Collection

La Perle du Succes

MATHEMATIQUES PREMIERE D

Auteur

AVIANSOU C. Brice Espoir

Version revue et corrigee

LaTeX Prod

16 septembre 2019

Programme de Mathématiques de la classe de Première D/ APC BENIN

SA 1 : Configurations de l'espace

1. Orthogonalité dans l'espace
2. Vecteurs de l'espace

SA 2 : Organisations des données

1. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$
2. Statistique
3. Dénombrement
4. Fonctions
5. Suites numériques

SA 3 : Lieux géométriques dans le plan

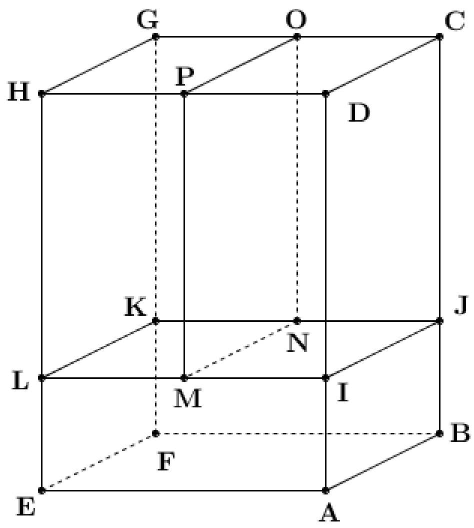
1. Trigonométrie
2. Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés
3. Cercle dans le plan
4. Isométrie
5. Représentations graphiques de fonctions et transformations du plan

Sommaire

« Si vous aimez les mathématiques, alors elles seront faciles pour vous »
(Osé Sam)

CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ :
Texte : *Une discussion autour du dossier d'une armoire*
Coffi est un élève de la classe de $1^{ère}$. Son tuteur Fako lui demande d'aller retirer auprès du menuisier l'armoire qu'il a commandée, pour y ranger ses habits. Il dessine le plan de l'armoire sur une feuille de papier qu'il remet à Coffi pour faciliter l'identification chez le menuisier. Voici le plan de cette armoire :



Des camarades de Coffi ont vu ce dessin. L'un d'eux affirme qu'on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. Un autre affirme : « Le point A permet de repérer n'importe quel point de l'espace; il suffit de connaître la distance AS ». Non rétorque un autre « la distance AS seule ne suffit pas; il faut connaître aussi le sens de A vers S sur la droite (AS) ». Un autre élève apporte une nuance en déclarant : « Encore faut-il que S soit distinct de A ». Jean qui, jusque là n'est pas intervenu pose la question suivante à ses camarades « S'agit-il des coordonnées géographiques d'un point? ».

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Orthogonalité dans l'espace

1.1 Droites orthogonales

Activité 1.1

Certains camarades de Coffi ont reconnu, en examinant le dessin, deux droites (D_1) et (D_2) telles que $(D_1) \parallel (AB)$, $(D_2) \parallel (EH)$ et $(D_1) \perp (D_2)$.

Consigne 1.1

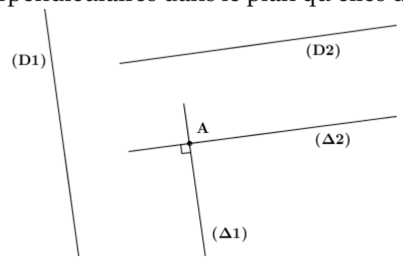
1. Cite deux droites (D_1) et (D_2) qui conviennent.

> **Information**
> On dit que les deux droites (AB) et (EH) sont orthogonales et on note $(AB) \perp (EH)$.

2. Propose une définition de deux droites orthogonales de l'espace.

Définition : *Droites orthogonales*

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque les parallèles à ces droites passant par un point donné sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.



Remarque

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires.
- Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

Consigne 1.2

Donne deux exemples de droites orthogonales et non perpendiculaires en utilisant le dessin.

Consigne 1.3

$(\mathbb{D}_1)$ et $(\mathbb{D}_2)$ sont deux droites orthogonales, $(\mathbb{D}_3) \parallel (\mathbb{D}_2)$.

1. Démontre que $(\mathbb{D}_3)$ orthogonale à $(\mathbb{D}_1)$.
2. Que peux-tu conclure ?

Propriété

Si deux droites de l'espace sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Remarque

Si deux droites sont orthogonales, toute droite orthogonale à l'une n'est pas nécessairement parallèle à l'autre.

Consigne 1.4

$(\mathbb{D}_1)$ et $(\mathbb{D}_2)$ sont deux droites parallèles, $(\mathbb{D}_3) \perp (\mathbb{D}_2)$.

1. Démontre que $(\mathbb{D}_3) \perp (\mathbb{D}_1)$.
2. Que peux-tu conclure ?

Propriété

Si deux droites de l'espace sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Évaluation formative ABCDEFGH est un cube.

1. Démontre que (EH) et (FB) sont orthogonales.
2. Démontre que (AC) et (FH) sont orthogonales.

1.2 Droite et plan orthogonaux

Activité 1.2

On considère le dessin de l'armoire. Une droite (D) est telle que $(D) \perp (BF)$, $(D) \perp (AB)$ et (AB) et (BF) sont sécantes dans le plan (ABF).

Consigne 1.5

1. Trouve une droite (D) qui convient.

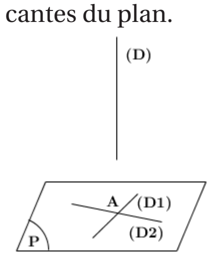
Information

On dit la droite (D) est orthogonale au plan (ABF).

2. Propose une définition d'une droite orthogonale à un plan.

Définition : *Droite orthogonale à un plan*

Une droite et un plan sont orthogonaux ou perpendiculaires lorsque la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.



Évaluation formative En utilisant le dessin de l'armoire :

1. Démontre que $(EA) \perp (ABD)$.
2. Démontre que $(HD) \perp (ADC)$.

Propriété

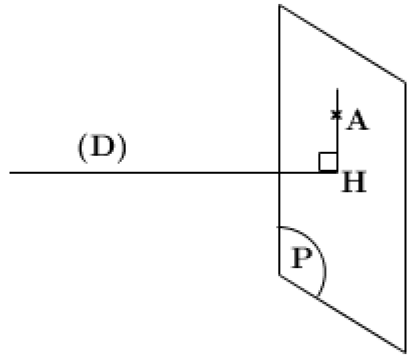
Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Consigne 1.6

1. Combien y a-t-il de droites passant par le point F et perpendiculaire au plan (ABC) ?
2. Combien y a-t-il de plans passant par le point H et orthogonales à la droite (AD) ?

Propriété

1. Par un point A de l'espace, il passe une droite unique de l'espace perpendiculaire à un plan donné de l'espace.
2. Par un point de l'espace, il passe un plan unique orthogonal à une droite donnée de l'espace.



Consigne 1.7

(EH) et (FG) sont deux droites parallèles, (HDG) orthogonal à (EH).
Démontre que (HDG) orthogonal à (FG).

Consigne 1.8

Soit (HDG) et (EAF) deux plans parallèles, (BC) orthogonale à (EAF).
Démontre que (BC) orthogonale à (HDG).

Propriété

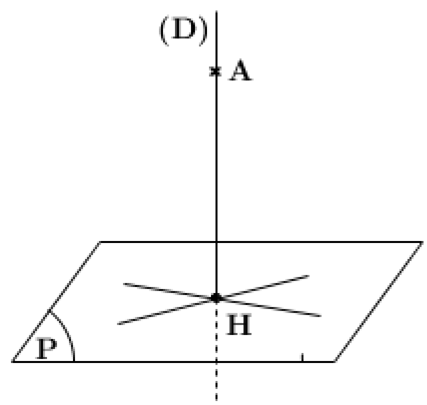
1. Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
2. Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles.
4. Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ils sont parallèles.
5. Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P), alors toute droite orthogonale à (D) est parallèle à (P).

Définition : *Distance d'un point à une droite*

(D) est une droite et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A à la droite (D), notée $d(A;(D))$, la distance AH où H est le point d'intersection de (D) avec le plan passant par A et perpendiculaire à (D).

Définition : *Distance d'un point à un plan*

(P) est un plan et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A au plan (P) notée $d(A;P)$ la distance AH où H est le point d'intersection de (P) avec la droite passant par A et perpendiculaire à (P).



1.3 Plans perpendiculaires

Activité 1.3

En examinant le dessin de l'armoire, Sylvie, une fille de $1^{ère}S$ reconnait deux plans perpendiculaires. Sa camarade Linda déclare en avoir oublié la définition.

Consigne 1.9

1. Démontre que la droite (MP) est perpendiculaire au plan (ABE).
2. Trouve un plan $(\mathcal{Q})$ qui contient la droite (MP).

Information

On dit que les plans $(\mathcal{Q})$ et (ABE) sont perpendiculaires.

3. Propose une définition de deux plans perpendiculaires.

Définition : *Deux plans perpendiculaires*

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Consigne 1.10

$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontre que les plans (ABC) et (HDC) sont orthogonales.

Propriété

1. Si une droite est parallèle à un plan et perpendiculaire à un second plan, alors ces deux plans sont perpendiculaires.
2. Si une droite $(\mathscr{D})$ et un plan $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires à un plan $(\mathscr{P}')$, alors $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$.
3. Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
4. Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Remarque

1. Deux plans perpendiculaires à un même troisième ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.
2. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre. Il suffit de considérer leur droite d'intersection.

Consigne 1.11 ***Approfondissement***

On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB) \parallel (DC)$ et $(AB) \perp (AD)$. Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par A et orthogonale au plan $(ABCD)$. Soit E un point de la droite $(\mathscr{D})$ distinct du point A.

1. Fais une figure.
2. Démontre que $(CD) \perp (ADE)$.
3. Soit H le projeté orthogonal de A sur (DE).
   Démontre que $(AH) \perp (CDE)$.
4. Sachant que $AD = DC = a$, $AB = 2a$ et $DE = a\sqrt{2}$, calcule le volume de la pyramide $EABCD$ en fonction de a.

1.4 Projection orthogonale

Activité 1.4

Donald, un élève de cette classe de $1^{ère}S$ s'interroge au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' du plan (ABE) avec la droite passant par X et perpendiculaire au plan (ABE).
Jeöl affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même.
Jeanne, une élève déclare qu'il existe des points X tels que X et X' soit confondus.

1.4.1 Projection orthogonale sur un plan

Consigne 1.12

1. Le procédé tel que présenté est-il une application dans lui-même ?

   Information

   $(\mathscr{P})$ est un plan et p une projection orthogonale sur $(\mathscr{P})$, M est un point quelconque de l'espace.
   Si $p(M) = M$ alors on dit que M est un point invariant par p.

2. (a) Détermine $p(A)$, $p(B)$ et $p(E)$.
   (b) Détermine $p(ABE)$.

   NB : On suppose que $(\mathscr{P}) = (ABE)$

3. Soit $(\mathscr{P})$ un plan et p une projection orthogonale sur $(\mathscr{P})$, (Δ) une droite de l'espace, A et B deux points de (Δ) $(A \neq B)$.
   (a) $(\Delta) \perp (\mathscr{P})$, détermine $p(A)$ et $p(B)$.
   (b) (Δ) non $\perp$ $(\mathscr{P})$, détermine $p(A)$ et $p(B)$.

Définition : *Projection orthogonale sur un plan*

La projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$ est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M', intersection de $(\mathscr{P})$ avec la droite passant par M et orthogonale à $(\mathscr{P})$.

Propriété

L'ensemble des points invariants par une projection orthogonale sur un plan est ce plan lui-même.

Propriété

Soit p la projection orthogonale sur un plan (P)

1. L'image d'une droite (D) par p est :
   - ✓ Une droite si (D) n'est pas orthogonale à (P)
   - ✓ Un singleton si (D) est perpendiculaire à (P)

2. Si A et B sont deux points d'images respectives A' et B' par p, le segment [AB] a pour image par p :

   ✓ [A'B'] si (AB) n'est pas orthogonale à (P)

   ✓ {A'} si (AB) est perpendiculaire à (P)

   ✓ A'B' = AB si $(AB) \parallel (P)$

   ✓ A'B' < AB si (AB) et (P) sont non parallèles

3. L'image, par une projection orthogonale p, du milieu d'un segment dont le support est non orthogonal à (P), est le milieu du segment image.

1.4.2 Projection orthogonale sur une droite

Définition : *Projection orthogonale sur une droite*

On appelle projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$, l'application qui à tout point M de l'espace associe le point d'intersection M' de $(\mathscr{D})$ et du plan orthogonal à $(\mathscr{D})$ passant par M.

Propriété

Soit p la projection orthogonale sur une droite (D).

1. L'ensemble des points invariants par p est la droite (D).

2. L'image par p d'une droite orthogonale à (D) est un singleton.

3. L'image d'une droite non orthogonale à (D) est la droite (D).

4. L'image du milieu d'un segment dont le support n'est pas orthogonal à (D) est le milieu de l'image de ce segment.

.

Exercices

01 $ABCDEFGH$ est un pavé droit.

1. Détermine le projeté orthogonal de chacun des points A et E sur le plan (EFG).
2. Détermine le projeté orthogonal du point E sur la droite (EH) et le projeté orthogonal du point B sur la droite (HG).

02 $ABCDEFGH$ est un cube. J le centre du carré $BCGF$ et I le milieu du segment $[CD]$.

1. (a) Prouve que la droite (EF) est orthogonale au plan (BGF) puis déduis-en que la droite (BG) est orthogonale (EFC).
   (b) Déduis-en que les droites (DF) et (BG) sont orthogonales.
   (c) détermine le projeté orthogonal du point E sur la droite (BG).
2. (a) Démontre que la droite (EB) est orthogonale au plan (AFD).
   (b) Prouve alors que la droite (DF) est orthogonale au plan $(EFGK)$.
   (c) Déduis-en la position relative des droites (DF) et (EJ).
3. Démontre que le triangle EIJ est rectangle en J.

03

04

2 Vecteurs de l'espace

Activité 1.5

Halim, un élève de cette classe de $1^{ère}S$ se souviennent de la notion de vecteur et affirme : « le vecteur $\overrightarrow{LN}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ tandis que $\overrightarrow{AL}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ». Certains de ses camarades s'interrogent sur la notion de combinaison linéaire et déclarent qu'ils n'ont rien compris à sa déclaration.

2.1 Caractérisation d'un vecteur

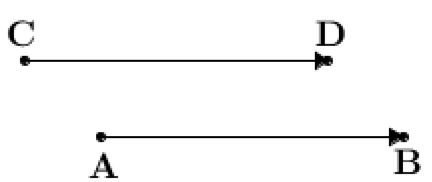
Consigne 2.1

Un vecteur de l'espace se définit de la même manière qu'un vecteur du plan. On note $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.
Détermine :

1. Les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Les caractéristiques d'un vecteur vecteur quelconque de l'espace.

Définition

1. Un couple (A, B) de points distincts de l'espace détermine un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par :
   (a) Une direction : celle de la direction droite (AB).
   (b) Un sens : le sens de parcours de A vers B sur (AB).
   (c) Une longueur : celle du segment $[AB]$.
2. Un couple (C, D) de points de l'espace détermine le même vecteur que (A, B) si et seulement si $\overrightarrow{CD}$ a même direction, même sens et même longueur que $\overrightarrow{AB}$. On dit que (A, B) et (C, D) sont des représentants du même vecteur.



3. Pour tout point A de l'espace, le couple (A, A) détermine un vecteur appelé **vecteur nul** et noté $\overrightarrow{0}$. Il n'a ni sens ni direction.
4. L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathscr{W}$.

Propriété

Pour tous points A, B, C et D de l'espace, on a :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

Propriété

Pour tout point O et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

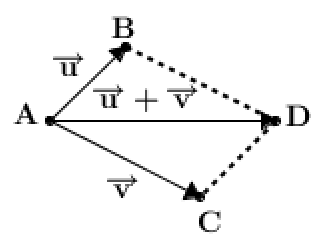
2.2 Opérations sur les vecteurs

Consigne 2.2

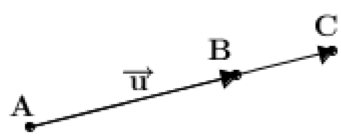
On définit la somme de deux vecteurs de $\mathscr{W}$ ainsi que le produit d'un vecteur par un réel de la même manière que dans le plan.
Reprends le dessin de l'armoire et construis le point Q tel que $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{EH} + 3\overrightarrow{OC}$.

Définition

1. Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues à celles établies dans le plan.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ t $\overrightarrow{AC}$. Par définition, le vecteur de représentant $\overrightarrow{AD}$ est appelé **la somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$** est notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



3. Soit un réel α et un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$. Sur la droite (AB), choisissons un repère d'origine A et plaçons le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$.



On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel α.

Propriété

1. Pour tous points A, B, C de l'espace, on a :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Cette propriété est connue sous le nom de la **relation de Chasles**.

2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels α et β, on a :
   (a) $\alpha\vec{u}=\vec{0} \iff \vec{u}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$
   (b) $1\vec{u}=\vec{u}$
   (c) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
   (d) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
   (e) $(\alpha.\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u})$

Définition *Combinaison linéaire*

Soit $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$,$\cdots$,$\vec{u_n}$, n vecteurs de l'espace et α_1, α_2,$\cdots$,α_n, n réels. On appelle **combinaison linéaire** des n vecteurs le vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$ définit par :
$\vec{u}=\alpha_1\vec{u_1}+\alpha_2\vec{u_2}+\cdots+\alpha_n\vec{u_n}$.

2.3 Vecteurs colinéaires - vecteurs coplanaires

Consigne 2.3

Examine attentivement le dessin de l'armoire.

1. (a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{LI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{KN}$. *On dit que les vecteurs $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{KN}$ sont colinéaires.*
   (b) Donne alors une définition de deux vecteurs colinéaires.
2. (a) Énumère trois vecteurs qui ont leurs représentants dans un même plan. *On dit que ces trois vecteurs sont coplanaires.*
   (b) Donne alors une définition de trois vecteurs coplanaires.

Définition

1. Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un d'eux est le vecteur nul ou s'ils ont la même direction.
2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ sont dits **coplanaires** si A, B, C et D sont dans un même plan de l'espace.
NB : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Consigne 2.4

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace.
Démontre que s'il existe des nombres réels α, β, γ non tous nuls tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Propriété

1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.
Autrement dit, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe un triplet (α,β,γ) des réels non tous nuls tels que :
$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$.
2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si le triplet (α,β,γ) des réels tels que : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ est le triplet $(0,0,0)$.

Consigne 2.5

Sur le dessin de l'armoire :

1. Justifie que le vecteur $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EL}$ sont non coplanaires.
2. Représente le vecteur $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EL}$.
3. Quelle est la configuration géométrique obtenue ?

Remarque *En savoir plus*

1. Un système de trois vecteurs coplanaires est dit **système lié**.
2. Un système de trois vecteurs non coplanaires est dit **système libre**.
3. La configuration géométrique associée à la somme de trois vecteurs non coplanaires est **un pavé**.

Consigne 2.6 *application de vecteurs coplanaires*

Consigne 2.7

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$. O, I, J et K des points de l'espace tels $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$, $\vec{u}$ un vecteur quelconque de $\mathscr{W}$ et M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

1. On suppose que M appartient à la droite (OK).
Démontre qu'il existe un seul triplet (x,y,z) de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
2. On suppose que M appartient au plan (OIJ).
Démontre que qu'il existe un seul triplet (x,y,z) de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

3. On suppose que M n'appartient ni à la droite (OK), ni au plan (OIJ).
   (a) Justifie que la droite (Δ) passant par M et parallèle à (OK) est sécante au plan (OIJ).
   Soit P leur point d'intersection.
   (b) Justifie que le plan passant par M et parallèle à (OIJ) est sécant à (OK).
   Soit Q leur point d'intersection.
   (c) Démontre qu'il existe un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Propriété

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathscr{W}$ alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un seul triplet (x, y, z) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Consigne 2.8

A l'aide du dessin de l'armoire tel que : $\overrightarrow{HL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{HE}$.

1. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont non coplanaires.
2. Détermine le triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\overrightarrow{HN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{HP} + z\overrightarrow{EH}$.

2.4 Caractérisation vectorielle d'un plan et d'une droite de l'espace

Consigne 2.9

Détermine et représente sur le dessin de l'armoire :

1. L'ensemble (Γ_1) des points R de l'espace tels que : $\overrightarrow{ER} = \alpha\overrightarrow{EB}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. L'ensemble (Γ_2) des points S de l'espace tels que : $\overrightarrow{IS} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IL}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Propriété

1. Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{W}$. La droite de repère $(A, \vec{u})$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$.
2. Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{W}$. Le plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{u})$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

2.5 Base de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace - repère de l'espace

Définition *Base de l'espace*

Un triplet de vecteurs non coplanaires est appelé **une base de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace.**
Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$, $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{W}$. Le triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On note $\vec{u}(x, y, z)$.
Pour tout point O de l'espace, on dit que $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un **repère** de l'espace.
Soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ le triplet (x, y, z) est appelé coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Consigne 2.10

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de $\mathscr{W}$ tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et λ un réel.

1. Démontre que : $(\vec{u} = \vec{v}) \Longleftrightarrow (x = x', y = y', z = z')$.
2. Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Propriété

1. Si dans une base de $\mathscr{W}$, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors $(\vec{u} = \vec{v}) \Longleftrightarrow (x = x', y = y', z = z')$.
2. Soit $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$, k un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
   Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $(k\vec{u})\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

Consigne 2.11

On sait que d'après la consigne 1.5.8, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{EH}\right)$ est une base de $\mathscr{W}$. On dit que $\left(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{EH}\right)$ par exemple est un repère de $\mathscr{E}$. On donne $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$.
Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CN}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{EH}\right)$.

Propriété

Si M a pour coordonnées (x, y, z) dans un repère de l'espace, alors x est **l'abscisse**, y **l'ordonnée** et z **la côte**.

Consigne 2.12

A l'aide du dessin de l'armoire, construire le point T de coordonnées $(2; -3; 1)$ dans le repère $\left(C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{EH}\right)$.

Exercices

01

02

03

04

« Les mathématiques ce n'est pas qu'une matière mais une langue universelle »
(Rb)

ORGANISATION DES DONNÉES

Situation de départ :
Texte : *Le meilleur tireur*
Une société de surveillance organise de façon périodique pour ses agents une séance d'entraînement au tir. Chaque agent est soumis à un test à l'aide d'un dispositif spécial construit à partir d'un carré de 8dm de côté. Ce dispositif génère de façon successive plusieurs carrés concentriques tels que chaque sommet du carré à construire soit sur un côté du carré précédemment construit et à une distance x de l'une des extrémités de ce côté. A chaque agent, le dispositif construit selon sa taille et son poids un nombre N donné de carrés dont il doit atteindre au tir un certain nombre N' $(N' < N)$. Melon n'est ni gros ni grand mais trapu, il veut se qualifier meilleur agent tireur de la société. Il consacre plus de 12 heures à son travail et à l'entraînement. Il se demande comment choisir la durée de chacune de ces deux activités de façon que, en s'entraînant trois fois plus que d'habitude, il travaille plus qu'il ne s'entraîne. Il se propose aussi d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela il relève dans les bases de données de la société les poids et les tailles de certains de ses co-équipiers. Il dresse le tableau suivant :

Poids en kg (x)	65	68	62.5	62	68	68
Taille en cm (y)	165	177	174	168	165	171

Poids en kg (x)	59	71	74	68	68	71
Taille en cm (y)	165	177	174	171	165	174

Poids en kg (x)	74	71	65	65	62	65
Taille en cm (y)	174	174	174	174	174	174

Poids en kg (x)	68	71	65	74	74	71
Taille en cm (y)	168	171	174	168	177	174

Poids en kg (x)	65	77	74	62	77	68
Taille en cm (y)	165	180	177	168	180	171

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

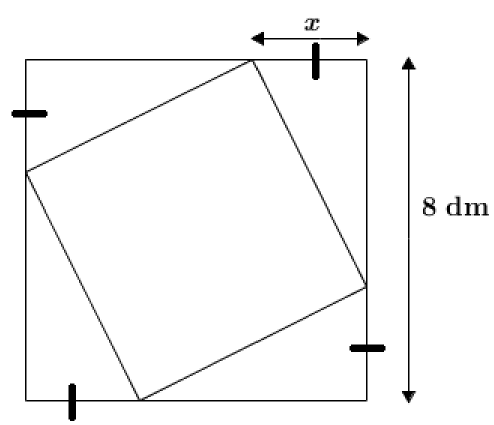
- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

1.1 Équations du second degré dans $\mathbb{R}$

Activité 2.1

On s'intéresse à la construction de ce dispositif. Pour cela, on réalise les deux premiers carrés et on calcule l'aire du second carré en fonction de x.



1.1.1 Polynôme du second degré

Consigne 1.1

1. Détermine en fonction de x l'aire $\mathscr{A}(x)$ de ce second carré.

2. On désigne par $P(x)$ le polynôme défini par :
$P(x) = (8-x)^2 + x^2$.
Donne le degré de ce polynôme.

Définition : *Polynôme du second degré*

On appelle **polynôme du second degré** tout polynôme de degré deux (2); c'est-à-dire tout polynôme du type $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.

1.1.2 Discriminant d'une équation du second degré

Consigne 1.2

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.

1. Démontre que :
$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

2. (a) Montre que si $b^2 - 4ac = 0$ alors
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

   (b) Montre que si $b^2 - 4ac < 0$ alors $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$.

   (c) Montre que si $b^2 - 4ac > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$.

3. On décide de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ dans chacun des cas suivants :

   (a) $b^2 - 4ac = 0$

   (b) $b^2 - 4ac < 0$

   (c) $b^2 - 4ac > 0$

   Trouve les différentes solutions dans chacun de ces cas.

Définition : *Discriminant*

On appelle **discriminant**, noté Δ, de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$., le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété

Soit l'équation du second degré du type
$ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$..

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
On a : $S_{\mathbb{R}} = \{\}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double égale à $-\dfrac{b}{2a}$.
On a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
On a : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Remarque

Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$, si le réel b est un multiple de 2 alors, on a : $\Delta = 4b'^2 - 4ac$ avec $b = 2b'$.
On pose $\Delta' = b'^2 - ac$

- Si $\Delta' < 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta' = 0$ alors l'équation admet une solution double égale à $-\dfrac{b'}{a}$.
- Si $\Delta' > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :
$x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$
Δ' est appelé **le discriminant réduit** de l'équation.

Consigne 1.3

1. Détermine les valeurs de x pour que $\mathscr{A}(x)$ de la consigne 2.1.1 soit égale à $49dm^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

   (a) $2x^2 + x + 1 = 0$

   (b) $8x^2 - 3x - 5 = 0$

3. Pour quelles valeurs du nombre réel m l'équation en x : $mx^2 - 2(m-2)x + m + 1 = 0$ a-t-elle dans $\mathbb{R}$ des solutions?

Remarque

Soit l'équation du second degré du type
$ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.
Si le produit $a \times c < 0$ alors l'équation admet nécessairement deux solutions distinctes.

1.1.3 Sommes et produits des solutions d'une équation du second degré

Consigne 1.4

On désigne par x_1 et x_2 les solutions d'une équation du second degré du type : $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.
Démontre que : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

> **Propriété**
> Si x_1 et x_2 les solutions d'une équation du second degré du type : $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$ alors
> $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Consigne 1.5

On désigne par x' et $x"$ les racines de l'équation du second degré : $x^2 + 8x - 7 = 0$.
Calcule $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x"}$ et $x'^2 + x"^2$.

Consigne 1.6

Soit l'équation $ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$.
Démontre que $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$ si et seulement si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

> **Propriété**
> Si x_1 et x_2 les solutions d'une équation du second degré du type : $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$ alors la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 \times x_2$ vérifient la relation $x^2 - Sx + P = 0$.

Consigne 1.7

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système d'équation : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = -1 \end{cases}$

1.1.4 Étude du signe des solutions d'une équation du second degré

> **Retenons**
> Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.
>
> - Si le produit $P < 0$ alors les racines x_1 et x_2 sont de **signes contraires**.
> - Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions donc **pas d'étude de signe**.
> - Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes.
>   Si de plus le produit $P > 0$ alors les deux solutions sont de **mêmes signes**.
>   - ✓ Si la somme $S > 0$, alors les deux solutions sont de **signes positifs**.
>   - ✓ Si la somme $S < 0$, alors les deux solutions sont de **signes négatifs**.
> - Si le produit $P = 0$ alors l'une des racines est **nulle** et l'autre racine est $-\dfrac{b}{a}$ et son signe est du signe de $-\dfrac{b}{a}$.

Consigne 1.8

On donne l'équation du second degré en x suivante :
$x^2 - (m-3)x + m + 6 = 0; (m \in \mathbb{R})$.

1. Pour quelles valeurs de m, cette équation a deux racines de signes contraires ?
2. Pour quelles valeurs de m, cette équation a deux racines de mêmes signes ?

1.1.5 Équation bicarrée

Consigne 1.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation en x suivante : $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Consigne 1.10

La somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est 4141.
Détermine ces nombres.

1.1.6 Équations irrationnelles

> **Retenons**
> Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que $\sqrt{P(x)} = Q(x)$.
> $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ a le même ensemble de solutions que : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$

Consigne 1.11

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation irrationnelle suivante : $\sqrt{x^2 - x - 4} = -x + 7$.

1.2 Inéquations du second degré dans ℝ

Activité 2.2

Soit le polynôme du second degré tel que :
$P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

1.2.1 Signe d'un polynôme du second degré

Consigne 1.12

Complète les informations suivantes :

- Si $b^2 - 4ac < 0$ alors le signe du polynôme $P(x)$ dépend de celui de $\cdots$ ①
- Si $b^2 - 4ac = 0$ alors le signe du polynôme $P(x)$ dépend de celui de $\cdots$ ②
- Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que
  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  Complète le tableau suivant :
  On suppose que $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$			0		0		

Propriété

Soit le polynôme du second degré tel que :
$P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.

- Si $b^2 - 4ac < 0$ alors le polynôme $P(x)$ garde un signe constant et son signe est celui de a.

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	signe de a

- Si $b^2 - 4ac = 0$ alors le polynôme $P(x)$ garde un signe constant et son signe est celui de a.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $b^2 - 4ac > 0$ alors le polynôme $P(x)$ a le signe suivant : On suppose que $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0 signe de (-a)	0	signe de a

Consigne 1.13

Résoudre dans ℝ, les inéquations suivantes : $2x^2 - 3x + 8 \leq 0$ | $-x^2 - 3x + 1 > 0$

1.2.2 Inéquations irrationnelles

Remarque

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$ et $\sqrt{P(x)} \geq k$, $k \in \mathbb{R}$.

- $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$ a le même ensemble de solutions que : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{P(x)} \geq k$ a le même ensemble de solution que : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ \text{si} k < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{P(x)} \leq k$ a le même ensemble de solution que : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \leq k^2 \\ \text{si} k \geq 0 \end{cases}$

Consigne 1.14

1. Résoudre dans ℝ, l'inéquation irrationnelle suivante : $\sqrt{x^2 - x + 4} \leq -x + 7$
2. En déduire la résolution de l'inéquation : $\sqrt{x^2 - x + 4} > -x + 7$

Remarque

$\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ a le même ensemble de solutions que les systèmes : $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases}$

Consigne 1.15

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation irrationnelle suivante :
$\sqrt{5x-4} \geq 2x-1$

1.2.3 Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré

Consigne 1.16

On considère l'équation du second degré du type : $ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.
On suppose que $\Delta = b^2-4ac$ et $\Delta > 0$ et $x_1 < x_2$.
on pose $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ et on désigne par $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

1. Calcule $aP(\alpha)$ avec α un nombre réel.
2. (a) Démontre que si $aP(\alpha) < 0$ alors α est à l'intérieur des racines c'est-à-dire $x_1 < \alpha < x_2$.
   (b) Démontre que si $aP(\alpha) > 0$ alors α est extérieur au segment $[x_1; x_2]$, puis comparer α à un réel quelconque β élément de l'intervalle $[x_1; x_2]$ et conclure.

Propriété

Soit l'équation du second degré du type : $ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$ et α un nombre réel.

- Si $aP(\alpha) < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < \alpha < x_2$ $(x_1 < x_2)$.
- Si $aP(\alpha) > 0$, on calcule le discriminant Δ.
  - ✓ Si $\Delta < 0$, donc pas de solutions.
  - ✓ Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions x_1 et x_2, et α est extérieur aux racines x_1 et x_2.
    Pour situer α, on le compare à un réel β, soit $\beta = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.
    - ⋆ Si $\alpha < \beta$ alors $\alpha < x_1 < x_2$
    - ⋆ Si $\alpha > \beta$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$

Consigne 1.17

Soit l'équation en x suivante : $x^2-3x-8=0$.
Compare le réel 3 par rapport aux racines de l'équation.

Consigne 1.18

Soit l'équation du second degré en x suivante :
$x^2+2(-m+7)x-m^2-4m+5=0$.
Déterminer si possible les valeurs de m pour que
$x_1 < x_2 < 2$; $(x_1 < x_2)$.

1.3 Systèmes linéaires

Activité 2.3

Retenons

- Une équation linéaire à p inconnues $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, est toute équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$ où $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est l'inconnue et les réels $a_1, a_2, \cdots, a_p, b$ les coefficients.
  Un système de plusieurs équations linéaires est appelé **systèmes d'équations linéaires**.
- Un système de p $(p \geq 2)$ équations linéaires à n inconnues $(n \geq 2)$ est tout système de la forme :
  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad = \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$ où les a_{ij} et les b_i sont des constantes réelles.
- Un système est **échelonné** si et seulement si $a_{ij} = 0$ ou $1 \leq j < i$.
  Exemple :
  $\begin{cases} 3x+4y+z=3 \\ \bullet + 4y - z = 2 \\ \bullet + y + 2z = 11 \end{cases}$ est un système échelonné.
- Un système est **triangulaire** si et seulement si il est échelonné et le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.
  Exemple
  $\begin{cases} x+y+z+t=-4 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ 2x-y-3z-t=0 \\ \bullet + 2y + z - t = 1 \end{cases}$ est un système triangulaire.
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires reste inchangé lorsqu'on permute des lignes ou lorsque la nouvelle ligne L_i est remplacée par (αL_i) ou $(L_i + \alpha L_j)$.
- Deux systèmes d'équations linéaires sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de validité et le même ensemble de solutions.

Propriété

On transforme un système en un système équivalent si :

- On change, dans toutes les équations, dans l'ordre des inconnues sans changer les coefficients associés.

- On change deux lignes L_i et L_j ($L_i \longleftrightarrow L_j$).
- On remplace une ligne L_i par une combinaison linéaire des lignes L_i et L_j ($L_i \longleftarrow \alpha L_i + \beta L_j$) ($\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}^*$).

Méthode de Pivot de Gauss

La méthode de Pivot de Gauss consiste à transformer un système d'équations linéaires à l'aide des opérations décrite ci-dessous :

- (S) est un système de n équations linéaires ($n \in \mathbb{N}^* \setminus |1|$ alors pour chaque entier tel que $1 \leq i \leq n$, la notation L_i désigne la $i^{ème}$ équation ligne du système.
- Pour deux entiers i et j tels que $i \neq j$, $L_i \neq L_j$ signifie que les anciennes lignes L_i et L_j ont été permutés.
- $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ si ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) signifie que la nouvelle ligne est l'ancienne αL_i.
- $L_i \longleftarrow (L_i + \alpha L_j)$, ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) signifie que la nouvelle ligne est l'ancienne $L_i + \alpha L_j$.

  Ces opérations sont décrites sous forme d'un système triangulaire.

Consigne 1.19

Résous par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x+2y+z+2t=-1 \\ 2x+y-z-t=8 \\ x+y+3z+t=-2 \\ -x+2y-z+4t=-7 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$$

Consigne 1.20

Détermine un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme de ces chiffres est égale à 17.
- Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360.
- Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

Consigne 1.21

1. Résous dans $\mathbb{R}^3$, par la méthode de Pivot de Gauss, le système suivant :

$$(S_0) : \begin{cases} 5x+7y-3z=22 \\ x+2y-z=6 \\ 2x-2y+5z=-7 \end{cases}$$

2. Déduis-en les solutions de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 5|a|+7|b|-3|c|=22 \\ |a|+2|b|-|c|=6 \\ 2|a|-2|b|+5|c|=-7 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} \dfrac{10}{a-1}+\dfrac{7}{2b}-3(c+2)=22 \\ \dfrac{2}{a-1}+\dfrac{1}{b}-(c+2)=6 \\ \dfrac{4}{a-1}-\dfrac{1}{b}+5(c+2)=-7 \end{cases}$$

Exercices

01

02

03

04

2 Statistique

Activité 2.4

Melon veut étudier les poids de certains de ses co-équipiers obtenus dans la base de données de la société.

2.1 Série statistique groupée et représentations graphiques

Une **série statistique** est l'ensemble des résultats d'une étude statistique, c'est-à-dire les valeurs prises par le caractère et leurs effectifs correspondants.

Consigne 2.1

1. Reproduis puis complète le tableau suivant :

Classes	Centre [1]	Effectif	Amplitude [2]	Densité
[62;65[				
[65;70[				
[70;74[				
[74;80[				

2. Construis l'histogramme de cette série.

3. Construis le polygone des effectifs de cette série groupée en classes.

Définition

1. **La densité d'une classe** est le quotient de l'effectif par l'amplitude de la classe.

2. **une série statistique des centres** c'est la série statistique discrète dont les modalités sont les centres d'une série regroupée en classes.

2.2 Effectifs et fréquences cumulés

Définition

L'effectif cumulé croissant(respectivement décroissant) des valeurs du caractère x_i est la somme des effectifs des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i.
On définit de même **les fréquences cumulées croissantes(respectivement décroissantes)**.

Consigne 2.2

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants.

2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants.

2.3 Paramètres de position de tendance centrale

2.3.1 Le mode - la classe modale

Définition

Dans le cas d'une série à caractère quantitatif discret, le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif.
Dans le cas d'une série à caractère quantitatif continu dont les valeurs sont regroupées en classes, la classe modale est la classe de plus grand effectif et le mode est le centre de la classe à densité maximale.

2.3.2 La moyenne

Définition

La moyenne d'une série statistique (d'effectif N) est le réel $\overline{x}$ tel que : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$ avec n_i l'effectif associé à la valeur du caractère x_i.
Dans le cas d'une **série à caractère quantitatif continu** dont les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

On peut aussi calculer la moyenne avec les fréquences : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} f_i x_i$ avec f_i la fréquence associée à la valeur du caractère x_i.

Consigne 2.3

1. Détermine la classe modale de la série statistique.

2. Calcule la moyenne de cette série statistique.

2.3.3 La médiane

Définition

On considère que les N données sont classées, et numérotées par ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_p$. Chaque valeur est répétée autant de fois que son effectif.
La médiane d'une série statistique est un réel noté M_e qui partage la série en deux sous-séries de même effectif :

1. Si N est impair, la médiane est la donnée de rang $\dfrac{N+1}{2}$ $\left(M_e = x_{\frac{N+1}{2}}\right)$.

2. Si N est pair, la médiane est la donnée de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ $\left(M_e = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)$.

Dans le cas d'une **série à caractère continu**, la médiane peut s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à $0,5$ sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Consigne 2.4

1. (a) Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.

   (b) Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.

2. En utilisant le tableau des effectifs cumulés croissants, détermine par interpolation linéaire la médiane de cette série.

2.4 Paramètres de dispersion : Variance d'une variable statistique et écart-type

Définition

Soit (x_i, n_i) une série statistique d'effectif total N.
• La variance de cette série est le nombre réel noté $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

ou

$$V(x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

• L'écart-type de cette série est le réel, noté $\sigma(x)$ tel que $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Consigne 2.5

Calcule la variance V et l'écart-type σ de série de la consigne 3.5.

.

Exercices

01

02

03

04

3 Dénombrement

Activité 2.5

Pour les séances d'entraînement, le directeur de la société de surveillance recommande : chaque agent d'avoir une tenue composée d'un short et d'un tee-shirt. Chef Melon s'est acheté 5 shorts et 3 tee-shirts. Il se demande combien de tenue il a au choix en utilisant que ses habits.

3.1 Notion d'ensemble

3.1.1 Ensemble fini

Définition

Un ensemble est dit fini s'il est vide ou si on peut compter tous ses éléments.

3.1.2 Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble.

1. Si $E = \phi$ alors le cardinal de E est égal à zéro. On note $Card(E) = 0$.
2. Si $E \neq \phi$, E contient n éléments alors $Card(E) = n$.
3. Si $E \neq \phi$ et est fini alors le cardinal de E est unique.
4. ϕ est le seul ensemble fini qu'à pour cardinal 0 ($Card\phi = 0$).
5. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.
   Exemple : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
6. Dénombrer un ensemble fini E c'est déterminer cardinal de E.

3.1.3 Partition d'un ensemble

Définition

Des parties d'un ensemble E forment une partition de E si :

1. Elles sont non vides
2. Elles sont disjointes deux à deux
3. Leur réunion est égale à E.

Propriété

Soit E un ensemble fini et E_1, E_2, E_3, $\cdots$, E_p des ensembles formant une partition de E alors on a :

$CardE = \sum_{i=1}^{p} CardE_i$.

Consigne 3.1 *démonstration de la propriete*

Propriété

A et B sont deux parties d'un ensemble fini, on a :
$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$

Consigne 3.2

Soit E l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs à 50. On désigne par M_2, M_3 et M_6 les ensembles d'éléments de E qui sont respectivement multiples de 2, de 3 et de 6.

1. Les ensembles M_2, M_3 et M_6 forment-ils une partition de E ?
2. Vérifier que :
   $Card(M_2 \cup M_3) = Card(M_2) + Card(M_3) - Card(M_6)$.

Conséquences de la définition

1. Deux ensembles A et B sont dits disjoints lorsque $A \cap B = \phi$.
2. Si $A \subset E$, on appelle **complémentaire de** A **dans** E l'ensemble des éléments de E qui ne sont dans A. On le note $\overline{A}$ ou C_E^A.
3. Pour toute partie A d'un ensemble fini E, on a :
   (a) $CardA + Card\overline{A} = CardE$
   (b) $A \subset E \Longrightarrow CardA \leq CardE$

3.1.4 Produit cartésien

Consigne 3.3

On pose $S = \{S_1; S_2; S_3; S_4; S_5\}$ l'ensemble des shorts et $T = \{T_1; T_2; T_3\}$ l'ensemble des tee-shirts du Chef Melon.

1. Complète le tableau ci-dessous :

(S,T)	t_1	t_2	t_3
s_1	(s_1, t_1)		
s_2			
s_3			(s_3, t_3)
s_4			
s_5		(s_5, t_2)	

2. Dis comment on appelle l'ensemble de tous les couples (s, t) tels que $s \in S$ et $t \in T$.

3. Comment note-t-on cet ensemble? Comment est-il lu?

4. Détermine le cardinal de cet ensemble.

5. Effectue $Card(S) \times Card(T)$ puis compare le résultat trouvé à celui de la question 4.

Définition

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble des couples (a, b) tel que $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est noté $A \times B$ et on lit "A croix B".
$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$.

Remarque

$A \times B \times C = \{(a, b, c) / a \in A, b \in B, c \in C\}$.
Cette définition s'étend à un nombre quelconque d'ensemble, le produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, E_3, \cdots$, E_p est noté $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_p$.

Propriété

1. A et B étant deux ensembles finis non vides, on a : $Card(A \times B) = Card A \times Card B$.

2. $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_p$ étant des ensembles finis, on a : $Card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times Card(E_3) \times \cdots \times Card(E_p)$

3. E étant un ensemble fini de n éléments, le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p.
   On a : $Card(E^p) = (Card E)^p = n^p$
   Les éléments du produit cartésien de P ensembles sont appelés **P-uplets**.

Consigne 3.4

Combien de nombres de deux chiffres peut-on écrire si le premier chiffre doit être choisi parmi les chiffres 3, 4 et 7?

Consigne 3.5

Madame X se hâtais d'appeler Monsieur Y au numéro 97553xyz. Oh putain! elle oublie les trois derniers chiffres. Mais elle se rappelle que le chiffre x est pair, y est impair et z est strictement supérieur à 5.
Combien de numéros doit-elle composer pour être sûr de joindre Monsieur Y?

3.2 p-uplets - arrangements - permutations

3.2.1 p-uplets d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul. On appelle $p-uplet$ de E tout élément de l'ensemble E^p.

Propriété

1. Le nombre de $p-uplet$ d'un ensemble à n éléments est n^p.

2. Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à n^p.

Consigne 3.6

Les numéros de téléphone de la société MTN-BENIN sont constitués de 8 chiffres. Les préfixes actuels sont : 97, 96, 66, 67, 61, 62.

1. Quelle est la capacité de ce réseau?

2. Que devient cette capacité si tous les numéros se terminaient par 88?

3. Que devient cette capacité si tous les numéros se terminaient par 3188?

Consigne 3.7

2488D5 est l'immatriculation d'un véhicule; cette immatriculation est composée d'un nombre entier naturel non nul strictement inférieur à 10.000, suivi d'une lettre de l'alphabet français et d'un nombre de 1 à 10 correspondant à chacune des régions administratives du pays.
Détermine le nombre de véhicules qu'il sera possible d'immatriculer par ce procédé.

3.2.2 Arrangements

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E, tout $p-uplet$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Propriété

1. Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments noté A_n^p est tel que :
$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$.
A_n^p est lu "arrangement de p dans n".
Exemple : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

2. Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à A_n^p.

Consigne 3.8

Au siège de la société de surveillance se trouve un parking de 7 places. Melon se demande combien y-t-il de façons d'y garer 4 voitures si deux ne peuvent occuper la même place.

1. Que représente l'état d'occupation des 7 places par les 4 voitures ?
2. Combien y a-t-il de façons de garer la $1^{ère}$ voiture venue dans le parking ?
3. Combien y a-t-il de façons de garer la $2^{ème}$ voiture venue dans le parking ?
4. Combien y a-t-il de façons de garer la $3^{ème}$ voiture venue dans le parking ?
5. Combien y a-t-il de façons de garer la $4^{ème}$ voiture venue dans le parking ?
6. Détermine donc le nombre de façons qu'il y a de garer les 4 voitures dans le parking.

Remarque

1. Le nombre de facteurs du produit
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = p$.

2. Si $p > n$ il est impossible de trouver p éléments deux à deux distincts.

Définition

1. Pour tout entier naturel n non nul, le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ est appelé **"factorielle n"** et est noté $n!$.

2. Par convention, $0! = 1$.
Exemple : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Consigne 3.9

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$.

Montre que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

(Tu distingueras deux cas : $p < n$ et $p = n$)

Propriété

1. Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$, on a : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

2. Par convention, $A_n^0 = 1$ et $A_n^1 = n$.

Consigne 3.10

1. Détermine le nombre de façons différentes de faire asseoir dix personnes sur quinze chaises numérotées de 1 à 15, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.

2. De combien de manières peut-on faire asseoir les 16 élèves de la $1^{ère}$ D sur les 16 places disponibles dans la salle, si on suppose que les places sont numérotées de 1 à 16 et que deux personnes ne peuvent occuper la même place ?
Que devient ce nombre si on suppose que Noëllie et Sandrine sont absentes ?

3. Combien peut-on écrire de nombres entiers naturels ayant trois chiffres distincts ?

3.2.3 Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E, tout arrangement des n éléments de E.

Propriété

1. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

2. Le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal à $n!$.

Consigne 3.11

De combien de manières peut-on disposer 6 drapeaux sur 6 mâts ?

Anagramme d'un mot

On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le composent.
Le nombre d'anagrammes de mots de n lettres comportant k groupes lettres se répétant $p_1, p_2, \cdots, p_k$ fois est donc égal à $\dfrac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$.

Consigne 3.12

Détermine le nombre d'anagrammes de chacun des nombres suivants : MATH, CONSONNES, PATRICE.

3.3 Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E, tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments noté C_n^p est tel que :

$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

C_n^p est lu "combinaison de p dans n".

Exemple : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

Consigne 3.13

On veut choisir un président, un secrétaire et un caissier dans un club contenant 10 membres. Le cumul de charges est interdit. De combien de manières peut-on attribuer ces charges si :

1. Aucune restriction n'est imposée ?
2. Adjaratou et Esther refusent d'officier ensemble ?
3. Cressida et Mario officieront ensemble ou pas du tout ?
4. Jocelyn doit avoir une charge ?
5. Félix n'accepte que la charge du président ?

Consigne 3.14

On considère un ensemble E à n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

1. Calcule : $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.
2. Montre que : $C_n^p = C_n^{n-p}$ (propriété de symétrie).
3. Montre que : si de plus $1 \leq p \leq n-1$ alors on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (relation de Pascal).

Propriété

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$.

1. $C_n^n = 1$
2. $C_n^0 = 1$
3. $C_n^1 = n$
4. $C_n^p = C_n^{n-p}$
5. Si de plus $1 \leq p \leq n-1$ alors on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Comment savoir si l'on doit utiliser des p-listes, des arrangements ou des combinaisons ?

Critères	Les éléments peuvent être **répétés**	Les éléments sont **distincts**
on tient compte de l'ordre	utiliser **p-lites**	utiliser **arrangements**
on ne tient pas compte de l'ordre		utiliser **combinaisons**

Dans le cas des tirages, on a :

Tirages	Outils à utiliser
successifs avec remise (l'ordre compte)	**p-lites**
successifs sans remise (l'ordre compte)	**arrangements**
simultanés (l'ordre ne compte pas)	**combinaisons**

3.4 Triangle de Pascal

Définition

On appelle Triangle de Pascal un tableau à double entrée dans lequel sont placés les C_n^p où p est le numéro de colonne et n le numéro de ligne.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮										

Triangle de Pascal

3.5 Formule de binôme de Newton

Propriété

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^k \times b^{n-p}$

C'est la formule du **binôme de Newton**.

Les coefficients C_n^p s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Consigne 3.15

Développe et réduis $(x-1)^5$ suivant les puissances croissantes de x.

.

Exercices

01

02

03

04

4 Fonctions

4.1 Fonctions et Applications

4.1.1 Fonctions

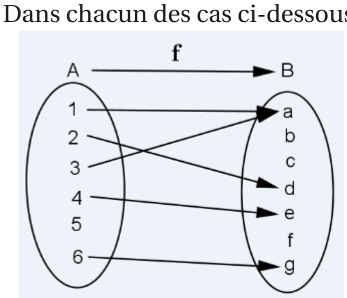
Activité 2.6

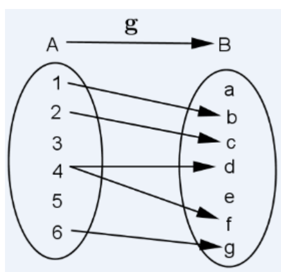
Retenons

- Soit A et B des ensembles.
  Une fonction f de A vers B est une correspondance entre les éléments de A et ceux de B, telle que à tout élément x de A, correspond au plus un élément de B, noté $f(x)$.
  L'ensemble A est appelé l'ensemble de départ de f, l'ensemble B est l'ensemble d'arrivée de f.
- On appelle ensemble de définition d'une fonction, l'ensemble des éléments de A qui ont effectivement d'image dans B.

Consigne 4.1

Dans chacun des cas ci-dessous, dis si f et g sont des fonctions.





Consigne 4.2

On considère les fonctions ci-dessous :

$$f:\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto \sqrt{x^2-3x+2}\end{array}$$

$$g:\begin{array}{ll}[0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto \dfrac{2x+8}{x}\end{array}$$

$$h:\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow [0;+\infty[\\ x & \longmapsto 2x^2-3x+1\end{array}$$

Détermine le domaine de définition de chacune de ces fonctions.

Consigne 4.3

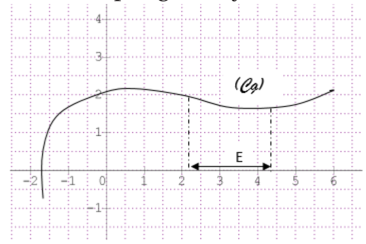
Soit les fonctions f et g suivantes :

$$f:\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto \sqrt{|x|-2}\end{array} \qquad g:\begin{array}{ll}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto \sqrt{x-2}\end{array}$$

1. Détermine le domaine de définition de f et g.
2. Montre que : $\forall x \in D_g ; f(x) = g(x)$. Puis conclure.

Définition : *Restriction d'une fonction à un intervalle*

f étant une fonction définie de A vers B, E une partie non vide de l'ensemble de définition de f. On appelle **restriction à E** de la fonction f, l'application g de E dans B définie par $g(x) = f(x)$.



Retenons

A, B et C sont des parties du nombre réel, f est une fonction numérique de A vers B ayant D_f pour ensemble de définition. g est une fonction numérique de B vers C ayant D_g pour ensemble de définition. On appelle **composée de f suivi de** g la fonction $x \longmapsto g[f(x)]$; on la note $g \circ f$ qui se lit ≪ g rond f ≫. Son ensemble de définition est tel que :
$x \in D_{g\circ f} \Longleftrightarrow \{x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.
On dit que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont les composées de f et de g.

Consigne 4.4

Soit les fonctions suivantes :

$$f:\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto x^2-1\end{array} \qquad g:\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto \dfrac{2x+1}{x}\end{array}$$

1. Détermine le domaine de définition de $(g \circ f)(x)$.
2. Calcule $(g \circ f)(x)$.

Retenons

f et g sont des fonctions numériques d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g.

- On appelle somme de f et de g, la fonction numérique : $x \longmapsto f(x)+g(x)$. Son ensemble de définition D_{f+g} est tel que $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- On appelle produit de f et de g, la fonction numérique : $x \longmapsto f(x).g(x)$. Son ensemble de définition $D_{f.g}$ est tel que $D_{f.g} = D_f \cap D_g$.
- On appelle quotient de f par g, la fonction numérique : $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Son ensemble de définition $D_{f/g}$

est tel que : $x \in D_{f/g} \Longleftrightarrow \{x \in D_f \text{et} x \in D_g \text{et} g(x) \neq 0\}$.

Consigne 4.5

On considère les fonctions f et g telles que :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-2} \end{array}$$

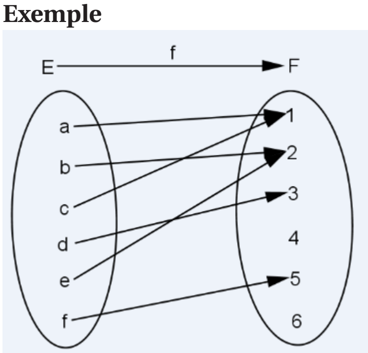
Calcule $f+g$; $f.g$ et $\dfrac{f}{g}$.

4.1.2 Applications

Retenons

Soit f une fonction définie de E vers F. f est une application si chaque élément de E est en relation avec un et un seul élément de F.
Autrement dit, une fonction est une application si et seulement si son domaine de définition est égal à son ensemble de départ.

Exemple



f est une application.

Consigne 4.6

On considère les fonctions ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-1} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Dire si chacune des ces fonctions est une application.

Consigne 4.7

f et g sont deux applications définies par :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+5 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}\setminus\{-1;1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \end{array}$$

Détermine l'ensemble de définition de $f \circ g$ puis calcule $f \circ g(x)$.

Consigne 4.8

f, g et h sont trois applications définies par :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+5 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-1 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x-5 \end{array}$$

Calcule $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ puis conclure.

Définition : *Application composée*

L'application composée des applications f de E vers F et g de F vers G dans cet ordre est l'application h de E vers G définie par :
$\forall x \in E, h(x) = g[f(x)]$; on note $h = g \circ f$.

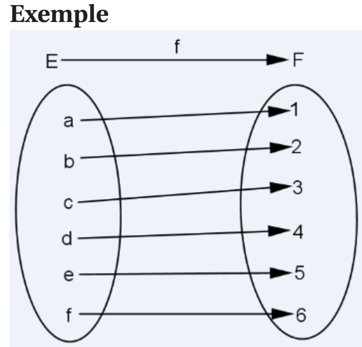
Propriété

Pour toutes applications f de E vers F, g de F vers G, h de G vers H, on a : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. On dit que la composition des applications est **associative**.

Retenons

On appelle application injective (ou injection), toute application de E vers F telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée F ait un ou zéro antécédent dans E.
Autrement dit, f est injective si et seulement si : $\forall (x_1; x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Exemple



Consigne 4.9

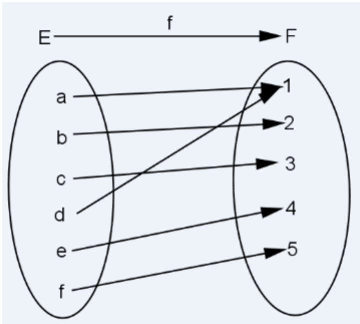
Montre que les applications f et g suivantes sont injectives.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Retenons

On appelle application surjective (ou surjection), toute application de E vers F telle à chaque élément de l'ensemble F, on peut correspondre au moins un élément de l'ensemble E. On écrit : $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$.

Exemple



Consigne 4.10

On considère les applications suivantes :

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto x+1$ | $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto x^2$

Dire dans chacun des cas si f et g sont surjectives.

Remarque

Une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective.
Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et soit f une application de A vers B. On dit que f est une bijection de A vers B pour exprimer que B est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, tel que tout élément y de B admet un unique antécédent par f dans A ; c'est-à-dire l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans A.
On écrit : $\forall y \in B, \exists! x \in A / f(x) = y$.

Consigne 4.11

Montre que l'application : $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -3x-1 \end{array}$ est bijective et détermine sa bijection réciproque.

Consigne 4.12

Soit f et g deux applications définies par :

$f : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$ | $g : F \longrightarrow G$, $x \longmapsto g(x)$

1. On suppose que f et g sont des injections.
   Démontre que la composée $g \circ f$ est une injection.
2. On suppose que f et g sont des surjections.
   Démontre que la composée $g \circ f$ est une surjection.

Propriété

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections est une surjection.
- La composée de deux bijections f et g est une bijection et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Consigne 4.13

Soit f l'application définie par : $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{array}$

1. Montre que f est une application bijective.
2. Détermine l'application réciproque f^{-1}.
3. (a) Étudie le sens de variation de la fonction $x \longmapsto x^2$.
   (b) Étudie le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.
4. Construire les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ dans un même plan muni d'un repère orthonormé.

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
La droite $y = x$ est appelée **première bissectrice**.

Consigne 4.14

Soit f une application bijective définie par : $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x-3 \end{array}$

1. Montre que $f^{-1} \circ f(x) = x$.
2. Montre que $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Propriété

- Si f est une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et f^{-1} sa bijection réciproque alors $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de B.
- E étant un ensemble non vide, on appelle l'application identique de E, l'application $x \longmapsto x$.
  Elle est notée Id_E.

Remarque

- f est une fonction de A vers B et E une partie de A. On appelle **image directe de** E **par** f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E.
- f est une fonction de A vers B et F une partie de B. On appelle **image réciproque de** F **par** f, l'ensemble F' des antécédents par f de tous les élé-

ments de F.

Consigne 4.15

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

1. Détermine les antécédents par f des réels 3 et -4.
2. (a) Montre que : $\forall x \in [0;4]$, f est strictement croissante.
   (b) Détermine l'image directe de l'intervalle $[0;4]$ par f.

.

Exercices

01

02

03

04

4.2 Limites et continuité

Activité 2.7

f désigne une fonction numérique d'une variable réelle x et D son domaine de définition.

Consigne 4.16

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Complète le tableau ci-dessous et déduis-en le comportement de $f(x)$ lorsque x « se rapproche » de 1.

x	0,96	0,97	0,98	0,99	0,999	1,001	1,002
$f(x)$							

Définition : *Limite d'une fonction en un point x_0*

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, contenant x_0, sauf peut-être en x_0.
Dire que la fonction f admet le réel l pour limite en x_0, signifie intuitivement que $f(x)$ peut être rendu aussi voisin que l'on veut de l, pourvu que x soit aussi voisin de x_0. On note : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ou $\lim\limits_{x_0} f$.

Propriété

Lorsqu'une fonction f est définie en x_0 et admet une limite en x_0, alors cette limite est égale à $f(x_0)$.

Définition : *La continuité en un point*

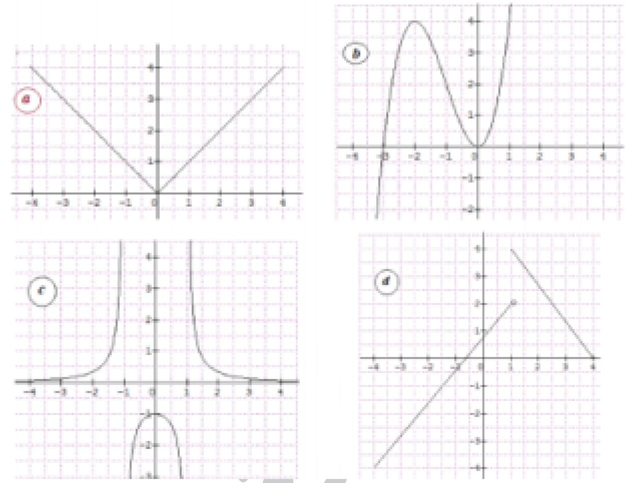
Une fonction dite est continue en x_0 lorsqu'elle est définie en x_0 et admet une limite en x_0.

Consigne 4.17

Soit f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x) = x^2 - 3x + 8$ et $g(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2-2}$.
Vérifie si f et g sont continues en $\sqrt{2}$.

Consigne 4.18

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est représentée sur l'intervalle $[-6;6]$ par la courbe $(\mathscr{C})$.



1. Indique dans quel(s) cas, la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f peut-être tracée sans lever le crayon.
   Dans ce(s) cas , on dit que la fonction f est continue sur $[-6;6]$.
2. Lorsque la fonction f n'est pas continue, précise l'abscisse x_0 d'un point où le crayon est levé.
   Dans ce cas on dit que la fonction f est discontinue en x_0.

Propriété

- Les fonctions élémentaires suivantes : $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$, $x \longmapsto sinx$, $x \longmapsto cosx$ sont continues en tout élément de $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

Propriété

Toute fonction qui est somme, produit, quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

Propriété

- Les fonctions polynômes sont continues en tout élément de $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

Consigne 4.19

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

1. Détermine le domaine de définition D_f de f.
2. Démonter que : $\forall x \in D_f, f(x) = x^2 + x + 1$.
3. On désigne par g la fonction définie par $g(x) = x^2 + x + 1$.
   Détermine le domaine de définition de g et calcule la limite de la fonction g en 1.

> **Propriété**
> Soit a un nombre réel, K un intervalle ouvert contenant a, f est une fonction définie sur $K \setminus \{a\}$, si g est une fonction continue en a, qui coïncide avec f sur $K \setminus \{a\}$ alors f admet une limite en a égale à $g(a)$.

Consigne 4.20

Soit f et g deux fonctions numériques définies par :
$f(x) = 3x^2 - 8x + 4$ et $g(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 1}{2x}$.

1. Détermine le domaine de définition de f et g.
2. (a) Calcule $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
   (b) En déduire :
   $\lim\limits_{x\to -1} [f(x) + g(x)]$; $\lim\limits_{x\to -1} [f(x) \times g(x)]$
   $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{g(x)}$

> **Propriété**
> Soient f et g des fonctions, a, l et l' des nombres réels.
>
> - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = l + l'$ et $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \times g(x)] = l \times l'$.
> - Si de plus $l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l'}$.
> - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} [\lambda f(x)] = \lambda l$.
> - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + \lambda] = l + \lambda$.
> - Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f^n(x) = l^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Consigne 4.21

1. On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
   (a) Démontre que : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \leq g(x)$.
   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.
   (c) Que constates-tu ?
2. On considère la fonction h définie par $h(x) = xcosx$.
   On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq cosx \leq 1$.
   (a) Démontre que : $\forall x \in [0; +\infty[, -x \leq xcosx \leq x$.
   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} (-x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} (x)$.
   (c) Déduire $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

> **Propriété**
>
> - Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I tel que $f \leq g$ sur I. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ alors on a $l \leq l'$.
> - Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et telle que sur I on ait $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si f et h admettent la même limite l en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors g admet également la même limite l en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

> **Propriété**
>
> - La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
> - Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
> - Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a) \neq 0$, est une fonction continue en a.

Consigne 4.22

On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 8}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Détermine le domaine de définition de f.
2. Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.
3. On dit que f admet une limite en 0 si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$.
   Vérifie si f admet une limite en 0.

Remarque

- L'écriture $\underset{<}{x \to 0}$ se lit « x se rapproche de 0 tout en restant inférieur à 0 ».
- L'écriture $\underset{>}{x \to 0}$ se lit « x se rapproche de 0 tout en restant supérieur à 0 ».

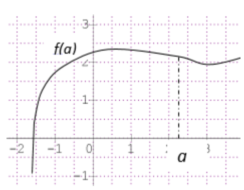
Définition : *Limite à gauche et limite à droite en un point*

Soit a et l des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition D_f.

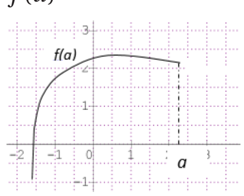
- On dit que f admet une **limite à gauche en a égale à l** lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet en a une limite égale à l. On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.
  On dit que l est la limite à gauche en a de f ou $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a.
- On dit que f admet une **limite à droite en a égale à l** lorsque la restriction h de f à $D_f \cap]a; +\infty$ admet en a une limite égale à l. On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.
  On dit que l est la limite à droite en a de f ou $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a.

Illustration graphique

- La fonction f est définie en a.



✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$



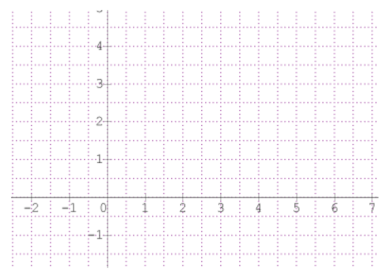
✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$; f n'est pas définie pour $x > a$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$

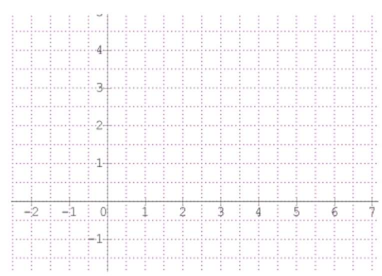
$l \neq f(a)$ donc f n'a pas de limite en a.

- La fonction f n'est pas définie en a.

✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$



✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$; f n'est pas définie pour $x < a$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$



✓ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l'$

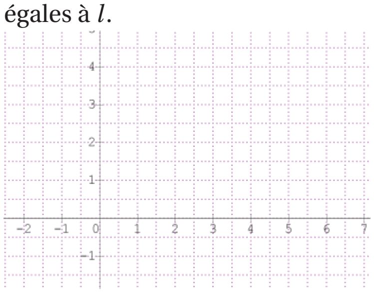
$l \neq l'$ donc f n'a pas de limite en a.

✓ f n'a pas de limite (finie) à gauche en a ni de limite (finie) à droite en a. Donc f n'a pas de limite finie en a.

Propriété

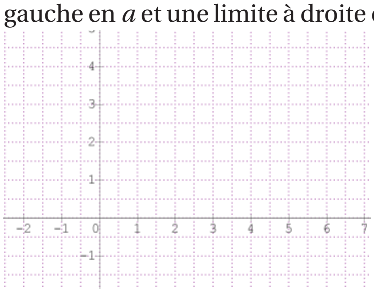
Soit a et l des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.

- Dans le cas où f n'est pas définie en a : f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche en a et une limite à droite en a égales à l.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$

- Dans le cas où f est définie en a : f admet une limite en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche en a et une limite à droite en a égales à $f(a)$.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

Retenons

On dit que f est une fonction continue en a si et seulement si f est définie en a et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$.

Consigne 4.23

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x^3 + 2x^2 - x + \sqrt{2} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Détermine le domaine de définition D de f.
2. Montre que f est continue en 0.

Propriété

La fonction « valeur absolue » est continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Définition : *Continuité sur un intervalle*

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

- f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ si et seulement si f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a; b[$.
- f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ si et seulement si f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, continue à droite de a et à gauche de b.

Consigne 4.24

On considère la fonction numérique suivante définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Détermine le domaine de définition de f.
2. (a) Complète le tableau ci-dessous :

x	-10^{-6}	-10^{-5}	-10^{-4}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$f(x)$						

(b) Que remarque-tu si x se rapproche de 0 ?

Définition : *Limite infinie en un point*

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, a un nombre réel.

- Lorsque la restriction de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet $+\infty$ (resp $-\infty$) pour limite en a, on dit que $+\infty$ (resp $-\infty$) est la limite à gauche de f en a. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$)
- Lorsque la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ admet $+\infty$ (resp $-\infty$) pour limite en a, on dit que $+\infty$ (resp $-\infty$) est la limite à droite de f en a. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$ (resp $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$)

Propriété

Pour tout nombre réel positif a, et pour tout nombre entier naturel n différent de zéro ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Si n est pair, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.
- Si n est impair, $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \end{cases}$

Consigne 4.25

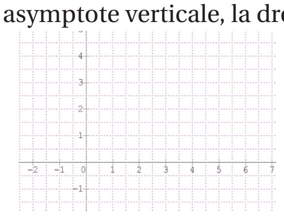
On considère les fonctions numériques ci-dessous :

$f(x) = \frac{1}{(x-8)^8}$ | $g(x) = \frac{1}{x+3}$ | $h(x) = \frac{1}{(x-4)^5}$

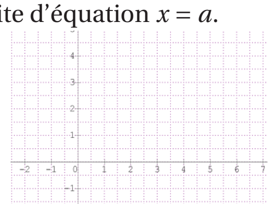
1. Détermine D_f, D_g et D_h.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -3} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$

Propriété

Lorsque la fonction f admet une limite infinie en a, on dit alors que sa représentation graphique admet une asymptote verticale, la droite d'équation $x = a$.



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = -\infty$

Propriété

Soit a et l deux nombres réels, f et g des fonctions telles que : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $l > 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $l < 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $l > 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $l > 0$ alors

$\lim\limits_{x\to a} (f.g)(x) = +\infty$

Consigne 4.26

Soit la fonction $x \to \frac{1}{x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

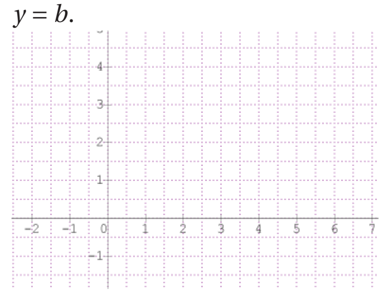
1. Détermine le domaine de définition de la fonction $x \to \frac{1}{x}$.
2. Complète le tableau suivant :

x	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$f(x)$					

3. Que remarque-t-on quand x se « rapproche » de $+\infty$?

Propriété

Lorsque la fonction f admet une limite finie b en l'infinie, on dit alors que sa représentation graphique admet une asymptote horizontale, la droite d'équation $y = b$.



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x\to -\infty} c = c$	$\lim\limits_{x\to +\infty} c = c \ (c \in \mathbb{R})$
$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

NB : Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites à l'infini.

Retenons

Nous admettons les résultats suivants (valables aussi lorsque les limites sont obtenues pour $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$)

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x_0} g = l$ alors $\lim\limits_{x_0} (f+g) = +\infty$

- Si $\lim_{x_0} f = -\infty$ et $\lim_{x_0} g = l$ alors $\lim_{x_0}(f+g) = -\infty$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = +\infty$ alors $\lim_{x_0}(f+g) = +\infty$
- Si $\lim_{x_0} f = -\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x_0}(f+g) = -\infty$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et si $\begin{cases} \lambda > 0 & \text{alors } \lim_{x_0} \lambda f = +\infty \\ \lambda < 0 & \text{alors } \lim_{x_0} \lambda f = -\infty \end{cases}$
- Si $\lim_{x_0} f = -\infty$ et $\lim_{x_0} g = l$ et si $\begin{cases} l > 0 & \text{alors } \lim_{x_0}(f \times g) = -\infty \\ l < 0 & \text{alors } \lim_{x_0}(f \times g) = +\infty \end{cases}$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = +\infty$ alors $\lim_{x_0}(f \times g) = +\infty$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x_0}(f \times g) = -\infty$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$
- Si $\lim_{x_0} f = -\infty$ alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$
- Si $\lim_{x_0} f = l$ et $\lim_{x_0} g = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = l$ alors $\begin{cases} \lim_{x_0} \frac{f}{g} = +\infty & \text{si } l > 0 \\ \lim_{x_0} \frac{f}{g} = -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases}$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x_0} g = 0$ alors $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = +\infty$ (ou $-\infty$)
- Si $\lim_{x_0} f = l$ et si $l \geq 0$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \sqrt{l}$
- Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = +\infty$

Consigne 4.27

Calcule les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x)$
2. $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x)$
3. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \sqrt{x}\right)$
5. $\lim_{x \to -\infty} \left(-5x^3\right)$

Remarque

Les propriétés précédentes ne couvrent pas tous les cas. On appelle **forme indéterminée**, les cas où les propriétés ci-dessous ne permettent pas de conclure.

- $\lim_{x_0} f = 0$ et $\lim_{x_0} g = 0$ alors $\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
- $\lim_{x_0} f = 0$ et $\lim_{x_0} g = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $f \times g$ prend la forme indéterminée $0 \times (-\infty)$ ou $0 \times (+\infty)$.
- $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x_0} g = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{+\infty}{-\infty}$ ou $\frac{-\infty}{+\infty}$ ou $\frac{+\infty}{+\infty}$ ou $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $(f+g)$ prend la forme indéterminée $(+\infty - \infty)$.
  Dans chacun des cas, il s'agira de rechercher directement la limite éventuelle. Trouver, celle-ci s'appelle **lever l'indétermination**.

Consigne 4.28

Calcule les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}(x^2 + 3)$
3. $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} + x\right)$

Consigne 4.29

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = x - cosx$ et $g(x) = \frac{1}{x} sinx$.
Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

Sachant que $\forall x \in [0; +\infty[\,;\, x - cosx \geq -1 + x$ et $\forall x \in]0; +\infty[\,;\, -\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} sinx \leq \frac{1}{x}$.

Propriété

- Soit f une fonction. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit f une fonction. S'il existe une fonction g telle

que $f \leq g$ sur un intervalle $]-\infty; a[$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Consigne 4.30

Soit la fonction numérique f définie par
$f(x) = -x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 7$.

1. Montre que $\forall x \neq 0; f(x) = x^4\left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right)$
2. Calcule $\lim_{x\to+\infty} x^4$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right)$
3. Déduis-en $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$

Consigne 4.31

Soit la fonction numérique g définie par
$g(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{8x^6 + 7x^2 - 2x + 4}$.

1. Montre que $\forall x \neq 0; g(x) = \frac{x^3\left(3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(8x^3 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}$
2. Démontre que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3}{8x^6}$

Propriété

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est égale à celle du quotient du monôme de plus haut degré de P par le monôme de plus haut degré de Q.
$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^n}$

.

Exercices

05

06

07

08

4.3 Dérivation - Étude de fonction

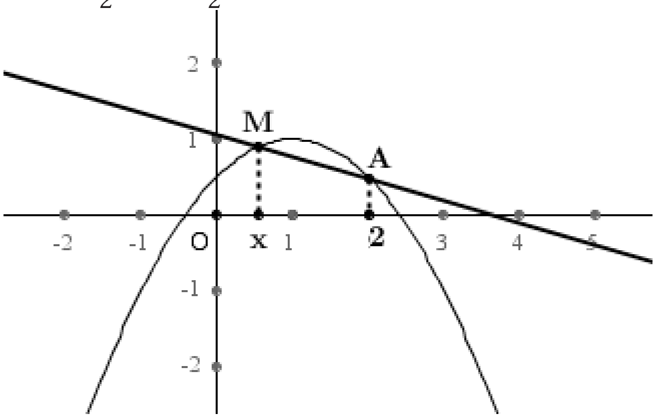
Activité 2.8

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f. $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4.3.1 Dérivation

Consigne 4.32

La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ est la représentation ci-dessous.



On désigne par A le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2 et M un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A.

1. Montre que le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$
2. Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Définition : *Taux de variation d'une fonction*

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I. Pour tout x élément de I, le taux de variation entre x et x_0 est le réel : $t(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux de variation de f entre x et x_0 admet une limite réelle en x_0.
Cette limite est le nombre dérivé de f en x_0. On note :
$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
En posant $h = x - x_0$, on a :
$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Si le taux de variation admet une limite à droite (resp à gauche) réelle en x_0, cette limite est le nombre dérivé à droite (resp à gauche) de f en x_0.

Consigne 4.33

Dans chacun des cas ci-dessous, calcule en utilisant la définition le nombre dérivé de la fonction f en x_0.

1. $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$; $x_0 = 2$
2. $f(x) = \sqrt{2x + 5}$; $x_0 = 2$

Consigne 4.34

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
On pose $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$
Montre que si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

Propriété

Si une fonction est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.
NB : La réciproque n'est pas toujours vraie.

Propriété

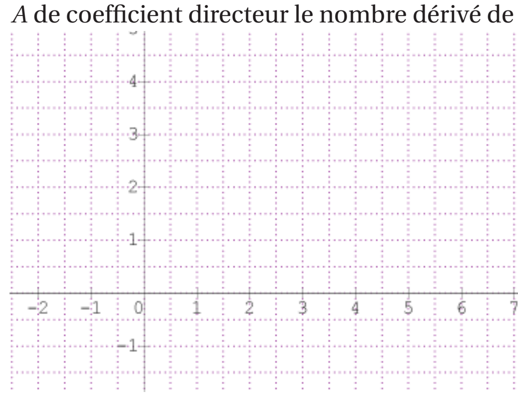
Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche en x_0 et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite en x_0 sont égaux; c'est-à-dire :
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Consigne 4.35

Étudie la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Retenons

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. A un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors $(\mathscr{C})$ admet une tangente en A de coefficient directeur le nombre dérivé de f en x_0.



Consigne 4.36

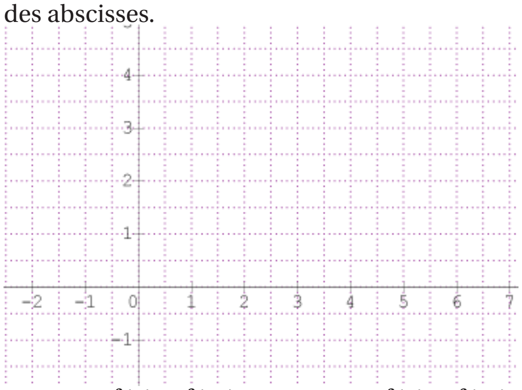
Montre que l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $A(x_0; y_0)$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Définition

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. A un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors $(\mathscr{C})$ admet une tangente en A de coefficient directeur le nombre dérivé de f en x_0.
L'équation de la tangente (T) au point $A(x_0; y_0)$ est :
$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Interprétation géométrique du nombre dérivé

• Si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente (T) est parallèle à l'axe des abscisses.



• Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a'$ avec $a \neq a'$ alors on a une demi-tangente à gauche en x_0 de coefficient directeur égal au nombre dérivé à gauche et une demi-tangente à droite en x_0 de coefficient directeur égal au nombre dérivé à droite.
On dit que l'on a des **points anguleux**. Les équations des demi-tangentes sont :

$(T_d) : \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ x \geq x_0 \end{cases}$ et

$(T_g) : \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + y_0 \\ x \leq x_0 \end{cases}$

• Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente verticale.

Retenons

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- L'ensemble des nombres réels en lesquels f est dérivable est appelé **ensemble de dérivabilité de f**.
- La fonction $x \mapsto f'(x)$ est **la dérivée** (ou **fonction dérivée de f**).
- L'ensemble de définition $D_{f'}$ de la fonction dérivée est un sous-ensemble du domaine de définition de f.

Consigne 4.37

Démontre les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$; $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$; $f(x) = x$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$; $f(x) = x^2$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \in [0; +\infty[$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3x_0^2$; $f(x) = x^3$ avec $x \in \mathbb{R}$

Propriété : *Dérivées des fonctions élémentaires*

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto sinx$	$x \mapsto cosx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto cosx$	$x \mapsto -sinx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto tanx$	$x \mapsto 1 + tan^2 x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété : *Dérivées des fonctions usuelles*

u et v sont deux fonctions numériques.

Fonctions	Dérivées
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
$u \circ v$	$v' \times u' \circ v$
$sin(ax+b)$	$acos(ax+b)$
$cos(ax+b)$	$-asin(ax+b)$

Consigne 4.38

Dérive chacune des fonctions ci-dessous sur leurs domaines de dérivabilité K.

1. $f(x) = -3x^5 - 2x^3 + 7x - 4$; $K = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{3x+7}{-2x-1}$; $K = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$
3. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 4}{x^2 + 1}$; $K = \mathbb{R}$
4. $q(x) = (3x^2 - 2x + 1)^5$; $K = \mathbb{R}$
5. $p(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}(2x - 8)$; $K = \mathbb{R}$

Propriété : *propriétés sur les fonctions dérivables somme produit et quotient*

Retenons

- ✓ Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ✓ Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Propriété

Soit α, β et a des nombres réels, g une fonction et f la fonction définie par $f(x) = g(\alpha x + \beta)$. Si g est dérivable en $\alpha x + \beta$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha g(\alpha x + \beta)$.

Consigne 4.39

Consigne 4.40 *dérivée seconde d'une fonction*

4.3.2 Étude de fonction

Propriétés

L'étude du signe de la dérivée permet d'étudier le sens de variation de la fonction f.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I :

- ✓ Si pour tout $x \in I; f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- ✓ Si pour tout $x \in I; f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
- ✓ Si pour tout $x \in I; f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ✓ Si la dérivée f' s'annule sur I et change de signe alors f admet un **extrémum**(**maximum, minimum**).
- ✓ Si la dérivée première f' s'annule sur I et ne change pas de signe, et si la dérivée seconde f'' s'annule tout en changeant de signe alors f admet un **point**

d'inflexion.

Consigne 4.41

Soit f une fonction numérique et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que
$f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + 7$.
Étudie le sens de variation de la fonction f.

Retenons : *Variations d'une fonction*

Étudier les variations d'une fonction f c'est :

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Déterminer les limites aux bornes de cet ensemble de définition
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f
- Déterminer sa fonction dérivée f'
- Étudier le signe de f' puis en-déduire le sens de variation de f
- Dresser le tableau de variation de f
  Tableau de variation
  Dans le tableau de variation, on récapitule suivant les valeurs de x, le signe de la dérivée de la fonction étudiée. On en déduit les différents intervalles de son ensemble de définition (les intervalles non inclus dans l'ensemble de définition sont en générale hachurés, et les valeurs isolées pour lesquelles f n'est pas définie sont symbolisées par une double barre verticale).

Consigne 4.42

Étudie les variations de chacune des fonctions f, g, h et i ci-dessous.

1. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + 7$
2. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1}$
4. $i(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 4x - 5}$

.

Exercices

09

10

11

12

4.4 Primitives

Activité 2.9

Tu sais désormais calculer l'expression de la dérivée d'une fonction. Tu vas, dans cette partie, apprendre à déterminer une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

4.4.1 Notion de primitive

Consigne 4.43

Soit les fonctions f et F définies par $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $F(x) = x\sqrt{x}+2$.

1. Démontre que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Démontre que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.
3. Démontre que $\forall x \in [0;+\infty[; F'(x) = f(x)$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K. On appelle **primitive de** f **sur** K toute fonction F dérivable sur K telle que : $\forall x \in K, F'(x) = f(x)$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K.

Consigne 4.44

Démontre que les fonctions f et g définies par $f(x) = 6(2x-1)^2$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ admettent une primitive sur leur ensemble de définition.

Consigne 4.45

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et F une primitive de f sur K.

1. Démontre que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto F(x)+c$ est une primitive de f sur K.
2. Soit G une primitive de f sur K.
   (a) Démontre que la fonction $G-F$ est constante sur K.
   (b) Déduis-en que l'expression de G est de la forme $G(x) = F(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction admettant une primitive particulière F sur un intervalle K.
• Pour toute constante réelle c, la fonction $x \longmapsto F(x)+c$ est une primitive de f sur K.
• Toute primitive de f sur K est de la forme $x \longmapsto F(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

Consigne 4.46

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^3$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -x^2$, $K = \mathbb{R}$

Consigne 4.47

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et F une primitive de f sur K. x_0 est un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. On considère la fonction G définie par : $\forall x \in K, G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

1. Démontre que G est une primitive de f sur K et que $G(x_0) = y_0$.
2. Soit H une fonction définie sur K telle que $H(x_0) = y_0$.
   Démontre que si H est une primitive de f sur K alors $\forall x \in K, H(x) = G(x)$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, x_0 un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. Il existe une primitive et une seule de la fonction f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 ($F(x_0) = y_0$).

Consigne 4.48

Détermine la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K qui vérifie la condition indiquée.
$f(x) = -3x^2$, $K = \mathbb{R}$ et $F(-3) = 2$

Propriété

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle K alors pour tous nombres réels a et b, la fonction $(aF+bG)$ est une primitive de la fonction $(af+bg)$ sur K.

Consigne 4.49

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.
$f(x) = 2x^2 + 6)$, $K = \mathbb{R}$

4.4.2 Primitives des fonctions élémentaires

Propriété

Fonction f	Primitive de f	Sur l'intervalle
$x \longmapsto a (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n (n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$x \longmapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$x \longmapsto x^r (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$x \longmapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\begin{cases} [0; +\infty[\text{ si } x \geq 0 \\ ]0; +\infty[\text{ si } x > 0 \end{cases}$
$x \longmapsto sin x$	$x \longmapsto -cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto cos x$	$x \longmapsto sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$	$x \longmapsto tan x + c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[(k \in \mathbb{Z})$
$x \longmapsto \frac{1}{sin^2 x} = 1 + cotan^2 x$	$x \longmapsto -cotan x + c$	$]k\pi; (k+1)\pi[(k \in \mathbb{Z})$

4.4.3 Primitives des fonctions usuelles

Consigne 4.50

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3$, $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (-2x + 3)(x - 1)$, $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$, $K =]0; +\infty[$

Consigne 4.51

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)^4$.
Déterminer la primitive G_0 de f qui prend la valeur 0 pour $x = 2$.

Exercices

13

14

15

16

5 Suites numériques

Activité 2.10

5.1 Notion de suite

Définition : *Suites numériques*
On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
E étant l'ensemble de définition d'une suite numérique $n \mapsto u_n$, on note cette suite $(u_n)_{n\in E}$ ou (u_n).
L'image de l'entier naturel n par u, notée u_n est appelée **terme général ou terme d'indice n ou terme de rang n de la suite (u_n).**

Retenons
Nous avons deux manières de définir une suite numérique.

- **Suite définie par une formule explicite**
  Le terme général de la suite est donné en fonction de n.
  Exemples :
  1. $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  2. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- **Suite définie par une formule de récurrence**
  La suite (u_n) est définie par son premier terme et une formule de récurrence qui exprime u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.
  Exemple : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Consigne 5.1

Pour chacune des suites définies ci-dessous, calcule les cinq premiers termes de la suite u.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n-5$
2. Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2n+3}{n-1}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -1 + u_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5.2 Représentation graphique des termes d'une suite

Consigne 5.2

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 2n + 2$.

1. Détermine une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
2. Dans un repère, trace la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f sur $[0; +\infty[$ et place u_0, u_1, u_2, u_3 sur le graphique.

Consigne 5.3

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Dans un repère orthonormal, trace les droites (Δ) et (D) d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.
2. Place u_0 sur l'axe des abscisses et à l'aide uniquement de la règle, propose une construction qui permette d'obtenir u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

5.3 Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Propriété
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
- (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Consigne 5.4

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.
Étudie si (u_n) est majorée, minorée ou bornée.

5.4 Suites monotones (Sens de variation)

Propriété
Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

- Si $\forall n \in I, U_n \leq U_{n+1}$ alors (U_n) est croissante sur I.
- Si $\forall n \in I, U_n \geq U_{n+1}$ alors (U_n) est décroissante sur I.
- Si $\forall n \in I, U_n = U_{n+1}$ alors (U_n) est constante sur I.

- (U_n) est stationnaire sur I lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.
- Une suite numérique est dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Consigne 5.5

Dans chacun des cas suivants, étudie le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 2n+1$
2. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Retenons *Comment étudier le sens de variation d'une suite*

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$. Pour étudier le sens de variation de (u_n), on peut procéder de l'une des façons suivantes.

- **Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$**
  - ✓ Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - ✓ Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- **Utiliser le sens de variation d'une fonction**
  Si la suite (u_n) est telle que $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ alors (u_n) et f ont même sens de variation.
- **Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1**
  Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs.
  - ✓ Si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - ✓ Si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Consigne 5.6

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n - n^2$.

1. Calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.
2. Déduis-en le sens de variation de la suite (u_n).

Consigne 5.7

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1}$.

1. Détermine une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
2. Étudie le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   Déduis-en le sens de variation de la suite (u_n).

Consigne 5.8

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

1. Exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.
2. Compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
   Déduis-en le sens de variation de la suite (u_n).

5.5 Suites arithmétiques - suites géométriques

5.5.1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé **la raison** de la suite (u_n).

Remarque

- Si $r \geq 0$ alors (u_n) est croissante
- Si $r \leq 0$ alors (u_n) est décroissante

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut établir que pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est la raison de la suite.

Consigne 5.9

Démontre que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{1}{2}n + 3$ est arithmétique. Quelle est sa raison ?

Propriétés

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r.

- Pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n = u_p + r(n-p)$.
  C'est l'expression du terme général de la suite (u_n).

- $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(u_p+u_n)$. C'est la somme des n termes consécutifs de la suite (u_n).

Consigne 5.10

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 18$ et $u_{15} = 13$. Détermine la raison r de la suite (u_n) puis exprime u_n en fonction de n.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 telle que $u_0 = 1$. Calcule la somme $S = u_{10} + u_{11} + ... + u_{100}$.

5.5.2 Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre réel q est appelé **la raison** de la suite (u_n).

Remarque

- Si $q > 0$ alors (u_n) est croissante
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on peut démontrer qu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel trouvé est la raison de la suite.

Consigne 5.11

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$.
Démontre que la suite (u_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?

Propriétés

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q.

- Pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$. C'est l'expression du terme général de la suite (u_n).
- $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$ ou $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = \dfrac{u_{n+1}-u_p}{q-1}$. C'est la somme des n termes consécutifs de la suite (u_n).
- $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = nu_p$ si $q = 1$.

Consigne 5.12

1. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_3 = -8$ et $u_6 = 27$. Détermine la raison q de la suite (u_n) puis exprime u_n en fonction de n.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ telle que $u_0 = 1$. Calcule la somme $S = u_5 + u_6 + ... + u_{50}$.

Propriété caractéristique

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b = \dfrac{a+c}{2}$.
- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$.

5.6 Suites convergentes - suites divergentes

Définition

Une suite (u_n)est dite **convergente** si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l (l \in \mathbb{R})$.
Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Consigne 5.13

(u_n) est la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.
Démontre la suite (u_n) converge vers 0.

Propriété

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.

Propriété

- Toute suite décroissante et non minorée est divergente.
- Toute suite croissante et non majorée est divergente.

Propriété

Soit l un nombre réel, f une fonction numérique, (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors (u_n) diverge.

Consigne 5.14

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}$.

1. Détermine une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ telle que pour tout n, $u_n = f(n)$.
2. (a) Montre que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$.

   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déduis-en que la suite (v_n) est convergente.

Propriété : *Étude d'une suite*

Étudier une suite numérique, c'est étudier :

- le sens de variation de la suite
- la minoration, la majoration (si nécessaire)
- la convergence

Consigne 5.15 *étude d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$*

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+4}$.

1. (a) Étudie le sens de variation de f sur I.

   (b) Démontre que $\forall x \in I; f(x) \in I$.
2. (u_n) est la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$

   (a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

   (b) Étudie le sens de variation de (u_n).

   (c) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.

Exercices

01

02

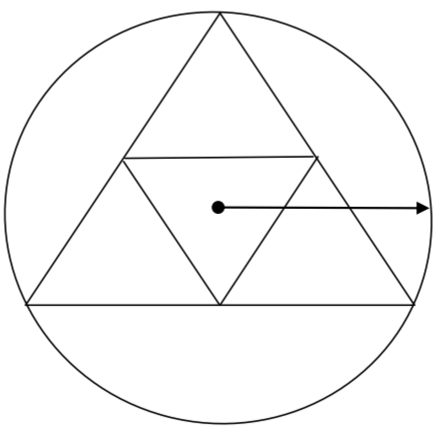
03

04

« Les hautes mathématiques sont l'autre musique de la pensée »
(George Steiner)

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ :
Texte : *La sirène du lycée*
C'est la rentrée. Les murs de façade du lycée ont été repeints. Des objets d'embellissement qui suscitent la curiosité des élèves ont été placés à divers endroits de l'établissement. L'un de ces objets a retenu l'attention de Zoé, élève en classe de $1^{ère}$. Cet objet est un disque sur lequel est fixée une plaque transparente ayant la forme d'un triangle équilatéral, inscrit dans sa bordure. Au centre du disque est fixé une aiguille de longueur égale au rayon du disque. Cette aiguille est accolée à une autre plaque triangulaire de même nature dont les sommets coïncident avec les milieux des cotés de la première plaque. Un bouton électrique fait tourner l'aiguille dans le plan du disque. Celle-ci entraîne dans sa course la petite plaque triangulaire et déclence aussitôt la sirène du lycée.
Voici une représentation de la position de repos de l'aiguille :



L'aiguille actionnée par le bouton, tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en émettant une jolie brillance circulaire qui évolue régulièrement à partir du centre du disque vers son bord; c'est-à-dire que la surface de la brillance évolue à vitesse constante en fonction du temps. Quand on cesse d'appuyer sur le bouton, l'aiguille revient au repos en sens opposé et la jolie brillance s'estompe. Émerveillée par ce dispositif, Zoé se propose de rechercher la variation du rayon de la brillance et le rapport qui lie les triangles du dispositif de la sirène.

Tâche :
Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

1 Trigonométrie

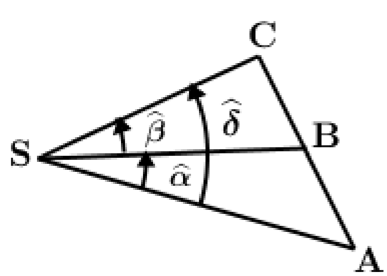
Activité 3.1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs non nuls. S, A et B des points tels que $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{v}$. Le couple de demi-droites $([SA);[SB))$ de même origine S est un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$.

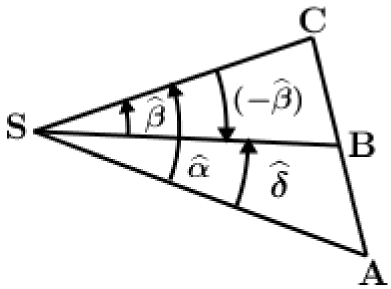
1.1 Angle orienté - mesure principale

Consigne 1.1

En considérant la plaque de forme équilatérale telle que :



1.

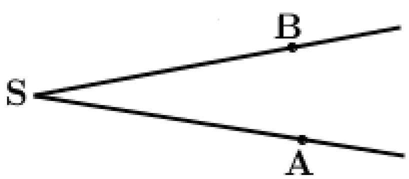


2.

Détermine l'angle orienté $\widehat{\delta}$ dans chacun des cas ci-dessus.

Définitions

Un angle orienté de sommet S est un couple de deux demi-droites de même origine $([SA);[SB))$. Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.



On distingue deux sens :

- Le sens positif ou trigonométrique qui est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Le sens négatif qui est le sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.

L'amplitude d'un angle se mesure en degrés ou en radians. Elle est précédée du signe + si l'angle orienté est de sens positif et du signe ? dans l'autre cas.

Information *Conversion degré-radian*

Le radian est l'amplitude d'un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle.

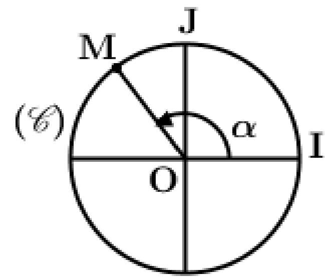
Un radian équivaut à $\dfrac{180°}{\pi}$

Les conversions d'angles remarquables sont dans le tableau suivant.

Degrés	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Définitions

- Le plan est muni du repère orthonormé direct.
  - ✓ $\mathscr{A}$ est l'ensemble des angles orientés.
  - ✓ $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique.

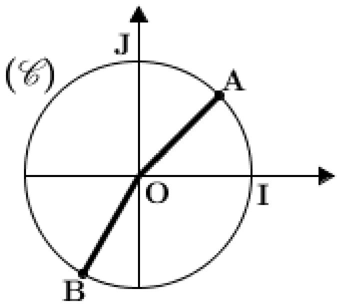


Chaque angle orienté a pour mesure principale (en radians) un nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$.
Réciproquement, chaque nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$ est la mesure principale (en radians) d'un angle orienté. C'est pourquoi on note généralement l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$ de mesure principale α.

- A chaque point M du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$, on associe un nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$, la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.
Réciproquement, à chaque nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$, on peut associer le point M du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ tel que $mes(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$.
- Soit $(\widehat{\alpha})$ et $(\widehat{\beta})$ deux angles orientés. $([OA);[OB))$ un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$; $([OB);[OC))$ un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\beta})$.
  - ✓ On appelle **somme des angles orientés** $(\widehat{\alpha})$ **et** $(\widehat{\beta})$, l'angle orienté $(\widehat{\delta})$ tel que $(\widehat{\delta}) = (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$. On note $(\widehat{\delta}) = (\widehat{\alpha}) + (\widehat{\beta})$.
  - ✓ On appelle **différence des angles orientés** $(\widehat{\alpha})$ **et** $(\widehat{\beta})$, l'angle orienté $(\widehat{\delta})$ tel que $(\widehat{\delta}) = (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$. On note $(\widehat{\delta}) = (\widehat{\alpha}) + (\widehat{-\beta})$ où $(\widehat{-\beta})$ est l'opposé de l'angle orienté $(\widehat{\beta})$.
- Soit $(\widehat{\alpha})$ un angle orienté de mesure principale α. Tout nombre réel de la forme $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ est appelé une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\alpha})$.

Consigne 1.2

Sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ de centre O ci-dessous, les points A et B sont tels que $mes\widehat{IOA} = 45°$ et $mes\widehat{IOB} = 120°$.



Donne une mesure en radians des angles orientés :

(a) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$ (b) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$ (c) $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$

1.2 Congruence modulo 2π

Définition *Reconnaissance des mesures d'un même angle orienté*

Deux mesures quelconques x et y sont des mesures d'un même angle orienté si la différence $x-y$ est un multiple entier de 2π. On dit qu'elles sont congrues modulo 2π. On note $x \equiv y[2\pi]$ et on lit « x est congru à y modulo 2π. »

On a : $x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi$.

Consigne 1.3

Dans chacun des cas, dis si les réels sont-ils des mesures d'un même angle orienté :

(a) $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ (b) $\frac{25\pi}{4}$ et $-\frac{17\pi}{4}$

Consigne 1.4

x, y, z et a sont quatre nombres réels.

1. Démontre que si $x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow x + a \equiv y + a[2\pi]$.
2. Démontre que si $x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow -x \equiv -y[2\pi]$.
3. Démontre que si $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Longrightarrow x \equiv z[2\pi]$.

Propriété

Pour tous nombres réels x, y, z et a, on a :

1. $x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow x + a \equiv y + a[2\pi]$.
2. $x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow -x \equiv -y[2\pi]$.
3. $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Longrightarrow x \equiv z[2\pi]$.

1.3 Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté $(\widehat{a})$ dont une mesure θ est connue consiste à écrire : $\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où $\alpha \in]-\pi;\pi]$. Cette écriture peut être immédiate.
Sinon, on détermine d'abord à l'aide de l'inégalité $-\pi < \theta + 2k\pi \leq \pi$, la valeur de k puis on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Consigne 1.5

Détermine de deux manières différentes la mesure principale des angles orientés $\frac{1789\pi}{4}$ et $-\frac{13\pi}{6}$.

Propriété

• x est une mesure de l'angle orienté nul si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
• x est une mesure de l'angle orienté plat si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
• x est une mesure de l'angle orienté droit direct ou indirect si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété *Relation de Chasles*

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$ Cette relation est appelée **relation de Chasles**.

Consigne 1.6

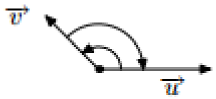
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, démontre que :

1. $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

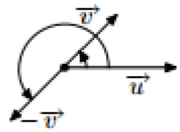
Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

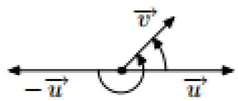
- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



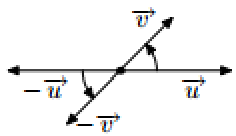
- $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



- $(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



- $(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

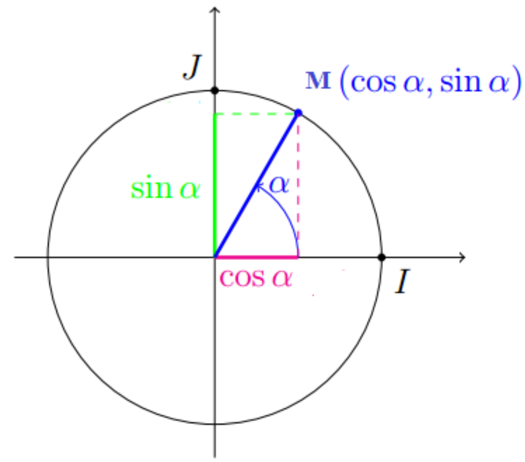


1.4 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Propriété

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dont une mesure est α et soit M le point-image du réel α sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

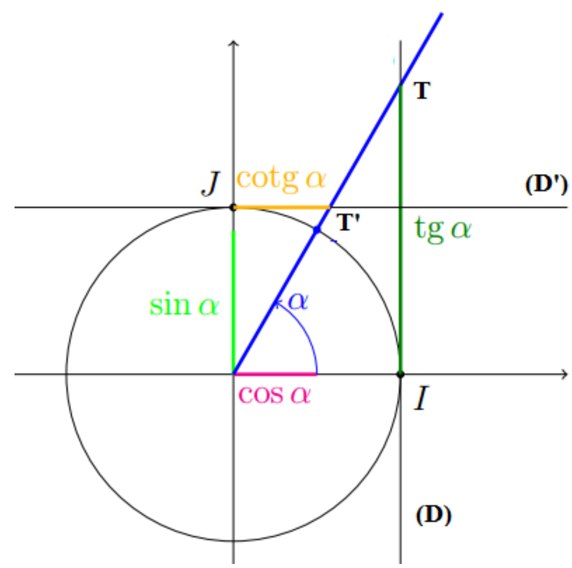
- Le cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α noté $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $cos\alpha$ est l'abscisse du point M.
- Le sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α noté $sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou $sin\alpha$ est l'ordonnée du point M.



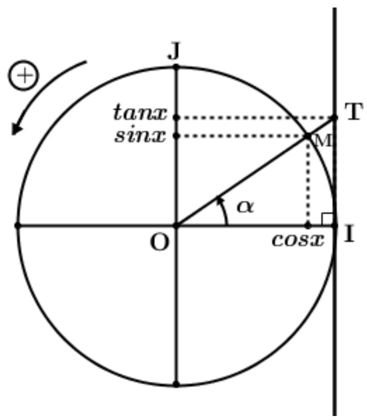
1.5 Tangente et cotangente d'un angle orienté

Propriété

- Soit (D) la tangente au cercle trigonométrique passant par I.
  La tangente de l'angle orienté α est l'ordonnée du point d'intersection T du $2^{ème}$ côté de l'angle α et de la droite (D). Elle se note $tg\alpha$ ou $tan\alpha$.
- Soit (D') la tangente au cercle trigonométrique passant par I.
  La tangente de l'angle orienté α est l'abscisse du point d'intersection T' du $2^{ème}$ côté de l'angle α et de la droite (D'). Elle se note $cotg\alpha$ ou $cot\alpha$.



Consigne 1.7



On note $cos\alpha = cosx$; $sin\alpha = sinx$; $tan\alpha = tanx$ et $M\begin{pmatrix} cosx \\ sinx \end{pmatrix}$.

Démontre que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}; cos^2x + sin^2x = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}; 1 + tan^2x = \dfrac{1}{cos^2x}$

Propriété

• Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif k, on a :

- ✓ $cos^2x + sin^2x = 1$
- ✓ $-1 \leq sinx \leq 1$
- ✓ $-1 \leq cosx \leq 1$
- ✓ $cos(x + 2k\pi) = cosx$
- ✓ $sin(x + 2k\pi) = sinx$
- ✓ $tan(x + k\pi) = tanx$

• Pour tout nombre réel x tel que $cosx \neq 0$ et pour tout nombre entier relatif k, on a :

- ✓ $tanx = \dfrac{sinx}{cosx}$
- ✓ $1 + tan^2x = \dfrac{1}{cos^2x}$

Consigne 1.8

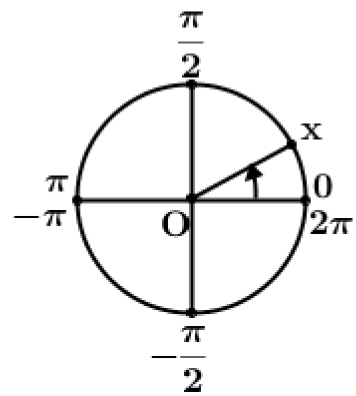
x est élément de $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $sinx = \dfrac{5}{13}$.

Détermine $cosx$.

1.6 Angles associés

Consigne 1.9

1. Représente sur le cercle trigonométrique les images des réels suivants :
$\dfrac{\pi}{2} + x$; $\dfrac{\pi}{2} - x$; $\pi - x$; $\pi + x$; $-x$



2. Démontre graphiquement que pour tout nombre réel x, on a :

(a) $cos(-x) = cosx$	(f) $sin(\pi - x) = sinx$
(b) $sin(-x) = sinx$	(g) $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sinx$
(c) $cos(\pi + x) = -cosx$	(h) $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cosx$
(d) $sin(\pi + x) = -sinx$	(i) $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$
(e) $cos(\pi - x) = -cosx$	(j) $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$

3. Démontre que pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a :

(a) $tan(-x) = -tanx$	(d) $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\dfrac{1}{tanx}$
(b) $tan(\pi + x) = tanx$	
(c) $tan(\pi - x) = -tanx$	(e) $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{tanx}$

Propriété

• Pour tout nombre réel x, on a :

✓ $cos(-x) = cosx$	✓ $sin(\pi - x) = sinx$
✓ $sin(-x) = sinx$	✓ $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sinx$
✓ $cos(\pi + x) = -cosx$	✓ $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cosx$
✓ $sin(\pi + x) = -sinx$	✓ $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sinx$
✓ $cos(\pi - x) = -cosx$	✓ $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cosx$

• Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a :

- ✓ $tan(-x) = -tanx$
- ✓ $tan(\pi + x) = tanx$
- ✓ $tan(\pi - x) = -tanx$

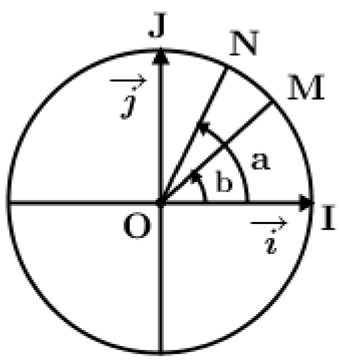
- ✓ $tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\dfrac{1}{tanx}$
- ✓ $tan(\frac{\pi}{2}-x)=\dfrac{1}{tanx}$

Consigne 1.10

1. Dans chacun des cas, exprime en fonction de $cosx$ et de $sinx$:
   $A=cos(-x)+sin(-x)+cos(\pi+x)+sin(\pi-x)$
   $B=sin(x+\pi)+cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
2. (a) Simplifie :
   $\pi-\dfrac{\pi}{10}$; $\pi-\dfrac{2\pi}{5}$; $2\pi-\dfrac{2\pi}{5}$; $2\pi-\dfrac{4\pi}{5}$
   (b) Déduis-en les valeurs de :
   $A=cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
   $B=sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)+sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)+sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

1.7 Formule d'addition

Consigne 1.11



Soit a et b deux nombres réels; $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ deux vecteurs unitaires tels que, b est une mesure de $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$ et a une mesure de $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{ON}})$.
On sait que : $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})=(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{ON}})-(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$ donc $a-b$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.
$\overrightarrow{OM}(cosb;sinb)$; $\overrightarrow{ON}(cosa;sina)$.
Démontre que pour tout nombre réel a et b, on a :

1. $cos(a-b)=cosa.cosb+sina.sinb$
2. $cos(a+b)=cosa.cosb-sina.sinb$
3. $sin(a-b)=sina.cosb-sinb.cosa$
4. $sin(a+b)=sina.cosb+sinb.cosa$

Propriété *Formule d'addition*
Pour tout nombre réel a et b, on a :

- ✓ $cos(a-b)=cosa.cosb+sina.sinb$
- ✓ $cos(a+b)=cosa.cosb-sina.sinb$
- ✓ $sin(a-b)=sina.cosb-sinb.cosa$
- ✓ $sin(a+b)=sina.cosb+sinb.cosa$
- ✓ $tan(x+y)=\dfrac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$
- ✓ $tan(x-y)=\dfrac{tanx-tany}{1+tanx.tany}$

Consigne 1.12

1. Exprime $cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ en fonction de $cosx$ et $sinx$.
2. Calcule $cos\dfrac{\pi}{12}$ et $cos\dfrac{\pi}{8}$.

1.8 Formule de duplication et de linéarisation

Consigne 1.13

Démontre que pour tout nombre réel x :

1. $cos2x=cos^2x-sin^2x$
2. $cos2x=1-2sin^2x$
3. $cos2x=2cos^2x-1$
4. $sin2x=2sinx.conx$

Propriété *Formule de duplication*
Pour tout nombre réel a et b, on a :

- ✓ $cos2x=cos^2x-sin^2x$
- ✓ $cos2x=1-2sin^2x$
- ✓ $cos2x=2cos^2x-1$
- ✓ $sin2x=2sinx.cosx$
- ✓ $tan2x=\dfrac{2tanx}{1-tan^2x}$

Propriété *Formule de linéarisation*
Pour tout nombre réel a et b, on a :

- ✓ $cos^2x=\dfrac{1+cos2x}{2}$

✓ $sin^2 x = \dfrac{1 - cos2x}{2}$

✓ $tan^2 x = \dfrac{1 - cos2x}{1 + cos2x}$

Propriété
Pour tout nombre $x \neq (2k+1)\pi$ où k est un entier, on a :

✓ $cosx = \dfrac{1 - tan^2 \frac{x}{2}}{1 + tan^2 \frac{x}{2}}$

✓ $sinx = \dfrac{2tan\frac{x}{2}}{1 + tan^2 \frac{x}{2}}$

Consigne 1.14

1.9 Transformation de somme en produit et de produit en somme

Consigne 1.15

On pose $p = a + b$ et $q = a - b$.
En utilisant la démonstration précédente; démontre que :

1. $cosa.cosb = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$
2. $sina.sinb = -\frac{1}{2}[cos(a+b) - cos(a-b)]$
3. $sina.cosb = \frac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$
4. $cosa.sinb = \frac{1}{2}[sin(a+b) - sin(a-b)]$
5. $cosp + cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
6. $cosp - cosq = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
7. $sinp + sinq = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
8. $sinp - sinq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Propriété *Transformation de somme en produit et de produit en somme*
Pour tout nombre réel a et b, on a :

✓ $cosa.cosb = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$

✓ $sina.sinb = -\frac{1}{2}[cos(a+b) - cos(a-b)]$

✓ $sina.cosb = \frac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$

✓ $cosa.sinb = \frac{1}{2}[sin(a+b) - sin(a-b)]$

✓ $cosp + cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

✓ $cosp - cosq = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

✓ $sinp + sinq = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

✓ $sinp - sinq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

✓ $tanp + tanq = \dfrac{sin(p+q)}{cosp.cosq}$

✓ $tanp - tanq = \dfrac{sin(p-q)}{cosp.cosq}$

1.10 Équations - Inéquations

Retenons 1
- Pour tout nombre réel $t \in [-1;1]$, il existe un nombre réel $a \in]-\pi;\pi]$ tels que $sina = t$ et $cosa = t$.
- Pour tout nombre t, il existe un nombre $a \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tana = t$.

1.10.1 Équations du type $sinx = a$ et $cosx = b$

Retenons 2
- Pour résoudre l'équation $sinx = a$, on peut procéder comme suit :

  ✓ Si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution.

  ✓ Si $|a| \leq 1$,
  - on recherche une solution particulière α telle que $sinx = sin\alpha$.
  - Toute solution de l'équation est de la forme :
    $$\begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \quad ou \qquad\qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

- Pour résoudre l'équation $cosx = b$, on peut procéder comme suit :

  ✓ Si $|b| > 1$, l'équation n'a pas de solution.

  ✓ Si $|b| \leq 1$,
  - on recherche une solution particulière α telle que $cosx = cos\alpha$..

– Toute solution de l'équation est de la forme : $\begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ ou \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

Consigne 1.16

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous :

1. (a) $2cosx = -1$ (b) $cos2x = cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $sinx + cos2x = 0$
2. (a) $sinx = \frac{1}{2}$ (b) $2sin^2x = 1$

1.10.2 Équations du type $tanx = c$

Retenons 4
Pour résoudre l'équation du type $tanx = c$. On détermine une solution particulière α telle que $tanx = tan\alpha$. La solution de l'équation est : $x = \alpha + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Consigne 1.17

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $tanx = 1$

1.10.3 Équations du type $acosx + bsinx = c$, a, b et c sont tous non nuls

Retenons 3
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $acosx + bsinx = c$.

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type $cosx = t$ ou $sinx = t$.
- Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ et on a : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc il existe un nombre réel φ tel que $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  donc $cos\varphi cox + sin\varphi sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  d'où $\mathbf{cos}(\varphi - \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}$

Consigne 1.18

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $\frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $3cosx + \sqrt{3}sinx = ?3$

Retenons 4 *Autre méthode de résolution*
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type $acosx + bsinx = c$. • Diviser les deux membres par a ou b (nous supposerons dans la suite qu'on a divisé par a).
• poser $\frac{b}{a} = tan\phi$ de sorte que l'équation devient :
$sinx + tan\phi.cosx = \frac{c}{a} \iff cos\phi.sinx + sin\phi.cosx = \frac{c}{a}cos\phi$
$\iff sin(\phi + x) = \frac{c}{a}cos\phi$
• Deux cas peuvent se présenter selon la valeur du deuxième membre :

✓ Si $\frac{c}{a}cos\phi < -1$ ou $\frac{c}{a}cos\phi > 1$, l'équation est impossible.

✓ Si $-1 \leq \frac{c}{a}cos\phi \leq 1$, on pose $\frac{c}{a}cos\phi = sin\varphi$ de sorte que l'équation devient : $\mathbf{sin}(\phi + \mathbf{x}) = \mathbf{sin}\varphi$

Consigne 1.19

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{3}cos2x - sin2x = 2$

1.10.4 Inéquations

Retenons 4 *Autre méthode de résolution*
Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du type $sinx \geq a$. • Si $a < -1$ l'inéquation est toujours vérifiée alors $S = \mathbb{R}$. • Si $a > 1$ l'inéquation n'est jamais vérifiée alors $S = \phi$. • Si $a = -1$ l'inéquation devient $sinx = -1$. • Si $a = 1$ l'inéquation devient $sinx = 1$. • Si $-1 < a < 1$ alors on résout l'équation $sinx = a$.
Soit x_1 et x_2 les solutions de l'équation $sinx = a$, donc les solutions de l'inéquation $sinx \geq a$ sont $x_1 \leq x \leq x_2$ avec $x_1 < x_2$.

Consigne 1.20

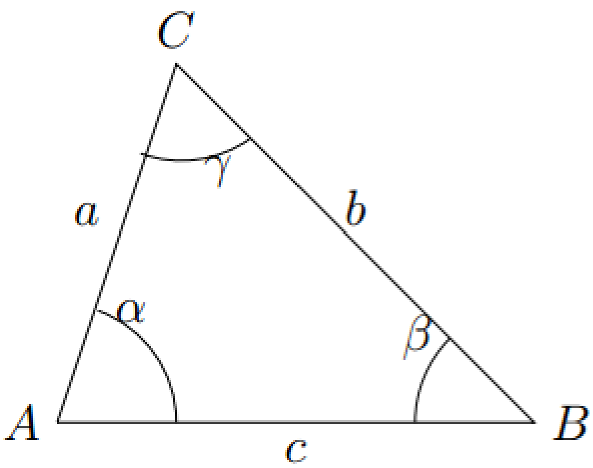
Résoudre analytiquement et graphiquement dans $\mathbb{R}$ et dans $]-\pi;\pi]$, les inéquations :

1. $sinx \leq -\frac{1}{2}$
2. $sinx \geq -\frac{1}{2}$
3. $cosx \leq \frac{1}{2}$
4. $cosx > \frac{1}{2}$
5. $sinx \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

.

1.11 Triangle quelconque

1.11.1 Formule des cosinus ou Formule d'Al-Kashi



Formule d'Al-Kashi

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\gamma$

1.11.2 Formule des sinus

Formule des sinus

$$\frac{sin\alpha}{\alpha} = \frac{sin\beta}{\beta} = \frac{sin\gamma}{\gamma}$$

Remarque

Le rapport $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ est égal à $\frac{1}{2R}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1.11.3 Aire d'un triangle

Aire d'un triangle

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}acsin\beta = \frac{1}{2}bcsin\alpha$$

Exercices

01

02

03

04

2 Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés

Activité 3.2

2.1 Définition

Définition

- On appelle point pondéré tout couple $(A;a)$ où A est un point et a un nombre réel; a est appelé coefficient du point A.
- Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés tels que $a+b \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

  On note $G = bar\{(A,a),(B,b)\}$ ou $G = bar$ $\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline\end{array}$

  et on lit G barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.
- Soit $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ deux points pondérés tels que $a+b+c \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
  G est appelé barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c); et on note $G = bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.

Définition : *Isobarycentre des points pondérés*

Soit G le barycentre du système des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq 4}$.
Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ alors l'unique point G de $\mathscr{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ est appelé **isobarycentre des points pondérés** $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq 4}$.

Remarque

- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.
- L'isobarycentre de trois points A, B et C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Méthode

- Pour construire le barycentre G de deux points pondérés (A,a) et (B,b) avec $a+b \neq 0$, on peut écrire $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
- Pour construire le barycentre G de trois points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) avec $a+b+c \neq 0$, on peut écrire $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

Consigne 2.1

1. $[AB]$ est un segment de longueur donné. Construis le barycentre indiqué dans chacun des cas suivants :
   (a) G_1 barycentre de $(A,7)$ et $(B,-1)$.
   (b) G_2 barycentre de $(A,-3)$ et $(B,-1)$.
2. ABC est un triangle. Construis le point G, barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,3)$ et $(C,1)$.

Information

Position du point G barycentre $(\mathbf{A},\mathbf{a})$ et $(\mathbf{B},\mathbf{b})$ avec $\mathbf{a}+\mathbf{b} \neq 0$

- G appartient au segment $[AB]$ si et seulement si, a et b sont de même signe.
- G est plus proche du point affecté du coefficient dont la valeur absolue est la plus grande.

Méthode

✓ Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à conditions que cette somme soit différente de zéro.

✓ Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

✓ Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G, on peut démontrer queG est à la fois barycentre des points I et J et barycentre des points K et L.

Consigne 2.2

ABC est un triangle et I, J, K les points tels que : $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \text{ et } y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$$

1. Exprime I comme barycentre de B et C, J comme barycentre de A et C, et K comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser.
2. Démontre que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Consigne 2.3

G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -2)$.

1. Construis G.
2. A' et B' sont les points tels que : $\overrightarrow{A'G} = 2\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{B'G} = 2\overrightarrow{BG}$. Démontre que les points G, A' et B' sont alignés.

2.2 Homogénéité et associativité du barycentre

Propriété *Homogénéité du barycentre*

Le barycentre de n $(n \geq 3)$ points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.
$G = bar\{(A, \alpha_1), (B, \alpha_2), \cdots, (N, \alpha_n)\} \iff G = bar\{(A, k\alpha_1), (B, k\alpha_2), \cdots, (N, k\alpha_n)\}$, $k \neq 0$.

Propriété *Associativité du barycentre*

Soit (A, a); (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et si H est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de $(H, a + b)$ et (C, c). On a : $bar\{(A, a), (B, b), (C, c)\} = bar\{(H, a + b), (C, c)\}$.

Consigne 2.4

On considère un triangle ABC. Construis le barycentre G des points pondérés $(A, -2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$ en utilisant l'associativité du barycentre.

2.3 Coordonnées du barycentre dans un repère cartésien du plan

Propriété *Coordonnées d'un barycentre*

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du plan. Les coordonnées $(x_G; y_G)$ du barycentre G de (A, a) et (B, b) avec $a + b \neq 0$ sont :
$x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}$
- $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ sont trois points du plan. Les coordonnées $(x_G; y_G)$ du barycentre G de (A, a), (B, b) et (C, c) avec $a + b + c \neq 0$ sont :

Consigne 2.5

Dans un repère du plan, on donne les points : $A(3; -2)$, $B(4; 2)$ et $C(5; 1)$.
Calcule les coordonnées :

1. du barycentre G de $(A, 1)$ et $(B, -2)$.
2. du barycentre G' de $(A, 1)$, $(B, -2)$ et $(C, 3)$.

Exercices

01

02

03

04

3 Cercle dans le plan

Activité 3.3

Rappel

Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de rayon r est : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

• Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Le système $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

• Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et de rayon r. Le système $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Consigne 3.1

On considère deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ d'équations respectives $x^2+y^2-5=0$ et $2x^2+2y^2-x+3y=0$.

1. Détermine une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.
2. Détermine une représentation paramétrique de $(\mathscr{C}')$.

Consigne 3.2

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de représentation paramétrique
$\begin{cases}x=-2+3\cos\theta\\y=1+3\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$
Détermine une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

Exercices

01

02

03

04

4 Isométrie

Activité 3.4

4.1 Quelques rappels

4.1.1 Translations

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et t la translation de vecteur $\vec{u}$ alors on a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Propriété caractéristique

Soit f une application du plan dans lui-même. f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

4.1.2 Symétries orthogonales

Définition

Soit (Δ) une droite du plan. On appelle symétrie orthogonale d'axe (Δ) l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' vérifiant :

1. Si $M \in (\Delta)$ alors les points M et M' sont confondus.
2. Si $M \notin (\Delta)$ alors (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.

4.1.3 Rotations

Définition

Soient A un point du plan et α un nombre réel. On appelle rotation de centre A et d'angle α l'application du plan dans lui-même notée $r(A,\alpha)$ qui à tout point M du plan associe le point M' vérifiant :

1. $r(A,\alpha)(A) = A$ c'est-à-dire si $M = A$ alors $M' = A$.
2. Si $M \neq A$ alors $r(A,\alpha)(M) = M' \iff \begin{cases} AM' = AM \\ mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Propriété caractéristique

f est une rotation d'angle α non nul si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N'. On a : $MN = M'N'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \widehat{\alpha}$.

4.1.4 Homothétie

Définition

Étant donnés un point O et un réel k non nul, on appelle **homothétie de centre** O **et de rapport** k la transformation, notée $h(O,k)$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Propriété fondamentale

Si M' et N' sont les images respectives de deux points M et N par une homothétie de rapport k alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

4.2 Définition d'une isométrie et propriétés fondamentales

Définition

On appelle **isométrie du plan** toute application f du plan dans lui-même qui conserve la distance.
Soit M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f on a : $M'N' = MN$.

Retenons

Les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.

Propriété

Toute isométrie conserve :
- l'alignement des points;
- le parallélisme de droites;
- l'orthogonalité de droites;
- la mesure des angles;
- le barycentre de points pondérés;
- les longueurs;
- les aires

Propriété

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$; il existe une isométrie et une seule qui applique A sur A', B sur B', C sur C'.

Consigne 4.1 *Application*

Consigne 4.2 *Construire l'image d'un point par une isométrie*

4.3 Déplacement - antidéplacement

Définitions

• **Un déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.
• **Un antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Propriété

1. La composée de deux rotations de même centre I et d'angles orientés $\widehat{\alpha_1}$ et $\widehat{\alpha_2}$ est une rotation de centre I et d'angle orienté $\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2}$.

2. La composée d'une rotation d'angle orienté non nul α et d'une translation est une rotation.

Consigne 4.3 *Application*

Propriété

Soit r une rotation de centre I et d'angle α et soit K un point distinct de I; il existe deux translations t_1 et t_2 et une rotation r' de centre K et d'angle orienté α telles que : $r = r' \circ t_1$ et $r = t_2 \circ r'$.

Consigne 4.4 *Application*

Propriété

1. La composée de deux homothéties de même centre I et de rapports respectifs k_1 et k_2 est l'homothétie de centre I et de rapport $k_1 k_2$.

2. La composée d'une homothétie de rapport k distinct de 1 et d'une translation est une homothétie de rapport k.

Consigne 4.5 *Application*

Propriété

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k distinct de 1, J un point distinct de I; il existe deux translations t_1 et t_2 et une homothétie h' de centre J et de rapport k, telles que $h = h' \circ t_1$ et $h = t_2 \circ h'$.

Consigne 4.6 *Application*

Exercices

01

02

03

04

5 Représentations graphiques de fonctions et transformations du plan

Activité 3.5

5.1 Fonctions associées : Représentations graphiques de fonctions et translations

Consigne 5.1

> **Propriété**
> f étant une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
> La représentation graphique de la fonction g :
> $x \longmapsto f(x-a)+b$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Consigne 5.2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1. Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.
2. (a) Construis dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation $y = x^2$.

   (b) Place dans ce repère le point $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

   (c) Construis de nouveau dans le repère $(A; \vec{i'}, \vec{j'})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation $y = x^2$.

La courbe $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(A; \vec{i'}, \vec{j'})$ est la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

> **Propriété**
> Soit g la fonction polynôme du second degré définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$.
> g peut être définie par la forme explicite
> $g(x) = a(x-\alpha)^2 - \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.
> La représentation graphique de g est l'image par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ de la parabole d'équation $y = ax^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Consigne 5.3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Donne l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f, et démontre que pour tout élément x de cet ensemble :
   $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$.
2. (a) Construis dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

   (b) Place dans ce repère le point $A(-1; 2)$.

   (c) Construis de nouveau dans le repère $(A; \vec{i'}, \vec{j'})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

La courbe $(\mathscr{C}')$ dans le repère $(A; \vec{i'}, \vec{j'})$ est la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

> **Propriété**
> Soit a et b deux nombres réels et k un nombre réel non nul. On appelle **fonction homographique** toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
> $f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
> La représentation graphique de la fonction f est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

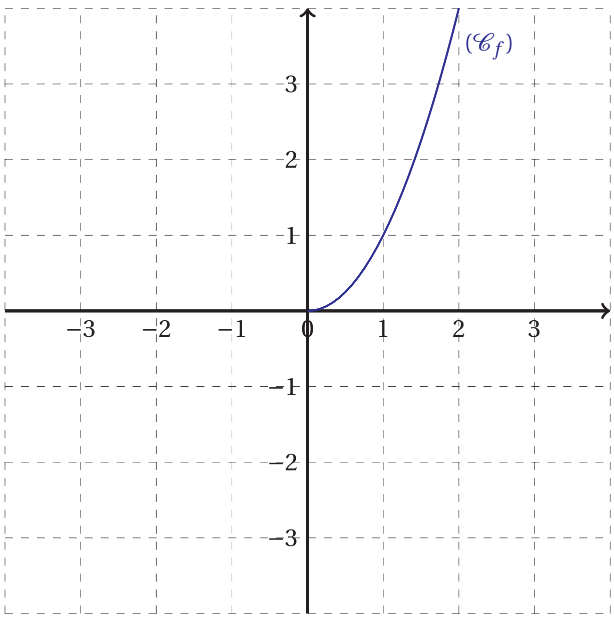
5.2 Représentations graphiques de fonctions

> **Propriétés**
> Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
> • La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(O, \vec{j})$.
> • La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(O, \vec{i})$.
> • La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(-x)$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à O.
> • La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(O, \vec{i})$ avec $y \geq 0$.
> • La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(|x|)$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(O, \vec{i})$ avec $x \geq 0$.

est impaire.

Consigne 5.4

Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous.



Construire les courbes des fonctions ci-dessous : $f(-x)$, $-f(x)$, $-f(-x)$, $|f(x)|$ et $f(|x|)$.

5.3 Parité - Périodicité

Définition

Soit f une fonction, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et D son domaine de définition.

- f est **paire** si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si et seulement si $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
- f est **périodique** de période T si et seulement si $\forall x \in D, (x+T) \in D$ et $f(x+T) = f(x)$.

Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La représentation graphique d'une fonction est symétrique par rapport à $(O;\vec{j})$ si et seulement si cette fonction est paire.
- La représentation graphique d'une fonction est symétrique par rapport à O si et seulement si cette fonction

Remarque

- Les fonctions $x \longmapsto cos(ax+b)$ et $x \longmapsto sin(ax+b)$ ont pour période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.
- La fonction $x \longmapsto tan(ax+b)$ a pour période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

Consigne 5.5

1. Étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

   (a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{7+x^2}{3x^2-2}$

   (c) $f(x) = |x-2| + |x+2|$

   (d) $f(x) = sin2xcosx$

   (e) $f(x) = \dfrac{cosx - 1}{5 - 2cosx}$

2. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est périodique de période p.

   (a) $f(x) = sin^2 x, p = \pi$

   (b) $f(x) = cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right), p = 2\pi$

3. Donner une période de la fonction, dans chacun des cas suivants.

   (a) $f(x) = cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

   (b) $f(x) = sin\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

   (c) $f(x) = sinx + sin2x$

5.4 Les éléments de symétrie

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $A(x_0; y_0)$ un point du plan et (Δ) la droite d'équation $x = a$.

• $1^{ère}$ méthode

On dit que le $A(x_0; y_0)$ est un **centre de symétrie** pour la courbe $(\mathscr{C})$ si et seulement si :
$\forall x \in D_f, (2x_0 - x) \in D_f$ et $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$.

• $2^{ème}$ méthode

On pose $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

✓ On obtient une fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$.

✓ On étudie la parité de la fonction $Y = f(X + x_0) - y_0$.

✓ Si Y est impaire alors le point $A(x_0; y_0)$ est un **centre de symétrie** pour la courbe $(\mathscr{C})$.

• $1^{ère}$ méthode
On dit que la droite $(\Delta) : x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe $(\mathscr{C})$ si et seulement si :
$\forall x \in D_f, (2a-x) \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.
• $2^{ème}$ méthode
Si la fonction $Y = f(X+a)$ est paire alors la droite (Δ) : $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe $(\mathscr{C})$.

Consigne 5.6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$. On considère les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$ et $g(x) = x^2+2x-3$.

1. Montre que le point $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f.
2. Démontre que la droite (D) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g.

Remarque
Un ensemble est dit symétrique par rapport à zéro (0) si chaque élément de cet ensemble a encore son opposé dans cet ensemble.

5.5 Études des fonctions numériques de variable réelle

5.5.1 Branches infinies

Soit f une fonction de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

Asymptote verticale

Propriété
x_0 étant un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0<} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0>} f(x) = \infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Asymptote horizontale

Propriété
b étant un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

Asymptote oblique

Propriété
• Soit (Δ) la droite d'équation $y = ax+b$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$) lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$, on dit que la droite (Δ) est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).
• Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-ax] = b$ $b \in \mathbb{R}$), on dit que la droite $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$).

5.5.2 Position relative d'une courbe par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax+b$

Propriété
Soit I une partie du domaine de définition de la fonction f.
• Si $\forall x \in I, f(x)-(ax+b) < 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle I.
• Si $\forall x \in I, f(x)-(ax+b) > 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est en dessus de la droite (D) sur l'intervalle I.
• Si $\forall x \in I, f(x)-(ax+b) = 0$ alors on dit que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D) se coupent en un point d'abscisse x_0.

Information
Pour étudier une fonction f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.
• Déterminer l'ensemble de définition de f ou déterminer le domaine d'étude de f après avoir signaler la parité ou la périodicité de f.
• Etudier la continuité et la dérivabilité de f en tout point de cet ensemble.
• Calculer la fonction dérivée f' de f et en déduire son sens de variation.
• Etudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble d'étude et en déduire les éventuelles asymptotes.
• Dresser le tableau de variation de f.
• Tracer la courbe représentative de f.

Consigne 5.7

Trace les fonctions suivantes de le consigne ... dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1. $f(x) = 3x^3-4x^2-6x+7$
2. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $i(x) = \dfrac{2x^2-x+3}{x^2+4x-5}$

Consigne 5.8

Étudie la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{4x-1}$ puis construis sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

5.5.3 Zéro d'une fonction

Définition

On appelle **zéro d'une fonction** f, tout nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Propriété

Soit J un intervalle ouvert contenant l'intervalle fermé $[a; b]$. Si f est une fonction continue sur J strictement monotone sur $[a; b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f admet un zéro et un seul dans l'intervalle $]a; b[$.

Consigne 5.9

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$.

1. Montre que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [4; 5]$.
3. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près :
   (a) par la méthode de balayage
   (b) par la méthode de dichotomie

Consigne 5.10

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x + 4$.

1. Étudie les variations de f.
2. Construis la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f.
3. Résous graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = m$ avec m un paramètre réel.

5.6 Étude des fonctions $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \tan x$

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.
• Si f est une fonction paire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(O; \vec{j})$ sur D_f.
• Si f est une fonction impaire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre O sur D_f.
• Si f est périodique de période T, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ ou $D_f \cap [0; T]$.
• Si f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(S; \vec{j})$ avec $S(a; 0)$.
• Si f admet le point $\Omega(a; b)$ pour centre de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre $\Omega(a; b)$.
En résumé, si f est paire ou impaire et périodique de période T, on peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $D = D_f \cap [0; +\infty[\cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ ou $D = D_f \cap]-\infty; 0] \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Consigne 5.11

Étudie chacune des fonctions : $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \tan x$

Limites trigonométriques

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x} = 0$.

Consigne 5.12

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x \cos x}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

Consigne 5.13

Le repère (O, I, J) est orthonormé. Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Démontrer que f est paire et périodique de période π.
2. Justifie qu'on peut étudier f sur l'ensemble $E = [0; \pi]$.
3. Démontre que : $\forall x \in E, f'(x) = 2sinx(1 + \cos x)$.
4. Dresse le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
5. Trace $(\mathscr{C})$ sur $\left[-\dfrac{7\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{3}\right]$.

Exercices

01

02

03

04