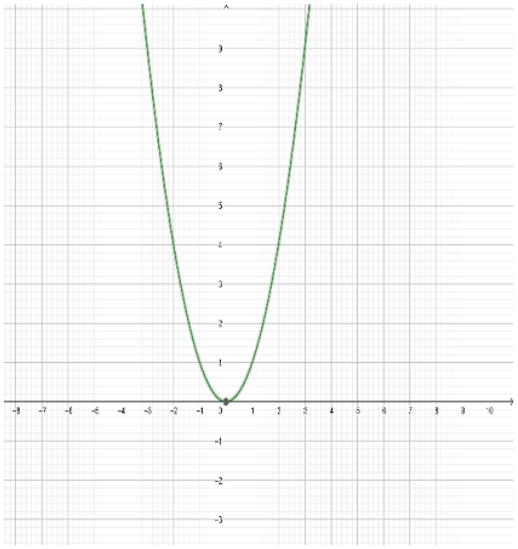
$-h(x) = -(x^2 - x) = -x^2 + x\ ; h(-x) \neq -h(x)$ donc h n'est ni pair ni impair

Remarque

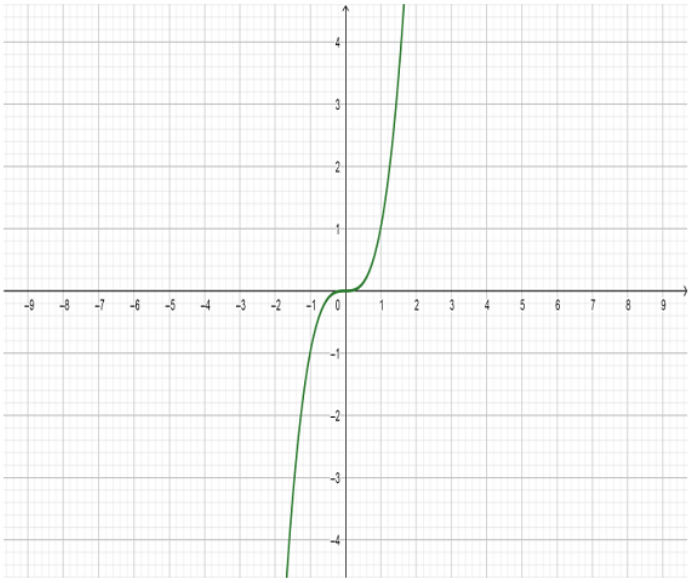
La courbe représentative de toute fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de toute fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

f Pair



f impair



2)Périodicité d'une fonction

soit f une fonction, d'ensemble de définition D_f. Soit T un nombre réel strictement positif.

On dit que f est périodique de période T si $\forall x \epsilon D_f$; $x + T \epsilon D_f, on\ a\ f(s+T) = f(x)$

Exemple les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de périodes 2π

Remarque si f est périodique de période T, alors $\forall n \epsilon \mathbb{Z}, nT$ est aussi une période de$f$.

3) Eléments de symétries d'une courbe

a- centre de symétrie

Soit f une fonction, (C_f) sa courbe représentative. On dit que le point $\mathrm{I(a,b)}$ est centre de symétrie pour (C_f) si

$\forall\ x \epsilon D_f; a - x \epsilon D_f, a + x \epsilon D_f; f(a+x) + f(a-x) = 2b$

$\forall\ x \epsilon D_f; x \epsilon D_f, 2a - x \epsilon D_f; f(2a-x) + f(x) = 2b$

b- Axe de symétrie

La droite (D) d'équation $x = 0\ est\ axe\ ce\ symétrie\ pour\ (C_f)$ si

$\forall\ x \epsilon D_f; a - x \epsilon D_f, a + x \epsilon D_f; f(a+x) = f(a-x)$

$\forall\ x \epsilon D_f; x \epsilon D_f, 2a - x \epsilon D_f; f(2a-x) = f(x)$

Remarque

Toute fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Toute fonction impaire admet l'origine comme centre de symétrie.

Exercice étudier la parité des fonctions suivantes

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $g(x) = x^2 + x$; $h(x) = \sqrt{4-x^2}$; $N(x) = \frac{x}{1+|x|}$; $M(x) = \frac{-3x^2+1}{\sqrt{x}}$

LECONS 3

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS ASSOCIES A UNE FONCTION

COMPETENCES EXIGEES Trouver le symétrique d'un point par rapport à une droite ou un point

MOTIVATION Déployer un raisonnement mathématiques pour résoudre des problèmes relatifs à des situations vie faisant appel aux fonctions associées

LES PRE REQUIS

Placer dans un repère orthonormé (O,I,J) les points de coordonnés

$$\boldsymbol{A(2,5); B(2,-5); C(-2,5); D(-2,-5)}$$

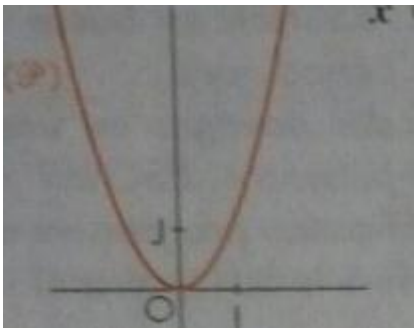
SITUATION PROBLEME

Margo une jeune élève de la classe de troisième se rend au musée pendant les vacances pour faire des recherches par rapport à une leçon qu'elle a aimé pendant le cour d'histoire de mr Onana .le musée étant construit entièrement en verre jusqu'au sol, une fois à l'intérieur, Margo voit son reflet au sol,au dessus ,sur les cotés ainsi que dans les différents angles . Comment expliquer à la jeune fille le phénomène auquel elle fait face ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de courbe représentative (cf) et (cf') la courbe image

$$x \longrightarrow x^2$$



1. Trace en noir le symétrique de (cf) par rapport à(OI) : si (x,y) ∈ $(cf) alors (x,-y)$ ∈ (**cf'**)
2. Trace en vert le symétrique de (cf) par rapport à (OJ) : si (x,y) ∈ $(cf) alors (-x,y)$ ∈ (**cf'**)
3. Trace en jaune le symétrique de (cf) par rapport à O si (x,y) ∈ $(cf) alors (-x,-y)$ ∈ (**cf'**)

RESUME

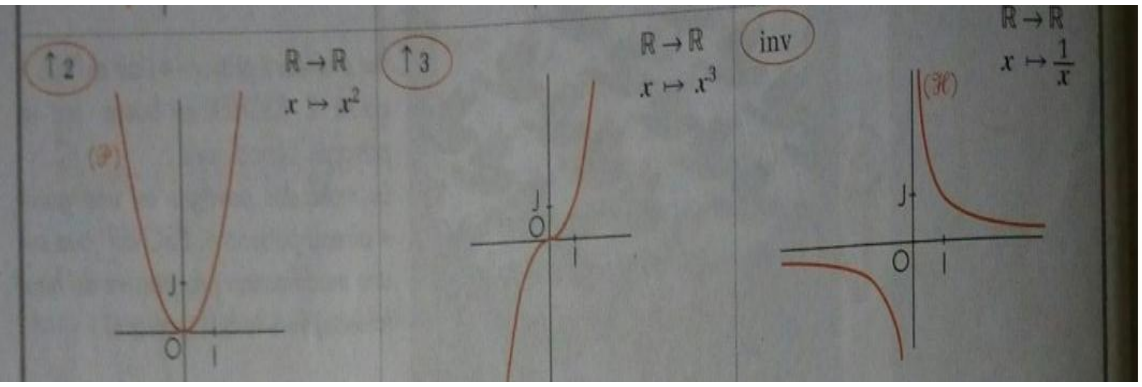
Objectifs pédagogiques opérationnelles :

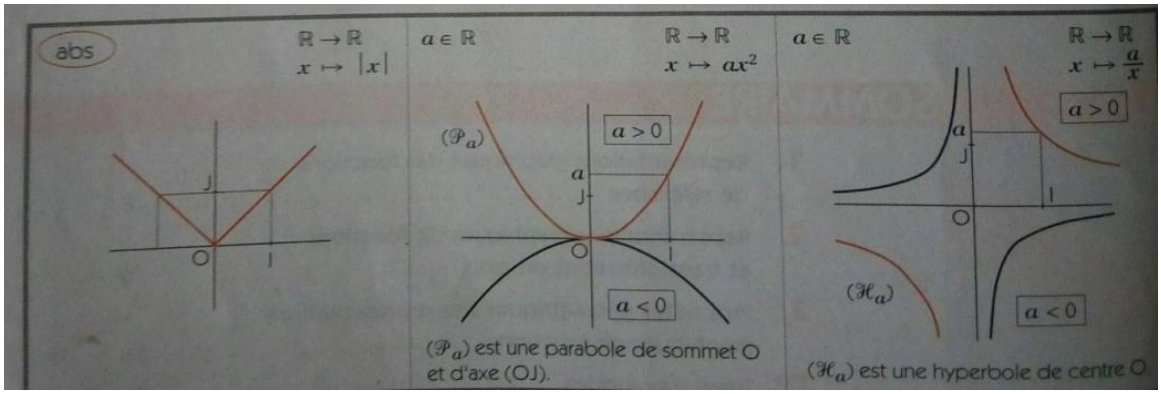
A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

Construire les fonctions : $x \to -f(x)$; $x \to f(-x)$; $x \to -f(-x)$; $x \to |f(x)|$; $x \to f(|x|)$

$x \to f(x-\alpha)+\beta$ à partir de la courbe de la fonction f

I- FONCTIONS DE REFERENCE



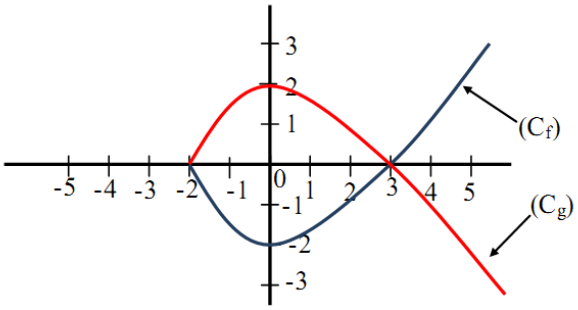


II- REPRESENTATIONS DES FONCTIONS ASSOCIEES

II-1- Courbe de la fonction $x \to -f(x)$

Soit f et g deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)

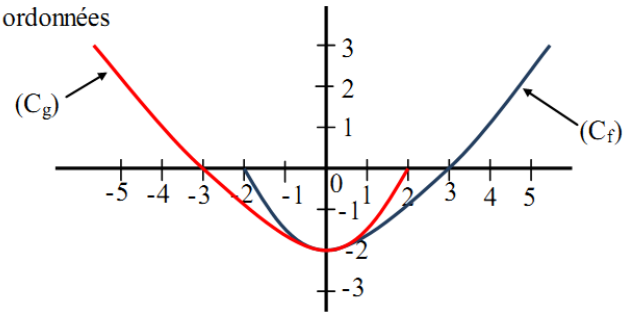
Si $g(x) = -f(x)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses



II-2- Courbe de la fonction $x \to f(-x)$

Soit f et g deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)

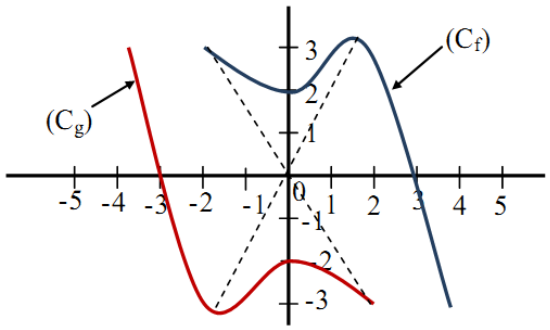
Si $g(x) = -f(-x)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées



II-3- Courbe de la fonction $x \to -f(-x)$

Soit f et g deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)

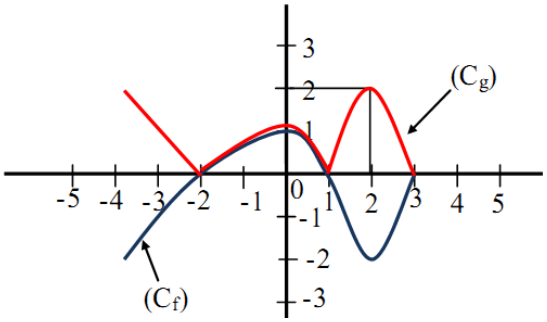
Si $g(x)=-f(-x)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie centrale de centre l'origine O du repère.



II-4- Courbe de la fonction $x \to |f(x)|$

Soit f et g deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)

Si $g(x)=|f(x)|$, pour construire (C_g) à partir de (C_f), on conserve la partie de la courbe de (C_f) se trouvant au-dessus de l'axe des abscisses puis on ramène par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses celle se trouvant en dessous de cet axe.



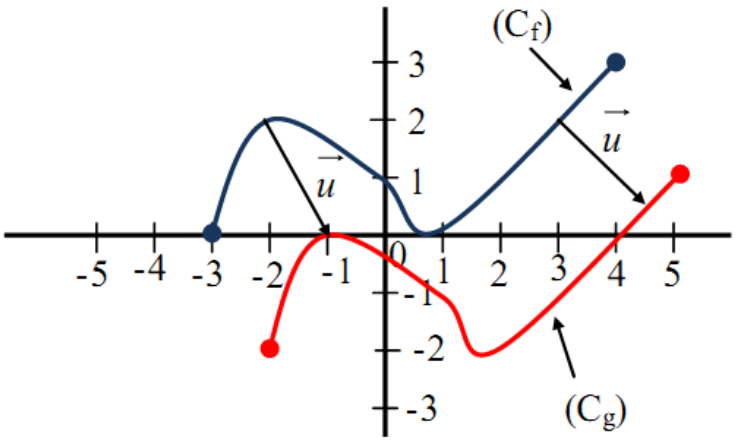
II-5- Courbe de la fonction $x \to f(x-\alpha)+\beta$

Soit f et g deux fonctions de courbes respectives (C_f) et (C_g)

Si $g(x)=f(x-\alpha)+\beta$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$ ou $\vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$

Exemple : Soit (C_f) en bleu la courbe d'une fonction f, construire (C_g) la courbe de la fonction g définie par $g(x)=f(x-1)-2$

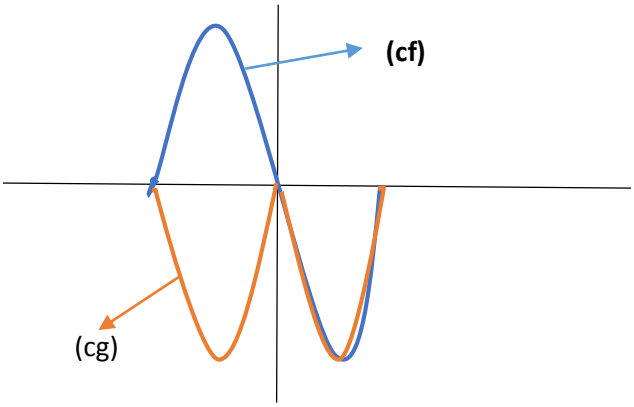
(C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u}(1;-2)$



II -6) Courbe de la fonction $x \to f(|x|)$

Soit f et g deux fonctions de courbe représentative (cf) et (cg)

Si g(x)= $f(|x|)$,alors (cg) est la réunion de la partie de (cf) se trouvant à droite de l'axe des ordonnés et de son symétrique par rapport à cet axe



Exemple d'application:

On donne les fonctions f et g définies de IR vers IR par :

$f(x)=\dfrac{-1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

1- Déterminer deux nombres réels a et b tel que $\forall x \in IR-\{1\}$, $g(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$

2- a) Construire l'hyperbole (C_f) de la fonction f

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$

c) En déduire le programme de construction de la courbe (C_g) de la fonction g à partir de (C_f)

d) Construire alors (C_g) dans le même repère que (C_f).

3- Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est centre de symétrie à (C_g).

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE: LIMITES ; CONTINUITES ET DERIVABILITES

LECON 1 : LIMITES

Objectifs pédagogiques :

- Calculer la limite d'une fonction au voisinage de l'infinie et d'un point.

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres ….

Pré-requis :

On donne $f(x) = x + 2.$ Calculer $f(1{,}99)$

Situation problème :

Les scientifiques ont montré que l'une des conséquences du réchauffement climatique est la fonte des glaciers. Les mathématiciens ont modélisé par f : t $\longrightarrow \frac{1}{t+1}$, la quantité de glaciers en fonction du temps (ou l'unité du temps est le siècle). Monsieur Simo se demande quelle quantité de glaciers restera t-il lorsqu'on sera proche de 2 siècles et si à cette allure, les glaciers ne disparaitront pas.

Aider monsieur Simo à trouver la solution à sa question.

Activité d'apprentissage :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

1-a) Complète le tableau suivant :

x	1,9	1,95	1,99	1,999	1,9999
$x+1$					
$f(x)$					

b) Lorsque x est proche de 2, $f(x)$ est proche de ?

2-a) Complète le tableau suivant :

x	1000	5000	10 000	100 000	1 000 000
$x+1$					
$f(x)$					

b) Lorsque x est très grand, $f(x)$ est proche de ?

Résumé :

I- Limite d'une fonction en un point .

Soit f une fonction numérique et x_0 un nombre réel. Si f admet une limite en x_0 *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

RQ : Si la limite d'une fonction en un point x_0 existe alors cette limite est unique.

Exp : on donne $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *et* $g(x) = x^3 + 1$. Calculer la limite de f en 2 et celle de g en -1.

II- Limite des fonctions à l' infini

a) Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur R.

- Si f(x) est aussi grand dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. on écrit : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si f(x) est aussi grand dès que x est assez petit, on dit que f a pour limite $+\infty\ en -\infty. on\ ecrit: \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme$[b;+\infty[\ (respectivement\ ]-\infty;b]\ )\ avec\ b \in R.$

- Si la distance $|f(x)-l|$ est très petite dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite $l\ en +\infty. on\ ecrit: \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l.$
- Si la distance $|f(x)-l|\ est\ très\ petite\ dès\ que\ x\ est\ assez\ petit, on\ dit$ que f a pour limite l en $-\infty$. on ecrit $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l.$

Exp : On donne $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}\ et\ g(x)=3x^2+2x-1. Calculer\ la\ limite\ de$ $f(x)\ et\ g(x)\ en +\infty\ et\ en -\infty.$

b) Limites en l'infini des fonctions de référence

Fonctions	Limites en $+\infty$	Limites en $-\infty$
$f(x)=a, a\in R$	a	a
$f(x)=x$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)=ax$	$\begin{cases}+\infty\ si\ a>0\\ -\infty\ si\ a<0\end{cases}$	$\begin{cases}-\infty\ si\ a>0\\ +\infty\ si\ a<0\end{cases}$
$f(x)=x^n, (n\in R^+)$	$+\infty$	$\begin{cases}-\infty\ si\ n\ est\ impair\\ +\infty\ si\ n\ est\ pair\end{cases}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	0	0
$f(x)=\frac{1}{x^{n-1}}\ (n\in R^*)$	0	0
$f(x)=\sqrt{x}$	$+\infty$	N'existe pas

c) Limite à gauche- limite à droite

On dit qu'une fonction f admet une limite à gauche (respectivement à droite) en a lorsque la restriction de f à l'intervalle $[b,a[\ (respectivement\ ]a;b])$ admet une limite en a (cette limite pouvant être réelle, $+\infty\ ou\ -\infty$). On écrit : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ $pour\ la\ limite$ à $gauche\ en\ a\ et\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ pour la limite à droite en a.

Exp : Soit f la fonction définie par :$f(x)=\begin{cases}2x+1\ si\ x\leq -1\\ x^2-1\ si\ x>-1\end{cases}$. Déterminer la limite à gauche et à droite de $f\ en\ -1\ puis\ conclure$.

III- Opérations sur les limites.

- Limite de la somme de deux fonctions

Lim f	k	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Lim g	K'	K'	K'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Lim f+g	K+k'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

- Limite du produit de deux fonctions

Lim f	k	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Lim g	K'	K'(k'$\neq 0$)	K'(k'$\neq 0$)	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Lim f.g	k.k'	$\begin{cases}+\infty; k'>0\\ -\infty; k'<0\end{cases}$	$\begin{cases}-\infty; k'>0\\ +\infty; k'<0\end{cases}$	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- Limite du quotient de deux fonctions

Lim f	k	k	k	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞
Lim g	K'	$+\infty$	$-\infty$	K'>0	K'<0	K'<0	K'>0	0	∞
Lim f/g	$\frac{k}{k'}$	0	o	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I

Remarques :

$La\ limite\ en\ l'infini\ d'une\ fonction\ polynôme\ est\ la\ limite\ en\ l'infini\ de\ son\ treme$ de plus haut degré. Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)=\lim\limits_{n\to\pm\infty}a_nx^n$.

$*\ La\ limite$ à $l'infini\ d'une\ fonction\ rationnelle\ est\ la\ limite\ du\ quotient\ des\ termes$ de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. Ainsi :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{a_mx^m}\quad .$$

Méthodes pour lever l'indétermination

D'une manière générale, il existe quatre types de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty \times 0$ et $\frac{0}{0}$.

- Lorsqu'on est en présence de $+\infty - \infty$, on met en facteur le terme dominant. Pour les polynômes il s'agit du terme de plus haut degré.

  Exp : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x + 1$

- Lorsqu'on est en présence de $\frac{\infty}{\infty}$, on met en facteur les termes dominants du numérateur et du dénominateur .Pour les fonctions rationnelles, il s'agit des termes de plus haut degré.

  Exp : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$

- Lorsqu'on est en présence de $\infty \times 0$; on transforme f(x) afin de se ramener à un autre cas connu. Pour les fonctions rationnelles, il s'agit des termes de plus haut degré.

  Exp : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x-3}$.

- Lorsqu'on est en présence de $\frac{0}{0}$; cela signifie que le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément .pour une valeur k donnée on met en facteur x-k , au numérateur et au dénominateur puis on simplifie et on regarde si on peut trouver alors la limite. Si on est encore en présence de la forme $\frac{0}{0}$, on recommence la même procédure.

  Exp : $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

IV- Inégalités et limites

Propriétés

- S'il existe une fonction g telle que $g \leq f$ sur $l'intervalle]a;+\infty[$ et si

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \; alors \; \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur $]a;+\infty[.$ si de $plus$

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty, alors \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

- S'il existe deux fonctions g et h telle que $h \leq f \leq g \; sur \;]a; +\infty[\; et \; si$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \; alors \lim_{x\to a} f(x) = l$$

- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g \; sur \;]a; +\infty[\; et \; si$

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \; et \lim_{x\to a} g(x) = l' alors \; l \leq l'$$

Exercice d'application

Exercice 1 :

On donne : $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$; $g(x) = \frac{-x^2+2x+1}{x-1}$ et $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

1) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers 2 ; - 3 ; $+\infty \; et \; -\infty$.
2) Calculer la limite de g(x) au borne de son domaine de définition.
3) Calculer la limite de h(x) quand x tend vers 3.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $R_+^* \; par \; f(x) = \frac{2+\cos x}{x}$.

1) Montrer que, pour tout $x \; de \; R_+^*$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x}$.
2) En déduire $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

LECON 2 : CONTINUITES

Objectifs pédagogiques :

- Etudier la continuité d'une fonction en un point x_0 et sur un intervalle.

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres…

Pré-requis :

on donne $f(x) = 2x^2 - 3$. Calculer $f(3)$ ainsi que les limites de $f(x)\ quand\ x\ tend\ vers\ 2\ et\ vers\ 0$.

Situation problème :

Monsieur Mbala souhaite se rendre au 7e étage du MINESEC. Or sa voisine Mme Famen travaille au 3e étage, et il ne souhaite pas tomber sur elle. Il se demande s'il peut quitter du 1er étage au 7e étage sans passer par le 3e étage. Aide Monsieur Mbala à résoudre ce problème.

NB : On pourra faire à l'aide d'un graphe la courbe en trait continu pour dire que la fonction est continue sur l'intervalle.

Activité d'apprentissage :

On donne: $f(x) = -5x + 2$.

1) Calculer $f(-1)$.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
3) Compare $f(-1) et \lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Résumé :

2-1) Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle, on dit que f est continue en x_0 et $x_0 \in R$ lorsque :

- $X_0 \in Df$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad = f(x_0)$

NB : Approche graphique d'une fonction continue en un point.

Exp : on donne $f(x) = x^2 + 4. Etudier\ la\ continuite\ de\ f\ en - 2.$

2-2) Continuité a gauche et a droite en un point

Soit f une fonction définie en x_0, f est dite continue à gauche de x_0 (respectivement à droite de x_0 lorsque : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \quad = f(x_0)$ (respectivement

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad = f(x_0)\ )$$

Exp : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1\ si\ x < 1 \\ \frac{x-1}{x+1}\ si\ x \geq 1 \end{cases}$. Etudier la continuite de f en 1.

Propriétés

- toute fonction continue en x_0 est continue à gauche et à droite de x_0.
- toute fonction continue à gauche et à droite de x_0 est continue en x_0.
- f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \quad = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \quad = f(x_0)$.

2-3) : Continuité sur un intervalle

a) Définition

Une fonction f est dite continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout $x_0 \in I$.

Propriétés

- Les fonctions polynômes sont continuées sur R.

- Les fonctions rationnelles sont continuées sur leur Df.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur leur Df

  . f+g ; f.g ; k.g (avec k ϵR) et /f/ sont continues sur I.

  . Si $f(x) \geq 0 \; sur \; I \; alors \; \sqrt{f} \; est \; continue \; sur \; I.$

  . Si $g(x) \neq 0 \; sur \; I \; alors \; \frac{f}{g} \; et \; \frac{1}{g} \; sont \; continue \; sur \; I.$

  . Si $f(x) > 0 \; sur \; I \; alors \; \frac{1}{\sqrt{f}} \; est \; aussi \; continue \; sur \; I.$

2-4) Prolongement par continuité

a) Définitions

Soit f une fonction non définie en x_0 et k un nombre réel tel que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad = k \in R$$

On appelle prolongement de f par continuité en x_0 la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \, , si \; x \in Df \\ g(x_0) = k \end{cases}$$

Exp : on donne $f(x) = \frac{x+2}{-x^2+4}$. $Determiner \; la \; fonction \; g \; prolongement \; de \; f \; par$ continuite.

2-5) Restriction d'une fonction

Soit f une fonction continue en I. Soit A une partie non vide de I. On appelle Restriction de f en A la fonction notée f_A notée par f_A=f(x) pour tout $x \neq A$.

Exp : Soit $f_A(x) = \begin{cases} 2x - 1 \; si \; x \in [1; +\infty[\\ 4x + 2 \; si \; x \in]-\infty; 1[\end{cases}$

Posons A= $[1; +\infty[\; et \; B =]-\infty; 1[$.

- La restriction de f a A est $f_A(x) = 2x - 1$.
- La restriction de f a B est $f_B(x) = 4x + 2$.

Exercice d'application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \ si\ x \geq 2 \\ x^2 + x - 8\ si\ x < 3 \end{cases}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Etudier la continuité de f en 3.
3) Déterminer l'expression de la fonction g restriction de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

LECON 3 : DERIVABILITE

Objectifs pédagogiques :

- Définir fonction dérivée.
- Connaitre les formules des fonctions dérivées élémentaires.
- Connaitre les opérations sur les fonctions dérivées.
- Définir et écrire l'équation de la tangente en un point x_0.

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.
- Communiquer des informations comportant des nombres….

Pré-requis :

A) On considère les polynômes $P(x) = 3{,}5(x^2 - 4) et\ Q(x) = x - 2$
   1) Factoriser P.
   2) Simplifier l'expression $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
   3) Déduire $\lim\limits_{x \to 2} R(x)$

B) Soit la droite (D) d'équation $x + 2y = 3$.
   1) Déterminer l'équation réduite de (D).

2) Déduire le coefficient directeur de (D).

Situation problème :

Au Togo , l'accord de mise sur le marché d'une moto n'est accordé qu'à la condition que la vitesse instantanée huit seconde après le démarrage soit inférieure à 13m/s. La maison de fabrication de la moto SANILI relise des tests de performance sur un nouveau prototype. La distance parcourue d(en mètre) pendant la phase de démarrage est donne en fonction du temps t(en secondes) par d=f(t)= $0{,}5t^2$. Ce prototype pourra-t-il rouler au Togo ?

Activité d'apprentissage :

Soit la fonction $f(x) = 0{,}5x^2$.

1) Montrer que $f(x) - f(2) = 0{,}5(x^2 - 4)$
2) Factoriser l'expression $f(x) - f(2)$
3) Simplifier la fraction rationnelle $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
4) En déduire $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
5) Notons $g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Donner g(2) et calculer g(8). lorsque x est très proche de x_0 , la vitesse moyenne en les instants x et x_0 est appelée vitesse instantanée en x_0 notée $V(x_0)$.

Résumé

1- Nombre dérivé, fonction dérivée et tangente.

Définition 1 : Une fonction f est dérivable en un réel a et ($a \in Df$) SSI

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \quad (l \in R)$$

Cette limite l s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note f'(a).

Définition 2 : Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative et A un point de (C) ayant pour abscisse a. Lorsque f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente (T) au point A est : $y = f'(a)(x-a) + f(a). ou\ f'(a)$ est le coefficient directeur de (T).

Définition 3 : On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle k (k⊂ Df) si f est dérivable en tout élément de k. La fonction f' est appelée dérivée ou fonction dérivée de f.

Exp : Reprenons l'activité précédente

1) Que représente la vitesse instantanée par rapport à la fonction f ?
2) Calculer f'(3) et déterminer la fonction dérivée f'.
3) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 3.

RQ : Lorsque la tangente à (C) au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses, on déduit que f'(a)=0.

2- Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle ou f est dérivable.
$f(x) = k\ (k\ reel)$	$f'(x) = 0$	$]-\infty;+\infty[$
$f(x) = x^n\ (n \epsilon N^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$]-\infty;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[\ ou\ ]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \epsilon N^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[\ ou\ ]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

NB : $(Sinx)' = Cosx;\ (Cosx)' = -Sinx\ ;\ (Sin\ wx)' = wCos\ wx;\ (Coswx)' = -wSinwx$

Propriétés :

- Toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur R.
- Toutes les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur Df.

3- Dérivées et opérations :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(k.f)' = k.f'$; $(f+g)' = f' + g'$; $(f.g)' = f'.g + g'.f$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$ $(n \epsilon N^*)$.
- $Si\ g\ ne\ s'annule\ pas\ sur\ l'intervalle\ I\ ,on\ a : (\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$; $(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$.

4- Applications de la dérivation

- $Si\ f' \geq 0\ sur\ un\ intervalle\ I, alors\ f\ est\ croissante\ sur\ I.$
- $Si\ f' \leq 0\ sur\ un\ intervalle\ I, alors\ f\ est\ decroissante\ sur\ I.$
- $Si\ f' > 0\ sur\ un\ intervalle\ I, alors\ f\ est\ strictement\ croissante\ sur\ I.$
- $Si\ f' < 0\ sur\ \ I, alors\ f\ est\ strictement\ decroissante\ sur\ I.$
- $Si\ f\ est\ derivable\ sur\ I, alors\ f\ est\ continue\ sur\ I.$
- $f\ admet\ un\ extremum\ en\ x_0\ \epsilon[a;b]\ si\ et\ seulement\ si\ f'\ s'annule\ en$ x_0 en changeant de signe.

5- Tableau de variation

Le tableau de variation d'une fonction f est un tableau à trois lignes.

- La première ligne représente l'ensemble de définition (Df) et éventuellement les valeurs qui annulent la dérivée.
- La deuxième ligne représente le signe de la dérivée sur les différents intervalles.
- La troisième ligne traduit les variations de la fonction sur les différents intervalles.

NB : donner quelques exemples de tableau de variation.

6- Dérivée et extremum

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée f'.

Si f' s'annule en $x_0 \in I$ en changeant de signe à droite et à gauche de x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum relatif de f.

RQ : Un extremum peut être un minimum ou bien un maximum.

NB : Donner l'exemple à l'aide de deux tableaux de variation.

Théorème 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f' s'annule en x_0 et ne change pas de signe à gauche et à droite de x_0 , alors $f(x_0)$ n'est pas un extremum.

NB : faire un exemple à l'aide d'un tableau de variation.

Exercice d'application

On donne : $g(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer son Dg.
2) G est-elle dérivable en 1 ?
3) G est-elle dérivable sur $]-\infty; 1[$? pourquoi ?
4) G est-elle dérivable sur $]1; +\infty[$? pourquoi ?
5) Calculer la dérivée de g.
6) Ecrire l'équation de la tangente à (Cg) au point d'abscisse 2.
7) Dresser le tableau de variation de g.
8) Déterminer les extremums de g s'ils existent.

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE : REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Leçon 1 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION POLYNÔME

Competences attendues : Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies liées à l'étude de fonction

- Communiquer des informations comportant des nombres …

Pré-requis :

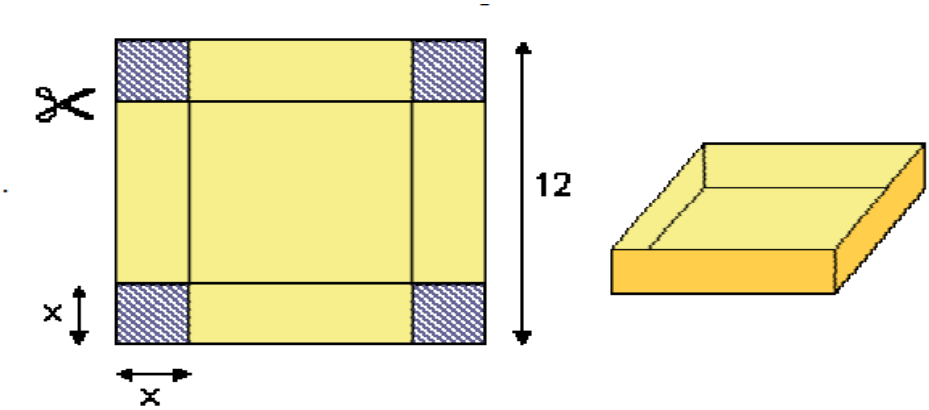
- Exemple de fonction polynôme
- Limite à l'infini d'une fonction polynôme
- Sens de variation

Situation problème :

Fathima, la patissière veut faire fabriquer le moule pour les gâteaux. Pour cela, Elle se rend au marché où elle achète une feuille de tôle carrée de 12 centimètres de côté. Elle découpe dans chaque coin de cette feuille de tôle des carrés de x centimètres de côté. En relevant les bords, elle obtient sa moulle . elle aimerait savoir le volume maximal de ce moule afin d'estimer le nombre maximal de gâteaux qu'elle pourra obtenir à partir d'une certaine quantité de pâte. Pour cela elle sollicite ton aide.

Activité d'apprentissage :

Soit le carré suivant de côté 12 cm sur lequel on a découpé des carrés de côté x centimètres et on a obtenu en relevant les bords une boîte sans couvercle.



1) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2) Exprimer le volume V de la boîte en fonction de x
3) Etudier les variations de V dans l'intervalle [0 ;6]
4) En déduire la valeur maximale de x et le volume maximal de la boîte
5) Réponds à la question de la situation problème

Solution

1) Comme x est une distance, elle varie entre 0 et 6 car elle ne peut excéder une demi-longueur du coté.
2) Volume V de la boîte en fonction de x
   La base de la boîte est un carré de côté 12-2x et la hauteur est h=x. Ainsi V= S.h.=$x(12-2x)^2$
   D'où $V=4(x^3-12x^2+36x)$
3) Variations de V dans l'intervalle [0 ;6]
   V est une fonction polynôme dérivable sur l'intervalle [0 ;6] et on a $V'(x)=12(x^2-8x+12)$
   $V'(x)=12(x-2)(x-6)$
   $V'(x)=0$ alors x=2 ou x=6
   On a le tableau suivant .

X	0	2	6
V'(x)	+	–	
V(x)	0 ↗	128	↘ 0

4) Déduction
   La valeur maximale de x est 2 et le volume maximal est $V(2)=128cm^3$.

Solution de la Situation problème : le moule de Fathima est assimilable à la boîte de volume 128 cm^3 donc le volume maximal du moule est $128cm^3$.

Résumé :

L'étude d'une fonction suit les différentes étapes suivantes :

1. Détermination du domaine de définition ;
2. Calcul des limites aux bornes du domaine de définition ;
3. Etude de la dérivabilité et calcul de la dérivée.
4. Etude du signe de la dérivée, sens de variation et tableau de variation de la fonction.
5. Recherche des points remarquables (points d'intersections avec les axes de coordonnées, tables des valeurs…)
6. Tracé de la courbe représentative.

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie par $f(x) = f(x) = x^2 - 3x + 5$ et (C_f) sa courbe représentative

1. Donner le domaine de définition D_f de f .
2. calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Calculer la dérivée f' de f et déterminer le sens de variation de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Ecrire une équation de la tangente au point d'abscisse $x_0=0$.
6. Tracer (C_f) .

Solution

Soit f la fonction définie par f(x) = $\mathbf{f}(x) = x^2 - 4x + 5$ et (C_f) sa courbe représentative

1- le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} =]-\infty ;+\infty[$.

2- calculons les limites aux bornes de D_f .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

3- Calcule la dérivée f' de f et déterminons le sens de variation de f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable et f'(x) = 2x- 4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f'(x)=0 alors x=2

Tableau de signe de la dérivée et Sens de variation

x	-∞	2	+∞
f'(x)	-	0	+

Pour tout $x \in]-\infty ;2[$, $\mathbf{f}'(x) < 0$ alors la fonction $\mathbf{f}$ est strictement décroissante ;

Pour tout $x \in]2 ;+\infty[$, $\mathbf{f}'(x) > 0$ alors la fonction $\mathbf{f}$ est strictement croissante ;

Pour tout $x \in \{2\}$, $\mathbf{f}'(x) = 0$ alors la fonction $\mathbf{f}$ est constante ;

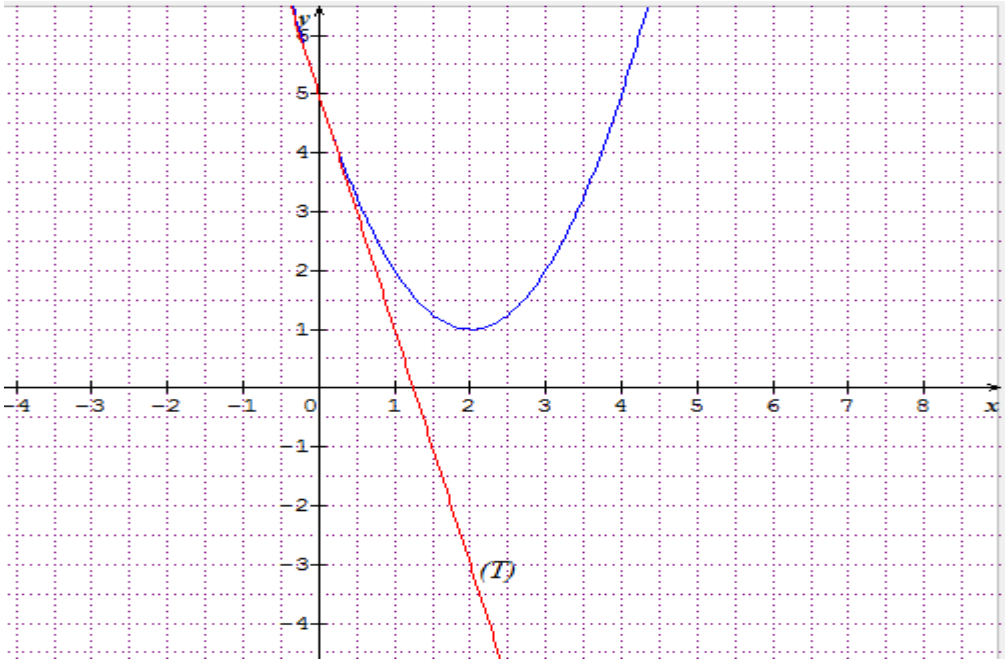
4- Tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

5- Ecrivons une équation de la tangente au point d'abscisse x_0=0.

f'(0)= - 4 et f(0)= 5 alors la tangente en 0 est (T) :y= -4x+5

6- Tracé de (C_f) .



DEVOIR :

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE : REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Leçon 2 : FONCTION HOMOGRAPHIQUE

Competences attendues : Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres

Motivation :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies liées à l'étude de fonction

- Communiquer des informations comportant des nombres …

Pré-requis :

- Exemple de fonction homographique
- Limite à linfini des fonctions homographiques

Situation problème

Fathima , élève de la classe Seconde C veut déterminer tous les rectangles de dimensions entières dont l'aire est égale au périmètre, c'est-à-dire l'aire et le périmètre sont représentés par le même nombre . Pour cela, elle sollicite ton aide.

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

a) Determiner le domaine de definition de f
b) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de definition

Solution :

a) Determinons le domaine de definition de f
$D_f = \mathbb{R}/\{-2\} =]-\infty ;-2[\cup]-2 ;+\infty[$
b) Calculons les limites de f aux bornes de son domaine de definition
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-2} x-3 = -5 \\ \lim_{x\to-2} x+2 = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	-	|	+

Ainsi $\lim\limits_{x\to-2^<} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^>} f(x) = -\infty$

Resumé :

Définition : soit f une fonction, a et b deux nombres réels ;

- On dit que la droite (D) : x = a est asymptote verticale à la courbe représentative (C_f) de f si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

- On dit que la droite (D) : y = b est asymptote horizontale à la courbe représentative (C_f) de f si et seulement si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= b$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= b$

Exemple :

Dans l'activité précédente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 1$ alors la droite d'équation y= 1 est asymptote horizontale à (C_f)

$\lim\limits_{x\to-2^<} f(x)= +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^>} f(x)= -\infty$ alors la droite d'équation x= -2 est asymptote verticale à (C_f)

Exemple d'application : soit f est la fonction numérique d'une valeur réels définie par $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ et (C_f) sa courbe représentative

1. Donner le domaine de définition D_f de f .
2. a) calculer les limites aux bornes de D_f.
   b) en déduire les équations des éventuelles asymptotes.
3. Calculer la dérivée f' de f et déterminer le sens de variation de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0=0.
6. Démontrer que le point I $\binom{2}{1}$est le centre de symétrie de (C_f).
7. Déterminer les points de rencontre de la courbe (C_f) avec les axes.
8. Tracer dans le même repère (C_f) , (T) et les asymptotes.

Solution

1. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}/\{2\}=]-\infty ;2[\cup]2 ;+\infty[$
2. a)Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 1$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to2} x+3=5\\ \lim_{x\to2} x-2\ =0\end{cases}$

x	-∞	2	+∞
$x-2$	-	|	+

Ainsi $\lim\limits_{x\to2^<} f(x)= -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^>} f(x)= +\infty$

b) Equations des asymptotes

La droite d'équation x=2 est asymptote verticale car $\lim\limits_{x\to2^<} f(x)= -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^>} f(x)= +\infty$ et celle d'équation y=1 est asymptote horizontale car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 1$

3. Dérivée et sens de variation

Pour tout x ∈ $\mathbb{R}/\{2\}$, f est dérivable et f'(x) = $\frac{-7}{(x-2)^2}$

pour tout x∈ $\mathbb{R}/\{2\}$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante

4. Tableau de variation

x	-∞	2	+∞
f'(x)	-	||	-
f(x)	1 ↘ -∞	||	+∞ ↘ 1

5. Equation de la tangente en x_0 = 1

f'(1)= -7 et f(1)=-4 d'ou la tangente en $x_0 = 1$ est (T) : y= -7x+3

6. Démontrons que I(2 ;1) est centre de symétrie

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $4 - x \in D_f$,

   $f(2a - x) + f(x) = f(4 - x) + f(x) = \frac{(4-x)+3}{4-x-2} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{-x+7}{2-x} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-2} + \frac{x\mp3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$ et

   2b= 2 d'ou $f(2a - x) + f(x) = 2b$ donc I(2 ;1) est centre de symétrie pour (C_f).

7. points de rencontre avec les axes

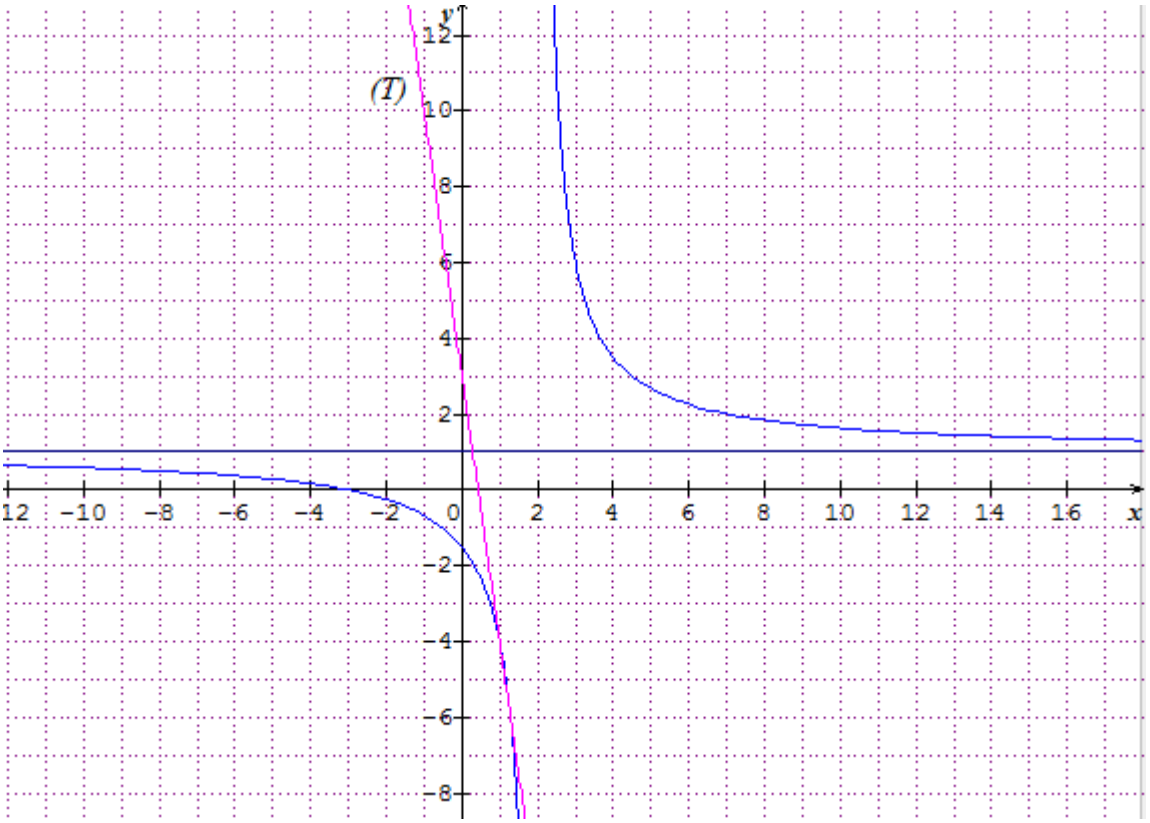
   -Axe des abscisses

   On résous l'équation f(x)= 0 . Ainsi, f(x)=0 alors x+3=0 d'ou x=-3 . On a le point A(-3;0).

   -Axe des ordonnées

   On calcule f(0). Ainsi $f(0) = -\frac{3}{2}$. On a le point $B(0 ; -\frac{3}{2})$.

8. Tracé de (C_f) , (T) et les asymptotes



Exercice : resolution de la situation problème

Soient *x* la largeur et y la longueur d'un rectangle.

1. Exprimons le périmètre P et l'aire A du rectangle en fonction de *x* et *y*.

P= 2x + 2y et A=xy

On s'intéresse aux rectangles tels que l'aire égale au périmètre .

2. Trouvons la fonction rationnelle qui exprime *y* en fonction de *x* pour un tel rectangle, et esquissons son graphique.

P=A alors $y=\frac{2x}{x-2}$

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x}{x-2}$

a) Df $= \mathbb{R}/\{2\} =]-\infty ;2[\cup]2 ;+\infty[$

b) Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 2$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to2} 2x = 4 \\ \lim_{x\to2} x-2 = 0 \end{cases}$

x	-∞	2	+∞
$x-2$	-	+	

Ainsi $\lim\limits_{x\to2^<} f(x)= -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^>} f(x)= +\infty$

La droite d'équation x=2 est asymptote verticale car $\lim\limits_{x\to2^<} f(x)= -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^>} f(x)= +\infty$ et celle d'équation y=1 est asymptote horizontale car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)= 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= 2$

c) Dérivée et sens de variation

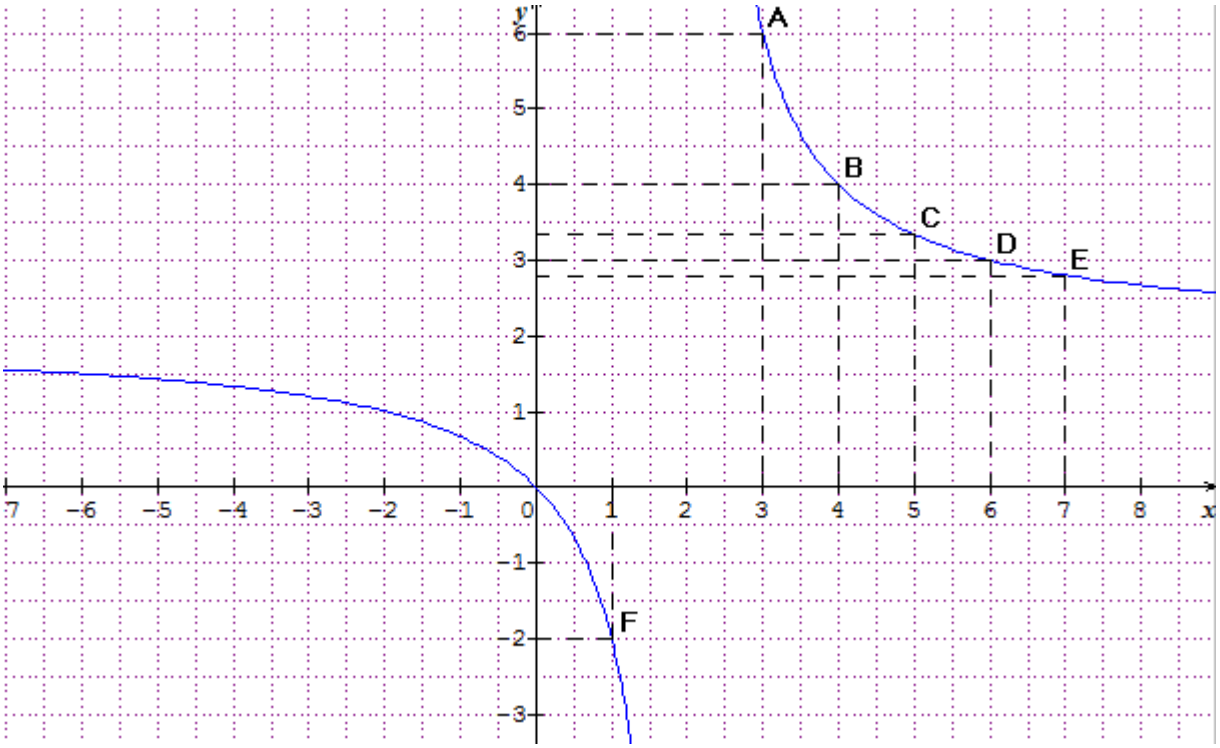
Pour tout x ∈ ℝ/{2} , f est dérivable et f'(x) = $\frac{-4}{(x-2)^2}$

pour tout x∈ ℝ/{2}, $f'(x) < 0$ alors la fonction **f est strictement décroissante** .

d) Tableau de variation

x	-∞	2	+∞
f'(x)	-	||	-
f(x)	2 ↘ -∞	||	+∞ ↘ 2

e) Tracé de la courbe



3. nombre de rectangles avec cette propriété, dont les côtés sont des nombres entiers. Pour déterminer le nombre de solutions, inscrivons chaque couple possible (*x*;*y*) sur le graphique.

Seuls les couples (3 ;6) et (4 ;4) répondent à la propriété. Alors il y a deux rectangles.

Devoir :

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE : REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Leçon 3 : FONCTION RATIONNELLE

Competences attendues : Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres

Motivation :

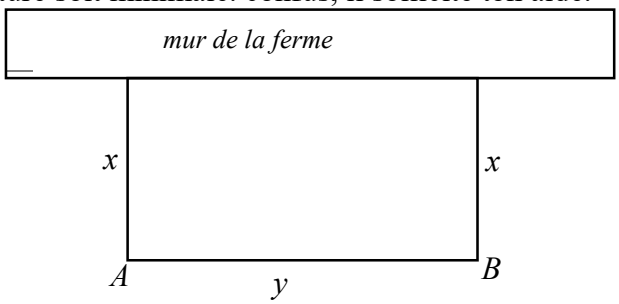
- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies liées à l'étude de fonction
- Communiquer des informations comportant des nombres …

Pré-requis :

- Exemples de fonction rationnelle
- Limite à l'infini d'une difference de fonction

Situation problème :

FOTSO, un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Il doit placer les piquets A et B de sorte que la longueur de la clôture soit minimale. confus, il sollicite ton aide.



Activité 1

La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les 2 piquets A et B.

(On a donc $x > 0$ et $y > 0$)

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. exprimer la longueur l(x) du grillage en fonction de x.
3. Calculer la dérivée l'(x) . En déduire le tableau de variation de l .
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

Solution

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m^2, exprimons y en fonction de x.

Puisque l'aire du poulailler est 392 alors xy=392 d'où $y=\frac{392}{x}$

2. exprimons la longueur l(x) du grillage en fonction de x.

l(x)= 2x + y = 2x+ $\frac{392}{x}$ d'où l(x) = $\frac{2x^2+392}{x}$

3. Calculer la dérivée l'(x) . En déduire le tableau de variation de l .

Pour tout x≠0, l'(x) = $\frac{2(x-14)(x+14)}{x^2}$. Comme x>0 alors le signe de l'(x) dépend de celui de x-14. Alors on a le tableau :

x	0		14		$+\infty$
$l'(x)$	‖	−	0	+	
$l(x)$	‖ $+\infty$	↘	56	↗	$+\infty$

4. déduction des dimensions *x* et *y* pour lesquelles la clôture a une longueur minimale.

La clôture a une longueur minimale lorsque x=14 et y=28 . cette longueur minimale est l(14)=56

Réponse de la situation problème : pour que la longueur de la clôture soit minimale, la distance qui sépare les deux piquets A et B sera de 28m.

Activité 2 :

Soit g la fonction définie par g(x) =$\frac{x^2-3x+6}{x-1}$ et la droite (D) :y= x-2

a) Déterminer g(x) − y
b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}(g(x)-y)$ et $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-y)$

solution

a) Déterminons g(x) – y

(g(x) − y)= $(\frac{x^2-3x+6}{x-1}-(x-2))=\left(\frac{x^2-3x+6-x^2+2x+x-2}{x-1}\right)=\frac{4}{x-1}$.

b) $\lim_{x\to-\infty}(g(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{4}{x-1})=0$.

De même $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x-1})=0$.

Résumé :

Définition : soit f une fonction et la droite (D) : y = ax+b

On dit que la droite (D) : y = ax+b est asymptote oblique à la courbe représentative (C_f) de f si et seulement si $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$

Exemple : Dans l'activité précédente, la droite (D) :y= x-2 est asymptote oblique à la courbe (C_g)

Exercice d'application :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère la fonction de la variable réelle x définie par f(x) = $\frac{x^2+x+2}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. a. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   b. en déduire l'éventuelle asymptote
3. a .Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation de f.
   b. En déduire le tableau de variation de f.
4. a. déterminer trois réels a,b et c tels que f(x) $= ax + b + \frac{c}{x-1}$
   b. montrer que la droite (Δ) : y= $x + 2$ est une asymptote oblique puis préciser sa position par rapport à (C_f).
5. Montrer que le point I $\binom{1}{3}$ est le centre de symétrie à la courbe (C_f)
6. Tracer (Δ) et (C_f).

Solution

f(x) = $\frac{x^2+x+2}{x-1}$

1- Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}/\{1\} =]-\infty ;1[\cup]1 ;+\infty[$

2- a. Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1} x^2 + x + 2 = 4 \\ \lim_{x\to1} x - 1 \quad\quad = 0 \end{cases}$

x	-∞	1	+∞
$x-1$	-	|	+

Ainsi $\lim\limits_{x\to1^<} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^>} f(x) = +\infty$

b. éventuelle asymptote

La droite d'équation x=1 est asymptote verticale car $\lim\limits_{x\to1^<} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^>} f(x) = +\infty$

3- a.Dérivée et sens de variation

Pour tout x∈ $\mathbb{R}/\{1\}$, f est dérivable et f'(x) = $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Pour tout x∈ $\mathbb{R}/\{1\}$, f'(x) = 0 alors x= 0 ou x = -2 ;

Tableau de signe de la fonction dérivée :

x	-∞	-1	1	3	+∞
f'(x)	+	| -	|| -	|	+

Alors :

Pour tout x ∈]-∞ ;-1[∪]3 ;+∞[, $f'(x) > 0$ alors la fonction **f est strictement croissante** ;

Pour tout x ∈]-1 ;1[∪]1 ;3[,$f'(x) < 0$ alors la fonction **f est strictement décroissante** ;

Pour tout x ∈ {-1 ;3}, $f'(x) = 0$ alors la fonction **f est constante**

b.Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

4- a. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que f(x) $= ax + b + \frac{c}{x-1}$

par division euclidienne on a f(x) $= x + 2 + \frac{4}{x-1}$

b. montrons que la droite (Δ) :y= x+2 est asymptotes à la courbe (C_f)

f(x) $- y = x + 2 + \frac{4}{x-1} - (x + 2) = \frac{4}{x-1}$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{4}{x-1}) = 0$. et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x-1}) = 0$. Alors la droite (Δ) :y= x+2 est asymptote oblique à la courbe (C_f)

Déterminons les positions relatives de (C_f) par rapport à la droite (Δ) .

Etudions le signe de f(x) − y

f(x) − y = $\frac{4}{x-1}$. comme 4 est positif alors le signe de f(x) − y depend de celui de x-1

tableau de signe

x	-∞	1	+∞
$x - 1$	-	+	

ainsi :

pour tout x∈]-∞ ;1[, f(x)-y<0 alors (C_f) en-dessous de la droite (Δ) ;

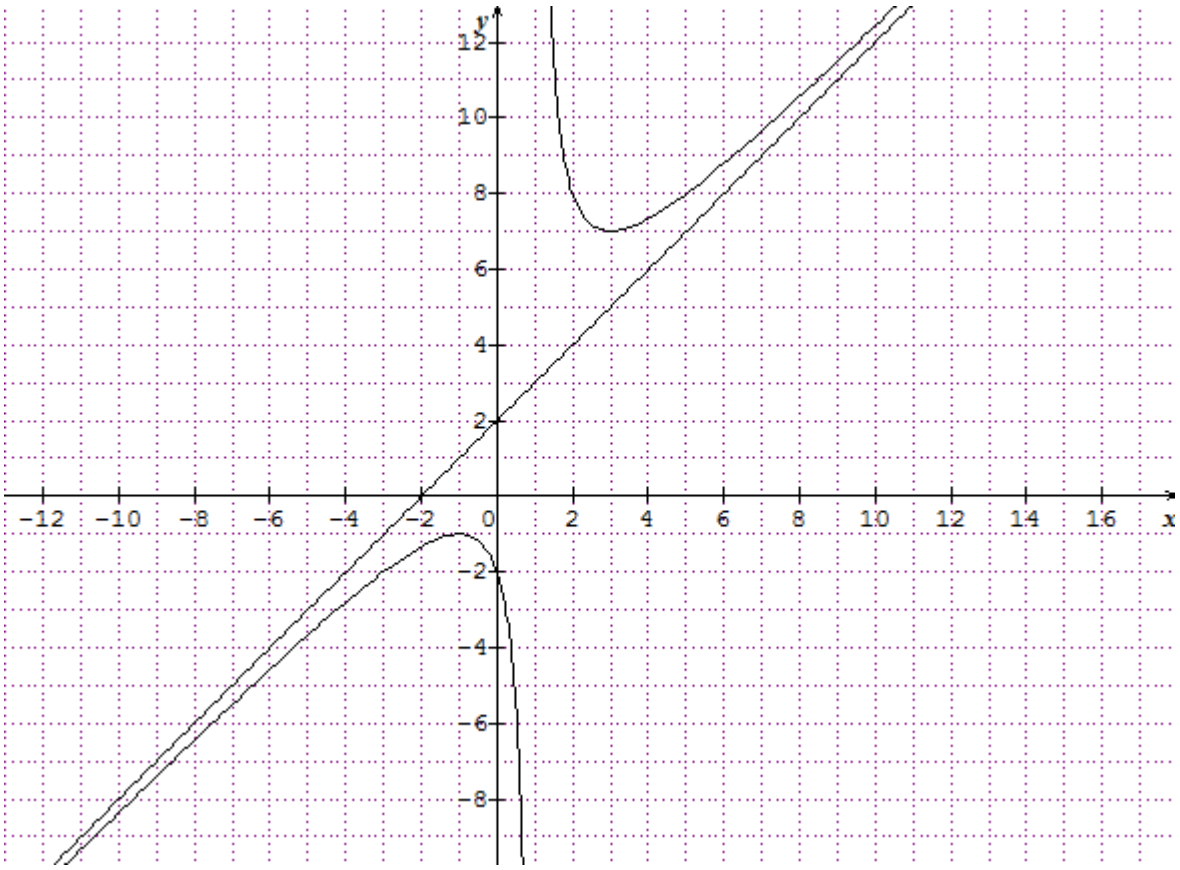
pour tout x∈]1 ;+∞[, f(x)-y<0 alors(C_f) au-dessus de la droite (Δ) .

5- Montrons que le point I $\binom{1}{3}$ est le centre de symétrie à la courbe (C_f) .

Soit h ∈ ℝ, 1 - h ∈D_f , 1 + h ∈D_f

on a f (a– h) + f(a+ h) = f (1 – h) + f(1+ h) = (1-h+2+ $\frac{4}{1-h-1}$)+ (1+h+2+ $\frac{4}{1+h-1}$)= 6+ $\frac{1}{-h} + \frac{1}{h} = 6$ et 2b= 2x3=6 d'ou f (a – h) + f(a+ h) = 2b donc I(1 ;3) est centre de symétrie pour (C_f).

6- Construire la courbe (C_f) et ses asymptotes.



MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS.

CHAPITRE : REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Leçon 4 : EXPLOITATION DE LA COURBE D'UNE FONCTION

Competences attendues : Représenter, déterminer des quantités et identifier des objets par des nombres

Motivation :

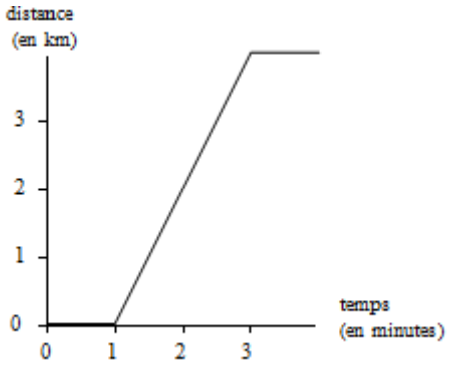
- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vies liées à l'étude de fonction
- Communiquer des informations comportant des nombres …

Pré-requis :

- Déterminer graphiquement l'image et l'antécédent d'un nombre par une fonction
- Déterminer graphiquement le domaine de définition d'une fonction

Situation problème

La figure ci-contre représente le déplacement de la voiture de M. Alex dont le mouvement est uniforme. Aide-le à déterminer l'équation de la trajectoire de son véhicule entre les instants 1min et 3min.



Activité :

En utilisant la figure précédente , répond aux questions suivantes :

a) Quelle est l'image de chacun des nombres 1 et 3 ?
b) Sachant que entre les nombres 1 et 3 la courbe obtenue est une droite de la forme y=ax+b, déterminer a et b
c) Aide alors M.ALEX à déterminer l'équation de la trajectoire de son véhicule.

Solution

a) L'image de 1 est 0 et celle de 3 est 4
b) Y=ax+b alors a=2 et b=-2 ainsi y=2x-2
c) La trajectoire entre les instant 1min et 3min est une droite. La distance parcourue à t=1min est Okm et celle parcourue à t=3min est 4km alors l'équation de la trajectoire est x(t)=2t-2

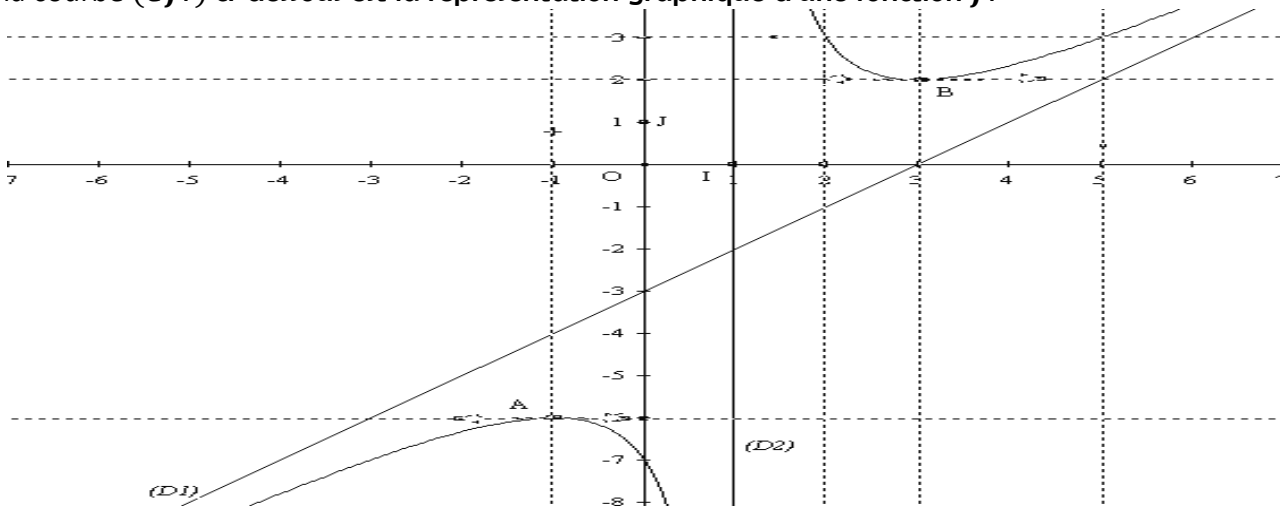
Résumé :

Définition :

- L'image d'un nombre x_0 par une fonction f est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe de f et la droite d'équation $x=x_0$. Il s'agit de déterminer $f(x_0)$
- L'antécédent d'un nombre y_0 par une fonction f est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et la droite d'équation $y=y_0$. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x)=y_0$.

Exemple d'application:

la courbe $(\boldsymbol{Cf}.)$ **ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction** $\boldsymbol{f}$.



1- Donner le domaine de définition de la fonction f.

2- Déterminer graphiquement les limites de f quand:

x tend vers +∞ et quand x tend vers - ∞; en 1 (à gauche et à droite).

3- a) Résoudre graphiquement les équations suivantes $f'(x) = 0$; $f(x) = 0$; $f(x) = 3$; $f(x) = -1$

b) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes: $f'(x) \geq 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) > 3$;

4- a) Dresser le tableau de variation de f

b. Donner les différentes asymptotes à (Cf),on donnera une équation cartésienne de chacune d'elles.

c. Donner l'expression $f(x)$de $f$sachant qu'elle est sous la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$.

Solution :

1- $D_f = =]-\infty ;1[\cup]1 ;+\infty[$

2- Limite :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^<} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^>} f(x) = +\infty$

3- a)résolution graphique des équations

f'(x)=0 alors x= -1 ou x=3

f(x)=0 n'admet aucune solution

f(x)=3 alors x=2 ou x=5

f(x)=-1 n'admet aucune solution

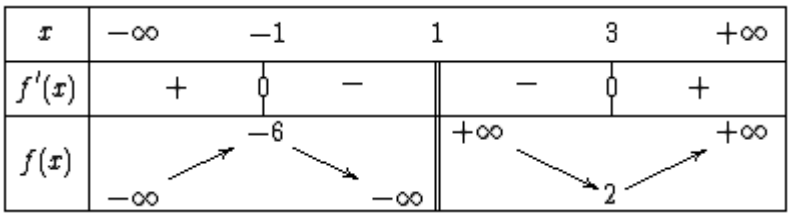
b)résolution des inéquations :

f'(x)≥0 alors x ∈]-∞ ;-1]∪[3 ;+∞[

f(x))≥0 alors x ∈]1 ;+∞[

f(x))≥3 alors x ∈]1 ;2]∪[5 ;+∞[

4- a) Dressons le tableau de variation de f



b. Donnons les différentes asymptotes à (Cf),on donnera une équation cartésienne de chacune d'elles.

- asymptote verticale :

La droite d'équation x=1 est asymptote verticale car $\lim_{x\to 1^{<}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^{>}} f(x) = +\infty$

- asymptote oblique :

La droite d'équation y= x-3 est asymptote oblique

c. Donnons l'expression $f(x)$de $f$sachant qu'elle est sous la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$.

- f(x) existe si x+d≠0 or D_f= =]-∞ ;1[∪]1 ;+∞[d'où d=-1

-f(0)=-7 alors c=7

-f(2)=3 et f(5)=3 alors On a le système : $\begin{cases} 2a+b=-2 \\ 5a+b=1 \end{cases}$ Ainsi a=1 et b=-4

Donc f(x) = $\frac{x^2-4x+7}{x-1}$

Devoir :

Classe : PD	Séquence :	Date :	Durée :

MODULE 21(D) : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS	
Chapitre :	**Leçon: 1**
Suites numériques	**Généralités sur les suites numériques**

➢ **Objectif pédagogique :**

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

Définir et déterminer le graphique des termes d'une suite numérique

➢ **Motivation :**

Il peut nous arriver parfois à chercher à déterminer l'évolution d'une entreprise dans une période précise.

➢ Introduction (Situation problème) :

Dans un pays d'Afrique en difficultés, le taux d'inflation triple chaque année. Le taux d'inflation globale sur les deux premières années est de 5,07%. Déterminer le taux d'inflation de la cinquième année.

➢ Contrôle des prés requis :

- Calculer les images par une fonction.
- Utilisation des pourcentages
- Calculer avec les puissances

➢ Activité d'apprentissage :

Dans un pays d'Afrique en difficultés, le taux d'inflation triple chaque année. Le taux d'inflation globale sur les deux premières années est de 5,07%.

1) Déterminer le taux d'inflation de la première année.
2) Exprimer le taux d'année n+1(t_{n+1}) en fonction du taux d'année n (t_n).
3) Calculer t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5.
4) Exprimer le taux d'année n (t_n) en fonction de n

➢ Résumé :

Définition 1 : suites numériques

Une suite numérique est un fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image de l'entier n par la suite est notée u_n. On l'appelle terme d'indice n de la suite. Cette suite notée (u_n) ou encore u.

Notation : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs, appelés entiers naturels.

Exemple : Voici la suite des nombres impairs : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; …

Le terme d'indice 0 de la suite u est 1, celui d'indice 1 est 3.

Remarque : Le mode de génération d'une suite est la façon dont cette suite est définie.

Définition 2: suite définie de la façon explicite

Définir une suite par la formule explicite ; c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n.

Remarque : Cela signifie que l'on peut calculer un terme de la suite sans connaitre les termes précédents.

Méthode : Etudier une suite de finie de façon explicite

- Vérifier s'il existe des valeurs de n pour lesquelles u_n n'est par défini.

- Calculer les termes de la suite en remplaçant n par sa valeur dans l'expression $f(n)$ donnée.
- Représenter les points de coordonnées$(n;\ u_n)$qui sont les points d'abscisses positive de la courbe C de f.

Exemple : calculer, puis représenter les dix premier termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

Définition 3: Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précèdent u_n.

Remarque : On ne peut alors calculer que si l'on connait le précèdent, il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier.

Méthode : Etudier une suite définie par récurrence.

Algébriquement : On calcule les termes de proche en proche à partir du premier et d'une expression de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Graphiquement :

- Construire la courbe représentative de f.
- Construire la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- La reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3 …

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$.

1) Calculer u_3
2) Représenter graphiquement (u_n) et placer $u_1;\ u_2;\ u_3\ et\ u_4$ dans un repère orthonormé.

➢ Exercices d'application :

1- Soit la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 2n^2 - 3n + 5$. Calculer les cinq premier termes de cette suite.

2- Soit la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n. Calculer v_1 ; v_2 ; $v_3$et v_4.

3- Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous et les représenter.

a) $u_n = n^2 - n$

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2u_n} \end{cases}$

➢ Conclusion (Devoirs) :

Chapitre :	Leçon: 2
Suites numériques	**Suites Arithmétiques et Suites Géométriques**

- **Objectif pédagogique :**

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

- Qu'une suite est en progression arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique ou géométrique.

- **Motivation :**

C'est de résoudre des problèmes de la vie courante, liés aux progressions arithmétiques ou géométriques.

- Introduction (Situation problème) :

Au 1er janvier 1995, M KONE et Mme TOURE ont placé chacun une somme S_0=1000000F. ils avaient le choix entre deux placements :

1er placement : Un placement à intérêts simples chaque année les intérêts sont perçus par l'épargnant et seul le capital initial produit des intérêts.

2ème placement : Un placement à intérêts composés. A l'issue de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts de l'année suivante.

Dans les deux cas, le taux d'intérêts est 6%. M.KONE a choisi le 2ème placement et Mme TOURE le 1er. soit n un entier naturel. On note u_n le capital dont peut disposer M.KONE le 1er janvier de l'année 1995+ n et v_n la somme du capital et des intérêts dont peut disposer Mme TOURE à la même période. Au bout de combien d'années minimum le capital S_0 aura-t-il au moins doublé pour chacune des deux personnes ?

- Contrôle des prés requis :

- Calculer les images par une fonction.
- Définir suite numériques
- Définir formule explicite d'une suite numérique
- Définir formule de recurrence d'une suite numérique

- Activité d'apprentissage :

Au 1er janvier 1995, M KONE et Mme TOURE ont placé chacun une somme S_0=1000000F. ils avaient le choix entre deux placements :

1er placement : Un placement à intérêts simples chaque année les intérêts sont perçus par l'épargnant et seul le capital initial produit des intérêts.

2ème placement : Un placement à intérêts composés. A l'issue de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts de l'année suivante.

Dans les deux cas, le taux d'intérêts est 6%. M.KONE a choisi le 2ème placement et Mme TOURE le 1er. soit n un entier naturel. On note u_n le capital dont peut disposer M.KONE le 1er janvier de l'année 1995+ n et v_n la somme du capital et des intérêts dont peut disposer Mme TOURE à la même période. Au bout de combien d'années minimum le capital S_0 aura-t-il au moins doublé pour chacune des deux personnes ?

1- Calculer u_1 ; u_2; u_3 ; v_1; v_2 et v_3.
2- Faite une conjecture pour le calcul de u_n
3- Faite une conjecture pour le calcul de v_n
4- Calculer $u_2 - u_1$; $u_3 - u_2$ et comparer leur résultat
5- Montrer que $u_n = 1000000 + 60000n$
6- Calculer $\frac{v_2}{v_1}$; $\frac{v_3}{v_2}$ et comparer leur résultat
7- Montrer que $v_n = 100000(1{,}06)^n$
8- Au bout de combien d'années minimum le capital S_0 aura-t-il au moins doublé pour chacune des deux personnes.
9- Calculer la somme totale des montants des 4premiers année :
   a) Pour le placement de Mme TOURE
   b) Pour le placement de M.KONE
10- Calculer :

a- $4\left(\frac{1000000+1240000}{2}\right)$ et comparer au résultat du 9-a)

b- $1000000\left(\frac{1-(1,06)^4}{1-1,06}\right)$ et comparer au résultat du 9-b)

➢ Résumé :

DEFINITION. : SUITE ARITHMETIQUE.

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel on a $u_{n+1}= u_n+r$. Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

REMARQUE: une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence ; on ajoute toujours le même terme. Pour la définir ; il faut donner son premier terme sa raison.

EXEMPLE : la suite définie par $\begin{cases} u_3 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ pour $n \geq 3$ est une suite arithmétique de raison 5.

METHODE : démontré qu'une suite est arithmétique

Pour tout entier appartenant à $\mathbb{N}$; on calcule la différence u_{n+1} - u_n . On montre que cette différence est constante.

EXEMPLE : Montrons que la suite(u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 3n$ est arithmétique.

THEOREME : FORME EXPLICITE D'UNE SUITE ARITHMETIQUE.

Cas particulier :

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r ; alors pour tout entier naturel n ; on a : $u_n=u_0+ nr$.

Cas général :

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r ; alors pour tous entiers naturels $n \text{ et } k$; $u_n = u_k + (n-k)r$

EXEMPLE :

1) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -4. Déterminer sa forme explicite.
2) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_{10} = 7$ et de raison 5. Déterminer sa forme explicite.

PROPRIETE : FORMULE DE SOMME DES TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

$$S_n = nombre\ de\ termes\left(\frac{1^{er}terme + dernier\ terme}{2}\right)$$

DEFINITION : SUITE GEOMETRIQUE

On dit qu'une suite (v_n) est géométrique s'il existe un réel nul tel que pour tout entier naturel n ; on a $v_{n+1} = v_n \times q = q \times v_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique (v_n).

REMARQUE : une suite géométrique est définie par récurrence ; on multiplie toujours par le même terme. pour définir une suite géométrique ; il faut donner son premier terme et sa raison.

EXEMPLE :

- la suite des puissances de 10 est géométrique de raison 10

- La suite définie par $v_n = (-1)^n$pour $n\epsilon\mathbb{N}$ est géométrique de raison-1. Elle ne prend que les valeurs -1 et 1.

METHODE : démontré qu'une suite est géométrique

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on calcule le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et on montre qu'il est égal à une constante

EXEMPLE : montrons que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ est géométrique.

THEOREME : FORME EXPLICITE D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

Cas particulier :

- Si (v_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n on a :$v_n = v_0 q^n$.

Cas général :

- Si (v_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n et k on a : $v_n = v_k q^{n-k}$.

EXEMPLE : Soit la suite géométrique (v_n) telle que $v_4 = 21$et de raison 3. Déterminer sa forme explicite.

PROPRIETE : FORMULE DE SOMME DES TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

$T_n = 1^{er} terme \left(\frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}\right)$où q est la raison de la suite géométrique.

- Exercices d'application :

Exercice 1 :

(u_n) est une suite arithmétique de raison 14 et de premier terme -3.

1) calculer u_1 ; u_2 ;u_3 sans utiliser la formule explicite.

2) Donner la formule explicite ; puis une formule approchée de $u_9$et u_{50}.

Exercice 2 :

Les suites de terme général ci-dessous sont-elles géométriques ?

a) $2 \times \left(-\sqrt{3}\right)^n$; b) $\frac{3}{2^n}$; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ si oui préciser la raison.

Exercice 3 :

1) Calculer la somme : $\left(1+\frac{1}{\pi}\right)+\left(1+\frac{2}{\pi}\right)+\left(1+\frac{3}{\pi}\right)+\cdots+\left(1+\frac{50}{\pi}\right)$.
2) Calculer la somme : $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{10^8}$

- Conclusion (Devoirs) :

Chapitre :	Leçon3:
Suites numériques	**Etude des suites numériques**

➢ **Objectif pédagogique :**

- Etudier le sens de variations d'une suite suivant son mode de définition.
- Justifier qu'une suite est majorée ; ou minorée.
- Conjecturer à partir d'un graphique sur la convergence d'une suite numérique.

➢ **Motivation :**

Etre capable d'interpréte l'évolution d'une entreprise en fonction des années.

➢ Introduction (Situation problème) :

Début 2014, une bibliothèque dispose de 30 000 ouvrages. Elle change de locaux et va dorénavant pouvoir stocker jusqu'à 100 000 ouvrages. Chaque année, la commune souhaite acheter des livres à la bibliothèque pour renouveler son stock. Elle étudie trois cas de figures.

1er cas : Chaque année, la commune achète 2 000 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

2e cas : Chaque année, la commune achète 1 500 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

3e cas : Chaque année, la commune achète 1 000 nouveaux livres à la bibliothèque et les bibliothécaires décident de se débarrasser de 5 % des ouvrages, trop abîmés.

Pour chaque cas ci-dessus : Que peut-on dire de l'évolution du stock ?

➢ Contrôle des prés requis :

- Différence de deux fonctions
- Comparaison de deux fonctions

➢ Activité d'apprentissage :

1) On considère les suites (u_n)et (v_n) définies respectivement par : pour tout entier naturel $n, u_n = n^2 - n - 4$ *et* $v_n = \frac{1}{2^n}$
   a) Calculer $u_{n+1} - u_n$, ainsi que $v_{n+1} - v_n$.
   b) Déterminer les signes respectifs de $u_{n+1} - u_n$ et de $v_{n+1} - v_n$.
   c) Comparer $u_{n+1} et\ de\ u_n$, puis de $v_{n+1}\ et\ de\ v_n$ en fonction de n
2) Soit la suite (u_n) définie par $u_{n=(-1)^n+\frac{1}{n^2+1}}$
   a) Justifié que $0 \leq \frac{1}{n^{2+1}} \leq et$ que $(-1)^n \leq 1 et -1 \leq (-1)^n$; pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$
   b) Justifier que $(-1)^n + \frac{1}{n^1+1} \leq 2\ et -1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$; en déduire que pour tout entier naturel $n, u_n \geq -1\ et\ u_n \leq 2$
3) On considère les suites (u_n)et (v_n) définies par : pour tout entier naturel non nul $n, u_n = \frac{4n+3}{n}$ et $v_n = \sqrt{2n+3}$.
   Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

➢ Résumé :

1) Sens de variation d'une suite

- Une suite (u_n) est dite croissante si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- Une suite (u_n) est dite décroissante si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- Une suite (u_n) est dite constante si pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 0$.
- Une suite (u_n)est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Remarque :

- On définit de même une suite strictement monotone en utilisant des inégalités strictes.
- Une suite peut être monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple : la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. Les termes d'indice pair sont égaux à 1 et les termes d'indice impair sont égaux à -1.

La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 9$ est croissante à partir de l'indice 3.

MÉTHODE1 : Montrer qu'une suite est monotone par différence de termes

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ puis on regarde son signe :

- Si cette différence est positive, alors la suite est croissante ;
- Si cette différence est négative, alors la suite est décroissante ;
- Si cette différence change de signe, alors la suite n'est pas monotone

Exemple : Étudier la monotonie de la suite *v* définie pour tout entier naturel *n* par :$v_n = n^2 - 8n + 18$

MÉTHODE 2 : Montrer qu'une suite est monotone par quotient de deux termes

Pour une suite à termes strictement positifs, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis on compare avec la valeur 1 :

- Si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante ;
- Si ce quotient est inférieur à 1, alors la suite est décroissante ;
- Si cela dépend des valeurs de *n*, alors la suite n'est pas monotone.

Exemple : Étudier la monotonie de la suite *w* définie pour tout entier naturel *n* par : $w_n = \frac{1}{3^n}$

Propriété : Cas d'une suite définie par $u_n = f(n)$

La suite u est définie par $u_n = f(n)$, avec *f* définie sur [0 ; +∞[.

- Si *f* est croissante sur [0 ; +∞[, alors la suite *u* est croissante.
- Si *f* est décroissante sur [0 ; +∞[, alors la suite *u* est décroissante.

REMARQUE : On prouve de même une stricte monotonie en utilisant la stricte monotonie de *f*.

MÉTHODE 3: Montrer qu'une suite est monotone par l'étude d'une fonction

Si *u* est définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = f(n)$, alors on étudie les variations de *f* sur [0 ; +∞[.

Exemple : Étudier la monotonie de la suite *u* définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = -\frac{1}{4n+1}$

Cas particulier

Propriété : Cas d'une suite arithmétique

Soit la suite *u* arithmétique de raison *r* non nulle et de premier terme u_0.

- Si *r* est négative, alors la suite *u* est décroissante.
- Si *r* est positive, alors la suite *u* est croissante.

Propriété : Cas d'une suite géométrique

Soit la suite *u* géométrique de raison *q* et de premier terme u_0.

- Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite *u* est décroissante.
- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite *u* est croissante.
- Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite *u* est croissante.
- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite *u* est décroissante.
- Si $q < 0$, alors la suite *u* n'est pas monotone.

Exemple :

- La suite *u* définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = -2\boldsymbol{n} + 5$ est arithmétique de raison -2. Elle est donc décroissante.
- La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $0 < \frac{1}{3} < 1$ et de premier terme v_n = -2 < 0. Elle est donc croissante.

2) Suites majorées ; suites minorées ; suites bornées

Soit (u_n) une suite définie sur une partie I de $\mathbb{N}$.

- (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout n de I, $u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout n de I, $u_n \geq M$.
- (u_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :

1) Soit la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$.
   $u_n = \frac{3n+2}{n+1} = \frac{3n+3-3+2}{n+1} = \frac{3(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$ et $3 - \frac{1}{n+1} \leq 3$.
   Par suite pour tout entier naturel n, $u_n \leq 3$. La suite (u_n) est donc majorée par 3.
2) Soit la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = 3 + sin(2n)$.
   Pour tout entier naturel, $-1 \leq sin(2n) \leq 1$; d'où $3 - 1 \leq sin(2n) \leq 1 + 3$; soit $2 \leq u_n \leq 4$. La suite (u_n) est minorée par 2 et majorée par 4. Elle est donc bornée.

Comportement à l'infini

Définition Intuitive : **Suite convergente**

On dit qu'une suite **converge vers** *l* lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de *l* lorsque *n* devient très grand (cela signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.)

Exemple : (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = \frac{5}{n}$
Lorsque *n* tend vers +∞, u_n tend vers 0 ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$). On dit que (u_n) converge vers 0.

VOCABULAIRE : Si une suite (u_n) converge vers *l*, on dit que la suite a pour limite *l*.

Définition Intuitive : **Suite divergente**

On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente. Deux cas sont possibles : la suite n'a pas de limite ; les termes de la suite tendent vers +∞ (ou vers -∞).
On dit alors que la suite a pour limite +∞ (ou -∞).
NOTATION : On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).
REMARQUE : Des définitions plus complètes seront données en Terminale.

Exemple : (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = (-1)^n$. Elle est divergente et n'a pas de limite.

- Exercices d'application :

  On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_{0=1}$ et $u_{n+1=\frac{9}{6-u_n}}$

  1) A l'aide de la calculatrice ; conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que sa limite éventuelle.
  2) On considère la suite (v_n) définie par tout entier naturel n par $v_{n=\frac{9}{u_{n-3}}}$
  3) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
  4) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
  5) Etudier les variations de la suite (u_n).

- Conclusion (Devoirs) :

Module 23: Configurations et transformations élémentaires du plan	
Chapitre : Géométrie analytique du plan	
Classe : P_D	**Prof : OUAFEU TOKAM PAULIN**

Leçon 1: Équation normale d'une droite

Objectif pédagogique : Déterminer l'équation normale d'une droite

Motivation : L'équation normale peut servir à avoir un vecteur normal unitaire pour orienter un axe perpendiculaire à une droite donnée ou determiner la distance d'un point à une droite.

Contrôle de pré requis :

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par C$\binom{2}{4}$ et D $\binom{-1}{0}$

2) Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ dans un repère orthonormé (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$)

Situation problème :

Une ligne a pour équation cartésienne $x + 2y - 4 = 0$ dans un repère orthonormé (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) dont l'origine est un point du sol. Pour certains travaux, un ingénieur veut obtenir un vecteur normal à cette droite qui soit unitaire. Comment va-t-il s'y prendre ?

Activité d'apprentissage :

Soit (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) un repère orthonormé. A $\binom{0}{2}$ et B $\binom{2}{1}$ deux points du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de (AB).

2) Soit l'équation $x + 2y - 4 = 0$. Désignons par a et b les coefficients de x et y respectivement dans cette équation.

a/ Déterminer a et b puis calculer $\sqrt{a^2 + b^2}$

b/Diviser les deux membres de cette équation par $\sqrt{5}$.

c/ Déterminer un vecteur normal à partir de l'équation obtenue.

d/ En déduire sa norme, que pouvez vous conclure ?

Résumé :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ **avec** $(a; b)\#(0; 0)$**. On appelle équation normale de (D) l'équation** $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$

Remarque : Si on pose $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **et** $\sin\theta\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **alors l'équation normale de (D) devient** $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$ **avec** $k = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple :

Soit (D) d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$

On a $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

D'où $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$

Exercice d'application :

Soit la droite (D) d'équation cartésienne $5x + 8y - 7 = 0$

1) **Déterminer un vecteur normal unitaire de cette droite**
2) **En déduire l'équation normale de la droite (L) passant par B** $\binom{2}{-3}$ **et perpendiculaire à (D)**

Leçon 2: Distance d'un point à une droite

Objectif pédagogique : Déterminer la distance d'un point à une droite

Motivation : Cette notion peut servir à déterminer la distance entre les bordures rectilignes d'une fosse et de l'orifice de sa base supérieure.

Contrôle de pré requis :

1) **Comment obtient-on à l'aide du projeté orthogonal la distance d'un point à une droite ?**

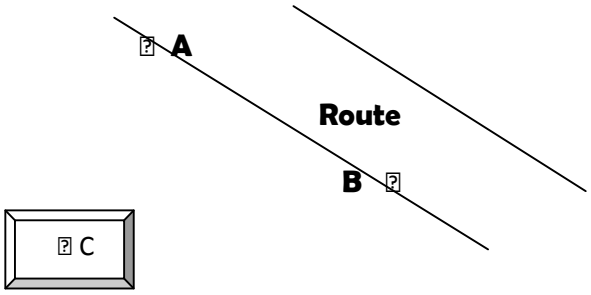
2) **Déterminer l'équation normale de** $(D): 9x + 6y - 7 = 0$

3) Déterminer le système d'équations paramétriques de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ **et passant par A**$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$**.**

4) Soit (D) une droite d'équation cartésienne $2x - y + 5 = 0$ **et B** $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$**.Vérifier que B** $\in$ **(D)**

Situation problème :

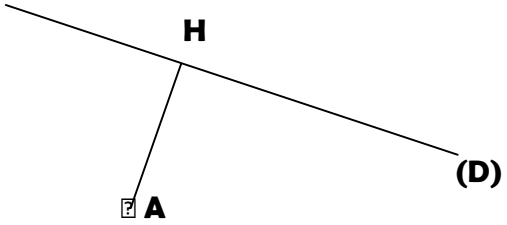
Voici le plan inachevé d'un ingénieur avant qu'il ne mette les dimensions.



Néanmoins les cordonnés de A $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **, B** $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ **et C** $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **sont connues. Détermine la distance entre l'église et la route.**

Activité d'apprentissage:

Soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$ **et** $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ **un point du plan dans un repère orthonormé (O ;** $\vec{\imath};\vec{\jmath}$**).** H **est le projeté orthogonal de A sur (D)**



1) a/ Ecrire le système d'équations paramétriques de la droite (AH)**.**

b/On pose $H\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$**, en déduire que** $\begin{cases}\alpha = x_A + at\\ \beta = y_A + bt\end{cases}$

2) Sachant que $H \in (D)$ **, montrer que** $t = \frac{-(ax_A + by_A + c)}{a^2 + b^2}$

3) En déduire les cordonnées α *et* β **de** H.

4) En déduire l'expression de la distance AH**.**

5) Que devient cette expression si l'équation de (D) est normale?

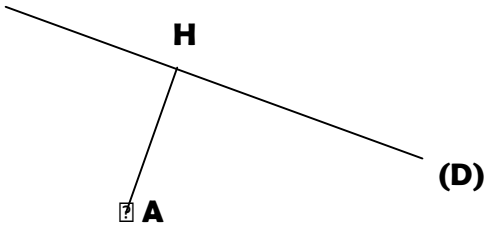
6) En déduire la distance de A **à (D) si (D):**$y = -\frac{1}{2}x + 4$ **et A**$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$**.**

Résumé :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ **,** $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$**. La distance de** A **à (D) est exprimée par** $d(A,(D)) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Remarque : Graphiquement, si H **est le projeté orthogonal de** A **sur (D) alors**

$$d(A,(D)) = AH$$



Exemple : Soit (D) : 3x-2y+7$= 0$ **et** $A\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$**, on a** $d(A,(D)) = \frac{|(3)(6)-2(4)+7|}{\sqrt{9+4}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$

Remarque : Si l'équation de la droite (D) $: ax + by + c = 0$ **est normale, alors**

$$d(A,(D)) = |ax_A + by_A + c|$$

Exemple :

Soit (D) : $3x + 2y - 4 = 0$ **et** $A\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

L'équation normale de (D) est $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$ **,**

d'où $d(A,(D)) = \left|\frac{3}{\sqrt{13}}(6) + \frac{2}{\sqrt{13}}(4) - \frac{4}{\sqrt{13}}\right| = \frac{22}{\sqrt{13}}$

Exercice d'application :

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$**.On considère point le point** $I(-2\,;-1)$ **et les droites** (Dm) **d'équation** $4x - 3y + 2m = 0$ **; où** m **est un nombre réel.**

1. Pour quelle valeur de m **;** I **appartient- il à** (Dm) **?**

2. On suppose dans la suite $m \neq \frac{5}{2}$ **, déterminer en fonction de m la distance de I à (Dm).**

Leçon 3: Équations paramétriques d'un cercle du plan

Objectif pédagogique : **Déterminer un système d'équations paramétriques d'un cercle**

Motivation : **Des véhicules lors de la traversée d'un rond point ont une orbite circulaire. A partir d'un point de la terre on peut repérer leur position connaissant l'angle parcouru grâce aux équations paramétriques d'un cercle.**

Contrôle des Pré requis :

1) **Quelle est la forme générale de l'équation cartésienne d'un cercle connaissant les cordonnées de son centre et son rayon?**

Situation problème :

L'orbite d'un automobile dans un grand carrefour est circulaire et a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 9$.A partir du centre du rond point, un observateur remarque que l'automobile a effectué 30 ° de rotation. Comment peut-il déterminer les coordonnées exactes de l'automobile à cet instant dans un repère orthonormé dont l'origine est le centre du rond point ?

Activité d'apprentissage:

Soit (C) un cercle d'équation cartésienne $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

1) **Diviser les deux membres de cette équation par R^2**
2) **Vérifier que $(\frac{x-a}{R})^2+(\frac{y-b}{R})^2=1$**
3) **D'après la table trigonométrique, il existe θ tel que $\cos\theta=\frac{x-a}{R}$ et $\sin\theta=\frac{y-b}{R}$**
   a/ Exprimer x et y en fonction de R et $\cos\theta$
   b/ Calculer x et y si $R=3$; $a=b=0$ et $\theta=\frac{\pi}{6}$

Résumé:

Soit (C) un cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon R dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. On appelle système d'équations paramétriques de (C) le système $\begin{cases}x=R\cos\theta+a\\y=R\sin\theta+b\end{cases}$; $\theta\in\mathbb{R}$

Exemple: $R=2$; $\Omega\binom{5}{3}$ **, on a le système** $\begin{cases}x=2\cos\theta+5\\y=2\sin\theta+3\end{cases}$; $\theta\in\mathbb{R}$

Exercice d'application :

I / Soit (L)le cercle de centre I$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon 3 et (D) une droite d'équation cartésienne $2x - y + 5 = 0$ dans un repère (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) orthonormé.

1. **Donner une équation Cartésienne de (L).**
2. **Le cercle (L) et la droite (D) sont 'ils tangents ? justifier**

II/ On considère le cercle (C) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 3\cos\theta \\ y = 3 + 3\sin\theta \end{cases}$; $\theta \in \mathbb{R}$, dans un repère (O;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) orthonormé.

1. Démontrer qu'une équation cartésienne de (C) est donnée par :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

2. En déduire les éléments caractéristiques de (C).

3. Vérifier que $A \in$(C) avec $A(4;3)$.

4. Déterminer l'équation normale de la tangente à (C) passant par A.

MODULE 23 Série D : CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES
DU PLAN.

CHAPITRE : **TROGONOMETRIE**

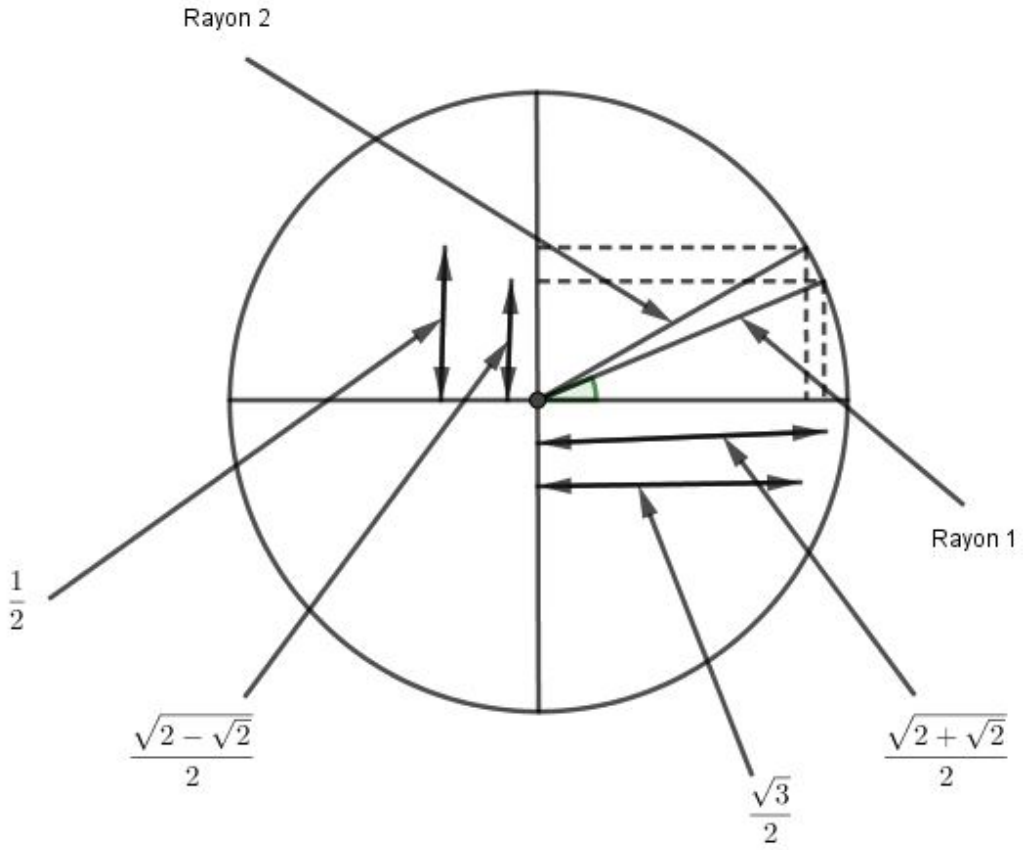
LECON 1 : FORMULES TRIGONOMETIQUES

Pré-requis

- Angles orientés et mesure principale,
- Cosinus des angles particuliers,
- Cercles trigonométriques,
- Normes d'un vecteur,
- Produit scalaire.

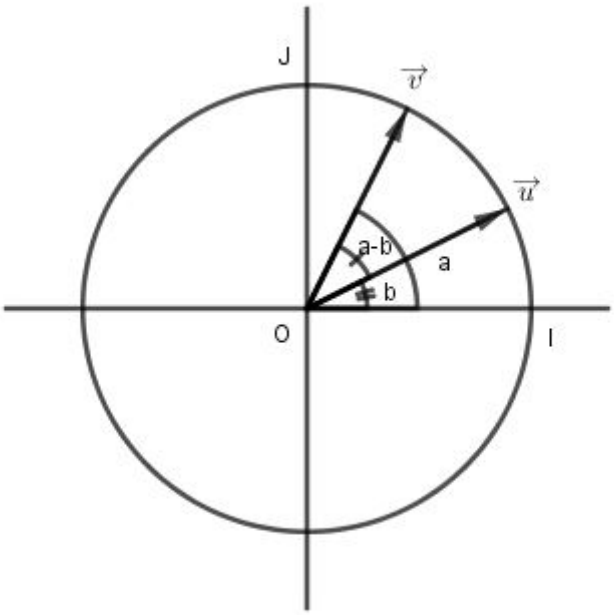
Situation de Vie

Monsieur Pitou est un cultivateur. Il veut réparer les rayons des roues de son porte-tout (communément appelé "pousse-pousse") chez le mécanicien Koum. Le mécanicien lui conseille de placer les rayons des roues de telle sorte que l'angle entre deux rayons consécutifs soit compris entre 5° et 10° ($\left]\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{18}\right[$) ; dans le but d'éviter les pertes de rayons en cas de surcharge. La figure ci-dessous présente les rayons placés par le mécanicien. Les roues de monsieur Pitou peuvent-elles supporter la surcharge ?



Activités d'Apprentissage

Soit a et b deux nombres réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires tels que : b est une mesure de $(\vec{i}, \vec{u})$ et a une mesure de $(\vec{i}, \vec{v})$.



1- a) Justifie que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left(\vec{i}, \vec{v}\right) - \left(\vec{i}, \vec{u}\right)$.

b) En déduis que a - b est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

2- a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

b) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$

c) En déduis que Cos(a-b) = CosaCosb + SinaSinb.

SOLUTION DE LA SITUATION DE VIE :

Soit α la mesure de l'angle entre les rayons 1 et 2. α est telle que $\text{Cos}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}\right)$.

En lisant sur le cercle trigonométrique, les images des points, on constate que $\alpha = \frac{\pi}{24}$

Les roues de monsieur Pitou peuvent supporter la surcharge car l' angle

entre deux rayons consécutifs est $\frac{\pi}{24}$

Résumé

1- Formules Fondamentales

a et b sont deux nombres réels on a :

(i) Cos(a-b) = CosaCosb + SinaSinb.

(ii) Cos(a+b) = CosaCosb - SinaSinb.

(iii) Sin(a-b) = SinaCosb – CosaSinb.

(iv) Sin(a+b) = SinaCosb + CosaSinb.

Bon à Savoir :

pour la démonstration de ces formules, il faut s'inspirer de l'activité d'apprentissage en remarquant que : Cos(a+b) = Cos[a –(-b)] ; Sin(a+b) = Cos[$\frac{\pi}{2}$ - (a + b)] ; Sin(a-b) = Sin[a + (-b)].

- Quelques applications des formules d'addition :
  - Exprimons $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ en fonction de Cosα et Sin α.
  - Calculons $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$;$\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ en remarquant que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

2- Lignes Trigonométriques des angles associés

- Cos(α+2π) = Cosα ;Cos(α+π) = -Cosα ;Cos(α-π) = -Cosα ;$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ = -Sinα et $\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ = Sinα .

- $Sin(\alpha + 2\pi) = Sin\alpha; Sin(\alpha+\pi) = -Sin\alpha$; $Sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = Cos\alpha; Sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = Cos\alpha$.

3- Formules de Duplication

(i) $Cos(2a) = Cos^2a - Sin^2a = 2Cos^2a - 1 = 1 - 2Sin^2a$.

(ii) $Sin(2a) = 2CosaSina$.

(iii) $Cos^2a = \frac{1+Cos2a}{2}$.

(iv) $Sin^2a = \frac{1-Cos2a}{2}$.

Exemple

Calculons $Cos\frac{\pi}{8}$ et $Sin\frac{\pi}{8}$ en remarquant que $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}$.

4- Formules de Transformation

(i) $Tan^2a + 1 = \frac{1}{Cos^2a}$

(ii) $Tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a \times \tan b}$.

(iii) $Tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

(iv) $Tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Exercice d'application

3-a ; 3-b ; 3-c ; 3-d ; 3-e page 177 (CIAM).

Jeu Bilingue

Translate in to english the expressions :

- Cosinus : Cosine
- Sinus : Sine
- Tangente : Tangent
- Formule trigonométrique : Trigonometric formula.

Devoirs : 20 à 28 page 185 (CIAM).

LECON 2 : EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETIQUES

Pré-requis

- Formules trigonométriques
- Equations dans IR
- Encadrement et comparaison

SITUATION DE VIE :

Pour régler le problème des pertes de rayons en cas de surcharge, un autre mécanicien conseille à monsieur Pitou de placer les rayons des roues de son porte-tout tels que le sinus et le cosinus de l'angle entre deux rayons consécutifs respectent la formule : $\cos 2a + \sqrt{3}\sin 2a = \sqrt{3}$

Sachant que $a \in \left]\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{18}\right[$. Monsieur Pitou est embarrassé et t'appelle à l'aide pour déterminer les valeurs possibles de a et dire si les roues de son porte-tout pourront perdre des rayons en cas de surcharge.

Activités d'Apprentissage

Soit (E) l'équation suivante : $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1- Montre que : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x)$

2- Montre que : $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}(\cos t \cos x - \sin t \sin x)$ où t est à déterminer. En déduis que $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à :$\cos(x+t) = \frac{1}{2}$.

3- Résous dans l'intervalle $[0;2\pi[$ l'équation (E) et place les images des solutions sur cercle trigonométrique.

SOLUTION DE LA SITUATION DE VIE :

Il faut résoudre l'équation $\cos 2a + \sqrt{3}\sin 2a = \sqrt{3}$ dans $\left]\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{18}\right[$ et conclure

Résumé

I- PROPRIETES

i) Pour tout réel $\beta \in [-1;1]$, il existe un nombre réel $x \in]-\pi;\pi]$ tel que $\cos x = \beta$.

ii) Pour tout réel $\beta \in [-1;1]$, il existe un nombre réel $x \in]-\pi;\pi]$ tel que $\sin x = \beta$.

iii) Pour tout réel β, il existe un nombre réel $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = \beta$.

II- RESOLUTION DES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Illustrer en classe la résolution des inéquations trigonométriques sur quelques exemples. En utilisant le cercle trigonométrique.

Ici l'enseignant insistera à :

- Déterminer sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points images des réels x tels que cos x ou sin x ou encore tan x soit comparé à un réel donné.
- Déterminer l'ensemble des solutions d'une inéquation trigonométrique sur un intervalle borné de IR, puis sur un intervalle quelconque de IR.

  <u>Applications :</u>

- Résoudre cos x ≥ 0 dans [0;2π]. Utilisez le cercle trigonométrique dans le cours pour hachure la partie du cercle où le cosinus de x est positif et on lira les angles correspondants. Ainsi $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \cup [\frac{3\pi}{2};2\pi]$.
- Résoudre dans _[0;2π], cosx ≥ $\frac{1}{2}$. En utilisant le cercle trigonométrique, on construit la droite d'équation x = $\frac{1}{2}$ et on hachure la partie du cercle où le cosinus de x est supérieur à $\frac{1}{2}$ et on lit les angles correspondants. On a donc $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup [\frac{5\pi}{3};2\pi]$.
- Résoudre dans _[0;2π] , $4\sin^2x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$. En posant X = sin x, l'inéquation devient : $4(X - \frac{1}{2})(X - \frac{\sqrt{3}}{2})$. L'expression $4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3}$ est négative pour les valeurs intérieures aux racines. On construit sur le cercle trigonométrique les droites d'équations y = $\frac{1}{2}$ et y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On hachure l'intérieur des racines et on lit les valeurs correspondantes qui constituent la solution de l'inéquation donnée. La lecture du cercle trigonométrique nous

donnera :

$S = \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$.

III- RESOLUTION DES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

III-1 Equations de type $\cos x=a$; $\sin x=a$; $\tan x=a$

III-1-1) Equation de type $\cos x=a$

a) Méthode de résolution

- Si $a>1$ ou $a<$ -1 ($a\notin[-1\,;\,1]$) alors $\cos x=a$ n'a pas de solution donc $S=\{\ \}$
- Si $a\in[-1\,;\,1]$ alors $\cos x=a \Rightarrow \cos x=\cos\theta$ on a :
  $x=\theta+2k\pi$ ou $x=-\theta+2k\pi$ (avec $k\in Z$)
  D'où $S_{IR}=\{\theta+2k\pi\ ;\ -\theta+2k\pi\ ;k\in Z\}$

b) Exemple d'application

1- Résoudre dans IR l'équation $\cos 2x=-2$

2- a) Résoudre dans IR, puis dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique

Solution : (en classe)

III-1-2) Equation de type $\sin x=a$

a) Méthode de résolution

- Si $a>1$ ou $a<$ -1 ($a\notin[-1\,;\,1]$) alors $\sin x=a$ n'a pas de solution donc $S=\{\ \}$
- Si $a\in[-1\,;\,1]$ alors $\sin x=a \Rightarrow \sin x=\sin\theta$ on a :
  $x=\theta+2k\pi$ ou $x=\pi-\theta+2k\pi$ (avec $k\in Z$)
  D'où $S_{IR}=\{\theta+2k\pi\ ;\ \pi-\theta+2k\pi\ ;k\in Z\}$

b) Exemple d'application

1- Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $\sin(\pi-x)=\dfrac{-1}{2}$

2- Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique

Solution : (en classe)

III-1-3) Equation de type $\tan x=a$

a) Méthode de résolution

$\forall\ a\in IR \quad \tan x=a \Rightarrow \tan x=\tan\theta$ on a :
$x=\theta+k\pi$ (avec $k\in Z$)
D'où $S_{IR}=\{\theta+k\pi\ ;\ k\in Z\}$

b) Exemple d'application

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ 0]$ l'équation $3\tan 2x=\sqrt{3}$

III-2 Equation de type $a\cos x+b\sin x+c=0$

a) Méthode de résolution

Pour résoudre ce type d'équation, on peut procéder comme suit :

- Déterminer le réel $\sqrt{a^2+b^2}$
- Transformer l'écriture $a\cos x+b\sin x$ de la manière suivante :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cos x+\sin\theta\sin x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\ \cos(x-\theta)$$

Ou $=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cos x+\cos\theta\sin x\right)$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$$

- Après cette transformation, on obtient une équation de la forme $\sqrt{a^2+b^2}\ \cos(x+\theta)+c=0$ ou $\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)+c=0$ dont la résolution devient évidente.

b)Exemple d'application

Soit $A(x)=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\ \sin x\cos x-1$

1- Montrer que $A(x)=\cos 2x-\sqrt{3}\ \sin 2x$

2-Montrer que $A(x)=a\ \cos(2x+\theta)$ où a et θ sont des réels à déterminer

3-Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $A(x)=-\sqrt{3}$

4-Placer les images des solutions sur un cercle trigonométrique

Solution : (en classe)

III-3 – Exercice de consolidation

1) Calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans IR l'équation $2x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

3) En déduire les résolutions dans $[0\ ;\ 2\pi]$ de l'équation et l'inéquation suivantes :

$(E):\ 2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{2}\right)\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$(I):\ 2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{2}\right)\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$

Solution : (en classe)

Exercice d'application

4-a, 4-c (les deux), 4-d page 181 (CIAM).

Bilingual game

Traduis en anglais les expressions suivantes :

- Equation trigonométrique : Trigonometric equation
- Inéquation trigonométrique : Trigonometric inequation
- Ensemble solution : Set solution
- Cercle trigonométrique : Trigonometric circle.

Devoirs : 38 ;39 ;41 ;49 ; 61 pages 186 et 187 (CIAM).

9

DENOMBREMENT

L1. LES ENSEMBLES

Compétences à Retenir par les Elèves

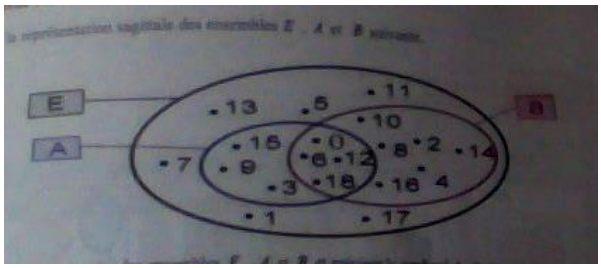
A la fin de cette leçon, l'élève devra :

- Déterminer le cardinal d'un ensemble.
- Déterminer les éléments de la réunion, de l'intersection ou encore du complémentaire d'un ensemble.

Motivations

Dans la vie courante, on est souvent appelé à tavailler sur des groupes de personnes, d'animaux ou d'objets, voir s'ils appartiennent au même ensemble ou même encore voir s'ils sont compatibles…cette leçon aide donc les apprenants à résoudre ces problèmes ou exercices avec une certaine aisance.

Pré-Réquis



Soit la représentation sagittale des ensembles E, A et B suivante.

1. Ecrire en extension les ensembles E, A et B puis préciser le cardinal de chacun d'eux.
2. Existe-t-il des eléments de A qui ne sont pas dans E ? que dit-on des ensembles A et E ?
3. Ecrire l'extension des éléments de E qui ne sont pas dans A. comment nomme-t-on cet ensemble ? quel est le nombre de ces éléments ?

Situation Problème

Sharon s'amuse à énumérer tous les multiples de 2 compris entre 30 et 50 dans un ensemble appelé A ; tous les multiples de 5 compris entre 30 et 50 dans un ensemble appelé B. elle voudrait savoir si ces ensembles sont finis. De plus, son petit frère, Benjamin, qui fait la classe de PD, lui dit que 31 n'est pas dans l'intersection des deux ensembles. Le petit frère a-t-il raison ?

Activité d'apprentissage

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 30 et 50 ; D l'ensemble des entiers naturels multiples de 2 compris entre 30 et 50 et F ; l'ensemble des entiers naturels multiples de 5 compris entre 30 et 50.

1. Énumérer tous les éléments de D, E et F.
2. Déterminer le nombre d'éléments de ces ensembles.
3. Énumérer tous les éléments de E qui sont à la fois dans D et dans F.

RESUME

Soit n un entier naturel et A un ensemble.

- A est un **ensemble fini** si on peut compter tous ses éléments.
- A est un ensemble fini si on peut établir une bijection de $\{1,\ 2, 3 \ldots n\}$ vers A.
- Le **cardinal** d'un ensemble fini A est le nombre d'éléments de l'ensemble A. on le note **Card A**.

PROPRIETES

Soient A, B et E trois ensembles finis.

- A est inclu dans B si tout élément de A est élément de B. on note $A \subset B$ et on a : $\mathbf{A \subset B \leftrightarrow \forall x \in A; x \in B.}$

Exemple :.....

- Le complémentaire de A dans E noté $\complement_E^A$ *ou encore* $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Exemple : $E = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ et $A = \{0, 2; 4; 6; 8\}$. Alors $\complement_E^A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

- La **réunion** de A et B et notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont soit dans A, soit dans B.
- L'**intersection** de A et B et notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple :

Remarque : Deux ensembles A et B sont disjoints $A \cap B = \emptyset$.

AUTRES PROPRIETES

- Si $A \subset B$ alors, $Card\ A \leq Card\ B$.
- Si Card E=n et Card A=p ; alors **Card** $\complement_E^A = n - p$.
- $Card(A \cup B) = Card\ A + Card\ B - Card(A \cap B)$.
- $Card\ \emptyset = 0$.

Exemple :

Dans une classe de PD de 100 élèves, 50 jouent au foot, 60 au hand et 80 pratiquent au moins l'un des deux sports. Déterminer le nombre d'élèves qui :

1. Pratique à la fois les deux sports.
2. Pratique seulement le football.

3. Pratique seulement le handball.
4. Ne pratique aucun des deux sports.

Solution : .....

AUTRES DEFINITIONS

- Soit E un ensemble non vide. Un ensemble de parties de E forme **une partition** de E si :

✓ Elles sont non vides.
✓ Elles sont deux à deux disjointes.
✓ Leur réunion est égale à E.

Exemple : soit l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Alors les ensembles $A = \{0,2,4,6\}$ et $B = \{1,3,5\}$ forment une partition de E.

Il en est de même pour les ensembles $R = \{0,1,2\}$; $S = \{3,6\}$ et $T = \{4,5\}$.

- Soient A et B deux ensembles non vides. On appelle **produit cartésien de A par B** l'ensemble noté **A x B** et défini par : $A \times B = \{(a;b); a \in A; b \in B\}$.
  Exemple : $= \{0,1,2\}$ et $B = \{1,3\}$

Remarque : **Card(AxB)=Card A x Card B .**

PROPRIETES

- $Card\ (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = Card\ (A_1) \times Card\ (A_2) \times \ldots \times Card(A_n)$.
- $A \times A = A^2$ et $A \times A \times A = A^3$.
- Si $A \neq B$ alors $A \times B \neq B \times A$.
- Si $A = \emptyset\ ou\ B = \emptyset; alors\ A \times B = \emptyset$.

EXERCICES D'APPLICATION

1. On jette deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Déterminer :
   a) Le nombre de résultats possibles.
   b) Le nombre de résultats dont la somme est égale à 5.

2. Le menu d'un restaurant est constitué d'une entrée, d'un plat de résistance, d'un dessert et d'une boisson. Ce restaurant dispose de 5 types d'entrées, 7 plats de résistance, 4 desserts et 5 boissons.
   a) Combien y a-t-il de menus possibles ?
   b) Combien de menus comportent le menu numéro 2 ?

9 DENOMBREMENT

L2. P-UPLETS, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

Compétences à Retenir par les Elèves

A la fin de cette leçon, l'élève devra :

- Dénombrer les p-listes, les arrangements de p éléments ou encore les combinaisons de p éléments d'un ensemble fini.

Motivations

Cette leçon nous permet d'effectuer plus aisément les dénombrements et calculs assez longs à l'aide de quelques formules mathématiques.

Pré-réquis

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 6. On tire successivement 4 fois de suite 1 jeton du sac en remettant à chaque fois le jeton tiré avant d'effectuer le tirage qui suit. A l'aide du comptage direct,

a) Déterminer le nombre de résultats de 4 jetons dans l'ordre des tirages.
b) Déterminer le nombre de tirages dans lequel le jeton 1 a été tiré en 3ème position.

Situation Problème

Un jeu consiste à tirer 3 billes parmi 6.

1. De combien de manières peut-on effectuer les tirages si les billes sont tirées successivement et avec remise.
2. De combien de manières peut-on effectuer les tirages si les billes sont tirées successivement et sans remise.
3. De combien de manières peut-on effectuer les tirages si les billes sont tirées simultanément.

Activité d'Apprentissage

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 6. On tire successivement 4 fois de suite 1 jeton du sac en remettant à chaque fois le jeton tiré avant d'effectuer le tirage qui suit. Déterminer le nombre de résultats de 4 jetons dans l'ordre des tirages.

Résumé

Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **p-uplet** de E tout élément de E^p. On a : $E^p = E \times E \times \ldots \times E$.

Propriété 1

Le nombre de p-uplet de E est $\boldsymbol{Card(E^p) = n^p}$.

Exemple : soit $E = \{0, 4, a, b\}$. Alors le nombre de 4-uplet de E est 4^4. Le nombre de 7-uplet de E est 4^7

Définition 2

Soient A et B deux ensembles non vides. Une **application de A vers B** est toute correspondance qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B.

Exemple : De combien de façons peut-on ranger 10 livres dans une armoire à 4 compartiments ? Chaque compartiment pouvant contenir les 10 livres ?

R : il s'agit ici de trouver le nombre d'applications d'un ensemble de 10 éléments vers un ensemble à 4 éléments. 4^{10}

Remarque :

- Un p-uplet est une disposition ordonnée dans laquelle un même élément peut-être repété jusqu'à p fois.
- On utilise les p-uplets dans une épreuve à tirages successifs avec remise.

Exemple : Un sac contient deux boules blanches, 4 rouges et 5 noires toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise 3 boules du sac. Déterminer le nombre de tirages :

a) Possibles.
b) Contenant 3 boules noires.
c) Contenant 3 boules rouges.
d) Contenant 3 boules unicolores.
e) Contenant une seule boule noire.

Définition 3

Soit E un ensemble à n éléments, p un entier naturel non nul plus petit que n. On appelle **arrangement** de p élément de E, tout p-uplet formés d'éléments 2 à 2 distincts.

Soit E un ensemble à n éléments, p un entier naturel non nul plus petit que n. le nombre d'arrangements de p éléments de E est $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Remarque :

- Un arrangement est une disposition ordonnée sans repetition.
- On utilise les arrangements dans une épreuve à tirage successifs sans remise.

Exemple : soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, u, y\}$

1. Le nombre d'arrangements de 3 éléments de E est…

Le nombre d'arrangements de 6 éléments de E est…

2. Dans une course à 08 coureurs, on donne un prix aux trois premiers. Déterminer le nombre de podiums possibles sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo.

Propriété 3

Soit $n \in IN^*$. On pose $n! = n(n-1)(n-2)\ldots \times 3 \times 2 \times 1$. $''n!''$ se lit **factorielle n**.

Par convention, $0! = 1$

Exemple : 4 !=..... 6 !=.....

Propriété 4

Soit $n \in IN^*$ *et* $p \leq n$. Alors **n !=n(n-1) !** et $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

On a : $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

Définition 4

Soit $f: A \to B$ une application. f est injective si deux éléments distincts de A ont deux images distinctes par f. ie $\forall x, y \in A; x \neq y \leftrightarrow f(x) \neq f(y)$.

Remarque : si A et B sont deux ensembles finis non vides et $: A \to B$ une application injective, alors $CardA \leq CardB$.

Propriété 5

Soit $n \in IN^*$ *et* $p \leq n$. Alors le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 5

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. On appelle **permutation de E** tout arrangement des n éléments de E.

Remarque : une permutation de E est une application bijective de E vers E.

Propriété 6

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n élément est $A_n^n = n!$

Remarque : soit le mot AFRIQUE. Le nombre d'anagrammes d'AFRIQUE est 7 !

Définition 6

Soit $n \in IN^*$ *et* $p \leq n$. On appelle **combinaison** de p éléments de E toute partie (sous ensemble) de E ayant p élément.

Propriété 7

Soit $n \in IN^*$ *et* $p \leq n$. Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque : Soit $n \in IN^*$. On a : $\boldsymbol{C_n^0 = 1}$; $\boldsymbol{C_n^1 = n}$; $\boldsymbol{C_n^n = 1}$ ***et*** $\boldsymbol{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$.

- Une combinaison est une disposition non ordonnée et sans répétition.
- On utilise les combinaisons dans une épreuve à tirages simultanés.

Exemple : 15 projecteurs sont disponibles pour éclairer un laboratoire scientifique. De combien de façons peut on l'eclairer avec exactement 08 projecteurs ?

Exemple 2 : on veut constituer un comité de 05 membres dans une classe de 50 élèves contenant 20 garçons.

a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
b) Quel est le nombre de comités contenant exactement 3 garçons ?
c) Quel est le nombre de comités contenant au moins deux filles ?

Propriété 8

Soit $n \in IN^*$ *et* $p \leq n$. Alors

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ **et** $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$ (Cette égalité est appelée **triangle de Pascal**).
- Soient a et b deux nombres réels ; n un entier naturel non nul. Alors
  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$.
  Cette égalité est appelée **Binôme de Newton.**

Exemple : Développer de manière performante $(x+1)^7$.

MODULE 22: ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

PD- 10- STATISTIQUES-GPM Durée 6h

***MOTIVATION** : Les Etats et les sociétés ayant une taille importante ont besoin d'informations chiffrées objectives en vue des décisions raisonnables, ainsi l'organisation des données est au cœur des processus de prise de décision dans les organisations économiques, politiques et sociales désireuses de prospérer.*

Leçon 1 : (1h30) Regroupement en classes

***Motivation** : Lorsque les données statistiques sont nombreuses ou continues, elles peuvent être regroupées dans des intervalles pour faciliter leur lecture.*

***Compétences exigibles** : Calculer les effectifs et fréquences cumulés croissants et décroissants d'une série statistique donnée.*

***Prérequis : 1.** Reconnaitre les éléments d'un intervalle donné*

***2.** Calculer la fréquence d'une modalité dans le cas d'une série statistique discrète.*

Situation problème

A la fin du deuxième trimestre dans une classe de première, les moyennes sur 20 arrondies à l'entier directement inferieur des 60 élèves de cette classe sont les suivantes : 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 5 ; 7 ; 7 ; 11 ; 15 ; 13 ; 11 ; 10 ; 7 ; 8 ; 13 ; 5 ; 9 ; 8 ; 4 ; 8 ; 10 ; 10 ; 14 ; 12 ; 10 ; 12 ; 13 ; 12 ; 11 ; 15 ; 6 ; 12 ; 10 ; 15 ; 10 ; 13 ; 11 ; 11 ; 10 ; 17 ; 16 ; 10 ; 16 ; 10 ; 10 ; 15 ; 11 ; 6 ; 13 ; 12 ; 4 ; 9 ; 9 ; 8 ; 8 ; 15 ; 15 ; 13 ; 14 ; 17.

Le professeur principal doit classer ces notes en quatre catégories : Faible dans $[0;8[$ *insuffisante* $[8;10[$ *Encouragement* $[10;14[$ *Félicitations* $[14;20[$

Au terme de ce classement, le professeur affirme que 20% des élèves ont moins de 10/20. Est-ce-que cette affirmation est vraie ? Justifier votre réponse

Activité

En vous servant des notes ci-dessus, répondez aux questions

1. *Déterminer le nombre d'élèves ayant une moyenne comprise entre 3 et 8 (8 est inclus)*
2. *Compléter le tableau suivant*

Intervalles de notes	$[0;8[$	$[8;10[$	$[10;14[$	$[14;20[$
Nombre d'élèves				

3. *En additionnant tous les nombres de la deuxième ligne, que constate-t-on ?*
4. *Calculer le pourcentage des élèves ayant moins de* $8/20$

Résumé

***D1** : Une classe de modalités est un intervalle de la forme* $[a;b[$ *avec* $a;b \in \mathbb{R}$ *et* $a < b$

***D2** : L'effectif d'une classe* $[a;b[$ *est le nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités appartiennent à l'intervalle* $[a;b[$

***D3** : On appelle fréquence d'une classe, le quotient de son effectif* n_i *par l'effectif total* N *de la population. Si on note* f_i *cette fréquence, alors on écrit* $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$

***D4** : soit* r *un nombre réel,*

- *On appelle effectif cumulé croissant de* r*, (noté ECC) l'effectif de l'intervalle* $]-\infty;r]$
- *On appelle effectif cumulé décroissant de* r*, (noté ECD) l'effectif de l'intervalle* $[r;+\infty[$

- *On appelle fréquence cumulée croissante de r, (notée FCC) le quotient de son effectif cumulé croissant par l'effectif total.* $FCC = \frac{ECC}{N} \times 100$
- *On appelle fréquence cumulée décroissante de r, (notée FCD) le quotient de son effectif cumulé décroissant par l'effectif total* $FCD = \frac{ECD}{N} \times 100$

Exemple :

Dans l'activité précédente,

Intervalles de notes	$[0;8[$	$[8;10[$	$[10;14[$	$[14;20[$
Nombre d'élèves	*11*	*9*	*28*	*12*
ECC	*11*	*20*	*48*	*60*
ECD	*60*	*49*	*40*	*12*

- *L'effectif cumulé croissant de la modalité 8 est 11*
- *L'effectif cumulé décroissant de la modalité 10 est 40*
- *La fréquence cumulée croissante de 8 est* $Fcc = \frac{11}{60} \times 100 \approx 18.33\%$
- *La fréquence cumulée décroissante de 10 est* $Fcd = \frac{40}{60} \times 100 \approx 66.67\%$

  Solution à la situation problème

  20 *élèves ont une note inferieure à* $10/20$ *; soit un pourcentage de* $\frac{20}{60} \times 100 = 33.33\%$ *ainsi l'affirmation du professeur principal n'est correcte.*

Leçon 2 (1h30) Caractéristiques De Position

Motivation *: Permettre d'avoir une idée sur l'ordre de grandeur des grandeurs observées.*

Compétences *: Calculer la moyenne, déterminer la classe modale, le mode et la médiane d'une série groupée en classes.*

Activité *: Le tableau ci-dessous présente le relevé de notes de Mbarga, élève en classe de première A, au cours de l'examen probatoire.*

Matières	*français*	*Anglais*	*Maths*	*Hist/Geo*	*ECM*	*P.C*	*SVT*	*LVII*	*Info*	*EPS*
Note/20	*10*	*11*	*11*	*11*	*10*	*13*	*14.5*	*13*	*08.5*	*11*
Coeff	*4*	*3*	*3*	*3*	*1*	*2*	*2*	*3*	*2*	*2*

1. *Quel est le mode de cette série statistique ?*
2. *Donner la valeur de la médiane*
3. *Dire en justifiant si Mbarga a été reçu à cette session d'examen avec mention. (on rappelle qu'un candidat est déclaré admis avec mention s'il a au moins une moyenne de 12/20)*

Résumé

D1*. On appelle amplitude d'une classe* $[a;b[$ *le nombre réel* $A = b - a$

D2*. On appelle densité d'une classe* $[a;b[$ *d'effectif* n*, le nombre réel* $d = \frac{n}{A}$

D3*. On appelle centre de la classe* $[a;b[$ *le nombre* $c = \frac{a+b}{2}$

D4*. On appelle classe modale d'une série statistique, la classe de densité maximale. On appelle mode, le centre de la classe modale.*

D5. *On appelle Moyenne d'une série statistique groupée en classes, le nombre réel* $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}{N} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \ldots + n_p c_p}{N} = \sum_{i=1}^{p} n_i f_i$ *où* $(n_i ; c_i)$ *est la série des centres des classes associée à la série groupée.* f_i *est la fréquence de la classe de centre* c_i *et* p *est le nombre de classes*

D6. *On appelle médiane d'une série groupée, le nombre* M_e *tel que : la moitié au moins des individus ont une modalité inférieure ou égale à* M_e *et la moitié au moins des individus ont une modalité supérieure ou égale à* M_e

Détermination de la médiane x_e *par la méthode d'interpolation linéaire*

Pour calculer la médiane, on procède comme suit :

i) *On détermine la classe médiane* $[a; b[$

ii) *On pose* $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} M_e\begin{pmatrix} x_e \\ \frac{N}{2} \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ *puis on calcule* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} b-a \\ f(b)-f(a) \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AM_e}\begin{pmatrix} x_e-a \\ \frac{N}{2}-f(a) \end{pmatrix}$ *où* $f(a)$ *et* $f(b)$ *désignent respectivement les effectifs cumulés croissants de* a *et* b

iii) *On résout l'équation* $\frac{x_e-a}{\frac{N}{2}-f(a)} = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ *d'inconnue* x_e

Exemple

Le tableau statistique suivant présente la distribution des retards (en minutes) des élèves d'un établissement scolaire un lundi matin :

Classes	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 14[$	$[14; 16[$	$[16; 20[$	*Total*
Effectifs	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	

1) *Compléter ce tableau avec les effectifs cumules croissants et décroissants, les centres des classes et les amplitudes des classes*
2) *Donner la classe modale et en déduire le mode de cette série.*
3) *Calculer la moyenne de cette série.*
4) *En utilisant la méthode d'interpolation linéaire, déterminer la médiane de cette série.*

Leçon 3 (1h) Caractéristiques de dispersion

Motivation : *Permettre de décrire l'étalement des valeurs du caractère autours de la moyenne.*

Compétences : *Calculer l'écart-moyen ; la variance et l'écart-type d'une série groupée*

Situation de vie

Jean et Mathieu sont deux candidats à un concours de bourse lancé par le ministère des relations extérieures pour une place disponible. Voici ci-contre données leurs fiches de notes :

Fiche de Jean *:*

Matières	*Mathématiques*	*Français*	*Anglais*
Notes/20	*18*	*12*	*4*
Coefficients	*4*	*3*	*3*

Fiche de Mathieu *:*

Matières	*Mathématiques*	*Français*	*Anglais*
Notes/20	*11.25*	*16*	*9*
Coefficients	*4*	*3*	*3*

Lequel des deux sera retenu pour l'attribution de la bourse ?

Activité

En utilisant les données du tableau de l'activité de la leçon 2, déterminer : l'écart-moyen, la variance et l'écart-type de cette série statistique.

Résumé

D1. *On appelle écart-moyen d'une série groupée le nombre réel* $e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|c_i - \bar{x}|$ *où* $(n_i\,;c_i)$ *est la série des centres des classes associée à la série groupée.* p *est le nombre de classes*

D2. *On appelle variance d'une série groupée, le nombre réel positif* $v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i\,(c_i - \bar{x})^2$ *; où* $(n_i\,;c_i)$ *est la série des centres des classes associée à la série groupée.* f_i *est la fréquence de la classe de centre* c_i *et* p *est le nombre de classes.*

Dans la pratique, on utilise la formule de Koenig $v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2 - \bar{x}^2$

D3. *On appelle écart-type, le nombre réel* σ *qui est la racine carrée positive de la variance. Ainsi* $\sigma = \sqrt{v}$

N.B *Un écart-type faible signifie que les valeurs du caractère ne s'écartent par beaucoup de la moyenne tandis qu'un écart-type important signifie que les valeurs du caractère sont largement étalées de part et d'autre de la moyenne.*

Exemple

Compléter le tableau suivant puis calculer l'écart-moyen et l'écart-type de cette série.

Classes	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;14[$	$[14;16[$	$[16;20[$	*Total*
Effectifs	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	
Centre (c_i)							
$n_i\|c_i - \bar{x}\|$							
$n_i c_i^2$							

Solution à la situation problème

La moyenne de Jean est $\bar{X}_J = \frac{4\times18+3\times12+3\times4}{10} = 12$ *; la moyenne de Mathieu est* $\bar{X}_M = \frac{4\times11.25+3\times16+3\times9}{10} = 12$

La variance de Jean est $V_J = \frac{1}{10}[4(18-12)^2 + 3(12-12)^2 + 3(4-12)^2] = 33.6$ *; l'écart type* $\sigma_J = 5.79$

La variance de Mathieu est $V_M = \frac{1}{10}[4(11.25-12)^2 + 3(16-12)^2 + 3(9-12)^2] = 7.725$ *; l'écart type* $\sigma_M = 2.78$

Mathieu est le candidat qui sera retenu parce que $\sigma_M < \sigma_J$

Leçon 4 (2h) Représentations Graphiques

Motivation *Trouver un moyen rapide de comparer et de visualiser la répartition d'une variable ou d'estimer la densité d'une variable statistique.*

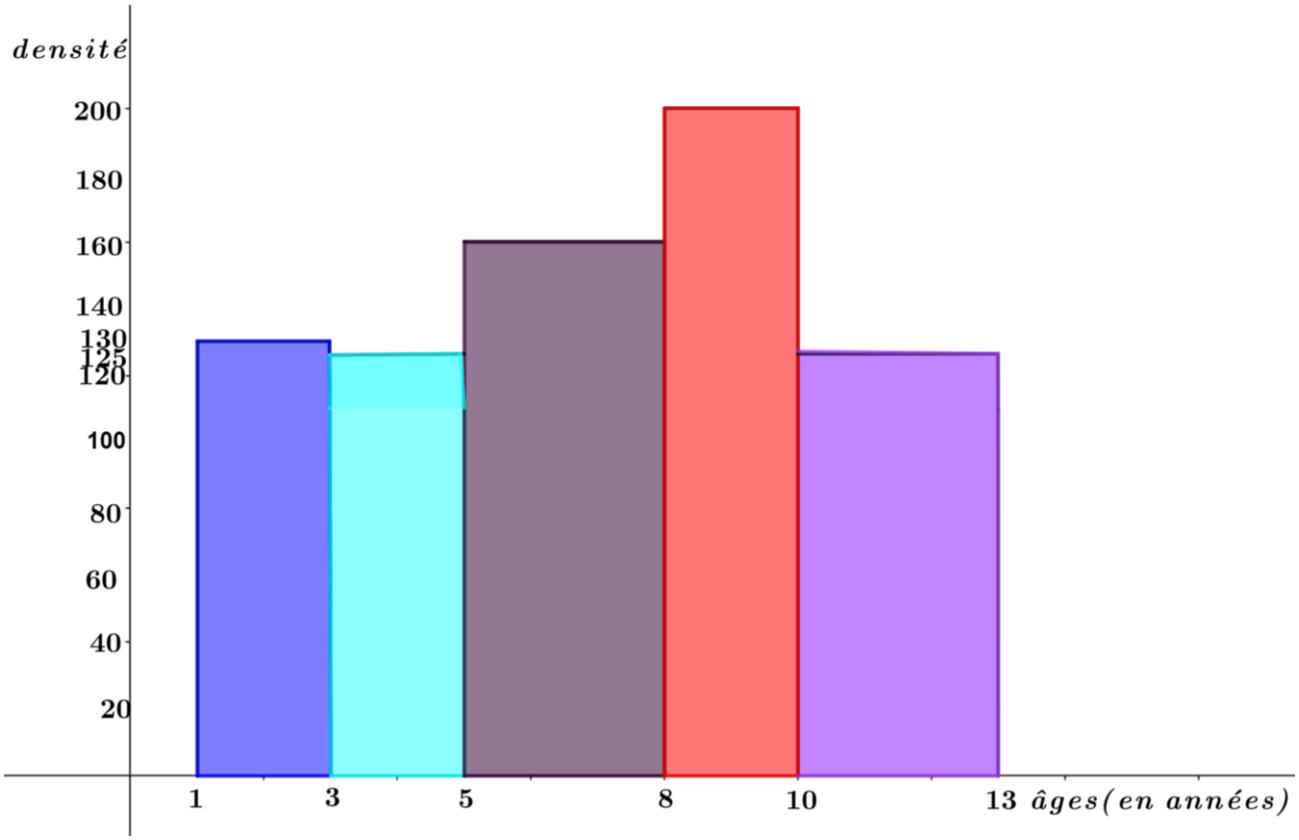
Compétences *: Construire et interpréter un histogramme et/ou Construire et interpréter la courbe des effectifs ou des fréquences cumulés*

Prérequis *: repérer un point par ses coordonnées dans un repère.*

Situation de vie*. Gaston est un vendeur de chaussures pour enfants au marché Mokolo à Yaoundé. Après avoir acheté une quantité de marchandise, il a invité son ami Léopold à l'effet de l'aider à classer le stock qu'il a alors dans son magasin. Après ce travail particulièrement pénible, son ami lui propose de se doter d'un ordinateur pour faciliter sa gestion.*

Ayant pris soin de consigner les quantités de paires de chaussures par tranche d'âges, une fois de retour chez lui, Léopold utilise son ordinateur pour effectuer la représentation ci-dessous, puis il imprime et va remettre à Gaston pour soutenir le conseil qu'il lui a donné à la fin de leur travail.

Aidez Gaston à extraire de cette représentation le maximum d'informations possibles.



Activité d'apprentissage

Construire le diagramme a bandes de la série statistique suivante qui donne le nombre d'enseignants en fonction de l'année de leur première prise de service.

Année de première prise de service	*2001*	*2004*	*2008*	*2011*	*2015*	*2018*	*Total*
Nombre d'enseignants	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	

Résumé

a) Histogramme des effectifs

Un histogramme des effectifs est un diagramme formé de rectangles juxtaposés dont les ''bases'' sont proportionnelles aux amplitudes des classes et les ''hauteurs'' sont proportionnelles aux densités des classes

Exemple de représentation de l'histogramme

Compléter le tableau suivant et représenter l'histogramme de cette série

Classes	[10; 20[	[20; 25[	[25; 40[	[40; 45[	[45; 50[	[50; 60[	*Total*
Effectifs	*60*	*45*	*90*	*40*	*15*	*50*	
Amplitudes							
Densités							

Solution

Echelle *: 1cm² pour 10 individus*

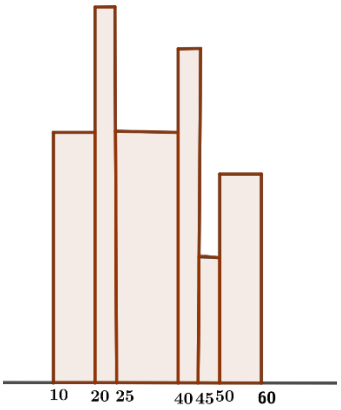


Fig1

N.B *La médiane M_e est telle que la droite d'équation $x = M_e$ partage l'histogramme en deux domaines de même aire.*

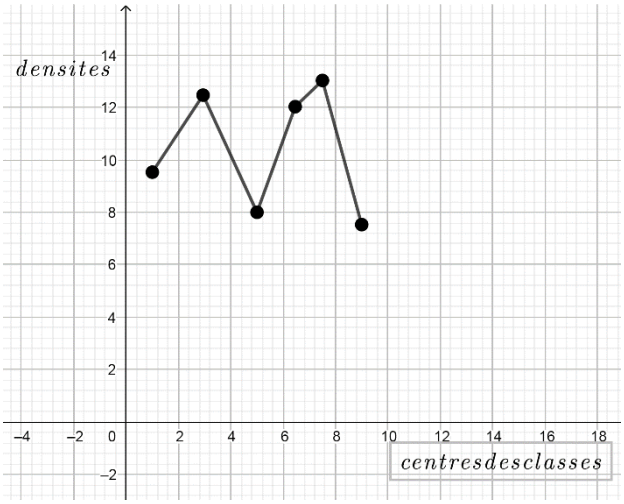
- *Dans un histogramme, la classe modale correspond au rectangle ayant la plus grande « hauteur ».*

b) Polygone des effectifs

Le polygone des effectifs est une ligne brisée obtenue en joignant dans un repère orthogonal, les points dont les abscisses sont les milieux des classes et les ordonnées sont proportionnelles aux densités des classes correspondantes.

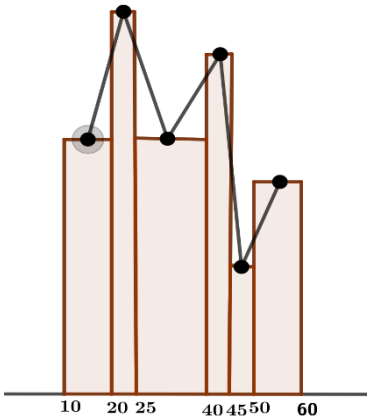
Exemple *Construire le polygone des effectifs de la série statistique suivante.*

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[	*Total*
Effectifs	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	



Remarque *: Le polygone des effectifs se déduit de l'histogramme en joignant les milieux des segments supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme*

Exemple *Polygone des effectifs construit à partir de l'histogramme de* ***fig1****.*



c) Polygone des effectifs cumulés croissants – Polygone des effectifs cumulés décroissants

***D1**. On appelle polygone des effectifs cumulés croissants une ligne brisée joignant chacun des points ayant pour abscisse la borne supérieure d'une classe de la série groupée et pour ordonnée l'effectif cumulé croissant de cette borne dans un repère orthogonal*

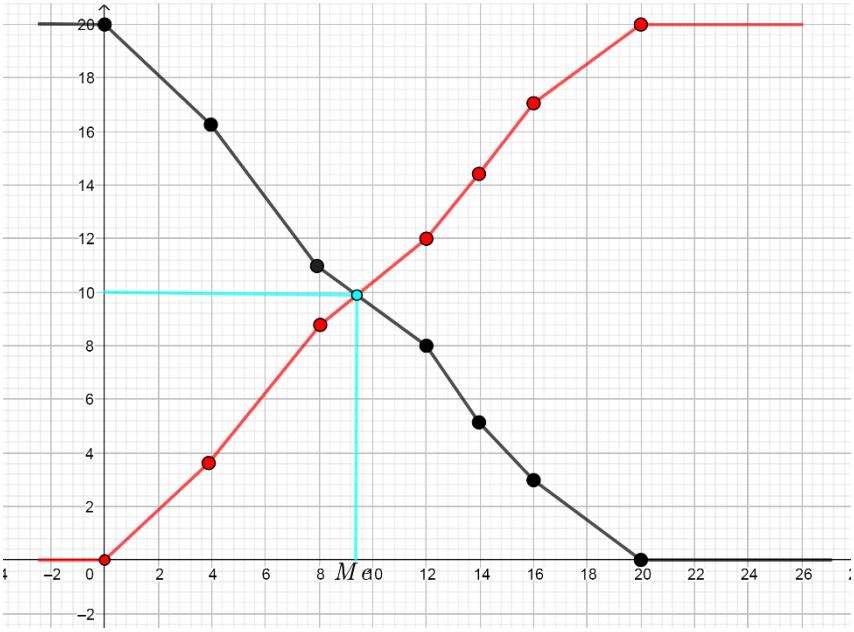
***D2**. On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants une ligne brisée joignant chacun des points ayant pour abscisse la borne inférieure d'une classe de la série groupée et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant de cette borne dans un repère orthogonal.*

***Exemple** : Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants de la série suivante.*

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 14[	[14; 16[	[16; 20[	*Total*
Effectifs	*38*	*50*	*32*	*24*	*26*	*30*	*200*
ECC	*38*	*88*	*120*	*144*	*170*	*200*	
ECD	*200*	*162*	*112*	*80*	*56*	*30*	

***NB** : L'abscisse du point de rencontre des deux polygones est la médiane de la série statistique.*

- *EN rouge, on a le polygone des ECC*
- *En Noire, On a le polygone des ECD*



Solution à la situation problème.

- *Les chaussures ont été regroupées suivant des tranches d'âges*
- *Entre 1 et moins de 3 ans, il y a 260 paires de chaussures ; entre 3 et moins de 5 ans, il y a 250 paires ; entre 5 et moins de 8 ans, il y a 480 paires ; entre 8 et moins de 10 ans, il y a 400 paires et entre 10 et 13 ans, il y a 375 paires de chaussures.*
- *Il y a au total 260 + 250 + 480 + 400 + 375 =1765 paires de chaussures dans le magasin de Gaston.*

Sommaire

MODULE 22 (D) : ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES : 17H 1
CHAPITRE III: INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES 1
motivation: Le graphe est outil pour enseigner la preuve et la modélisation 1
Pré-requis: 1
Compétences attendues: 1
Objectif(s) spécifiques: 1
Situations : Participation à une activité de formation à l'école 1
Catégories d'action : Collecte, traitement et exploitation des données. 1
résumé 2
1. DÉFINITIONS 2
Exemple2: 2
EXEMPLE 3
REMARQUE: Intuitivement, cela signifie que le graphe comporte un seul « morceau » 3
EXEMPLE 3
2. Propriété : 3
3. RESOLUTION de problème 4

MODULE 22 (D) : ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES : 17H
CHAPITRE III: INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES

motivation: Le graphe est outil pour enseigner la preuve et la modélisation

Pré-requis:

Compétences attendues:

- Justifier qu'une représentation graphique est un graphe.
- Justifier qu'un graphe est simple ou orienté ; complet.
- Déterminer l'ordre d'un graphe ;
- Déterminer le degré d'un sommet.
- Reconnaître deux sommets adjacents.
- Représenter la matrice adjacente à un graphe.
- Résoudre des problèmes concrets de la vie courante à l'aide des graphes.

Objectif(s) spécifiques:

Connaître le vocabulaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe.

Situations : Participation à une activité de formation à l'école

Catégories d'action : Collecte, traitement et exploitation des données.

Cinq étudiants A, B, C, D, E doivent passer les examens suivants :

A	Micro Economie, Anglais, Théorie des jeux
B	Probabilités, Analyse financière
C	Macro, Théorie des jeux
D	Anglais, Probabilités, Macro
E	Micro Economie, Analyse financière

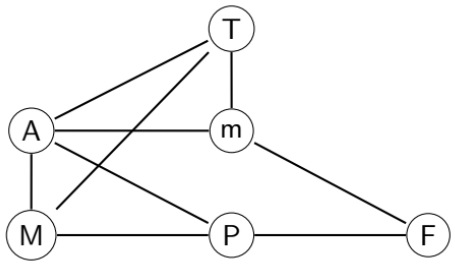
Sachant que chaque étudiant ne peut se présenter qu'a une épreuve par jour, quel est le nombre minimal de jours nécessaire a l'organisation de toutes les épreuves ?

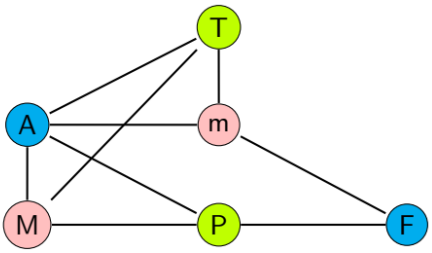
Activité d'apprentissage

nous allons commencer par placer six points représentants les matières à passer

les sommets sont les matières et deux sommets sont adjacents si un étudiant doit passer ces deux matières (i.e. elles sont incompatibles en ce sens qu'elles ne peuvent pas se dérouler la même journée).
Une fois ce graphe établi, on le colorie et chaque couleur représente une journée nécessaire ; deux épreuves ayant la même couleur, donc ne concernant pas un même étudiant, pourront se dérouler la même journée.
T =Theorie des jeux P=Probabilités A= Anglais F=Analyse financière

M=Micro Economie m=Macro

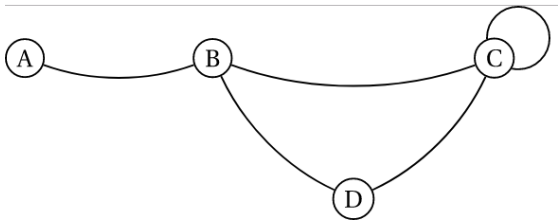




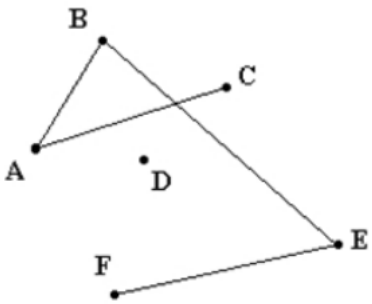
résumé

1. DÉFINITIONS

Un graphe est un schéma contenant des points nommés sommets, reliés ou non par des segments appelés arêtes. C'est aussi composé de **sommets** et d'**arêtes** (ou **arcs**) reliant certains de ces sommets.
Exemple1: Le diagramme ci-dessous représente un graphe comportant 4 sommets et 5 arêtes.



Exemple2:



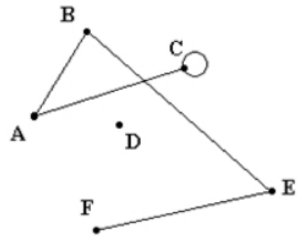
A est un sommet, le segment [AB] est une arête reliant A à B (ou B à A).
D est un sommet isolé, non relié à un autre sommet.

- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
- Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.

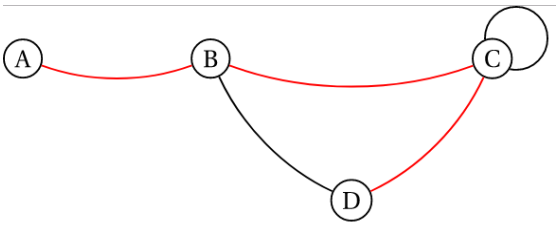
EXEMPLE

- Le graphe représenté ci-dessus Exemple1 est d'ordre 4.
- Le degré du sommet B est 3. Celui de C est 4 (la boucle compte 2 fois).
- A et B sont adjacents. A et D ne le sont pas.
- Dans l'exemple précédent (Exemple 2), A et B sont adjacents, A et E ne le sont pas.

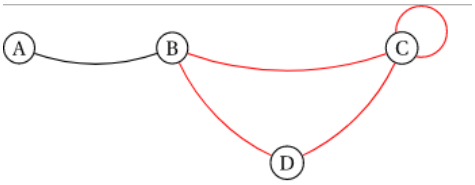
Une **chaîne** (ou un **chemin**) est une suite de sommets telle que chaque sommet est relié au suivant par une arête.
La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes composant cette chaîne.
Une boucle est une arête reliant deux fois le même sommet.

 **Graphe 2**	Dans graphe 2, C est muni d'une boucle.

Un graphe est **simple** s'il ne comporte aucune boucle et que deux arêtes ne relient jamais la même paire de sommets.
Le graphe 1 est simple, le graphe 2 ne l'est pas.
Le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes qui le relient aux autres sommets.
Dans l'exemple graphe2, A est de degré 2, B de degré 2, D de degré 0.
Un **cycle** est une chaîne **fermée** (c'est à dire dont l'origine et l'extrémité sont identiques) dont toutes les arêtes sont distinctes.
EXEMPLE



(A; B; C; D) est une chaîne de longueur 3.

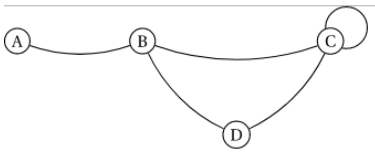


(B; C; C; D; B) est un cycle.

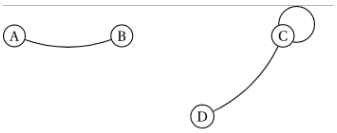
On dit qu'un graphe est **connexe** si deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

REMARQUE: **Intuitivement, cela signifie que le graphe comporte un seul « morceau »**

EXEMPLE



Graphe connexe



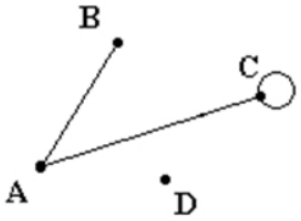
Graphe non connexe

2. Propriété :

la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.
• **Pour le graphe 1**, le degré de chaque sommet est A(2), B(2), C(1), D(0), E(2), F(1), la somme vaut 2 + 2 + 1 + 0 + 2 + 1 = 8.
Le nombre d'arêtes étant 4, la somme est bien le double du nombre total d'arêtes.

• **Pour le graphe 2**, le degré de chaque sommet est A(2), B(2), C(3) car la boucle correspond à deux liaisons, D(0), E(2), F(1), la somme vaut 2 + 2 + 3 + 0 + 2 + 1 = 10.
Le nombre d'arêtes étant 5, la somme est bien le double du nombre total d'arêtes.

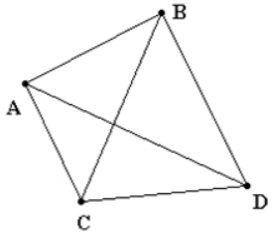
Un sous graphe d'un autre graphe est un graphe composé de certains de ses sommets avec toutes les arêtes qui les relient.



Graphe 3 est un sous graphe du graphe 2.

Graphe 3

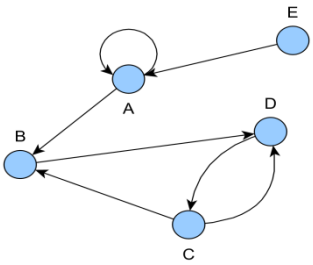
Un graphe est **complet** si tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.



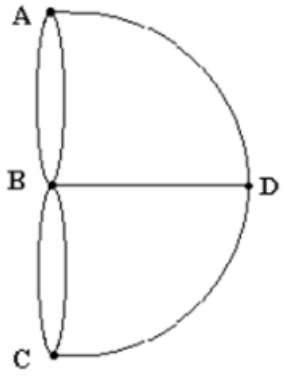
Ci-contre, graphe 4 est un graphe complet d'ordre 4.

Graphe 4

Le graphe 1 n'est pas complet car par exemple B et C ne sont pas reliés.
Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées. Elles ont une origine et une extrémité. Elles ne peuvent être parcourues que dans un sens.



NB: rien n'oblige à « circuler » sur le graphe (aller obligatoirement d'un point à un autre).



La modélisation de ce problème (graphe ci-contre) a l'intérêt de se généraliser, c'est l'un des points de départ de la théorie des graphes.

Pour que l'on puisse faire une promenade ramenant le promeneur au point de départ, il faudrait que le nombre de ponts pour chaque île et chaque rive soit pair.
Si on enlève la contrainte de revenir au point de départ, il faudrait que deux des sommets au plus (le départ et l'arrivée) aient un nombre impair de ponts.

Le problème des sept ponts de Königsberg est l'exemple type de graphe eulérien.

3. RESOLUTION de problème

Une école doit faire passer des tests écrits à quatre élèves : Adrien, Sophie, Charlotte et Matthieu. Sept disciplines sont concernées : les mathématiques, la physique, la biologie, le français, l'anglais, l'espagnol et l'histoire. Adrien doit passer les mathématiques, la physique et l'anglais, Sophie les mathématiques, la biologie et le français, Charlotte les mathématiques, l'anglais et l'espagnol et Matthieu la physique, le français et l'histoire.

Module 24 (D) : GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

Chapitre 12 : Ortogonalité dans l'espace

Durée : Cours : 4h TD : 1h

Compétences visées :

- Réalisation d'une maquette d'un solide
- Assembler les pièces d'un meuble
- Décrire un solide
- Produire des objets

Motivation : Les objets autour de nous ont des formes volumiques et ne peuvent être entièrement décrit que suivant leur épaisseur, hauteur, mais aussi par des objets géométriques tels que les droites et les plans. Ce cours nous permettra de mieux décrire les objets de notre environnement mais aussi nous aidera à construire facilement certains objets dont nous avons besoin pour la décoration ou pour d'autres utilités.

Leçon 1 : Droites Orthogonales (1h, une période)

Compétences exigées :

- Montrer que deux droites sont coplanaires
- Montrer que deux droites sont orthogonales ou perpendiculaire

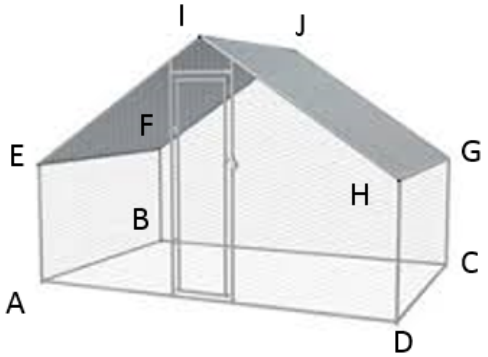
Motivation La conception et la construction des charpentes par exemple utilisent la notion d'orthogonalité de droites. Cette leçon nous donne des outils pour mieux comprendre et décrire ces objets.

Pré-requis :

- Construire deux droites perpendiculaires.
- Construire un pavé droit.

Situation problème :

Pour réaliser la case de son petit chien M. Jean fait appelle à un technicien qu'il lui propose le schéma ci-contre. Pour que les gouttes de pluie ne fassent pas trop de bruit, le technicien affirme que la pente du toit est telle que si l'on rapproche les droites (IH) et (BA) elles seront perpendiculaires.
Son schéma est-il conforme à cette affirmation ?.



Activité d'apprentissage : On considère la figure ci-dessus.

1. Justifier que les droites (EF) et (AB) appartiennent au même plan.
2. Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
3. Comment sont les droites (IH) et (IJ) ?
4. Que peut-on dire des droites (IH) et (AB) ? Justifier.

Solution :

1. Les droites (AB) et (EF) définissent trois points non alignés et par conséquent un plan. Le plan (ABF).
2. Justifions que (IJ) et (AB) sont parallèles.
   La droite (IJ) est parallèle à la droite (EF) et $(EF)//(AB)$. D'où $(IJ)//(AB)$
3. Les droites (IH) et (IJ) sont perpendiculaires.
4. Les droites (IH) et (AB) sont orthogonales car les parallèles à ces deux droites sont perpendiculaires.

Résumé :
On dit que deux droites (D) et (L) sont coplanaires si elles appartiennent au même plan.

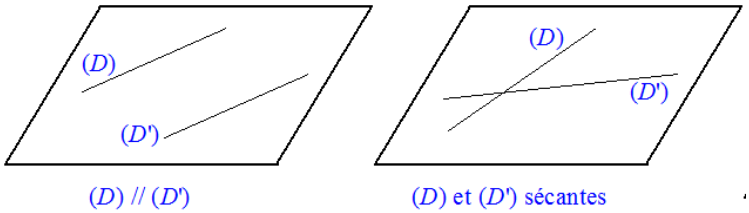


FIGURE 1 – (D) et (D') sont coplanaires

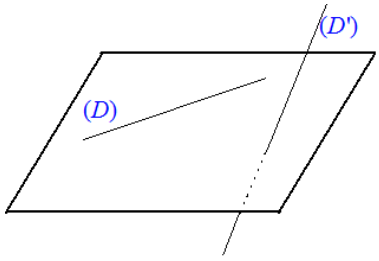
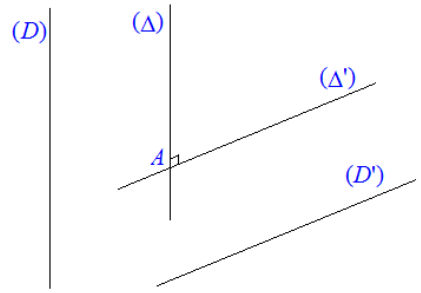


FIGURE 2 – (D) et (D') sont Non coplanaires

Remarque 0.0.1. *Si les points A, B, C et D sont quatre points non alignés d'un plan $(\mathcal{P})$ (appartiennent au plan $(\mathcal{P})$) alors les droites passant par ses points sont coplanaires.*

Définition
On dit que deux droites (D) et (D') sont orthogonales lorsque les droites parallèles à (D) et à (D') passant par un même point sont perpendiculaires.
Lorsque (D) et (D') sont orthogonales. On note $(D) \perp (D')$.



$(D) \perp (D')$ si, A étant un point quelconque, les droites (Δ) et (Δ') passant par A, respectivement parallèles à (D) et (D'), sont perpendiculaires.

Remarque

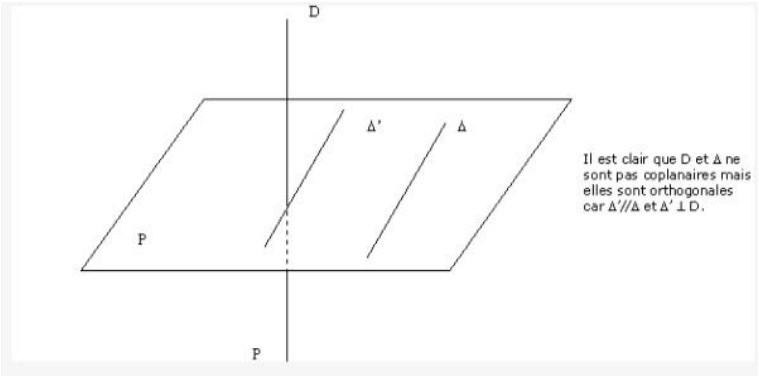
– Deux droites orthogonales ne sont pas forcement sécantes.

– Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

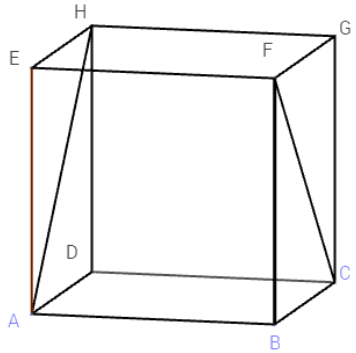
Propriété : Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

(D), (D') et (Δ) sont des droites contenant des arêtes du pavé droit.

$$\begin{cases} (D')//(D) \quad \text{et} \\ (\Delta) \perp (D) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$$



Remarque : Dans l'espace deux droites orthogonales à une même droite ne sont pas forcement parallèles.



$(EF) \perp (AH)$ et $(EF) \perp (FC)$ alors que (AH) et (AH) ne sont pas parallèles.

Exemple : $ABCDEFGH$ est un cube. Démontrer que les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

Solution : (AB) et (GH) sont parallèles et distinctes donc déterminent le plan (ABG).

Dans le plan (ABG), $(GH)//(AB)$ et $GA = AB$. $ABGH$ est donc un parallélogramme d'où $(AH)//(BG)$.

Dans (BCG) les diagonales $[CF]$ et $[BG]$ du carré $BCGF$ ont des supports perpendiculaires. Donc $(BG) \perp (CF)$.

On a : $(AH)//(BG)$ et $(BG) \perp (CF)$ donc $(AH) \perp (FC)$.

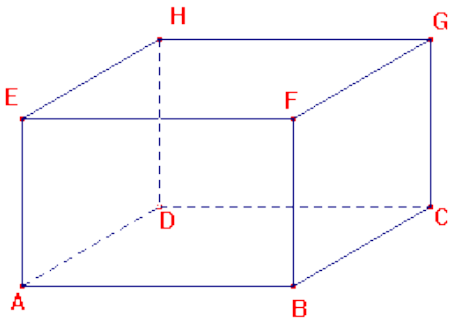
Exercice d'application : Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.

1. Justifier que les droites (BF) et DH sont dans le même plan et préciser ce plan.
2. Comment sont les droites (DH) et (EH) ?
3. Que peut-on dire des droites (EH) et (BF) ?

Solution :

1. Justifions que (BF) et (DH) sont dans le même plan et précisons ce plan.

   Les droites (BF) et (DH) sont strictement parallèles donc définissent le plan (DBF).
2. Les droites (DH) et (EH) sont perpendiculaires.
3. Les droites (EH) et (BF) sont orthogonales car les parallèles à ces deux droites sont perpendiculaires.



Exercice : Soit $ABCDEFGH$ un cube ; I et J les milieux respectifs des segments $[AF]$ et $[CF]$. Dans le triangle équilatéral AFC, (CI) est une médiane et (IJ) une droite des milieux.

Montrer que $(CI) \perp (DG)$ et que $(IJ) \perp (BD)$.

Leçon 2 : Droites et Plans Orthogonaux (1h, une période)

Compétences exigées :

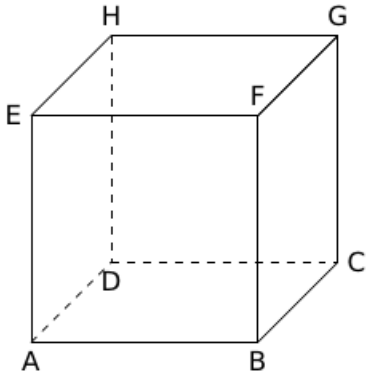
– Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

Motivation : Pour couler une dalle, les ingénieurs en bâtiment doivent placer des supports orthogonaux au plan de la dalle. Il est donc important de bien positionner les supports pour pouvoir supporter la masse de le dalle. Cette leçon donne les outils de base pour réaliser ces ouvrages.

Contrôle de pré-requis

Justifier que deux droites sécantes définissent un plan.

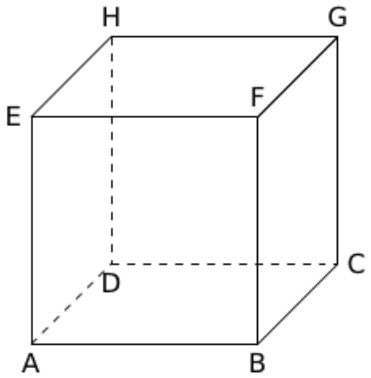
Situation problème :



$ABCDEFGH$ est un cube. On se propose de montrer que la droite (HF) de la figure ci-contre est orthogonale à toutes les droites du plan (EGC).

Peut-on affirmer que la droite (HF) est orthogonale à au moins deux droites sécantes du plan (EGC).

Activité d'apprentissage :



On considère la figure si contre.

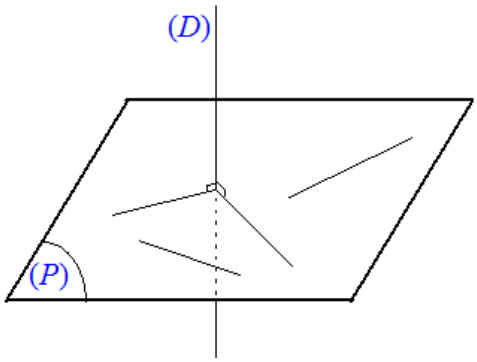
1. Justifier que $(EG) \perp (HF)$ et que $(HF) \perp (AE)$.
2. Justifier que les droites (AE) et (EG) sont deux droites sécantes du plan (EGC).
3. Que peut-on dire des droites (HF) et (CG) ? Justifier.
4. Comment est la droite (HF) par rapport au plan (EGC) ?

Solution :

1. (EG) et (HF) sont les diagonales du carré $EFGH$ donc elles sont perpendiculaires.
   (AE) est parallèle à (FB) et $(FB) \perp (HF)$ d'où $(HF) \perp (AE)$.
2. Les droites (AE) et (EG) sont deux droites sécantes au point E et définissent ainsi le plan (EGC).
3. Les droites (HF) et (CG) sont orthogonale car $(CG)//(AE)$ et $(HF) \perp (AE)$ donc $(HF) \perp (CG)$.
4. La droite (HF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EGC).

Résumé :

On dit qu'une droite (D) et un plan $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux lorsque la droite (D) est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$.

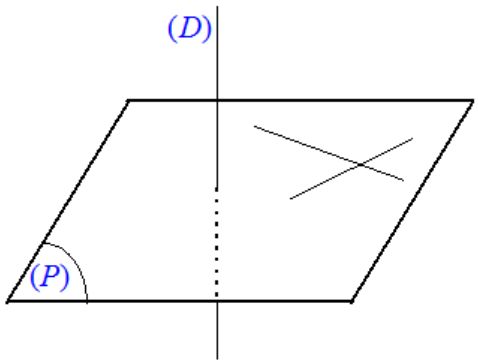


Si $(D) \perp (P)$ alors (D) est orthogonale à toute droite de (P)

Propriété : Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

(D) et (D') sont deux droites sécantes d'un plan $(\mathcal{P})$.

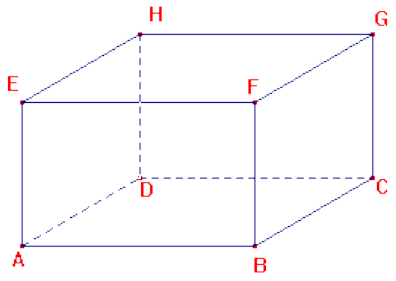
Si $(L) \perp (D)$ et $(L) \perp (D')$ alors $(L) \perp (\mathcal{P})$.



$(D) \perp (P)$ si (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P)

Exemple : $ABCDEFGH$ un pavé droit. Nommer le plan orthogonal à la droite (AE).

Solution :



Propriété : Il existe une droite et une seule passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.

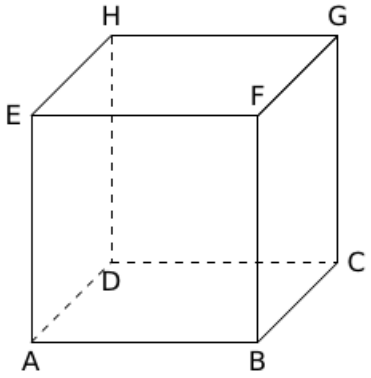
Il existe un plan et un seul passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

Exercice d'application : $ABCDEFGH$ un cube.

1. Justifier que les droites (BF) et (BC) sont coplanaires et sécantes.

2. Quelle est la position relative de la droite (AB) par rapport aux droites (BF) et (BC) ?
3. Justifier que la droite (AB) est orthogonale au plan (CBF).
4. Que peut-on dire des droites (AB) et (CF) ? Conclure.

Solution :



1. Les droites (BF) et (BD) sont sécantes et les points B, F et D sont trois points non alignés et donc définissent un plan contenant les droites (BF) et (BD). D'où ces droites sont coplanaires et sécantes.
2. La droite (AB) est perpendiculaire aux droites (BF) et (BD).
3. La droite (AB) est orthogonale au plan (CBF) car orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
4. (AB) est parallèle à (EF) et (EF) est orthogonale à (CF) d'où $(AB) \perp (CF)$.

   On conclut que la droite (AB) est orthogonale à toutes les droites du plan (CBF).

Exercice : $ABCD$ est un tétraèdre régulier. On se propose de démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

1. Soit I le milieu du segment $[CD]$. Démontrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).
2. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Leçon 3 : Plans perpendiculaires (1h, une période)

Compétences exigées :

– Montrer que deux plans sont perpendiculaires.

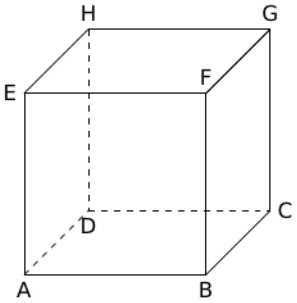
Motivation : En général, dans la construction des bâtiments, les murs doivent être perpendiculaire au plan du sol. C'est ce que nous remarquons en regardant les murs de la classe. Cette précaution permet d'éviter les fissures sur les murs. Cette leçon permet d'aborder la notion de plans perpendiculaires.

Contrôle de pré-requis :

Quelles sont les positions possibles de deux plans dans l'espace ?

Activité d'apprentissage :

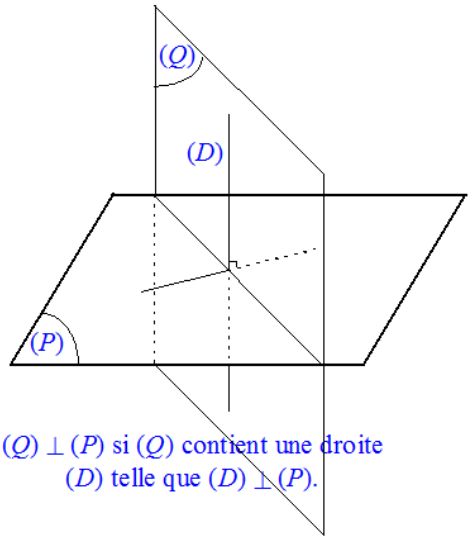
On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.



1. Citer une droite du plan (BFG) orthogonale à (ABC).
2. Citer une droite du plan (ABC) orthogonale à (BFG).
3. Justifier que le plan (EFG) est parallèle au plan (ABC).
4. Citer sur la figure une droite strictement parallèle à (BFG) et donner la position relative de cette droite par rapport au plan (ABC).

Résumé :

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre. Si deux plans sont perpendiculaires, ils sont sécants.



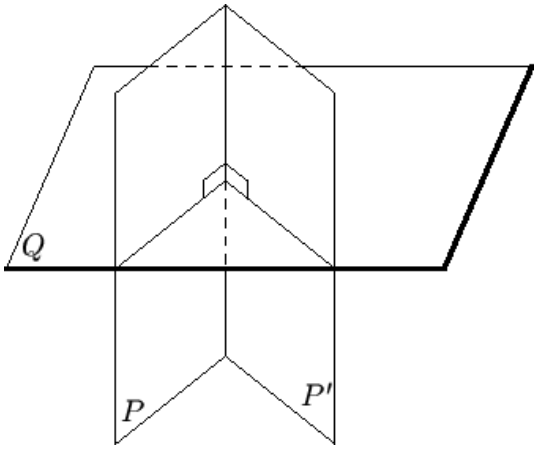
$(Q) \perp (P)$ si (Q) contient une droite (D) telle que $(D) \perp (P)$.

Conséquences :

1. Si une droite (D) est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
2. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété : Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

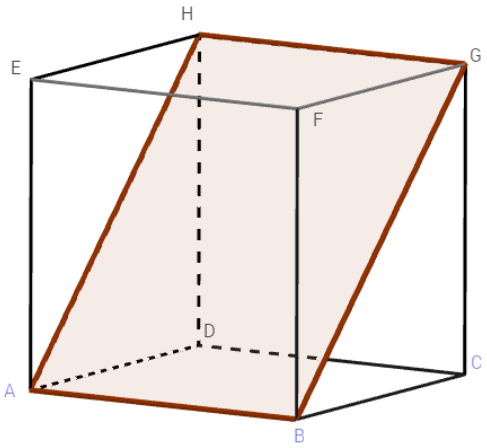
Propriété : Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite d'intersection.



Exercice d'application :

$ABCDEFGH$ est un cube.

Démontrer que les plans (AED) et (ABG) sont perpendiculaires.



Exercice : ABC est un triangle, H son orthocentre. Soit (Δ) la droite orthogonale en H au plan (ABC) et D un point de (Δ) différent de H. Démontrer que les plans (ADH) et (BCD) sont perpendiculaires. Faire une figure.

MODULE 23 : Configuration et transformation élémentaires du plan.

Chapitre : Transformation du plan.

Leçon 1 : Translation

Compétences visées

- ♣ Déterminer l'expression analytique d'une translation.
- ♣ Reconnaitre et caractériser une translation par son expression analytique.

Motivation : Une translation permet de faire glisser une figure selon une direction, un sens et une longueur.

Contrôle des pré-requis

ABCD est un carré. Quelle est l'image des points A et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Situation problème

Monsieur Abdou a un terrain ayant la forme d'un parallélogramme, lors du terrassement de la route, l'engin a emporté une des quatre bornes. Comment peut-il faire pour retrouver la position exacte où se trouvait cette borne ?

Activité d'apprentissage.

ABCD est un carré de sens direct et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé du plan.

1. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t.
   a) Justifier que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
   b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Résumé

1. **Définition**

   La translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ notée $t_{\overrightarrow{v}}$ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$

2. **Propriétés**

   P_1) Une application f du plan dans lui-même est une translation si et seulement si pour tous points A et B tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

   P_2) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. La composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et on a : $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$ (car $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$).

   Remarque :

   R_1) Si $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$, alors $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = Id$ (Identité)

   R_2) Toute translation est une transformation du plan et $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.

3. **Expression analytique d'une translation**

   Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t.

   on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

   Ce système est appelé l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice d'application

1. Reconnaitre et caractériser l'application d'expression analytique $\begin{cases} x' &= x-2 \\ y' &= y+1 \end{cases}$
2. ABCD est un parallélogramme. Quelle est la nature des transformations suivantes : $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$, $t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Leçon 2 : Symétries orthogonales

Compétences visées

- ♣ Caractériser la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.
- ♣ Déterminer l'expression d'une symétrie orthogonale.

Motivation :

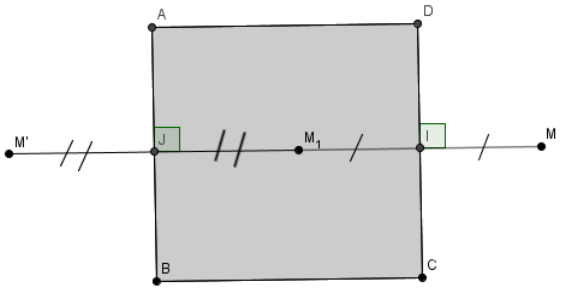
- ♣ Perception des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.
- ♣ Production des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.

Contrôle des pré-requis

ABCD est un carré de centre O. Détermine l'image des points B et C par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Activité d'apprentissage.

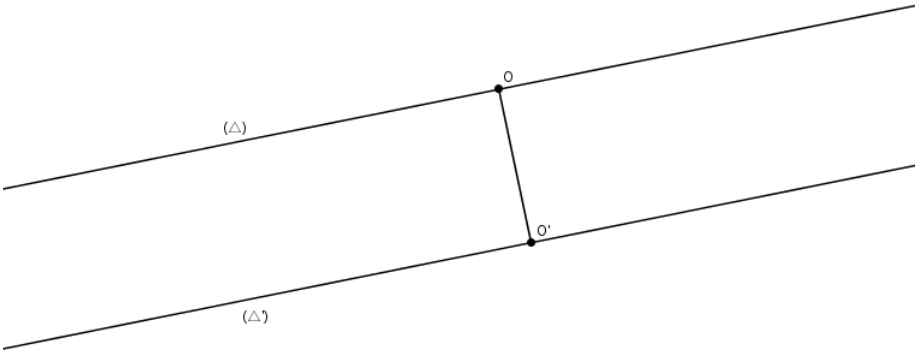
ABCD est un carré de sens direct. Soit M un point du plan, M_1 son symétrique par rapport à la droite (CD) et M' le symétrique de M_1 par rapport à (AB) ; I et J les projetés orthogonaux respectifs de M sur (CD) et (AB).



1. Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{CB}$.
2. On pose $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$
   a) Vérifie que $f(M) = M'$.
   b) Justifie que f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{CB}$.
3. On suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan. Soit $N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $N'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son symétrique par rapport à (AB).
   Justifie que dans ce repère $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ (**Ce système est appelé l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (AB)**)

Résumé

1. **Définition**
   La symétrie orthogonale ou symétrie axiale d'axe (Δ), notée S_Δ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :
   - si $M \in (\Delta)$, alors $M = M'$
   - si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$
2. **Propriétés**
   P_1) Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ'). La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$



P_1) Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur non nul. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\overrightarrow{u}$, il existe une droite $(\Delta^{'})$ et une seule telle que $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{u}}$

Remarque :

R_1) L'ensemble des points invariant par une symétrie orthogonale d'axe (Δ) est la droite (Δ) .

R_2) Lorsque $(\Delta) = (\Delta^{'})$, alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = Id$.

R_3) Toute symétrie orthogonale d'axe (Δ) est une transformation et sa transformation réciproque est $(S_{\Delta})^{-1} = S_{\Delta}$

Exercice d'application

ABC est un triangle équilatéral. I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

a) Quelle est la nature de la transformation $S_{(AB)} \circ S_{(IJ)}$.

b) Détermine une droite (Δ) telle que $S_{\Delta} \circ S_{(CK)} = t_{\overrightarrow{AB}}$.

Leçon 3 : Rotations

Compétences visées

♣ Décomposition d'une rotation.

♣ Reconnaitre et caractériser la composée de deux rotations.

Motivation : En géométrie plane, une rotation permet de tourner une figure autour d'un point et d'un certain angle.

Contrôle des pré-requis

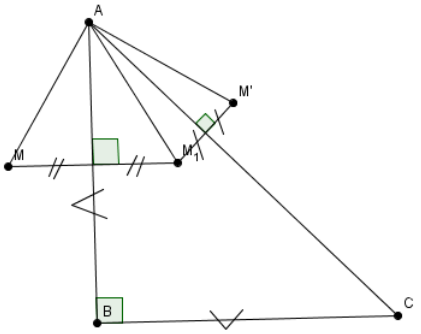
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

a) Quelle est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Trouve l'image des points A et C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Activité d'apprentissage.

ABC est un triangle rectangle isocèle en B de sens direct. Soit M un point du plan, M_1 son symétrique par rapport à la droite (AB) et $M^{'}$ le symétrique de M_1 par rapport à (AC).



1. a) Démontrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_1}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_1})$ et $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AC})$

   b) En déduire que $mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$

2. Justifier que $AM = AM'$

3. On pose $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$. Justifier que $f(M) = M'$, puis en déduire que $f = r(A, \frac{\pi}{2})$.

4. Soit $r_1 = r(A, \frac{\pi}{2})$, $r_2 = r(A, \frac{\pi}{4})$, N un point du plan et N' son image par $r_1 \circ r_2$.

   a) Démontrer que $r_1 \circ r_2(A) = A$

   b) Démonter que $mes(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}) = \frac{3\pi}{4}$

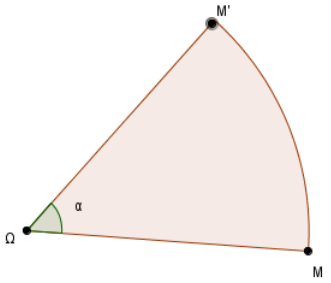
   c) En déduire que $r = r_1 \circ r_2$.

Résumé

1. **Définition**

   Soit Ω un point du plan et α un nombre réel. La rotation de centre Ω et d'angle α, notée $r(\Omega, \alpha)$ est l'application du plan dans lui-même qui transforme tout point M en un point M' tel que

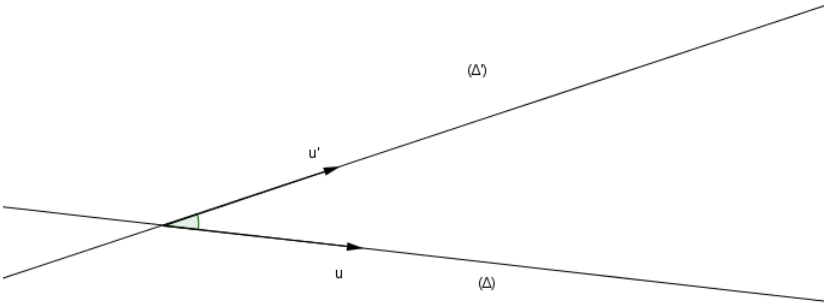
   $$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$$



   Remarque : si α est non nul, alors Ω est le seul point invariant de la rotation.

2. **Propriétés**

   P_1) Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en Ω, S_Δ et $S_{\Delta'}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ'). La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de (Δ) et (Δ').



   Remarque : si $(\Delta) \perp (\Delta')$, alors $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est une symétrie centrale de centre Ω.

   P_2) (**Décomposition d'une rotation**)

   Soit $r(\Omega, \alpha)$ une rotation de centre Ω et d'angle α. La rotation $r(\Omega, \alpha)$ peut-être décomposée comme suite :

   - $r(\Omega, \alpha) = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ où (Δ) est une droite passant par Ω et (Δ') son image par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.
   - $r(\Omega, \alpha) = S_\Delta \circ S'_\Delta$ où (Δ) est une droite passant par Ω et (Δ') son image par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\alpha}{2}$.

P_3) (**Propriétés fondamentale de la rotation**)

r est une rotation d'angle α si et seulement si pour tous points M et N du plan tels $r(M) = M'$ et $r(N) = N'$, on a : $MN = M'N'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$

Remarque : Toute rotation $r(\Omega, \alpha)$ est une transformation du plan et sa transformation réciproque est $(r(\Omega, \alpha))^{-1} = r(\Omega, -\alpha)$

Exemple : Soient O, A, B et C quatre points du plan tel que OA=OB. Construire le point D image de C par la rotation de centre O et qui transforme A en B.

3. **Composée de rotations**

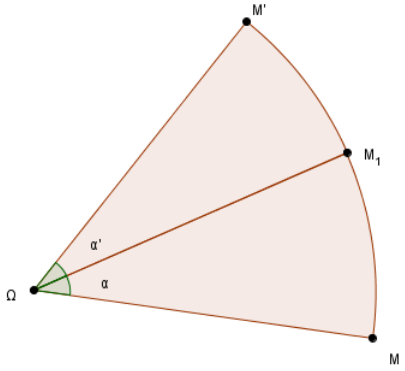
3.1) **Composée de deux rotations de même centre**

Soit r et r' deux rotations de même centre Ω et d'angles respectifs α et α'.

Posons $r(M) = M_1$ et $r'(M_1) = M'$

$$r(M) = M_1 \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M_1 \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}}) = \alpha \end{cases} \text{ et } r(M_1) = M' \iff \begin{cases} \Omega M_1 = \Omega M' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha' \end{cases}$$

On déduit que $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha + \alpha' \end{cases}$ et par suite $r(\Omega, \alpha + \alpha')(M) = r(\Omega, \alpha') \circ r(\Omega, \alpha)(M)$



Propriété

La composée de deux rotations r et r' de même centre Ω, et d'angles respectifs α et α' est la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \alpha'$

3.2) **Composée de deux rotations de centres distincts**

Soit $r = r(O, \alpha)$ et $r' = r(O', \alpha')$ deux rotations de centres distincts ,et d'angles respectifs α et α'.

On sait que **toute rotation peut-être décomposée en deux symétries axiales**.

Posons $(\Delta) = (OO')$. On a $r = S_\Delta \circ S_{\Delta_1}$ où (Δ_1) est l'image de la droite (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\alpha}{2}$. D'autre part, $r' = S_{\Delta_2} \circ S_\Delta$ où (Δ_2) est l'image de la droite (Δ) par la rotation de centre O' et d'angle $\frac{\alpha'}{2}$; d'où $r' \circ r = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

La nature de $r' \circ r$ dépend de la position des droites (Δ_1) et (Δ_2).

♠ Si (Δ_1) et (Δ_2) se coupent en Ω, alors $r' \circ r$ est une rotation de centre Ω et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$ où $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (Δ_1) et (Δ_2).

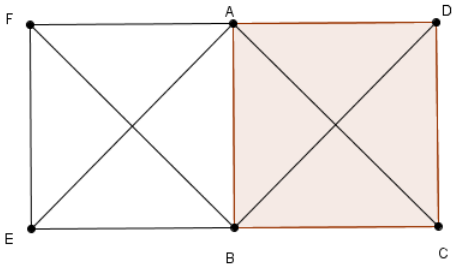
♠ Si (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles, alors $r' \circ r$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{O\Omega}$ où $r' \circ r(O) = \Omega$.

Propriétés

Soit $r = r(O, \alpha)$ et $r' = r(O', \alpha')$ deux rotations de centres distincts.

- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Exemple :ABCD est un carré de centre O et de sens direct, E et F les symétriques respectifs des points C et D par rapport à la droite (AB).



Soit $r_1 = r(A, \frac{\pi}{2})$ et $r_2 = r(B, \frac{\pi}{2})$. La composée $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle π (Symétrie centrale) ; De plus $r_2 \circ r_1(A) = r_2(A) = E$ et $r_2 \circ r_1(B) = r_2(D) = F$. Donc le centre de cette symétrie centrale est le point d'intersection des médiatrices des segments [AE] et [BF] c'est-à-dire le centre du carré AFEB.

Exercice d'application

ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

1. a) Démontrer que $S_{(OA)} \circ S_{(OC)} = S_{(OC)} \circ S_{(OB)}$.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{(OA)} \circ S_{(OC)} \circ S_{(OB)}$.
2. Soit r et r' les rotations de centres respectifs A et C d'angles $\frac{\pi}{3}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $r' \circ r$ et $r' \circ r^{-1}$.

Leçon 4 : Isométries du plan

Compétences visées

- ♣ Reconnaitre et caractériser la composée deux isométries.
- ♣ Reconnaitre les déplacements et antidéplacements du plan

Motivation :

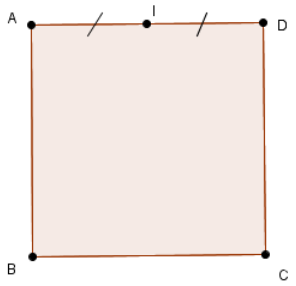
- ♣ Perception des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.
- ♣ Production des formes planes et des transformations dans l'environnement physique.

Contrôle des pré-requis

- ♣ Cite quelques transformations du plan qui conservent les distances.
- ♣ Cite quelques transformations du plan qui conservent les angles orientés,puis celles qui ne conservent pas les angles orientés.

Activité d'apprentissage

1. Soit f une application du plan qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   tel que $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-2 \end{cases}$
   Soit $N\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ d'image $N'\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$, comparer les distances MN et $M'N'$.
2. ABCD est un carré de centre O et de sens direct, I le milieu du segment [AD]. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$. On pose $f = r \circ t$



a) Trouve une droite (Δ_1) telle que $r = S_{\Delta_1} \circ S_{(AB)}$.

b) Trouve une droite (Δ_2) telle que $t = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_2}$.

c) En déduire que $f = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}$.

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

1. **Définitions**

★ Une isométrie f du plan est une application du plan qui conserve les distances. Autrement dit pour tous points M et N du plan tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, on a : $M'N' = MN$

★ Soit f une isométrie du plan, on dit qu'un point M du plan est invariant par f lorsque $f(M) = M$.

Exemple : l'identité du plan, les translations, les rotations, les symétries axiales sont des isométries.

2. **Propriétés**

Soit f une isométrie du plan, A et B deux points distincts tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

P_1) l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$

P_2) l'image du segment [AB] est le segment $[A'B']$

P_3) l'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite $[A'B')$

P_4) l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon r

P_5) les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité

P_6) les isométries conservent les angles géométriques

P_7) les isométries conservent le barycentre

P_8) toute isométrie plane est une transformation et sa transformation réciproque est une isométrie plane

Exemple : Soit f une application du plan qui à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$ f est-elle une isométrie ?

3. **Déplacement et antidéplacement**

3.1) **Définitions**

Soit f une isométrie du plan

★ On dit que f est un déplacement si f conserve les angles orientés.

Exemple : l'identité, la translation et la rotation sont des déplacements.

★ On dit que f est un antidéplacement si f transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemple : une symétrie orthogonale est un antidéplacement.

3.2) **Propriétés**

♦ La composée de deux déplacements est un déplacement.

♦ La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

♦ La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

♦ La réciproque d'un déplacement est un déplacement et celle d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Exercice d'application

Soit ABCD un parallélogramme

1. Préciser la nature des transformations suivantes :
   a) $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)}$
   b) $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$
   c) $h = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CB)}$
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f, g et h lorsque ABCD est un rectangle.

Leçon 5 : Homothétie et isométrie du plan

Compétences visées

- ♣ Déterminer l'expression analytique d'une homothétie
- ♣ Reconnaitre et caractériser la composée de deux homothéties de même centre
- ♣ Reconnaitre et caractériser la composée d'une homothétie et d'une translation

Motivation :

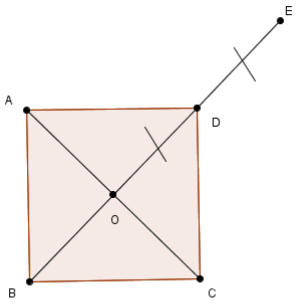
En géométrie, une homothétie est une transformation permettant d'agrandir ou de réduire une figure.

Contrôle des pré-requis

ABCD est un rectangle de sens direct et de centre O, I est le milieu du segment [AD] et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images des points I et O par h.

Activité d'apprentissage

ABCD est un carré de sens direct et de centre O, E est le symétrique du point O par rapport au point C.



1. a) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
   b) Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme O en C.
2. On suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé du plan.
   Soit h_1 l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{2}$, $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ son image par h_1.
   a) Quelles sont les coordonnées du point C.
   b) Justifier que $\overrightarrow{CM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$.
   c) Démontrer que $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}. \end{cases}$ **(Ce système est appelé l'expression analytique de l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{2}$)**
3. Soit h_2 l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose $f = h_1 \circ h_2$.
   M est un point du plan et M' son image par f.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$. **(On pourra poser $M_1 = h_2(M)$)**
   b) En déduire que f est l'homothétie de centre C et rapport -1.
4. On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.
   4.1) Démontrer que $g(O) = O$.
   4.2) Soit M, M_1 et M' trois points du plan tels que $t_{\overrightarrow{AC}}(M) = M_1$ et $g(M) = M'$.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.
   c) Justifier que g est l'homothétie de centre O et de rapport -1.

Résumé

1. **Définition**
   Soit O un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k, notée $h(O,k)$

est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarque :

- si $k = 1$, alors h est une translation.
- si $k = -1$, alors h est une symétrie centrale de centre O.
- O est le seul point invariant par h.

2. **Propriétés**

P_1) Soit f une application du plan, k un réel non nul et différent de 1.
f est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous point M et N du plan tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

P_2) Les homothéties conservent l'alignement.

P_3) Les homothéties conservent le barycentre.

P_4) Les homothéties de rapport k ($k \neq 0, 1$) multiplies les distances par |k|, les aires par k^2 et les volumes par $|k^3|$.

P_5) L'image du cercle de centre O et de rayon r par l'homothétie h de rapport k est le cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $|k|r$

3. **Expression analytique d'une homothétie**

Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit h l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rapport k ($k \neq 0, 1$)

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points du plan.

$$h(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\iff \begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x' = kx+(1-k)a \\ y' = ky+(1-k)b \end{cases} \quad (*)$$

En posant $p = (1-k)a$ et $q = (1-k)b$, (*) devient $\begin{cases} x' = kx+p \\ y' = ky+q \end{cases}$

Ce système est appelé l'expression analytique de $h(\Omega, k)$.

Exemple : Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application d'expression analytique $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-2 \end{cases}$

4. **Composée de deux homothéties de même centre**

Soit h et h' deux homothéties de même O et de rapports respectifs k et k' ($k, k' \neq 0$).

La composée $h' \circ h$ est l'homothétie de centre O et de rapport kk'.

Remarque : si $kk' = 1$, alors $h' \circ h = Id$.

5. **Composée d'une homothétie et d'une translation**

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq 0, 1$) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$).

♦ **Les composées** $h \circ t$ **et** $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.

♦ **Recherche du centre de** $h \circ t$ **et** $t \circ h$

Posons $f = t \circ h$ et $g = h \circ t$

Remarque : Si (D) est une droite passant par Ω et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$, alors les centres des homothéties f et g appartiennent à la droite (D).

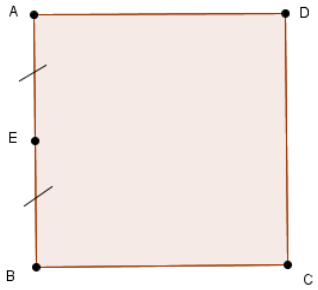
Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $f(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

- Si O_1 est le centre de f, alors $O_1 \in (AA')$. D'autre part $O_1 \in (D)$, donc O_1 est le point d'intersection des droites (AA') et (D).

- De même, le centre O_2 de g est le point d'intersection des droites $(BB^{'})$ et (D).

Exercice d'application

ABCD est un carré de centre O et de sens direct, E le milieu du segment [AB]



1. Soit $h = h(A, \frac{1}{2})$ et $t = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$. On pose $f = t \circ h$
   a) Justifier que f est une homothétie et préciser son rapport.
   b) Déterminer l'image de B par f.
   c) En déduire le centre de f.
2. Soit $h^{'} = h(A, 3)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $h^{'} \circ h$.

Leçon 6 : Similitude

Compétences visées

Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude

Motivation :

En géométrie, une similitude permet de multiplier les distances par une constante fixe et transforme une figure en une autre figure semblable (de même forme).

Contrôle des pré-requis

Cite 3 exemples d'isométries, et un exemple de transformation du plan qui agrandi ou réduit les distances.

Activité d'apprentissage

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit h et t deux transformations du plan dont les expressions analytiques sont respectivement

$\begin{cases} x' = 2x+1 \\ y' = 2y-2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h et t.

b) On pose $f = h \circ t$. Démontrer que l'expression analytique de f est $\begin{cases} x' = 2x+5 \\ y' = 2y-4 \end{cases}$

c) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $N'\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ quatre points du plan.
Démontrer que $M'N' = 2MN$

Résumé

1. **Définition**

   Soit k un réel strictement positif. On appelle **similitude** de rapport k, toute application S du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B', on a : $A'B' = kAB$

2. **Propriétés**

   P_1) Une similitude peut s'écrire comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

   P_2) Une similitude conserve les angles géométriques.

   P_3) Une similitude conserve l'alignement et le barycentre.

   P_4) Une similitude transforme un segment en un segment.

   P_5) Une similitude transforme une droite en une droite.

   P_6) Une similitude conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

   P_7) Une similitude de rapport k transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon kr.

3. **Similitudes directes-Similitudes indirectes**

   Définition

   - Une similitude est directe si elle est composée d'une homothétie et d'un déplacement.

     Exemple : les homothéties, les rotations, les translations la composée d'une homothétie et d'une rotation sont des similitudes directes.
   - Une similitude est indirecte si elle est composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

     Exemple : les symétries axiales, la composée d'une homothétie et d'une symétrie axiale sont des similitudes indirectes.

   Propriétés

   P_1) Une similitude directe de rapport $k \neq 1$ est parfaitement déterminée par la donnée de **son centre, son rapport et son angle**

P_2) Une application f est une similitude directe de centre Ω, de rapport $k \neq 1$ et d'angle α si et seulement si pour tous point M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = kMN$ et $mes(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha$.

P_3) Toute similitude directe S de centre Ω, de rapport $k \neq 1$ et d'angle α se décompose sous la forme $S = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et r est la rotation de centre Ω et d'angle α.

Remarque : le centre d'une similitude directe S est le seul point invariant par S.

Exercice d'application

ABCD est carré de centre O et de sens direct.

1. Soit S la similitude de centre D qui envoie O sur C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Déterminer l'image de A par S.
   c) Construire l'image du point C par S.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2, et r la rotation de centre O et qui transforme C en D. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $h \circ r$

Classe : 1ère TI

Module 23 : Configurations et Transformations Élémentaires du plan

Chapitre 3: Nombres complexes

Leçon 1 : Généralités sur les nombres complexes

Nombre d' heures prévues : 2h

Objectifs pédagogiques : - reconnaître un nombre complexe

- Déterminer la forme algébrique de la somme et du produit de deux nombres complexes

Motivation : Un enfant qui ajoute de la peinture jaune au bleu pour avoir du vert et terminer son jolie dessin, est en train de s'amuser sans le savoir avec des nombres complexes en modifiant la partie imaginaire de l'indice de réfraction de la lumière **n**.

Prérequis : Effectuer les opérations suivantes : $(-1)^4$; $(-1)^7$; $(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

Situation problème : Les progrès scientifiques et technologiques ont amené les chercheurs à découvrir l'existence des nombres qui ne sont pas des nombres réels. Ces nombres appartiennent- ils à quel ensemble ? Comment les appelle-t-on ? Et quel est leur structure ?

1-1- Notion de Nombre Complexe

- **Activité**

1- Donner un nombre qui élevé au carré donne 3

2- Ali élève en classe de 2nde C et ayant eu l'entrée en 1ère TI tombe par curiosité pendant les vacances sur le livre de Maths de son grand frère Ive et découvre cette question « Existe-t-il des nombres donc le carré est -3 ? » sa réponse est non. Ali a-t-il raison ? pourquoi ?

3- En supposant qu'il existe un nombre i tel que $i^2=-1$ détermine deux nombres en fonction de i dont le carré est -3. Ali ayant répondu à cette question revient à la deuxième pour répondre par l'affirmatif. A-t-il raison ? si oui à quel ensemble appartient ces nombres ?

- **Retenons**

- On appelle nombre complexe tout nombre z qui s'écrit sous la forme $z=a+ib$ tel que $i^2=-1$ et a,b des nombres des réels .

  Exemple : $3+2i$; 4 ; $-5i$ sont des nombres complexes
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$

1-2- Notation et vocabulaire

On considère le nombre complexe z défini par $z=a+ib$

- L'écriture $a+ib$ est appelée forme algébrique de z
- Le réel a est appelé partie réel et noté $\mathrm{Re}(z)$

- Le réel b est appelé partie Imaginaire et noté $\text{Im}(z)$
- Si $b = 0$ alors $z = a$. On dit que z est réel ie $z \in \mathbb{R}$
- Si $a = 0$ alors $z = ib$. On dit que z est un imaginaire pure ie $z \in i\mathbb{R}$
- Tout nombre réel est un nombre complexe. On dit que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1-3- Forme algébrique de la somme et du produit de deux nombres complexes

- **Activité**

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1- Ecrit sous la forme $a + ib$ les complexes $2 - 3i + 1 + 2i$ et $(2 + 1) + (-3 + 2)i$ puis comparer les résultats .
2- Ecrit sous la forme $a + ib$ les complexes $(2 - 3i)(1 + 2i)$ et $(2 \times 1 - (-3) \times 2) + (2 \times 2 + (-3) \times 1)i$ puis comparer les résultats

- **Retenons**

On considère les nombre complexes z et z' défini par $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- $z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Exercice d'application

1) Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

$z_1 = -3$; $z_2 = -5 + \frac{7}{3}i$; $z_3 = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$; $z_4 = \frac{7}{3}i$

2) Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_4 = 4 + 2i - (2 + 4i)$; $z_5 = (2 + i)(3 - 2i)$; $z_6 = (1 - i)^2$

$z_6 = (-2 + i)^3$

Leçon 2: Nombres complexes et Représentation Graphique

Nombre d' heures prévues : 2h

Objectifs - Représenter le point image d'un nombre complexe dans le plan complexe

- Représenter l'image d'un vecteur dans le plan complexe

Motivation : Tout ce qui a trait aux phénomènes ondulatoires est plus facile à modéliser avec des complexes. Parce que le plan complexe permet de représenter facilement une grandeur scalaire comme l'intensité. Nous trouvons ceci en mécanique avec les oscillations par exemple.

Prérequis

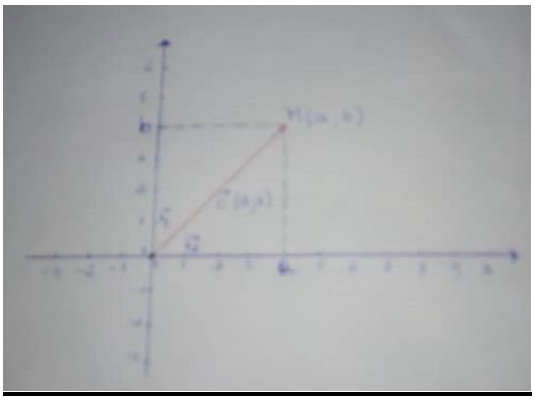
Placer les points suivant dans un repère orthonormé puis calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$;$\overrightarrow{BC}$

Situation problème : Le monde réel est simple : c'est une droite où tous les nombres viennent se ranger "à la queue leu leu" Mais alors où placer le nombre 3 + 2i sur cette droite?

- **Activité d'apprentissage**
- **Retenons**

- Le point $M(a;b)$ est appelé point image du nombre complexe $z = a + bi$ et est noté $M(z)$
- Le nombre complexe $z = a + bi$ est appelé affixe du point $M(a;b)$
- L'axe $(O\ ;\overrightarrow{e_1})$ est appelé axe réel ou axe des abscisses
- L'axe $(O\ ;\overrightarrow{e_2})$ est appelé axe imaginaire ou axe des ordonnées
- Le plan $(O\ ;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ est appelé plan complexe.

Schéma illustratif



Résolution de la situation problème : Ce nombre ne peut pas se placer sur cette même droite, faute de place. Ce nombre contient une partie réelle 3 mais également une partie imaginaire 2i. les nombres complexes vivent donc dans un monde à deux dimensions. On les identifie à des points repérés par leurs coordonnées dans un système d'axe orthonormé.

Propriétés

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $z_B - z_A$
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan complexe. $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$; $z_{\overrightarrow{ku}} = kz_{\vec{u}}$; $k \in \mathbb{R}$

Exercice d'application

Placer dans le plan complexe rapporté au repère $(O\ ;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ les points suivants $A(1-2i)$; $B(-3i)$; $A(-\frac{5}{2})$. puis dans le même repère construire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$;$\overrightarrow{BC}$ et donner leurs affixes respectifs.

Leçon 3: Conjugué, Module et Argument d'un nombre complexe

Nombre d' heures prévues : 2h

Objectifs : - Déterminer le Conjugué, le Module et un Argument d'un nombre complexe

- Utiliser le module pour calculer les distances

Motivation :

Prérequis : le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

2. Déterminer une valeur de x dans chacun des cas suivants :

$\cos(x) = \frac{1}{2}$; $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(x) = 0$; $\sin(x) = -1$; $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Situation problème : un jour après le début du chapitre sur les nombres complexes, Salif élève en TI se précipite sur les exercices et tombe sur cette question : calculer $|2 - 3i|$. Ayant vue les deux barres, il applique toutes les propriétés qu'il connait sur la valeur absolue d'un nombre mais ne parvient pas à la réponse. Que doit-il faire pour trouver ?

2-1- Conjugué d'un nombre complexe

- **Activité**

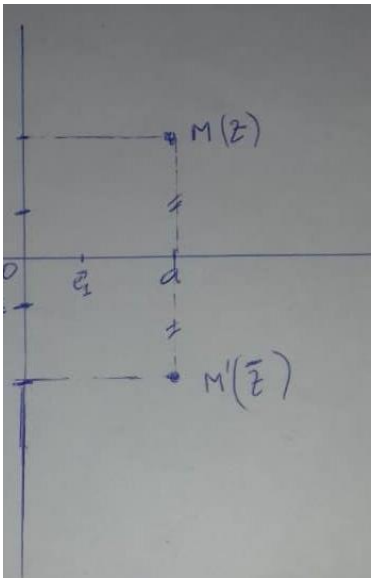
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$. On considère les A et B d'affixe respectifs $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$.

1- Placer ces deux points dans le repère.
2- Comment sont ces points par rapport à l'axe des abscisses ?
3- Que peut-on dire des affixes de ces deux points

- **Retenons :**

- **Définition** : - Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$
  - Graphiquement le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses n

Schéma illustratif



- **Propriétés** : soient z et z' deux nombres complexes. $n \in \mathbb{N}^*$.

$z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2iIm(z)$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$;

$\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$; $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Exemple :

1- Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + 2i$

2- Donner la forme algébrique $\frac{z_2}{z_1}$ puis celle de son conjugué.

2-2- Module d'un nombre complexe

- **Activé**

Soit $z = 1 + 2i$ un nombre complexe. Calculer $\sqrt{z\bar{z}}$ et $\sqrt{1^2 + 2^2}$ et compare les résultats

- **Retenons**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle module de z, le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : Calculer le module des nombres complexes suivants

$z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Propriétés : soient z et z' deux nombres complexes. $n \in \mathbb{N}^*$.

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

- $|z^n| = |z|^n$
- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$
- La distance entre deux points A et B du plan complexe est donnée par $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$ ou z_A *et* z_B sont les affixes respectives des points A et B
- L'ensemble des points M du plan complexe vérifiant $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de r

2-3- Argument d'un nombre complexe

- **Activité**

- **Retenons**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan.. un argument de z noté $\arg(z)$ est toute mesure (en radian) de l'angle $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM})$.

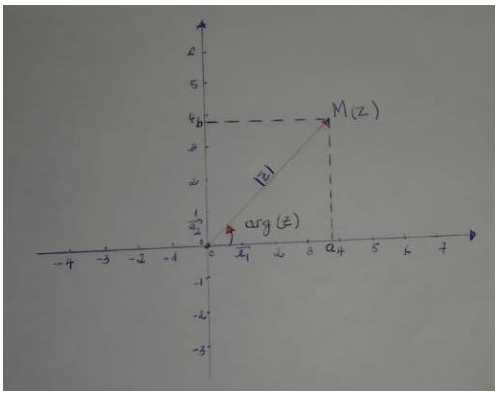


Schéma illustratif

Propriétés : soit α un argument d'un nombre complexe z et α' celui de z'. $k \in \mathbb{Z}$

- Toute mesure d'angle s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ est un argument de z
- On appelle argument principale de z celui compris dans $]-\pi;\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi = -\alpha + 2k\pi$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi = \alpha + \alpha' + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi = \alpha - \alpha' + 2k\pi$ avec $z' \neq 0$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi = n\,\alpha + 2k\pi$
- $\cos(\arg(z)) = \frac{Re(z)}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{Im(z)}{|z|}$ avec $z \neq 0$.

  Remarque : Tout nombre complexe z sous la forme $z = a(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ avec $a = |z|$ et α un argument de z

  Exercice d'Application

  Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$. Soit $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$ deux nombres complexes

  1- Déterminer le module et argument de chacun de ces nombres complexes

  2- Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$ et de $\frac{z_1}{z_2}$ puis donner la forme algébrique de chacun d'eux.

  3- En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

4- Placer dans le repère les points A et B d'affixes respectifs $z_1 \; et \; z_2$ puis déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $|z - z_1| = 2$

MODULE 23(TI) :

Configurations et transformations élémentaires du plan.

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et Applications linéaires

1 Leçon 1 : Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Objectif : Montrer à partir de l'addition et de la multiplication par un réel qu'in ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Motivation : Les lois des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ permettent d'éffectuer des calculs à plusieurs dimensions sur terre et dans l'espace.

Pré-réquis :

▶ Calculs dans $\mathbb{R}$

▶ Structure de groupe et de sous groupe.

▶ Loi de compositions internes.

Situation Problème :

Un jeux consiste à viser instantantanément une balle avec deux cailloux. Dans un premier temps, la balle est sur le sol horizontal.

Comment déterminer(définir) un espace dans lequel vous pouvez déterminer la direction prise par la bale ?

Dans un deuxième temps, la balle est suspendue dans l'air et accrochée à un fil inextensible.

Comment définie un espace dans lequel la direction de la balle n'est pas déterminée ?

Activité d'apprentissage :

On définit l'ensemble E par $E = \mathbb{R}$ et deux loi de compositions :

$$+ : E \times E \longrightarrow E \quad \text{et} \quad \bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow E$$
$$(x; y) \longmapsto x + y \qquad (\lambda; x) \longmapsto \lambda \bullet x$$

1. Justifier que $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe abélien.
2. Soient x, y et $z \in E$

   Exprimer et comparer $(x + y) + z$ et $x + (y + z)$.
3. Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$

   Développer $\lambda \bullet (x + y)$ et $(\lambda + \beta) \bullet x$
4. Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$

   Comparer $(\lambda \times \beta) \bullet x$ et $\lambda \bullet (\beta \bullet x)$
5. Que vaut $1 \bullet x$, pour $x \in E$?
6. En déduire des lois de compositions de $E \times E$ sur $\mathbb{R}$ qui permettent également d'éffectuer les calculs ci-dessous :

   $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\bullet$; $\mathbb{R}^2\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Résumé :

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a les propriétés suivantes :

P.1 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ (**Commutativité**)

P.2 $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$ (**associativité**)

P.3 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{0}$ **est un élément neutre pour** $+$)

P.4 $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ (**Tout vecteur** $\overrightarrow{u}$ **de** E **a un symétrique pour** $+$ **qui est** $-\overrightarrow{u}$

On dit que $(\mathcal{V};+)$ est un groupe commutatif ou un groupe Abélien. De plus, pour tous réels α et β, on a :

P.5 $1\bullet\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

P.6 $\alpha\bullet(\beta\overrightarrow{u})=(\alpha\beta)\bullet\overrightarrow{u}$

P.7 $(\alpha+\beta)\bullet\overrightarrow{u}=\alpha\bullet\overrightarrow{u}+\beta\bullet\overrightarrow{v}$

P.8 $\alpha(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\alpha\bullet\overrightarrow{u}+\alpha\overrightarrow{v}$

Toutes ces propriétés étant vérifiées, on dit que l'ensemble des vecteurs muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication externe d'un vecteur est un **espace vectoriel(ev) sur** $\mathbb{R}$ **ou encore espace vectoriel réel** et on note $(\mathcal{V};+;\bullet)$ est un **espace vectoriel réel.**

Si $(E;+:\bullet)$ est un espace vectoriel réel, les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de $\mathbb{R}$ sont des opérateurs ou des scalaires. Le vecteur nul de E est noté 0_E

Exemple : $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{R}^2;+;\times)$ et $(\mathbb{R}^n;+;\times)$ sont des espaces vectoriels réels

Exercice d'application :

Montrer dans chacuns des cas suivants que $(E;+;\times)$ est un ev sur $\mathbb{R}$

Cas1 : $(\mathbb{R};+;\times)$;

Cas2 : $(\mathbb{R}^2;+;\times)$

Leçon2 : Sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel.

Objectif : Montrer à partir de la stabilité de l'addition et de la stabilité de la multiplication par un réel qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Motivation :

Les lois des sous espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ permettent d'éffectuer des calculs à plusieurs dimensions.

Pré-requis :

▶ Calculs dans $\mathbb{R}$

▶ Structure de groupe et de sous-groupe.

▶ Loi de composition interne.

Activité d'apprentissage.

On définit les ensemles $F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/2x+3y=0\}$ et $G=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x-2y+3z=0\}$

1. (a) Parmis les couples suivants, énumérer ceux qui appartiennent à F.

   $(0;1)$; $(0,0)$; $(-3;-2)$; et $(2,3)$.

   Peut-on dire que F est vide ? justifier votre réponse.

   (b) Parmis les triplets ci-dessous, énumérer ceux qui appartiennent à G

   $(0;1;0)$; $(-1;1;1)$; et $(0,0,0)$.

   Peut-on dire que G est vide ? justifier votre réponse.

2. On pose $\overrightarrow{a} = (x,y) \in F$ et $\overrightarrow{b} = (x';y') \in F$

   Puis $\overrightarrow{u} = (x;y;z) \in G$ et $\overrightarrow{v} = (x';y';z') \in G$

   (a) Calculer $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ puis $2(x+x') + 3(y+y')$. Peut-on conclure que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ appartient à F ?

   (b) Calculer $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ puis $(x+x') - 2(y+y') + 3(z+z')$. Peut-on conclure que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ appartient à G ?

3. On pose $\overrightarrow{a} = (x;y) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ puis $\overrightarrow{v} = (x;y;z) \in G$ et $\beta \in \mathbb{R}$

   (a) Calculer $\alpha.\overrightarrow{a}$ puis $2\alpha x + 3\alpha y$ puis conclure si $\alpha.\overrightarrow{a} \in F$

   (b) Calculer $\beta.\overrightarrow{u}$ puis $\beta x - 2\beta y + 3\beta z$ et dire si $\beta.\overrightarrow{u} \in G$

Résumé :

Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-ensemble de E. F **est un sous-espace vectoriel de** E **si et seulement si :**

1. $F \neq \emptyset$
2. F est stable pour l'addition

   C'est à dire que $\forall \overrightarrow{u} \in F$ et $\forall \overrightarrow{v} \in F$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in F$
3. F est stable pour la multiplication externe

   C'est à dire que, $\forall \overrightarrow{u} \in F$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha.\overrightarrow{u} \in F$.

Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-ensemble de E. F **est un sous-espace vectoriel de** E **si et seulement si :**

1. $F \neq \emptyset$
2. F est stable par combinaison linéaire. C'est à dire que

   C'est à dire que $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in F$

Exercice d'application :

Montrer par deux méthodes différentes que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y - 3z = 0\}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement

Leçon3 : Famille génératrices, Famille libre et Bases d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Objectifs : Montrer à partir de l'addition et la multiplication par des réels la dépendance linéaire d'une famille ou d'un système et justifier qu'une famille est libre ou liée et déterminer la base d'un ev.

Prérequis :

► Calculs dans $\mathbb{R}$

► Loi de composition interne.

Activité d'apprentissage :

on considère les systèmes suivants

$\{(1;0);(0;1)\}$ et $\{(2;1);(-1;-\frac{1}{2})\}$

1. Soient α et β des réels.

   Traduire par une égalité $\alpha(1;0)+\beta(0;1)$ puis $\alpha(2;1)+\beta(-1;-\frac{1}{2})$

2. Déterminer dans chacuns des cas α et β pour que :

   Cas1) $\alpha(1;0)+\beta(0;1)=(0;0)$

   Cas2) $\alpha(2;1)+\beta(-1;-\frac{1}{2})=(0;0)$

Résumé :

Définition1 : On dit que n vecteurs $x_1;x_2;....;x_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairements dépendant si et seulement si, il existe n scalaires $\alpha_1;\alpha_2;.....;\alpha_n$ non tous nuls tels que : $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_nx_n=0_E$

Dans ce cas, on dit que la famille $\{x_1;x_2;....;x_n\}$ est liée.

Exemple :

Montrer dans chacuns des cas suivants que les familles sont liées.

Cas1) $\{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\}$ avec $\overrightarrow{u}(3;1)$ et $\overrightarrow{v}(-1;-\frac{1}{3})$.

Cas2) $\{\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\}$ avec $\overrightarrow{a}=(6;-2)$ et $\overrightarrow{b}=(3;1)$

Solution :

Definition2 : On dit que n vecteurs $x_1;x_2;...;x_n$ d'un espace vectoriel E sont linéairement indépendants ssi toutes combinaisons linéaires des n-vecteurs n'est nul que si les coefficients sont tous nuls.

$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_nx_n=0_E \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=....=\alpha_n=0$

Dans ce cas, on dit que la famille $(x_1;x_2;...;x_n)$ est libre.

Exemple :

Montrons dans chacuns des cas ci-dessous que les familles sont libres.

Cas1) $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}=(2;0)$ et $\overrightarrow{v}=(0;3)$

Cas2) $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ avect $\overrightarrow{u}=(3;2)$ et $\overrightarrow{v}=(-1;4)$

Solution :

Définition3 : On dit qu'une famille S de vecteurs d'un espaces vectoriel E est **génératrice ou système générateur du s-e-v E' de** E ssi tout vecteur de E' est une combinaison linéaire des éléments de S

Exemple :

Détermine une famille génératrice de chacun des sous-espaces vectoriels

1. $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/-x+3y=0\}$
2. $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x+2y-z+0\}$

3. $G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 2y = 0\}$

Solution

Définition4 : On appelle ba $\mathbb{B}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ toute famille génératrice de E qui est libre

Exemple :

La famille $\{(1;0);(0;1)\}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$. Donc est une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice : Montrer que $\overrightarrow{e}_1 = (3;2)$ et $\overrightarrow{e}_2 = (-1;4)$ est une base d'un ev E

Definition5 :

Soit E un $\mathbb{R} - ev$

On appelle base de E, toutes familles libres et génératrices de E

Si $\mathbb{B}$ est une base de E à n éléments $(n \in \mathbb{N})^*$, alors toute autre base de E a aussi $n-$éléments.

On dit alors que E est de dimension n et on note $dimE = n$

Remarques :

1. Dans un e-v, le nombre d'éléments d'une de ses bases donne la dimension de cet ev
2. Un ev de dimension 1 est appelé **Droite vectorielle**
3. Un ev de dimension 2 est appelé **Plan vectoriel**

Exemple

Soient U et V deux sev définient par

$U = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ $\qquad$ $V = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}$

(a) Détermine une base $\mathbb{B}$ de U et la dimension de U notée $dimU$

(b) Détermine une base $\mathbb{B}$ de V et la dimension de V notée $dimV$

Lecon 4 : Applications linéaires

Objectifs : Montrer qu'un application est linéaire puis déterminer le noyeau et l'image d'une application.

Pré-requis :

► Calculs dans $\mathbb{R}$

► Loi de composition interne.

Activité d'apprentissage

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x;y) & \longmapsto & 2x - 3y \end{array}$

On pose $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{v} = (x';y')$

1. Exprimer $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ en fonction de $f(\overrightarrow{u})$ et $f(\overrightarrow{v})$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; Exprimer $f(\alpha\overrightarrow{u})$ en fonction de $f(\overrightarrow{u})$
3. Déterminer x et y pour que $f(x;y) = (0;0)$

4. Déterminer $(x;y)$ pour que $f(x;y)=(a,b)$

Résumé :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E vers F

f est une application linéaire ssi

1. $\forall\ x,y\in\ E,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$
2. $\forall\ x\in\ E$ et $\forall\ \alpha\in\mathbb{R};\ f(\alpha x)=\alpha f(x)$

Définition équivalente : f est linéaire ssi

$$\forall x,y\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

Remarques :

► une application linéaire de E dans F est aussi appelée un homomorphisme de E dans F

► Si E=F, alors f est un endomorphisme de E dans F

► Soit $f\ : E\longrightarrow F$ une application linéaire.

$\longrightarrow$ Si f est injective, alors f est appelée monomorphisme.

$\longrightarrow$ Si f est surjective, alors f appelée un épimorphisme.

$\longrightarrow$ Si f est bijective, alors f est un isomorphisme.

$\longrightarrow$ Si $E=F$ et f est bijective alors, f est un automorphisme.

Soit E un ev sur $\mathbb{R}$, une application linéaire f de E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire de E.

Exemple

1. Montrer que $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow\ \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x+y;y)\end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

2. Montrer que, $\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 3x-5y\end{array}$ est un homomorphisme(une application linéaire)

Remarque : Une forme linéaire est un homomorphisme dont l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}$

Exemple : $\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & 2x-3y+1\end{array}$ n'est pas linéaire car l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}^2$ et non $\mathbb{R}$

Définition : Soit $f:E\longrightarrow F$ une application linéaire :

On appelle **Noyeau de** f et on note $Kerf$ le sous ensemble de E définit par :

$Kerf=\{\overrightarrow{u}\in E/f(\overrightarrow{u})=0_F\}$

Propriétés ;

P_1 $Kerf$ est un sev de E.

P_2 f est injective ssi $Kerf=\{O_E\}$.

P_3 Si E est de dimension fini, un endomorphisme f de E est injectif ssi f est injective.

Exemple : On considère les applications linéaires $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow\ \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x+y;y)\end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow\ \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 2x-3y\end{array}$

Déterminer $Kerf$ et $Kerg$ puis une base de $Kerf$ et de $Kerg$

Définition3 :

Soit f une application linéaire.

On appelle image de f et on note Imf l'ensemble des transformations par f de tous les vecteurs de E.

Imf est donc le sous ensemble de F définit par : l'équivalence :

$\forall \overrightarrow{u}' \in F, \overrightarrow{u}' \in Imf \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{u} \in E / \overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$

Propriété :

P_1) Imf est un s-ev de F

P_2) f est surjective ssi $Imf = F$

P_3) L'image d'une famille libre de E par f est une famille libre de F si f est injective.

P_4) L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si f est surjective.

P_5) L'image d'une base de E est une base de F ssi f est bijective.

Exemple : On considère les applications linéaires $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \longmapsto & (2x+y;y) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 2x-3y \end{array}$

Déterminer Imf et Img puis une base de Imf et de Img

Remarque :

Si f est une application linéaire de E vers F alors $f(0_E) = 0_F$ ensuite $dimKerf + dimImf = dimE$

Exercice d'application :

Un plan $\mathcal{V}_2$ étant rapporté à une base $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, On considère l'application linéaire f de $\mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{V}_2$ définie par :

$f(\overrightarrow{i} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$

1. On pose $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.

   Exprimer x' et y' en fonction de x et de y

2. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on dire de f ?

3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ est une droite vectorielle dont on donnera une base $\overrightarrow{e}_1$

4. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$ est une droite vectorielle dont on donnera une base $\overrightarrow{e}_2$

MODULE 21 : **RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS**

CREDITS : 3 heures

CHAPITRE 1 : L'ARITHMETIQUE

Leçon 1 : Division Euclidienne Dans $\mathbb{N}$

Objectifs : A la fin de cette leçon l'élève devra être capable de :

- Déterminer le quotient et le reste d'une division Euclidienne
- Traduire la division Euclidienne d'un entier a par un entier non nul b par la relation a=bq+r

Motivation : Dans la vie on fait souvent face à des problèmes tels que le partages des biens, le désir de connaître notre jour de naissance connaissant la date etc… ce cours est un outil pour faciliter la réponse à ces diverses préoccupations.

Situation de vie : Jean est né le 5 Mars 1995. Sachant que le 1er Janvier 2001 est un Lundi, quel jour de la semaine Jean est-il né ?

Pré-requis :

1. Dresser la liste des diviseurs positifs de 36.
2. Quel est le quotient de la division de 1250 par 7 ? et le reste ?

Activité D'Apprentissage

Un collège doit transporter ses 300 élèves dans des bus de 45 places.

1. Combien faudra-t-il de bus pour transporter tous ces élèves ?
2. Combien il y aura-t-il de places vides dans le dernier bus ?

I) Divisibilité Dans $\mathbb{N}$

I-1) Définition

Soient a et b deux entiers naturels, a$\neq 0$. On dit que a divise b ou encore que b est divisible par a s'il existe un entier naturel k tel que b=ak et on note a|b.

I-2) Propriétés

- Si a et b sont deux entiers naturel, a$\neq 0$ alors a|b si et seulement si $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$
- Tous les entiers non nuls divisent 0 et tous les entiers sont divisibles par 1
- Si a|b et b|c alors a|c

- Si a|b alors a≤b
- Si a|b et b|a alors a=b
- Si a|b et a|c alors a|(kb+k'c) pour tous entiers k et k'

La démonstration des propriétés ci-dessus est immédiate.

Exemples D'application

1. Soient a et b deux entiers naturels, montrer que si 7 divise 2a+3b alors 7 divise 5a+4b.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on n^2+1 divise n+1?

Solution

1. Supposons que 7 divise 2a+3b. Puisque 7 divise 7 alors 7 divise 6(2a+3b)-7(a+2b)=5a+4b.
2. n^2+1 divise n+1$\Leftrightarrow$ $n^2+1= k(n+1)$, $k\epsilon\mathbb{N}^*$…. (1)

   n^2+1 divise n+1 $\Longrightarrow n^2+1\leq n+1$

   $\Rightarrow k(n+1)\leq n+1$

   $\Longrightarrow k \leq 1$

   $\Rightarrow k = 1$

Ainsi (1) implique que $n^2+1=n+1$ d'où n(n+1)=0 ie n=0 ou n=1.

II) Division Euclidienne Dans $\mathbb{N}$

II-1) Définition

On appelle **division Euclidienne** toute division ayant un quotient entier et un reste.

Exemple

Effectuons la division Euclidienne de 80 par 7.

80	7
3	11

Le quotient de la division Euclidienne de 80 par 7 est 11 et le reste vaut 3.

II-2) Théorème (Division Euclidienne)

Soient a et b deux entiers tels que a>b alors il existe q entier non nul et r entier tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

De l'exemple précédent on peut écrire 80=7x11+3 cad q=11 et r=3.

Remarque : si b|a alors r=0 ce qui signifie qu'un entier naturel non nul b divise un entier naturel a si le reste de la division Euclidienne de a par b vaut 0.

RESOLUTION DE LA SITUATION DE VIE (on rappelle que les années 1996 et 2000 sont bissextiles).

Exercices

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\frac{35}{n-4}$ entier ?
2. Dans chacun des cas suivants déterminer le quotient et le reste de la division Euclidienne de a par b
   a) a=65 et b=9 b) a=198 et b=15 c) a=432 et b=67
3. Un entier naturel n est tel que le reste de sa division par 5 vaut 3 et si on le divise par 6 le précédent quotient diminue de 1 et le reste vaut 4. Déterminer n.
4. La division Euclidienne de 95 par un entier b a pour quotient 23 et pour reste r. Déterminer les valeurs possibles de b et r.

Leçon 2 : Numération De Base a ($2 \leq a \leq 10$)

Objectifs : A la fin de cette leçon l'élève devra être capable de :

- Ecrire un entier dans un système de numération de base a.
- Donner l'écriture d'un entier dans une base connaissant son écriture dans une autre base.
- Additionner et multiplier deux entiers dans le même système de numération.

Motivation : On a pour coutume d'effectuer des calculs et opérations tels que l'addition et la multiplication en tenant compte du fait que les objets sont regroupés en dizaines, qu'en serait-il si on les regroupait en nombres différents de 10 ? Cette leçon nous aidera à mieux appréhender cette notion.

Situation de vie :

M. ALIOU possède au sein de son domicile un coffre-fort dont l'ouverture est cryptée par un code géré par un mini ordinateur. Ce dernier étant au boulot et désireux d'urgence d'un document se trouvant dans son coffre, décide de commissionner son fils OMAR pour effectuer cette tâche et lui dit ceci : << le mot de passe est le nombre 45 en langage binaire>>. Aide OMAR à ouvrir le coffre.

Pré-requis :

Décomposer 1254 en puissances décroissantes de 10.

Activité D'Apprentissage

Nous savons compter depuis la maternelle en utilisant les chiffres de 0 à 9. Pour cela, une fois après avoir compté de jusqu'à 9, nous passons à 10, 11….. Ce sont les mêmes chiffres que l'on utilise avec une position en plus communément appelée **chiffre des dizaines.** Supposons que l'ensemble des chiffres va de 0 à 7. Comment noterions-nous dans ce cas le nombre 19 ?

I) Définitions Et Théorème

I-1) Définitions

a) On appelle **système de numération** l'ensemble de règles permettant de représenter les nombres.
b) On appelle **base** d'un système de numération le nombre de chiffres utilisé dans le dit système. On distingue entre autre : le système de **base 2 (binaire)** utilisant les chiffres 0 et 1, le système de **base 8 (octal)** utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 et le système de base 10 (décimal) qui utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

I-2) Théorème

Soit $b \geq 2$ un entier, tout entier naturel N peut s'écrire sous la forme $N= a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$, avec a_i entiers et $a_n \neq 0$. On note $N=(a_na_{n-1}\ldots a_1a_0)_b$ et cette notation est l'écriture de N en base b.

Exemple d'application

Ecrire le nombre 56 du système décimal en base 5.

Solution

$56= 1+1x5+2x5^2$ donc $56=(211)_5$

II) Passage D'une Base A Une Autre

II-1) Conversion De La Base 10 Vers La Base b

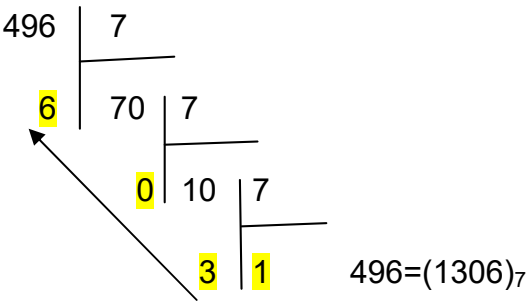
1) Propriété

Pour déterminer l'écriture d'un nombre en base b à partir de son écriture en base décimale, on procède par des divisions successives de ce nombre par l'entier b jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient strictement inférieur à b. Et l'écriture du nombre en base b se déduit en prenant le dernier quotient et en remontant tous les restes des précédentes divisions.

Exemple

Ecrire 496 en base 7.

Solution



$496=(1306)_7$

II-2) Conversion D'une Base a A Une Base b ($a \neq 10$)

Pour écrire un nombre dans un système de base b à partir de son écriture dans un système de base a, on procède comme suit :

→ On convertit ce nombre dans le système décimal à l'aide de décomposition en puissance de a.

⟶ Ensuite on convertit le résultat de la base décimale à la base b comme vu précédemment.

Exemple D'application

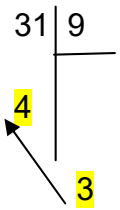
Convertir $(11011)_2$ en base 9.

Solution

$(11011)_2=1+1x2+0x2^2+1x2^3+1x2^4$

= 31

= $(34)_9$



III) Addition Et Multiplication Dans Le Même Système De Numération

Pour additionner ou multiplier deux nombres dans le même système de numération on procède comme suit :

Méthode 1

Convertir les deux nombres dans la base décimale, effectuer l'opération désirée et reconvertir le résultat dans la base initiale.

Exemples : effectuer les calculs suivants :

1. $(71)_8 + (34)_8$
2. $(1001)_2 \times (1011)_2$

Solution

1. $(71)_8 = 8x7 + 1 = 57$ et $(34)_8 = 3x8 + 4 = 28$.

Ainsi $57 + 28 = 85$

et $85 = 1x8^2 + 2x8 + 5 = (125)_8$.

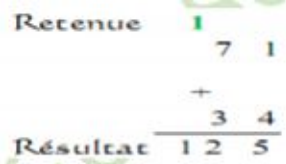
2. $(1001)_2 = 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2 + 1 = 9$ et $(1011) = 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2 + 1 = 11$.

Ainsi $9 \times 11 = 99$

et $99 = 1x2^6 + 1x2^5 + 0x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2 + 1 = (1100011)_2$

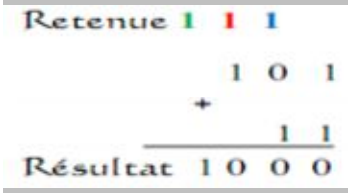
Méthode 2

ExempleAddition en base 8



1 + 4 = 5 <8, on écrit 5 sous la barre de résultat
7+3 = 10 >8, or 10 = 8 + 2, on écrit 2 sous la barre de résultat et on retient 1.
1(retenue)+ 0 =1<8, on écrit 1 sous la barre de résultat.

ExemplesAddition en base 2



Addition binaire (8 bits)

```
 1 0 0 1 0 1 1 0
+0 1 0 1 0 1 0 1
---------------
 1 1 1 0 1 0 1 1
```

```
 1 0 0 1 0 1 1 0
+0 1 1 1 0 1 0 1
---------------
1 0 0 0 0 1 0 1 1
  overflow
```

Exemplemultiplication en base 2

		1	0	0	1	← Multiplicande
	x	1	0	1	1	← Multiplicateur
	1	1	0	0	1	
1	1	0	0	1	0	
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1 = 64 + 32 + 2 + 1 = 99

RESOLUTION DE LA SITUATION DE VIE.