mathématiques

1ère C/D/E Tome 2

M. Monge, J.P. Pelle, F. Pécastaings

BELIN

M. MONGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure - Professeur agrégé

J-P. PELLE
Maître-Assistant - Agrégé de l'Université

F. PECASTAINGS
Agrégé de l'Université

~~NDAM MAMA~~
~~Lycée JOSS.~~

MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE C, D, E, TOME II : ESPACES AFFINÉS, ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS, FONCTIONS CIRCULAIRES, CINÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE, GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, TABLES NUMÉRIQUES.

ARRÊTÉ DU 19 MARS 1970, BULLETIN OFFICIEL DU 23 AVRIL 1970

LIBRAIRIE CLASSIQUE BELIN 8, RUE FÉROU, PARIS-VIe

Avertissement

Nous traitons dans cet ouvrage toutes les parties du programme des sections C, D, E de la classe de Première paru au B. O. du 23 avril 1970 et qui n'ont pas été traitées dans le tome I.

Nous avons exposé les notions trigonométriques à partir des rotations vectorielles. Nous avons adopté ce point de vue car une telle étude est indispensable pour permettre aux élèves des sections scientifiques de la classe de Première d'aborder utilement l'étude des programmes des sections C, D, E des classes Terminales.

A la fin du livre, nous avons groupé un certain nombre de tables numériques; elles permettent aux élèves de traiter, avec la précision souhaitable à ce niveau, et sans avoir à consulter d'autres documents, tous les problèmes qui peuvent leur être posés.

A la fin de chaque chapitre, de nombreux exercices, classés par centres d'intérêt, sont proposés aux élèves. Nous avons aussi donné, à la fin de ce volume un choix de problèmes qui recouvrent les différentes notions du programme de la classe de Première.

Nous avons voulu que ce livre soit pour nos collègues et pour leurs élèves un instrument de travail sympathique et efficace; c'est avec reconnaissance que nous recevrons les observations et les suggestions qui nous permettront de l'améliorer.

LES AUTEURS.

Utilisation du livre

Section C. Les notions développées dans la 9e partie (chap. 35 et 36) ne figurent pas au programme de la section C.

Section E. L'étude des sphères (chap. 34, nos 21 à 35) ne figure pas au programme de la section E.

Section D. Ne figurent pas au programme de la section D les paragraphes 23 à 59 du chapitre 23, les paragraphes 18 à 30 du chapitre 25, les paragraphes 23 à 49 du chapitre 33, les chapitres 34, 35, 36. Les notions générales de géométrie affine ne figurent pas explicitement au programme de la section D. Toutefois certains résultats sont utiles pour l'étude du programme. Selon le niveau de la classe, le professeur peut ne pas traiter ces chapitres et utiliser alors les résultats acquis en Seconde.

6

ISBN 2-7011-0139-5

Table des matières

Programme (B.O. du 23.4.1970).

Section C

II. Fonctions numériques d'une variable réelle.

. . . .

2° . . . .
Interprétation cinématique de la dérivée : mouvement rectiligne du point; définition de la vitesse et de l'accélération.

3° Applications.

. . . .

b) étude de mouvements rectilignes : mouvement rectiligne uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

III. Équations et inéquations.

. . . .

2° Usage de tables numériques, de la règle à calcul et de machines à calculer.

IV. Géométrie vectorielle et géométrie affine.

. . . .

5° Espace affine de dimension 2 ou 3. Translations.
Droites et plans affines, intersections, parallélisme.
Repère cartésien; changement d'origine; représentations paramétriques de droites et de plans.
Équation cartésienne du plan.

V. Produit scalaire et fonctions circulaires.

1° Produit scalaire (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ou 3).
Norme d'un vecteur : inégalité de Cauchy-Schwarz; inégalité triangulaire.
Orthogonalité de deux droites vectorielles, d'une droite et d'un plan vectoriels.
Bases orthonormées; existence. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une telle base.

2° Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont du type :

$$(1)\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (2)\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif; a et $|b|$ ne dépendent que de l'application et non du choix de la base; groupe des rotations vectorielles. Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$, il existe une rotation vectorielle unique φ telle que $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

3° Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b de la matrice d'une rotation vectorielle φ. Orientation du plan vectoriel euclidien. Le plan vectoriel euclidien étant orienté, Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle; notations Cos φ et Sin φ. Cosinus et Sinus de la composée de deux rotations vectorielles.

4° Angle de deux demi-droites vectorielles D, D' (unique rotation vectorielle amenant D sur D') dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du Cosinus et du Sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté). Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.

5° Cercle trigonométrique U. Définition. Bijection du groupe des rotations vectorielles sur U; structure de groupe de U (notation additive).
Application canonique θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles : on admettra l'existence d'une application surjective θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles telle que,
pour tous x et y réels, $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$
et que la fonction définie par $\sin x = \text{Sin}\,[\theta(x)]$ soit dérivable et de dérivée égale à 1 pour $x = 0$
(L'enroulement d'un fil sur U pourra suggérer intuitivement le premier de ces faits.) Nombre π.
Fonctions circulaires de la variable réelle x :

$$\cos x\ \big[= \text{Cos}\,[\theta(x)]\big], \quad \sin x,\ \text{tg}\,x.$$

Ensembles de définition, périodicité, sens de variation, représentations graphiques. On explicitera les relations entre les fonctions circulaires définies ici et les rapports trigonométriques introduits en classe de Troisième.
Relation entre $\cos x$ et $\sin x$, entre $\cos x$ et $\text{tg}\,x$.
Relations entre les images, par les fonctions circulaires, du nombre x et des nombres :

$$-x,\quad \pi - x,\quad \frac{\pi}{2} - x,\quad \pi + x,\quad \frac{\pi}{2} + x.$$

6° Équations $\cos x = a$, $\sin x = b$, $\text{tg}\,x = c$.

7° Formules d'addition; formules de multiplication par 2; applications. Transformation du produit scalaire $a\cos x + b\sin x$; application à l'équation $a\cos x + b\sin x + c = 0$.

8° Valeurs approchées de $\sin x$, $\cos x$ et $\text{tg}\,x$ pour les « petites » valeurs de $|x|$. Dérivées des fonctions circulaires. Dérivées des fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$.

VI. Géométrie métrique (dans le plan et dans l'espace).

1° Distance de deux points.
Projection orthogonale d'un point sur un plan, d'un point sur une droite.
Plans perpendiculaires.

2° Cercle dans le plan, rapporté à un repère orthonormé.

3° Sphère; sections planes; équation, l'espace étant rapporté à un repère orthonormé.

PROGRAMME (B.O. du 23.4.1970)

Section D

II. Fonctions numériques d'une variable réelle.

. . . .

2° . . . .

2° Interprétation cinématique de la dérivée ; mouvement rectiligne du point ; définition de la vitesse et de l'accélération.

3° Applications. . . . étude, . . . de mouvements rectilignes. Représentation graphique . . .

III. Équations et inéquations.

. . . .

2° Usage de tables numériques, de la règle à calcul et de machines à calculer.

V. Produit scalaire et fonctions circulaires.

1° Produit scalaire dans le plan vectoriel. Révision de ses propriétés : norme d'un vecteur : inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire.
Orthogonalité de deux droites vectorielles.
Bases orthonormées. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une telle base.

2° Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont du type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif. On admettra que a et $|b|$ ne dépendent que de l'application et non du choix de la base : groupe des rotations vectorielles.
Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$, il existe une rotation vectorielle unique φ telle que $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

3° Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b de la matrice d'une rotation vectorielle φ. Orientation du plan vectoriel euclidien. Le plan vectoriel euclidien étant orienté, Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle ; notations Cos φ et Sin φ. Cosinus et Sinus de la composée de deux rotations vectorielles.

4° Angle de deux demi-droites vectorielles D, D′ (unique rotation vectorielle amenant D sur D′) dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du Cosinus et du Sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté).
Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.

5° Cercle trigonométrique U. Définition. Bijection du groupe des rotations vectorielles sur U ; structure de groupe de U (notation additive).
Application canonique θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles : on admettra l'existence d'une application surjective θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles telle que, pour tous x et y réels, $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ et que la fonction définie par $\sin x = \mathrm{Sin}\,[\theta(x)]$ soit dérivable et de dérivée égale à 1 pour $x = 0$. (L'enroulement d'un fil sur U pourra suggérer intuitivement le premier de ces faits.) Nombre π.
Fonctions circulaires de la variable réelle x :

$$\cos x \,\big[= \mathrm{Cos}\,[\theta(x)]\big],\ \sin x,\ \mathrm{tg}\, x.$$

Ensembles de définition, périodicité, sens de variation, représentations graphiques.
On explicitera les relations entre les fonctions circulaires définies ici et les rapports trigonométriques introduits en classe de Troisième.
Relation entre $\cos x$ et $\sin x$, entre $\cos x$ et $\mathrm{tg}\, x$.
Relations entre les images par les fonctions circulaires, du nombre x et des nombres :

$$-x,\quad \pi - x,\quad \frac{\pi}{2} - x,\quad \pi + x,\quad \frac{\pi}{2} + x.$$

6° Équations $\cos x = a$, $\sin x = b$, $\text{tg}\, x = c$.

7° Formules d'addition ; formules de multiplication par 2 ; applications. Transformation du produit scalaire $a \cos x + b \sin x$; application à l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

8° Valeurs approchées de $\sin x$, $\cos x$ et $\text{tg}\, x$ pour les « petites » valeurs de $|x|$. Dérivées des fonctions circulaires. Dérivées des fonctions $x \rightsquigarrow \cos(ax + b)$ et $x \rightsquigarrow \sin(ax + b)$.

VI. Géométrie métrique dans le plan.

Distance de deux points, équation d'une droite en repère orthonormé.

Section E

II. Fonctions numériques d'une variable réelle.

. . . .

2° . . . .
b) étude de mouvements rectilignes : mouvement rectiligne uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

III. Équations et inéquations.

. . . .

2° Pratique du calcul numérique.
Révision du programme de calcul numérique de Seconde T uniquement à l'occasion d'exercices.
La résolution des problèmes donnera lieu toute l'année à un entraînement progressif à la pratique du calcul numérique.
Usage de tables numériques, de la règle à calcul et de machines à calculer. Notions succinctes sur l'usage d'abaques très simples.

IV. Géométrie vectorielle et géométrie affine.

. . . .

5° Espace affine de dimension 2 ou 3. Translations. Droites et plans affines, intersections, parallélisme. Repère cartésien ; changement d'origine ; représentations paramétriques de droites et de palns. Équation cartésienne du plan.

V. Produit scalaire et fonctions circulaires.

1° Produit scalaire (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ou 3). Norme d'un vecteur : inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire. Orthogonalité de deux droites vectorielles, d'une droite et d'un plan vectoriels. Bases orthonormées ; existence. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs cordonnées dans une telle base.

2° Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont du type : (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif ; a et $|b|$ ne dépendent que de l'application et non du choix de la base : groupe des rotations vectorielles. Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$ il existe une rotation vectorielle unique φ telle que $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

3° Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b de la matrice d'une rotation vectorielle φ. Orientation du plan vectoriel euclidien. Le plan vectoriel euclidien étant orienté, Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle ; notations $\text{Cos}\, \varphi$ et $\text{Sin}\, \varphi$. Cosinus et Sinus de la composée de deux rotations vectorielles.

4° Angle de deux demi-droites vectorielles D, D' (unique rotation vectorielle amenant D sur D') dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du Cosinus et du Sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté). Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.

5° Cercle trigonométrique U. Définition. Bijection du groupe des rotations vectorielles sur U; structure de groupe de U (notation additive). Application canonique θ sur $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles; on admettra l'existence d'une application surjective θ de $\mathbb{R}$ sur le groupe des rotations vectorielles telle que, pour tous x et y réels, $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ et que la fonction définie par $\sin x = \mathrm{Sin}\,[\theta(x)]$ soit dérivable et de dérivée égale à 1 pour $x = 0$. (L'enroulement d'un fil sur U pourra suggérer intuitivement le premier de ces faits). Nombre π.
Fonctions circulaires de la variable réelle x :

$$\cos x\ \big[= \mathrm{Cos}\,[\theta(x)]\big],\ \sin x,\ \mathrm{tg}\, x.$$

Ensembles de définition, périodicité, sens de variation, représentations graphiques. On explicitera les relations entre les fonctions circulaires définies ici et les rapports trigonométriques introduits en classe de Troisième. Relation entre $\cos x$ et $\sin x$, entre $\cos x$ et $\mathrm{tg}\, x$.
Relations entre les images, par les fonctions circulaires, du nombre x et des nombres :

$$-x,\quad \pi - x,\quad \frac{\pi}{2} - x,\quad \pi + x,\quad \frac{\pi}{2} + x.$$

6° Équations $\cos x = a$, $\sin x = b$, $\mathrm{tg}\, x = c$.

7° Formules d'addition; formules de multiplication par 2; applications. Transformation du produit scalaire $a \cos x + b \sin x$; application à l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

VI. Géométrie métrique (dans le plan et l'espace).

1° Distance de deux points.
Projection orthogonale d'un point sur un plan, d'un point sur une droite, plans perpendiculaires.

2° Cercle dans le plan, rapporté à un repère orthonormé.

3° Éléments de géométrie descriptive en vue d'illustrer les problèmes du paragraphe VI (1) : représentation du point, de la droite, du plan (révision), changement de plan de projection, intersection de plans et de droites; rabattement d'un plan sur un plan horizontal.

CINQUIÈME PARTIE

espaces affines et espaces vectoriels euclidiens

Les paragraphes 23 à 59 du chapitre 23 et 18 à 30 du chapitre 25 ne sont pas au programme de la section D.

22. Espaces affines

Espace affine associé à un espace vectoriel.

Introduction.

1 Rappelons les différentes étapes qui nous ont permis, en classe de Seconde, de construire un plan vectoriel $\vec{P}$ à partir d'un plan géométrique P.

1. On appelle bipoint de P tout couple (A, B) de points de P, c'est-à-dire tout élément de $P \times P$.

2. On définit dans $P \times P$ une relation d'équivalence, notée $\sim$, et appelée relation d'équipollence.

3. On appelle vecteur toute classe d'équivalence de la relation d'équipollence dans $P \times P$. Un vecteur $\vec{V}$ est donc un élément de l'ensemble quotient $(P \times P)/\sim$. Si un vecteur $\vec{V}$ admet pour représentant un bipoint (A, B), ce vecteur $\vec{V}$ est aussi noté $\overrightarrow{AB}$.

4. On démontre que, si O est un point du plan P, pour tout vecteur $\vec{V}$ du plan vectoriel $\vec{P}$ associé à P, il existe un point M unique de P pour lequel on a : $\overrightarrow{OM} = \vec{V}$.

5. On définit une application de $\vec{P} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$, l'addition des vecteurs :
$\vec{P} \times \vec{P} \longrightarrow \vec{P}, \quad (\vec{V}, \vec{W}) \rightsquigarrow \vec{V} + \vec{W}.$
Cette addition des vecteurs possède la propriété suivante :
$\forall (A, B, C) \in P \times P \times P, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$

6. On définit une application de $\mathbb{R} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$, la multiplication des vecteurs par les réels :
$\mathbb{R} \times \vec{P} \longrightarrow \vec{P}, \quad (\lambda, \vec{V}) \rightsquigarrow \lambda . \vec{V}.$

7. On démontre que l'ensemble $\vec{P}$ muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication des vecteurs par les réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2.

2 Considérons alors la surjection canonique φ de $P \times P$ sur $\vec{P}$ définie par :
$\varphi : P \times P \longrightarrow \vec{P}, \quad (M, N) \rightsquigarrow \varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}.$
Cette application φ possède les deux propriétés suivantes :

(*a*) Pour tout point O de P et pour tout vecteur $\vec{V}$ de $\vec{P}$, il existe un point M unique de P pour lequel on a : $\varphi(O, M) = \vec{V}$.

(*b*) Pour tout triplet (A, B, C) de points du plan P, on a :
$\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.

A partir d'un plan géométrique P, nous avons donc construit un plan vectoriel $\vec{P}$ dont la structure est liée à celle de P par l'application φ.

3 Dans ce chapitre, nous allons montrer qu'il est possible de construire à partir d'un espace vectoriel E un ensemble A muni d'une structure analogue à celle de P et appelé espace affine associé à l'espace vectoriel E.

Espace affine.

4 **DÉFINITION : Soient** A **un ensemble non vide et** E **un espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$. **On dit que** A **est un espace affine associé à l'espace vectoriel** E **si et seulement s'il existe une application** φ **de** $A \times A$ **dans** E **qui possède les deux propriétés suivantes :**

(*a*) $\forall O \in A, \quad \forall x \in E, \quad \exists!\, M \in A, \quad \varphi(O, M) = x;$

(*b*) $\forall (O, M, N) \in A^3, \quad \varphi(O, M) + \varphi(M, N) = \varphi(O, N).$

Exemples : 1. Il résulte de l'introduction précédente qu'un plan géométrique P est un espace affine associé au plan vectoriel $\vec{P}$.

2. Considérons un espace vectoriel E et l'application φ de $E \times E$ dans E définie par :
$\varphi : E \times E \longrightarrow E, \quad (x, y) \rightsquigarrow y - x.$

L'application φ possède les propriétés :
(*a*) Pour tout vecteur x de E et pour tout vecteur y de E, il existe un vecteur z unique de E tel que : $\varphi(x, z) = y$; ce vecteur unique z est : $z = x + y$.

(*b*) Pour tout triplet (x, y, z) de vecteurs de E, on a l'égalité :
$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = (y - x) + (z - y)$, ou encore :
$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = z - x$, c'est-à-dire :
$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$.
Il en résulte que l'espace vectoriel E est un espace affine associé à E.

5 **Remarque** : Soit A un espace affine associé à un espace vectoriel E. Considérons un élément O de A et l'application φ_0 de A dans E définie par :
$\varphi_0 : A \longrightarrow E, \quad M \rightsquigarrow \varphi_0(M) = \varphi(O, M).$
La première propriété de l'application φ de $A \times A$ dans E est alors logiquement équivalente à la propriété : Pour tout élément O de A et pour tout vecteur x de E, il existe un élément unique M de A pour lequel on a : $\varphi_0(M) = x$.
Pour tout élément O de A, l'application φ_0 est donc une bijection de A sur E.

Point et bipoint d'un espace affine.

6 **DÉFINITION : On appelle point tout élément d'un espace affine, et bipoint tout couple de points de cet espace affine.**

Soit (M, N) un bipoint de l'espace affine A; son image par φ est un vecteur de l'espace vectoriel E que nous convenons de noter $\overrightarrow{MN}$.

Nous avons donc : $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}$.
Écrivons avec cette notation les propriétés (*a*) et (*b*) de l'application φ introduites au n° 4 :

(*a*) $\forall O \in A, \quad \forall x \in E, \quad \exists!\, M \in A, \quad \overrightarrow{OM} = x$;
(*b*) $\forall (O, M, N) \in A^3, \quad \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$.

7 **Remarques** : 1. De la première propriété, nous déduisons l'implication :
$\forall (O, M, N) \in A^3, \quad (\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}) \Longrightarrow (M = N)$.
2. De la seconde propriété, nous déduisons l'égalité :
$\forall (O, M, N) \in A^3, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

8 **THÉORÈME : Pour tout bipoint** (M, N) **d'un espace affine, le vecteur** $\overrightarrow{MN}$ **est nul si et seulement si l'on a :** $M = N$.

De la propriété (*b*) d'un espace affine A, nous déduisons, pour tout point M, l'égalité : $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$.
Il en résulte : $\overrightarrow{MM} = 0_E$.
Réciproquement, soient deux points M et N pour lesquels on a : $\overrightarrow{MN} = 0_E$.
Nous avons : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM}$; il résulte de la remarque du n° 7 l'égalité : $M = N$.
Nous en concluons : $\forall (M, N) \in A^2, \quad (\overrightarrow{MN} = 0_E) \Longleftrightarrow (M = N)$.

Translations affines.

Notion de translation affine.

9 **DÉFINITION : Soient** A **un espace affine associé à un espace vectoriel** E **et** x **un vecteur de** E. **On appelle translation affine associée au vecteur** x, **ou translation affine de vecteur** x, **l'application de** A **dans** A, **notée** t_x **qui, à tout point** M **de** A, **associe l'unique point** M′ **de** A, **tel que :** $\overrightarrow{MM'} = x$.

Exemple : L'application identique dans A est la translation affine associée au vecteur nul : $id_A = t_{0_E}$.

Égalité de deux translations affines.

10 **THÉORÈME : Dans un espace affine A associé à un espace vectoriel E, deux translations affines t_x et t_y sont égales si et seulement si les vecteurs x et y sont égaux.**

Pour tout point M de l'espace affine A, nous avons les équivalences logiques :

$$(t_x(\mathrm{M}) = \mathrm{M}') \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = x)\,; \qquad (t_y(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'') \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MM}''} = y).$$

Les translations t_x et t_y sont égales si et seulement si, pour tout point M de A, on a : $\mathrm{M}' = \mathrm{M}''$, c'est-à-dire si et seulement si l'on a : $x = y$.

11 **THÉORÈME : Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations affines d'un espace affine A associé à un espace vectoriel E. L'application ψ de E dans $\mathcal{T}$ définie par : $x \rightsquigarrow t_x$ est une bijection.**

En effet, l'application ψ est surjective d'après la définition de l'ensemble $\mathcal{T}$ et elle est injective d'après le théorème n° 10.

Composée de deux translations affines.

12 **THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations affines d'un espace affine A est stable pour la loi $\circ$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ des applications dans A.**

L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations affines de l'espace affine A est une partie de $\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$. Montrons que cette partie est stable pour la loi $\circ$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathrm{A}, \mathrm{A})$.

Soient t_x et $t_{x'}$ deux translations affines dans A de vecteurs respectifs x et x'. Pour tout point M de A, posons : $t_x(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ et $t_{x'}(\mathrm{M}') = \mathrm{M}''$; nous avons donc : $(t_{x'} \circ t_x)(\mathrm{M}) = \mathrm{M}''$.

Des égalités : $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = x$, $\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}''} = x'$ et $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}''} = \overrightarrow{\mathrm{MM}''}$, nous déduisons l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{MM}''} = x + x'$.

Pour tout point M de A, nous avons donc : $(t_{x'} \circ t_x)(\mathrm{M}) = t_{x+x'}(\mathrm{M})$.

Il en résulte l'égalité : $t_{x'} \circ t_x = t_{x+x'}$

La composée de la translation affine t_x par la translation affine $t_{x'}$ est donc la translation $t_{x+x'}$ de vecteur $x + x'$.

13 **THÉORÈME : L'application ψ de E dans $\mathcal{T}$ définie par : $x \rightsquigarrow t_x$ est un isomorphisme de l'ensemble E muni de l'addition des vecteurs sur l'ensemble $\mathcal{T}$ muni de la loi de composition des translations affines.**

En effet, quels que soient les éléments x et x' de E, nous avons :

$\psi(x) = t_x \qquad \psi(x') = t_{x'} \qquad \psi(x + x') = t_{x+x'}$

De l'étude précédente, nous déduisons l'égalité : $\psi(x') \circ \psi(x) = \psi(x + x')$.

Cette égalité exprime que ψ est un homomorphisme de $(\mathrm{E}, +)$ dans $(\mathcal{T}, \circ)$.

De plus, l'application ψ est une bijection; l'homomorphisme de $(\mathrm{E}, +)$ dans $(\mathcal{T}, \circ)$ est donc un isomorphisme.

Propriété d'une translation affine.

14 **THÉORÈME : Une translation affine d'un espace affine A est une permutation de A.**

Pour tout vecteur x de l'espace vectoriel E, nous avons l'égalité : $t_{-x} \circ t_x = t_{x-x}$
Le vecteur $x - x$ est le vecteur nul 0_E, et la translation t_{0_E} est l'application identique dans A.
Pour toute translation affine t_x dans A, il existe donc une translation affine, t_{-x} pour laquelle on a : $t_{-x} \circ t_x = id_A$ et $t_x \circ t_{-x} = id_A$.
Il en résulte (n° 14, p. 55, tome I) que t_x est une bijection de A sur A, c'est-à-dire une permutation de l'espace affine A.
L'ensemble $\mathcal{T}$ est donc une partie de l'ensemble $\mathcal{B}(A, A)$ des permutations de A.

Groupe des translations affines.

15 **THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations affines d'un espace affine A est un sous-groupe du groupe $\mathcal{B}(A, A)$ des permutations de A.**

En effet, nous avons les propriétés :
1. $\mathcal{T}$ est non vide. Nous avons en effet : $t_{0_E} \in \mathcal{T}$.
2. Nous avons vu (n° 12, p. 9) que $\mathcal{T}$ est stable pour la loi $\circ$.
3. Le symétrique pour la loi $\circ$ de tout élément t_x de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$; c'est la translation t_{-x}.

L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations affines dans A est donc un groupe pour la loi induite $\circ$.

16 **THÉORÈME : Le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.**

Nous avons en effet les égalités : $t_{x'} \circ t_x = t_{x+x'}$ et $t_x \circ t_{x'} = t_{x'+x}$
L'addition dans E est une loi commutative : $x + x' = x' + x$.
Nous en déduisons l'égalité : $t_{x+x'} = t_{x'+x}$ ou encore : $t_{x'} \circ t_x = t_x \circ t_{x'}$

Sous-espaces affines.

Notion de sous-espace affine.

17 **THÉORÈME : Soient A un espace affine associé à un espace vectoriel E, O un point de A et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble B défini par : $B = \{M \mid M \in A$ et $\overrightarrow{OM} \in F\}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel F.**

L'ensemble B n'est pas vide ; en effet, le point O de l'espace affine A vérifie les conditions : $O \in A$ et $\overrightarrow{OO} \in F$; nous avons donc : $O \in B$.

A est un espace affine associé à E ; il existe donc une application φ de $A \times A$ dans E qui possède les propriétés (*a*) et (*b*) du n° 4, p. 7. De plus, pour tout bipoint (M, N) de l'espace affine A, on a : $\varphi(M, N) = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.
Si les points M et N appartiennent à B, nous avons : $\overrightarrow{OM} \in F$ et $\overrightarrow{ON} \in F$; il en résulte que la différence $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire : $\varphi(M, N)$, appartient à F.
Considérons alors l'application φ_1 de $B \times B$ dans F définie par :
$\forall M \in B, \quad \forall N \in B, \quad \varphi_1(M, N) = \varphi(M, N)$.
Démontrons que l'application φ_1 possède les deux propriétés (a_1) et (b_1) :
(a_1) $\forall L \in B, \quad \forall x \in F, \quad \exists! M \in B, \quad \varphi_1(L, M) = x$;
Pour tout point L de B et pour tout vecteur x de F, il existe un point unique M de A pour lequel on a : $\overrightarrow{LM} = x$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = x$.
Nous en déduisons : $\overrightarrow{OM} = x + \overrightarrow{OL}$. Les vecteurs x et $\overrightarrow{OL}$ appartiennent au sous-espace vectoriel F ; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ appartient aussi à ce sous-espace vectoriel. Le point M appartient donc à l'ensemble B.
(b_1) $\forall (L, M, N) \in B^3, \quad \varphi_1(L, M) + \varphi_1(M, N) = \varphi_1(L, N)$.
Pour tout triplet (L, M, N) de points de l'ensemble B, nous avons :
$\varphi_1(L, M) = \varphi(L, M)$; $\varphi_1(M, N) = \varphi(M, N)$; $\varphi_1(L, N) = \varphi(L, N)$.
De l'égalité : $\varphi(L, M) + \varphi(M, N) = \varphi(L, N)$, nous déduisons l'égalité :
$\varphi_1(L, M) + \varphi_1(M, N) = \varphi_1(L, N)$.

18 L'exemple précédent nous conduit à donner la définition :

DÉFINITION : Soit A **un espace affine associé à un espace vectoriel** E **sur** $\mathbb{R}$. **On dit qu'une partie** B **de** A **est un sous-espace affine de** A **si et seulement s'il existe un point** O **de** B **et un sous-espace vectoriel** F **de** E **pour lesquels on a l'égalité :** $B = \{M \mid M \in A \text{ et } \overrightarrow{OM} \in F\}$.

On dit que F est la **direction** du sous-espace affine B.
Il résulte du théorème précédent que, si B est un sous-espace affine de A de direction F, alors B est un espace affine associé à F.

19 Considérons un point O′ de B. De la définition de B, il résulte que le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ appartient à F. Pour tout point M de A, nous avons les égalités :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$.
Nous en déduisons que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ appartient à F si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ appartient à F. Nous avons donc l'égalité : $B = \{M \mid M \in A \text{ et } \overrightarrow{O'M} \in F\}$.
La définition du sous-espace affine B ne dépend donc pas du point O choisi dans B.

Sous-espaces affines parallèles.

20 **DÉFINITION : Soient** B **et** B_1 **deux sous-espaces affines d'un espace affine** A. **On dit que le sous-espace** B **est parallèle au sous-espace** B_1 **si et seulement si la direction de** B **est égale à la direction de** B_1.

On note alors : $B /\!\!/ B_1$.

21 **THÉORÈME : La relation de parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines d'un espace affine** A.

On vérifie, en effet, que la relation de parallélisme est une relation réflexive, symétrique et transitive.
Chaque classe d'équivalence pour la relation de parallélisme est l'ensemble des sous-espaces affines associés à un sous-espace vectoriel donné de E.

Propriétés des sous-espaces affines parallèles.

22 **THÉORÈME : Si** B **et** B_1 **sont deux sous-espaces affines parallèles, ils sont égaux ou disjoints.**

En effet, si deux sous-espaces affines parallèles B et B_1, de direction F, ne sont pas disjoints, leur intersection n'est pas vide. Soit O un point de cette intersection; il résulte du n° 18, p. 11, les égalités :
$B = \{M \mid M \in A \text{ et } \overrightarrow{OM} \in F\}$ et $B_1 = \{M \mid M \in A \text{ et } \overrightarrow{OM} \in F\}$.
Nous avons donc l'égalité : $B = B_1$.

23 **THÉORÈME : Soit** A **un espace affine associé à un espace vectoriel** E. **Pour tout point** O **de** A **et pour tout sous-espace vectoriel** F **de** E, **il existe un sous-espace affine unique** B **de direction** F **tel que le point** O **appartienne à** B.

En effet, un tel sous-espace affine B existe; il suffit de prendre le sous-espace affine défini par : $B = \{M \mid M \in A \text{ et } \overrightarrow{OM} \in F\}$.
Il résulte du théorème précédent que B est unique.

Image d'un sous-espace affine par une translation affine.

24 **THÉORÈME : L'image d'un sous-espace affine** B **par une translation affine est un sous-espace affine parallèle à** B.

Considérons un sous-espace affine B, de direction F, et un point O de B.
L'image B′ de B par une translation affine t_x n'est pas vide; en effet, le point O′ défini par : $\overrightarrow{OO'} = x$ appartient à B′.
t_x est une bijection sur A; pour tout point M′ de A il existe donc un point unique M de A pour lequel on a : $\overrightarrow{MM'} = x$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{O'M'}$.
Un point M′ de A appartient à B′ si et seulement si M appartient à B, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ appartient à F.
Nous avons donc : $\forall M' \in A, \quad (M' \in B') \Longleftrightarrow (\overrightarrow{O'M'} \in F)$.
Il en résulte l'égalité : $B' = \{M' \mid M' \in A \text{ et } \overrightarrow{O'M'} \in F\}$.
B′ est donc un sous-espace affine de A; il est de direction F; il est donc parallèle à B.

25 **THÉORÈME : Soient B et B′ deux sous-espaces affines parallèles. Pour tout point O de B et pour tout point O′ de B′, B′ est l'image de B par la translation affine de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.**

Considérons en effet deux sous-espaces affines parallèles B et B′, un point O de B et un point O′ de B′.

Posons : $x = \overrightarrow{OO'}$ et considérons la translation affine t_x. L'image de O par t_x est O′. L'image de B par t_x est un sous-espace affine B_1 parallèle à B et l'on a : $O' \in B_1$. Il résulte du n° 23, p. 12, que les sous-espaces affines B_1 et B′ sont égaux; nous avons donc : $t_x(B) = B'$.

26 **Remarque** : Nous montrerons au n° 50, p. 31, qu'il existe des sous-espaces affines qui sont disjoints et qui ne sont pas parallèles. On ne peut donc pas dire que deux sous-espaces affines disjoints soient nécessairement parallèles.

Intersection de deux sous-espaces affines.

27 **THÉORÈME : Soient B et B_1 deux sous-espaces affines d'un espace affine A. Si les sous-espaces B et B_1 ne sont pas disjoints, leur intersection est un sous-espace affine de A.**

Considérons deux sous-espaces affines B et B_1 **non disjoints.** Désignons respectivement par F et par F_1 les directions de ces sous-espaces affines, et par O un point de l'intersection $B \cap B_1$.

Nous avons les équivalences logiques :

$(M \in B) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM} \in F)$ et $(M \in B_1) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM} \in F_1)$.

Nous en déduisons : $(M \in B \cap B_1) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM} \in F \cap F_1)$.

L'intersection des sous-espaces vectoriels F et F_1 est un sous-espace vectoriel de E; l'intersection $B \cap B_1$ est donc un sous-espace affine de direction $F \cap F_1$.

Espaces affines de dimension finie.

Espace affine de dimension finie.

28 **DÉFINITION : On dit qu'un espace affine A associé à un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est de dimension finie si et seulement si E est un espace vectoriel de dimension finie.**

Si la dimension de E est n, on dit aussi que la dimension de A est n.

Repère cartésien d'un espace affine de dimension finie.

29 **DÉFINITION : Soient : $\mathcal{B}=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension n et O un point d'un espace affine A associé à E. On appelle repère cartésien de A le $(n+1)$-uplet $(O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$.**

Nous noterons aussi $(O, \mathcal{B})$ le repère cartésien $(O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Le point O est appelé **origine** du repère cartésien.

Coordonnées d'un point dans un repère cartésien.

Soient A un espace affine associé à un espace vectoriel E de dimension n, O un point de A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

30 **DÉFINITION : On appelle coordonnées d'un point M de A dans le repère cartésien $(O, \mathcal{B})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$.**

Si l'on a : $\overrightarrow{OM} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, on dit que α_i est la $i^{ième}$ coordonnée du point M dans le repère $(O, \mathcal{B})$.

Exemple : Soient un espace vectoriel E de dimension 2 et A un espace affine associé à E. Désignons respectivement par $\mathcal{B}$ une base (e_1, e_2) de E et par O un point de A. Le point M a pour coordonnées $(2, -1)$ dans le repère cartésien $(O, \mathcal{B})$ si et seulement si l'on a : $\overrightarrow{OM} = 2e_1 - e_2$.

31 Il résulte de la définition que deux points d'un espace affine sont égaux si et seulement si leurs coordonnées dans un repère cartésien $(O, \mathcal{B})$ sont égales.

32 Considérons, dans un espace affine A de dimension n, un repère cartésien $(O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et deux points M et N de coordonnées respectives dans ce repère : $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.
Nous avons donc :
$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ et : $\overrightarrow{ON} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.
De l'égalité : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, nous déduisons :
$\overrightarrow{MN} = (\beta_1 - \alpha_1)e_1 + (\beta_2 - \alpha_2)e_2 + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)e_n$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sont donc : $(\beta_1 - \alpha_1, \ \beta_2 - \alpha_2, \ldots, \ \beta_n - \alpha_n)$.

33 **THÉORÈME : Soit, dans un espace affine A de dimension n, un repère cartésien $(O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Pour tout i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, la coordonnée du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sur e_i est égale à la différence de la $i^{ième}$ coordonnée de N et de la $i^{ième}$ coordonnée de M dans $(O, e_1, e_2, \ldots, e_n)$.**

Changement d'origine d'un repère cartésien.

34 Considérons dans un espace affine A associé à un espace vectoriel E de dimension n deux points O et O'. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées du point O' dans le repère cartésien $(O, \mathcal{B})$; nous avons :
$\overrightarrow{OO'} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.
Soit un point M de l'espace affine A dont les coordonnées dans le repère cartésien $(O, \mathcal{B})$ sont $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n$.
Désignons par $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ les coordonnées de ce point M dans le repère cartésien $(O', \mathcal{B})$.

Nous avons : $\overrightarrow{O'M} = \alpha'_1e_1 + \alpha'_2e_2 + \dots + \alpha'_ne_n$.
De l'égalité : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, il résulte les égalités :
$\alpha_1 = x_1 + \alpha'_1$; $\alpha_2 = x_2 + \alpha'_2$; ...; $\alpha_n = x_n + \alpha'_n$.

THÉORÈME : Soient O et O' deux points d'un espace affine A associé à un espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout point M de A, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de M dans $(O, \mathcal{B})$ est égale à la somme de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de O' dans $(O, \mathcal{B})$ et de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de M dans $(O', \mathcal{B})$.

EXERCICES

1 Soient A un espace affine associé à un espace vectoriel E et (M, N) un bipoint.

1° Montrer qu'il existe un point I unique de A pour lequel on a : $I = M + (-\frac{1}{2})NM$
$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 0_E$. $I = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}}(M)$
I est appelé milieu du bipoint (M, N). $I = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N$

2° Montrer que l'on a : $\forall O \in A$, $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$. $\forall O$
on a : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{OI}$

2 Soit A un espace affine associé à un espace vectoriel E. On définit dans l'ensemble des bipoints de A une relation, notée $\sim$, par :
$((M, N) \sim (P, Q)) \iff (\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ})$.

1° Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence; on l'appelle relation d'équipollence. $(M,N) \sim (M,N)$ car $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}$; symétrie, transitivité trivial

2° Montrer l'équivalence logique :
$((M, N) \sim (P, Q)) \iff ((M, P) \sim (N, Q))$. $(M,N) \sim (P,Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$ $\Leftrightarrow (M,P) \sim (N,Q)$

3° Montrer que deux bipoints sont équipollents si et seulement s'ils ont même milieu. $(M,N) \sim (P,Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$
Il s'agit plutôt de : $(M,N) \sim (P,Q) \Leftrightarrow$ [MQ] et [NP] ont même milieu

3 Soit t une application d'un espace affine A dans lui-même. On pose : $t(M) = M'$ et $t(N) = N'$.
Montrer que t est une translation affine si et seulement si :
$\forall (M, N) \in A \times A$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.
$\Rightarrow$) on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$
$\Leftarrow$) Supposons que $\forall (M,N)$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Soit $P \in A$ et soit P' / $P' = t(P)$ on a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{P'M'}$ (cf Hyp) $\Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{P'M} + \overrightarrow{MM'}$
ie $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{MM'}$ (P, fixé) d'où $t = t_{\overrightarrow{PP'}}$

EXERCICES

Symétries centrales.

4 Soient A un espace affine associé à un espace vectoriel E, O un point de A. On appelle symétrie centrale de centre O l'application, notée s_0, qui, à chaque point M de A, associe le point M′ de A défini par : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

1° Vérifier l'égalité : $s_0 \circ s_0 = id_A$. En déduire que s_0 est une bijection.

2° Soient M et N deux points de A. On pose : $M' = s_0(M)$ et $N' = s_0(N)$.
Vérifier l'égalité : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. c'est plutôt $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{N'M'}$ on a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{N'M'}$
Soient I le milieu du bipoint (M, N) et I′ l'image de I par s_0. Montrer que I′ est le milieu du bipoint (M′, N′). $\vec{0} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{M'I'} + \overrightarrow{N'I'}$ (car $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{N'I'}$ cf ce qui précède)

3° Soient O_1 et O_2 deux points de A et M un point de A.
On désigne par M_1 et M_2 les images respectives de M par la symétrie centrale de centre O_1 et par la symétrie centrale de centre O_2.
Montrer que, pour tout point M de A, on a : $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.
$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

5 Soit A un espace affine associé à un espace vectoriel E. On utilisera dans cet exercice les propriétés des symétries centrales démontrées dans l'exercice n° 4.
On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations affines de A, par $\mathcal{S}$ l'ensemble des symétries centrales de A. $\left\{ \begin{array}{l} s_M(P) = P' \\ s_N(P') = P'' \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{MN}$

1° Soient M et N deux points de A, démontrer l'égalité : $s_N \circ s_M = t_{2\overrightarrow{MN}}$.

2° Démontrer que l'ensemble $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ? non $s_N \circ s_M \neq s_M \circ s_N$

3° Soient M et N deux points de A et a un vecteur de E. Résoudre dans le groupe $(\mathcal{T} \cup \mathcal{S}, \circ)$ les équations :

1) $x \circ t_a = s_M$, 2) $s_M \circ x = s_N$, 1) $x = s_M \circ t_{-a}$; 2) $x = s_M \circ s_N = t_{2\overrightarrow{NM}}$
3) $s_M \circ x \circ s_M = s_N$, 4) $t_a \circ x \circ t_a = s_M$. 3) $x = s_M \circ s_N \circ s_M$; 4) $x = t_{-a} \circ s_M \circ t_{-a}$

Barycentre.

◆ Dans les exercices suivants (n° 6 à n° 8), on considère un espace affine A associé à un espace vectoriel E et on appelle point M de A affecté du coefficient λ, tout couple (M, λ) de l'ensemble produit : $A \times \mathbb{R}$.

6 Soient (M_1, λ_1) et (M_2, λ_2) deux couples de $A \times \mathbb{R}$. On considère l'application f de A dans E définie par : $P \leadsto f(P) = \lambda_1 \overrightarrow{PM_1} + \lambda_2 \overrightarrow{PM_2}$

1° Montrer que, pour tout couple (P, Q) de points de A, on a :
$f(P) = f(Q) + (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{PQ}$. ie $\overrightarrow{f(Q)f(P)} = (\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{PQ}$. on a $\overrightarrow{f(Q)f(P)} = f(P) - f(Q)$

2° En déduire que, si $\lambda_1 + \lambda_2$ est un réel non nul, f est une bijection de A sur E.
injection $f(P) = f(Q) \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \Rightarrow P = Q$ car $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$
surjection $\forall \vec{u} \in E\ \exists M / f(M) = \vec{u}$ on a $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}[f(O) - \vec{u}]$ où $O \in A$ fixé

3° On suppose désormais : $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. On appelle barycentre du point M_1 affecté du coefficient λ_1 et du point M_2 affecté du coefficient λ_2, le point G de A défini par : $f(G) = 0_E$.
En déduire : $\forall M \in A$, $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}(\lambda_1\overrightarrow{MM_1} + \lambda_2\overrightarrow{MM_2})$.

Homogénéité ← 4° Soit ρ un réel non nul. Montrer que G est le barycentre du point M_1 affecté du coefficient $\rho\lambda_1$ et du point M_2 affecté du coefficient $\rho\lambda_2$.

5° Soit λ un réel non nul. Quel est le barycentre du point M_1 affecté du coefficient λ et du point M_2 affecté du coefficient λ ?

7 Soient (M_1, λ_1), (M_2, λ_2), (M_3, λ_3) trois couples de $A \times \mathbb{R}$. On considère l'application f de A dans E définie par :

$P \rightsquigarrow f(P) = \lambda_1\overrightarrow{PM_1} + \lambda_2\overrightarrow{PM_2} + \lambda_3\overrightarrow{PM_3}$. , $f(P) = f(Q) + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\overrightarrow{PQ}$ (*)

1° Montrer que, si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ est un réel non nul, f est une bijection de A sur E. injection découle de (*) ; surjection $\forall \vec{u} \in E, \exists M, \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}[f(O)-\vec{u}]$ $O \in A$, O fixé

2° On suppose désormais : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$. On appelle barycentre des points M_1, M_2 et M_3 affectés respectivement des coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 le point G défini par : $f(G) = 0_E$.
En déduire :

$$\forall M \in A, \quad \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}(\lambda_1\overrightarrow{MM_1} + \lambda_2\overrightarrow{MM_2} + \lambda_3\overrightarrow{MM_3}).$$

3° On suppose : $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.
On désigne par G′ le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients λ_1 et λ_2.
Montrer que G est le barycentre du point G′ affecté du coefficient $\lambda_1 + \lambda_2$ et du point M_3 affecté du coefficient λ_3.

Application : Soient M_1, M_2, M_3 trois points d'un espace affine de dimension 2 tels que le système $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$ soit libre.
Construire le barycentre des points M_1, M_2, M_3 affectés du même coefficient 1. C'est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$
Quel résultat classique de géométrie élémentaire retrouve-t-on ?

8 Soient (M_1, λ_1), (M_2, λ_2), ..., (M_n, λ_n), n couples de $A \times \mathbb{R}$. On considère l'application f de A dans E définie par :

$P \rightsquigarrow f(P) = \lambda_1\overrightarrow{PM_1} + \lambda_2\overrightarrow{PM_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{PM_n}$.

On a donc : $f(P) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i\overrightarrow{PM_i}$. ; $\forall (P,Q) \in A \times A, f(P) = f(Q) + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{PQ}$

1° Montrer que, si $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i$ est un réel non nul, f est une bijection de A sur E.

2° On suppose : $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \neq 0$. On appelle barycentre des n points M_i affectés du coefficient λ_i, le point G défini par : $f(G) = 0_E$.

En déduire : $\forall M \in A, \quad \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i\right)\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i\overrightarrow{MM_i}$.

3° Soit t_x une translation affine.
On désigne respectivement par G′ et par M'_i les images respectives des points G et M_i par t_x. $\sum \alpha_i \overrightarrow{G'M'_i} = \sum \alpha_i(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GM_i} + \overrightarrow{M_iM'_i}) = \vec{0}$ car $\vec{x} = \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{M_iM'_i}$ et $G = \mathrm{Bar}(M_i, \lambda_i)_{1 \le i \le n}$
Montrer que G′ est le barycentre des n points M'_i affectés du coefficient λ_i.

4° On suppose que les n points M_i appartiennent à un sous-espace affine B.
Montrer que G appartient à B.

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overrightarrow{OM_i}\right) \in \vec{A}$, $O \in A$, fixé

d'où $G \in A = \{M / \overrightarrow{OM} \in \vec{A}\}$

EXERCICES

Application affine.

9 Soient A un espace affine associé à un espace vectoriel E, O et O′ deux points de A, et f une application linéaire de E dans E. On considère l'application u de A dans A qui, à chaque point M de A, associe le point M′ défini par : $\overrightarrow{O'M'} = f(\overrightarrow{OM})$. On a donc l'équivalence logique :

$$(M' = u(M)) \iff (\overrightarrow{O'M'} = f(\overrightarrow{OM})).$$

On dit que u est une application affine de A dans A.

1° Quelle est l'image de O par u ?

2° Quelle est l'application affine u dans le cas où f est l'application id_E ?

3° Montrer que u est une bijection sur A si et seulement si f est une bijection sur A.

4° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application u possède la propriété : $\exists M \in A, \quad u(M) = M$.

5° Soit B un sous-espace affine de A de direction $\vec{B}$; montrer que $u(B)$ est un sous-espace affine de A. Donner la direction de $u(B)$.

6° Soient O″ un point de A distinct de O′, et u' l'application affine définie par :

$$(M'' = u'(M)) \iff (\overrightarrow{O''M''} = f(\overrightarrow{OM})).$$

Que peut-on dire des images $u(B)$ et $u'(B)$ d'un sous-espace affine B de A ?

Donner une condition pour que l'on ait : $u(B) = u'(B)$.

10 Soit A un espace affine associé à un espace vectoriel E. On considère la loi de composition externe dans A à opérateurs dans E, notée $\perp$, définie par l'équivalence logique :

$$\forall M \in A, \quad \forall x \in E, \quad (M \perp x = N) \iff (\overrightarrow{MN} = x).$$

1° Vérifier la propriété : $(N = M \perp x) \iff (t_x(M) = N)$.

2° Montrer que la loi $\perp$ possède les propriétés :

a) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall M \in A, \quad M \perp (x + y) = (M \perp x) \perp y.$

b) $\forall (M, N) \in A^2, \quad \exists ! x \in E, \quad M \perp x = N.$

11 Soient A un ensemble non vide, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et une loi de composition externe dans A, à opérateurs dans E, notée $\perp$, qui possède les propriétés suivantes :

a) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall M \in A, \quad M \perp (x + y) = (M \perp x) \perp y.$

b) $\forall (M, N) \in A^2, \quad \exists ! x \in E, \quad M \perp x = N.$

1° Définir, à partir de la propriété (*b*) une application φ de $A \times A$ dans E.

2° Montrer que A est un espace affine associé à E.

3° Caractériser les translations affines de A.

23. Espaces affines de dimension 1, 2, 3

Espaces affines de dimension 1.

Espace affine A_1.

1 Un espace affine A_1 est de dimension 1 si et seulement s'il est associé à un espace vectoriel E_1 de dimension 1.
On dit aussi que A_1 est une droite affine associée à la droite vectorielle E_1.
Si nous notons $\vec{D}$ la droite vectorielle E_1, nous notons D la droite affine A_1.
Le plus souvent, nous dirons simplement droite, pour droite affine.

Repère cartésien d'une droite affine D.

2 Tout vecteur $\vec{i}$ non nul de $\vec{D}$ est une base de $\vec{D}$.
Soit O un point de D ; le couple $(O, \vec{i})$ est un repère cartésien de la droite D.

Coordonnée d'un point dans un repère cartésien de D.

3 Soit $(O, \vec{i})$ un repère cartésien de D. Pour tout point M de D, il existe un réel unique x pour lequel on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
Ce réel x est la coordonnée du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{i})$.
On dit que x est l'abscisse de M dans le repère cartésion $(O, \vec{i})$.

Sous-espaces affines de D.

4 Les seuls sous-espaces vectoriels de $\vec{D}$ sont $\{\vec{0}\}$ et $\vec{D}$.
Il en résulte que les sous-espaces affines de D sont les singletons de D et la droite affine D.

Espaces affines de dimension 2.

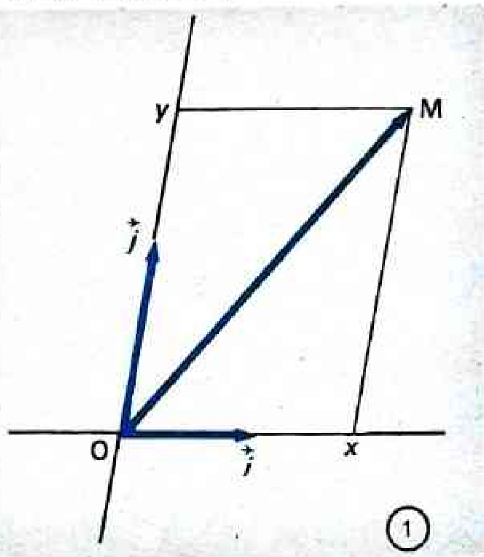
Espace affine A_2.

5 Un espace affine A_2 est de dimension 2 si et seulement s'il est associé à un espace vectoriel E de dimension 2.
On dit aussi que A_2 est un plan affine associé au plan vectoriel E_2.
Si nous notons $\vec{P}$ le plan vectoriel E_2, nous notons P le plan affine A_2.
Le plus souvent, nous dirons simplement plan, pour plan affine.

Repère cartésien d'un plan affine P.

6 Soit P un plan associé à un plan vectoriel $\vec{P}$. Désignons par O un point de P et par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\vec{P}$. Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien de P.
Rappelons les propriétés obtenues aux n^{os} 30 à 34, p. 14 et 15 :

1. Les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point M du plan P sont (x, y) si et seulement si l'on a (fig. 1) : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
x et y sont appelées respectivement abscisse et ordonnée de M.



1

2. Soit O′ un point du plan P, de coordonnées (x_0, y_0) dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si les coordonnées d'un point M du plan P sont (x, y) dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si les coordonnées du même point M sont (x', y') dans le repère cartésien $(O', \vec{i}, \vec{j})$, on a les égalités :
$x = x_0 + x'$ et $y = y_0 + y'$.

3. Si A et B sont deux points du plan P, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées (x, y) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$.

Sous-espaces affines d'un plan affine P.

7 Les seuls sous-espaces vectoriels d'un plan vectoriel $\vec{P}$ sont $\{\vec{0}\}$, les droites vectorielles et le plan vectoriel $\vec{P}$.
Il en résulte que les sous-espaces affines d'un plan affine P sont les singletons de P, les droites affines de P et le plan affine P.

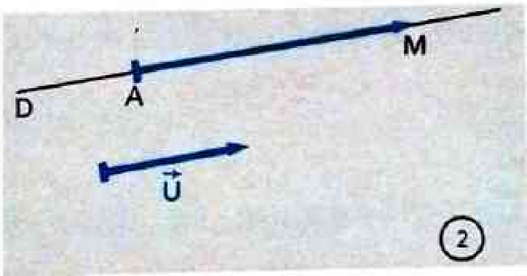
Droites affines parallèles dans P.

8 La définition de deux sous-espaces affines parallèles (n° 20, p. 11) s'applique en particulier pour deux droites affines D et D′ de P.
Deux droites affines D et D′ sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction : $(D /\!/ D') \iff (\vec{D} = \vec{D'})$.
Il résulte des propriétés des sous-espaces affines parallèles (n^{os} 22 à 25, p. 12) :
1. Deux droites parallèles d'un plan P sont égales ou disjointes.
2. L'image d'une droite par une translation affine est une droite parallèle.
3. Soient D et D′ deux droites parallèles, d'un plan P. Pour tout point O de D et pour tout point O′ de D′, la droite D′ est l'image de D par la translation affine de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
4. Pour tout point A de P et pour toute droite vectorielle $\vec{D}$ de $\vec{P}$, il existe une droite unique, de direction $\vec{D}$, qui passe par le point A.
5. Soit D une droite d'un plan P. Par tout point A de P, il passe une droite unique D′ parallèle à D.

Nous retrouvons dans ce dernier résultat l'énoncé de l'axiome d'Euclide.

Déterminations d'une droite affine d'un plan affine P.

9 Considérons une droite D de direction $\vec{D}$.
Soit $\vec{U}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$ (fig. 2); nous avons l'équivalence logique :
$(\vec{X} \in \vec{D}) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{X} = k\vec{U})$ (1)
Soit A un point de D; nous avons l'équivalence logique :
$(M \in D) \iff (\overrightarrow{AM} \in \vec{D})$. (2)



Des équivalences logiques (1) et (2), nous déduisons : $(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{U})$. (3)
La droite D est donc déterminée par la donnée du point A et du vecteur non nul $\vec{U}$ de $\vec{D}$.

10 Donnons alors la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle vecteur directeur d'une droite D de direction $\vec{D}$, tout vecteur $\vec{U}$ non nul de $\vec{D}$.

11 De l'équivalence logique (3), il résulte alors le théorème :

THÉORÈME : Une droite D d'un plan est déterminée par la donnée de l'un de ses points et de l'un de ses vecteurs directeurs.

12 Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME : Pour tout point A de P et pour tout vecteur non nul $\vec{U}$ de $\vec{P}$, il existe une droite unique de P qui passe par A et qui admet $\vec{U}$ pour vecteur directeur.

Considérons un point A de P et un vecteur non nul $\vec{U}$ de $\vec{P}$.
Si une droite D, de direction $\vec{D}$, passe par le point A et admet $\vec{U}$ pour vecteur directeur, alors $\vec{U}$ appartient à $\vec{D}$.
Il en résulte que $\vec{D}$ est nécessairement le sous-espace vectoriel de $\vec{P}$ engendré par $\vec{U}$.
Considérons donc le sous-espace vectoriel $\vec{D}$ engendré par $\vec{U}$.
Il résulte du n° 12 qu'il existe une droite unique D qui passe par A et dont la direction est $\vec{D}$. Nous avons : $\vec{U} \in \vec{D}$; le vecteur $\vec{U}$, non nul, est donc un vecteur directeur de D.

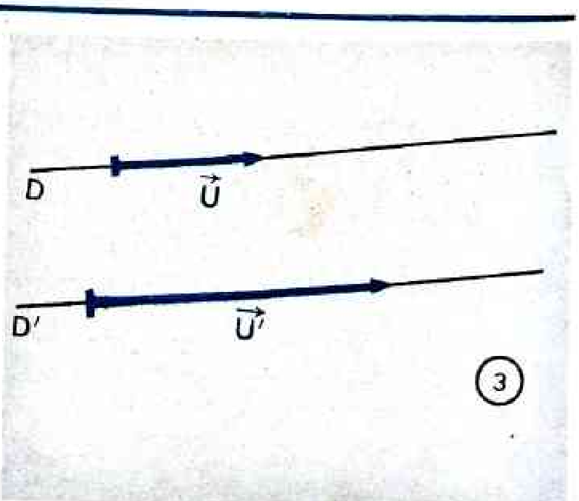
13 THÉORÈME : Quels que soient les points distincts A et B de P, il existe une droite unique D qui passe par les points A et B.

Considérons deux points distincts A et B de P. Il existe une droite D qui passe par les points A et B si et seulement s'il existe une droite D qui passe par A et qui admet pour vecteur directeur le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$. Il résulte du théorème du n° 12, qu'une telle droite D existe et est unique.

Caractérisation de deux droites affines parallèles dans P.

14 THÉORÈME : Deux droites D et D′ d'un plan P, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$, sont parallèles si et seulement si le système $(\vec{U}, \vec{U'})$ est un système lié.

Par définition, nous avons l'équivalence logique : $(D /\!/ D') \iff (\vec{D} = \vec{D'})$.
Si les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont égales, le système $(\vec{U}, \vec{U'})$ est un système de deux vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 1 ; il est donc lié (fig. 3).
Réciproquement, si le système de vecteurs non nuls $(\vec{U}, \vec{U'})$ est lié, ces deux vecteurs engendrent le même sous-espace de dimension 1 ; il en résulte l'égalité : $\vec{D} = \vec{D'}$.

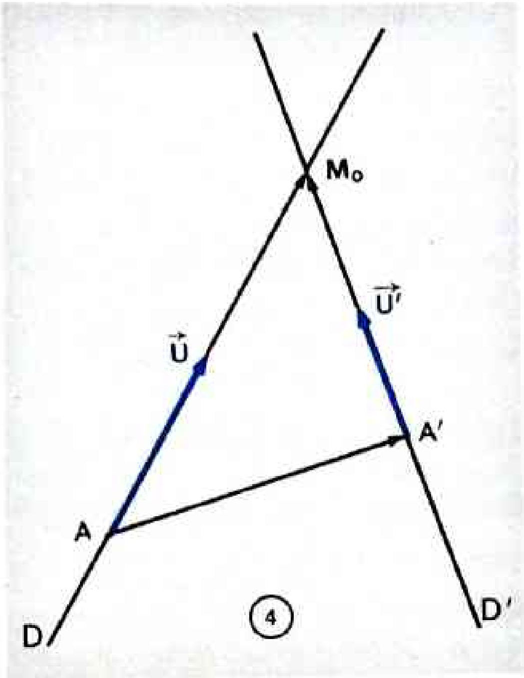


3

Intersection dans P de deux droites affines.

15 Considérons deux droites D et D′ de P, de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$. Nous nous proposons de déterminer l'ensemble $D \cap D'$.

16 **Premier cas :** $\vec{D} = \vec{D'}$.
Dans ce cas, les droites D et D′ sont parallèles. Nous savons (n° 22, p. 12) que ces deux droites sont égales ou disjointes ; nous avons donc :
$D \cap D' = D = D'$ ou $D \cap D' = \varnothing$.



17 **Deuxième cas :** $\vec{D} \neq \vec{D'}$.
Dans ce cas, les droites D et D′ ne sont pas parallèles ; montrons que leur intersection est non vide.
Désignons par A un point de D, par A′ un point de D′, par $\vec{U}$ un vecteur directeur de D et par $\vec{U'}$ un vecteur directeur de D′ (fig. 4).
Il résulte du théorème du n° 14 que $(\vec{U}, \vec{U'})$ est une base de $\vec{P}$.

Pour tout point M de P, nous avons les équivalences logiques :
$(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{U})$;
$(M \in D') \iff (\exists k' \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{A'M} = k'\vec{U'})$.

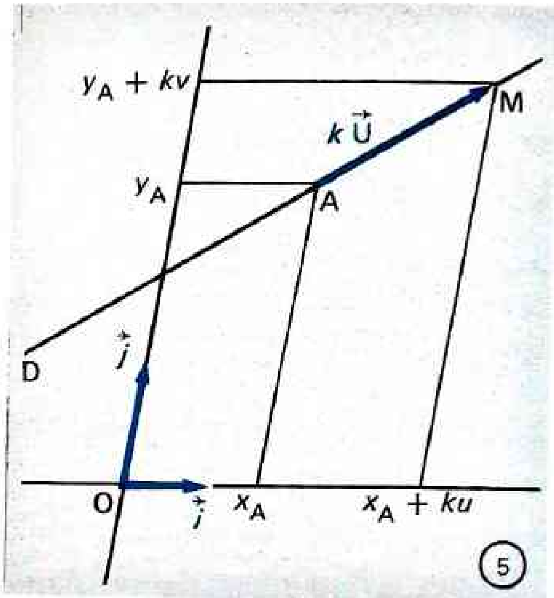
De ces deux équivalences logiques, et de l'égalité : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M}$, nous déduisons :
$(M \in D \cap D') \iff (\exists (k, k') \in \mathbb{R}^2,\ k\vec{U} = \overrightarrow{AA'} + k'\vec{U'})$.

Soient (x_0, x'_0) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{U'})$:
$\overrightarrow{AA'} = x_0\vec{U} + x'_0\vec{U'}$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{AA'} + k'\vec{U'} = x_0\vec{U} + (k' + x'_0)\vec{U'}$.
Il en résulte qu'il existe un couple unique (k, k') pour lequel nous avons :
$k\vec{U} = \overrightarrow{AA'} + k'\vec{U'}$; c'est le couple : $(x_0, -x'_0)$.
L'intersection $D \cap D'$ est donc le singleton $\{M_0\}$, où M_0 est le point déterminé par : $\overrightarrow{AM_0} = x_0\vec{U}$, ou encore par : $\overrightarrow{A'M_0} = -x'_0\vec{U'}$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Si deux droites d'un plan ne sont pas parallèles, leur intersection est un singleton. On dit que ces deux droites sont sécantes.

Représentations paramétriques d'une droite affine de P.

18 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan affine P.
Considérons la droite affine D déterminée par un point A et un vecteur non nul $\vec{U}$ de $\vec{P}$. Désignons respectivement par (x_A, y_A) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (u, v) les coordonnées du vecteur $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons établi l'équivalence logique :
$(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{U})$, ou encore :
$(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{U})$.
Un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartient donc à la droite D si et seulement s'il existe un réel k pour lequel on a :
$x = x_A + ku$ et $y = y_A + kv$.



19 Considérons une droite D déterminée par deux points distincts A et B de P, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 5).
Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D ; nous avons l'équivalence logique :
$(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB})$, ou encore :
$(M \in D) \iff (\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = (1 - k)\,\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB})$.
Un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ appartient donc à la droite D si et seulement s'il existe un réel k pour lequel on a :
$x = (1 - k)\,x_A + kx_B$ et $y = (1 - k)\,y_A + ky_B$.

Équation cartésienne d'une droite affine de P.

20 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P et D une droite déterminée par un point A et un vecteur non nul $\vec{U}$.
Posons : $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ et $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j}$.
Un point M de P appartient à D si et seulement si le système $(\overrightarrow{AM}, \vec{U})$ est un système lié, c'est-à-dire (n° 6, p. 230, tome I) et si seulement si le déterminant du système $(\overrightarrow{AM}, \vec{U})$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, est nul :
$$(M \in D) \iff \left(\begin{vmatrix} x - x_A & u \\ y - y_A & v \end{vmatrix} = 0\right).$$
Nous avons l'égalité :
$$\begin{vmatrix} x - x_A & u \\ y - y_A & v \end{vmatrix} = vx - uy - vx_A + uy_A.$$

Posons : $a = v$; $b = -u$; $c = -vx_A + uy_A$.
Nous avons alors l'équivalence logique :
$(M \in D) \Longleftrightarrow (ax + by + c = 0)$.
Nous disons que : $ax + by + c = 0$, est une équation de la droite D dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $\vec{U}$ est non nul; l'un au moins des réels a et b est donc non nul.

THÉORÈME : L'équation d'une droite de P dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est de la forme : $ax + by + c = 0$, où les réels a et b ne sont pas tous deux nuls.

---

21 Étudions le problème réciproque. Soient a, b, c trois réels; déterminons l'ensemble D_1 des points M de P dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'égalité : $ax + by + c = 0$.
Nous avons les implications :
$(a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0) \Longrightarrow (D_1 = P)$;
$(a = 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0) \Longrightarrow (D_1 = \varnothing)$.
Dans la suite nous supposons donc que l'un des réels a et b, par exemple b, est non nul : $b \neq 0$.
Si un point M, de coordonnées (x, y), appartient à D_1, nous avons :
$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$.

Posons : $k = \frac{x}{b}$. Nous avons alors : $x = kb$ et $y = -ka - \frac{c}{b}$.
Nous avons donc l'implication :
$(M \in D_1) \Longrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{R}, \quad x = kb \quad \text{et} \quad y = -ka - \frac{c}{b}\right)$.
Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x, y). S'il existe un réel k pour lequel on a : $x = kb$ et $y = -ka - \frac{c}{b}$, il en résulte l'égalité :
$ax + by + c = 0$.
Le point M appartient donc à D_1.
En résumé, nous avons démontré l'équivalence logique :

$$(M \in D_1) \Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{R}, \quad x = kb \quad \text{et} \quad y + \frac{c}{b} = -ka\right). \tag{1}$$

Considérons le point A de coordonnées $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$; il appartient à D_1.
Pour tout point M de P, nous avons l'égalité :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + \left(y + \frac{c}{b}\right)\vec{j}. \tag{2}$$

Soit $\vec{U}$ le vecteur de $\vec{P}$ de coordonnées $(b, -a)$; nous avons : $\vec{U} \neq \vec{0}$.
Pour tout réel k, nous avons : $k\vec{U} = kb\vec{i} - ka\vec{j}$. (3)
De l'équivalence logique (1) et des égalités (2) et (3), nous déduisons :
$(M \in D_1) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{U})$.

Désignons par D la droite déterminée par le point A et le vecteur non nul $\vec{U}$. Nous avons : $(M \in D_1) \Longleftrightarrow (M \in D)$.
Nous avons donc l'égalité : $D_1 = D$.

THÉORÈME : Soient a et b deux réels non tous deux nuls et c un réel. L'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'égalité : $ax + by + c = 0$ est une droite.

22 Remarque : Un vecteur directeur de la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ est le vecteur de coordonnées $(-b, a)$.

Espaces affines de dimension 3.

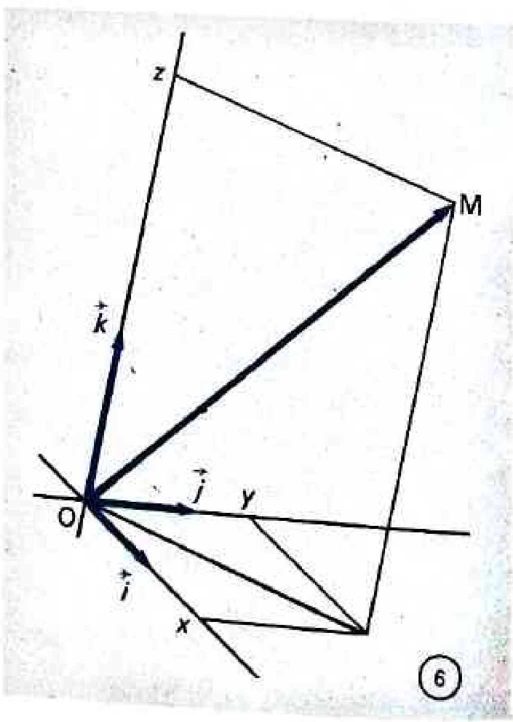
Espace affine A_3.

23 Un espace affine A_3 est de dimension 3 si et seulement s'il est associé à un espace vectoriel E_3 de dimension 3.

Repère cartésien d'un espace affine A_3.

24 Soit un espace affine A_3 associé à un espace vectoriel E_3. Désignons par O un point de A_3 et par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E_3. Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de A_3.
Rappelons les propriétés obtenues aux n^{os} 30 à 34, p. 14 et 15 :

1. Les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un point M de l'espace affine A_3 sont (x, y, z) si et seulement si l'on a (fig. 6) : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
2. Soit O' un point de l'espace affine A_3, de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si les coordonnées d'un point M de A_3 sont (x, y, z) dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et si les coordonnées du même point M sont (x', y', z') dans le repère cartésien $(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a : $x = x_0 + x'$; $y = y_0 + y'$; $z = z_0 + z'$.



6

3. Si A et B sont deux points de l'espace affine A_3, de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées (x, y, z) du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :
$x = x_B - x_A$, $y = y_B - y_A$, $z = z_B - z_A$.

Sous-espaces affines d'un espace affine A_3.

25 Les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E_3 sont $\{0_{E_3}\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et l'espace vectoriel E_3.
Il en résulte que les sous-espaces affines d'un espace affine A_3 sont les singletons de A_3, les droites affines de A_3, les plans affines de A_3 et l'espace affine A_3.

Droites affines parallèles dans A_3.

26 Deux droites D et D' de A_3 sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction : $(D /\!/ D') \Longleftrightarrow (\vec{D} = \vec{D'})$.
Il résulte, des propriétés des sous-espaces affines parallèles, les propriétés :
1. Deux droites parallèles de A_3 sont égales ou disjointes.
2. Pour tout point A de A_3 et pour tout sous-espace vectoriel $\vec{D}$ de dimension 1 de E_3, il existe une droite unique, de direction $\vec{D}$, qui passe par le point A.
3. Soit D une droite de A_3. Par tout point A de A_3, il passe une droite unique D' parallèle à D.

Détermination d'une droite affine de A_3.

27 **DÉFINITION : On appelle vecteur directeur d'une droite D de A_3 tout vecteur $\vec{U}$ non nul qui appartient à la direction $\vec{D}$ de D.**

28 Soient A un point d'une droite D et $\vec{U}$ un vecteur directeur de D. Comme au n° 9, p. 21, on démontre l'équivalence logique :
$(M \in D) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{U})$.

29 Des démonstrations analogues à celles que nous avons données aux nos 12 et 13, p. 22, permettent d'établir les deux théorèmes suivants :

THÉORÈMES : 1. Pour tout point A de A_3 et pour tout vecteur non nul $\vec{U}$ de E_3, il existe une droite unique de A_3 qui passe par A et qui admet $\vec{U}$ pour vecteur directeur.
2. Quels que soient les points distincts A et B de A_3, il existe une droite unique qui passe par les points A et B.

Points alignés.

30 **DÉFINITION : On dit que trois points** A, B, C **de l'espace affine** A_3 **sont alignés si et seulement s'il existe une droite** D **qui passe par les trois points** A, B, C.

31 Considérons une droite D de direction $\vec{D}$.

Quels que soient les points A, B, C de D, on a : $\overrightarrow{AB} \in \vec{D}$ et $\overrightarrow{AC} \in \vec{D}$.

Le sous-espace vectoriel $\vec{D}$ est de dimension 1 ; il en résulte que le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est lié.

Réciproquement, considérons trois points A, B, C de A_3 pour lesquels le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un système lié. Montrons que les points A, B, C sont alignés.

Si les points A, B, C sont égaux, toute droite qui passe par A passe aussi par B et par C.

Supposons que deux, au moins, des points A, B, C ne sont pas égaux ; par exemple supposons : $A \neq B$.

Considérons alors l'unique droite D de A_3 qui passe par les points A et B. La direction $\vec{D}$ de D est le sous-espace vectoriel de E_3 engendré par le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$.

Le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est lié; il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ appartient à $\vec{D}$. Le point C appartient donc à D ; les points A, B, C sont alignés.

THÉORÈME : Trois points A, B, C **de l'espace affine** A_3 **sont alignés si et seulement si le système** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ **est un système lié.**

Plans affines parallèles dans A_3.

32 Soient un plan P de direction $\vec{P}$ et un plan P′ de direction $\vec{P'}$. Les sous-espaces affines P et P′ sont parallèles si et seulement si les directions $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont égales (n° 20, p. 11).

Des propriétés des sous-espaces affines parallèles, il résulte les propriétés :

1. Deux plans parallèles sont égaux ou disjoints.
2. L'image d'un plan par une translation affine est un plan parallèle.
3. Soient P et P′ deux plans parallèles. Pour tout point O de P et pour tout point O′ de P′, le plan P′ est l'image de P par la translation affine de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
4. Soit $\vec{P}$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E_3. Par tout point A de A_3, il passe un plan affine P unique de direction $\vec{P}$.
5. Soit P un plan. Par tout point A de l'espace affine A_3, il passe un unique plan P′ parallèle à P.

Détermination d'un plan affine de A_3.

33 Considérons un plan P de direction $\vec{P}$.
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\vec{P}$; nous avons l'équivalence logique :
$(\vec{X} \in \vec{P}) \Longleftrightarrow (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{X} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j})$. (1)
Soit A un point du plan P ; nous avons l'équivalence logique :
$(M \in P) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM} \in \vec{P})$. (2)
Des équivalences logiques (1) et (2), nous déduisons :
$(M \in P) \Longleftrightarrow (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j})$. (3)

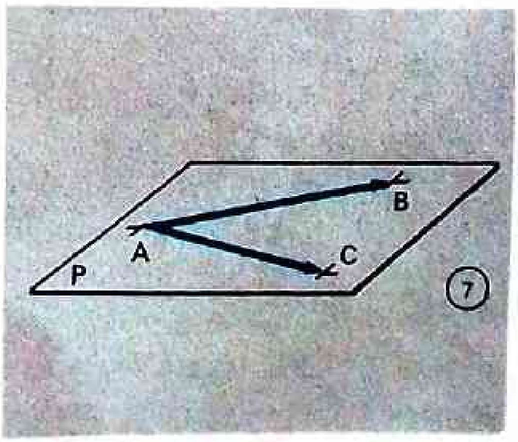
Nous allons démontrer le théorème suivant :

34 THÉORÈME : Pour tout point A **de** A_3 **et pour tout couple** $(\vec{i}, \vec{j})$ **de vecteurs linéairement indépendants de** E_3**, il existe un plan unique** P **qui passe par** A **et dont la direction** $\vec{P}$ **admet le couple** $(\vec{i}, \vec{j})$ **pour base.**

Considérons un point A de A_3 et un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs linéairement indépendants de E_3.
Si un plan P, de direction $\vec{P}$, passe par A et si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\vec{P}$, alors $\vec{P}$ est le sous-espace vectoriel de E_3 engendré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Considérons donc le sous-espace vectoriel $\vec{P}$ de E_3 engendré par les vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Il résulte du n° 32, p. 28, qu'il passe par A un plan P unique de direction $\vec{P}$. La direction $\vec{P}$ de P est engendrée par les vecteurs indépendants $\vec{i}$ et $\vec{j}$; le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc une base de $\vec{P}$.

35 THÉORÈME : Quels que soient les points A, B, C **non alignés de** A_3**, il existe un plan unique** P **de** A_3 **qui passe par** A**, par** B **et par** C**.**

Considérons, en effet, trois points A, B, C non alignés de A_3 (fig. 7). Il résulte du théorème n° 31, p. 28, que le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un système libre de E_3.
Un plan P, de direction $\vec{P}$, passe par les points A, B, C si et seulement si l'on a : $A \in P$, $\overrightarrow{AB} \in \vec{P}$, $\overrightarrow{AC} \in \vec{P}$, c'est-à-dire si et seulement si P est le plan déterminé par le point A et le système libre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Il résulte du théorème n° 34, que ce plan P existe et est unique.

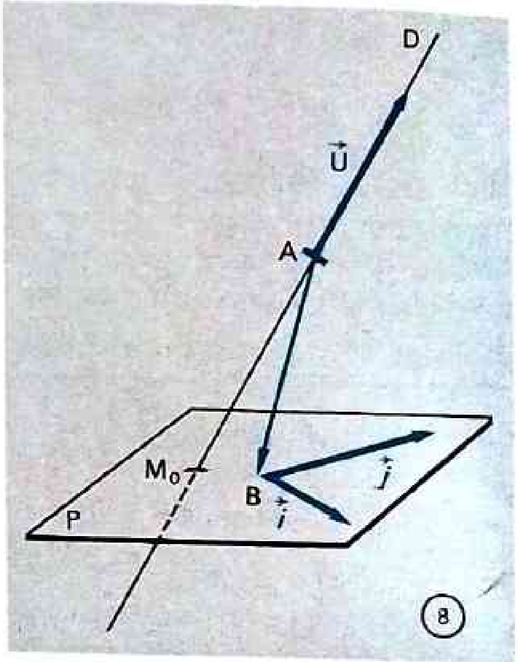


7

Intersection d'une droite affine et d'un plan affine de A_3.

36 Considérons une droite, de direction $\vec{D}$, et un plan, de direction $\vec{P}$.
L'intersection $\vec{D} \cap \vec{P}$ est un sous-espace vectoriel de E_3 ; il est inclus dans $\vec{D}$. Ce sous-espace vectoriel est donc de dimension 0 ou de dimension 1.
Deux cas, et deux seulement, sont donc possibles :
1. $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$. 2. $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$.
Nous allons étudier successivement ces deux cas.

Droite et plan affines sécants.



37 Supposons : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$.
Si $\vec{U}$ est un vecteur directeur de $\vec{D}$, nous avons : $\vec{U} \in \vec{D}$ et $\vec{U} \neq \vec{0}$; le vecteur $\vec{U}$ n'appartient donc pas à $\vec{P}$. Alors, pour toute base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, le système $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{U})$ est un système libre de E_3; c'est donc une base de E_3.
Désignons par A un point de D et par B un point de P (fig. 8).
Pour tout point M de A_3, nous avons les équivalences logiques :
$(M \in D) \Longleftrightarrow \big(\exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\vec{U}\big)$;
$(M \in P) \Longleftrightarrow \big(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{BM} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}\big)$.
De ces deux équivalences logiques et de l'égalité : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, nous déduisons :
$(M \in D \cap P) \Longleftrightarrow \big(\exists(\lambda, \mu, k) \in \mathbb{R}^3,\ k\vec{U} = \overrightarrow{AB} + \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}\big)$.
Désignons par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{U})$:
$\overrightarrow{AB} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{U}$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{AB} + \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} = (x_0 + \lambda)\vec{i} + (y_0 + \mu)\vec{j} + z_0\vec{U}$.
Il en résulte qu'il existe un triplet unique (λ, μ, k) pour lequel nous avons :
$k\vec{U} = \overrightarrow{AB} + \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$; c'est le triplet $(-x_0, -y_0, z_0)$.
L'intersection $D \cap P$ est donc le singleton $\{M_0\}$, où M_0 est le point déterminé par : $\overrightarrow{AM_0} = z_0\vec{U}$, ou encore par : $\overrightarrow{BM_0} = -x_0\vec{i} - y_0\vec{j}$.

38 Réciproquement, montrons que, si l'intersection d'une droite D et d'un plan P est un singleton $\{M_0\}$, alors on a l'égalité : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$.
En effet, si l'intersection $D \cap P$ est le singleton $\{M_0\}$, elle est non vide; il résulte du n° 27, p. 13 que $D \cap P$ est un sous-espace affine de direction $\vec{D} \cap \vec{P}$.
Le singleton $\{M_0\}$ est un sous-espace affine de direction $\{\vec{0}\}$; nous avons donc l'égalité : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$.

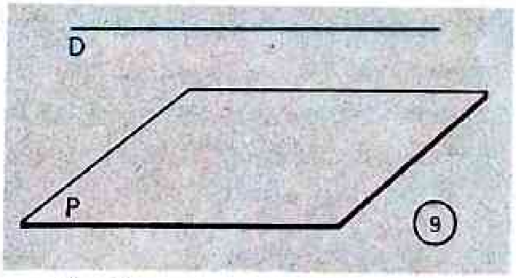
39 **THÉORÈME ET DÉFINITION : L'intersection d'une droite D de direction $\vec{D}$ et d'un plan de direction $\vec{P}$ est un singleton si et seulement si l'on a l'égalité :** $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$.
On dit alors que D et P sont sécants.

40 Remarque : Si une droite D et un plan P sont sécants, il en résulte que $D \cap P$ est non vide et que D n'est pas incluse dans P.
Nous notons : (D et P sécants) $\Longrightarrow$ $(D \cap P \neq \varnothing \quad \text{et} \quad D \not\subset P)$.

Droite affine parallèle à un plan affine.

41 Supposons : $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$.
Cette égalité a lieu si et seulement si $\vec{D}$ est incluse dans $\vec{P}$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout vecteur directeur $\vec{U}$ de D et pour toute base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, le système $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{U})$ est un système lié.
Si l'intersection $D \cap P$ est non vide, nous savons (n° 27, p. 13) que c'est un sous-espace affine de direction $\vec{D} \cap \vec{P}$, c'est-à-dire de direction $\vec{D}$.
Cette intersection $D \cap P$ est donc une droite D′ de direction $\vec{D}$: $D \cap P = D'$.
De cette égalité, nous déduisons : $D' \subset D$ et $D' \subset P$.
La seule droite incluse dans D est elle-même ; nous avons donc : $D = D'$.
Il en résulte l'inclusion : $D \subset P$.
Nous avons donc démontré l'implication : $(\vec{D} \subset \vec{P} \quad \text{et} \quad D \cap P \neq \varnothing) \Longrightarrow (D \subset P)$.
Nous en déduisons l'implication : $(\vec{D} \subset \vec{P}) \Longrightarrow (D \cap P = \varnothing \quad \text{ou} \quad D \subset P)$.

42 Réciproquement, démontrons l'implication :
$(D \cap P = \varnothing \quad \text{ou} \quad D \subset P) \Longrightarrow (\vec{D} \subset \vec{P})$.
Nous déduisons, de la remarque n° 40, que, si l'on a : $D \cap P = \varnothing$ ou $D \subset P$, la droite D et le plan P ne sont pas sécants (fig. 9).
Il en résulte que $\vec{D} \cap \vec{P}$ n'est pas égal à $\{\vec{0}\}$.



9

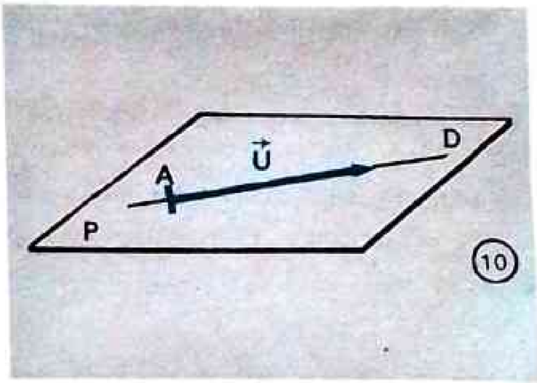
Nous avons donc : $\vec{D} \cap \vec{P} = \vec{D}$, c'est-à-dire : $\vec{D} \subset \vec{P}$.

43 **THÉORÈME ET DÉFINITION : L'intersection d'une droite D de direction $\vec{D}$ et d'un plan P de direction $\vec{P}$ est égale à l'ensemble vide ou égale à D si et seulement si l'on a :** $\vec{D} \subset \vec{P}$.
On dit alors que la droite D est parallèle au plan P.

44 Remarque : Si une droite D est parallèle à un plan P, ces deux sous-espaces affines n'ont pas la même direction ; en effet, $\vec{D}$ est un espace vectoriel de dimension 1 et $\vec{P}$ est un espace vectoriel de dimension 2.
D et P ne sont donc pas des sous-espaces affines parallèles au sens de la définition du n° 20, p. 11.

Droite affine incluse dans un plan affine.

45 Il résulte de l'étude précédente qu'une droite D, de direction $\vec{D}$, est incluse dans un plan P, de direction $\vec{P}$, si et seulement si l'on a : $D \cap P \neq \varnothing$ et $\vec{D} \subset \vec{P}$.
Nous en déduisons en particulier que, si A est un point du plan P, et $\vec{U}$ un vecteur non nul de E_3, la droite D déterminée par A et par $\vec{U}$ est incluse dans P si et seulement si $\vec{U}$ appartient à $\vec{P}$ (fig. 10).



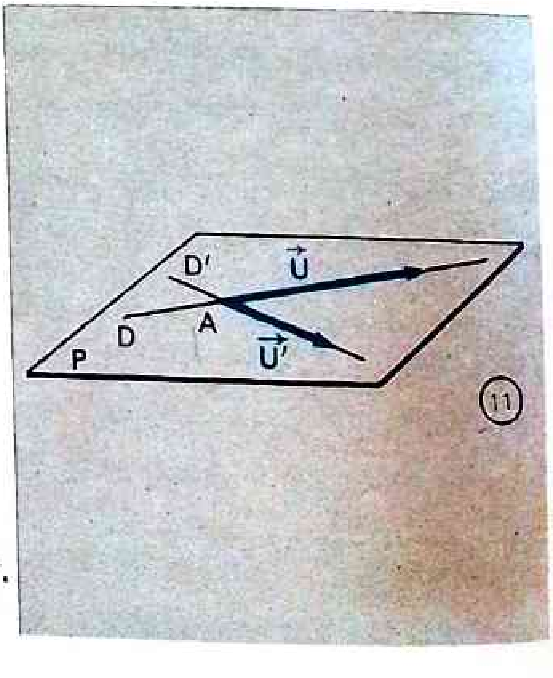
10

Droites coplanaires dans A_3.

46 **DÉFINITION : On dit que deux droites** D **et** D′ **sont coplanaires si et seulement s'il existe un plan** P **qui contient** D **et** D′**.**

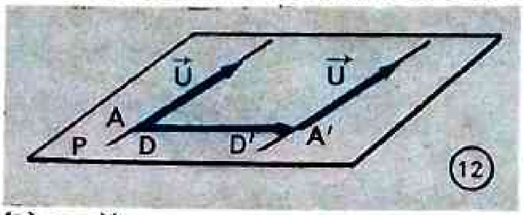
47 Il résulte de l'étude faite aux n^{os} 15 à 17, p. 23, que si deux droites D et D′ sont coplanaires, ces droites sont sécantes ou parallèles.
Réciproquement, montrons que si deux droites D et D′ sont sécantes, ou si elles sont parallèles, ces deux droites sont coplanaires.

48 Premier cas : D et D′ sont sécantes.
Dans ce cas, leur intersection est un singleton $\{A\}$ (fig. 11). Désignons par $\vec{U}$ un vecteur directeur de D et par $\vec{U'}$ un vecteur directeur de D′. Le système $(\vec{U}, \vec{U'})$ est un système libre. Il existe donc un plan P unique déterminé par le point A et le système libre $(\vec{U}, \vec{U'})$.
Soit $\vec{P}$ la direction de P, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $(\vec{U}, \vec{U'})$.
Nous avons : $A \in P$, $\vec{U} \in \vec{P}$, $\vec{U'} \in \vec{P}$.
Il en résulte les inclusions : $D \subset P$ et $D' \subset P$.
Les droites D et D′ sont donc coplanaires.



11

49 Deuxième cas : $D /\!/ D'$.
Dans ce cas, les droites D et D′ sont égales ou disjointes.
1. Supposons : $D = D'$.
Considérons un point A de D et un vecteur non nul $\vec{U}$ de la direction $\vec{D}$ commune à D et à D′.
Pour tout vecteur $\vec{V}$ qui n'appartient pas à $\vec{D}$, le plan déterminé par le point A et le système libre $(\vec{U}, \vec{V})$ contient la droite D et donc aussi la droite D′.



2. Supposons : $D \cap D' = \varnothing$.
Considérons un point A de D, un point A' de D' et un vecteur $\vec{U}$ non nul de la direction $\vec{D}$ commune à D et à D' (fig. 12).

Le point A' n'appartient pas à D ; le système $(\vec{U}, \overrightarrow{AA'})$ est donc un système libre.

Désignons par P le plan déterminé par le point A et le système libre $(\vec{U}, \overrightarrow{AA'})$.

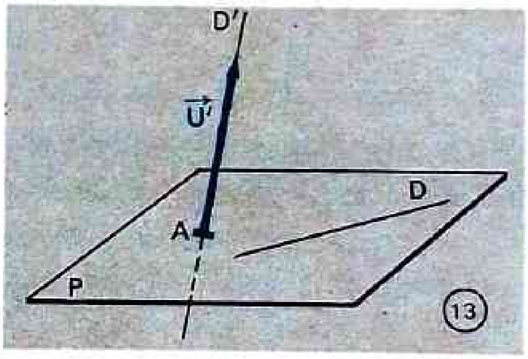
Soit $\vec{P}$ la direction de P, c'est-à-dire le plan vectoriel engendré par $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AA'}$.

Nous avons : $A \in P$ et $\vec{U} \in \vec{P}$; nous en déduisons : $D \subset P$.

D'autre part, nous avons : $A \in P$ et $\overrightarrow{AA'} \in \vec{P}$; il en résulte que le point A' appartient à P.

Nous avons alors : $A' \in P$ et $\vec{U} \in \vec{P}$; nous en déduisons $D' \subset P$.
Les droites D et D' sont donc coplanaires.

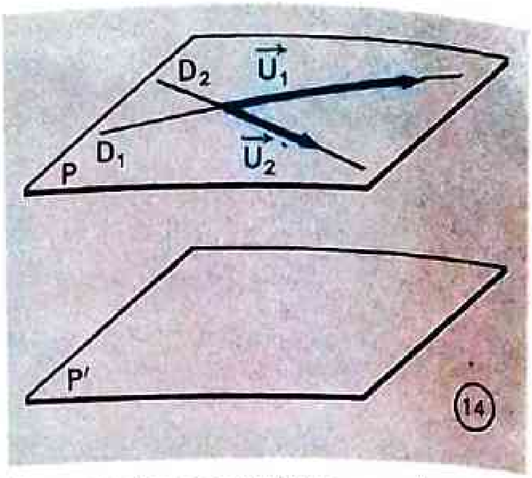
THÉORÈME : Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.



50 <u>Remarque</u> : Il existe dans A_3 des droites qui ne sont pas coplanaires.
Considérons en effet un plan P, de direction $\vec{P}$, une droite D, de direction $\vec{D}$, incluse dans P, et A un point de P qui n'appartient pas à D (fig. 13). Soit $\vec{U'}$ un vecteur non nul de E_3 qui n'appartient pas à $\vec{P}$ et soit D' la droite déterminée par A et $\vec{U'}$.
Nous avons : $\{A\} \subset P \cap D'$; d'autre part nous avons : $\vec{U'} \notin \vec{P}$; il en résulte que la droite D' et le plan P sont sécants et l'on a : $D' \cap P = \{A\}$.
D est incluse dans P ; $D' \cap D$ est donc inclus dans $D' \cap P$, c'est-à-dire dans $\{A\}$.
A n'appartient pas à D ; nous avons donc : $D \cap D' = \varnothing$.
Les droites D et D' ne sont pas sécantes.
$\vec{U'}$ n'appartient pas à $\vec{P}$; nous avons donc : $\vec{U'} \notin \vec{D}$.
Les droites D et D' ne sont pas parallèles.
Les droites D et D' ne sont donc pas coplanaires.

Propriété de deux plans affines parallèles.

51 **THÉORÈME : Un plan P est parallèle à un plan P' si et seulement s'il existe deux droites sécantes incluses dans P qui sont parallèles à P'.**



Soient P et P′ deux plans parallèles; les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont donc égaux :, $\vec{P} = \vec{P'}$.

Désignons par D_1 et par D_2 deux droites sécantes, incluses dans P, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ (fig. 14).

Les vecteurs non nuls $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ appartiennent à $\vec{P}$; ils appartiennent donc à $\vec{P'}$.

Il en résulte que les droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont incluses dans $\vec{P'}$. Les droites D_1 et D_2 sont donc parallèles au plan P′.

Réciproquement, soient P et P′ deux plans, de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$, tels qu'il existe deux droites D_1 et D_2 sécantes, incluses dans P et parallèles à P′.

Désignons par $\vec{U}_1$ un vecteur directeur de D_1 et par $\vec{U}_2$ un vecteur directeur de D_2.

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes; $(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ est donc un système libre.

Ces deux droites sont incluses dans P; $(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ est donc une base de $\vec{P}$.

La droite D_1 est parallèle à P′ ; sa direction $\vec{D}_1$ est donc incluse dans $\vec{P'}$; il en résulte : $\vec{U}_1 \in \vec{P'}$.

D'une façon analogue, nous avons : $\vec{U}_2 \in \vec{P'}$.

$(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ est donc aussi une base de $\vec{P'}$.

Les deux sous-espaces vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$, de dimension 2, de E_3 admettent $(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ pour base commune ; ils sont égaux : $\vec{P} = \vec{P'}$.

Les plans P et P′ sont donc parallèles.

Intersection de deux plans affines de A_3.

52 Considérons deux plans P et P′ de A_3, de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$. Nous nous proposons de déterminer l'ensemble $P \cap P'$.

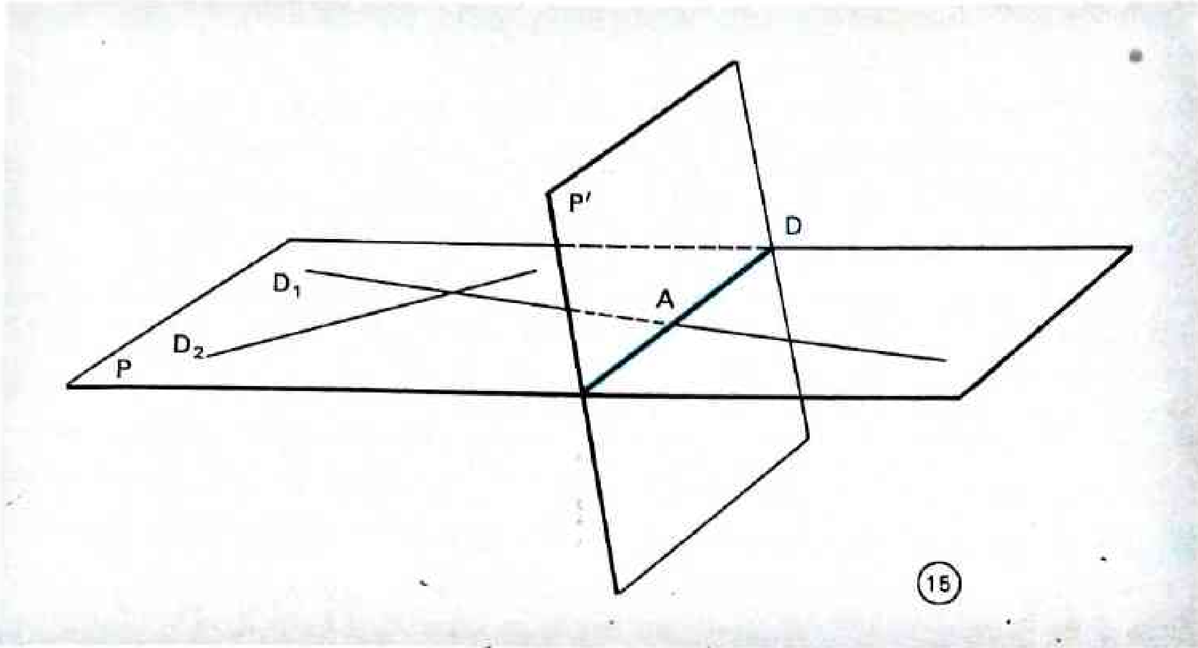
53 **Premier cas :** $\vec{P} = \vec{P'}$.

Dans ce cas, les plans P et P′ sont parallèles. Nous savons (n° 22, p. 12) que ces plans sont égaux ou disjoints ; nous avons donc :
$P \cap P' = P = P'$ ou $P \cap P' = \varnothing$.

54 **Deuxième cas :** $\vec{P} \neq \vec{P'}$.

Dans ce cas, les plans P et P′ ne sont pas parallèles ; montrons que leur intersection $P \cap P'$ est non vide.

Considérons, en effet, deux droites sécantes D_1 et D_2 incluses dans P.



Les plans P et P′ ne sont pas parallèles ; l'une au moins des droites D_1 et D_2, par exemple D_1, n'est donc pas parallèle à P′ (fig. 15).
La droite D_1 et le plan P′ sont donc sécants en un point A : $D_1 \cap P' = \{A\}$.
Le point A appartient à D_1 et à P′ ; il appartient donc à P et à P′. Il en résulte que $P \cap P'$ est non vide.
Il résulte du théorème n° 27, p. 13, que $P \cap P'$ est un sous-espace affine de direction $\vec{P} \cap \vec{P'}$.

Étudions cette intersection $\vec{P} \cap \vec{P'}$.

$\vec{P} \cap \vec{P'}$ est un sous-espace vectoriel de E_3 et il est distinct de $\vec{P}$ et de $\vec{P'}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

Nous allons montrer que $\vec{P} \cap \vec{P'}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Désignons en effet par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\vec{P}$, par $(\vec{i'}, \vec{j'})$ une base de $\vec{P'}$, par $\vec{u}$ la combinaison linéaire : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} - x'\vec{i'} - y'\vec{j'}$.

Nous avons : $(\vec{u} = \vec{0}) \iff (x\vec{i} + y\vec{j} - x'\vec{i'} - y'\vec{j'} = \vec{0})$,

c'est-à-dire : $(\vec{u} = \vec{0}) \iff (x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'})$.

$x\vec{i} + y\vec{j}$ appartient à P et $x'\vec{i'} + y'\vec{j'}$ appartient à $\vec{P'}$.

Supposons : $\vec{P} \cap \vec{P'} = \{\vec{0}\}$. Les deux vecteurs $x\vec{i} + y\vec{j}$ et $x'\vec{i'} + y'\vec{j'}$ sont alors égaux si et seulement s'ils sont tous les deux nuls.

$(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i'}, \vec{j'})$ sont des systèmes libres ; nous avons donc les implications :

$(x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}) \implies (x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0)$;

$(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = \vec{0}) \implies (x' = 0 \quad \text{et} \quad y' = 0)$.

Nous en déduisons l'implication :

$(x\vec{i} + y\vec{j} - x'\vec{i'} - y'\vec{j'} = \vec{0}) \implies (x = y = x' = y' = 0)$.

Nous avons donc l'implication :

$(\vec{P} \cap \vec{P'} = \{\vec{0}\}) \implies ((\vec{i}, \vec{j}, \vec{i'}, \vec{j'})$ est un système libre de $E_3)$.

59 Étudions le problème réciproque. Soit, dans un espace affine A_3, un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons quatre réels u, v, w, h et déterminons l'ensemble P_1 des points M de A_3 dont les coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vérifient l'égalité : $ux + vy + wz + h = 0$.

Nous avons les implications :

$(u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad h = 0) \Longrightarrow (P_1 = A_3)$;

$(u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad h \neq 0) \Longrightarrow (P_1 = \varnothing)$.

Dans la suite, nous supposons donc que l'un des trois réels u, v, w, par exemple w, est non nul : $w \neq 0$.

Si un point M, de coordonnées (x, y, z) appartient à P_1, nous avons :

$$\frac{u}{w}x + \frac{v}{w}y + z + \frac{h}{w} = 0.$$

Posons : $\lambda = \dfrac{x}{w}$ et $\mu = \dfrac{y}{w}$. Nous avons alors :

$$x = \lambda w, \quad y = \mu w, \quad z = -\lambda u - \mu v - \frac{h}{w}.$$

Nous avons donc l'implication :

$$(M \in P_1) \Longrightarrow \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad x = \lambda w, \quad y = \mu w, \quad z = -\lambda u - \mu v - \frac{h}{w}\right).$$

Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x, y, z). S'il existe deux réels λ et μ pour lesquels on a : $x = \lambda w, \quad y = \mu w, \quad z = -\lambda u - \mu v - \dfrac{h}{w}$, il en résulte l'égalité : $ux + vy + wz + h = 0$.

Le point M appartient donc à P_1.

En résumé, nous avons démontré l'équivalence logique :

$$(M \in P_1) \Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad x = \lambda w, \quad y = \mu w, \quad z + \frac{h}{w} = -\lambda u - \mu v\right) \quad (1)$$

Considérons le point A de coordonnées $\left(0, 0, -\dfrac{h}{w}\right)$; il appartient à P_1. Pour tout point M de A_3, nous avons l'égalité :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + \left(z + \frac{h}{w}\right)\vec{k}. \quad (2)$$

Considérons les deux vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ de E_3, de coordonnées respectives $(w, 0, -u)$ et $(0, w, -v)$. Ces deux vecteurs constituent un système $(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$ libre. En effet, pour tout réel ρ, le vecteur $\rho\vec{U}_2$ a une coordonnée nulle sur $\vec{i}$; il est donc distinct du vecteur $\vec{U}_1$.

Pour tout couple (λ, μ) de réels, nous avons l'égalité :

$$\lambda\vec{U}_1 + \mu\vec{U}_2 = \lambda w\vec{i} + \mu w\vec{j} + (-\lambda u - \mu v)\vec{k}. \quad (3)$$

De l'équivalence logique (1) et des égalités (2) et (3), nous déduisons :

$$(M \in P_1) \Longleftrightarrow \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{U}_1 + \mu\vec{U}_2\right). \quad (4)$$

Désignons par P le plan déterminé par le point A et le système libre $(\vec{U}_1, \vec{U}_2)$.

De l'équivalence logique (4), nous déduisons :

$(M \in P_1) \Longleftrightarrow (M \in P)$.

Nous avons donc l'égalité : $P_1 = P$.

THÉORÈME : Soient u, v, w, trois réels non tous nuls et h un réel. L'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z), dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, vérifient l'égalité : $ux + vy + wz + h = 0$ est un plan.

EXERCICES

Plan affine.

1 Soient P un plan affine et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P.
On considère les trois points A, B, C de P de coordonnées respectives $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 4)$.

1° Déterminer, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$.

2° Déterminer les coordonnées des points B et C dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées des points A et B dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ forment une base de $\vec{P}$. Déterminer les coordonnées du point C dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

2 Soient P un plan affine et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P.
On considère les deux points A et B de P de coordonnées respectives $(3, -1)$ et $(1, 2)$ et le vecteur $\vec{U}$ de coordonnées (u, v).

1° Déterminer les coordonnées des points A′ et B′ images respectives des points A et B par la translation affine de vecteur $\vec{U}$.

2° Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux.

3 Soient P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P, et A le point de coordonnées $(2, 5)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer le point O′ du plan P tel que les coordonnées du point A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soient $(1, 1)$. $\begin{cases} x_A^O = x_{O'}^O + x_A^{O'} \\ y_A^O = x_{O'}^O + y_A^{O'} \end{cases}$

C'est plutot O′

2° Soit B le point de P dont les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont $(2, -1)$.
Déterminer les coordonnées B dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

4 Soient P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P, A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) avec :
$x_A = -3, \quad y_A = -4, \quad x_B = 6, \quad y_B = 2.$

1° Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{U}$ de la droite D qui passe par les points A et B. Ex $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

2° Donner une représentation paramétrique de la droite D. $M \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

3° Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite D et de la droite de vecteur directeur $\vec{i}$ qui passe par O. $D(O, \vec{i})$ est paramétré par $\begin{cases} x = \gamma & \gamma \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$

4° Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite D et de la droite de vecteur directeur $\vec{j}$ qui passe par O. $D(O, \vec{j})$ — 〃 — $\begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \end{cases}$ $\mu \in \mathbb{R}$

EXERCICES

◆ Même exercice que le précédent dans les cas suivants (nº 5 à nº 8).

5 $x_A = -1$, $y_A = 1$; $x_B = 3$, $y_B = -1$.

6 $x_A = 4$, $y_A = -2$; $x_B = 1$, $y_B = 1$.

7 $x_A = 3$, $y_A = 1$; $x_B = -1$, $y_B = 5$.

8 $x_A = -5$, $y_A = -3$; $x_B = 5$, $y_B = 2$.

9 Soient P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P et D une droite de vecteur directeur $\vec{U}$; les coordonnées de $\vec{U}$ sont : $u = -1$, $v = 2$. Soient A le point de coordonnées : $x_A = -1$, $y_A = 6$ et D′ la droite parallèle à D qui passe par A. $D' = D(A, \vec{u})$

1° Déterminer les ordonnées des points de D′ dont les abscisses sont égales respectivement à : 1, 0, 4, 2.

2° Déterminer les abscisses des points de D′ dont les ordonnées sont égales respectivement à : 2, − 1, 3, − 2.

→ utiliser les équations cartésiennes ou paramétriques de D′

10 Soient P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P.
On désigne par A et B les points de coordonnées respectives (2, − 1) et (3, 1), par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les vecteurs de coordonnées respectives (− 1, 3) et (2, − 1).

1° Vérifier que la droite D de vecteur directeur $\vec{U}$ qui passe par A et la droite D′ de vecteur directeur $\vec{U}$ qui passe par B sont des droites sécantes.

2° Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

◆ Même exercice que le précédent dans les cas où les coordonnées des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont respectivement (nº 11 à nº 14) :

11 $\vec{U}(2, 1)$, $\vec{V}(3, 0)$.

12 $\vec{U}(4, 5)$, $\vec{V}(2, 2)$.

13 $\vec{U}(3, -2)$, $\vec{V}(2, -4)$

14 $\vec{U}(4, 1)$, $\vec{V}(6, 5)$.

15 Soient P un plan affine, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P, et m un réel non nul. On considère les droites D et D′ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{U}(m, 2m^2)$ et $\vec{V}(m^2, m^2 + m)$.
Déterminer les réels m pour lesquels les droites D et D′ sont parallèles.

résoudre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

16 Dans un plan affine P rapporté à un repère cartésien, on considère la droite D d'équation : $2x - 3y + 6 = 0$ et la droite D′ de vecteur directeur $\vec{U}(-2, 4)$ qui passe par le point A de coordonnées (4, 2).

1° Vérifier que les droites D et D′ sont sécantes. ie $\det(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0$

2° Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

17 Dans un plan affine P rapporté à un repère cartésien, on considère la droite D d'équation : $4x + 2y - 3 = 0$. Soient m un réel et D′ une droite de vecteur directeur $\vec{U}(2m^2 + 1, 6m)$.
Déterminer les réels m pour lesquels les droites D et D′ sont parallèles.

18 Dans un plan affine P rapporté à un repère cartésien, on considère un point A de coordonnées : $x_A = 5$, $y_A = -2$ et un vecteur $\vec{U}$ de coordonnées $u = -1$, $v = -2$. Donner une équation cartésienne de la droite D qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{U}$.

19 Dans un plan affine P, on considère deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives : $u_1x + v_1y + w_1 = 0$ et $u_2x + v_2y + w_2 = 0$.
Quelle condition nécessaire et suffisante les réels $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ doivent-ils vérifier pour que les droites D_1 et D_2 soient sécantes ? $\begin{vmatrix} -v_1 & -v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \neq 0$

20 Déterminer les réels m pour que les droites D et D′ d'équations respectives : $(m-2)\,x + 2\,my - 1 = 0$ et $8\,mx + (m-2)\,y + 5 = 0$ soient parallèles.

21 Même exercice que le précédent pour les droites d'équations :
$(2m-1)\,x + (m+4)\,y - 2m = 0$ et $m^2x + (m^2 + 2m)\,y + 1 = 0$.

22 Déterminer les réels m pour lesquels les droites d'équations respectives :
D_1 $(m-1)\,x + (m-2)\,y + m^2 - 3\,m + 1 = 0,$
D_2 $(m+1)\,x + (m+2)\,y + m^2 + m - 1 = 0,$
D_3 $5\,mx + (m^2-1)\,y + 3\,m = 0,$
sont sécantes en un même point.

mettre les conditions $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ et $D_2 \cap D_3 \neq \phi$ et prendre les paramètres commun

23 Même exercice que le précédent pour des droites d'équations respectives :
$(m-1)\,x + (m^2+1)\,y - 1 - m = 0,$
$x + (2\,m-1)\,y - 2 = 0,$
$(m-1)\,x + (m^2+m-2)\,y - (m-1)^2 = 0.$

24 **Théorème de Thalès :** Soient P un plan, D et D′ deux droites de P de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ et $\vec{\Delta}$ une droite vectorielle de $\vec{P}$ distincte de $\vec{D'}$. On appelle projection de direction $\vec{\Delta}$ de la droite D sur la droite D′ l'application de D dans D′, notée p, qui à chaque point M de D, associe le point d'intersection de la droite D′ et de la droite de direction $\vec{\Delta}$ qui passe par M.

1° Montrer que, si $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ sont deux droites vectorielles distinctes, p est une bijection de D sur D′. Que peut-on dire dans le cas où $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ sont égales ?

2° On suppose : $\vec{D} \neq \vec{\Delta}$. Soient deux points distincts A et B de D, A′ et B′ leurs images respectives par p, λ un réel et M le point de D défini par : $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Montrer qu'un point M′ de D′ vérifie l'égalité : $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\,\overrightarrow{A'B'}$ si et seulement si M′ est l'image de M par l'application p.

Espace affine A_3.

◆ Dans les exercices suivants (nᵒˢ 25 à 28) on considère un espace affine A_3 de dimension 3.

25 Montrer que, si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

$\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}'$, supp $D \cap \mathcal{L} \neq \phi$ ons $D \cap \mathcal{L} \neq \phi \Leftrightarrow \vec{\Delta} \cap \vec{\mathcal{P}} = \{\vec{0}\}$
$\Leftrightarrow \vec{\Delta} \cap \vec{\mathcal{P}'} = \{\vec{0}\}$
$\Leftrightarrow D \cap \mathcal{P}' \neq \phi$

EXERCICES

26 Montrer que, si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

27 Montrer que, si une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle aux droites d'intersection de ce plan avec tous les plans qui la contiennent.

28 On considère deux plans parallèles P_1 et P_2. Montrer que, si P est un plan qui coupe P_1, P coupe aussi P_2. Que peut-on dire alors des droites : $D_1 = P \cap P_1$ et $D_2 = P \cap P_2$? $D_1 // D_2$

29 On considère deux plans sécants P_1 et P_2 et on pose : $D_1 = P_1 \cap P_2$. Montrer que, par un point A, il passe une droite D parallèle à P_1 et parallèle à P_2. Que peut-on dire des droites D et D_1 ? $D // D_1$ cf Exercice

30 Soient deux droites D_1 et D_2 telles qu'il existe deux droites parallèles D_1' et D_2' qui les coupent simultanément. Que peut-on dire des droites D_1 et D_2 ? D_1 et D_2 coplanaire

31 Soient D_1 et D_2 deux droites non coplanaires. Construire une droite D qui coupe D_1 et qui coupe D_2.

32 Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles.
1° Montrer que les droites D qui sont parallèles à D_2 et qui coupent D_1 sont incluses dans un plan dont on donnera la direction.
2° Soit D_3 une droite non parallèle à D_1. Montrer qu'il existe une droite unique D qui coupe D_1, qui coupe D_3 et qui est parallèle à D_2.

33 Montrer que, si trois droites sont deux à deux sécantes, alors elles sont sécantes ou coplanaires.

34 On considère trois points non alignés A, B et C.
1° Montrer qu'il existe un plan P tel que les droites D_1, D_2 et D_3 déterminées respectivement par les points A et B, par les points B et C, par les points C et A coupent P.
2° On pose : $\{A_1'\} = D_1 \cap P$, $\{A_2'\} = D_2 \cap P$, $A_3' = D_3 \cap P$. Que peut-on dire des points A_1', A_2' et A_3' ? Aligné

◆ Dans les exercices suivants (nos 35 à 51) on considère un espace affine A_3 de dimension 3 associé à un espace vectoriel E_3, une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3 et un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de A_3.

35 Donner une représentation paramétrique de la droite D déterminée par les points A et B de coordonnées respectives :
$x_A = 1,\ y_A = -2,\ z_A = 5$ et $x_B = -1,\ y_B = 0,\ z_B = 2.$

36 Même exercice que le précédent dans le cas où les points A et B ont pour coordonnées respectives :
$x_A = 0,\ y_A = -3,\ z_A = -1$ et $x_B = 3,\ y_B = 5,\ z_B = 1.$

37 Soient A, B, C trois points de coordonnées respectives :
$x_A = 0$, $y_A = 2$, $z_A = 1$; $x_B = -1$, $y_B = 1$, $z_B = 2$;
$x_C = 1$, $y_C = 3$, $z_C = 0$.
1° Vérifier que les points A, B et C sont alignés.
2° Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite D qu'ils déterminent.
3° Déterminer les coordonnées du point M de D d'abscisse : $x_M = 2$.

38 Soient D et D′ deux droites déterminées respectivement par le point A (3, 1, 1) et le point B (−1, −1, 3), le point A′ (0, 1, 1) et le point B′ (−2, 3, −1).
1° Vérifier que D et D′ sont deux droites sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2° Donner une représentation paramétrique du plan P déterminé par ces deux droites.

39 On considère un plan P dont une représentation paramétrique est : $x = 1 - 2\lambda + 3\mu$, $y = -1 + 2\lambda - \mu$, $z = \lambda + \mu$ et une droite D dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{U}(-1, 3, 3)$. Vérifier que D est une droite parallèle au plan P. $\Leftrightarrow \vec{D} \subseteq \vec{P}$ chercher $\alpha, \beta \,/\, \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ dirige $\vec{P}$

40 Soient trois points A, B, C de coordonnées respectives :
(1, 1, −1), (0, 0, 4), (4, 2, −6).
1° Vérifier que ces trois points déterminent un plan P. Donner une représentation paramétrique de P.
2° Donner une représentation paramétrique du plan P′ parallèle à P et qui passe par le point M (1, 0, 2).

41 Soit P le plan défini par le point A (0, 1, 0) et les vecteurs $\vec{U}(2, 1, -1)$ et $\vec{V}(-1, 1, 1)$.
1° Donner une représentation paramétrique de P.
2° On considère la droite D de vecteur directeur $\vec{U'}(3, -2, -1)$ qui passe par le point B (2, 0, 0).
Vérifier que P et D sont sécants. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

42 Soient D et D′ deux droites dont les représentations paramétriques sont respectivement : NB : $D \cap D' = \emptyset$
$x = \lambda$, $y = 1 - 2\lambda$, $z = 2 - \lambda$ et
$x = 3 - \lambda'$, $y = 1 + 5\lambda'$, $z = 2 - 4\lambda'$.
1° Donner une représentation paramétrique du plan P qui contient D et qui est parallèle à D′.
2° Donner une représentation paramétrique du plan P′ qui contient D′ et qui est parallèle à D.

43 Soit P le plan défini par un point A (2, −1, 3) et une droite D dont une représentation paramétrique est :
$x = -1 + 3\lambda$, $y = 2\lambda$, $z = 3 + \lambda$.
Donner une représentation paramétrique du plan P.

EXERCICES

44 Soit m un réel. On considère la droite D de représentation paramétrique : $x = -1 + 2\lambda$, $y = 1 - 2\lambda$, $z = 2 + \lambda$ et la droite D′ de représentation paramétrique : $x = 2 - m\lambda'$, $y = -1 + 2m\lambda'$, $z = 5 + \lambda'$. Déterminer m pour que D et D′ soient coplanaires. Déterminer alors les coordonnées de leur point d'intersection.

45 Soit P le plan déterminé par le point A(− 3, 2, 5), le vecteur $\vec{U}(1, -1, 1)$ et le vecteur $\vec{V}(-2, 1, 0)$ et soit P′ le plan déterminé par le point A′(1, 2, − 1), le vecteur $\vec{U'}(0, -1, 1)$ et le vecteur $\vec{V'}(1, 0, 4)$.
1° Vérifier que P et P′ sont des plans sécants. NB! utiliser représentation paramétrique
2° Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

46 Soit D la droite déterminée par le point A(1, 2, − 2) et par le point B(− 1, 1, 1) et soit P le plan d'équation : $2x + 3y - z = 0$.
Vérifier que P et D sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

47 On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :
$u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0$ et $u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0$.
Quelle condition nécessaire et suffisante les réels u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 doivent-ils vérifier pour que les plans P_1 et P_2 soient parallèles ?

48 Soient P_1 le plan d'équation : $2x - 3y + 2z = 0$ et P_2 le plan d'équation : $-4x + 6y - 4z + 1 = 0$.
1° Que peut-on dire des plans P_1 et P_2 ? $P_1 \parallel P_2$
2° Donner une équation cartésienne du plan P qui est parallèle à P_1 et qui passe par le point A(2, − 5, 1).

49 Soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives :
$x - 2y + 3z - 1 = 0$ et $x - 2y + z + 3 = 0$.
1° Vérifier que ces plans sont sécants.
2° Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de leur droite d'intersection.
3° Donner une représentation paramétrique de la droite D qui est parallèle à P_1 et à P_2 et qui passe par le point A (2, − 3, 1).
NB: D est dirigé par le vecteur de la question 2)

50 On considère trois plans P, P_1, P_2 d'équations respectives :
$x - 3y + 5z - 2 = 0$, $2x + 3y - z - 4 = 0$, $x + z + 2 = 0$
et on désigne par D_1 l'intersection de P et P_1, par D_2 l'intersection de P et P_2.
1° Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de D_1 et les coordonnées d'un vecteur directeur de D_2.
2° Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2 ?

51 Soient P et P′ deux plans d'équations respectives :
$2x - y + 3z + 1 = 0$ et $2x + y - z + 2 = 0$.
On désigne par D la droite d'intersection de P et P′ et par P_m le plan d'équation : $(2x - y + 3z + 1) + m(2x + y - z + 2) = 0$.
1° Montrer que, pour tout réel m, la droite D est incluse dans le plan P_m.
2° Déterminer une équation du plan déterminé par la droite D et le point A (1, − 5, − 6).

$D \subseteq P_m \Leftrightarrow \vec{D} \subseteq \vec{P_m}$; $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$
$\vec{D} = \langle\vec{u}\rangle$, $\vec{P_m} = \langle\vec{i}, \vec{j}\rangle$

OLYMPE

24.
Espaces vectoriels euclidiens

Produit scalaire.

Rappel des propriétés du produit scalaire et de la norme.

1 Nous avons étudié, en classe de Seconde, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'un plan vectoriel $\vec{P}$, et la norme d'un vecteur de ce plan vectoriel.

Le produit scalaire, noté $\vec{U}.\vec{V}$, possède les propriétés suivantes :

1. Pour tout triplet $(\vec{U}, \vec{U'}, \vec{V})$ de vecteurs du plan vectoriel $\vec{P}$, on a : $(\vec{U} + \vec{U'}).\vec{V} = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U'}.\vec{V}$.
2. Pour tout couple $(\vec{U}, \vec{V})$ de vecteurs du plan vectoriel $\vec{P}$, et pour tout réel k, on a : $(k\vec{U}).\vec{V} = k(\vec{U}.\vec{V})$.
3. Pour tout couple $(\vec{U}, \vec{V})$ de vecteurs du plan vectoriel $\vec{P}$, on a : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$.

La norme, notée $\|\vec{U}\|$, possède les propriétés suivantes :

4. Pour tout vecteur $\vec{U}$ du plan vectoriel $\vec{P}$, on a l'inégalité : $\vec{U}.\vec{U} \geqslant 0$, et l'équivalence logique : $(\|\vec{U}\| = 0) \Longleftrightarrow (\vec{U} = \vec{0})$.
5. Pour tout couple $(\vec{U}, \vec{V})$ de vecteurs du plan vectoriel $\vec{P}$, on a les inégalités : $|\vec{U}.\vec{V}| \leqslant \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$, et : $\|\vec{U} + \vec{V}\| \leqslant \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$.

Ces deux inégalités sont appelées respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire.

2 Considérons l'application f définie par :

$f : \vec{P} \times \vec{P} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{U}.\vec{V}$.

Il résulte de ce qui précède que l'application f possède les propriétés suivantes :

1. $\forall(\vec{U}, \vec{U'}, \vec{V}) \in \vec{P}^3, \quad f(\vec{U} + \vec{U'}, \vec{V}) = f(\vec{U}, \vec{V}) + f(\vec{U'}, \vec{V})$; $\Big\}$ linéarité
2. $\forall(\vec{U}, \vec{V}) \in \vec{P}^2, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad f(k\vec{U}, \vec{V}) = kf(\vec{U}, \vec{V})$;
3. $\forall(\vec{U}, \vec{V}) \in \vec{P}^2, \quad f(\vec{U}, \vec{V}) = f(\vec{V}, \vec{U})$; symétrie
4. $\forall(\vec{U} \in \vec{P}), \quad f(\vec{U}, \vec{U}) \geqslant 0$ et $(f(\vec{U}, \vec{U}) = 0) \Longleftrightarrow (\vec{U} = \vec{0})$; définie positive
5. $\forall(\vec{U}, \vec{V}) \in \vec{P}^2 \quad (f(\vec{U}, \vec{V}))^2 \leqslant f(\vec{U}, \vec{U})\, f(\vec{V}, \vec{V})$.

Nous nous proposons, dans les paragraphes suivants, de construire, pour un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, des applications f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, appelées produit scalaire sur E, qui possèdent les mêmes propriétés que l'application f.

Forme bilinéaire symétrique.

3 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique sur E si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :**

(1) $\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad f(x, y) = f(y, x)$

(2) $\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad \forall y \in E, \qquad f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$

(3) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad f(kx, y) = kf(x, y)$.

4 Exemples : 1. Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E_2. Désignons respectivement par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) les coordonnées dans la base (e_1, e_2) de deux vecteurs x et y de E_2.
L'application f_0 de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$(x, y) \rightsquigarrow f_0(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ est une forme bilinéaire symétrique sur E_2.
En effet, si x' est un vecteur de E_2 de coordonnées (α'_1, α'_2) dans la base (e_1, e_2) et si k est un réel, nous avons :

(1) $f_0(y, x) = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$
c'est-à-dire : $f_0(y, x) = f_0(x, y)$.

(2) $f_0(x + x', y) = (\alpha_1 + \alpha'_1)\beta_1 + (\alpha_2 + \alpha'_2)\beta_2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha'_1\beta_1 + \alpha'_2\beta_2)$,
c'est-à-dire : $f_0(x + x', y) = f_0(x, y) + f_0(x', y)$.

(3) $f_0(kx, y) = (k\alpha_1)\beta_1 + (k\alpha_2)\beta_2 = k(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$
c'est-à-dire : $f_0(kx, y) = kf_0(x, y)$.

2. Reprenons les notations de l'exemple précédent. Soit f_1 l'application définie par :
$f_1 : E_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow f_1(x, y) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$.
On vérifie, comme à l'exemple 1, que f_1 est une forme bilinéaire symétrique sur E_2.
De même l'application f_2 définie par :
$f_2 : E_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow f_2(x, y) = \alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \alpha_2\beta_2$ est une forme bilinéaire symétrique sur E_2.

Propriétés d'une forme bilinéaire symétrique.

5 Considérons une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.
Pour tout vecteur y_0 de E, définissons une application φ_{y_0} de E dans $\mathbb{R}$ par :
$\varphi_{y_0} : E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \rightsquigarrow \varphi_{y_0}(x) = f(x, y_0)$.
Des propriétés (2) et (3) de la définition d'une forme bilinéaire symétrique sur E, il résulte les propriétés :
$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \qquad \varphi_{y_0}(x + x') = \varphi_{y_0}(x) + \varphi_{y_0}(x')$;
$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \qquad \varphi_{y_0}(kx) = k\varphi_{y_0}(x)$.
Pour tout vecteur y_0 de E, l'application φ_{y_0} est donc une forme linéaire sur E.
De même, pour tout vecteur x_0 de E, nous définissons une application ψ_{x_0} de E dans $\mathbb{R}$ par :
$\psi_{x_0} : E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y \rightsquigarrow \psi_{x_0}(y) = f(x_0, y)$.

De la propriété (1) de définition d'une forme bilinéaire symétrique, il résulte que, pour tout vecteur y de E, nous avons : $\psi_{x_0}(y) = f(x_0, y) = f(y, x_0)$.
Nous en déduisons : $\forall y \in \mathrm{E}, \quad \psi_{x_0}(y) = \varphi_{x_0}(y)$.
Les applications ψ_{x_0} et φ_{x_0} sont donc égales. Pour tout vecteur x_0 de E, l'application ψ_{x_0} est donc une forme linéaire sur E.

THÉORÈME : Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Pour tout vecteur x_0 de E et pour tout vecteur y_0 de E, les applications de E dans $\mathbb{R}$ respectivement définies par :
$y \leadsto f(x_0, y)$ et $x \leadsto f(x, y_0)$ sont des formes linéaires sur E.

Du théorème précédent, nous déduisons les propriétés :
(4) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \forall y \in \mathrm{E}, \quad \forall y' \in \mathrm{E}, \quad f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$.
(5) $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad \forall y \in \mathrm{E}, \quad f(x, ky) = kf(x, y)$.

6 Remarques : 1. La propriété (1) de la définition de f traduit la symétrie de f. Les propriétés (2), (3), (4), (5) traduisent la bilinéarité de f.
2. Pour tout vecteur x de E, l'application φ_x est une forme linéaire ; nous avons donc : $\varphi_x(0_\mathrm{E}) = 0$, c'est-à-dire : $f(x, 0_\mathrm{E}) = 0$.
Utilisons la propriété (1) ; nous obtenons : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x, 0_\mathrm{E}) = f(0_\mathrm{E}, x) = 0$.
3. Utilisons les propriétés (2), (3), (4) et (5) ; nous obtenons :
$\forall x \in \mathrm{E}, \ \forall x' \in \mathrm{E}, \ \forall y \in \mathrm{E}, \ \forall y' \in \mathrm{E}, \ \forall k \in \mathbb{R}, \ \forall k' \in \mathbb{R}, \ \forall h \in \mathbb{R}, \ \forall h' \in \mathbb{R}$:
$f(kx + k'x', hy + h'y') = khf(x, y) + kh'f(x, y') + k'hf(x', y) + k'h'f(x', y')$.

Produit scalaire sur un espace vectoriel.

7 **DÉFINITION : On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ toute forme bilinéaire symétrique f sur E qui vérifie la propriété :**
(6) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad (x \neq 0_\mathrm{E}) \implies (f(x, x) > 0)$.

8 Exemples : 1. Considérons la forme bilinéaire symétrique f_0 sur E_2, définie à l'exemple 1 du n° 4, p. 46.
Pour tout vecteur x de E_2, de coordonnées (α_1, α_2) dans la base (e_1, e_2), nous avons : $f_0(x, x) = (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2$.
La somme $(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2$ est un réel positif ou nul et elle est nulle si et seulement si α_1 et α_2 sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si x est le vecteur nul 0_{E_2}.
Nous avons donc la propriété : $\forall x \in \mathrm{E}_2, \quad (x \neq 0_{\mathrm{E}_2}) \implies (f_0(x, x) > 0)$.
f_0 est donc un produit scalaire sur E_2.

2. Considérons la forme bilinéaire symétrique f_1 sur E_2 définie à l'exemple 2 du n° 4, p. 46.
Pour tout vecteur x de E_2, de coordonnées (α_1, α_2) dans la base (e_1, e_2) nous avons : $f_1(x, x) = (\alpha_1)^2 - (\alpha_2)^2$.
Considérons, par exemple, le vecteur : $x_1 = e_1 + e_2$.
Nous avons : $f_1(x_1, x_1) = 1 - 1 = 0$.
f_1 n'est donc pas un produit scalaire sur E_2.

3. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ et l'application :
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \leadsto xy$.
Il résulte des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ que f est une **forme bilinéaire symétrique**.
D'autre part, nous avons : $f(x, x) = x^2$.
Nous en déduisons que, pour tout vecteur x non nul, le réel $f(x, x)$ est strictement positif : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x, x) > 0$.
f est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

9 Remarque : Il résulte de la définition d'un produit scalaire qu'une forme bilinéaire symétrique f sur E est un produit scalaire si et seulement si :
1. $\forall x \in E, \quad f(x, x) \geqslant 0$.
2. $\big(f(x, x) = 0\big) \Longleftrightarrow (x = 0_E)$.

Espace vectoriel euclidien.

10 **DÉFINITION : On appelle espace vectoriel euclidien un espace vectoriel** E **muni d'un produit scalaire** f **sur** E.

Cet espace vectoriel euclidien est noté (E, f).

Exemple : Nous avons montré (n° 4, p. 46) que la forme bilinéaire symétrique f_0 sur l'espace vectoriel E_2 est un produit scalaire sur E_2 ; (E_2, f_0) est donc un espace vectoriel euclidien.

Produit scalaire de deux vecteurs.

11 Considérons un espace vectoriel euclidien (E, f).
Si x et y sont deux vecteurs de E, on appelle **produit scalaire des vecteurs** x **et** y le réel : $f(x, y)$.
Si les vecteurs x et y sont égaux, le produit scalaire $f(x, x)$ est appelé **carré scalaire du vecteur** x.

Nouvelles notations.

12 Dans la suite de ce livre, nous allons étudier les propriétés d'un espace vectoriel E muni d'**un produit scalaire** f **fixé**.
Afin de simplifier les notations, nous convenons :
1. L'espace vectoriel euclidien (E, f) est noté simplement E.
2. Le produit scalaire $f(x, y)$ de deux vecteurs de E est noté : $x.y$.
En particulier le carré scalaire de x, $f(x, x)$, est noté : $x.x$ ou encore : x^2.

Écrivons, avec ces notations, les propriétés du produit scalaire :

(1)	$\forall x \in E,$	$\forall y \in E,$		$x.y = y.x.$
(2)	$\forall x \in E,$	$\forall x' \in E,$	$\forall y \in E,$	$(x + x').y = x.x' + y.y'.$
(3)	$\forall k \in \mathbb{R},$	$\forall x \in E,$	$\forall y \in E,$	$(kx).y = k(x.y).$
(4)	$\forall x \in E,$	$\forall y \in E,$	$\forall y' \in E,$	$x.(y + y') = x.y + x.y'.$
(5)	$\forall k \in E,$	$\forall x \in E,$	$\forall y \in E,$	$x.(ky) = k(x.y).$
(6)	$\forall x \in E,$	$(x \neq 0_E) \Longrightarrow (x.x > 0).$		
(7)	$\forall x \in E,$	$(x.x = 0) \Longleftrightarrow (x = 0_E).$		

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

13 **THÉORÈME : Pour tout couple** (x, y) **de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien, on a l'inégalité :** $(x.y)^2 \leqslant (x.x)\,(y.y)$.
L'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x **et** y **sont linéairement dépendants.**

Considérons deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien E.
Distinguons les deux cas suivants :

14 Premier cas : x et y sont linéairement indépendants.
Dans ce cas, pour tout réel α, le vecteur $\alpha x + y$ n'est pas le vecteur nul 0_E.
Nous avons donc :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha x + y).(\alpha x + y) > 0,$
c'est-à-dire :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2\, x.x + 2\alpha x.y + y.y > 0.$
Nous en déduisons que l'équation : $\alpha^2 x.x + 2\alpha x.y + y.y = 0$, où l'inconnue est α, n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.
Les vecteurs x et y sont linéairement indépendants; nous avons donc : $x.x > 0$.
L'équation : $\alpha^2\, x.x + 2\alpha\, x.y + y.y = 0$ est donc une équation du second degré qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.
Son discriminant : $(x.y)^2 - (x.x)\,(y.y)$ est donc négatif.
Nous en déduisons : $(x.y)^2 < (x.x)\,(y.y)$.

15 Deuxième cas : x et y sont linéairement dépendants.
Dans ce cas, l'un des vecteurs x et y est une combinaison linéaire de l'autre. Supposons, par exemple, qu'il existe un réel β pour lequel on a : $y = \beta x$.
Nous avons alors : $x.y = x.(\beta x) = \beta(x.x)$.
Nous en déduisons : $(x.y)^2 = \beta^2 (x.x)^2$.
D'autre part, nous avons les égalités :
$\beta^2 (x.x)^2 = (x.x)\,[\beta^2 (x.x)] = (x.x)\,[(\beta x).(\beta x)] = (x.x)\,(y.y).$
Nous en déduisons l'égalité : $(x.y)^2 = (x.x)\,(y.y)$.

16 En résumé, quels que soient les vecteurs x et y de E, on a l'inégalité :
$(x.y)^2 \leqslant (x.x)(y.y)$.
Cette inégalité est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz.**
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

Orthogonalité.

Vecteurs orthogonaux.

17 DÉFINITION : Soient x et y deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E. On dit que x est orthogonal à y si et seulement si le produit scalaire $x.y$ est nul.

Si x est orthogonal à y, nous notons : $x \perp y$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(x \perp y) \Longleftrightarrow (x.y = 0)$.
Si x est orthogonal à y, nous avons : $x.y = 0$; de la propriété de symétrie du produit scalaire, nous déduisons : $y.x = 0$. Le vecteur y est donc orthogonal à x.
Nous dirons désormais que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

18 Exemples : 1. Dans un espace vectoriel euclidien, le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout vecteur x de E. Nous avons en effet : $\forall x \in E, \quad 0_E.x = 0$.
2. Nous avons montré (nº 10, p. 48) que l'espace vectoriel E_2 muni du produit scalaire f_0 est un espace euclidien. Calculons le produit scalaire des vecteurs e_1 et e_2.
$e_1.e_2 = f_0(e_1, e_2) = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$.
Dans cet espace euclidien, les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux.
3. Si deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien sont orthogonaux, alors, quels que soient les réels α et β, les vecteurs αx et βy sont orthogonaux.
En effet, si l'on a : $x.y = 0$, on a alors : $\alpha\beta(x.y) = 0$,
c'est-à-dire : $(\alpha x).(\beta y) = 0$.

Système orthogonal.

19 DÉFINITION : On dit qu'un système de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien est un système orthogonal si et seulement si les vecteurs de ce système sont non nuls et deux à deux orthogonaux.

Exemple : Dans l'espace vectoriel E_2 muni du produit scalaire f_0, les vecteurs e_1 et e_2 constituent un système (e_1, e_2) orthogonal.

20 **THÉORÈME : Dans un espace vectoriel euclidien, tout système orthogonal est un système libre.**

Supposons que, dans un espace vectoriel euclidien E, il existe un système orthogonal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Par définition, nous avons :
(1) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x_i \neq 0_E,$ c'est-à-dire : $x_i.x_i \neq 0$.
(2) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad (i \neq j) \Longrightarrow (x_i.x_j = 0)$.
Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ un n-uplet de $\mathbb{R}^n$, et soit x la combinaison linéaire :
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.
Pour tout entier i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, nous avons :
$x.x_i = \alpha_1 (x_1.x_i) + \alpha_2 (x_2.x_i) + \ldots + \alpha_n (x_n.x_i)$, c'est-à-dire :
$x.x_i = \alpha_i (x_i.x_i)$.
Nous en déduisons les implications :
$(x = 0_E) \Longrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x.x_i = 0)$.
$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad x.x_i = 0) \Longrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \alpha_i = 0)$.
Nous en concluons :
$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_E) \Longrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \alpha_i = 0)$.
Le système $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est donc un système libre.

21 En particulier, si l'espace vectoriel euclidien E est de dimension finie n, tout système orthogonal de n vecteurs de E est un système libre de n vecteurs de E ; c'est donc une base de E (n° 17, p. 224, tome I).

THÉORÈME ET DÉFINITION : Si un espace vectoriel euclidien E de dimension n admet un système orthogonal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n vecteurs, ce système est une base de E.
On dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthogonale de E.

22 Remarque : Le théorème précédent ne prouve pas l'**existence** de bases orthogonales dans un espace vectoriel euclidien de dimension n. Nous démontrerons aux nos 1, 7, 19 du chapitre 25, l'existence de bases orthogonales dans les espaces vectoriels euclidiens de dimension 1, 2 ou 3.

Norme d'un vecteur.

23 **DÉFINITION : On appelle norme d'un vecteur x d'un espace vectoriel euclidien, le réel positif ou nul : $\sqrt{x.x}$.**

La norme d'un vecteur x est notée : $\| x \|$.
Nous avons donc l'égalité : $\| x \| = \sqrt{x.x}$.

Propriétés de la norme.

Vecteur de norme nulle.

24 **THÉORÈME : La norme d'un vecteur est nulle si et seulement si ce vecteur est le vecteur nul.**

En effet, pour tout vecteur x de E, nous avons l'équivalence logique :
$(x = 0_E) \iff (x.x = 0)$.
D'autre part, nous avons : $(x.x = 0) \iff (\sqrt{x.x} = 0)$.
c'est-à-dire : $(x.x = 0) \iff (\| x \| = 0)$.
Nous en déduisons : $(x = 0_E) \iff (\| x \| = 0)$.

Norme du produit d'un vecteur par un réel.

25 **THÉORÈME : Pour tout réel k et pour tout vecteur x de E, la norme du vecteur kx est égale au produit de la norme de x par la valeur absolue de k.**

Considérons, en effet, un réel k et un vecteur x de E. Nous avons :
$\| kx \| = \sqrt{(kx).(kx)} = \sqrt{k^2(x.x)} = \sqrt{k^2}\, \| x \| = | k |\, \| x \|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

26 Pour tout vecteur x et pour tout vecteur y de E, nous avons démontré l'inégalité (n° 13, p. 49) : $(x.y)^2 \leqslant (x.x)(y.y)$, c'est-à-dire : $(x.y)^2 \leqslant \| x \|^2 \| y \|^2$.
Nous en déduisons : $| x.y | \leqslant \| x \| \| y \|$.

Nous avons donc : $\boxed{\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad - \| x \| \| y \| \leqslant x.y \leqslant \| x \| \| y \|}$

Théorème de Pythagore.

27 Considérons deux vecteurs x et y de E. Nous avons l'égalité :
$(x + y).(x + y) = x.x + 2x.y + y.y$, c'est-à-dire :
$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2x.y$.
Nous en déduisons le théorème :

THÉORÈME : Deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel euclidien E sont orthogonaux si et seulement si on a : $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$.

Inégalités triangulaires.

28 Pour deux vecteurs x et y de E, nous avons l'égalité :
$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2x.y + \| y \|^2$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous déduisons :
$-2\|x\|\,\|y\| \leqslant 2\,x.y \leqslant 2\|x\|\,\|y\|$.
Il en résulte alors les inégalités :
$\|x\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leqslant \|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$
c'est-à-dire :
$(\|x\| - \|y\|)^2 \leqslant \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$.
Il en résulte les inégalités suivantes, appelées inégalités triangulaires :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$$

Vecteur unitaire.

29 **DÉFINITION : On dit qu'un vecteur d'un espace vectoriel euclidien E est unitaire si et seulement si sa norme est égale à 1.**

Exemple : Considérons un vecteur x non nul de E. Nous avons alors : $\|x\| \neq 0$.
La norme du vecteur : $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ est : $\|y\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$.
Le vecteur y est donc unitaire.

Base orthonormée.

30 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est orthonomée si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base orthogonale dont les vecteurs sont unitaires.**

Exemple : Dans l'espace vectoriel E_2 muni du produit scalaire f_0 (n° 4, p. 00) la base (e_1, e_2) est orthonormée.
Nous avons en effet :
$\|e_1\| = \sqrt{f_0(e_1, e_1)} = 1, \quad \|e_2\| = \sqrt{f_0(e_2, e_2)} = 1, \quad e_1.e_2 = f_0(e_1, e_2) = 0.$

31 Remarque : Nous démontrerons, aux n^os^ 2, 8 et 20 du chapitre 25, l'existence de bases orthonormées dans un espace vectoriel euclidien de dimensions 1, 2, ou 3.

EXERCICES

1 Soient E_1 un espace vectoriel de dimension 1 et φ une forme linéaire sur E_1.
On considère l'application f :
$E_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow f(x, y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$
1° Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2° Montrer qu'il existe des formes linéaires φ pour lesquelles l'application f associée est un produit scalaire sur E_1. Caractériser ces applications φ.

2 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et φ une forme linéaire sur E.
On considère l'application f :
$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow f(x, y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$
1° Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2° Montrer que, pour tout φ, l'application f associée n'est pas un produit scalaire sur E si E est un espace vectoriel de dimension différente de 1.

3 Soient E_2 un espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E_2, x et y deux vecteurs de E_2 de coordonnées respectives (α_1, α_2) et (β_1, β_2) dans la base (e_1, e_2). On considère l'application f :
$E_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow 4\alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \alpha_2\beta_2.$
L'application f est-elle un produit scalaire sur E_2 ?

◆ Même exercice que le précédent pour les applications f définies par (nos 4 à 7) :

4 $(x, y) \rightsquigarrow 4\alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \alpha_2\beta_2.$

5 $(x, y) \rightsquigarrow 2\alpha_1\beta_1 + 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 8\alpha_2\beta_2.$

6 $(x, y) \rightsquigarrow \alpha_1\beta_1 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2\alpha_2\beta_2.$

7 $(x, y) \rightsquigarrow -3\alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \alpha_2\beta_2.$

8 Soient E_2 un espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E_2, x et y deux vecteurs de E_2 de coordonnées respectives (α_1, α_2) et (β_1, β_2) dans la base (e_1, e_2) et trois réels A, B et C.
On considère l'application g :
$E_2 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow A\alpha_1\beta_1 + B(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + C\alpha_2\beta_2.$
Montrer que g est un produit scalaire sur E_2 si et seulement si :
$AC - B^2 > 0$ et $A > 0$.

9 Soient E_2 un espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E_2, x et y deux vecteurs de E_2 de coordonnées respectives (α_1, α_2) et (β_1, β_2) dans la base (e_1, e_2).
On définit une application f de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ par :
$(x, y) \rightsquigarrow 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$
1° Vérifier que f est un produit scalaire sur E_2.
2° On considère l'espace vectoriel euclidien (E_2, f). Montrer que les vecteurs de coordonnées respectives $(1, -2)$ et $(1, 1)$ dans la base (e_1, e_2) sont orthogonaux.
3° Déterminer les normes des vecteurs e_1 et e_2. Donner les coordonnées d'un vecteur x tel que (e_1, x) soit une base orthogonale de E_2.

10 Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien.
1° Montrer que, si $\vec{U}$ est orthogonal à $\vec{V} - \vec{W}$ et si $\vec{V}$ est orthogonal à $\vec{W} - \vec{U}$, $\vec{W}$ est orthogonal à $\vec{U} - \vec{V}$.
2° Soit $\vec{Z}$ le vecteur défini par : $\vec{Z} = (\vec{U}.\vec{W})\,\vec{V} - (\vec{U}.\vec{V})\,\vec{W}$.
Démontrer que $\vec{Z}$ et $\vec{U}$ sont orthogonaux.

11 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E.
On désigne par $N(f)$ l'ensemble des vecteurs x de E qui possèdent la propriété : $\forall y \in E,\ f(x, y) = 0$.
Démontrer que $N(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

12 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E qui vérifie la propriété : $\forall x \in E,\ f(x, x) \geqslant 0$.
1° Montrer que, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a l'inégalité : $f(x, y)^2 \leqslant f(x, x)\, f(y, y)$.
2° Soit F l'ensemble des vecteurs x de E tels que : $f(x, x) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

13 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E qui vérifie la propriété : $\forall x \in E,\ (x \neq 0_E) \Longrightarrow (f(x, x) \neq 0)$.
1° Montrer que, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a l'inégalité : $[f(x, y)]^2 \leqslant f(x, x)\, f(y, y)$ et que l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants.
2° Montrer que, pour tout couple (x, y) de E^2, $f(x, x)$ et $f(y, y)$ sont des réels de même signe. En déduire que f est un produit scalaire sur E si et seulement s'il existe un vecteur x_0 de E tel que : $f(x_0, x_0) > 0$.

14 Montrer que, pour tout quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de réels, on a l'inégalité : $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 \leqslant (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,(\beta_1^2 + \beta_2^2)$.

15 Montrer que, quels que soient les réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, on a l'inégalité : $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 \leqslant (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)$.

16 On considère l'espace vectoriel P des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n (y compris la fonction nulle sur $\mathbb{R}$).
Soient f et g deux éléments quelconques de P définis respectivement par :
$x \rightsquigarrow f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, et par :
$x \rightsquigarrow g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$.
On définit une application φ de $P \times P$ dans $\mathbb{R}$ par :
$(f, g) \rightsquigarrow a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$.
1° Montrer que φ est un produit scalaire sur P.
2° Définir la norme d'un élément f de P.
3° Montrer que, quels que soient les réels $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots b_n$, on a l'inégalité :
cauchy - SCHWARZ
$(a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2)\,(b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2)$.
4° On considère l'ensemble E_0 des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble $E_0^{\perp}$ constitué par les fonctions de P qui sont orthogonales à chacune des fonctions de E_0.
5° Montrer que $E_0^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de P.

EXERCICES

17 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble $\mathcal{N}$ des applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ qui possèdent les propriétés :

a) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \big(f(x) = 0\big) \Longleftrightarrow (x = 0)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = |\lambda| \, f(x)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

1° Montrer que, si φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, l'application :
$f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ x \leadsto \sqrt{\varphi(x, x)}$, est un élément de $\mathcal{N}$.

2° Soit un couple $x = (a_1, a_2)$ de $\mathbb{R}^2$. On définit une application f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $x \leadsto |a_1| + |a_2|$.
Montrer que f_1 appartient à $\mathcal{N}$.

3° Soit f_2 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$f_2(x) = |a_1|$, si $|a_1| \geqslant |a_2|$ et $f_2(x) = |a_2|$, si $|a_1| \leqslant |a_2|$.

4° Montrer que, pour tout couple x de $\mathbb{R}^2$, on a les inégalités :
$f_2(x) \leqslant f_1(x) \leqslant 2 f_2(x)$.

25.
Espaces vectoriels euclidiens de dimension 1, 2, 3

Espaces vectoriels euclidiens de dimension 1.

Considérons un espace vectoriel euclidien de dimension 1, noté $\vec{D}$.

Bases orthogonales de $\vec{D}$.

1 Nous savons que tout vecteur $\vec{i}$ non nul de $\vec{D}$ est une base de $\vec{D}$. Le système constitué par le vecteur $\vec{i}$ est un système orthogonal ; en effet, nous avons : $\vec{i}.\vec{i} \neq 0$.
Nous en déduisons que toute base de $\vec{D}$ est une base orthogonale.

Bases orthonormées de $\vec{D}$.

2 Considérons un vecteur $\vec{X}$ non nul de $\vec{D}$; nous avons : $\|\vec{X}\| \neq 0$.
Posons : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$; nous en déduisons : $\|\vec{i}\| = 1$.
Il en résulte que tout vecteur unitaire $\vec{i}$ est une base orthonormée de $\vec{D}$. On vérifie immédiatement que $-\vec{i}$ est aussi un vecteur unitaire de $\vec{D}$ et que $\vec{i}$ et $-\vec{i}$ sont les deux seuls vecteurs unitaires de $\vec{D}$.

Utilisation d'une base orthonormée.

3 Considérons une base orthonormée de $\vec{D}$, c'est-à-dire un vecteur unitaire $\vec{i}$ de $\vec{D}$.

Coordonnée d'un vecteur.

4 Soit $\vec{X}$ un vecteur de coordonnée x dans la base orthonormée $\vec{i}$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i}$.
Nous en déduisons : $\vec{X}.\vec{i} = (x\vec{i}).\vec{i} = x\,\|\vec{i}\| = x$.
La coordonnée d'un vecteur $\vec{X}$ de $\vec{D}$ dans une base orthonormée $\vec{i}$ de $\vec{D}$ est donc égale au produit scalaire $\vec{X}.\vec{i}$.

Pour toute base orthonormée $\vec{i}$ de $\vec{D}$, nous avons : $\boxed{\forall \vec{X} \in \vec{D}, \quad \vec{X} = (\vec{X}.\vec{i})\vec{i}}$

Expression analytique du produit scalaire.

5 Soient $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ deux vecteurs de coordonnées respectives x et x' dans la base orthonormée $\vec{i}$. Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i}$ et $\vec{X'} = x'\vec{i}$.
Nous en déduisons : $\vec{X}.\vec{X'} = (x\vec{i}).(x'\vec{i}) = xx'\,\|\vec{i}\|^2 = xx'$.
Le produit scalaire de deux vecteurs de $\vec{D}$ est donc égal au produit de leurs coordonnées respectives dans une base orthonormée.
En particulier, pour tout vecteur $\vec{X}$, de coordonnée x dans la base orthonormée $\vec{i}$, nous avons : $\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2}$.

Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2.

Considérons un espace vectoriel euclidien de dimension 2, noté $\vec{P}$.

Calcul du produit scalaire de deux vecteurs de $\vec{P}$.

6 Considérons une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$ et deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ de $\vec{P}$. Désignons par (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de $\vec{X}$ et de $\vec{X'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{X'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
Nous en déduisons :
$\vec{X}.\vec{X'} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\,\vec{i}.\vec{i} + (xy' + x'y)\,\vec{i}.\vec{j} + yy'\,\vec{j}.\vec{j}$.
Il en résulte que **pour calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$, il suffit de connaître les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et les produits scalaires : $\vec{i}.\vec{i}$, $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{j}.\vec{j}$.**

Construction d'une base orthogonale de $\vec{P}$.

7 Considérons un vecteur $\vec{X}$ non nul de $\vec{P}$. Nous savons (n° 12, p. 232, tome I) que si $\vec{X'}$ est un vecteur qui n'appartient pas à la droite vectorielle engendrée par $\vec{X}$, le système $(\vec{X}, \vec{X'})$ est une base de $\vec{P}$.

Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{X} + \vec{X'}$ est différent du vecteur nul $\vec{0}$.

Cherchons s'il existe un réel k pour lequel les vecteurs $\vec{X}$ et $k\vec{X} + \vec{X'}$ sont orthogonaux.

Nous avons : $\vec{X}.(k\vec{X} + \vec{X'}) = k\,\|\vec{X}\|^2 + \vec{X}.\vec{X'}$.

Les vecteurs $\vec{X}$ et $k\vec{X} + \vec{X'}$ sont donc orthogonaux si et seulement si le réel $k\|\vec{X}\|^2 + \vec{X}.\vec{X'}$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si l'on a l'égalité :

$$k = -\frac{\vec{X}.\vec{X'}}{\|\vec{X}\|^2}.$$

Posons : $\vec{Y} = -\dfrac{\vec{X}.\vec{X'}}{\|\vec{X}\|^2}\vec{X} + \vec{X'}$.

Il résulte du calcul précédent que $(\vec{X}, \vec{Y})$ est un système orthogonal ; c'est donc une base orthogonale de $\vec{P}$ (n° 22, p. 51).

THÉORÈME : Un espace vectoriel euclidien de dimension 2 admet au moins une base orthogonale.

Bases orthonormées de $\vec{P}$.

8 Nous savons qu'il existe dans $\vec{P}$ au moins une base orthogonale $(\vec{X}, \vec{Y})$.

Les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont différents du vecteur $\vec{0}$.

Posons : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ et $\vec{j} = \dfrac{\vec{Y}}{\|\vec{Y}\|}$.

Nous avons alors : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$, $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

Le système $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc une base orthonormée de $\vec{P}$.

THÉORÈME : Un espace vectoriel euclidien de dimension 2 admet au moins une base orthonormée.

Utilisation d'une base orthonormée de $\vec{P}$.

9 Considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$. Nous avons donc :

$\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$, $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

Coordonnées d'un vecteur.

10 Soit $\vec{X}$ un vecteur de $\vec{P}$ de coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$; nous en déduisons :
$\vec{X}.\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j}).\vec{i} = x\,\|\vec{i}\|^2 + y(\vec{i}.\vec{j}) = x$, et :
$\vec{X}.\vec{j} = (x\vec{i} + y\vec{j}).\vec{j} = x(\vec{i}.\vec{j}) + y\,\|\vec{j}\|^2 = y$.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ de $\vec{P}$ dans une base orthonormée sont les produits scalaires respectifs de $\vec{X}$ par les vecteurs de cette base.
Pour toute base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, nous avons donc :

$$\boxed{\forall \vec{X} \in \vec{P}, \qquad \vec{X} = (\vec{X}.\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{X}.\vec{j})\,\vec{j}}$$

Expression analytique du produit scalaire.

11 Soient $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ deux vecteurs de $\vec{P}$ de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{X'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Nous en déduisons :
$\vec{X}.\vec{X'} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\,\|\vec{i}\|^2 + (xy' + x'y)\,(\vec{i}.\vec{j}) + yy'\,\|\vec{j}\|^2 = xx' + yy'$.
En particulier, si $\vec{X}$ est égal à $\vec{X'}$, nous avons :
$\vec{X}.\vec{X} = x^2 + y^2$, c'est-à-dire : $\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

THÉORÈME : Pour tout vecteur $\vec{X}$ et pour tout vecteur $\vec{X'}$ de $\vec{P}$, de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans une base orthonormée, on a :
$\vec{X}.\vec{X'} = xx' + yy'$ **et** $\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

---

12 Avec les mêmes notations, nous déduisons du théorème précédent les deux propriétés :
1. $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ sont orthogonaux si et seulement si l'on a : $xx' + yy' = 0$.
2. $\vec{X}$ est unitaire si et seulement si l'on a : $x^2 + y^2 = 1$.

Coordonnées d'un vecteur orthogonal à un vecteur donné.

13 Considérons un vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Un vecteur $\vec{X'}$ de coordonnées (x', y') est orthogonal au vecteur $\vec{X}$ si et seulement si l'on a l'égalité : $xx' + yy' = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x' & -y \\ y' & x \end{vmatrix}$ est nul.
Soit $\vec{Y}$ le vecteur de coordonnées $(-y, x)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Le déterminant $\begin{vmatrix} x' & -y \\ y' & x \end{vmatrix}$ est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{X'}$ et $\vec{Y}$ sont liés.
Le vecteur $\vec{Y}$ est non nul ; les vecteurs $\vec{X'}$ et $\vec{Y}$ sont donc liés si et seulement s'il existe un réel k pour lequel on a : $\vec{X'} = k\vec{Y}$, c'est-à-dire : $x' = -ky$, $y' = kx$.

THÉORÈME : Soit $\vec{X}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans une base orthonormée. Un vecteur $\vec{X'}$ de coordonnées (x', y') dans cette base est orthogonal au vecteur $\vec{X}$ si et seulement s'il existe un réel k tel que : $x' = -ky$ et $y' = kx$.

Vecteurs unitaires orthogonaux à un vecteur unitaire.

14 Considérons un vecteur unitaire $\vec{X}$. Ses coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ vérifient donc : $x^2 + y^2 = 1$.

Nous savons qu'un vecteur $\vec{X'}$ est orthogonal à $\vec{X}$ si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{X'} = -ky\vec{i} + kx\vec{j}$.

Pour un tel vecteur, nous avons : $\|\vec{X'}\|^2 = (-ky)^2 + (kx)^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2$.

Le vecteur $\vec{X'}$ orthogonal à $\vec{X}$ est donc unitaire si et seulement si l'on a : $k = 1$ ou $k = -1$.

Il existe donc dans $\vec{P}$ deux vecteurs $\vec{Y}$ et $\vec{Y'}$ orthogonaux au vecteur unitaire $\vec{X}$: $\vec{Y} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ et $\vec{Y'} = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Remarquons que ces deux vecteurs sont opposés : $\vec{Y} = -\vec{Y'}$.

Droites vectorielles orthogonales dans $\vec{P}$.

15 Considérons deux droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ de $\vec{P}$. Désignons respectivement par $\vec{U}$ et par $\vec{U'}$ des vecteurs non nuls de $\vec{D}$ et $\vec{D'}$.

Nous supposons que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ sont orthogonaux.

Nous avons donc : $\vec{U}.\vec{U'} = 0$.

Alors, pour tout couple (α, α') de réels, nous avons : $(\alpha\vec{U}).(\alpha'\vec{U'}) = \alpha\alpha'\vec{U}.\vec{U'} = 0$.

Tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{D}$ est donc orthogonal à tout vecteur $\vec{X'}$ de $\vec{D'}$.

Réciproquement, si tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{X'}$ de $\vec{D'}$, les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ sont orthogonaux.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de $\vec{P}$. Les deux propriétés suivantes sont logiquement équivalentes :

1. Un vecteur non nul de $\vec{D}$ est orthogonal à un vecteur non nul de $\vec{D'}$;

2. Tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{D'}$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.

On dit aussi que $\vec{D}$ est orthogonale à $\vec{D'}$ et que $\vec{D'}$ est orthogonale à $\vec{D}$.

16 Considérons une droite vectorielle $\vec{D}$ de $\vec{P}$. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe une droite vectorielle unique $\vec{D'}$ orthogonale à $\vec{D}$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$. Nous avons construit, au n° 7, p. 59, un vecteur $\vec{Y}$ de $\vec{P}$ tel que $(\vec{X}, \vec{Y})$ soit une base orthogonale. La droite vectorielle $\vec{D'}$ engendrée par $\vec{Y}$ est orthogonale à $\vec{D}$.

Considérons alors une autre droite vectorielle $\vec{D''}$ orthogonale à $\vec{D}$. Soit $\vec{U}$ un vecteur non nul de $\vec{D''}$. Par définition, nous avons : $\vec{U}.\vec{X} = 0$.

$(\vec{X}, \vec{Y})$ est une base de $\vec{P}$; il existe donc deux réels λ et μ pour lesquels on a : $\vec{U} = \lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}$.

Nous avons donc : $\vec{U}.\vec{X} = \lambda \| \vec{X} \|^2$; nous en déduisons l'implication : $(\vec{U}.\vec{X} = 0) \Longrightarrow (\lambda = 0)$.

Le vecteur $\vec{U}$ non nul de $\vec{D''}$ appartient donc à $\vec{D'}$.

Nous en déduisons l'égalité : $\vec{D'} = \vec{D''}$.

THÉORÈME : Dans un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$, pour toute droite vectorielle $\vec{D}$, il existe une droite vectorielle unique $\vec{D'}$ orthogonale à $\vec{D}$.

17 Remarque : Au cours de la démonstration précédente, nous avons démontré l'implication : $(\vec{U}.\vec{X} = 0) \Longrightarrow (\vec{U} \in \vec{D'})$.

Nous avons donc l'équivalence logique : $(\vec{U} \in \vec{D'}) \Longleftrightarrow (\vec{U}.\vec{X} = 0)$.

Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3.

Considérons un espace vectoriel euclidien de dimension 3, noté E_3.

Calcul du produit scalaire de deux vecteurs de E_3.

18 Considérons une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3 et deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{X'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Nous en déduisons :

$$\vec{X}.\vec{X'} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= xx'\,\vec{i}.\vec{i} + yy'\,\vec{j}.\vec{j} + zz'\,\vec{k}.\vec{k} + (xy' + x'y)\,\vec{i}.\vec{j} + (yz' + y'z)\,\vec{j}.\vec{k} + (xz' + x'z)\,\vec{i}.\vec{k}.$$

Il en résulte que pour calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$, il suffit de connaître les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les produits scalaires : $\vec{i}.\vec{i}$, $\vec{j}.\vec{j}$, $\vec{k}.\vec{k}$, $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{j}.\vec{k}$, $\vec{i}.\vec{k}$.

Construction d'une base orthogonale de E_3.

19 Considérons un vecteur $\vec{X}$ non nul de E_3. Nous savons qu'il existe un vecteur $\vec{X'}$ non nul qui n'appartient pas à la droite vectorielle engendrée par $\vec{X}$. Les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ sont donc linéairement indépendants et ils engendrent un plan vectoriel $\vec{P}$ de E_3.

Il résulte du théorème n° 7, p. 59, qu'il existe dans $\vec{P}$ un vecteur $\vec{Y}$ tel que $(\vec{X}, \vec{Y})$ soit une base orthogonale de $\vec{P}$.

Nous savons (n° 22, p. 235, tome I) que si $\vec{Y'}$ est un vecteur qui n'appartient pas à $\vec{P}$, le système $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Y'})$ est une base de E_3.

Pour tout couple (k, h) de réels, le vecteur $k\vec{X} + h\vec{Y} + \vec{Y'}$ est différent du vecteur nul $\vec{0}$. Cherchons s'il existe un couple (k, h) de réels pour lesquels les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont orthogonaux au vecteur $k\vec{X} + h\vec{Y} + \vec{Y'}$.

Nous avons : $\vec{X}.(k\vec{X} + h\vec{Y} + \vec{Y'}) = k\,\|\vec{X}\|^2 + \vec{X}.\vec{Y'}$

et : $\vec{Y}.(k\vec{X} + h\vec{Y} + \vec{Y'}) = h\,\|\vec{Y}\|^2 + \vec{Y}.\vec{Y'}$

Ces deux produits scalaires sont donc simultanément nuls si et seulement si l'on a :

$$k = -\frac{\vec{X}.\vec{Y'}}{\|\vec{X}\|^2} \quad \text{et} \quad h = -\frac{\vec{Y}.\vec{Y'}}{\|\vec{Y}\|^2}.$$

Posons : $$\vec{Z} = -\left[\frac{\vec{X}.\vec{Y'}}{\|\vec{X}\|^2}\right]\vec{X} - \left[\frac{\vec{Y}.\vec{Y'}}{\|\vec{Y}\|^2}\right]\vec{Y} + \vec{Y'}.$$

Il résulte du calcul précédent que le système $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est un système orthogonal de E_3 ; c'est donc une base orthogonale de E_3 (n° 22, p. 51).

THÉORÈME : Un espace vectoriel euclidien de dimension 3 admet au moins une base orthogonale.

Bases orthonormées de E_3.

20 Nous savons qu'il existe dans E_3 au moins une base orthogonale $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

Les vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, et $\vec{Z}$ sont différents du vecteur nul $\vec{0}$.

Posons : $$\vec{i} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}, \quad \vec{j} = \frac{\vec{Y}}{\|\vec{Y}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{Z}}{\|\vec{Z}\|}.$$

Nous avons alors : $\|\vec{i}\| = 1, \quad \|\vec{j}\| = 1, \quad \|\vec{k}\| = 1,$

et : $\vec{i}.\vec{j} = 0, \quad \vec{j}.\vec{k} = 0, \quad \vec{i}.\vec{k} = 0.$

Le système $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc une base orthonormée de E_3.

THÉORÈME : Un espace vectoriel euclidien de dimension 3 admet au moins une base orthonormée.

Utilisation d'une base orthonormée de E_3.

21 Considérons une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée de E_3. Nous avons donc :
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$.

Coordonnées d'un vecteur.

22 Soit $\vec{X}$ un vecteur de E_3, de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; nous en déduisons :

$$\vec{X}.\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{i} = x\|\vec{i}\|^2 + y\vec{j}.\vec{i} + z\vec{k}.\vec{i} = x,$$
$$\vec{X}.\vec{j} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{j} = x\vec{i}.\vec{j} + y\|\vec{j}\|^2 + z\vec{k}.\vec{j} = y,$$
$$\vec{X}.\vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{k} = x\vec{i}.\vec{k} + y\vec{j}.\vec{k} + z\|\vec{k}\|^2 = z.$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ de E_3 dans une base orthonormée sont les produits scalaires respectifs de $\vec{X}$ par les vecteurs de cette base.

Pour toute base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3, nous avons donc :

$$\boxed{\forall \vec{X} \in E_3, \quad \vec{X} = (\vec{X}.\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{X}.\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{X}.\vec{k})\,\vec{k}}$$

Expression analytique du produit scalaire.

23 Soient $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ deux vecteurs de E_3 de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{X'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.
Nous en déduisons :

$$\vec{X}.\vec{X'} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}),$$
$$\vec{X}.\vec{X'} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2 + (xy' + x'y)\,\vec{i}.\vec{j}$$
$$+ (yz' + y'z)\,\vec{j}.\vec{k} + (xz' + x'z)\,\vec{i}.\vec{k},$$
$$\vec{X}.\vec{X'} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, si $\vec{X'}$ est égal à $\vec{X}$, nous avons :
$\vec{X}.\vec{X} = x^2 + y^2 + z^2$, c'est-à-dire : $\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

THÉORÈME : Pour tout vecteur $\vec{X}$ et pour tout vecteur $\vec{X'}$ de E_3, de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormée, on a : $\vec{X}.\vec{X'} = xx' + yy' + zz'$ **et** $\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

---

24 Avec les mêmes notations, nous déduisons du théorème précédent les deux propriétés :

1. $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ sont orthogonaux si et seulement si l'on a : $xx' + yy' + zz' = 0$.
2. $\vec{X}$ est unitaire si et seulement si l'on a : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Droite vectorielle et plan vectoriel orthogonaux.

25 Considérons une droite vectorielle $\vec{D}$ et un plan vectoriel $\vec{P}$ de E_3.

Désignons par $\vec{U}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$ et par $(\vec{X}, \vec{Y})$ une base de $\vec{P}$.

Supposons que le vecteur $\vec{U}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$; nous avons : $\vec{U}.\vec{X} = 0$ et $\vec{U}.\vec{Y} = 0$.

Alors, pour tout triplet (k, α, β) de réels, nous avons :

$k\vec{U}.(\alpha\vec{X} + \beta\vec{Y}) = k\alpha\vec{U}.\vec{X} + k\beta\vec{U}.\vec{Y} = 0.$

Tout vecteur de $\vec{D}$ est donc orthogonal à tout vecteur de $\vec{P}$.

Réciproquement, si tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{P}$, en particulier, le vecteur $\vec{U}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $\vec{D}$ une droite vectorielle et $\vec{P}$ un plan vectoriel de E_3. Les deux propriétés suivantes sont logiquement équivalentes :

1. Un vecteur non nul de $\vec{D}$ est orthogonal à deux vecteurs d'une base de $\vec{P}$.

2. Tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{P}$.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que la droite vectorielle $\vec{D}$ et le plan vectoriel $\vec{P}$ sont orthogonaux.

On dit aussi que $\vec{P}$ est orthogonal à $\vec{D}$ et que $\vec{D}$ est orthogonal à $\vec{P}$.

26 Considérons une droite vectorielle $\vec{D}$ de E_3. Nous nous proposons de montrer qu'il existe un plan vectoriel unique $\vec{P}$ orthogonal à $\vec{D}$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur non nul de $\vec{D}$. Nous avons construit au n° 19, p. 63, deux vecteurs $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ tels que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit une base orthogonale de E_3. Le plan vectoriel $\vec{P}$ engendré par les deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ est orthogonal à $\vec{D}$.

Considérons alors un plan vectoriel $\vec{P'}$ orthogonal à $\vec{D}$.

Soient $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\vec{P'}$.

Nous avons : $\vec{U}.\vec{X} = 0$ et $\vec{U'}.\vec{X} = 0$.

$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est une base de E_3 ; il existe donc trois réels λ, μ, ν et trois réels λ', μ', ν' pour lesquels on a :

$\vec{U} = \lambda\vec{X} + \mu\vec{Y} + \nu\vec{Z}$ et $\vec{U'} = \lambda'\vec{X} + \mu'\vec{Y} + \nu'\vec{Z}.$

Nous avons alors : $\vec{U}.\vec{X} = \lambda\|\vec{X}\|$ et $\vec{U'}.\vec{X} = \lambda'\|\vec{X}\|$.

Des égalités : $\vec{U}.\vec{X} = 0$ et $\vec{U'}.\vec{X} = 0$, nous déduisons : $\lambda = 0$ et $\mu = 0$; puis : $\vec{U} = \mu\vec{Y} + \nu\vec{Z}$ et $\vec{U'} = \mu'\vec{Y} + \nu'\vec{Z}$.

La base $(\vec{U}, \vec{U'})$ de $\vec{P'}$ est donc aussi une base de $\vec{P}$. Il en résulte l'égalité : $\vec{P} = \vec{P'}$.

THÉORÈME : Dans l'espace vectoriel euclidien E_3, pour toute droite vectorielle $\vec{D}$, il existe un plan vectoriel unique $\vec{P}$ orthogonal à $\vec{D}$.

27 Remarque : Au cours de la démonstration précédente, nous avons démontré l'implication : $(\vec{U}.\vec{X} = 0) \Longrightarrow (\vec{U} \in \vec{P})$. Nous avons donc l'équivalence : $(\vec{U} \in \vec{P}) \Longleftrightarrow (\vec{U}.\vec{X} = 0)$.

28 D'une manière analogue, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME : Dans l'espace vectoriel euclidien E_3, pour tout plan vectoriel $\vec{P}$, il existe une droite vectorielle unique $\vec{D}$ orthogonale à $\vec{P}$.

Droites vectorielles orthogonales dans E_3.

29 Considérons deux droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ de E_3. Désignons respectivement par $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ des vecteurs non nuls de $\vec{D}$ et $\vec{D'}$. D'une manière analogue à ce qui a été fait au nº 15, p. 61, on démontre que $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ sont orthogonaux si et seulement si tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{D'}$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ deux droites vectorielles de E_3. Les deux propriétés suivantes sont logiquement équivalentes :

1. Un vecteur non nul de $\vec{D}$ est orthogonal à un vecteur non nul de $\vec{D'}$.

2. Tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{D'}$.

Si l'une des propriétés est vérifiée, on dit que les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.

On dit aussi que $\vec{D}$ est orthogonale à $\vec{D'}$ et que $\vec{D'}$ est orthogonale à $\vec{D}$.

30 Considérons une droite vectorielle $\vec{D}$ de E_3 et désignons par $\vec{P}$ le plan vectoriel de E_3 orthogonal à $\vec{D}$.

Soit $\vec{D'}$ une droite vectorielle incluse dans $\vec{P}$. Tout vecteur de $\vec{D'}$ appartient à $\vec{P}$; il est donc orthogonal à tout vecteur de $\vec{D}$. Il en résulte que les droites $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.

Réciproquement, considérons une droite $\vec{D'}$ orthogonale à $\vec{D}$ et montrons qu'elle est incluse dans $\vec{P}$.

Considérons en effet, une base orthogonale $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ de E_3 constituée par un vecteur non nul $\vec{X}$ de $\vec{D}$ et deux vecteurs non nuls orthogonaux de $\vec{P}$.

Soit $\vec{U}$ un vecteur non nul de $\vec{D'}$. Nous avons : $\vec{U}.\vec{X} = 0$.

$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est une base de E_3 ; il existe donc trois réels λ, μ, ν pour lesquels on a : $\vec{U} = \lambda\vec{X} + \mu\vec{Y} + \nu\vec{Z}$.

Nous avons : $\vec{U}.\vec{X} = \lambda\|\vec{X}\|^2$; de l'égalité : $\vec{U}.\vec{X} = 0$, nous déduisons : $\lambda = 0$.
Le vecteur $\vec{U}$ appartient donc à $\vec{P}$. Il en résulte que $\vec{D}'$ est incluse dans $\vec{P}$.

THÉORÈME : Soient $\vec{D}$ une droite vectorielle de E_3 et $\vec{P}$ le plan vectoriel de E_3 orthogonal à $\vec{D}$. Une droite vectorielle $\vec{D}'$ de E_3 est orthogonale à $\vec{D}$ si et seulement si elle est incluse dans $\vec{P}$.

EXERCICES

Plan vectoriel euclidien.

◆ Dans les exercices suivants (nos 1 à 7), on considère un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et des vecteurs de $\vec{P}$ dont on donne les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1 Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et dire s'ils sont orthogonaux dans chacun des cas suivants :

$\vec{U} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\quad \vec{V} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

$\vec{U} = -4\sqrt{3}\,\vec{i} + \sqrt{5}\,\vec{j}$, $\quad \vec{V} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \dfrac{4}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

$\vec{U} = \sqrt{2}\,\vec{i} + 3\vec{j}$, $\quad \vec{V} = 3\vec{i} - \sqrt{2}\,\vec{j}$.

$\vec{U} = 2\sqrt{3}\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j}$, $\quad \vec{V} = 3\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}$.

2 Calculer la norme du vecteur $\vec{U}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{U} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$;

$\vec{U} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\,\vec{i} + (\sqrt{4} - \sqrt{3})\,\vec{j}$;

$\vec{U} = (1 + 2\sqrt{2})\,\vec{i} + (1 - 2\sqrt{2})\,\vec{j}$;

$\vec{U} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$.

3 Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{V}$ orthogonal au vecteur $\vec{U}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{U} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; $\quad \vec{U} = -5\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$;

$\vec{U} = 3\sqrt{3}\,\vec{i} + 3\sqrt{6}\,\vec{j}$; $\quad \vec{U} = -\dfrac{(\sqrt{5} + 1)}{2}\vec{i} - (\sqrt{2} - \sqrt{10})\,\vec{j}$.

EXERCICES

4 On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1° Vérifier que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base orthonormée.

2° Donner les coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{X} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} - \vec{j}$; $\qquad \vec{X} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$;

$\vec{X} = 2(\vec{i} + 2\vec{j})$; $\qquad \vec{X} = -5\vec{i} - 7\vec{j}$.

5 On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(4, 3)$ et $(3, -4)$.

1° Vérifier que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base orthogonale.

2° Donner les coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{X} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\qquad \vec{X} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

6 Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : $(-2, 1)$ et $(2, 3)$.

Déterminer les réels suivants :

$\|\vec{U} + \vec{V}\|$, $\|\vec{U} - \vec{V}\|$, $\|2\vec{U} - 3\vec{V}\|$, $\|3\vec{U} - 2\vec{V}\|$.

7 Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : $(1, 1)$ et $(-2, 1)$.

On considère les vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ définis respectivement par :

$\vec{X} = -2\vec{U} + \vec{V}$ et $Y = \vec{U} - 2\vec{V}$.

1° Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$.

2° Déterminer les réels : $\|\vec{X}\|$ et $\|\vec{Y}\|$.

Espace vectoriel euclidien de dimension 3.

◆ Dans les exercices suivants (n^{os} 8 à 17) on considère un espace vectoriel euclidien E_3 de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et des vecteurs de E_3 dont on donne les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

8 Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et dire s'ils sont orthogonaux dans chacun des cas suivants :

$\vec{U} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\qquad \vec{V} = 3\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$.

$\vec{U} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\qquad \vec{V} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

9 Calculer la norme du vecteur $\vec{U}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{U} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$. $\qquad \vec{U} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + 2\vec{k}$.

10 On considère les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ de coordonnées respectives : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1° Vérifier que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est une base orthonormée.

2° Déterminer dans la base $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ les coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans chacun des cas suivants :

$\vec{X} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\quad \vec{X} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

11 Soit $\vec{U}$ un vecteur. Déterminer, dans chacun des cas suivants, les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{X}$ tel que $(\vec{U}, \vec{X})$ soit un système lié.

$\vec{U} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\quad \vec{U} = 2\sqrt{3}\,\vec{i} - 2\sqrt{3}\,\vec{j} + 5\vec{k}$.

12 Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : $(1, -2, 3)$ et $(2, -1, 1)$. Déterminer les réels suivants :

$\|\vec{U} + \vec{V}\|$, $\|\vec{U} - \vec{V}\|$, $\|-\vec{U} + 2\vec{V}\|$, $\|-\vec{U} - 2\vec{V}\|$.

13 Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(1, 1, 0)$ et $(2, 1, -1)$ et P le plan vectoriel dont une base est $(\vec{U}, \vec{V})$.

1° On désigne par $\vec{u}$ un vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{U})$ soit un système lié. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.

2° On désigne par $\vec{v}$ un vecteur unitaire de $\vec{P}$ orthogonal au vecteur $\vec{u}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$.

3° On désigne par $\vec{w}$ un vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$.

14 Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{U}(-1, 1, 1)$ et soit $\vec{D'}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{U'}(3, -1, 1)$. On désigne par $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ les plans vectoriels orthogonaux respectivement à $\vec{D}$ et à $\vec{D'}$.

1° Les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont-ils égaux ?

2° Donner les coordonnées d'un vecteur unitaire de la droite $\vec{D''}$ définie par : $\vec{D''} = \vec{P} \cap \vec{P'}$.

15 On considère le plan vectoriel $\vec{P}_1$ engendré par les vecteurs $\vec{U}_1(0, 1, 1)$ et $\vec{V}_1(1, 2, 2)$ et le plan vectoriel $\vec{P}_2$ engendré par les vecteurs $\vec{U}_2(1, 0, 1)$ et $\vec{V}_2(2, 1, 2)$.

1° Déterminer la droite vectorielle $\vec{D}$ définie par : $\vec{D} = \vec{P}_1 \cap \vec{P}_2$. Donner un vecteur unitaire de $\vec{D}$.

2° Déterminer la droite vectorielle $\vec{D}_1$ incluse dans $\vec{P}_1$ et orthogonale à $\vec{D}$.

3° Déterminer la droite vectorielle $\vec{D}_2$ incluse dans $\vec{P}_2$ et orthogonale à $\vec{D}$.

EXERCICES

16 On considère :
la droite vectorielle $\vec{D}_1$ engendrée par le vecteur $\vec{U}_1(-1, 1, 1)$ et la droite vectorielle $\vec{D}_2$ engendrée par le vecteur $\vec{U}_2(1, 2, -1)$.

1° Vérifier que $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont des droites vectorielles orthogonales.

2° Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{V}_2$ orthogonal à $\vec{U}_2$ tel que $\vec{D}_1$ soit orthogonale au plan vectoriel engendré par $\vec{U}_2$ et $\vec{V}_2$.

17 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel et $\overrightarrow{D'}$ la droite vectorielle orthogonale à $\vec{P}$. On désigne par $\overrightarrow{P'}$ un plan vectoriel tel que $\overrightarrow{D'}$ soit incluse dans $\overrightarrow{P'}$.

1° Montrer que la droite vectorielle $\vec{D}$ orthogonale à $\overrightarrow{P'}$ est incluse dans $\vec{P}$.

2° On suppose que le plan vectoriel $\vec{P}$ est engendré par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$ et que $\vec{D}$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{W}$ défini par : $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$. Déterminer la droite vectorielle $\overrightarrow{D''}$ intersection des plans vectoriels $\vec{P}$ et $\overrightarrow{P'}$ et la droite vectorielle $\overrightarrow{D'}$.

18 Soient E_3 un espace euclidien de dimension 3 et A une partie non vide de E_3. On appelle orthogonal de A, l'ensemble noté $A^{\perp}$ des vecteurs $\vec{X}$ de E_3 qui vérifient la propriété : $\forall Y \in A, \quad \vec{Y}.\vec{X} = 0$.

1° Définir l'orthogonal de $\left\{\vec{0}_{E_3}\right\}$ et de E_3.

2° Montrer que l'orthogonal d'une partie A non vide de E_3 est un sous-espace vectoriel de E_3.

3° Définir l'orthogonal d'une droite vectorielle de E_3 et d'un plan vectoriel de E_3.

4° Vérifier que, si F est un sous-espace vectoriel de E_3, on a l'égalité :
$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E_3$.

5° On note $(F^{\perp})^{\perp}$ l'orthogonal de $F^{\perp}$ montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E_3, on a l'égalité : $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

26. Rotations vectorielles Angles

Applications orthogonales. = Applications conservant le produit scalaire.

Application orthogonale.

1 **DÉFINITION : On dit qu'une application linéaire f d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ dans lui-même est une application orthogonale si et seulement si : $\forall \vec{X}_1 \in \vec{P}, \quad \forall \vec{X}_2 \in \vec{P}, \quad f(\vec{X}_1).f(\vec{X}_2) = \vec{X}_1.\vec{X}_2$.**

On exprime cette propriété en disant qu'une application orthogonale dans $\vec{P}$ est une application linéaire de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ qui conserve le produit scalaire.

Exemples : 1. L'application identique du plan vectoriel euclidien est une application orthogonale. Nous avons en effet : $\forall \vec{X} \in \vec{P}, \ id_{\vec{P}}(\vec{X}) = \vec{X}$.
Il en résulte : $\forall \vec{X}_1 \in \vec{P}, \ \forall \vec{X}_2 \in \vec{P}, \ id_{\vec{P}}(\vec{X}_1).id_{\vec{P}}(\vec{X}_2) = \vec{X}_1.\vec{X}_2$.

2. Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien, et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$.
Désignons par $\vec{X}$ un vecteur de $\vec{P}$, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Considérons l'application g : $\vec{P} \longrightarrow \vec{P}, \ \vec{X} \rightsquigarrow y\vec{i} - x\vec{j}$.
Nous déduisons du n° 4, p. 248, tome 1, que l'application g est linéaire.
Démontrons qu'elle est orthogonale :
Si $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ sont deux vecteurs de $\vec{P}$, nous avons :
$g(\vec{X}_1) = y_1\vec{i} - x_1\vec{j}$ et $g(\vec{X}_2) = y_2\vec{i} - x_2\vec{j}$.
La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée. Il en résulte les égalités :
$\vec{X}_1.\vec{X}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$, et $g(\vec{X}_1).g(\vec{X}_2) = y_1y_2 + (-x_1)(-x_2)$.
Nous en déduisons : $g(\vec{X}_1).g(\vec{X}_2) = \vec{X}_1.\vec{X}_2$.
L'application linéaire g est donc une application orthogonale.

2 **THÉORÈME : Une application linéaire f du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ dans lui-même est une application orthogonale si et seulement si :**
$\forall \vec{X} \in \vec{P}, \quad \| f(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|.$

$\Rightarrow$ Soit f une application linéaire orthogonale de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$; de la définition d'une application orthogonale nous déduisons l'égalité : $\forall \vec{X} \in \vec{P}, \ f(\vec{X}).f(\vec{X}) = \vec{X}.\vec{X}$, c'est-à-dire : $\forall \vec{X} \in \vec{P}, \ \| f(\vec{X}) \|^2 = \| \vec{X} \|^2$.
Nous avons : $\|f(\vec{X})\| \geqslant 0$ et $\|\vec{X}\| \geqslant 0$; il en résulte : $\forall \vec{X} \in \vec{P}, \ \|f(\vec{X})\| = \|\vec{X}\|$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit f une application linéaire de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ pour laquelle on a :
$\forall \vec{X} \in \vec{P}, \ \| f(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$.
Nous en déduisons, pour tout couple $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ de vecteurs de $\vec{P}$, les égalités :
$\| f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \| = \| \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \|$, ou encore : $\| f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \|^2 = \| \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \|^2$.
L'application f est linéaire; nous avons donc : $f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = f(\vec{X}_1) + f(\vec{X}_2)$.
Nous en déduisons : $\| f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \|^2 = \| f(\vec{X}_1) \|^2 + \| f(\vec{X}_2) \|^2 + 2f(\vec{X}_1).f(\vec{X}_2)$.
$\| f(\vec{X}_1) \|^2$ et $\| f(\vec{X}_2) \|^2$ sont respectivement égaux à $\| \vec{X}_1 \|^2$ et à $\| \vec{X}_2 \|^2$.
Nous avons donc : $\| f(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \|^2 = \| \vec{X}_1 \|^2 + \| \vec{X}_2 \|^2 + 2f(\vec{X}_1).f(\vec{X}_2)$;
Nous avons aussi : $\| \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \|^2 = \| \vec{X}_1 \|^2 + \| \vec{X}_2 \|^2 + 2\vec{X}_1.\vec{X}_2$.
De l'égalité des réels $\| f(\vec{X}_1) + f(\vec{X}_2) \|^2$ et $\| \vec{X}_1 + \vec{X}_2 \|^2$ nous déduisons l'égalité : $f(\vec{X}_1).f(\vec{X}_2) = \vec{X}_1.\vec{X}_2$. L'application linéaire f est donc orthogonale.

Groupe orthogonal $\mathcal{O}(\vec{P})$.

3 **THÉORÈME : Toute application linéaire orthogonale d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ dans lui-même est bijective.**

Soit f une application linéaire orthogonale de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$. Nous savons (n° 11, p. 251, tome 1) que pour démontrer que f est une bijection, il suffit de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que le noyau $N(f)$ est le singleton $\{\vec{0}\}$.
Nous avons les équivalences logiques suivantes :
$(\vec{X} \in N(f)) \Longleftrightarrow (f(\vec{X}) = \vec{0})$; $\quad (f(\vec{X}) = \vec{0}) \Longleftrightarrow (\| f(\vec{X}) \| = 0)$;
$(\| f(\vec{X}) \| = 0) \Longleftrightarrow (\| \vec{X} \| = 0)$; $\quad (\| \vec{X} \| = 0) \Longleftrightarrow (\vec{X} = \vec{0})$.
Nous en déduisons l'équivalence logique : $(\vec{X} \in N(f)) \Longleftrightarrow (\vec{X} = \vec{0})$, puis l'égalité : $N(f) = \{\vec{0}\}$.

4 Il résulte du théorème précédent que l'ensemble des applications linéaires orthogonales de $\vec{P}$ est inclus dans le groupe linéaire de $\vec{P}$: $\mathcal{O}(\vec{P}) \subset GL(\vec{P})$.

THÉORÈME : L'ensemble, noté $\mathcal{O}(\vec{P})$, des applications linéaires orthogonales du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ dans lui-même, est un sous-groupe du groupe linéaire de $\vec{P}$.

<u>$\mathcal{O}(\vec{P})$ est non vide :</u> En effet, l'application $id_{\vec{P}}$ appartient à $\mathcal{O}(\vec{P})$.

<u>$\mathcal{O}(\vec{P})$ est stable pour la loi $\circ$ dans $GL(\vec{P})$:</u> En effet, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{O}(\vec{P})$, pour tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{P}$, nous avons :
$\| f(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$ et $\| g(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$.
Nous en déduisons : $\forall \vec{X} \in \vec{P}$, $\| (g \circ f)(\vec{X}) \| = \| g[f(\vec{X})] \| = \| f(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$.
L'application $g \circ f$ appartient donc à $\mathcal{O}(\vec{P})$.

<u>Le symétrique pour la loi $\circ$ de tout élément de $\mathcal{O}(\vec{P})$ appartient à $\mathcal{O}(\vec{P})$:</u>
En effet, soit f un élément de $\mathcal{O}(\vec{P})$ et f^{-1} la bijection réciproque de f.
Pour tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{P}$, nous avons : $f[f^{-1}(\vec{X})] = \vec{X}$.
Nous en déduisons l'égalité : $\| f[f^{-1}(\vec{X})] \| = \| \vec{X} \|$.
L'application f est orthogonale ; nous avons donc : $\| f[f^{-1}(\vec{X})] \| = \| f^{-1}(\vec{X}) \|$.
Des deux égalités précédentes, nous déduisons : $\| f^{-1}(\vec{X}) \| = \| \vec{X} \|$.
L'application f^{-1} appartient donc à $\mathcal{O}(\vec{P})$.

5 **DÉFINITION : Le groupe $\mathcal{O}(\vec{P})$ est appelé groupe orthogonal du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$.**

Caractérisation d'une application orthogonale.

6 **THÉORÈME : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. Une application linéaire f de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ est une application orthogonale si et seulement si $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est une base orthonormée de $\vec{P}$.**

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$ et f une application linéaire de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$.
1. Si l'application f est orthogonale, nous déduisons des nos 1 et 2, p. 71 et 72 que les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ vérifient les égalités :
$f(\vec{i}).f(\vec{j}) = \vec{i}.\vec{j}$; $\| f(\vec{i}) \| = \| \vec{i} \|$; $\| f(\vec{j}) \| = \| \vec{j} \|$.
Nous avons donc : $f(\vec{i}).f(\vec{j}) = 0$; $\| f(\vec{i}) \| = 1$; $\| f(\vec{j}) \| = 1$.
Les vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont des vecteurs unitaires et ils sont orthogonaux.
$(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est donc une base orthonormée de $\vec{P}$.

2. Si les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par f forment une base orthonormée de $\vec{P}$, nous avons les trois égalités :
$f(\vec{i}).f(\vec{j}) = 0$; $\| f(\vec{i}) \| = 1$; $\| f(\vec{j}) \| = 1$.
Démontrons que l'application linéaire f est orthogonale.

Pour tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{P}$, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, nous avons les égalités : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$, et $f(\vec{X}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j})$.

Le carré scalaire du vecteur $f(\vec{X})$ est :
$\| f(\vec{X}) \|^2 = \| xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) \|^2$, c'est-à-dire :
$\| f(\vec{X}) \|^2 = x^2 \| f(\vec{i}) \|^2 + 2xyf(\vec{i}).f(\vec{j}) + y^2 \| f(\vec{j}) \|^2$.
Des hypothèses faites sur f, nous déduisons : $\| f(\vec{X}) \|^2 = x^2 + y^2$.
Nous avons donc l'égalité : $\| f(\vec{X}) \|^2 = \| \vec{X} \|^2$.
L'application f est donc une application orthogonale.

Matrice d'une application orthogonale.

7 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base **orthonormée** de $\vec{P}$ et f une application linéaire orthogonale de $\vec{P}$. Désignons par (a, b) les coordonnées du vecteur $f(\vec{i})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Nous avons : $f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Le vecteur $f(\vec{i})$ est unitaire ; il en résulte : $a^2 + b^2 = 1$. Nous savons qu'il existe deux vecteurs unitaires orthogonaux au vecteur $f(\vec{i})$ et deux seulement (n° 14, p. 61) ; ce sont les vecteurs : $\vec{X}_1 = -b\vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{X}_2 = b\vec{i} - a\vec{j}$.

$f(\vec{j})$ est un vecteur unitaire orthogonal à $f(\vec{i})$; il est donc égal à $\vec{X}_1$ ou à $\vec{X}_2$.

Si $f(\vec{j})$ est égal à $\vec{X}_1$, c'est-à-dire si l'on a : $f(\vec{j}) = -b\vec{i} + a\vec{j}$, la matrice de f dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $M_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$.

Si $f(\vec{j})$ est égal à $\vec{X}_2$, c'est-à-dire si l'on a : $f(\vec{j}) = b\vec{i} - a\vec{j}$, la matrice de f dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$.

La matrice d'une application linéaire orthogonale dans une base orthonormée est une matrice du type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$, ou du type $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$.

8 Réciproquement, soient a et b deux réels qui vérifient : $a^2 + b^2 = 1$.
Désignons par M_1 la matrice $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et par M_2 la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$.

Considérons une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. M_1 et M_2 sont les matrices respectives dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de deux applications linéaires f_1 et f_2.

Démontrons que chacune des applications f_1 et f_2 est une application orthogonale.

Nous avons, en effet : $f_1(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $f_1(\vec{j}) = -b\vec{i} + a\vec{j}$;

$f_2(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $f_2(\vec{j}) = b\vec{i} - a\vec{j}$.

Nous en déduisons les égalités :

$\| f_1(\vec{i}) \| = \| f_1(\vec{j}) \| = \| f_2(\vec{i}) \| = \| f_2(\vec{j}) \| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$

Les vecteurs $f_1(\vec{i})$, $f_1(\vec{j})$, $f_2(\vec{i})$, $f_2(\vec{j})$ sont des vecteurs unitaires.

Nous avons de plus :

$f_1(\vec{i}).f_1(\vec{j}) = -ab + ba = 0$ et $f_2(\vec{i}).f_2(\vec{j}) = ab - ba = 0.$

Nous en déduisons que les vecteurs $f_1(\vec{i})$ et $f_1(\vec{j})$ d'une part, $f_2(\vec{i})$ et $f_2(\vec{j})$ d'autre part sont des vecteurs orthogonaux.

Les couples $(f_1(\vec{i}), f_1(\vec{j}))$ et $(f_2(\vec{i}), f_2(\vec{j}))$ sont donc des bases orthonormées. Nous en concluons que chacune des applications f_1 et f_2 est une application orthogonale.

Soient a et b deux réels qui vérifient l'égalité : $a^2 + b^2 = 1$. Les applications linéaires f_1 et f_2 dont les matrices respectives dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $M_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ sont des applications orthogonales.

Matrices orthogonales. $^tM \cdot M = I_2$

Matrice orthogonale.

9 **DÉFINITION : On appelle matrice orthogonale toute matrice du type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$ ou du type $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$.**

Exemples : 1. Si a est égal à 1 et si b est égal à 0, nous avons : $a^2 + b^2 = 1$.

Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sont des matrices orthogonales.

2. Si a est égal à $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et si b est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, nous avons : $a^2 + b^2 = 1$.

Les matrices $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ sont des matrices orthogonales.

10 De l'étude des applications linéaires orthogonales nous déduisons le théorème :

THÉORÈME : Une application linéaire de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ est une application orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Nous convenons de désigner par $\mathcal{O}$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Déterminant d'une matrice orthogonale.

11 Soit M une matrice orthogonale.

Si M est du type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, nous avons :

$\text{Dét}\, M = a^2 + b^2 = 1$.

Si M est du type $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, nous avons :

$\text{Dét}\, M = -a^2 - b^2 = -1$.

Nous déduisons de ces égalités les propriétés suivantes :

1. Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou à -1.
2. Une matrice du type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale si et seulement si son déterminant est égal à 1.
3. Une matrice du type $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale si et seulement si son déterminant est égal à -1.

Produit de deux matrices orthogonales.

12 **THÉORÈME : Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.**

Soient en effet M_1 et M_2 deux matrices orthogonales; il existe deux applications orthogonales f_1 et f_2 dont les matrices dans une **base orthonormée** $\mathcal{B}$ sont respectivement M_1 et M_2.

Nous rappelons les résultats suivants :

1° La composée $f_2 \circ f_1$ de deux applications orthogonales est une application orthogonale (n° 4, p. 73).

2° La matrice M dans une base $\mathcal{B}$ de l'application composée $f_2 \circ f_1$ est le produit M_2M_1 de la matrice M_1 de f_1 dans $\mathcal{B}$ par la matrice M_2 de f_2 dans $\mathcal{B}$. Nous en concluons que la matrice M_2M_1 est une matrice orthogonale.

L'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices orthogonales est une partie de l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2. Il résulte du théorème précédent que $\mathcal{O}$ **est une partie stable de $\mathcal{M}_2$ pour la multiplication des matrices.**

Étude d'un isomorphisme.

13 Considérons l'ensemble $\mathcal{O}(\vec{P})$ des applications linéaires orthogonales de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ et l'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices orthogonales.

Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée de** $\vec{P}$.

Nous pouvons définir une application h de $\mathcal{O}(\vec{P})$ dans $\mathcal{O}$ par :

$\forall f \in \mathcal{O}(\vec{P}), \quad f \rightsquigarrow h(f) = M(f, \mathcal{B}).$

Cette application h est une injection ; en effet, nous avons :

$(h(f) = h(g)) \iff (M(f, \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B})) \iff (f = g).$

D'autre part, il résulte du théorème n° 10, p. 76, que toute matrice orthogonale est la matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ d'une application orthogonale ; h est donc une surjection. Il en résulte que h est une bijection de $\mathcal{O}(\vec{P})$ sur $\mathcal{O}$.

De plus, quelles que soient les applications f_1 et f_2 de $\mathcal{O}(\vec{P})$, nous avons :

$M(f_2 \circ f_1, \mathcal{B}) = M(f_2, \mathcal{B})\, M(f_1, \mathcal{B})$, c'est-à-dire : $h(f_2 \circ f_1) = h(f_2)\, h(f_1)$.

h est donc un **isomorphisme** de l'ensemble $\mathcal{O}(\vec{P})$, muni de la loi $\circ$, sur l'ensemble $\mathcal{O}$, muni de la multiplication des matrices.

Groupe des matrices orthogonales.

14 Nous savons que $\mathcal{O}(\vec{P})$ muni de la loi $\circ$ est un groupe. Nous allons montrer que l'existence de l'isomorphisme h permet d'établir que l'ensemble $\mathcal{O}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe.

Dans la suite de ce livre, nous serons amenés à utiliser plusieurs fois cette méthode de démonstration. En conséquence, nous allons démontrer le théorème suivant * :

---

15 **THÉORÈME : Soient un groupe** $(A, \star)$ **et un ensemble** B **muni d'une loi interne partout définie** $\perp$**. S'il existe un isomorphisme** h **de** $(A, \star)$ **sur** $(B, \perp)$**, alors** $(B, \perp)$ **est un groupe. Si, de plus, le groupe** $(A, \star)$ **est commutatif, alors le groupe** $(B, \perp)$ **est aussi commutatif.**

Considérons deux ensembles $(A, \star)$ et $(B, \perp)$ pour lesquels il existe un isomorphisme h de A sur B.

1. L'application h est une bijection de A sur B. Pour tout élément b de B, il existe donc un unique élément a de A tel que : $b = h(a)$; c'est l'élément : $a = h^{-1}(b)$.

2. L'application h est un homomorphisme de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$. Pour deux éléments quelconques a_1 et a_2 de A et pour leurs images $h(a_1)$ et $h(a_2)$ nous avons donc : $h(a_1 \star a_2) = b_1 \perp b_2$.

---

* Le lecteur est invité à se reporter au tome I, p. 58 et 59. Le théorème annoncé aurait pu être démontré à ce moment-là. Cependant, afin de bien mettre en évidence l'importance de ce théorème, il nous a paru préférable d'attendre, pour le démontrer, de pouvoir en donner immédiatement un exemple d'utilisation.

La loi $\perp$ dans B est associative : En effet, soient b_1, b_2, b_3 trois éléments de B.
Posons : $h^{-1}(b_1) = a_1$; $h^{-1}(b_2) = a_2$; $h^{-1}(b_3) = a_3$.
Dans le groupe (A, $\star$), nous avons : $(a_1 \star a_2) \star a_3 = a_1 \star (a_2 \star a_3)$.
Nous en déduisons : $h[(a_1 \star a_2) \star a_3] = h[a_1 \star (a_2 \star a_3)]$,
c'est-à-dire : $h(a_1 \star a_2) \perp h(a_3) = h(a_1) \perp h(a_2 \star a_3)$,
ou encore : $[h(a_1) \perp h(a_2)] \perp h(a_3) = h(a_1) \perp [h(a_2) \perp h(a_3)]$.
Nous avons donc l'égalité : $(b_1 \perp b_2) \perp b_3 = b_1 \perp (b_2 \perp b_3)$.

La loi $\perp$ dans B admet un élément neutre : En effet, dans le groupe (A, $\star$), la loi $\star$ admet un élément neutre e.
Soit b un élément de B. Posons : $h^{-1}(b) = a$.
Nous avons les égalités : $a \star e = e \star a = a$.
Nous en déduisons les égalités : $h(a \star e) = h(e \star a) = h(a)$,
ou encore : $h(a) \perp h(e) = h(e) \perp h(a) = h(a)$,
c'est-à-dire : $b \perp h(e) = h(e) \perp b = b$.
$h(e)$ est donc l'élément neutre pour la loi $\perp$ dans B ; c'est l'image par h de l'élément neutre e pour la loi $\star$ dans A.

Tout élément b de B admet un symétrique pour la loi $\perp$: En effet, soit b un élément de B. Posons : $h^{-1}(b) = a$.
Dans le groupe (A, $\star$), cet élément a admet pour la loi $\star$ un symétrique a'.
Nous avons les égalités : $a \star a' = a' \star a = e$.
Nous en déduisons : $h(a) \perp h(a') = h(a') \perp h(a) = h(e)$,
ou encore : $b \perp h(a') = h(a') \perp b = h(e)$.
L'élément b de B admet donc un symétrique pour la loi $\perp$; c'est l'élément $h(a')$, image par h du symétrique a' de a dans A pour la loi $\star$.
Nous en déduisons que (B, $\perp$) est un groupe.

Commutativité : Soient b_1 et b_2 deux éléments de B ; posons : $a_1 = h^{-1}(b_1)$ et $a_2 = h^{-1}(b_2)$.
Si le groupe (A, $\star$) est commutatif, nous avons l'égalité : $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$.
Nous en déduisons l'égalité : $h(a_1) \perp h(a_2) = h(a_2) \perp h(a_1)$,
ou encore : $b_1 \perp b_2 = b_2 \perp b_1$.
Le groupe (B, $\perp$) est alors un groupe commutatif.

---

16 THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices orthogonales, muni de la loi de multiplication des matrices est un groupe.

Nous avons en effet démontré au n° 13, p. 77, qu'il existe un isomorphisme h du groupe $\left(\mathcal{O}(\vec{P}), \circ\right)$ sur l'ensemble $\mathcal{O}$ muni de la multiplication des matrices.
Il résulte du théorème précédent que l'ensemble $\mathcal{O}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe. Ce groupe est appelé groupe des matrices orthogonales. On le note $(\mathcal{O}, \bullet)$.

17 **Remarque** : Le groupe $(\mathcal{O}, \bullet)$ des matrices orthogonales n'est pas un groupe commutatif.

Considérons par exemple les deux matrices orthogonales :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons les deux égalités :

$$MM' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M'M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous constatons que MM' et $M'M$ ne sont pas des matrices égales.

Ensembles $\mathcal{O}_+$ et $\mathcal{O}_-$.

18 On convient de noter $\mathcal{O}_+$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1.
On convient de noter $\mathcal{O}_-$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à -1.

Groupe commutatif $\mathcal{O}_+$.

19 THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{O}_+$ des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un sous-groupe commutatif du groupe $(\mathcal{O}, \bullet)$ des matrices orthogonales.

L'ensemble $\mathcal{O}_+$ est non vide.

En effet la matrice : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{O}_+$.

L'ensemble $\mathcal{O}_+$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{O}$.

En effet, soient M et M' deux éléments de $\mathcal{O}_+$; nous avons : Dét $M = 1$ et Dét $M' = 1$.
Le produit $M'M$ de deux éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$; de plus nous avons : Dét $(M'M) =$ Dét M Dét M'; nous en concluons : Dét $(M'M) = 1$.
La matrice $M'M$ appartient à $\mathcal{O}_+$.

Le symétrique pour la multiplication de tout élément de $\mathcal{O}_+$ appartient à $\mathcal{O}_+$.

En effet, soit M une matrice de $\mathcal{O}_+$: $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$.

Soit la matrice $M' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Nous avons : Dét $M' = a^2 + b^2 = 1$.

La matrice M' appartient donc à l'ensemble $\mathcal{O}_+$.
Calculons les produits $M'M$ et MM'; nous obtenons :

$$M'M = MM' = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire : } \quad M'M = MM' = I_2.$$

La matrice M' est donc la symétrique de la matrice M pour la multiplication des matrices, et cette matrice M' appartient à $\mathcal{O}_+$.
L'ensemble $\mathcal{O}_+$ muni de la loi de multiplication est donc un sous-groupe du groupe non commutatif $(\mathcal{O}, \bullet)$.

Le groupe $(\mathcal{O}_+, \bullet)$ est commutatif.

En effet, soient M et M′ deux matrices quelconques de $\mathcal{O}_+$; posons :

$$M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad a'^2 + b'^2 = 1.$$

Calculons le produit M′M ; nous avons :

$$M'M = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a - b'b & -(a'b + b'a) \\ b'a + a'b & b'b - a'a \end{bmatrix}.$$

Calculons le produit MM′ ; nous avons :

$$MM' = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ba' + ab' & bb' - aa' \end{bmatrix}.$$

Nous avons donc l'égalité : $MM' = M'M$.

L'ensemble $\mathcal{O}^+$ muni de la loi de multiplication est donc un groupe commutatif.

20 **Remarque** : L'ensemble $\mathcal{O}_-$ n'est pas stable pour la multiplication des matrices.
En effet, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathcal{O}_-$, nous avons :
Dét $M_1 = -1$ et Dét $M_2 = -1$.
Il en résulte : Dét $M_1M_2 = 1$. La matrice M_1M_2 n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{O}_-$.

Inverse d'une matrice orthogonale de $\mathcal{O}_+$. ${}^tM.M = I_2$

21 **THÉORÈME : Soit :** $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, **avec** $a^2 + b^2 = 1$, **une matrice orthogonale de** $\mathcal{O}_+$. **Le symétrique de** M **pour la loi de multiplication des matrices est la matrice :** $M' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. $= {}^tM$

Ce théorème résulte de l'égalité que nous venons d'établir au cours de la démonstration précédente : $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$.

La matrice M′ symétrique de la matrice M pour la loi de multiplication des matrices est appelée matrice inverse de la matrice M ; on la note M^{-1}.

Si : $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, nous avons : $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Rotations vectorielles.

Déterminant d'une application linéaire de $\vec{P}$.

22 Soient f une application linéaire de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$, et $\mathcal{B}$ une base de $\vec{P}$.
Désignons par $M(f, \mathcal{B})$ la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$, et par Dét $M(f, \mathcal{B})$ le déterminant de cette matrice.

On démontre et nous admettons le théorème suivant :

23 **THÉORÈME : Pour toute base $\mathcal{B}$ et pour toute base $\mathcal{B}'$ de $\vec{P}$, les déterminants** Dét $M(f, \mathcal{B})$ **et** Dét $M(f, \mathcal{B}')$ **sont égaux.**

Nous donnons alors la définition suivante :

24 **DÉFINITION : On appelle déterminant d'une application linéaire f de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ le déterminant, noté** Dét f, **d'une matrice de cette application dans une base de $\vec{P}$.**

Exemple : Soit f l'application linéaire de $\vec{P}$ représentée dans une base $\mathcal{B}$ par la matrice $M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Nous avons : Dét $M(f, \mathcal{B}) = 2$.

Nous en déduisons, pour toute base $\mathcal{B}'$ de $\vec{P}$, l'égalité : Dét $M(f, \mathcal{B}') = 2$.

Rotation vectorielle.

25 Soit f une application linéaire orthogonale de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$. Nous savons que f est représentée dans une base orthonormée par une matrice orthogonale et que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou à -1. Le déterminant de toute application linéaire orthogonale est donc égal à 1 ou à -1.

DÉFINITION : On appelle rotation vectorielle du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ toute application linéaire orthogonale de $\vec{P}$ dont le déterminant est égal à 1.

Exemples. 1. Soit $id_{\vec{P}}$ l'application identique du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$.

La matrice de cette application dans une base $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$id_{\vec{P}}$ est une application orthogonale et son déterminant est égal à 1.

$id_{\vec{P}}$ est donc une rotation vectorielle.

2. Soit l'application linéaire : $s : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}$, $\vec{X} \leadsto -\vec{X}$.

La matrice de cette application dans une base $\mathcal{B}$ est $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

s est une application orthogonale et son déterminant est égal à 1.

s est donc une rotation vectorielle.

Matrice d'une rotation vectorielle dans une base orthonormée.

26 **THÉORÈME : La matrice d'une rotation vectorielle de $\vec{P}$ appartient à $\mathcal{O}_+$.**

En effet, la matrice dans une base orthonormée, d'une rotation vectorielle est une matrice orthogonale de déterminant égal à 1. Une telle matrice appartient donc à l'ensemble $\mathcal{O}_+$.

27 **THÉORÈME : Toute matrice de $\mathcal{O}_+$ est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base orthonormée.**

En effet, soient M une matrice de $\mathcal{O}_+$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{P}$. La matrice orthogonale M est la matrice dans $\mathcal{B}$ d'une application orthogonale f. Nous avons de plus : Dét M = 1. Il en résulte l'égalité : Dét $f = 1$. L'application linéaire f est donc une rotation vectorielle.

Composée de deux rotations vectorielles.

28 **THÉORÈME : La composée de deux rotations vectorielles de $\vec{P}$ est une rotation vectorielle de $\vec{P}$.**

En effet, considérons deux rotations vectorielles f_1 et f_2 de $\vec{P}$, et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\vec{P}$.
Les matrices $M(f_1, \mathcal{B})$ et $M(f_2, \mathcal{B})$ appartiennent à $\mathcal{O}_+$.
La matrice de l'application $f_2 \circ f_1$ est : $M(f_2 \circ f_1, \mathcal{B}) = M(f_2, \mathcal{B})\, M(f_1, \mathcal{B})$.
La matrice $M(f_2 \circ f_1, \mathcal{B})$ appartient donc à $\mathcal{O}^+$; il en résulte que $f_2 \circ f_1$ est une rotation vectorielle de $\vec{P}$.
L'ensemble, noté $\mathcal{O}_+(\vec{P})$, des rotations vectorielles de $\vec{P}$ est donc une partie stable de $\mathcal{O}(\vec{P})$ pour la loi $\circ$.

Groupe des rotations vectorielles.

29 **THÉORÈME : L'ensemble $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ des rotations vectorielles de $\vec{P}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe commutatif.**

Pour démontrer ce théorème, nous allons construire un isomorphisme de $(\mathcal{O}_+, \bullet)$ sur $(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{P}$.

Considérons l'application h_1 de $\mathcal{O}_+$ dans $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ qui, à toute matrice M_1 de $\mathcal{O}_+$ associe l'unique rotation vectorielle f_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M_1.
Nous avons donc l'équivalence logique :
$(h_1(M_1) = f_1) \iff (M_1 = M(f_1, \mathcal{B}))$.
Il résulte des théorèmes n^os 25 et 26, p. 81, que h_1 est une bijection.
Montrons que h_1 est un homomorphisme de $(\mathcal{O}_+, \bullet)$ dans $(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ)$.
Considérons, en effet, deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{O}_+$.
Posons : $h_1(M_1) = f_1$ et $h_2(M_2) = f_2$.
Nous avons donc : $M_1 = M(f_1, \mathcal{B})$ et $M_2 = M(f_2, \mathcal{B})$.

Nous en déduisons : $M_2M_1 = M(f_2 \circ f_1, \mathcal{B})$,
c'est-à-dire : $h_1(M_2M_1) = h_1(M_2) \circ h_1(M_1)$.

L'application h_1 ainsi construite est donc un isomorphisme de $(\mathcal{O}_+, \bullet)$ sur $(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ)$.
Nous savons que $(\mathcal{O}_+, \bullet)$ est un groupe commutatif.

Du théorème n° 15, p. 77, nous déduisons que $(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ)$ est un groupe commutatif.

30 Remarques : 1. Nous venons de montrer successivement que :
$\mathcal{O}_+(\vec{P})$ est une partie stable de $\mathcal{O}(\vec{P})$ pour la loi $\circ$.
$\mathcal{O}_+(\vec{P})$ muni de la loi induite $\circ$ est un groupe commutatif. $\mathcal{O}_+(\vec{P})$, est donc un sous-groupe commutatif du groupe $(\mathcal{O}(\vec{P}), \circ)$.

2. Soit f une rotation vectorielle, et M la matrice telle que : $h_1(M) = f$.
h_1 est un isomorphisme de $\mathcal{O}_+$ sur $\mathcal{O}_+(\vec{P})$. La rotation vectorielle f^{-1} est donc l'image par h_1 de l'inverse M^{-1} de la matrice M : $h_1(M^{-1}) = f^{-1}$.

Si : $M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a, & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, on a : $M(f^{-1}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Il en résulte que les images respectives par f^{-1} des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la base $\mathcal{B}$ sont : $f^{-1}(\vec{i}) = a\vec{i} - b\vec{j}$ et $f^{-1}(\vec{j}) = b\vec{i} + a\vec{j}$.

Matrice de passage.

31 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un plan vectoriel $\vec{P}$: $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$; $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$.
Posons : $\vec{i}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, $\vec{j}' = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$. Nous avons introduit (n° 31, p. 259, tome I) la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

Nous avons montré que, pour tout vecteur $\vec{X}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (x, y) et dont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont (x', y'), on a l'égalité :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

DÉFINITION : La matrice $H = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

32 La matrice H est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'application linéaire f qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{i}'$ et $\vec{j}$ en $\vec{j}'$.
Si $\vec{P}$ est un plan vectoriel euclidien, et si les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées, alors f est une application linéaire orthogonale et H est une matrice orthogonale.

THÉORÈME : La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Matrices d'une rotation vectorielle dans deux bases orthonormées.

33 **THÉORÈME : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de $\vec{P}$, et H la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour toute rotation vectorielle f de $\vec{P}$, on a les propriétés suivantes :**
si H appartient à $\mathcal{O}_+$, $M(f, \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B})$
si H appartient à $\mathcal{O}_-$, $M(f, \mathcal{B}') = M(f^{-1}, \mathcal{B})$.

Soient : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ deux bases orthonormées de $\vec{P}$.
Posons : $\vec{i}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et $\vec{j}' = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$.

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donc : $H = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées; nous avons donc :
$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$

Posons : $M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $M(f, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$,
avec : $a^2 + b^2 = 1$ et $a'^2 + b'^2 = 1$.
Nous avons : $f(\vec{i}') = a'\vec{i}' + b'\vec{j}'$.
Nous en déduisons : $a' = \vec{i}'.f(\vec{i}')$ et $b' = \vec{j}'.f(\vec{i}')$.
Il en résulte successivement :

$$a' = (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}).(\alpha f(\vec{i}) + \beta f(\vec{j})),$$
$$a' = \alpha^2\vec{i}.f(\vec{i}) + \alpha\beta\vec{i}.f(\vec{j}) + \beta\alpha\vec{j}.f(\vec{i}) + \beta^2\vec{j}.f(\vec{j}),$$
$$a' = (\alpha^2 + \beta^2)\, a.$$
$$b' = (\gamma\vec{i} + \delta\vec{j}).(\alpha f(\vec{i}) + \beta f(\vec{j})),$$
$$b' = \alpha\gamma\vec{i}.f(\vec{i}) + \alpha\delta\vec{j}.f(\vec{i}) + \beta\gamma\vec{i}.f(\vec{j}) + \beta\delta\vec{j}.f(\vec{j}),$$
$$b' = (\alpha\gamma + \beta\delta)\, a + (\alpha\delta - \beta\gamma)\, b.$$

Finalement, nous obtenons : $a' = a$ et $b' = b.\text{Dét } H$.
Nous savons que H est une matrice orthogonale; nous avons donc :
$\text{Dét } H = 1$ ou $\text{Dét } H = -1$.

Si la matrice appartient à $\mathcal{O}_+$, nous avons : $\text{Dét } H = 1$. Nous avons alors :
$a' = a$ et $b' = b$, c'est-à-dire : $M(f, \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B})$.

Si la matrice appartient à $\mathcal{O}_-$, nous avons : $\text{Dét } H = -1$. Nous avons alors :
$a' = a$ et $b' = -b$, ou encore : $M(f, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$,
c'est-à-dire : $M(f, \mathcal{B}') = M(f^{-1}, \mathcal{B})$.

Angle de deux vecteurs unitaires.

Détermination d'une rotation vectorielle.

34 **THÉORÈME : Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien, $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ deux vecteurs unitaires de $\vec{P}$. Il existe une rotation vectorielle unique φ pour laquelle on a : $\vec{i'} = \varphi(\vec{i})$.**

Considérons deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ de $\vec{P}$. Désignons par $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$, et par (a, b) les coordonnées de $\vec{i'}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$; nous avons : $\vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j}$, avec $a^2 + b^2 = 1$.

C'est choisie de façon convenable

L'application linéaire φ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ est une rotation vectorielle pour laquelle on a : $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$, c'est-à-dire : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$.

NB : $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Il existe donc une rotation vectorielle φ pour laquelle on a : $\vec{i'} = \varphi(\vec{i})$.

Démontrons l'unicité d'une telle rotation vectorielle. Conservons les notations précédentes, et désignons par ψ une rotation vectorielle telle que : $\vec{i'} = \psi(\vec{i})$.
La matrice de la rotation vectorielle ψ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ avec $c^2 + d^2 = 1$. L'égalité : $\vec{i'} = \psi(\vec{i})$ implique alors : $\vec{i'} = c\vec{i} + d\vec{j}$.
Les égalités : $\vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{i'} = c\vec{i} + d\vec{j}$ impliquent : $a = c$ et $b = d$.
Les matrices respectives des rotations vectorielles φ et ψ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ sont des matrices égales. Les rotations vectorielles ψ et φ sont donc égales.
Il existe donc une rotation vectorielle unique φ pour laquelle on a : $\vec{i'} = \varphi(\vec{i})$.

Angle de deux vecteurs unitaires.

35 Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. Nous venons de démontrer que, pour tout couple $(\vec{i}, \vec{i'})$ de $\mathcal{U}^2$, il existe une rotation vectorielle unique φ telle que : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$.
Considérons donc l'application g_1 de $\mathcal{U}^2$ dans $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ qui à chaque couple $(\vec{i}, \vec{i'})$ de $\mathcal{U}^2$ associe la rotation vectorielle φ telle que : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$.

$g_1 : \mathcal{U}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_+(\vec{P})$

Considérons alors la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathcal{U}^2$ définie par :
$\left((\vec{i}, \vec{i'})\,\mathcal{R}\,(\vec{j}, \vec{j'})\right) \iff \left(g_1(\vec{i}, \vec{i'}) = g_1(\vec{j}, \vec{j'})\right)$.
La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive. C'est une **relation d'équivalence** dans $\mathcal{U}^2$. Cela découle de l'égalité
Par définition, deux couples $(\vec{i}, \vec{i'})$ et $(\vec{j}, \vec{j'})$ de vecteurs unitaires sont équivalents pour $\mathcal{R}$ si et seulement si la rotation φ qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{i'}$ transforme aussi $\vec{j}$ en $\vec{j'}$.

La classe d'équivalence d'un couple $(\vec{i}, \vec{i'})$ est donc l'ensemble des couples $(\vec{j}, \varphi(\vec{j}))$, où φ est la rotation vectorielle de $\vec{P}$ pour laquelle : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$ lorsque $\vec{j}$ décrit $\mathcal{U}$.
Nous convenons de noter $(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$ cette classe d'équivalence.

DÉFINITIONS : 1. On appelle angle du vecteur unitaire $\vec{i}$ et du vecteur unitaire $\vec{i'}$, la classe d'équivalence, notée $(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$, du couple $(\vec{i}, \vec{i'})$ modulo $\mathcal{R}$.
2. On appelle ensemble des angles du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ l'ensemble quotient $\mathcal{U}^2/\mathcal{R}$.

Nous noterons $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles de $\vec{P}$: $\mathcal{A} = \mathcal{U}^2/\mathcal{R}$.

Construction d'une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_+(\vec{P})$.

36 Soit a un angle de $\vec{P}$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$, et $(\vec{i}, \vec{i'})$ un représentant de a.
Nous avons donc : $a = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$ et $(\vec{i}, \vec{i'}) \in a$.
Soit φ l'unique rotation vectorielle pour laquelle on a : $\varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$.
Nous avons donc : $\varphi = g_1(\vec{i}, \vec{i'})$.
Pour tout autre couple $(\vec{j}, \vec{j'})$ qui appartient à a, nous avons aussi : $\varphi = g_1(\vec{j}, \vec{j'})$.
A chaque angle a de $\mathcal{A}$, nous pouvons donc associer une rotation vectorielle φ unique. Nous définissons ainsi une application g de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ par : $a \leadsto g(a) = \varphi$, où φ est la rotation vectorielle déterminée par un représentant quelconque $(\vec{i}, \vec{i'})$ de l'angle a.
Nous avons donc l'équivalence logique :

$$(\varphi = g(a)) \iff (\forall (\vec{i}, \vec{i'}) \in a, \ \vec{i'} = \varphi(\vec{i})), \quad \text{ou encore :}$$

$$(\varphi = g(a)) \iff \left(\forall \vec{i} \in \mathcal{U}, \ (\vec{i}, \varphi(\vec{i})) \in a\right).$$

37 Démontrons que l'application g est bijective.
1. L'application g est une surjection.
En effet, soient φ une rotation vectorielle et $\vec{i}$ un vecteur de $\vec{P}$; désignons par a l'angle $(\widehat{\vec{i}, \varphi(\vec{i})})$. Nous avons par définition : $g(a) = \varphi$.
Toute rotation vectorielle φ de $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ est donc l'image d'un angle a de $\mathcal{A}$.
2. L'application g est une injection.
En effet, soient a et b deux angles pour lesquels on a : $g(a) = g(b)$.
Posons : $\varphi = g(a) = g(b)$.
Nous avons les deux équivalences logiques :

$$(\varphi = g(a)) \iff \left(\forall \vec{i} \in \mathcal{U}, \ (\vec{i}, \varphi(\vec{i})) \in a\right);$$

$$(\varphi = g(b)) \iff \left(\forall \vec{i} \in \mathcal{U}, \ (\vec{i}, \varphi(\vec{i})) \in b\right).$$

Soit $\vec{i}_0$ un vecteur unitaire; le couple $(\vec{i}_0, \varphi(\vec{i}_0))$ appartient donc à l'angle a et à l'angle b.

Les classes d'équivalence a et b ne sont pas disjointes; elles sont donc égales. Nous venons de démontrer l'implication : $\big(g(a) = g(b)\big) \Longrightarrow (a = b)$; l'application g est donc injective.

Il en résulte que g est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_+(\vec{P})$.

38 Soit g^{-1} la bijection réciproque de la bijection g; posons : $g^{-1} = f$.
L'image par f de la rotation vectorielle φ est un angle a : $a = f(\varphi)$. Nous désignerons désormais cet angle par la notation $\widehat{\varphi}$. Avec cette notation, nous avons l'équivalence logique : $\big(\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \widehat{\varphi}\big) \Longleftrightarrow \big(\vec{j} = \varphi(\vec{i})\big)$.

Groupe commutatif des angles.

39 Soient $\widehat{\varphi_1}$ et $\widehat{\varphi_2}$ deux éléments de $\mathcal{A}$ respectivement associés aux rotations vectorielles φ_1 et φ_2 par la bijection f. Nous avons donc : $\widehat{\varphi_1} = f(\varphi_1)$ et $\widehat{\varphi_2} = f(\varphi_2)$.
Définissons dans $\mathcal{A}$ une opération, notée $+$ et appelée addition, en posant :

$f(\varphi_1) + f(\varphi_2) = f(\varphi_2 \circ \varphi_1)$, ou encore : $\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2} = \widehat{\varphi_2 \circ \varphi_1}$.

Par définition, l'application f est un homomorphisme de $\big(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ\big)$ dans $(\mathcal{A}, +)$.
Cette application f est bijective.

f est donc un isomorphisme de $\big(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ\big)$ sur $(\mathcal{A}, +)$.

Nous avons vu au n° 29, p. 82 que $\big(\mathcal{O}_+(\vec{P}), \circ\big)$ est un groupe commutatif; il résulte du théorème n° 15, p. 77 que **$(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif.**

40 Remarques : 1. L'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{A}$ est l'image par f de l'application $id_{\vec{P}}$; on appelle cet élément neutre l'angle nul, et on convient de le noter $\widehat{0}$; nous avons donc : $\widehat{0} = f(id_{\vec{P}})$. Pour tout angle $\widehat{\varphi}$, on a : $\widehat{\varphi} + \widehat{0} = \widehat{0} + \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}$.

2. Pour tout vecteur unitaire $\vec{i}$ de $\vec{P}$, l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{i})}$ est l'angle associé à la rotation vectorielle $id_{\vec{P}}$; il en résulte l'égalité : $\widehat{(\vec{i}, \vec{i})} = f(id_{\vec{P}})$, c'est-à-dire : $\widehat{(\vec{i}, \vec{i})} = \widehat{0}$.

3. Le symétrique de l'angle $\widehat{\varphi}$ pour la loi d'addition est l'image par f de φ^{-1}.
Le groupe $(\mathcal{A}, +)$ est commutatif. On note : $\widehat{\varphi^{-1}} = -\,\widehat{\varphi}$.

Soustraction de deux angles.

41 $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif; nous pouvons donc définir dans l'ensemble $\mathcal{A}$ une opération appelée soustraction et notée $-$.

Par définition, nous posons : $\widehat{\varphi_1} - \widehat{\varphi_2} = \widehat{\varphi_1} + \big(-\,\widehat{\varphi_2}\big)$.

La soustraction dans $\mathcal{A}$ est donc l'opération qui, au couple $\big(\widehat{\varphi_1}, \widehat{\varphi_2}\big)$ fait correspondre l'angle associé à la rotation vectorielle $(\varphi_2)^{-1} \circ \varphi_1$.

Propriétés de l'addition dans $\mathcal{A}$.

42 THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{j'})$ de vecteurs unitaires de $\vec{P}$, on a l'équivalence logique : $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j'}})\right) \Longleftrightarrow (\vec{j} = \vec{j'})$.

Si l'on a : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j'}})$, il existe une unique rotation vectorielle φ pour laquelle on a : $\vec{j} = \varphi(\vec{i})$ et $\vec{j'} = \varphi(\vec{i})$; nous en déduisons : $\vec{j} = \vec{j'}$.
Réciproquement, l'égalité : $\vec{j} = \vec{j'}$ implique l'égalité : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j'}})$.

43 THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs unitaires de $\vec{P}$, on a l'égalité : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, \vec{k}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{k}})$.

En effet, il existe deux rotations vectorielles φ_1 et φ_2 pour lesquelles on a :
$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = f(\varphi_1)$ et $(\widehat{\vec{j}, \vec{k}}) = f(\varphi_2)$.
Nous avons alors : $\vec{j} = \varphi_1(\vec{i})$ et $\vec{k} = \varphi_2(\vec{j})$.
Nous en déduisons : $\vec{k} = \varphi_2(\varphi_1(\vec{i}))$, ou encore : $\vec{k} = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(\vec{i})$.
Cette égalité implique : $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}}) = f(\varphi_2 \circ \varphi_1)$.
De l'égalité : $f(\varphi_1) + f(\varphi_2) = f(\varphi_2 \circ \varphi_1)$, nous déduisons l'égalité :
$(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, \vec{k}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{k}})$.

44 <u>Remarque</u> : Pour tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs unitaires de $\vec{P}$, nous déduisons du théorème précédent : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) = \hat{0}$.
Il en résulte l'égalité : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = -(\widehat{\vec{j}, \vec{i}})$.

45 THÉORÈME : Quels que soient les couples $(\vec{i}, \vec{i'})$ et $(\vec{j}, \vec{j'})$ de vecteurs unitaires de $\vec{P}$, on a l'équivalence logique :
$$\left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}})\right) \Longleftrightarrow \left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})\right).$$

Considérons en effet deux couples $(\vec{i}, \vec{i'})$ et $(\vec{j}, \vec{j'})$ de vecteurs unitaires de $\vec{P}$ pour lesquels on a : $(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}})$.
Dans le groupe $(\mathcal{A}, +)$, tout élément est régulier pour l'addition.
Nous avons donc l'équivalence logique :
$$\left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}})\right) \Longleftrightarrow \left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) + (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) + (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}})\right).$$
Appliquons les résultats du théorème précédent ; nous avons :
$$(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) + (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}}); \quad (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) + (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) = (\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})$$
Il en résulte : $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}})\right) \Longleftrightarrow \left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})\right)$.

Angles particuliers.

Angle nul.

46 **DÉFINITION : On appelle angle nul l'angle associé à la rotation vectorielle** $id_{\vec{P}}$.

Nous avons introduit cet angle au n° 40, p. 87 et nous l'avons noté $\widehat{0}$. Nous avons alors l'équivalence logique :

$$\forall(\vec{i},\vec{j}) \in \mathcal{U}^2, \quad \left(\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \widehat{0}\right) \iff (\vec{i} = \vec{j}).$$

Angle plat.

47 **DÉFINITION : On appelle angle plat l'angle associé à la rotation vectorielle s définie par :** $s : \vec{P} \longrightarrow \vec{P}, \quad \vec{X} \rightsquigarrow -\vec{X}$.

On convient de noter l'angle plat $\widehat{\varpi}$.
Nous avons l'équivalence logique suivante :

$$\forall(\vec{i},\vec{j}) \in \mathcal{U}^2, \quad \left(\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \widehat{\varpi}\right) \iff (\vec{j} = -\vec{i}).$$

Nous avons, pour tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{P}$, l'égalité : $(s \circ s)(\vec{X}) = -(-\vec{X})$; nous en déduisons : $s \circ s = id_{\vec{P}}$, puis :
$\widehat{\varpi} + \widehat{\varpi} = \widehat{0}$, c'est-à-dire : $\widehat{\varpi} = -\widehat{\varpi}$.

Angles droits.

48 **DÉFINITION : On appelle angle droit tout angle $\widehat{\delta}$ dont un représentant $(\vec{i},\vec{j})$ est un couple de deux vecteurs unitaires orthogonaux.**

Nous allons démontrer le théorème :

49 **THÉORÈME : Tout couple de vecteurs unitaires $(\vec{i'},\vec{j'})$ qui appartient à un angle droit est formé de deux vecteurs orthogonaux.**

Considérons un couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs unitaires orthogonaux, et l'angle droit $\widehat{\delta}$ qui admet $(\vec{i},\vec{j})$ pour représentant. Soit $(\vec{i'},\vec{j'})$ un couple de vecteurs unitaires qui appartient aussi à $\widehat{\delta}$.
Nous avons : $(\vec{i},\vec{j}) \in \widehat{\delta}$ et $(\vec{i'},\vec{j'}) \in \widehat{\delta}$; nous en déduisons : $\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \widehat{(\vec{i'},\vec{j'})} = \widehat{\delta}$.
L'égalité : $\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \widehat{(\vec{i'},\vec{j'})}$ est logiquement équivalente à l'égalité : $\widehat{(\vec{i},\vec{i'})} = \widehat{(\vec{j},\vec{j'})}$.
Il existe donc une rotation vectorielle unique φ pour laquelle on a :
$\vec{i'} = \varphi(\vec{i})$ et $\vec{j'} = \varphi(\vec{j})$.
Le couple $(\vec{i'},\vec{j'})$ est l'image par la rotation vectorielle φ du couple $(\vec{i},\vec{j})$.
$(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée; $(\vec{i'},\vec{j'})$ est donc une base orthonormée.

50 **THÉORÈME : Il existe deux angles droits et deux seulement.**

Soit un vecteur unitaire $\vec{i}$. Pour tout angle $\widehat{\varphi}$, il existe un unique vecteur $\vec{j}$ pour lequel on a : $(\vec{i}, \vec{j}) \in \widehat{\varphi}$.
Si $\widehat{\varphi}$ est un angle droit, tous les représentants de $\widehat{\varphi}$ sont des couples de vecteurs unitaires orthogonaux. Nous savons que, pour le vecteur unitaire $\vec{i}$, il existe deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{i}$ et deux seulement (n° 14, p. 61) ; si $\vec{j}$ est l'un de ces vecteurs, l'autre est le vecteur $-\vec{j}$.
Nous en déduisons qu'il existe au plus deux angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ déterminés respectivement par : $\widehat{\delta}_1 = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$ et $\widehat{\delta}_2 = (\widehat{\vec{i}, -\vec{j}})$.
Les vecteurs $\vec{j}$ et $-\vec{j}$ ne sont pas égaux ; il résulte du n° 42, p. 88 que les angles $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$ et $(\widehat{\vec{i}, -\vec{j}})$ ne sont pas des angles égaux.
Les angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ sont donc distincts.

51 **THÉORÈME : Les deux angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ vérifient les égalités : $\widehat{\delta}_2 = \widehat{\delta}_1 + \widehat{\varpi}$ et $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_2 + \widehat{\varpi}$.**

Soient en effet $(\vec{i}, \vec{j})$ un représentant de l'angle droit $\widehat{\delta}_1$ et $(\vec{i}, -\vec{j})$ un représentant de l'angle droit $\widehat{\delta}_2$.
Nous avons l'égalité : $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, \vec{i}})\right) + (\widehat{\vec{i}, -\vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + \left((\widehat{\vec{j}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, -\vec{j}})\right)$,
ou encore : $(\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) + (\widehat{\vec{i}, -\vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) + (\widehat{\vec{j}, -\vec{j}})$.
Nous en déduisons : $\widehat{0} + \widehat{\delta}_2 = \widehat{\delta}_1 + \widehat{\varpi}$, c'est-à-dire : $\widehat{\delta}_2 = \widehat{\delta}_1 + \widehat{\varpi}$.
De cette dernière égalité, nous déduisons : $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\varpi} = (\widehat{\delta}_1 + \widehat{\varpi}) + \widehat{\varpi}$,
ou encore : $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\varpi} = \widehat{\delta}_1 + (\widehat{\varpi} + \widehat{\varpi})$, c'est-à-dire : $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\varpi} = \widehat{\delta}_1$.

Angle de deux vecteurs non nuls.

52 Soient $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$; $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ les vecteurs unitaires respectivement définis par : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ et $\vec{i'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$.

DÉFINITION : On appelle angle des vecteurs non nuls $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ l'angle des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{i'}$.

Notons cet angle $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$; nous avons alors : $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$.

Propriétés des angles de deux vecteurs non nuls.

53 **THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{X}, \vec{X'}, \vec{X''})$ de vecteurs non nuls, on a l'équivalence logique :**

$$\left(\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} = \widehat{(\vec{X}, \vec{X''})}\right) \Longleftrightarrow (\vec{X'} \text{ et } \vec{X''} \text{ sont linéairement dépendants}).$$

Considérons les vecteurs unitaires : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$, $\vec{i'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$, $\vec{i''} = \dfrac{\vec{X''}}{\|\vec{X''}\|}$.

Par définition, nous avons : $\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i'})}$ et $\widehat{(\vec{X}, \vec{X''})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i''})}$.
Nous en déduisons l'équivalence logique :

$$\left(\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} = \widehat{(\vec{X}, \vec{X''})}\right) \Longleftrightarrow \widehat{(\vec{i}, \vec{i'})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i''})}.$$

Nous déduisons du n° 42, p. 88 l'équivalence logique :

$$\left(\widehat{(\vec{i}, \vec{i'})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i''})}\right) \Longleftrightarrow (\vec{i'} = \vec{i''}).$$

Les vecteurs unitaires $\vec{i'}$ et $\vec{i''}$ sont égaux si et seulement si l'on a : $\vec{X'} = \dfrac{\|\vec{X'}\|}{\|\vec{X''}\|}\vec{X''}$,

c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\vec{X'}$ et $\vec{X''}$ sont liés.

54 **THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{X}, \vec{X'}, \vec{X''})$ de vecteurs non nuls, on a l'égalité : $\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} + \widehat{(\vec{X'}, \vec{X''})} = \widehat{(\vec{X}, \vec{X''})}$.**

Considérons les vecteurs unitaires : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$; $\vec{i'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$; $\vec{i''} = \dfrac{\vec{X''}}{\|\vec{X''}\|}$.

Nous avons les égalités :
$\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i'})}$, $\widehat{(\vec{X'}, \vec{X''})} = \widehat{(\vec{i'}, \vec{i''})}$ et $\widehat{(\vec{X}, \vec{X''})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i''})}$.
De l'égalité n° 43, p. 88 : $\widehat{(\vec{i}, \vec{i'})} + \widehat{(\vec{i'}, \vec{i''})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{i''})}$, nous déduisons alors l'égalité : $\widehat{(\vec{X}, \vec{X'})} + \widehat{(\vec{X'}, \vec{X''})} = \widehat{(\vec{X}, \vec{X''})}$.

Angle de deux demi-droites vectorielles

55 Considérons deux demi-droites vectorielles $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta'}$ du plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ engendrées respectivement par les vecteurs non nuls $\vec{X}$ et $\vec{X'}$.

Nous rappelons les équivalences logiques : $(\vec{U} \in \vec{\Delta}) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \vec{U} = \lambda \vec{X})$,
et : $(\vec{U'} \in \vec{\Delta'}) \Longleftrightarrow (\exists \lambda' \in \mathbb{R}_+, \vec{U'} = \lambda' \vec{X'})$.

Soient les vecteurs unitaires : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ et $\vec{i'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$.

$\vec{i}$ est donc le vecteur unitaire de $\vec{\Delta}$ et $\vec{i'}$ est le vecteur unitaire de $\vec{\Delta'}$.

DÉFINITION : On appelle angle des deux demi-droites vectorielles $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta'}$ l'angle des vecteurs unitaires de ces demi-droites.

Notons cet angle $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}})$; nous avons donc : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$.

Propriétés des angles de demi-droites vectorielles.

56 **THÉORÈME : Pour tout vecteur non nul $\vec{X}$ d'une demi-droite vectorielle $\vec{\Delta}$ et pour tout vecteur non nul $\vec{X'}$ d'une demi-droite vectorielle $\vec{\Delta'}$, on a : $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}})$.**

En effet, soient $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta'}$ les demi-droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{i'}$. Pour tout vecteur $\vec{X}$ non nul de $\vec{\Delta}$ et pour tout vecteur $\vec{X'}$ non nul de $\vec{\Delta'}$, nous avons : $\vec{i} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ et $\vec{i'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$.

Il en résulte : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$.

57 **THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}, \vec{\Delta''})$ de demi-droites vectorielles, on a : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) + (\widehat{\vec{\Delta'}, \vec{\Delta''}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta''}})$.**

En effet, soient $\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}, \vec{\Delta''}$ les demi-droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs non nuls $\vec{X}, \vec{X'}, \vec{X''}$.

De l'égalité : $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}}) + (\widehat{\vec{X'}, \vec{X''}}) = (\widehat{\vec{X}, \vec{X''}})$, nous déduisons l'égalité : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) + (\widehat{\vec{\Delta'}, \vec{\Delta''}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta''}})$.

58 **THÉORÈME : Pour tout triplet $(\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}, \vec{\Delta''})$ de demi-droites vectorielles, on a l'équivalence logique : $\left((\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta''}})\right) \Longleftrightarrow (\vec{\Delta'} = \vec{\Delta''})$.**

En effet, désignons respectivement par $\vec{i}, \vec{i'}, \vec{i''}$ les vecteurs unitaires de $\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}, \vec{\Delta''}$.

Nous avons : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$, $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta''}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i''}})$.

De l'équivalence logique $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i''}})\right) \Longleftrightarrow (\vec{i'} = \vec{i''})$, nous déduisons l'équivalence logique : $\left((\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta''}})\right) \Longleftrightarrow (\vec{\Delta'} = \vec{\Delta''})$.

EXERCICES

1 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel $\vec{P}$ et $\vec{X}$ un vecteur de $\vec{P}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ définie par : $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = y\vec{i} + x\vec{j}$.

1° Vérifier directement que f est une application linéaire orthogonale. $\|\vec{f(x)}\| = \|\vec{X}\|$

2° Déterminer les matrices $M(f, \mathcal{B})$ et $M(f^{-1}, \mathcal{B})$.

3° Déterminer l'image par f^{-1} du vecteur $\vec{X}$. $M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det f = 1$

$M(f^{-1},\mathcal{B}) = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

◆ Même exercice que le précédent pour chacune des applications f suivantes (n^{os} 2 à 6) :

2 $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y)\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\vec{j}$.

3 $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y)\vec{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\vec{j}$.

4 $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = \left(x\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y - \dfrac{x}{2}\right)\vec{j}$.

5 $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{j}$.

6 $\vec{X} \leadsto f(\vec{X}) = \left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}y\right)\vec{i} - \left(\dfrac{x\sqrt{5}}{3} + \dfrac{2y}{3}\right)\vec{j}$.

7 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ et soient f_1 et f_2 deux applications linéaires orthogonales de $\vec{P}$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_+ \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_+$$

Déterminer les matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$ des applications orthogonales f et f' telles que : $f_1 \circ f = f_2$ et $f' \circ f_1 = f_2$.

$f = f_1^{-1} \circ f_2$, $f' = f_2 \circ f_1^{-1}$

◆ Même exercice que le précédent pour les applications orthogonales f_1 et f_2 dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement (n^{os} 8 et 9) :

8 $$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

9 $$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

EXERCICES

10 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. Déterminer, par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$, les applications linéaires orthogonales f qui vérifient la propriété : $f(\vec{i}).\vec{i} = \frac{1}{2}$.

♦ Même exercice que le précédent pour les applications linéaires orthogonales qui vérifient respectivement la propriété suivante (nᵒˢ 11 à 14) :

11 $f(\vec{i}).\vec{i} = -\frac{1}{2}$. **12** $f(\vec{j}).\vec{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13 $f(\vec{i}).\vec{j} = \frac{1}{4}$. **14** $f(\vec{j}).\vec{j} = -\frac{4}{5}$.

15 On désigne par M^2 la matrice produit d'une matrice M par M et par M^3 la matrice produit de M^2 par M. Résoudre dans $\mathcal{O}_+$ les équations :

$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$M \in \mathcal{O}_+$

16 On désigne par M′ l'inverse d'une matrice M de $\mathcal{O}$ pour la loi de multiplication dans $\mathcal{O}$.

1° Démontrer la propriété :

$\forall M \in \mathcal{O},\ \forall N \in \mathcal{O}_+,\quad M'NM \in \mathcal{O}_+$, ${}^t(M'NM)(M'NM) = I_2$

2° On définit dans l'ensemble $\mathcal{O}$ une relation $\mathcal{R}$ par :

$\forall M \in \mathcal{O},\ \forall N \in \mathcal{O} \quad (M \mathcal{R} N) \Longleftrightarrow (M'N \in \mathcal{O}_+)$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que l'ensemble quotient $\mathcal{O}/\mathcal{R}$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Rotations vectorielles.

17 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ et $\vec{X}$ un vecteur de $\vec{P}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f de $\vec{P}$ dans $\vec{P}$ définie par :

$\vec{X} \rightsquigarrow f(\vec{X}) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

L'application f est-telle une rotation vectorielle ? $M(f;B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Oui $\det M(f,B) = 1$

♦ Même exercice que le précédent pour les applications f suivantes (nᵒˢ 18 à 21) :

18 $\vec{X} \rightsquigarrow f(\vec{X}) = \frac{1}{3}(x + 2\sqrt{2}\,y)\,\vec{i} - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - y)\,\vec{j}$.

19 $\vec{X} \rightsquigarrow f(\vec{X}) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,y - x)\,\vec{i} + \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x + y)\,\vec{j}$.

20 $\vec{X} \rightsquigarrow f(\vec{X}) = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y)\,\vec{i} - \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}\,y)\,\vec{j}$.

21 $\vec{X} \rightsquigarrow f(\vec{X}) = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y)\,\vec{i} + \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}\,y)\,\vec{j}$.

22 Montrer que si f est une rotation vectorielle de $\vec{P}$, $-f$ est une rotation vectorielle de $\vec{P}$. car $M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $M(-f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$

23 Déterminer les rotations vectorielles f de $\vec{P}$ pour lesquelles on a : $f \circ f = id\,\vec{P}$. Donner, dans chaque cas, la matrice de f dans une base orthonormée. Chercher simplement f / ${}^tM(f,\mathcal{B}) = M$

24 Déterminer les rotations vectorielles f de $\vec{P}$ pour lesquelles on a : $f \circ f \circ f = id\,\vec{P}$. Donner, dans chaque cas, la matrice de f dans une base orthonormée. Chercher f / ${}^tM(f,\mathcal{B}) = M(f,\mathcal{B}) \times M(f,\mathcal{B})$

25 Soit g une rotation vectorielle de $\vec{P}$ dont la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ est : $\begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$. Déterminer les rotations vectorielles f telles que : $f \circ f = g$.

26 Soit f une application linéaire orthogonale de $\vec{P}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{O}_+(\vec{P})$ et soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1° Soit λ un réel. Déterminer les valeurs λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles il existe au moins un vecteur $\vec{X}$ non nul, qui vérifie l'égalité : $f(\vec{X}) = \lambda\vec{X}$. $\vec{X} \in \ker(f - \lambda\, id)$

2° On suppose : $a = \dfrac{3}{5}$ et $b = \dfrac{4}{5}$. Montrer qu'il existe deux vecteurs unitaires $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ pour lesquels on a respectivement :
$f(\vec{X}_1) = \lambda_1\vec{X}_1$ et $f(\vec{X}_2) = \lambda_2\vec{X}_2$.
Donner les coordonnées de $\vec{X}_1$ et de $\vec{X}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. Que peut-on dire de $\vec{X}_1$ et de $\vec{X}_2$?

3° Donner la matrice de f dans la base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$.

Angles.

27 Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. On considère une rotation vectorielle φ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

et un vecteur unitaire $\vec{i}$ de coordonnées $(0, -1)$ $= M\cdot\vec{i}$

dans $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées respectives du vecteur unitaire $\vec{i'}$ tel que : $(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = \hat{\varphi}$ et du vecteur unitaire $\vec{i''}$ tel que : $(\widehat{\vec{i''}, \vec{i}}) = \hat{\varphi}$. $= M\cdot\vec{i}$

◆ Même exercice que le précédent (nos 30 et 31) dans les cas suivants :

28 $M = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $\vec{i} : \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.

29 $M = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5} \end{bmatrix}$, $\vec{i} : \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

EXERCICES

30 Soient $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ deux vecteurs unitaires de $\vec{P}$ dont les coordonnées dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ sont respectivement : $(0, 1)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation vectorielle φ telle que :
$\widehat{\varphi} = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})$.

♦ Même exercice que le précédent dans chacun des cas suivants (nos 31 et 32) :

31 $\vec{i} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{i'} : \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

32 $\vec{i} : \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{i'} : \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

33 Soient $\vec{i}, \vec{i'}, \vec{j}$ trois vecteurs unitaires de $\vec{P}$ dont les coordonnées dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ sont respectivement :
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.
Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ du vecteur unitaire $\vec{j'}$ tel que :
$(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}})$.

34 Même exercice que le précédent pour les vecteurs $\vec{i}, \vec{i'}, \vec{j}$ de coordonnées respectives : $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

35 Soient $\widehat{\varphi}$ un angle, $\widehat{\varpi}$ l'angle plat, et $\widehat{\delta}$ un angle droit. Démontrer les équivalences logiques :

(1) $(\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = \widehat{0}) \Longleftrightarrow (\widehat{\varphi} = \widehat{\varpi})$.

(2) $(\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = \widehat{\varpi}) \Longleftrightarrow (\widehat{\varphi} = \widehat{\delta})$.

36 Écrire les matrices dans une base orthonormée des rotations vectorielles φ pour lesquelles on a : $\widehat{\varphi} = \widehat{\delta}$.

37 Soient $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ deux vecteurs unitaires et soient $\vec{j}$ et $\vec{j'}$ deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à $\vec{i}$ et à $\vec{i'}$.
Démontrer les implications :

(1) $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})\right) \Longrightarrow \left((\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{i'}})\right)$,

(2) $\left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{-\vec{i'}, \vec{j'}})\right) \Longrightarrow \left((\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) - (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) = \widehat{\varpi}\right)$.

38 Dans l'ensemble $\mathcal{U}^2$ des couples de vecteurs unitaires de $\vec{P}$, on définit une relation $\mathcal{R}$ par : $\left((\vec{i}, \vec{i'}) \,\mathcal{R}\, (\vec{j}, \vec{j'})\right) \Longleftrightarrow (\vec{i}.\vec{i'} = \vec{j}.\vec{j'})$.

1° Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Déterminer la classe d'équivalence d'un couple $(\vec{i_0}, \vec{i'_0})$.

39 Soient $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$ deux demi-droites vectorielles. Montrer qu'il existe deux demi-droites vectorielles $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta'}$ qui vérifient la propriété :
$(\widehat{\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}}) = (\widehat{\vec{\Delta}, \vec{\Delta}_2})$, $(\widehat{\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta'}}) = (\widehat{\vec{\Delta'}, \vec{\Delta}_2})$.
Quel est l'angle des demi-droites vectorielles $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta'}$?

27. Orientation. Cosinus et Sinus

Bases orthonormées de même orientation.

1 Nous avons démontré au n° 50, p. 90, qu'il existe, dans le plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ deux angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$, et deux seulement.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\vec{P}$.
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux. Il en résulte que la base $\mathcal{B}$ appartient à un, et à un seul, des angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$. Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est un représentant de $\widehat{\delta}_1$, $(\vec{i}, -\vec{j})$ est un représentant de $\widehat{\delta}_2$. Les ensembles $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ constituent donc une partition de l'ensemble des bases orthonormées de $\vec{P}$.

DÉFINITION : On dit que deux bases orthonormées : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ de $\vec{P}$ ont la même orientation si et seulement si elles appartiennent au même angle droit.

Propriétés des bases orthonormées de même orientation.

2 **THÉORÈME : Deux bases orthonormées : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ ont la même orientation si et seulement s'il existe une rotation vectorielle unique φ pour laquelle on a : $\vec{i}' = \varphi(\vec{i})$ et $\vec{j}' = \varphi(\vec{j})$.**

En effet soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ deux bases orthonormées. Elles ont la même orientation si et seulement si l'on a : $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})$.
Nous avons l'équivalence logique (n° 45, p. 88) :

$$\left((\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})\right) \longleftrightarrow \left((\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{j}'})\right).$$

Il en résulte que les bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement s'il existe une rotation vectorielle unique φ pour laquelle on a :
$\vec{i}' = \varphi(\vec{i})$ et $\vec{j}' = \varphi(\vec{j})$.

3 **THÉORÈME : Deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à l'ensemble $\mathcal{O}_+$.**

En effet soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ deux bases orthonormées.
La matrice de passage H de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application orthogonale φ pour laquelle on a : $\vec{i}' = \varphi(\vec{i})$ et $\vec{j}' = \varphi(\vec{j})$.
Nous avons : ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation) $\Longleftrightarrow$ $(\varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{P}))$ $\Longleftrightarrow$ $(H \in \mathcal{O}_+)$.
Il en résulte que les bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si H appartient à $\mathcal{O}_+$.

Orientation du plan vectoriel euclidien.

4 **Orienter le plan vectoriel euclidien $\vec{P}$, c'est choisir un des deux angles droits et appeler cet angle, angle droit positif.**
L'autre angle droit est appelé angle droit négatif.

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\vec{P}$.
Si $\mathcal{B}$ appartient à l'angle droit positif, on dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée positive de $\vec{P}$. Si $\mathcal{B}$ appartient à l'angle droit négatif, on dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée négative $\vec{P}$.
Un angle est déterminé par un de ses représentants. En pratique, pour orienter un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$, il suffit donc de choisir une base orthonormée de $\vec{P}$.

Matrice d'une rotation vectorielle dans $\vec{P}$ orienté.

5 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées positives de $\vec{P}$ et φ une rotation vectorielle de $\vec{P}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient donc à $\mathcal{O}_+$.
Il en résulte : $M(\varphi, \mathcal{B}) = M(\varphi, \mathcal{B}')$. Dans le plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$, la matrice $M(\varphi, \mathcal{B})$ ne dépend pas de la base orthonormée positive $\mathcal{B}$.
Pour toute base $\mathcal{B}$ orthonormée positive, nous posons donc : $M(\varphi) = M(\varphi, \mathcal{B})$.

Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle.

6 **DÉFINITION : Soit : $M(\varphi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, avec : $a^2 + b^2 = 1$, la matrice d'une rotation vectorielle φ dans le plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$.**
On appelle Cosinus de φ le réel a et Sinus de φ le réel b.

On note : $a = \text{Cos}\,\varphi$ et $b = \text{Sin}\,\varphi$.
La matrice de φ dans toute base orthonormée positive est donc :

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \text{Cos}\,\varphi & -\text{Sin}\,\varphi \\ \text{Sin}\,\varphi & \text{Cos}\,\varphi \end{bmatrix}$$

De l'égalité : $a^2 + b^2 = 1$, nous déduisons :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{P}), \quad (\text{Cos } \varphi)^2 + (\text{Sin } \varphi)^2 = 1.}$$

Exemples : Considérons, dans le plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$ la rotation vectorielle $id_{\vec{P}}$ et la rotation vectorielle s définie par : $\vec{X} \leadsto -\vec{X}$.

Nous avons : $\quad M(id_{\vec{P}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad$ et $\quad M(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Nous en déduisons : $\text{Cos } id_{\vec{P}} = 1 \quad$ et $\quad \text{Sin } id_{\vec{P}} = 0$;

et : $\quad \text{Cos } s = -1 \quad$ et $\quad \text{Sin } s = 0$.

Égalité de deux rotations vectorielles.

7 **THÉORÈME : Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté. Deux rotations vectorielles φ_1 et φ_2 de $\vec{P}$ sont égales si et seulement si :**
$\text{Cos } \varphi_1 = \text{Cos } \varphi_2$ **et** $\text{Sin } \varphi_1 = \text{Sin } \varphi_2$.

En effet, nous avons, pour une base orthonormée positive :

$(\varphi_1 = \varphi_2) \iff (M(\varphi_1) = M(\varphi_2))$, avec $M(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi_1 & -\text{Cos } \varphi_1 \\ \text{Sin } \varphi_1 & \text{Cos } \varphi_1 \end{bmatrix}$

et $M(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi_2 & -\text{Sin } \varphi_2 \\ \text{Sin } \varphi_2 & \text{Cos } \varphi_2 \end{bmatrix}$.

Il en résulte l'équivalence logique :

$(\varphi_1 = \varphi_2) \iff (\text{Cos } \varphi_1 = \text{Cos } \varphi_2 \quad \text{et} \quad \text{Sin } \varphi_1 = \text{Sin } \varphi_2)$.

Propriétés du Cosinus et du Sinus d'une rotation vectorielle.

Cosinus et Sinus de la composée de deux rotations vectorielles.

8 Considérons deux rotations vectorielles φ_1 et φ_2. Nous avons :

$M(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi_1 & -\text{Sin } \varphi_1 \\ \text{Sin } \varphi_1 & \text{Cos } \varphi_1 \end{bmatrix} \quad$ et $\quad M(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi_2 & -\text{Sin } \varphi_2 \\ \text{Sin } \varphi_2 & \text{Cos } \varphi_2 \end{bmatrix}$.

La composée $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est une rotation vectorielle dont la matrice $M(\varphi_2 \circ \varphi_1)$ est égale au produit $M(\varphi_2)\, M(\varphi_1)$.

$$M(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \begin{bmatrix} \text{Cos } (\varphi_2 \circ \varphi_1) & -\text{Sin } (\varphi_2 \circ \varphi_1) \\ \text{Sin } (\varphi_2 \circ \varphi_1) & \text{Cos } (\varphi_2 \circ \varphi_1) \end{bmatrix}.$$

Nous avons l'égalité : $\quad M(\varphi_2)\, M(\varphi_1) =$

$$\begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 - \text{Sin } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1 & -(\text{Sin } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 + \text{Cos } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1) \\ \text{Sin } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 + \text{Cos } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1 & \text{Cos } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 - \text{Sin } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1 \end{bmatrix}$$

Il en résulte les égalités :

$$\boxed{\forall \varphi_1 \in \mathcal{O}_+(\vec{P}), \ \forall \varphi_2 \in \mathcal{O}_+(\vec{P}), \quad \begin{array}{l} \text{Cos } (\varphi_2 \circ \varphi_1) = \text{Cos } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 - \text{Sin } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1 \\ \text{Sin } (\varphi_2 \circ \varphi_1) = \text{Sin } \varphi_2 \text{ Cos } \varphi_1 + \text{Cos } \varphi_2 \text{ Sin } \varphi_1 \end{array}}$$

Cosinus et Sinus de la rotation vectorielle réciproque φ^{-1}.

9 Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et φ une rotation vectorielle. Nous avons montré au n° 30, p. 83 que, si la matrice de la rotation vectorielle φ est égale à $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, la matrice de la rotation vectorielle réciproque φ^{-1} est égale à $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Il en résulte les égalités :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{P}), \quad \operatorname{Cos} \varphi^{-1} = \operatorname{Cos} \varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin} \varphi^{-1} = -\operatorname{Sin} \varphi}$$

Cosinus et Sinus d'un angle.

10 **DÉFINITION : Dans le plan vectoriel orienté $\vec{P}$, on appelle respectivement Cosinus et Sinus d'un angle le Cosinus et le Sinus de la rotation vectorielle associée à cet angle.**

Soit $\widehat{\varphi}$ l'angle associé à une rotation vectorielle φ ; nous avons :

$\operatorname{Cos} \widehat{\varphi} = \operatorname{Cos} \varphi$ et $\operatorname{Sin} \widehat{\varphi} = \operatorname{Sin} \varphi$.

11 Il résulte du théorème n° 7, p. 99 l'équivalence logique :

$(\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2) \Longleftrightarrow (\operatorname{Cos} \widehat{\varphi}_1 = \operatorname{Cos} \widehat{\varphi}_2$ et $\operatorname{Sin} \widehat{\varphi}_1 = \operatorname{Sin} \widehat{\varphi}_2)$.

Applications Cosinus et Sinus.

12 On appelle respectivement application Cosinus et application Sinus, les applications C et S définies par :

$C : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \widehat{\varphi} \rightsquigarrow \operatorname{Cos} \widehat{\varphi},$

$S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \widehat{\varphi} \rightsquigarrow \operatorname{Sin} \widehat{\varphi}.$

THÉORÈME : L'image de $\mathcal{A}$ par chacune des applications C et S est l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

Pour tout élément $\widehat{\varphi}$ de $\mathcal{A}$, nous avons : $(\operatorname{Cos} \widehat{\varphi})^2 + (\operatorname{Sin} \widehat{\varphi})^2 = 1$.

Nous en déduisons : $(\operatorname{Cos} \widehat{\varphi})^2 \leqslant 1$ et $(\operatorname{Sin} \widehat{\varphi})^2 \leqslant 1$,

puis : $-1 \leqslant \operatorname{Cos} \widehat{\varphi} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \operatorname{Sin} \widehat{\varphi} \leqslant 1$.

Il en résulte les inclusions : $C(\mathcal{A}) \subset [-1, 1]$ et $S(\mathcal{A}) \subset [-1, 1]$. (1)

Réciproquement, soit a un réel de l'intervalle $[-1, 1]$. Il existe donc un réel b pour lequel on a : $a^2 + b^2 = 1$, par exemple : $b = \sqrt{1 - a^2}$.

Dans une base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, la matrice $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ est la matrice d'une rotation vectorielle φ.

Par définition, nous avons : $\operatorname{Cos} \widehat{\varphi} = \operatorname{Cos} \varphi = a$.

Nous en déduisons : $[-1, 1] \subset C(\mathcal{A})$. (2)

D'une manière analogue on démontre : $[-1, 1] \subset S(\mathcal{A})$. (3)

Des inclusions (1), (2), (3), il résulte les égalités :

$C(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}) = [-1, 1]$.

Propriétés du Cosinus et du Sinus d'un angle.

Cosinus et Sinus de la somme de deux angles.

13 Soient $\widehat{\varphi_1}$ et $\widehat{\varphi_2}$ deux angles respectivement associés à deux rotations vectorielles φ_1 et φ_2.

Nous avons l'égalité : $\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2} = \widehat{\varphi_2 \circ \varphi_1}$.

Nous avons donc les égalités :

$\mathrm{Cos}\,(\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}) = \mathrm{Cos}\,(\widehat{\varphi_2 \circ \varphi_1})$ et $\mathrm{Sin}\,(\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}) = \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_2 \circ \varphi_1}$.

D'autre part, nous avons démontré les égalités :

$\mathrm{Cos}\,(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \mathrm{Cos}\,\varphi_2\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 - \mathrm{Sin}\,\varphi_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1$,

$\mathrm{Sin}\,(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \mathrm{Sin}\,\varphi_2\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 + \mathrm{Cos}\,\varphi_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1$.

Nous en déduisons les égalités :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall \widehat{\varphi_1} \in \mathcal{A},\ \forall \widehat{\varphi_2} \in \mathcal{A},\quad \mathrm{Cos}\,(\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}) &= \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_2}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_1} - \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_2}\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_1} \\ \mathrm{Sin}\,(\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}) &= \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_2}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_1} + \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_2}\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_1} \end{aligned}}$$

14 En particulier, si nous avons : $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi_1} = \widehat{\varphi_2}$, nous posons : $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = 2\widehat{\varphi}$; nous obtenons :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall \widehat{\varphi} \in \mathcal{A},\quad \mathrm{Cos}\,2\widehat{\varphi} &= (\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi})^2 - (\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi})^2 \\ \mathrm{Sin}\,2\widehat{\varphi} &= 2\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi} \end{aligned}}$$

Cosinus et Sinus de l'opposé d'un angle.

15 Considérons un angle $\widehat{\varphi}$ associé à une rotation vectorielle φ.

L'opposé de l'angle $\widehat{\varphi}$ est : $-\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi^{-1}}$.

Nous avons donc les égalités :

$\mathrm{Cos}\,(-\widehat{\varphi}) = \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi^{-1}}$ et $\mathrm{Sin}\,(-\widehat{\varphi}) = \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi^{-1}}$.

Nous avons démontré (n° 9, p. 101) les égalités :

$\mathrm{Cos}\,\varphi^{-1} = \mathrm{Cos}\,\varphi$ et $\mathrm{Sin}\,\varphi^{-1} = -\,\mathrm{Sin}\,\varphi$.

Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall \widehat{\varphi} \in \mathcal{A},\quad \mathrm{Cos}\,(-\widehat{\varphi}) = \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sin}\,(-\widehat{\varphi}) = -\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi}}$$

Cosinus et Sinus de la différence de deux angles.

16 Considérons deux angles $\widehat{\varphi_1}$ et $\widehat{\varphi_2}$ associés respectivement à deux rotations vectorielles φ_1 et φ_2.

La différence des angles φ_1 et φ_2 est : $\widehat{\varphi_1} - \widehat{\varphi_2} = \widehat{\varphi_1} + (-\widehat{\varphi_2})$.

Des résultats des deux paragraphes précédents, nous déduisons :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall \widehat{\varphi_1} \in \mathcal{A},\ \forall \widehat{\varphi_2} \in \mathcal{A},\quad \mathrm{Cos}\,(\widehat{\varphi_1} - \widehat{\varphi_2}) &= \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_1}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_2} + \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_1}\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_2} \\ \mathrm{Sin}\,(\widehat{\varphi_1} - \widehat{\varphi_2}) &= \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_1}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_2} - \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi_1}\,\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi_2} \end{aligned}}$$

Coordonnées d'un vecteur unitaire dans une base orthonormée positive.

17 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Soit φ la rotation vectorielle unique qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{u}$. Sa matrice dans la base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $\begin{bmatrix} \text{Cos } \varphi & -\text{ Sin } \varphi \\ \text{Sin } \varphi & \text{Cos } \varphi \end{bmatrix}$.
Nous en déduisons l'égalité :
$\vec{u} = \text{Cos } \varphi \vec{i} + \text{Sin } \varphi \vec{j}$.

L'angle $\widehat{\varphi}$ associé à φ est l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$. Nous avons donc le théorème :

THÉORÈME : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. Les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans cette base sont $(\text{Cos } \widehat{\varphi}, \text{Sin } \widehat{\varphi})$, où $\widehat{\varphi}$ est l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$.

Produit scalaire de deux vecteurs unitaires.

18 Considérons deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{u}$ de $\vec{P}$. Posons : $\widehat{\varphi} = (\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$.
Désignons par $\vec{j}$ l'unique vecteur unitaire pour lequel la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée positive. Nous avons alors : $\vec{u} = \text{Cos } \widehat{\varphi} \vec{i} + \text{Sin } \widehat{\varphi} \vec{j}$.
Nous en déduisons : $\vec{i} . \vec{u} = \text{Cos } \widehat{\varphi}$.

THÉORÈME : Le produit scalaire de deux vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien orienté est égal au Cosinus de leur angle.

Cosinus et Sinus d'angles particuliers.

19 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté, et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de ce plan. Convenons de noter $\widehat{\delta}_1$ l'angle droit positif auquel appartient la base $\mathcal{B}$, et $\widehat{\delta}_2$ l'angle droit négatif.

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{P}$; posons : $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \widehat{\varphi}$. Nous avons l'égalité : $\vec{u} = \text{Cos } \widehat{\varphi} \vec{i} + \text{Sin } \widehat{\varphi} \vec{j}$.
Envisageons les cas particuliers suivants :

20 <u>Premier cas</u> : $\vec{u} = \vec{i}$.

Nous avons donc : $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \widehat{0}$. De l'égalité : $\vec{i} = \text{Cos } \widehat{0} \vec{i} + \text{Sin } \widehat{0} \vec{j}$, nous déduisons les égalités : $\text{Cos } \widehat{0} = 1$; $\text{Sin } \widehat{0} = 0$.

21 Deuxième cas : $\vec{u} = -\vec{i}$.

Nous avons donc : $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \widehat{\varpi}$. De l'égalité : $-\vec{i} = \operatorname{Cos}\widehat{\varpi}\,\vec{i} + \operatorname{Sin}\widehat{\varpi}\,\vec{j}$, nous déduisons les égalités : $\operatorname{Cos}\widehat{\varpi} = -1$; $\operatorname{Sin}\widehat{\varpi} = 0$.

22 Troisième cas : $\vec{u} = \vec{j}$.

Nous avons donc : $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \widehat{\delta}_1$. De l'égalité : $\vec{j} = \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1\,\vec{i} + \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1\,\vec{j}$, nous déduisons les égalités : $\operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1 = 0$; $\operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1 = 1$.

23 Quatrième cas : $\vec{u} = -\vec{j}$.

Nous avons donc : $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \widehat{\delta}_2$. De l'égalité : $-\vec{j} = \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2\,\vec{i} + \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2\,\vec{j}$, nous déduisons les égalités : $\operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2 = 0$; $\operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2 = -1$.

Propriétés des angles particuliers.

24 Nous avons établi aux n^{os} 47, p. 89 et 51, p. 90 les égalités :

$\widehat{\varpi} + \widehat{\varpi} = \widehat{0}$; $\widehat{\delta}_2 = \widehat{\delta}_1 + \widehat{\varpi}$; $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_2 + \widehat{\varpi}$.

Nous nous proposons de calculer $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2$, $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1$, $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2$.

25 **THÉORÈME : Les angles droits $\widehat{\delta}_1$ et $\widehat{\delta}_2$ vérifient l'égalité : $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2 = \widehat{0}$.**

Nous avons en effet :

$\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1 \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2 - \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1 \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2 = 1$;

$\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1 \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2 + \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2 \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1 = 0$.

c'est-à-dire : $\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Cos}\widehat{0}$ et $\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Sin}\widehat{0}$.

Nous en déduisons : $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_2 = \widehat{0}$.

26 **THÉORÈME : L'angle droit $\widehat{\delta}_1$ vérifie l'égalité : $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1 = \widehat{\varpi}$.**

Nous avons en effet :

$\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1) = [\operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1]^2 - [\operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1]^2 = -1$;

$\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1) = 2 \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_1 \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_1 = 0$,

c'est-à-dire : $\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1) = \operatorname{Cos}\widehat{\varpi}$; $\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1) = \operatorname{Sin}\widehat{\varpi}$.

Nous en déduisons : $\widehat{\delta}_1 + \widehat{\delta}_1 = \widehat{\varpi}$.

27 **THÉORÈME : L'angle droit $\widehat{\delta}_2$ vérifie l'égalité : $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2 = \widehat{\varpi}$.**

Nous avons en effet :

$\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2) = [\operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2]^2 - [\operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2]^2 = -1$;

$\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2) = 2 \operatorname{Sin}\widehat{\delta}_2 \operatorname{Cos}\widehat{\delta}_2 = 0$,

c'est-à-dire : $\operatorname{Cos}(\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Cos}\widehat{\varpi}$ et $\operatorname{Sin}(\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2) = \operatorname{Sin}\widehat{\varpi}$.

Nous en déduisons : $\widehat{\delta}_2 + \widehat{\delta}_2 = \widehat{\varpi}$.

Condition d'orthogonalité de deux vecteurs unitaires.

28 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de ce plan vectoriel.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs unitaires de $\vec{P}$, et $\hat{\varphi}$ l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

Nous avons l'égalité : $\vec{u}.\vec{u'} = \text{Cos}\,\hat{\varphi}$.

Il en résulte l'équivalence logique : $(\vec{u} \perp \vec{u'}) \Longleftrightarrow (\text{Cos}\,\hat{\varphi} = 0)$.

De l'égalité : $(\text{Cos}\,\hat{\varphi})^2 + (\text{Sin}\,\hat{\varphi})^2 = 1$, nous déduisons : $(\text{Sin}\,\hat{\varphi})^2 = 1$.

$\text{Sin}\,\hat{\varphi}$ est donc égal à 1 ou à -1.

Nous avons : $(\text{Cos}\,\hat{\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,\hat{\varphi} = 1) \Longleftrightarrow (\hat{\varphi} = \hat{\delta}_1)$

et : $(\text{Cos}\,\hat{\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,\hat{\varphi} = -1) \Longleftrightarrow (\hat{\varphi} = \hat{\delta}_2)$.

THÉORÈME : Deux vecteurs unitaires sont orthogonaux si et seulement si l'angle de ces deux vecteurs est un angle droit.

Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée positive.

29 THÉORÈME : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. Les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{X}$ dans cette base sont :
$(\|\vec{X}\|\,\text{Cos}\,\hat{\varphi},\ \|\vec{X}\|\,\text{Sin}\,\hat{\varphi})$, **où $\hat{\varphi}$ est l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{X}})$.**

Soit $\vec{X}$ un vecteur non nul. Posons : $\vec{u} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est unitaire, et nous avons : $\hat{\varphi} = (\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{X}})$.

Il en résulte : $\vec{u} = \text{Cos}\,\hat{\varphi}\,\vec{i} + \text{Sin}\,\hat{\varphi}\,\vec{j}$;

nous en déduisons : $\vec{X} = (\|\vec{X}\|\,\text{Cos}\,\hat{\varphi})\,\vec{i} + (\|\vec{X}\|\,\text{Sin}\,\hat{\varphi})\,\vec{j}$.

Produit scalaire de deux vecteurs.

30 THÉORÈME : Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est égal au produit de leurs normes par le Cosinus de l'angle de ces vecteurs.

Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté, $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{P}$.

Posons : $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}}) = \hat{\varphi}$.

Désignons respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ les vecteurs unitaires $\dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ et $\dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$.

Nous avons (n° 18, p. 102) : $\vec{u}.\vec{u'} = \text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}.\dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$.

Nous en déduisons : $\vec{X}.\vec{X'} = \|\vec{X}\|.\|\vec{X'}\|.\text{Cos}\,\widehat{\varphi}$.

31 Il résulte alors du n° 28, p. 104 le théorème suivant :

THÉORÈME : Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle de ces vecteurs est un angle droit.

Cosinus de l'angle de deux vecteurs.

32 Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{X}$ et $\vec{X'}$. Posons $\widehat{\varphi} = (\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$. De l'égalité démontrée au n° 31, nous déduisons :

$$\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \frac{\vec{X}.\vec{X'}}{\|\vec{X}\|\,\|\vec{X'}\|}.$$

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. Désignons par (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ dans cette base. Nous avons les égalités :

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \|\vec{X'}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}; \qquad \vec{X}.\vec{X'} = xx' + yy'.$$

Nous en déduisons : $\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Sinus de l'angle de deux vecteurs.

33 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté, et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ de $\vec{P}$, dont les coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$ sont (x, y) et (x', y').

Posons : $\vec{u} = \dfrac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$; $\vec{u'} = \dfrac{\vec{X'}}{\|\vec{X'}\|}$; $\widehat{\varphi} = (\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

Désignons par $\vec{v}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et dont les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $\left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice appartient à $\mathcal{O}_+$; il en résulte que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe ; l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est égal à $\widehat{\delta}_1$.

De l'égalité : $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) - (\widehat{\vec{u}', \vec{v}})$ nous déduisons :
$\operatorname{Sin} \widehat{\varphi} = \operatorname{Sin} \widehat{\delta}_1 \operatorname{Cos} (\widehat{\vec{u}', \vec{v}}) - \operatorname{Cos} \widehat{\delta}_1 \operatorname{Sin} (\widehat{\vec{u}', \vec{v}})$, ou encore :
$\operatorname{Sin} \widehat{\varphi} = \operatorname{Cos} (\widehat{\vec{u}', \vec{v}})$.
$\vec{u}'$ est le vecteur unitaire de coordonnées $\left(\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right)$; il résulte du n° 32, p. 105, l'égalité :

$$\operatorname{Cos} (\vec{u}', \vec{v}) = \frac{-x'y + y'x}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nous en déduisons : $\operatorname{Sin} \widehat{\varphi} = \dfrac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$

34 Remarque : Nous avons donc l'égalité : $\operatorname{Sin} \widehat{\varphi} = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\|\vec{X}\| . \|\vec{X}'\|}.$

EXERCICES

1 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ deux bases orthonormées d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$. Les coordonnées des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}'$ et $\vec{j}'$ dans une base orthonormée de $\vec{P}$ sont respectivement :

$(0, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont-elles la même orientation ?

2 Même exercice que le précédent dans le cas où les coordonnées des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}'$ et $\vec{j}'$ sont respectivement :

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

3 Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$ et $\vec{i}'$ un vecteur unitaire de $\vec{P}$. Les coordonnées des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{i}'$ dans une base orthonormée de $\vec{P}$ sont respectivement :

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-1, 0)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{j}'$ pour lequel la base orthonormée $(\vec{i}', \vec{j}')$ a même orientation que la base $\mathcal{B}$.

4 Même exercice que le précédent dans le cas où les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{i'}$ sont respectivement :
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

5 Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive d'un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$. On considère un vecteur unitaire $\vec{i'}$ de $\vec{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

1° Déterminer le Cosinus et le Sinus de la rotation vectorielle φ telle que : $\vec{i'} = \varphi(\vec{i})$.

2° Donner les coordonnées du vecteur $\vec{j'}$ unitaire pour lequel $(\vec{i'}, \vec{j'})$ est une base orthonormée positive.

6 Même exercice que le précédent pour les vecteurs $\vec{i'}$ dont les coordonnées sont successivement : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

7 Vérifier les égalités suivantes :
$(\text{Sin}\,\widehat{\varphi} + \text{Cos}\,\widehat{\varphi})^2 + (\text{Sin}\,\widehat{\varphi} - \text{Cos}\,\widehat{\varphi})^2 = 2.$
$(\text{Cos}\,\widehat{\varphi})^4 - (\text{Sin}\,\widehat{\varphi})^4 = \text{Cos}\,2\widehat{\varphi}.$
$(\text{Sin}\,\widehat{\varphi} + \text{Cos}\,\widehat{\varphi})^2 - \text{Sin}\,2\widehat{\varphi} = 1.$
$(\text{Cos}\,\widehat{\varphi})^6 + (\text{Sin}\,\widehat{\varphi})^6 + 3(\text{Cos}\,\widehat{\varphi}\,\text{Sin}\,\widehat{\varphi})^2 = 1.$

8 Exprimer en fonction de $\text{Cos}\,\widehat{\varphi}$ seul, les réels suivants :
$\text{Cos}(\widehat{\varpi}+\widehat{\varphi})$, $\text{Cos}(\widehat{\varpi}-\widehat{\varphi})$, $\text{Cos}(\widehat{\varphi}-\widehat{\varpi})$, $\text{Cos}(\widehat{\varphi}-4\widehat{\varpi})$, $\text{Cos}(\widehat{\varphi}+5\widehat{\varpi})$.
$\text{Sin}(\widehat{\delta}_1+\widehat{\varphi})$, $\text{Sin}(\widehat{\delta}_2+\widehat{\varphi})$, $\text{Sin}(\widehat{\delta}_1-\widehat{\varphi})$, $\text{Sin}(\widehat{\varphi}+3\widehat{\delta}_1)$, $\text{Sin}(5\widehat{\delta}_2-\widehat{\varphi})$.

9 Exprimer en fonction de $\text{Sin}\,\widehat{\varphi}$ seul, les réels suivants :
$\text{Sin}(\widehat{\varphi}+\widehat{\varpi})$, $\text{Sin}(\widehat{\varpi}-\widehat{\varphi})$, $\text{Sin}(\widehat{\varphi}+\widehat{\varpi})$, $\text{Sin}(\widehat{\varphi}-3\widehat{\varpi})$, $\text{Sin}(\widehat{\varphi}+4\widehat{\varpi})$.
$\text{Cos}(\widehat{\delta}_1+\widehat{\varphi})$, $\text{Cos}(\widehat{\delta}_2+\widehat{\varphi})$, $\text{Cos}(\widehat{\delta}_1-\widehat{\varphi})$, $\text{Cos}(\widehat{\varphi}+3\widehat{\delta}_1)$, $\text{Cos}(5\widehat{\delta}_2+\widehat{\varphi})$.

10 Exprimer en fonction de $\text{Cos}\,\widehat{\varphi}$ et $\text{Sin}\,\widehat{\varphi}$ les réels $\text{Cos}\,3\widehat{\varphi}$ et $\text{Sin}\,3\widehat{\varphi}$.

11 Résoudre dans $\mathcal{A}$ les équations suivantes :
$\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \text{Sin}\,\widehat{\varphi}$, $\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = -\text{Sin}\,\widehat{\varphi}$, $|\text{Cos}\,\widehat{\varphi}| = |\text{Sin}\,\widehat{\varphi}|$.

12 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. On considère deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ dont les coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(2, -3)$ et $(5, 1)$.

1° Déterminer le Sinus et le Cosinus de l'angle $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$.

2° Soit φ la rotation vectorielle associée à l'angle $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$.
Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

13 Même exercice que le précédent pour des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ de coordonnées respectives : $(2, 1)$ et $(3, -2)$.

EXERCICES

14 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée négative de $\vec{P}$. On considère deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ dont les coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$ sont : (4, 2) et (3, 1).

1° Déterminer le Sinus et le Cosinus de l'angle $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$.

2° Soit φ la rotation vectorielle associée à l'angle $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

15 Même exercice que le précédent pour des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ de coordonnées respectives : (3, 4) et (1, 1).

16 Soient $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormée positive de $\vec{P}$. On considère deux couples de vecteurs $(\vec{X}, \vec{X'})$ et $(\vec{Y}, \vec{Y'})$ dont on donne les coordonnées dans $\mathcal{B}$. Dire dans chacun des cas suivants si les angles $(\widehat{\vec{X}, \vec{X'}})$ et $(\widehat{\vec{Y}, \vec{Y'}})$ sont égaux :

$\vec{X}(1, 1)$, $\vec{X'}(0, 1)$, $\vec{Y}(2,3)$, $\vec{Y'}(-1,5)$.

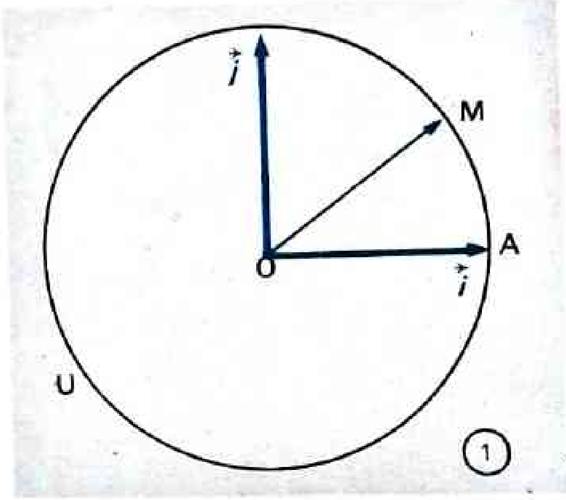
$\vec{X}(1, -2)$, $\vec{X'}(3, -1)$, $\vec{Y}(5, 4)$, $\vec{Y'}(1, -9)$.

SIXIÈME PARTIE

fonctions circulaires

28. Mesures d'un angle

Repère cartésien orienté.



1

1 Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$.

Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de ce plan affine. On dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormé positif** si et seulement $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée positive du plan vectoriel $\vec{P}$.

Cercle trigonométrique.

2 **DÉFINITION : Soit** O **un point du plan affine** P. **On appelle cercle trigonométrique de centre** O **l'ensemble, noté** U, **des points** M **de** P **tels que :** $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P ; on appelle origine du cercle trigonométrique U, de centre O, le point A de U, pour lequel on a : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ (fig. 1).

Bijection de l'ensemble des angles de $\vec{P}$ sur le cercle trigonométrique.

3 Considérons dans le plan affine euclidien P un repère orthonormé positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le cercle trigonométrique U de centre O, d'origine A.

Soit $(\mathcal{A}, +)$ le groupe commutatif des angles du plan vectoriel $\vec{P}$. Pour tout angle $\widehat{\varphi}$ de $\mathcal{A}$, il existe un point unique M du cercle trigonométrique U pour lequel on a : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \widehat{\varphi}$.

Nous définissons ainsi l'application u : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{U}$, $\widehat{\varphi} \leadsto \mathrm{M}$.

Pour tout point M de U, il existe un angle unique $\widehat{\varphi}$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) = \widehat{\varphi}$; c'est l'angle associé à l'unique rotation vectorielle φ telle que : $\overrightarrow{OM} = \varphi(\overrightarrow{OA})$.
Nous en déduisons : $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{U}, \quad \exists ! \widehat{\varphi}, \quad u(\widehat{\varphi}) = \mathrm{M}$.
L'application u est donc une bijection de $\mathcal{A}$ sur U.

Application canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$.

4 Soit Δ une droite sur laquelle on a choisi une origine a et un vecteur directeur unitaire $\vec{\alpha}$: $\|\vec{\alpha}\| = \|\vec{i}\| = 1$.

L'application de $\mathbb{R}$ dans Δ, qui à tout réel x associe le point m de Δ pour lequel on a : $\overrightarrow{am} = x\,\vec{\alpha}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur Δ.

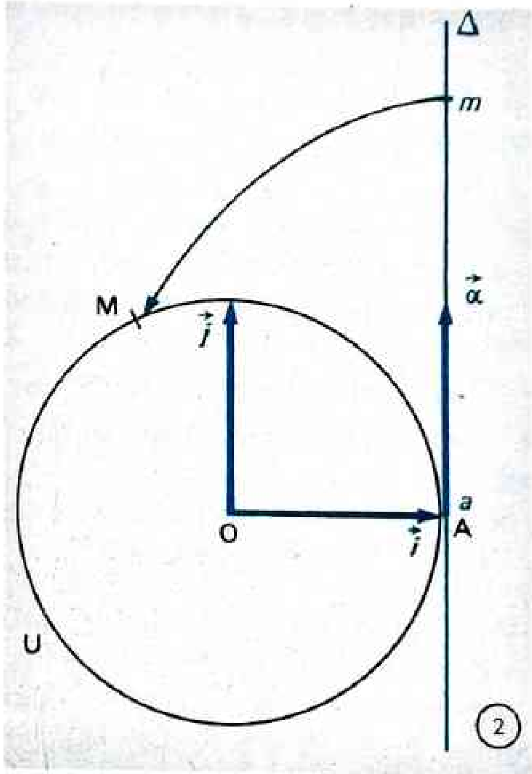
En effet, pour tout point m de Δ, il existe un réel unique x tel que : $\overrightarrow{am} = x\,\vec{\alpha}$.

Représentons le groupe des angles $(\mathcal{A}, +)$ par le cercle trigonométrique U de centre O et d'origine A, et le groupe des réels $(\mathbb{R}, +)$ par la droite affine Δ d'origine a et de vecteur directeur unitaire $\vec{\alpha}$.

Δ peut être matérialisée par un fil, et U par la gorge d'une poulie.

Enroulons Δ sur U de façon que le point a de Δ coïncide avec le point A de U.

Tout point m de Δ vient coïncider avec un point unique M de U (fig. 2).



2

Il parait donc naturel d'admettre qu'à tout réel x on peut faire correspondre un angle unique $\widehat{\varphi}$. On définit ainsi une application θ de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$, qui, au réel x, abscisse du point m de Δ, associe l'angle : $\widehat{\varphi} = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$.

5 Soit a' le premier point de Δ d'abscisse positive qui, après enroulement du fil, vient coïncider avec le point A. Désignons par 2π l'abscisse du point a'.
Marquons sur la droite Δ les points d'abscisses : ..., -4π, -2π, 2π, 4π, ...
Tous ces points, après enroulement du fil, coïncident avec le point A, et réciproquement, un point de Δ vient coïncider avec le point A si son abscisse est le produit de 2π par un entier relatif k. Au point A correspond l'angle nul $\widehat{0}$.
Il paraît donc naturel d'admettre que l'application θ possède la propriété :
$\left(\theta(x) = \widehat{0}\right) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = k.2\pi)$.
De plus, après enroulement du fil, tout point de U coïncide avec au moins un point de Δ ; il est donc naturel d'admettre que θ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$.

6 Soient x et y deux réels ; marquons sur la droite Δ, le point b d'abscisse x et le point c d'abscisse y.

Soit d le point de Δ défini par : $\overrightarrow{cd} = x\vec{\alpha} = \overrightarrow{ab}$.
Après enroulement du fil, les points b, c, d coïncident respectivement avec les points B, C, D du cercle trigonométrique U. (fig. 3)

Il est naturel d'admettre que les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$ sont égaux.

Nous avons : $\overrightarrow{ab} = x\vec{\alpha}$; $\overrightarrow{ac} = y\vec{\alpha}$; $\overrightarrow{ad} = (x+y)\vec{\alpha}$.
Nous avons donc :

$$\theta(x) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right); \quad \theta(y) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right); \quad \theta(x+y) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}\right).$$

Nous avons aussi :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right)$$

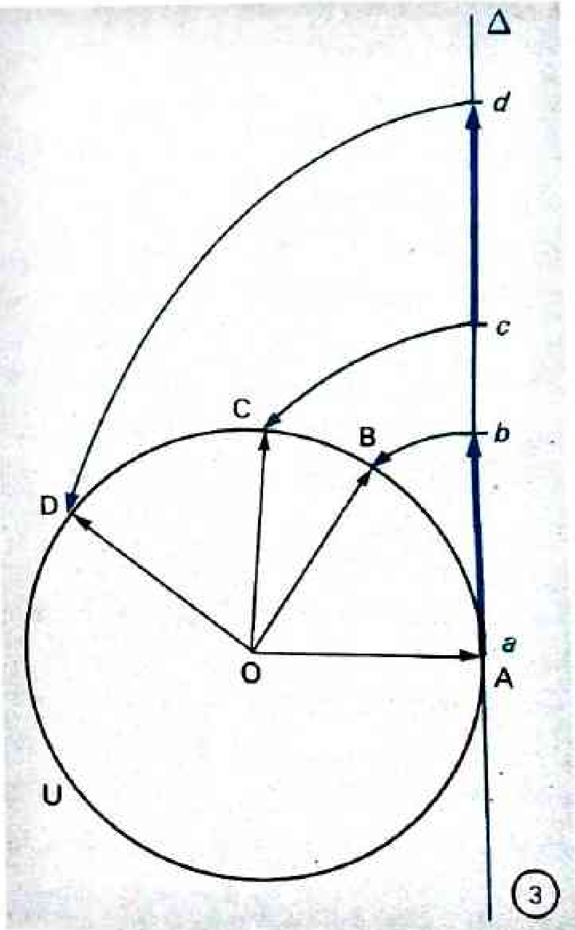
c'est-à-dire : $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$.
Il paraît donc naturel d'admettre que θ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{A}, +)$.

7 En résumé, il paraît naturel d'admettre que l'on peut construire une application unique* θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ qui possède les trois propriétés suivantes :

1. **θ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$;**
2. **θ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$:**
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$.
3. $(\theta(x) = \hat{0}) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = k.2\pi)$.

Cette application θ est appelée **surjection canonique** de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$.

On démontre et nous admettons que le réel π vérifie : $3{,}14159 < \pi < 3{,}14160$.



Propriétés de la surjection canonique θ.

8 Nous avons l'égalité : $0 = 0.2\pi$; de la propriété 3, nous déduisons : $\boxed{\theta(0) = \hat{0}}$

* En fait, on démontre qu'il existe plusieurs applications θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ qui vérifient ces trois propriétés. Parmi toutes ces applications θ, on démontre qu'il en existe une et une seule pour laquelle l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \rightsquigarrow (S \circ \theta)(x)$ est dérivable au point 0, et de nombre dérivé égal à 1. Nous admettrons cette propriété au nº 26, p. 124. C'est donc cette application que nous utilisons ici.

9 Soit x un réel et soit k un entier relatif. De la propriété 2, il résulte l'égalité : $\theta(x + k.2\pi) = \theta(x) + \theta(k.2\pi)$.

Nous avons l'égalité : $\theta(k.2\pi) = \widehat{0}$, et $\widehat{0}$ est l'élément neutre de l'addition dans $\mathcal{A}$.

Nous en déduisons : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \theta(x + k.2\pi) = \theta(x)}$

10 Soit x un réel. Nous avons : $\theta(x - x) = \theta(0) = \widehat{0}$ et $\theta(x - x) = \theta(x) + \theta(-x)$. Il en résulte l'égalité : $\theta(x) + \theta(-x) = \widehat{0}$; $\theta(-x)$ est donc l'opposé de $\theta(x)$ pour l'addition dans $\mathcal{A}$.

Nous en déduisons : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(-x) = -\theta(x)}$

11 Soient x et y deux réels. Nous avons les égalités :
$\theta(x - y) = \theta\big(x + (-y)\big) = \theta(x) + \theta(-y) = \theta(x) - \theta(y)$.

Nous avons donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \theta(x - y) = \theta(x) - \theta(y)}$.

12 Soient x_1 et x_2 deux réels. Nous avons les équivalences logiques :

$$\big(\theta(x_2) = \theta(x_1)\big) \iff \big(\theta(x_2) - \theta(x_1) = \widehat{0}\big);$$
$$\big(\theta(x_2) - \theta(x_1) = \widehat{0}\big) \iff \big(\theta(x_2 - x_1) = \widehat{0}\big);$$
$$\big(\theta(x_2 - x_1) = \widehat{0}\big) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x_2 - x_1 = k.2\pi).$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in \mathbb{R},\ \big(\theta(x_2) = \theta(x_1)\big) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x_2 - x_1 = k.2\pi)}$$

Image d'un réel sur le cercle trigonométrique.

13 Considérons le cercle trigonométrique U de centre O et d'origine A. Nous avons mis en évidence au n° 3, p. 110 une bijection u de $\mathcal{A}$ sur le cercle trigonométrique U. L'application $u \circ \theta$ est donc une application de $\mathbb{R}$ sur U.

DÉFINITION : On appelle image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O et d'origine A l'image de x par l'application $u \circ \theta$.

Un point M de U est donc l'image par $u \circ \theta$ d'un réel x si et seulement si l'on a : $\big(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\big) = \theta(x)$.

14 **THÉORÈME : Pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, le réel $x + k.2\pi$ a la même image que x par $u \circ \theta$.**

En effet, soient k un entier relatif et x un réel. Désignons par M et M′ les images respectives des réels x et $x + k.2\pi$ par l'application $u \circ \theta$.

De l'égalité : $\theta(x + k.2\pi) = \theta(x)$, il résulte l'égalité : $\big(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}}\big) = \big(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\big)$; nous en déduisons : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, puis : $M' = M$.

Mesure d'un angle.

15 Considérons la surjection canonique θ de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$.
Pour tout angle $\widehat{\varphi}$, il existe au moins un réel x pour lequel on a : $\theta(x) = \widehat{\varphi}$.

DÉFINITION : On appelle mesure en radians d'un angle $\widehat{\varphi}$ tout réel x pour lequel on a : $\theta(x) = \widehat{\varphi}$.

Par exemple, 0 est une mesure en radians de l'angle nul $\widehat{0}$.
Pour tout entier relatif k, $k.2\pi$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{0}$.

16 **THÉORÈME : Un point M du cercle trigonométrique de centre O et d'origine A est l'image d'un réel x si et seulement si x est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$.**

En effet, un point M est l'image du réel x par l'application $u \circ \theta$ si et seulement si : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \theta(x)$, c'est-à-dire si et seulement si x est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$.

17 **THÉORÈME : Soient $\widehat{\varphi}$ un angle et x_1 une mesure de $\widehat{\varphi}$. Un réel x_2 est une mesure de $\widehat{\varphi}$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x_2 = x_1 + k.2\pi$.**

En effet, x_1 est une mesure de $\widehat{\varphi}$; nous avons donc : $\theta(x_1) = \widehat{\varphi}$.
x_2 est une mesure de $\widehat{\varphi}$ si et seulement si l'on a : $\theta(x_2) = \widehat{\varphi}$, c'est-à-dire, si et seulement si l'on a : $\theta(x_2) = \theta(x_1)$.
De la propriété du n° 12, p. 113, il résulte que x_2 est une mesure de $\widehat{\varphi}$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x_2 = x_1 + k.2\pi$.

Propriétés des mesures des angles.

Mesure de la somme de deux angles.

18 Soient $\widehat{\varphi_1}$ et $\widehat{\varphi_2}$ deux angles. Désignons par x_1 une mesure de $\widehat{\varphi_1}$ et par x_2 une mesure de $\widehat{\varphi_2}$; nous avons : $\theta(x_1) = \widehat{\varphi_1}$ et $\theta(x_2) = \widehat{\varphi_2}$.
Nous en déduisons : $\theta(x_1 + x_2) = \theta(x_1) + \theta(x_2) = \widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}$.
Le réel $x_1 + x_2$ est donc une mesure de l'angle $\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}$.

THÉORÈME : Si x_1 est une mesure d'un angle $\widehat{\varphi_1}$ et si x_2 est une mesure d'un angle $\widehat{\varphi_2}$, le réel $x_1 + x_2$ est une mesure de l'angle $\widehat{\varphi_1} + \widehat{\varphi_2}$.

Mesure de deux angles opposés.

19 Soient $\widehat{\varphi}$ un angle et $-\widehat{\varphi}$ son opposé. Désignons par x une mesure de l'angle $\widehat{\varphi}$; nous avons : $\theta(x) = \widehat{\varphi}$.

De la propriété du nº 10, p. 113, nous déduisons : $\theta(-x) = -\theta(x) = -\widehat{\varphi}$.

THÉORÈME : Si x est une mesure d'un angle $\widehat{\varphi}$, le réel $-x$ est une mesure de l'angle $-\widehat{\varphi}$.

Mesures de l'angle plat.

20 Soit x une mesure de l'angle plat $\widehat{\varpi}$; nous avons : $\theta(x) = \widehat{\varpi}$.

Nous avons l'égalité (nº 47, p. 89) : $\widehat{\varpi} + \widehat{\varpi} = \widehat{0}$.

Nous en déduisons : $\theta(2x) = \widehat{0}$.

Le réel $2x$ est donc une mesure de l'angle nul. Il existe donc un entier relatif k pour lequel on a : $2x = k.2\pi$, c'est-à-dire : $x = k\pi$.

Nous avons : $\widehat{\varpi} \neq \widehat{0}$; nous avons donc : $\theta(k\pi) \neq \widehat{0}$.

Il en résulte que k n'est pas un multiple de 2.

Il existe alors un entier relatif λ pour lequel on a : $k = 2\lambda + 1$.

Nous avons donc : $x = (2\lambda + 1)\pi$, c'est-à-dire : $x = \pi + \lambda.2\pi$.

Du théorème nº 17, p. 114, nous déduisons : **π est une mesure de l'angle plat $\widehat{\varpi}$.**

Toutes les mesures de l'angle $\widehat{\varpi}$ sont donc de la forme : $\pi + k.2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Mesures d'un angle droit.

21 Soit $\widehat{\delta}_1$ l'angle droit positif et soit $\widehat{\delta}_2$ l'angle droit négatif.

Désignons par $\widehat{\delta}$ l'un de ces deux angles et par x une mesure de $\widehat{\delta}$.

Nous avons : $\theta(x) = \widehat{\delta}$.

De l'égalité (nºs 26 et 27, p. 103) : $\widehat{\delta} + \widehat{\delta} = \widehat{\varpi}$, nous déduisons : $\theta(2x) = \widehat{\varpi}$.

Le réel $2x$ est donc une mesure de l'angle plat $\widehat{\varpi}$. Il existe donc un entier relatif k pour lequel on a : $2x = \pi + k.2\pi$, c'est-à-dire : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Distinguons deux cas :

1. k est pair. Posons : $k = 2\lambda$; nous avons alors : $x = \frac{\pi}{2} + \lambda.2\pi$.

Le réel $\frac{\pi}{2}$ est, dans ce cas, une mesure de l'angle $\widehat{\delta}$.

2. k est impair. Posons : $k = 2\lambda - 1$; nous avons alors : $x = -\frac{\pi}{2} + \lambda.2\pi$.

Le réel $-\frac{\pi}{2}$ est, dans ce cas, une mesure de l'angle $\widehat{\delta}$.

On démontre et nous admettons que :

1. k est pair si et seulement si : $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}_1$.
2. k est impair si et seulement si : $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}_2$.

Nous en déduisons :

1. Une mesure de l'angle droit positif $\widehat{\delta_1}$ est $\frac{\pi}{2}$; toutes les mesures de $\widehat{\delta_1}$ sont de la forme : $\frac{\pi}{2} + k.2\pi$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

2. Une mesure de l'angle droit négatif $\widehat{\delta_2}$ est $-\frac{\pi}{2}$; toutes les mesures de $\widehat{\delta_2}$ sont de la forme : $-\frac{\pi}{2} + k.2\pi$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

Mesure d'un angle en degrés.

22 **DÉFINITION : On dit qu'un réel y est une mesure en degrés d'un angle $\widehat{\varphi}$ si et seulement si le réel : $x = \frac{\pi}{180} y$ est une mesure en radians de $\widehat{\varphi}$.**

23 Soit y_1 une mesure en degrés de $\widehat{\varphi}$; le réel : $x_1 = \frac{\pi}{180} y_1$ est une mesure en radians de $\widehat{\varphi}$.

Un réel y_2 est une mesure en degrés de $\widehat{\varphi}$ si et seulement si le réel : $x_2 = \frac{\pi}{180} y_2$ est une mesure en radians de $\widehat{\varphi}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x_2 = x_1 + k.2\pi$, ou encore : $y_2 = y_1 + k.360$.

<u>Exemples</u> : 1. Une mesure en degrés de l'angle plat $\widehat{\varpi}$ est 180; toutes les autres sont de la forme : $180 + k.360$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

2. Une mesure en degrés de l'angle droit positif $\widehat{\delta_1}$ est : 90; toutes les autres sont de la forme : $90 + k.360$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

Mesure d'un angle en grades.

24 **DÉFINITION : On dit qu'un réel z est une mesure en grades d'un angle $\widehat{\varphi}$ si et seulement si le réel : $x = \frac{\pi}{200} z$ est une mesure en radians de $\widehat{\varphi}$.**

25 D'une manière analogue à celle du n° 23, on montre que si z_1 est une mesure en grades de $\widehat{\varphi}$, un réel z_2 est une mesure en grades de $\widehat{\varphi}$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $z_2 = z_1 + k.400$.

<u>Exemples</u> : 1. Toutes les mesures en grades de l'angle plat $\widehat{\varpi}$ sont de la forme : $200 + k.400$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

2. Toutes les mesures en grades de l'angle droit positif $\widehat{\delta_1}$ sont de la forme : $100 + k.400$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.

29. Fonctions circulaires

Fonction sinus. Fonction cosinus.

Fonction sinus. Fonction cosinus.

1 Considérons un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$ et l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de ce plan. Nous avons défini (n° 12, p. 100) les fonctions :

$S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi} \rightsquigarrow \operatorname{Sin} \widehat{\varphi}$, et :

$C : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi} \rightsquigarrow \operatorname{Cos} \widehat{\varphi}$.

Soit θ la surjection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$ (n° 7, p. 112).

Les applications composées $S \circ \theta$ et $C \circ \theta$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; ce sont des fonctions numériques de variable réelle.

DÉFINITIONS : 1. On appelle fonction sinus la fonction, notée s, composée de θ par S.
2. On appelle fonction cosinus la fonction, notée c, composée de θ par C.

Nous avons donc : $s = S \circ \theta$ et $c = C \circ \theta$.

Ensembles des valeurs des fonctions sinus et cosinus.

2 **THÉORÈME : L'ensemble des valeurs de chacune des fonctions sinus et cosinus est l'intervalle** $[-1, 1]$.

En effet, θ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$; nous avons donc : $\theta(\mathbb{R}) = \mathcal{A}$.

Nous avons montré (n° 12, p. 100) les égalités :

$S(\mathcal{A}) = [-1, 1]$ et $C(\mathcal{A}) = [-1, 1]$.

Il en résulte les égalités :

$(S \circ \theta)(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $(C \circ \theta)(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, c'est-à-dire :

$s(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $c(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

sinus et cosinus d'un réel.

3 L'image d'un réel x par l'application s est appelée **sinus du réel** x. Il est d'usage de noter cette image : $\sin x$.

Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = s(x) = (\mathrm{S} \circ \theta)(x) = \mathrm{Sin}\,(\theta(x))$.

L'image d'un réel x par l'application c est appelée **cosinus du réel** x. Il est d'usage de noter cette image : $\cos x$.

Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = c(x) = (\mathrm{C} \circ \theta)(x) = \mathrm{Cos}\,(\theta(x))$.

4 Soit x un réel ; posons : $\theta(x) = \widehat{\varphi}$.

Nous avons démontré l'égalité : $(\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi})^2 + (\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi})^2 = 1$.

Nous en déduisons : $(\mathrm{Cos}\,(\theta(x)))^2 + (\mathrm{Sin}\,(\theta(x)))^2 = 1$, c'est-à-dire : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

On convient d'écrire : $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Coordonnées d'un point d'un cercle trigonométrique.

5 Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P.

Considérons le cercle trigonométrique U de centre O, d'origine A et un point M de ce cercle (fig. 1).

Désignons par $\widehat{\varphi}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est unitaire.

Nous avons donc (n° 17, p. 102) :

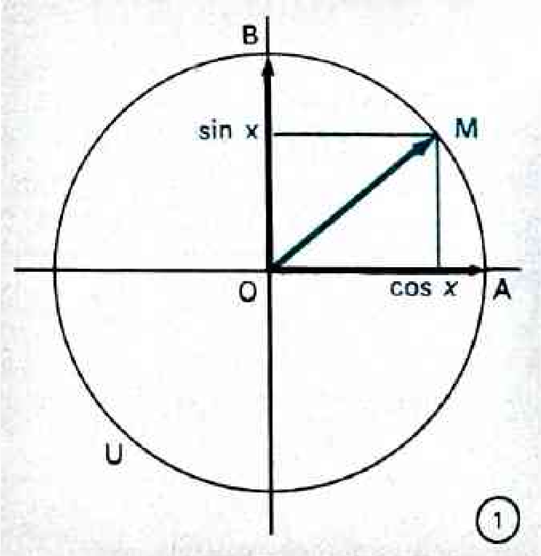
$\overrightarrow{OM} = \mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi}\,\vec{i} + \mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi}\,\vec{j}$.

Soit x une mesure en radians de $\widehat{\varphi}$: $\theta(x) = \widehat{\varphi}$.

Nous avons alors :

$\overrightarrow{OM} = \mathrm{Cos}\,(\theta(x))\,\vec{i} + \mathrm{Sin}\,(\theta(x))\,\vec{j}$,

c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$.



1

THÉORÈME : Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P et M un point du cercle trigonométrique de centre O et d'origine A. Si x est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$, les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $(\cos x, \sin x)$.

6 Il résulte du théorème précédent que l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique U de centre O et d'origine A est le point M dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $(\cos x, \sin x)$.

Propriété des fonctions sinus et cosinus.

7 **THÉORÈME : Pour tout réel x, et pour tout entier relatif k, nous avons :** $\sin(x + k.2\pi) = \sin x$ **et** $\cos(x + k.2\pi) = \cos x$.

Soient x un réel et k un entier relatif. De la propriété du n° 9 de la fonction θ, il résulte : $\theta(x + k.2\pi) = \theta(x)$.
Nous en déduisons :
$\mathrm{Sin}\,(\theta(x + k.2\pi)) = \mathrm{Sin}\,(\theta(x))$ et $\mathrm{Cos}\,(\theta(x + k.2\pi)) = \mathrm{Cos}\,(\theta(x))$,
c'est-à-dire : $\sin(x + k.2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + k.2\pi) = \cos x$.
Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(x + k.2\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + k.2\pi) = \cos x}$$

Parité des fonctions sinus et cosinus.

8 Soit x un réel. Posons : $\widehat{\varphi} = \theta(x)$.
Nous avons l'égalité (n° 10, p. 113) : $\theta(-x) = -\theta(x)$,
c'est-à-dire : $\theta(-x) = -\widehat{\varphi}$.
D'autre part, nous avons démontré (n° 15, p. 101) les égalités :
$\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi} = -\mathrm{Sin}\,(-\widehat{\varphi})$ et $\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi} = \mathrm{Cos}\,(-\widehat{\varphi})$.
Nous en déduisons les égalités :
$\mathrm{Sin}\,(\theta(-x)) = -\mathrm{Sin}\,(\theta(x))$ et $\mathrm{Cos}\,(\theta(-x)) = \mathrm{Cos}\,(\theta(x))$,
c'est-à-dire : $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

Nous avons donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x \text{ et } \cos(-x) = \cos x}$

THÉORÈME : La fonction sinus est une fonction impaire; la fonction cosinus est une fonction paire.

sinus et cosinus de la somme de deux réels.

9 Soient x et y deux réels. Nous avons : $\sin(x + y) = \mathrm{Sin}\,(\theta(x + y))$.
Des égalités : $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$
et : $\mathrm{Sin}\,(\theta(x) + \theta(y)) = \mathrm{Sin}\,(\theta(x))\,\mathrm{Cos}\,(\theta(y)) + \mathrm{Cos}\,(\theta(x))\,\mathrm{Sin}\,(\theta(y))$,
nous déduisons l'égalité : $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Nous avons donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

10 Soient x et y deux réels. Nous avons : $\cos(x+y) = \operatorname{Cos}\big(\theta(x+y)\big)$.
Des égalités : $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$,
et : $\operatorname{Cos}\big(\theta(x)+\theta(y)\big) = \operatorname{Cos}\big(\theta(x)\big)\operatorname{Cos}\big(\theta(y)\big) - \operatorname{Sin}\big(\theta(x)\big)\operatorname{Sin}\big(\theta(y)\big)$,
nous déduisons l'égalité : $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Applications.

11 Appliquons les égalités précédentes dans le cas où les réels x et y sont égaux ; nous obtenons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{et} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

Nous avons l'égalité : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; nous en déduisons :
$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ et : $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$$

12 Remarques : 1. Des égalités précédentes, nous déduisons les égalités :
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ et $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

2. Appliquons les résultats précédents au réel : $u = \frac{x}{2}$; nous obtenons :

$2\sin^2 \frac{u}{2} = 1 - \cos u$ et $2\cos^2 \frac{u}{2} = 1 + \cos u$.

sinus et cosinus de la différence de deux réels.

13 Soient x et y deux réels. Nous avons successivement :
$$\sin(x-y) = \sin\big(x + (-y)\big) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y).$$
$$= \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

14 Soient x et y deux réels. Nous avons successivement :
$$\cos(x-y) = \cos\big(x + (-y)\big) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$
$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Nous avons donc :

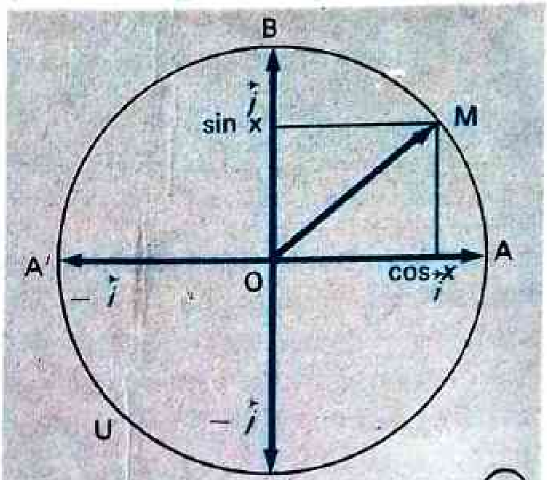
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$$

cosinus et sinus des réels : 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $-\frac{\pi}{2}$.

15 Soit P un plan affine associé à un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$. Considérons une base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, et le cercle trigonométrique U de centre O et d'origine A (fig. 2).

Soient B, A', B' les points de U respectivement définis par :

$\overrightarrow{OB} = \vec{j}$; $\overrightarrow{OA'} = -\vec{i}$, $\overrightarrow{OB'} = -\vec{j}$.



2

16 Nous avons : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}}) = \widehat{0}$. Nous savons d'autre part que le réel 0 est une mesure en radians de l'angle $\widehat{0}$. Nous en déduisons : $\overrightarrow{OA} = \cos 0\, \vec{i} + \sin 0\, \vec{j}$.

Il en résulte les égalités : $\boxed{\cos 0 = 1 \quad \text{et} \quad \sin 0 = 0}$

17 Nous avons : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \widehat{\delta}_1$. Nous savons d'autre part que le réel $\frac{\pi}{2}$ est une mesure en radians de l'angle droit positif $\widehat{\delta}_1$.

Nous en déduisons : $\overrightarrow{OB} = \cos \frac{\pi}{2} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{2} \vec{j}$.

Il en résulte les égalités : $\boxed{\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1}$

18 Nous avons : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \widehat{\varpi}$. Nous savons d'autre part que le réel π est une mesure en radians de l'angle plat $\widehat{\varpi}$.

Nous en déduisons : $\overrightarrow{OA'} = \cos \pi\, \vec{i} + \sin \pi\, \vec{j}$.

Il en résulte les égalités : $\boxed{\cos \pi = -1 \quad \text{et} \quad \sin \pi = 0}$

19 Nous avons : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}}) = \widehat{\delta}_2$. Nous savons d'autre part que le réel $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure en radians de l'angle droit négatif $\widehat{\delta}_2$.

Nous en déduisons : $\overrightarrow{OB'} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$.

Il en résulte les égalités : $\boxed{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1}$

20 Remarques : 1. Soit k un entier relatif. Calculons $\sin(k\pi)$.
Si k est pair, nous avons : $k = 2\lambda$; nous en déduisons :
$\sin(k\pi) = \sin(\lambda.2\pi) = \sin(0 + \lambda.2\pi) = \sin 0 = 0$.
Si k est impair, nous avons : $k = 2\lambda + 1$; nous en déduisons :
$\sin(k\pi) = \sin(\lambda.2\pi + \pi) = \sin \pi = 0$.
Nous avons donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(k\pi) = 0}$$

2. Soit k un entier relatif. Calculons $\cos(k\pi)$.
Si k est pair, nous avons : $k = 2\lambda$; nous en déduisons :
$\cos(k\pi) = \cos(\lambda.2\pi) = \cos(0 + \lambda.2\pi) = \cos 0 = 1$.
Si k est impair, nous avons : $k = 2\lambda + 1$; nous en déduisons :
$\cos(k\pi) = \cos(\lambda.2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$.
Nous avons donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k.}$$

3. Les calculs précédents peuvent être faits à partir de calculs analogues sur $\mathrm{Cos}\,\widehat{\varphi}$ et $\mathrm{Sin}\,\widehat{\varphi}$.

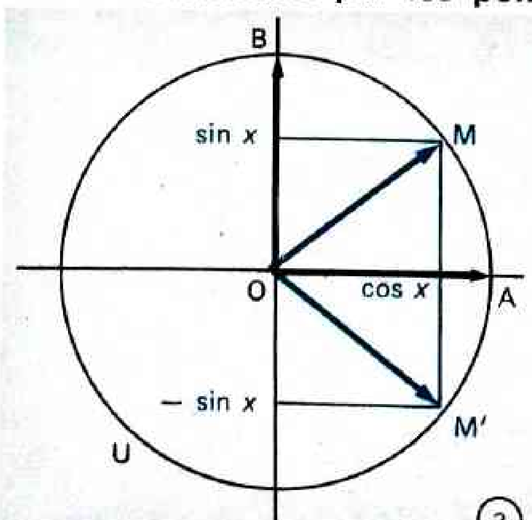
cosinus et sinus des réels : $-x, \pi - x, \pi + x, \dfrac{\pi}{2} - x, \dfrac{\pi}{2} + x$.

21 Nous avons établi au n° 8, p. 119, les égalités :

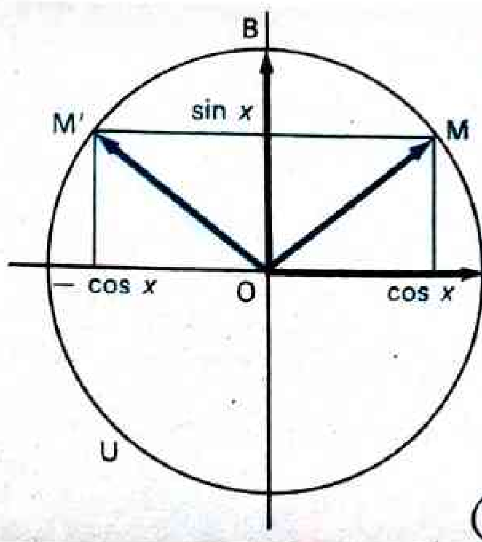
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x}$$

Soient M l'image du réel x et M′ l'image du réel $-x$ sur le cercle trigonométrique U (fig. 3).

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM'} = \cos x\,\vec{i} - \sin x\,\vec{j}$.
Il en résulte que **les points M et M′ sont symétriques par rapport à la droite déterminée par les points O et A.**



3



4

22 Soit x un réel. Nous avons les égalités :
$\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x$,
$\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x$.

Des égalités : $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, nous déduisons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x}$$

Soient M l'image de x sur U et M′ l'image de $\pi - x$ sur U (fig. 4).

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM'} = -\cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$.

Il en résulte que **les points M et M′ sont symétriques par rapport à la droite déterminée par les points O et B.**

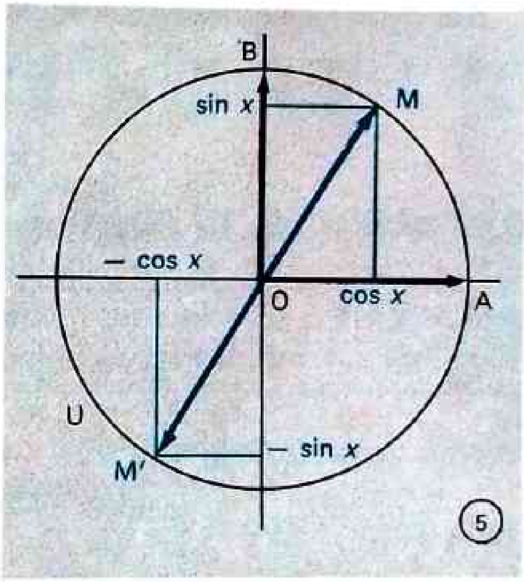
23 Soit x un réel. Nous avons les égalités :
$\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \sin \pi \sin x$, et :
$\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x$.
Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x}$$

Soient M l'image de x sur U et M′ l'image de $\pi + x$ sur U (fig. 5).

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM'} = -\cos x\,\vec{i} - \sin x\,\vec{j}$.

Il en résulte que **les points M et M· sont symétriques par rapport au point O, centre du cercle trigonométrique U.**



24 Soit x un réel. Nous avons les égalités :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x,$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x.$$

Des égalités : $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, nous déduisons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$$

25 Soit x un réel. Nous avons les égalités :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x.$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x}$$

Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus.

Dérivabilité de la fonction sinus au point 0.

On démontre et nous admettons le théorème suivant :

26 **THÉORÈME : La fonction sinus est dérivable au point 0 et le nombre dérivé de cette fonction au point 0 est égal à 1.**

27 Remarques : 1. La fonction sinus est dérivable au point 0 ; elle est donc continue en ce point (n° 3, p. 117, tome I). Il en résulte : $\lim_{h \to 0} \sin h = \sin 0 = 0$.

2. Le nombre dérivé de la fonction sinus au point 0 est la limite de $\dfrac{\sin h - \sin 0}{h}$ quand x tend vers 0. Il en résulte : $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

3. Des deux remarques précédentes, il résulte que, pour tout réel a non nul, on a :
$\lim_{h \to 0} \sin ah = 0$ et $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin (ah)}{ah} = 1$.

Dérivabilité de la fonction cosinus au point 0.

28 **THÉORÈME : La fonction cosinus est dérivable au point 0 et le nombre dérivé de cette fonction au point 0 est égal à 0.**

En effet, considérons la fonction q : $\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \leadsto \dfrac{\cos h - \cos 0}{h}$.

Nous avons : $q(h) = \dfrac{\cos h - 1}{h}$.

De la remarque 2 du n° 12, p. 120, il résulte :

$$q(h) = -\frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h}, \quad \text{c'est-à-dire} : \quad q(h) = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{h}{2}.$$

Nous avons : $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ et $\lim_{h \to 0} \sin \dfrac{h}{2} = 0$; nous en déduisons : $\lim_{h \to 0} q(h) = 0$.

La fonction cosinus est donc dérivable au point 0 et le nombre dérivé au point 0 est égal à 0.

29 Remarque : Nous venons de démontrer : $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$. Il en résulte que, pour tout réel non nul, on a : $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos (ah) - 1}{ah} = 0$.

Fonction dérivée de la fonction sinus.

30 **THÉORÈME : La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction cosinus.**

En effet, considérons un réel x_0 et la fonction r définie par :

$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}.$

Nous avons : $\quad r(h) = \dfrac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h};$

ou encore : $\quad r(h) = \sin x_0 \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \dfrac{\sin h}{h};$

c'est-à-dire : $\quad r(h) = \sin x_0\, q(h) + \cos x_0 \dfrac{\sin h}{h}.$

Des égalités : $\lim\limits_{h \to 0} q(h) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, nous déduisons : $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = \cos x_0$.

La fonction sinus est donc dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et le nombre dérivé au point x_0 est : $\cos x_0$.

Il en résulte que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction : $x \rightsquigarrow \cos x$, c'est-à-dire la fonction cosinus.

Fonction dérivée de la fonction cosinus.

31 **THÉORÈME : La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction : $x \rightsquigarrow -\sin x$.**

En effet, considérons un réel x_0 et la fonction u définie par :

$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h}.$

Nous avons : $\quad u(h) = \dfrac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h};$

ou encore : $\quad u(h) = \cos x_0 \dfrac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \dfrac{\sin h}{h};$

c'est-à-dire : $\quad u(h) = \cos x_0\, q(h) - \sin x_0 \dfrac{\sin h}{h}.$

Des égalités : $\lim\limits_{h \to 0} q(h) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, nous déduisons :

$\lim\limits_{h \to 0} u(h) = -\sin x_0.$

La fonction cosinus est donc dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et le nombre dérivé au point x_0 est : $-\sin x_0$.

Il en résulte que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction : $x \rightsquigarrow -\sin x$.

Fonction dérivée de la fonction : $x \rightsquigarrow \sin(ax + b)$.

32 Soient a et b deux réels et la fonction f définie par :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \sin(ax + b).$

Premier cas : $a = 0$.

Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin b$.
La fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Nous savons (n° 27, p. 124, tome I) que sa fonction dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Deuxième cas : $a \neq 0$.

Considérons un réel x_0 et la fonction v définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*,\ h \leadsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Nous avons successivement :

$$v(h) = \frac{\sin [a(x_0 + h) + b] - \sin (ax_0 + b)}{h};$$

$$v(h) = \frac{\sin (ax_0 + b) \cos (ah) + \cos (ax_0 + b) \sin (ah) - \sin (ax_0 + b)}{h};$$

$$v(h) = \sin (ax_0 + b) \frac{\cos (ah) - 1}{h} + \cos (ax_0 + b) \frac{\sin (ah)}{h};$$

$$v(h) = a \sin (ax_0 + b) \frac{\cos (ah) - 1}{ah} + a \cos (ax_0 + b) \frac{\sin ah}{ah};$$

Des égalités : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos (ah) - 1}{ah} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin ah}{ah} = 1$, nous déduisons :
$\lim\limits_{h \to 0} v(h) = a \cos (ax_0 + b)$.

Il en résulte que la fonction f est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et le nombre dérivé au point x_0 est : $a \cos (ax_0 + b)$.

33 Nous en déduisons :

THÉORÈME : La fonction f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \leadsto \sin (ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est : $x \leadsto a \cos (ax + b)$.

Fonction dérivée de la fonction : $x \leadsto \cos (ax + b)$.

34 Soient a et b deux réels et la fonction g définie par :
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \leadsto \cos (ax + b)$.

Premier cas : $a = 0$.

Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \cos b$.
La fonction g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$; sa fonction dérivée est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Deuxième cas : $a \neq 0$.

Considérons un réel x_0 et la fonction w définie par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Nous avons successivement :

$$w(h) = \frac{\cos[a(x_0 + h) + b] - \cos(ax_0 + b)}{h};$$

$$w(h) = \frac{\cos(ax_0 + b)\cos(ah) - \sin(ax_0 + b)\sin(ah) - \cos(ax_0 + b)}{h};$$

$$w(h) = \cos(ax_0 + b)\,\frac{\cos(ah) - 1}{h} - \sin(ax_0 + b)\,\frac{\sin(ah)}{h};$$

$$w(h) = a\cos(ax_0 + b)\,\frac{\cos(ah) - 1}{ah} - a\sin(ax_0 + b)\,\frac{\sin(ah)}{ah}.$$

Des égalités : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(ah) - 1}{ah} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(ah)}{ah} = 1$, nous déduisons :

$\lim\limits_{h \to 0} w(h) = -a\sin(ax_0 + b)$.

La fonction g est donc dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et le nombre dérivé au point x_0 est : $-a\sin(ax_0 + b)$.

35 Il en résulte le théorème :

THÉORÈME : La fonction g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow \cos(ax + b)$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée g' est : $x \rightsquigarrow -a\sin(ax + b)$.

Fonction tangente.

36 **DÉFINITION : On appelle fonction tangente la fonction, notée t, définie par : $\forall x \in D_t \quad x \rightsquigarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}$.**

L'image d'un réel x qui appartient à D_t par la fonction t est appelée tangente du réel x. Il est d'usage de noter cette image : $\operatorname{tg} x$. Nous avons donc :

$$\forall x \in D_t \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ensemble de définition de la fonction tangente.

37 L'ensemble de définition D_t de la fonction tangente est la partie de $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in D_t) \Longleftrightarrow (\cos x \neq 0)$. C'est donc le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble E des solutions de l'équation : $\cos x = 0$.

Nous avons : $\cos x = \mathrm{Cos}(\theta(x))$. Il en résulte que $\cos x$ est nul si et seulement si $\theta(x)$ est un angle droit : $(\cos x = 0) \Longleftrightarrow (\theta(x) = \widehat{\delta}_1 \quad \text{ou} \quad \theta(x) = \widehat{\delta}_2)$.

Nous en déduisons (n° 21, p. 115) :

$(\cos x = 0) \Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Il en résulte les égalités :

$\mathrm{E} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$,

puis : $\mathrm{D}_t = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

38 **Remarque** : Nous avons établi l'égalité : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$. Nous en déduisons l'équivalence logique :

$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (x \in \mathrm{D}_t) \Longleftrightarrow (x + k\pi \in \mathrm{D}_t)$.

Ensemble des valeurs de la fonction tangente.

39 **THÉORÈME : L'ensemble des valeurs de la fonction tangente est $\mathbb{R}$.**

En effet, si x appartient à D_t nous avons : $(\mathrm{tg}\, x = y) \Longrightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = y^2\right)$.

De l'égalité : $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$, nous déduisons :

$(\mathrm{tg}\, x = y) \Longrightarrow \left(\cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}\right)$.

Soit y un réel ; le réel $\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ appartient à l'intervalle $]0, +1]$.

Cet intervalle est inclus dans l'ensemble des valeurs de la fonction cosinus ; il existe donc un réel x_1 pour lequel on a : $\cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$.

Il en résulte : $\sin^2 x_1 = 1 - \frac{1}{1 + y^2} = \frac{y^2}{1 + y^2}$.

Le réel $\sin x_1$ est donc égal à $\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$ ou à $\frac{-y}{\sqrt{1 + y^2}}$.

Dans le cas où $\sin x_1$ est égal à $\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$, les égalités : $\cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ et $\sin x_1 = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$ impliquent l'égalité : $\mathrm{tg}\, x_1 = y$.

Dans le cas où $\sin x_1$ est égal à $\frac{-y}{\sqrt{1 + y^2}}$, les égalités : $\cos(-x_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ et $\sin(-x_1) = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$ impliquent l'égalité : $\mathrm{tg}(-x_1) = y$.

Il existe donc, dans chaque cas, un réel x pour lequel on a : $\mathrm{tg}\, x = y$.

L'ensemble des valeurs de la fonction tangente est donc $\mathbb{R}$; la fonction tangente est une surjection de D_t sur $\mathbb{R}$.

Propriété de la fonction tangente.

40 **THÉORÈME : Pour tout réel** x **de** D_t **et pour tout entier relatif** k, **nous avons :** $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$.

En effet, nous avons :

$$\forall x \in D_t \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x + k\pi \in D_t \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}(x + k\pi) = \frac{\sin(x + k\pi)}{\cos(x + k\pi)},$$

c'est-à-dire : $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \dfrac{\sin x \cos k\pi + \cos x \sin k\pi}{\cos x \cos k\pi - \sin x \sin k\pi}$.

Pour tout entier relatif k, $\sin k\pi$ est nul et $\cos k\pi$ est différent de 0 (n° 20, p. 122).

Il en résulte : $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \dfrac{\sin x \cos k\pi}{\cos x \cos k\pi} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

Parité de la fonction tangente.

41 Soit x un réel qui appartient à D_t. Nous avons donc : $\cos x \neq 0$.
De l'égalité : $\cos x = \cos(-x)$, nous déduisons : $\cos(-x) \neq 0$, c'est-à-dire : $-x \in D_t$.

Nous avons alors : $\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.

Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall x \in D_t \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)}$$

THÉORÈME : La fonction tangente est une fonction impaire.

cosinus et tangente d'un réel.

42 Soit x un réel qui appartient à D_t. Nous avons : $\cos x \neq 0$.
De l'égalité : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nous déduisons :

$1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, c'est-à-dire : $1 + (\operatorname{tg} x)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

On convient d'écrire : $(\operatorname{tg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x \in D_t \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

tangente de la somme de deux réels.

43 Soient x et y deux éléments de D_t pour lesquels la somme $x + y$ appartient aussi à D_t ; nous avons donc : $\cos x \neq 0$; $\cos y \neq 0$; $\cos(x + y) \neq 0$.

Nous avons alors :

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin y}{\cos y}}.$$

Nous en déduisons que, **si** x, y **et** $x+y$ **appartiennent à** D_t on a :

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}$$

tangente de la différence de deux réels.

44 Soient x et y deux éléments de D_t pour lesquels la différence $x-y$ appartient aussi à D_t. Nous avons :

$$\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}\big(x+(-y)\big)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}.$$

Nous en déduisons que, **si** x, y **et** $x-y$ **appartiennent à** D_t on a :

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}}$$

cosinus, sinus et tangente de $2x$.

45 Soit x un réel ; nous avons : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$.

Si x appartient à D_t nous avons : $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Nous en déduisons : $\cos 2x=\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}-1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x\in D_t\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

46 Soit x un réel ; nous avons : $\sin 2x=2\sin x\cos x$.
Si x appartient à D_t, nous avons : $\cos x\neq 0$.

Nous en déduisons : $\sin 2x=\dfrac{2\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Nous avons donc :

$$\boxed{\forall x\in D_t\quad \sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

47 Soit x un élément de D_t pour lequel $2x$ appartient aussi à D_t. Appliquons le résultat du n° 43, p. 129 ; nous obtenons :

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Nous en déduisons que, **si x et $2x$ appartiennent à D_t** on a :

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$$

tangente des réels : $-x, \pi - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$.

48 Nous avons établi au n° 41, p. 129, l'égalité :

$$\boxed{\forall x \in D_t \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x}$$

49 Soit x un élément de D_t. Pour tout entier relatif k, nous avons : $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$.
En particulier, si k est égal à 1, nous avons : $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

$$\boxed{\forall x \in D_t \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x}$$

50 Soit x un élément de D_t ; nous avons : $-x \in D_t$ et $\pi - x \in D_t$.
Nous avons alors : $\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}\big(\pi + (-x)\big) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

$$\boxed{\forall x \in D_t \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x}$$

51 Soit x un élément de D_t qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq k\pi$.

Le réel $\frac{\pi}{2} + x$ appartient à D_t et nous avons : $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x}$.

Nous en déduisons que **si, pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, x est différent de $k\pi$**, on a :

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

52 Soit x un élément de D_t qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq k\pi$.

Le réel $\frac{\pi}{2} - x$ appartient à D_t et nous avons :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Nous en déduisons que **si, pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, x est différent de $k\pi$**, on a :

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

Fonction dérivée de la fonction tangente.

53 **THÉORÈME : La fonction tangente : $\forall x \in D_t \quad x \rightsquigarrow \operatorname{tg} x$ est dérivable sur D_t et sa fonction dérivée est définie par : $\forall x \in D_t \quad x \rightsquigarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}$.**

La fonction tangente, t, est le quotient de la fonction sinus, s, par la fonction cosinus, c : $t = \dfrac{s}{c}$.

Il en résulte (n° 42, p. 129, tome I) que la fonction tangente est dérivable sur D_t et que l'on a : $t' = \dfrac{s'c - sc'}{c^2}$.

La fonction dérivée de la fonction tangente est donc définie par :

$$\forall x \in D_t \quad x \rightsquigarrow \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

c'est-à-dire par : $\forall x \in D_t \quad x \rightsquigarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

54 Remarque : Pour tout élément x de D_t nous avons : $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Nous en déduisons : $\forall x \in D_t \qquad t'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Étude des fonctions circulaires.

Fonction périodique.

55 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, dont l'ensemble de définition est D_f, est périodique si et seulement s'il existe un réel T strictement positif tel que l'on ait les deux propriétés :**

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in D_f) \Longleftrightarrow (x + \mathrm{T} \in D_f)$.

(2) $\forall x \in D_f, \quad f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

On dit que T est une **période** de la fonction f.

56 Remarque : Si f est une fonction pour laquelle on a : $D_f = \mathbb{R}$, la propriété (1) de la définition précédente est toujours vérifiée. Dans ce cas, f est périodique et T est une période de f si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

Exemples : 1. L'ensemble de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$; de plus nous avons démontré l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$.
La fonction cosinus est donc une fonction périodique dont une période est : $\mathrm{T} = 2\pi$.

2. L'ensemble de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$; de plus, nous avons démontré l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$.
La fonction sinus est donc une fonction périodique dont une période est : $\mathrm{T} = 2\pi$.

3 L'ensemble de définition de la fonction tangente vérifie la propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in D_t) \Longleftrightarrow (x + \pi) \in D_t$. De plus, nous avons démontré l'égalité : $\forall x \in D_t, \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.
La fonction tangente est donc une fonction périodique dont une période est : $T = \pi$.

Propriétés d'une fonction périodique.

Première propriété.

57 Considérons une fonction périodique f de période T. Nous avons donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in D_f) \Longleftrightarrow (x + T \in D_f)$ et : $\forall x \in D_f \quad f(x + T) = f(x)$.
Soit x un élément de D_f. Nous avons alors : $x + T \in D_f$.
De l'égalité : $x + 2T = (x + T) + T$, nous déduisons : $x + 2T \in D_f$.
D'une manière analogue, on montre que : $(x - T) \in D_f$ et $f(x - T) = f(x)$, puis que : $x - 2T \in D_f$ et $f(x - 2T) = f(x)$.
D'une manière générale, on démontre et nous admettons le théorème :

THÉORÈME : Si f est une fonction périodique de période T, on a :
$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (x \in D_f) \Longleftrightarrow (x + kT \in D_f)$ **et** $f(x + kT) = f(x)$.

58 Remarque : Il résulte du théorème précédent que, si f est une fonction périodique de période T, pour tout entier naturel n non nul, nT est aussi une période de f.

Deuxième propriété.

59 **THÉORÈME : Soient f une fonction périodique de période T et α un réel. Pour tout élément x de D_f, il existe un entier relatif unique k pour lequel on a :** $x - kT \in [\alpha, \alpha + T[$ **et** $f(x - kT) = f(x)$.

Soient x un réel et k un entier relatif. Nous avons les équivalences logiques :
$(x - kT \in [\alpha, \alpha + T[) \Longleftrightarrow (\alpha \leqslant x - kT < \alpha + T)$;
$(\alpha \leqslant x - kT < \alpha + T) \Longleftrightarrow (kT \leqslant x - \alpha < (k + 1)T)$.
Nous avons : $T > 0$; nous en déduisons l'équivalence logique :

$$(x - kT \in [\alpha, \alpha + T[) \Longleftrightarrow \left(k \leqslant \frac{x - \alpha}{T} < k + 1\right).$$

Soit E la fonction partie entière (n° 9, p. 90, tome I) ; nous avons alors :

$$(x - kT \in [\alpha, \alpha + T[) \Longleftrightarrow \left(E\left(\frac{x - \alpha}{T}\right) = k\right).$$

Considérons alors un élément x de D_f et posons : $k = E\left(\frac{x - \alpha}{T}\right)$.

Nous en déduisons : $k \in \mathbb{Z}$ et $x - kT \in [\alpha, \alpha + T[$.
Il résulte du théorème du n° 57 : $f(x - kT) = f(x)$.

Représentation graphique d'une fonction périodique.

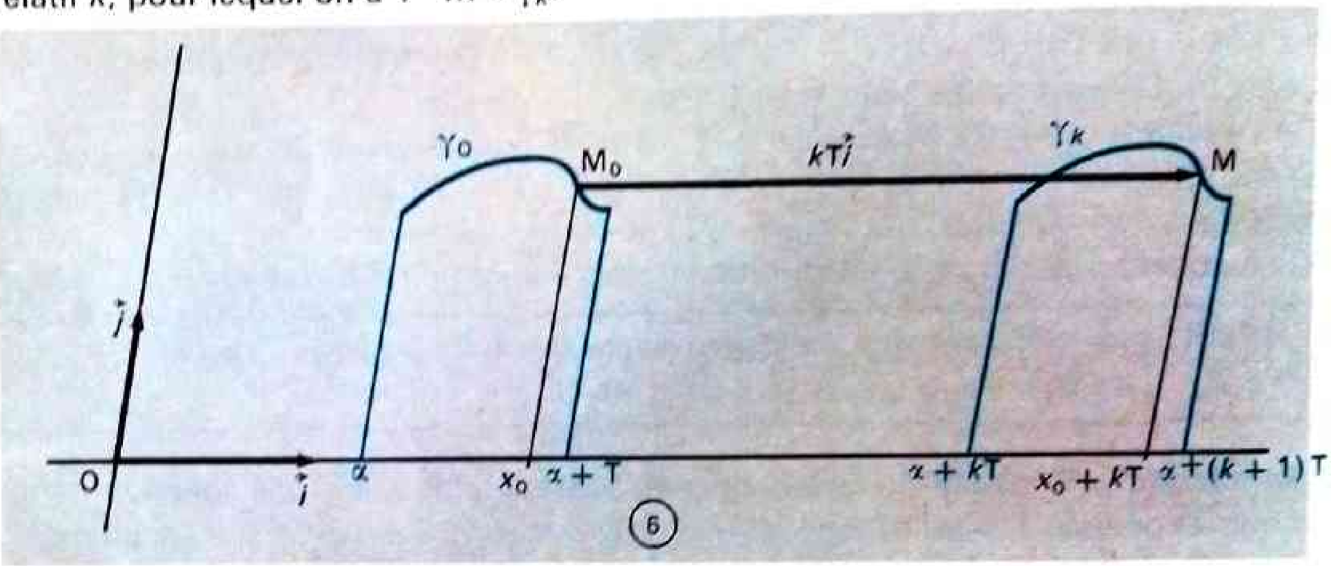
60 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction périodique f de période T, dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Nous avons : $\mathcal{C} = \{M \mid \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad x \in D_f \quad \text{et} \quad y = f(x)\}$.

Soit α un réel. Posons : $J = [\alpha, \alpha + T]$, et désignons par γ_0 l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse appartient à J (fig. 6).

Pour tout entier relatif k, désignons par γ_k l'image de γ_0 par la translation affine de vecteur : $kT\vec{i}$.

Nous nous proposons de démontrer successivement que, pour tout entier relatif k, γ_k est inclus dans $\mathcal{C}$, puis que, pour tout point M de $\mathcal{C}$, il existe au moins un entier relatif k, pour lequel on a : $M \in \gamma_k$.



6

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_k \subset \mathcal{C}$.

En effet, considérons un point M de γ_k. Désignons par (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

γ_k est l'image de γ_0 par la translation affine de vecteur $kT\vec{i}$.
Il existe donc un point M_0 de γ_0, de coordonnées (x_0, y_0), pour lequel on a :
$\overrightarrow{M_0M} = kT\vec{i}$.
Nous en déduisons les égalités : $x = x_0 + kT$ et $y = y_0$.
M_0 appartient à γ_0 ; γ_0 est une partie de $\mathcal{C}$; nous avons donc :
$x_0 \in D_f$ et $f(x_0) = y_0$; nous en déduisons : $x_0 + kT \in D_f$ et $f(x_0 + kT) = f(x_0)$
c'est-à-dire : $x \in D_f$ et $f(x) = y$.
Il en résulte que tout point M de γ_k appartient à $\mathcal{C}$.
Nous avons donc : $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_k \subset \mathcal{C}$.

2. $\forall M \in \mathcal{C}, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad M \in \gamma_k$.

En effet, considérons un point M de $\mathcal{C}$, de coordonnées (x, y).
Nous avons : $x \in D_f$ et $y = f(x)$.
Du théorème du n° 59, p. 133, nous déduisons qu'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x - kT \in [\alpha, \alpha + T[$ et $f(x - kT) = f(x)$.
Posons : $x_0 = x - kT$ et $y_0 = y$, et désignons par M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0).

Nous avons : $x_0 \in D_f$ et $y_0 = f(x_0)$, c'est-à-dire : $M_0 \in \mathcal{C}$.
De plus, nous avons : $x_0 \in [\alpha, \alpha + T]$; nous avons donc : $M_0 \in \gamma_0$. De l'égalité : $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{M_0M} = kT\vec{i}$, il résulte : $M \in \gamma_k$.

61 **La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction périodique f de période T, est donc déterminée dès que l'on connaît l'ensemble γ_0 des points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[\alpha, \alpha + T]$.**

62 **Remarque** : Si une fonction f est périodique, de période T, on peut donc se borner à étudier cette fonction dans un intervalle $[\alpha, \alpha + T]$, où α est un réel. L'étude de f dans chacun des intervalles $[\alpha + kT, \ \alpha + (k + 1)T]$ s'en déduit en utilisant les propriétés mises en évidence dans les paragraphes précédents. En pratique, on aura toujours intérêt à utiliser la plus petite période possible.

Étude de la fonction sinus.

63 **Intervalle d'étude** : L'ensemble de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$. La fonction sinus est une fonction périodique de période 2π. Il suffit donc de faire l'étude de cette fonction dans un intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$.
La fonction sinus est impaire ; nous prenons donc : $\alpha = -\pi$ et nous nous bornons à étudier cette fonction dans l'intervalle : $J = [0, \pi]$.

64 **Sens de variations** : La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Nous étudions le sens de variations de la fonction sinus en étudiant dans $[0, \pi]$ le signe de la fonction dérivée : $x \rightsquigarrow \cos x$.

Nous déduisons du n° 37, p. 128 : $(\cos x = 0) \Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Il en résulte que, si x appartient à $[0, \pi]$, $\cos x$ est nul si et seulement si : $x = \frac{\pi}{2}$.

Nous avons donc : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos x \neq 0$.

Nous savons aussi que la fonction cosinus est continue et que l'on a : $\cos 0 = 1$.
A partir de ces trois propriétés, on démontre et nous admettons le théorème :

THÉORÈME : Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\cos x > 0$.

Nous avons l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \cos(\pi - x) = -\cos x$.

Nous en déduisons que, pour tout réel x de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a : $\cos x < 0$.

En conclusion, la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et elle est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

La fonction sinus présente donc pour : $x = \frac{\pi}{2}$ un maximum local strict.

65 **Remarques :** 1. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + k.2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x \leqslant 1$. Pour tout entier relatif k, la fonction sinus présente donc, pour $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$, un maximum global.

2. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k.2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x \geqslant -1$. Pour tout entier relatif k, la fonction sinus présente donc, pour $x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$, un minimum global.

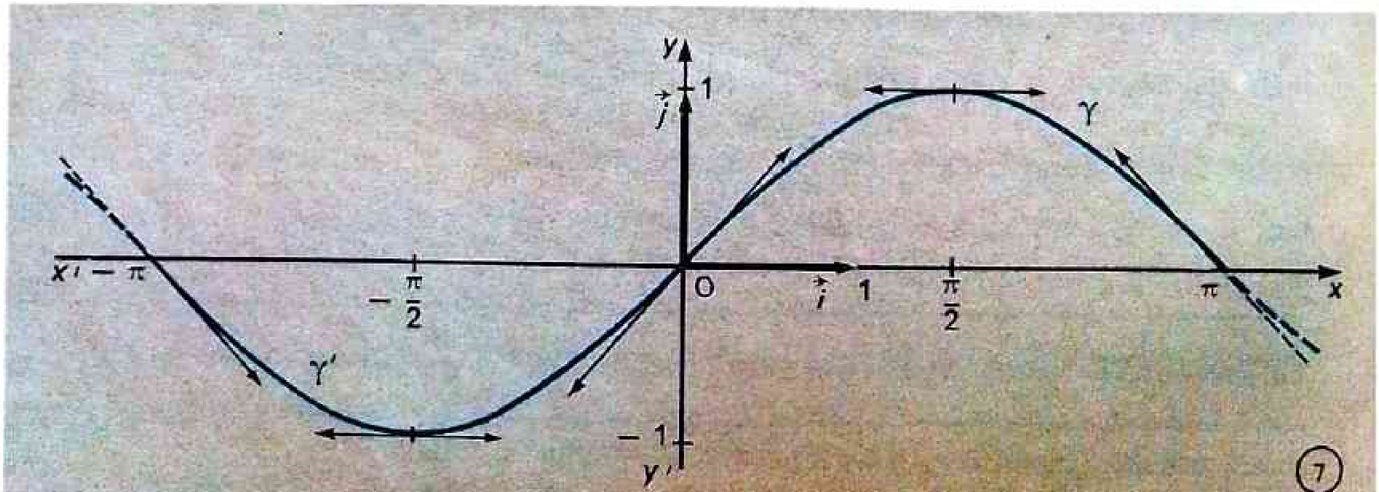
66 **Tableau de variations :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

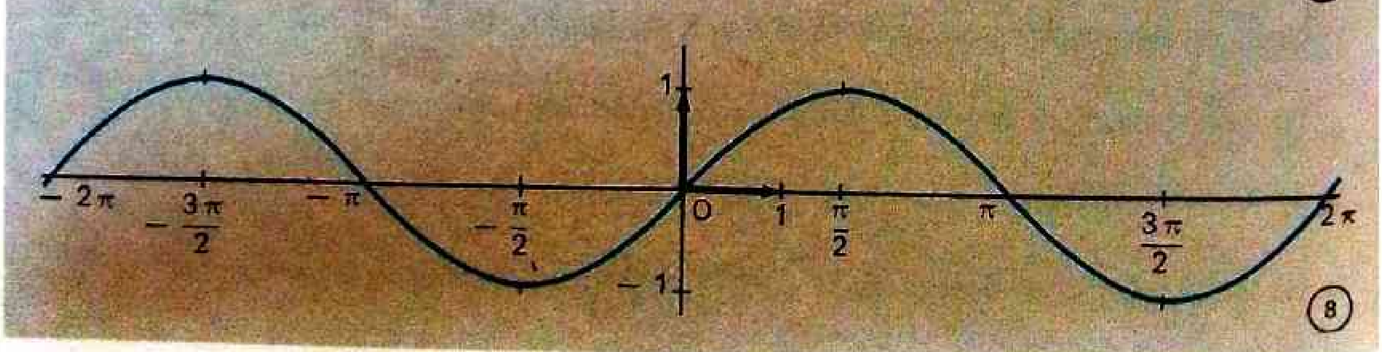
67 **Courbe représentative ; symétries.**

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction sinus est tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On commence par tracer la partie γ de $\mathcal{C}$ dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $[0, \pi]$ (fig. 7).



7



8

La partie γ' de $\mathcal{C}$, dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $[-\pi, 0]$ est obtenue par symétrie par rapport au point O.
La partie γ_k de $\mathcal{C}$, dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $[-\pi + k.2\pi,\ \ \pi + k.2\pi]$ s'obtient par la translation de vecteur $k.2\pi\,\vec{i}$ (fig. 8).
Pour tout entier relatif k, la tangente à $\mathcal{C}$ en chacun des points d'abscisse $\frac{\pi}{2} + k\pi$ est parallèle à la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{i}$.
En chacun des points d'abscisse $k.2\pi$ la tangente à $\mathcal{C}$ a une pente égale à 1, et en chacun des points d'abscisse $\pi + k.2\pi$, la tangente a une pente égale à -1.

68 **Remarque** : On démontre que, pour tout entier relatif k, le point de coordonnées $(k\pi, 0)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$ et que la droite d'équation : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ est une droite de symétrie pour $\mathcal{C}$.

Étude de la fonction cosinus.

69 **Intervalle d'étude** : L'ensemble de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$. La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π. Il suffit donc de faire l'étude de cette fonction dans un intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$. La fonction cosinus est paire ; nous prenons donc : $\alpha = -\pi$, et nous nous bornons à étudier cette fonction dans l'intervalle : $J = [0, \pi]$.

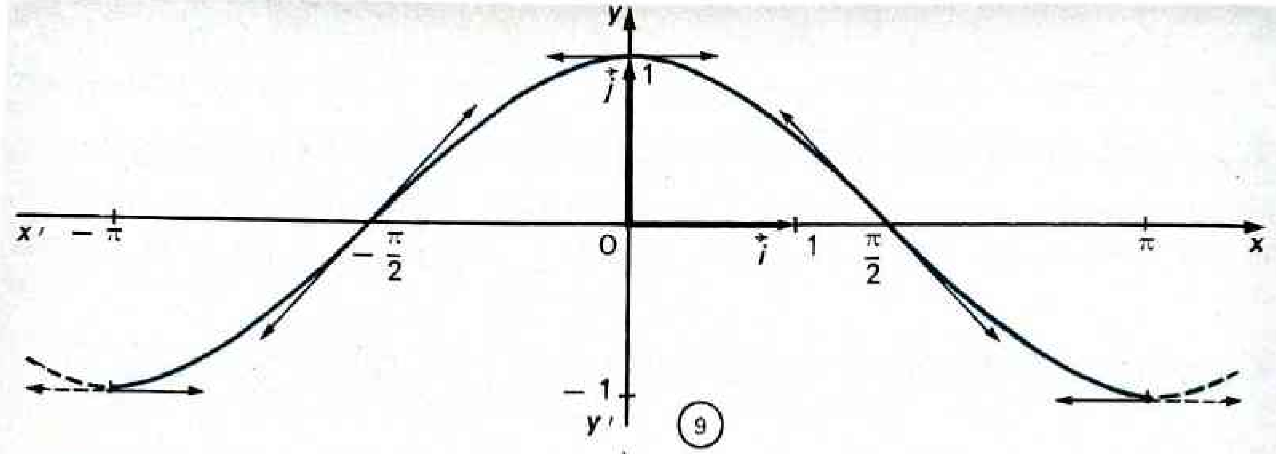
70 **Sens de variations** : La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens de variations de la fonction cosinus en étudiant, dans $[0, \pi]$, le signe de la fonction dérivée : $x \rightsquigarrow -\sin x$.
De l'étude de la fonction sinus, nous déduisons : $\forall x \in]0, \pi[,\ \ -\sin x < 0$.
La fonction cosinus est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$.

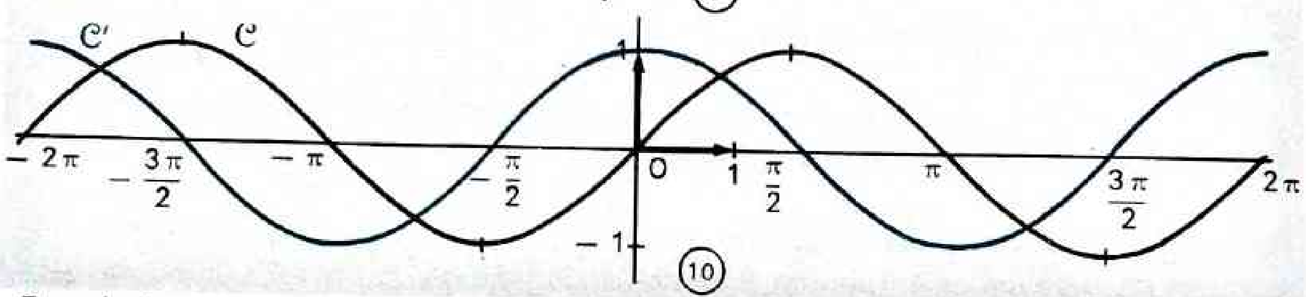
71 **Remarques** : 1. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{R},\ \ \cos(k.2\pi) = 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \cos x \leqslant 1$. Pour tout entier relatif k, la fonction cosinus présente donc, pour $x = k.2\pi$, un maximum global.
2. Nous avons : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \cos(\pi + k.2\pi) = -1$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \cos x \geqslant -1$. Pour tout entier relatif k, la fonction cosinus présente donc, pour $x = \pi + k.2\pi$, un minimum global.

72 **Tableau de variations :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

73 **Courbe représentative ; symétries :** La courbe représentative $\mathcal{C}'$ de la fonction cosinus est tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 9).





Pour la tracer, nous pouvons utiliser une méthode analogue à celle utilisée pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction sinus. Nous pouvons aussi remarquer que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation τ de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$. En effet, soient M un point de coordonnées (x, y) et M′ un point de coordonnées (x', y').

Nous avons : $(M' = \tau(M)) \Longleftrightarrow \left(x' = x - \frac{\pi}{2} \text{ et } y' = y\right)$.

1. $\tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$.

En effet, montrons que l'image M′ d'un point M de $\mathcal{C}$ par la translation affine τ appartient à $\mathcal{C}'$.
Si M appartient à $\mathcal{C}$, nous avons : $y = \sin x$.

De l'égalité : $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, nous déduisons : $y' = \cos x'$.

L'image M′ de M par τ appartient donc à $\mathcal{C}'$.

2. $\mathcal{C}' \subset \tau(\mathcal{C})$.

En effet, tout point M′ de $\mathcal{C}$ est l'image par τ d'un point M. Montrons que M appartient à $\mathcal{C}$.
Si M′ appartient à $\mathcal{C}'$, nous avons : $y' = \cos x'$.

De l'égalité : $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, nous déduisons : $y = \sin x$.

Le point M appartient donc à $\mathcal{C}$ (fig. 10).
Le tracé de la courbe $\mathcal{C}'$ se déduit donc du tracé de la courbe $\mathcal{C}$ par la translation τ.
En particulier, nous avons les propriétés suivantes :
Pour tout entier relatif k, la tangente à $\mathcal{C}'$ en chacun des points d'abscisse $k\pi$ est parallèle à la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{i}$.

En chacun des points d'abscisse $-\frac{\pi}{2}+k.2\pi$, la tangente a une pente égale à 1, et en chacun des points d'abscisse $\frac{\pi}{2}+k.2\pi$, la tangente à $\mathcal{C}'$ a une pente égale à -1.

74 __Remarques__ : 1. On démontre que, pour tout entier relatif k, le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ 0\right)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}'$ et que la droite d'équation : $x = k\pi$ est une droite de symétrie pour $\mathcal{C}'$.
2. On dit que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des **sinusoïdes**.

Étude de la fonction tangente.

75 __Intervalle d'étude__ : L'ensemble de définition de la fonction tangente est l'ensemble : $D_t = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \right\}$.

La fonction tangente est une fonction périodique de période π. Il suffit donc de faire l'étude de cette fonction dans un intervalle $[\alpha, \alpha+\pi]$.

De plus, nous avons intérêt à choisir α de la forme : $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

De cette façon, la fonction tangente est définie pour tout réel x de l'intervalle $]\alpha, \alpha+\pi[$.

La fonction tangente est impaire; nous prenons donc : $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ et nous nous bornons à étudier cette fonction dans l'intervalle : $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

76 __Étude de la fonction quand x tend vers $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$__ : Montrons que tg x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

Nous avons : $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ tend vers 1 et $\cos x$ tend vers 0.

Il en résulte (nº 52, p. 113, tome I) que : $|\operatorname{tg} x|$ tend vers $+\infty$.

Pour tout réel A strictement positif, il existe donc un réel β compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que :

$$\left(0 < \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \beta\right) \Longrightarrow (|\operatorname{tg} x| > A).$$

Nous avons : $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}-\beta,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$.

Nous en déduisons : $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}-\beta,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{tg} x > 0$.

Pour tout réel A strictement positif, il existe donc un réel β compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que :

$$\left(0 < \frac{\pi}{2} - x < \beta\right) \Longrightarrow (\operatorname{tg} x > A).$$

Nous en déduisons que tg x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

77 **Sens de variations :** La fonction tangente est dérivable sur D_t.

Étudions le sens de variations de la fonction tangente en étudiant, dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, le signe de la fonction dérivée : $x \rightsquigarrow \frac{1}{\cos^2 x}$.

Nous avons : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$

La fonction tangente est strictement croissante dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

78 **Tableau de variations :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	1	$+$	‖
$\operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

79 **Courbe représentative ; symétries :**

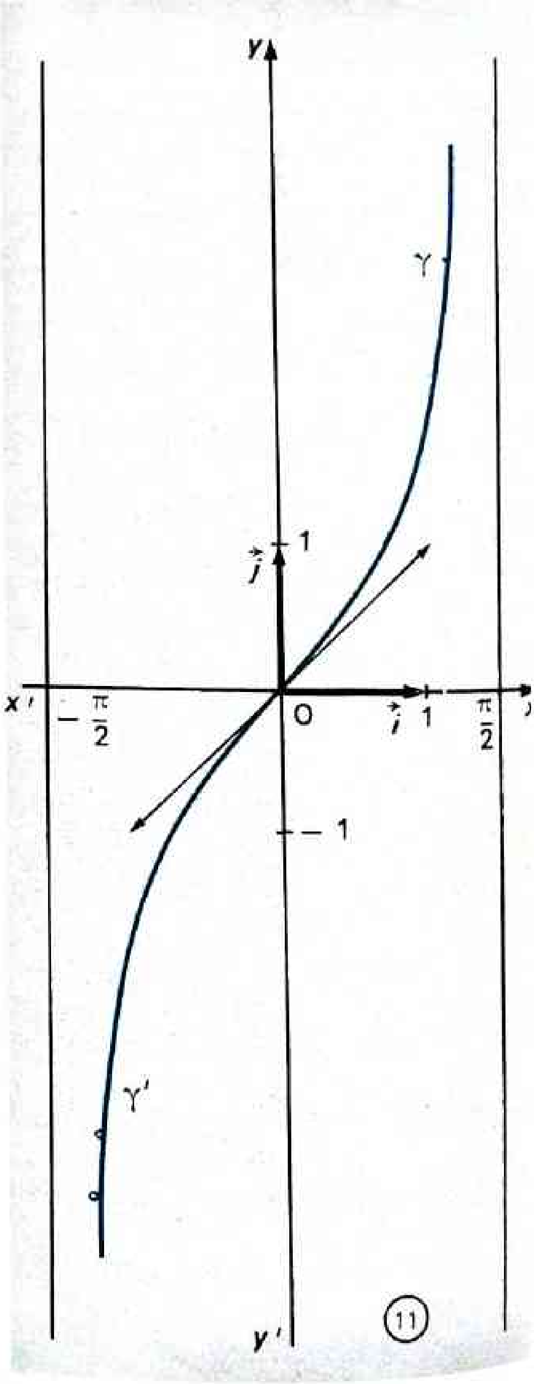
La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction tangente est tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

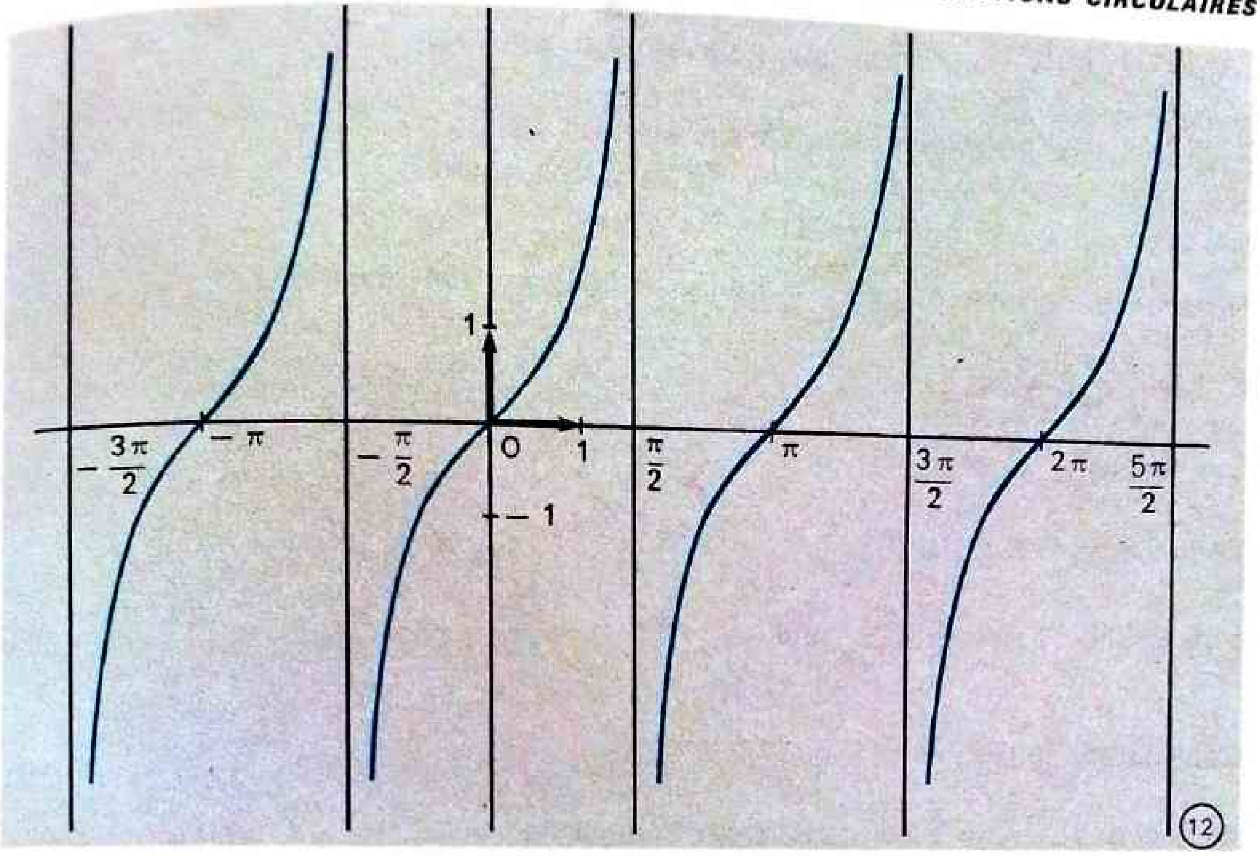
On commence par tracer la partie γ de $\mathcal{C}$ dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (fig. 11).

La partie γ' de $\mathcal{C}$, dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, est obtenue par symétrie par rapport au point O.

La partie γ_k de $\mathcal{C}$, dont les points ont une abscisse qui appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ s'obtient par la translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ (fig. 12).

Pour tout entier relatif k, la tangente au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $k\pi$ a pour pente 1.





12

80 Remarques : 1. On démontre que, pour tout entier relatif k, le point de coordonnées $(k\pi, 0)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

2. On démontre que, pour tout entier relatif k, la droite d'équation : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ est une asymptote à $\mathcal{C}$.

cosinus, sinus et tangente des réels : $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

81 Considérons le réel $\frac{\pi}{4}$. Ce réel appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; nous avons donc :

$\cos \frac{\pi}{4} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{4} > 0$.

Pour tout réel x, nous avons : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Nous en déduisons : $\cos \frac{\pi}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1$, c'est-à-dire : $2\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 = 0$.

Il en résulte : $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, puis : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'autre part, nous avons : $\sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nous avons alors : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

82 Considérons le réel $\frac{\pi}{6}$. Ce réel appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; nous avons donc :

$\cos \frac{\pi}{6} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{6} > 0$.

Pour tout réel x, nous avons successivement :

$\cos 3x = \cos (2x + x)$

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$\cos 3x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - (2 \sin x \cos x) \sin x$

$\cos 3x = \cos x \, (4 \cos^2 x - 3)$.

Nous en déduisons : $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 3\right)$, c'est-à-dire :

$4 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 3 = 0.$

Il en résulte : $\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$, puis : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nous avons alors : $\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Il en résulte : $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, puis : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

83 Considérons le réel $\frac{\pi}{3}$.

Nous avons : $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$; nous en déduisons :

$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, et : $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nous avons alors : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

84 Résumons dans un tableau les résultats obtenus :

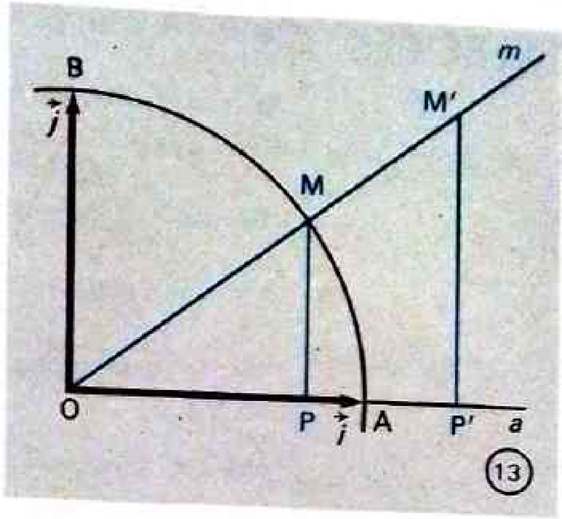
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Fonctions circulaires et rapports trigonométriques.

85 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif et U le cercle trigonométrique de centre O et d'origine A (fig. 13).

Soit x un réel qui appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et M son image sur U. Nous avons donc : $\overrightarrow{OM} = \cos x \vec{i} + \sin x \vec{j}$, et : $\cos x > 0$, $\sin x \geqslant 0$, $\operatorname{tg} x \geqslant 0$.
Désignons par Oa la demi-droite d'origine O qui passe par A et par Om la demi-droite d'origine O qui passe par M.
Soit P le point de Oa défini par : $\overrightarrow{OP} = \cos x \vec{i}$.

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$; nous en déduisons : $\overrightarrow{PM} = \sin x \vec{j}$.
P est donc la projection orthogonale de M sur Oa.



Il en résulte alors : $OP = \cos x$, $PM = \sin x$, $\frac{PM}{OP} = \operatorname{tg} x$.
Considérons un point M' de Om, distinct de O.
Nous avons : $\overrightarrow{OM'} = OM' \, \overrightarrow{OM} = OM' \cos x \vec{i} + OM' \sin x \vec{j}$.
Soit P' le point de Oa défini par : $\overrightarrow{OP'} = OM' \cos x \vec{i}$.
Nous avons : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'M'}$; nous en déduisons : $\overrightarrow{P'M'} = \sin x \vec{j}$.
P' est la projection orthogonale de M' sur Oa.
Il en résulte alors : $\cos x = \frac{OP'}{OM'}$; $\sin x = \frac{P'M'}{OM'}$; $\operatorname{tg} x = \frac{P'M'}{OP'}$.

Les images par les fonctions circulaires d'un réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sont donc les rapports trigonométriques de l'angle aigu, de sommet O et de côtés Oa et Om, introduits en classe de Troisième.

EXERCICES

sinus et cosinus.

◆ Vérifier que, quels que soient les réels x, y, z, on a les égalités suivantes (nos 1 à 11) :

1 $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$.

2 $(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 1 + \sin 4x$.

3 $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 1 = 0$.

4 $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$.

5 $\sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x = (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y)$.

6 $\sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$.

7 $(1 - \cos x \cos y)^2 - \sin^2 x \sin^2 y = (\cos x - \cos y)^2$.

EXERCICES

8 $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$

9 $\cos(x+y)\cos(x-y) + \cos(y+z)\cos(y-z) + \cos(z+x)\cos(z-x) = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z.$

10 $\sin x \sin(y-x) + \sin y \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y) = 0.$

11 $\cos x \sin(y-x) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) = 0.$

12 1° Vérifier que, quels que soient les réels x et y, on a les égalités suivantes :

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2},$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2};$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2};$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}.$

2° En déduire, pour tout réel x, les égalités :

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4\cos\dfrac{x}{2}\cos x\cos\dfrac{5x}{2},$

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 4\cos\dfrac{x}{2}\cos x\sin\dfrac{5x}{2}.$

13 1° Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2° Exprimer $\cos^3 x$ en fonction de $\cos 3x$ et $\cos x$. Exprimer $\sin^3 x$ en fonction de $\sin 3x$ et $\sin x$.

14 On considère la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leadsto \sin^2 x$ et la fonction g : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leadsto \cos^2 x$. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Déterminer leurs fonctions dérivées.

15 On désigne par c'' et s'' les fonctions dérivées secondes respectives de la fonction cosinus c et de la fonction sinus s.
1° Vérifier que chacune des fonctions $c'' + c$ et $s'' + s$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2° Montrer que, pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f = ac + bs$ admet une fonction dérivée seconde et que $f'' + f$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

◆ Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (n^{os} 16 à 21) :

16 $x \leadsto 3\cos 2x - 2\sin 3x.$ **17** $x \leadsto -\sin 4x - 2\cos 2x.$

18 $x \leadsto -5\cos^2 2x + x\sin 5x \sin 2x.$

19 $x \leadsto \cos^2 3x \sin 2x + \sin^2 3x \cos 2x.$

20 $x \leadsto \dfrac{\sin 3x}{2 - \cos 2x}.$ **21** $x \leadsto \dfrac{2\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}}{1 + \sin^2 x}.$

◆ Déterminer les limites de chacun des rapports suivants quand h tend vers 0 (nos 22 à 27) :

22 $\dfrac{1-\cos h}{\sin h}$.

23 $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{h}$.

24 $\dfrac{3\sin h+h}{h(h+1)}$.

25 $\dfrac{\sin^2 3h}{1-\cos 4h}$.

26 $\dfrac{\sin 2h-\sin 3h}{\sin h}$.

27 $\dfrac{\sin 2h}{\sqrt{1-\cos 3h}}$.

28 On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \rightsquigarrow f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ et $x \rightsquigarrow g(x)=\cos\dfrac{1}{x}$.
Les fonctions f et g admettent-elles une limite quand x tend vers 0, quand x tend vers 0_+, quand x tend vers 0_- ?

29 On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$f(0)=0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.
1° Montrer que f est continue au point 0.
2° La fonction f est-elle dérivable au point 0 ?

30 Même exercice que le précédent dans le cas où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=0$ et $\forall x\neq 0,\ f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

31 On considère la fonction f : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ x \rightsquigarrow x^2\cos\dfrac{1}{x}$.
1° Déterminer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f et qui est continue au point 0.
2° La fonction g est-elle dérivable au point 0 ?

Tangente.

◆ Soit D_t l'ensemble de définition de la fonction tangente. Vérifier que, quels que soient les réels x, y, z de D_t, on a les égalités (nos 32 à 38) :

32 $\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x=\operatorname{tg}^2 x\sin^2 x$.

33 $\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$.

34 $\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2$.

35 $1+\sin 2x=\sin x\cos x(1+\operatorname{tg} x)\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

36 $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$.

37 $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$.

38 $\operatorname{tg}(y-z)+\operatorname{tg}(z-x)+\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}(y-z)\operatorname{tg}(z-x)\operatorname{tg}(x-y)$.

EXERCICES

◆ Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes (nos 39 à 44) :

39 $x \leadsto \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$

40 $x \leadsto \sin 2x \operatorname{tg} x + \cos^2 x.$

41 $x \leadsto \operatorname{tg} 2x.$

42 $x \leadsto \operatorname{tg}(1 - 3x).$

43 $x \leadsto \operatorname{tg}^2 4x - \operatorname{tg} 4x.$

44 $x \leadsto \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x}.$

◆ Déterminer les limites de chacun des rapports suivants quand h tend vers 0 (nos 45 à 48) :

45 $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{h}{2}}{\sin 2h}.$

46 $\dfrac{\operatorname{tg} h}{1 - \cos h}.$

47 $\dfrac{h^2}{\operatorname{tg}^2 h - 2 \sin^2 h}.$

48 $\dfrac{\sin h + \operatorname{tg} h}{\sqrt{9h^2 + 2h^3}}.$

Étude des fonctions circulaires.

49 On considère l'égalité : $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}.$

Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des réels : $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}.$

◆ Vérifier que, quels que soient le réel x, on a les égalités suivantes (nos 50 à 52) :

50 $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right).$

51 $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right).$

52 $4 \sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x.$

◆ Vérifier que, si x appartient à un ensemble que l'on précisera dans chaque cas, on a les égalités (nos 53 et 54) :

53 $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2 \operatorname{tg} 2x.$

54 $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right).$

◆ Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ (nos 55 à 58) :

55 $x \leadsto \sin 2x + (\sin x - \cos x)^2.$

56 $x \leadsto \cos x + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right).$

57 $x \leadsto \cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right).$

58 $x \rightsquigarrow \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

59 Soit x un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ dont le sinus est égal à $\frac{3}{5}$.
Déterminer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$.

60 Soit x un réel de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ dont la tangente est égale à $\frac{4}{5}$.
Déterminer $\cos x$ et $\sin x$.

61 Soit x un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ dont la tangente est égale à : $\sqrt{3} - 2$.
Déterminer $\operatorname{tg} 2x$. En déduire x.

62 Soit x un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le sinus est égal à : $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
Déterminer $\cos 2x$. En déduire x.

63 Déterminer la limite du rapport : $\dfrac{\sin\left(h - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos h}$ quand h tend vers $\frac{\pi}{3}$.

64 Soit a un réel. Étudier suivant les valeurs de a, le comportement du rapport : $\dfrac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$ quand x tend vers a.

65 On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1° Montrer que f est continue et dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2° Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a les inégalités : $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

66 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $E =]0, \pi[$ par : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\forall x \in E - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.
Montrer que f est une fonction continue sur E.

EXERCICES

67 On considère la fonction f définie par : $\forall x \in D_f, \quad x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

f est appelée fonction cotangente, et on note cotg x l'image d'un réel x de D_f par la fonction cotangente.

1° Déterminer l'ensemble de définition de la fonction cotangente.

Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$, a-t-on l'égalité : $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$?

2° Déterminer l'ensemble des valeurs de la fonction cotangente.

3° Montrer que, pour tout réel x de D_f, et pour tout entier relatif k, on a : $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$.

4° Montrer que f est une fonction impaire.

5° Déterminer la fonction dérivée de la fonction cotangente et construire sa courbe représentative.

30. Équations trigonométriques

Étude d'un système de deux équations.

1 Soit u un réel. Nous nous proposons de résoudre dans $\mathbb{R}$ le système de deux équations à une inconnue x :

$$(1) \begin{cases} \cos x = \cos u \\ \sin x = \sin u. \end{cases}$$

Remarquons que le réel u est une solution du système (1). L'ensemble E des solutions de ce système n'est donc pas vide.

Nous avons l'équivalence logique :

$$(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,(\theta(x)) = \mathrm{Cos}\,(\theta(u)) \\ \mathrm{Sin}\,(\theta(x)) = \mathrm{Sin}\,(\theta(u)) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons l'équivalence logique :

$(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (\theta(x) = \theta(u))$, c'est-à-dire :

$(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (\theta(x - u) = \widehat{0})$.

Il en résulte qu'**un réel x est solution du système** (1) **si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que :** $x = u + k.2\pi$:

$(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = u + k.2\pi)$.

Équation : cos x = a.

2 Soit a un réel. Nous nous proposons de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = a$.
Désignons par E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.
Rappelons que l'ensemble des valeurs de la fonction cosinus est l'intervalle $[-1, 1]$.

3 **Premier cas** : $|a| > 1$.

a n'appartient pas à l'ensemble des valeurs de la fonction cosinus.
L'équation : $\cos x = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $E = \varnothing$.

4 **Deuxième cas** : $|a| \leqslant 1$.

a appartient à l'ensemble des valeurs de la fonction cosinus. Il existe donc au moins un réel x_0 pour lequel on a : $\cos x_0 = a$.
Nous avons l'équivalence logique : $(x \in E) \Longleftrightarrow (\cos x = \cos x_0)$.
Si un réel x appartient à E, nous avons : $\cos x = \cos x_0$.

Nous en déduisons successivement :

$$\cos^2 x = \cos^2 x_0 ;$$
$$1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x_0 ;$$
$$\sin^2 x = \sin^2 x_0.$$

Nous avons donc : $(x \in E) \Longrightarrow (\sin^2 x = \sin^2 x_0)$,
c'est-à-dire : $(x \in E) \Longrightarrow (\sin x = \sin x_0 \text{ ou } \sin x = -\sin x_0)$.
Si un réel x appartient à E, il est donc solution de l'un au moins des deux systèmes (1) et (2) suivants :

$$(1) \begin{cases} \cos x = \cos x_0 \\ \sin x = \sin x_0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \cos x = \cos x_0 \\ \sin x = -\sin x_0. \end{cases}$$

Soient E_1 l'ensemble des solutions du système (1) et E_2 l'ensemble des solutions du système (2) ; nous avons : $E \subset E_1 \cup E_2$.
Réciproquement, si un réel x appartient à $E_1 \cup E_2$, il vérifie l'égalité : $\cos x = \cos x_0$; nous avons donc : $E_1 \cup E_2 \subset E$.
Il en résulte l'égalité : $E = E_1 \cup E_2$.
Déterminons E_1 et E_2.
Du n° 1, p. 149, nous déduisons : $(x \in E_1) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi)$.
D'autre part, nous avons :
$(x \in E_2) \Longleftrightarrow (\cos x = \cos(-x_0)$ et $\sin x = \sin(-x_0))$
Nous en déduisons : $(x \in E_2) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = -x_0 + k.2\pi)$.
Nous avons donc :
$(x \in E) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi \text{ ou } x = -x_0 + k.2\pi)$.

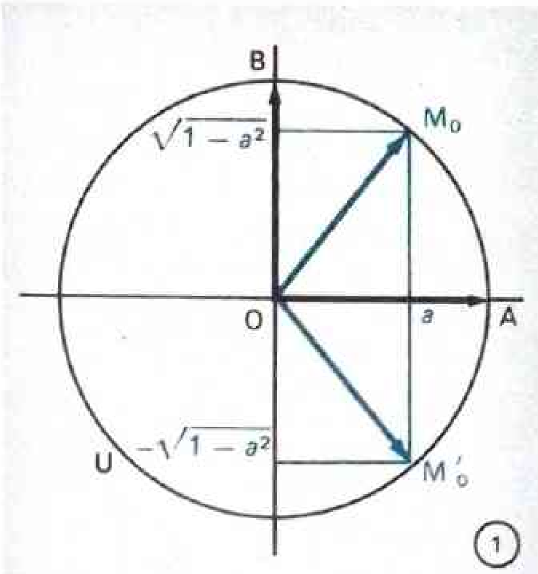
5 En résumé :

si : $|a| > 1$, l'équation : $\cos x = a$ n'a pas de solution ;
si : $|a| \leqslant 1$, il existe au moins un réel x_0 qui vérifie $\cos x_0 = a$, et un réel x est solution de l'équation : $\cos x = a$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x = x_0 + k.2\pi$ ou $x = -x_0 + k.2\pi$.
Si $|a|$ est inférieur ou égal à 1, pour résoudre l'équation : $\cos x = a$, il suffit donc de déterminer une solution particulière x_0 de cette équation. Dans la pratique, on prend pour x_0 l'unique solution qui appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

6 **Remarques** : 1. Nous avons, en particulier, établi l'équivalence logique :
$(\cos x = \cos x_0) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi \text{ ou } x = -x_0 + k.2\pi)$.

2. Si $|a|$ est inférieur à 1, les images, sur un cercle trigonométrique, des solutions de l'équation : $\cos x = a$ sont deux points M_0 et M'_0 symétriques par rapport à la droite déterminée par les points O et A (fig. 1).

Leurs coordonnées respectives dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :
$(a, \sqrt{1 - a^2})$ et $(a, -\sqrt{1 - a^2})$.



7 **Exemples** : 1. Considérons l'équation : $\cos x = -2$. Nous avons : $|-2| > 1$; cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2. Considérons l'équation : $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Nous avons montré au n° 83, p. 142 l'égalité :
$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

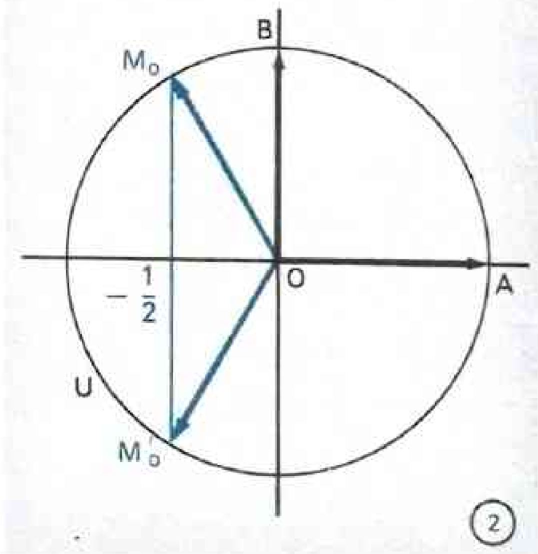
Nous en déduisons :

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Le réel : $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ est donc une solution de l'équation : $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Il en résulte qu'un réel x est solution de cette équation si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a :

$x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi$.



Sur la figure 2, nous avons représenté les points M_0 et M'_0 images des solutions de l'équation : $\cos x = -\frac{1}{2}$, sur un cercle trigonométrique U.

Équation : $\sin x = b$.

8 Soit b un réel. Nous nous proposons de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = b$.
Désignons par E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.
L'ensemble des valeurs de la fonction sinus est l'intervalle $[-1, 1]$.

Distinguons deux cas :

9 **Premier cas** : $|b| > 1$.
b n'appartient pas à l'ensemble des valeurs de la fonction sinus. L'équation : $\sin x = b$, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $E = \varnothing$.

10 **Deuxième cas :** $|b| \leqslant 1$.
b appartient à l'ensemble des valeurs de la fonction sinus. Il existe donc au moins un réel x_0 pour lequel on a : $\sin x_0 = b$.
Nous avons l'équivalence logique : $(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (\sin x = \sin x_0)$.
Si un réel x appartient à E, nous avons : $\sin x = \sin x_0$.
Nous en déduisons successivement :

$$\sin^2 x = \sin^2 x_0$$
$$1 - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x_0$$
$$\cos^2 x = \cos^2 x_0.$$

Nous avons donc : $(x \in \mathrm{E}) \Longrightarrow (\cos^2 x = \cos^2 x_0)$
c'est-à-dire : $(x \in \mathrm{E}) \Longrightarrow (\cos x = \cos x_0 \quad \text{ou} \quad \cos x = -\cos x_0)$.
Si un réel x appartient à E, il est donc solution de l'un, au moins, des deux systèmes (1) et (2) suivants :

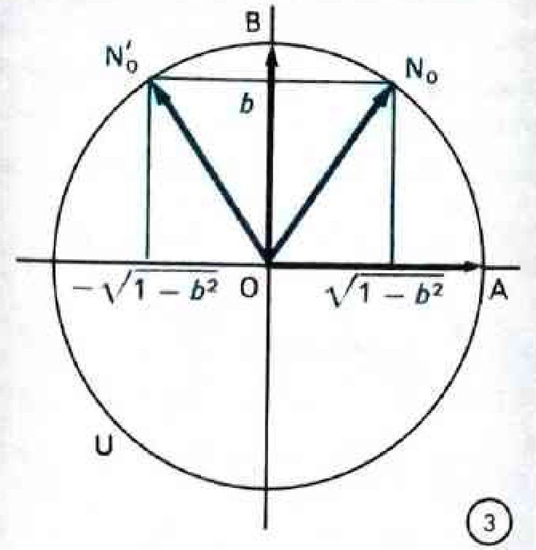
$$(1) \begin{cases} \cos x = \cos x_0 \\ \sin x = \sin x_0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \cos x = -\cos x_0 \\ \sin x = \sin x_0. \end{cases}$$

Soient E_1 l'ensemble des solutions du système (1) et E_2 l'ensemble des solutions du système (2) ; nous avons : $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2$.
Réciproquement, si un réel x appartient à $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2$, il vérifie l'égalité : $\sin x = \sin x_0$; nous avons donc : $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}$.
Il en résulte l'égalité : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2$.
Déterminons E_1 et E_2.
Du n° 1, p. 149, nous déduisons : $(x \in \mathrm{E}_1) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi)$.
D'autre part, nous avons :
$(x \in \mathrm{E}_2) \Longleftrightarrow \big(\cos x = \cos(\pi - x_0) \quad \text{et} \quad \sin x = \sin(\pi - x_0)\big)$.
Nous en déduisons : $(x \in \mathrm{E}_2) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - x_0 + k.2\pi)$.
Nous avons donc :
$(x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x_0 + k.2\pi)$.

11 En résumé :
si : $|b| > 1$, l'équation : $\sin x = b$, n'a pas de solution ;
si : $|b| \leqslant 1$, il existe au moins un réel x_0 qui vérifie : $\sin x_0 = b$, et un réel x est solution de l'équation : $\sin x = b$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x = x_0 + k.2\pi$ ou $x = \pi - x_0 + k.2\pi$.
Si $|b|$ est inférieur ou égal à 1, pour résoudre l'équation : $\sin x = b$, il suffit donc de déterminer une solution x_0 de cette équation. Dans la pratique, on prend pour x_0 l'unique solution qui appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

12 **Remarques :** 1. Nous avons, en particulier, établi l'équivalence logique :
$(\sin x = \sin x_0) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x_0 + k.2\pi)$.
2. Si $|b|$ est inférieur à 1, les images sur un cercle trigonométrique des solutions de l'équation : $\sin x = b$, sont deux points N_0 et N'_0 symétriques par rapport à la droite déterminée par les points O et B (fig. 3).

Leurs coordonnées respectives dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :
$(\sqrt{1-b^2}, b)$ et $(-\sqrt{1-b^2}, b)$.

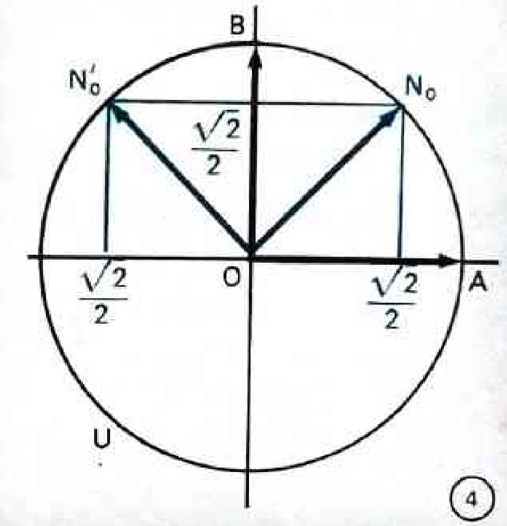


3

13 **Exemples** : 1. Considérons l'équation : $\sin x = 5$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2. Considérons l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Nous avons montré au n° 81, p. 141, l'égalité : $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le réel : $x_0 = \frac{\pi}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Il en résulte qu'un réel x est une solution de cette équation si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a :
$x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi$.
Sur la figure 4, nous avons représenté les points N_0 et N'_0 images des solutions de l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sur un cercle trigonométrique U.



4

Équation : tg $x = c$.

14 Soit c un réel. Nous nous proposons de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{tg} x = c$. L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ est une partie de l'ensemble de définition D_t de la fonction tangente. L'ensemble des valeurs de la fonction tangente est $\mathbb{R}$; pour tout réel c, il existe donc un réel x_0 de D_t pour lequel on a : $\operatorname{tg} x_0 = c$.
Nous avons l'équivalence logique : $(x \in E) \Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0)$.
Pour tout élément x de D_t nous avons :
$(\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0) \Longleftrightarrow \left(\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0}\right)$, c'est-à-dire :
$(\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0) \Longleftrightarrow (\sin x \cos x_0 - \sin x_0 \cos x = 0)$, ou encore :
$(\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0) \Longleftrightarrow (\sin(x - x_0) = 0)$.
Nous en déduisons : $(x \in E) \Longleftrightarrow (\sin(x - x_0) = 0)$.
Nous avons : $(\sin(x - x_0) = 0) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x - x_0 = k\pi)$.
Il en résulte : $(x \in E) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k\pi)$.

15 En résumé :

pour tout réel c, il existe au moins un réel x_0 qui vérifie : $\operatorname{tg} x_0 = c$ et un réel x est une solution de l'équation : $\operatorname{tg} x = c$, si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x = x_0 + k\pi$.

Dans la pratique, on prend pour x_0 l'unique solution qui appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

16 <u>Remarques</u> : 1. Nous avons, en particulier, établi l'équivalence logique : $(\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = x_0 + k\pi)$.

2. Les images, sur un cercle trigonométrique, des solutions de l'équation : $\operatorname{tg} x = c$, sont deux points P_0 et P'_0 symétriques par rapport au point O (fig. 5).

Soit x_0 une solution dont l'image est P_0 ; nous avons alors :

$\overrightarrow{OP_0} = \cos x_0 \vec{i} + \sin x_0 \vec{j}$ et $\operatorname{tg} x_0 = c$.

Soit D la droite affine, de vecteur directeur $\vec{j}$, qui passe par A et soit Q le point de D défini par : $\overrightarrow{AQ} = c\vec{j}$.

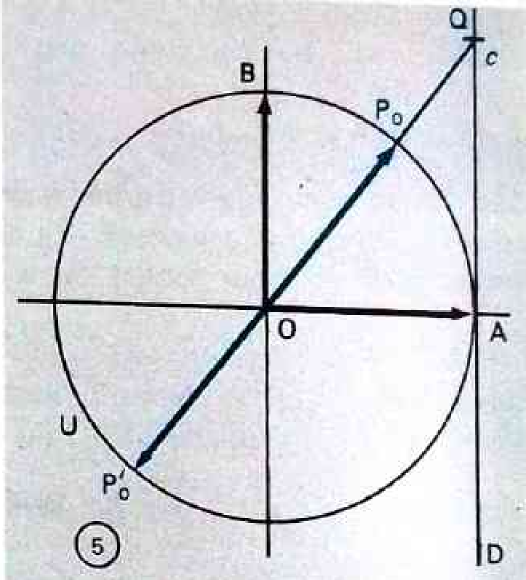
Nous avons : $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} + c\vec{j}$.

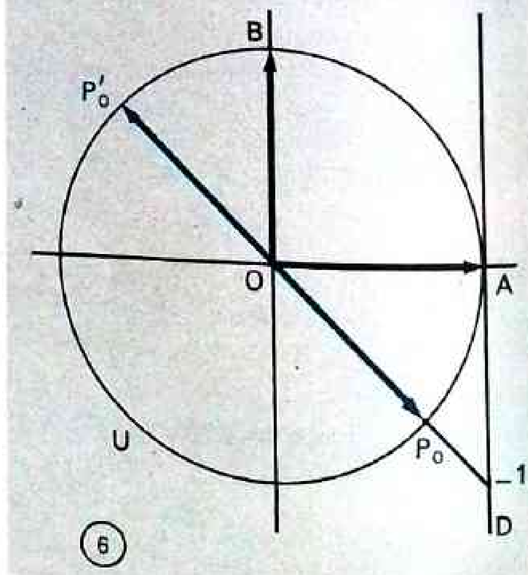
Nous avons alors l'égalité :

$\cos x_0\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0}$.

D'autre part, nous avons : $\overrightarrow{OP'_0} = -\overrightarrow{OP_0}$.

Les trois vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP'_0}$, $\overrightarrow{OQ}$ sont deux à deux dépendants ; les points O, P_0, P'_0, Q sont donc alignés.





17 <u>Exemple</u> : Considérons l'équation : $\operatorname{tg} x = -1$.

Nous avons montré au n° 81, p. 141, l'égalité : $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Nous en déduisons : $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Le réel : $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ est donc une solution de l'équation $\operatorname{tg} x := -1$.

Il en résulte qu'un réel x est solution de cette équation si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a : $x = -\frac{\pi}{4} + k.\pi$.

Sur la figure 6, nous avons représenté les images P_0 et P'_0 des solutions de l'équation : $\operatorname{tg} x = -1$ sur un cercle trigonométrique U.

Équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

18 Soient trois réels a, b, c. Nous nous proposons de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$.
Désignons par E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.
Si les réels a et b sont nuls, nous avons : si $c = 0$: $E = \mathbb{R}$; si $c \neq 0$: $E = \varnothing$.
Dans toute la suite (n[os] 19 à 23) nous supposons donc que les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Transformation de : $a \cos x + b \sin x$.

19 Considérons une base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j})$ d'un plan vectoriel euclidien orienté $\vec{P}$.
Soient le vecteur : $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$, et, pour tout réel x, le vecteur : $\vec{X} = \cos x\vec{i} + \sin x\vec{j}$.
Nous avons l'égalité : $\vec{A}.\vec{X} = a \cos x + b \sin x$. (1)
D'autre part, nous avons : $\vec{A}.\vec{X} = \|\vec{A}\|.\|\vec{X}\| \operatorname{Cos}(\widehat{\vec{A}, \vec{X}})$.
La norme du vecteur $\vec{X}$ est : $\|\vec{X}\| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$; la norme du vecteur $\vec{A}$ est : $\|\vec{A}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Nous en déduisons : $\vec{A}.\vec{X} = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{Cos}(\widehat{\vec{A}, \vec{X}})$.
Le vecteur $\vec{X}$ est unitaire ; de l'égalité : $\vec{X} = \cos x\vec{i} + \sin x\vec{j}$, il résulte que x est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{X}})$.
Soit α une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{A}})$.
Nous avons : $(\widehat{\vec{A}, \vec{X}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{X}}) - (\widehat{\vec{i}, \vec{A}})$.
Une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{A}, \vec{X}})$ est donc : $x - \alpha$.
Nous en déduisons l'égalité : $\vec{A}.\vec{X} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$. (2)
Des égalités (1) et (2), il résulte alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)}$$

20 Remarque : Montrons comment nous pouvons déterminer α à partir de a et b.
α est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{A}})$; nous avons donc :

$$\cos \alpha = \operatorname{Cos}(\widehat{\vec{i}, \vec{A}}) = \frac{\vec{i}.\vec{A}}{\|\vec{i}\|\,\|\vec{A}\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ et :}$$

$$\sin \alpha = \operatorname{Sin}(\widehat{\vec{i}, \vec{A}}) = \frac{1.b - a.0}{\|\vec{i}\|\,\|\vec{A}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nous avons : $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1$. Il existe donc au moins un réel x_0 de l'intervalle $[0, \pi]$ pour lequel on a : $\cos x_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Nous avons alors : $\sin^2 x_0 = 1 - \cos^2 x_0 = 1 - \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c'est-à-dire : $\sin x_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ou $\sin x_0 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si l'on a : $\sin x_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, on prend : $\alpha = x_0$, ou : $\alpha = x_0 + k.2\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$.

Si l'on a : $\sin x_0 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, on prend : $\alpha = -x_0$, ou : $\alpha = -x_0 + k.2\pi$ avec : $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution de l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

21 Soit α un réel qui vérifie les égalités :

$\cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Pour tout réel x, nous avons l'équivalence logique :

$(a \cos x + b \sin x + c = 0) \iff (\sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \alpha) + c = 0)$.

Nous avons : $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

Si E désigne l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons :

$(x \in \mathrm{E}) \iff \left(\cos (x - \alpha) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.

De l'étude faite au n° 5, p. 150, il résulte les équivalences logiques :

$(\mathrm{E} = \varnothing) \iff \left(\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 1\right)$, et : $(\mathrm{E} \neq \varnothing) \iff \left(\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1\right)$,

c'est-à-dire : $(\mathrm{E} = \varnothing) \iff (c^2 > a^2 + b^2)$ et $(\mathrm{E} \neq \varnothing) \iff (c^2 \leqslant a^2 + b^2)$.

Si : $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, il existe alors au moins un réel u_0 pour lequel on a :

$\cos u_0 = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Un réel x est solution de l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a :

$x = \alpha + u_0 + k.2\pi$ ou $x = \alpha - u_0 + k.2\pi$.

22 Remarques : 1. La méthode précédente permet de résoudre l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$, dès que l'un des réels a et b n'est pas nul.

Cependant, si l'on a : $a = 0$ et $b \neq 0$, il est plus commode de résoudre directement l'équation : $\sin x = -\dfrac{c}{b}$.

De même, si l'on a : $a \neq 0$ et $b = 0$, il est plus commode de résoudre directement l'équation : $\cos x = -\dfrac{c}{a}$.

2. Si a et b sont différents de 0 et si c est nul, nous avons à résoudre l'équation : $a \cos x + b \sin x = 0$, c'est-à-dire : $\sin x = -\dfrac{a}{b} \cos x$.

Un réel x pour lequel on a : $\cos x = 0$, n'est pas une solution de l'équation : $\sin x = -\frac{a}{b}\cos x$; en effet, nous avons alors : $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$.
Il en résulte que l'équation : $a \cos x + b \sin x = 0$ est équivalente à l'équation : $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{b}$.

3. En pratique, il résulte des deux remarques précédentes que, pour résoudre l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$, on utilise la méthode du n° 21 uniquement si les trois réels a, b, c sont différents de 0.

23 **Exemples** : 1. Considérons l'équation : $2 \cos x - 3 \sin x + 7 = 0$.
Pour cette équation, nous avons : $a = 2$, $b = -1$, $c = 7$.
Nous avons donc : $a^2 + b^2 = 5$ et $c^2 = 49$.
L'équation : $2 \cos x - 3 \sin x + 7 = 0$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2. Considérons l'équation : $\sqrt{3} \cos x - \sin x - \sqrt{2} = 0$. (1)
Pour cette équation, nous avons : $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{2}$.
Nous avons donc : $a^2 + b^2 = 4$ et $c^2 = 2$; il en résulte : $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.
Déterminons un réel α qui vérifie les égalités :

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$ c'est-à-dire :

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Nous avons (n° 82, p. 141) : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Nous en déduisons : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Nous prenons donc : $\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

L'équation (1) est donc équivalente à l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$ c'est-à-dire :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ ou encore :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Nous avons : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; l'équation (2) est donc équivalente à l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Il en résulte qu'un réel x est solution de l'équation : $\sqrt{3} \cos x - \sin x - \sqrt{2} = 0$ si et seulement s'il existe un entier relatif k pour lequel on a :

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k.2\pi,$$

c'est-à-dire : $x = \frac{\pi}{12} + k.2\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k.2\pi$.

EXERCICES

◆ Résoudre les équations suivantes :

1 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$.

2 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$.

3 $\cos(3x + \pi) = \cos x$.

4 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x$.

5 $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$.

6 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7 $\cos\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + 3x\right)$.

8 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$.

◆ Résoudre les équations suivantes :

9 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

10 $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = +\frac{1}{2}$.

11 $2\cos 3x + 1 = 0$.

12 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13 $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

14 $4\cos^2 x - 3 = 0$.

15 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

16 $2\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

◆ Résoudre les équations suivantes :

17 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$.

18 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

19 $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$.

20 $\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$.

21 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$.

22 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right)$.

23 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

24 $\sin x + \sin 4x = 0$.

◆ Résoudre les équations suivantes :

25 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

26 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

27 $\sin(3x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

28 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

29 $\sin 5x + 1 = 0.$

30 $2 \sin x - 1 = 0.$

31 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}.$

32 $4 \sin^2 x - 1 = 0.$

◆ Résoudre les équations suivantes :

33 $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

34 $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right).$

35 $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

36 $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

37 $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

38 $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right).$

39 $\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = 1.$

40 $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = -1.$

41 $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$

42 $\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 3.$

43 $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$

44 $\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3.$

◆ Résoudre les équations suivantes :

45 $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.$

46 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}.$

47 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5}.$

48 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x.$

49 $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}.$

50 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$

51 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

52 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right).$

53 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

54 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$

55 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right).$

56 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

57 $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

58 $\operatorname{tg} 5x \operatorname{tg}\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right) = 1.$

59 $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 1.$

60 $\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3.$

61 $\operatorname{tg}^2 4x \operatorname{tg}^2 x = 1.$

62 $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 2x} = 1.$

EXERCICES

◆ Résoudre les équations suivantes :

63 $\sin 2x + \cos 3x = 0.$

64 $\cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3}.$

65 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0.$

66 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} 3x = -1.$

67 $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 x = 0.$

68 $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

69 $\cos^2 4x - \sin^2 3x = 0.$

70 $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0.$

◆ Résoudre les équations suivantes :

71 $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0.$

72 $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0.$

73 $4\sin^2 x + 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0.$

74 $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0.$

75 $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + 1 = 0.$

76 $\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$

77 Soit m un réel. On considère l'équation : $\cos^2 x + 3\cos x + m = 0.$
1° Discuter le nombre des solutions de l'équation qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2° Résoudre l'équation pour $m = -\frac{7}{4}.$

78 Soit m un réel. On considère l'équation : $2\sin^2 x - 2\sin x - m = 0.$
1° Discuter le nombre des solutions de l'équation qui appartiennent à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right).$

2° Résoudre l'équation pour $m = 1 - \sqrt{2}.$

79 Soit m un réel. On considère l'équation :
$4m\cos^2 x - 2\cos x - m = 0.$
Discuter le nombre des solutions de l'équation qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

80 Soient deux réels m et R. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y = R\sin\alpha + x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

81 1° Soient u et v deux réels qui vérifient : $u^2 + v^2 = 1$. Montrer qu'il existe un réel a pour lequel on a : $u = \cos a$ et $v = \sin a$.

2° Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + xy = \dfrac{\sqrt{6}+2}{4}. \end{cases}$

$x(x+y) =$

$(x+y)^2 - 2xy$

$\cos^2 a + \cos a \sin a$

82 Résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \cos x = \cos y, \\ x + 2y = \pi. \end{cases}$$

83 Résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \sin x = \sin y, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5}. \end{cases}$$

84 1° Résoudre les équations :
$\sin x + \cos x = 1$ et $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$.
2° Soit m un réel. Discuter et résoudre les équations :
$\sin x + \cos x = m$ et $1 + \sin x = m\cos x$.

◆ Résoudre les équations :

85 $15\cos x + 8\sin x - 17 = 0$.

86 $5\cos x + 12\sin x - 13 = 0$.

87 $20\cos x + 21\sin x = 29$.

88 $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

89 $\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} = 0$.

90 $\sqrt{3}\sin x - \cos x + 1 = 0$.

91 $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = 2$.

92 $2\cos 2x = (1+\sqrt{3})(\cos x - \sin x)$.

93 Déterminer le réel m pour que l'ensemble E des solutions du système

$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \sin x + \cos x = m \end{cases}$ soit non vide. Déterminer alors E.

◆ Soit m un réel. Discuter et résoudre les équations :

94 $m\cos x + \sqrt{1-m^2}\sin x = 2m^2 - 1$.

95 $m\sin x + (m+2)\cos x - 2(m+1) = 0$.

96 $(1+m)\cos x + (1-m)\sin x = m\sqrt{2}$.

97 $(1+m)\sin x + (1-m)\cos x = 2m$.

EXERCICES

♦ Discuter et résoudre, dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les inéquations suivantes :

98 $2\cos x + 1 > 0.$

99 $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0.$

100 $1 - 2\sin x < 0.$

101 $2\sin x - \sqrt{3} > 0.$

102 $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} > 0.$

103 $4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} < 0.$

104 $-4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} + 1)\sin x + 4 + \sqrt{2} < 0.$

105 $4\sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - 4 + \sqrt{3} > 0.$

106 $\operatorname{tg}^2 x - 3 < 0.$

107 $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + 1 > 0.$

108 $\operatorname{tg} x - \dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} + 1 - \sqrt{3} > 0.$

109 $3\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 < 0.$

110 $\dfrac{2}{4\cos^2 x - 1} < 1.$

111 $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < \dfrac{1}{2}.$

31.
Calculs numériques

Valeurs approchées.

Encadrement d'un réel.

1 Soit a un réel. Si nous connaissons un réel A et un réel positif α tels que a appartienne à l'intervalle $]A - \alpha, A + \alpha[$, nous avons les inégalités :
$A - \alpha < a < A + \alpha$.
Nous disons que le réel a est encadré par les deux réels $A - \alpha$ et $A + \alpha$.
Nous disons aussi que le réel A est une valeur approchée du réel a à α près.
Si l'on a les inégalités : $A \leqslant a < A + \alpha$, on dit que le réel A est une valeur approchée du réel a à α près par défaut.
Si l'on a les inégalités : $A - \alpha < a \leqslant A$, on dit que le réel A est une valeur approchée du réel a à α près par excès.
Dans presque tous les problèmes pratiques, on se ramène au cas où le réel a est positif; le réel A est alors positif et en général supérieur à α.

Erreur absolue sur un réel; incertitude absolue.

2 **DÉFINITIONS : 1. L'erreur absolue commise sur un réel a est la différence entre la valeur exacte a et la valeur approchée A.**
2. Tout réel positif α supérieur à $|a - A|$ est appelé incertitude absolue.

Pour tout réel positif α, nous avons les équivalences logiques :

$$(a \in]A - \alpha, A + \alpha[) \iff (A - \alpha < a < A + \alpha)$$
$$\iff (-\alpha < a - A < \alpha) \iff (\alpha > |a - A|).$$

Tout encadrement d'un réel a par un intervalle $]A - \alpha, A + \alpha[$ permet donc de déterminer une valeur approchée A et une incertitude absolue α.

Erreur relative sur un réel non nul; incertitude relative.

3 **DÉFINITIONS : 1. L'erreur relative commise sur un réel non nul a est le quotient $\frac{a - A}{a}$ de l'erreur absolue $a - A$ par la valeur exacte a.**

2. Tout réel positif α' supérieur à $\left|\frac{a - A}{a}\right|$ est appelé incertitude relative.

Soit α une incertitude absolue; nous avons : $A - \alpha < a < A + \alpha$.
Dans la plupart des cas, le réel a et la différence $A - \alpha$ sont positifs; nous avons alors l'inégalité : $a > A - \alpha$. Nous en déduisons : $\left|\frac{a - A}{a}\right| < \frac{\alpha}{A - \alpha}$.

Une incertitude relative est alors $\frac{\alpha}{A - \alpha}$.

Ordre de grandeur d'un résultat.

4 Lorsque le résultat d'un calcul ou d'une mesure est donné avec une incertitude assez grande, on dit que la valeur approchée donnée est un ordre de grandeur du résultat. Il est alors d'usage de ne pas indiquer d'incertitude.
Par exemple, le nombre d'habitants de la France au 1er janvier 1970 était de l'ordre de 50 millions.
Lorsque deux nombres sont assez voisins, on dit qu'ils sont du même ordre de grandeur.
Par exemple, les distances de l'apogée et du périgée de la Lune à la Terre sont du même ordre de grandeur.
Ces deux longueurs, exprimées en kilomètres, sont de l'ordre de 380 000.

Chiffres significatifs.

5 Considérons un nombre décimal positif et son écriture décimale.
Dans cette écriture, supprimons la virgule s'il y en a une, puis les zéros par lesquels, éventuellement, cette écriture commence ou se termine. Les chiffres qui restent sont appelés des chiffres significatifs du nombre décimal positif A.
<u>Exemples</u>: 1. Les chiffres significatifs du nombre décimal 0,0060239 sont : 6; 0; 2; 3; 9.
2. Pour chacun des nombres décimaux 602,39 et 60 239 000, les chiffres significatifs sont aussi 6; 0; 2; 3; 9.

6 <u>Remarques</u>: 1. Deux nombres décimaux A et A' positifs admettent les mêmes chiffres significatifs si et seulement s'il existe un entier relatif n tel que l'un de ces nombres soit égal au produit de l'autre par 10^n.
2. Pour déterminer un nombre décimal positif, il suffit de connaître les chiffres significatifs et un ordre de grandeur de ce nombre. Par exemple, soit un nombre décimal positif A dont les chiffres significatifs sont : 2; 7; 3; 8. Si A est de l'ordre de 25, on a : $A = 27{,}38$; si A est de l'ordre de 0,03, on a : $A = 0{,}02738$.

Valeurs approchées des fonctions circulaires

Soit ε un réel positif et f une fonction circulaire.
Proposons-nous de déterminer, pour chaque fonction f, une fonction polynôme g et un réel positif α tel que, pour tout réel x_0 tel que $|x_0|$ soit inférieur* à α, le réel $g(x_0)$ soit une valeur approchée de $f(x_0)$ avec une incertitude égale à ε.
En pratique, une telle détermination ne présente d'intérêt que pour de "petites" valeurs de α; on entend par "petites" valeurs du réel α des valeurs inférieures à 1, en général de l'ordre de 0,1 ou 0,01.

Théorèmes préliminaires.

THÉORÈME : Pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

En effet, soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_1(x) = x - \sin x,$ et par :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_2(x) = \operatorname{tg} x - x.$

f_1 et f_2 sont des fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; les fonctions dérivées sont définies par : $f_1'(x) = 1 - \cos x$ et $f_2'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1$.

Nous avons donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$f_1'(x) > 0$ et $f_2'(x) > 0$.
Nous en déduisons que les fonctions f_1 et f_2 sont strictement croissantes sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Nous avons donc : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_1(x) > f_1(0)$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_2(x) > f_2(0)$.

Les réels $f_1(0)$ et $f_2(0)$ sont nuls ; nous concluons :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_1(x) > 0$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad f_2(x) > 0,$

c'est-à-dire : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad x > \sin x$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \operatorname{tg} x > x$.

Nous avons donc : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$

* Les fonctions circulaires sont soit paires, soit impaires. En pratique, on se ramène toujours au cas où x_0 est positif.

9 THÉORÈME : Pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

En effet, soit la fonction f_3 définie sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f_3(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$

f_3 est une fonction dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; la fonction dérivée est définie par : $f'_3(x) = -\sin x + x$.

Nous déduisons du théorème précédent : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'_3(x) > 0$.

f_3 est donc strictement croissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Nous avons donc : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f_3(x) > f_3(0)$.

Le réel $f_3(0)$ est nul ; nous concluons : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f_3(x) > 0$, c'est-à-dire :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$, ou encore : $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Valeur approchée de sin *x*.

10 THÉORÈME : Pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $0 < x - \sin x < \frac{x^3}{6}$.

En effet, considérons la fonction g : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x \rightsquigarrow x - \sin x - \frac{x^3}{6}$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; nous avons :

$g'(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$, c'est-à-dire : $g'(x) = -f_3(x)$.

Du théorème précédent, il résulte : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; nous en déduisons : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) < g(0)$.

Le réel $g(0)$ est nul ; nous avons donc : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x$.

11 Des nos 8 et 10, il résulte : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

Soit x_0 un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Des inégalités : $x_0 - \frac{x_0^3}{6} < \sin x_0 < x_0$, nous déduisons : $0 < x_0 - \sin x_0 < \frac{x_0^3}{6}$.

Le réel x_0 est une valeur approchée de $\sin x_0$ **à** $\frac{x_0^3}{6}$ **près par excès.**

12 Soit ε un réel positif ; en pratique, on cherche à déterminer un réel α positif, aussi grand que possible, tel que : $(0 < x < \alpha) \Longrightarrow (x - \sin x < \varepsilon)$.
Nous donnons, sans démonstration, les résultats de cette détermination pour $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}1$. (Voir Tableau n° V, page 285.)

Nous donnons aussi la mesure en degrés, β, de l'angle $\widehat{\varphi}$ dont une mesure en radians est le réel α.

Valeurs approchées de cos x.

Première valeur approchée de cos x.

13 Nous rappelons le résultat établi au n° 9, p. 166 : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Soit x_0 un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Des inégalités : $\cos x_0 < 1$ et $\cos x_0 > 1 - \frac{x_0^2}{2}$, nous déduisons :

$1 - \frac{x_0^2}{2} < \cos x_0 < 1$.

Le réel 1 est une valeur approchée de $\cos x_0$ **à** $\frac{x_0^2}{2}$ **près par excès.**

14 Soit ε un réel positif ; en pratique, on cherche à déterminer un réel α positif, aussi grand que possible, tel que : $(0 < x < \alpha) \Longrightarrow (1 - \cos x < \varepsilon)$.
Nous donnons, sans démonstration, les résultats de cette détermination pour $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}1$. (Voir Tableau n° V, page 285.)

Nous donnons aussi la mesure en degrés, β, de l'angle $\widehat{\varphi}$ dont une mesure en radians est le réel α.

Deuxième valeur approchée de cos x.

15 **THÉORÈME : Pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :**

$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24}$.

En effet, considérons la fonction h : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \rightsquigarrow \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^4}{24}$.

La fonction h est dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et nous avons :

$h'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6}$, c'est-à-dire (n° 10, p. 166) : $h'(x) = g(x)$.

Nous avons montré que, pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $g(x) < 0$.

Nous en déduisons : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad h'(x) < 0$.

La fonction h est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; nous en déduisons : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad h(x) < h(0)$.

Le réel $h(0)$ est nul ; nous avons donc :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24}$.

16 Soit x_0 un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Du résultat précédent et du n° 9, p. 166, nous déduisons :

$0 < \cos x_0 - \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right) < \frac{x_0^4}{24}$.

Le réel $1 - \frac{x_0^2}{2}$ **est une valeur approchée de** $\cos x_0$ **à** $\frac{x_0^4}{24}$ **près par défaut.**

---

17 Soit ε un réel positif ; en pratique, on cherche à déterminer un réel α positif, aussi grand que possible, tel que : $(0 < x < \alpha) \Longrightarrow \left(\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \varepsilon\right)$.

Nous donnons, sans démonstration, les résultats de cette détermination pour $\varepsilon = 0{,}001$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}1$. (Voir Tableau n° V, page 285.)

Nous donnons aussi la mesure en degrés, β, de l'angle $\widehat{\varphi}$ dont une mesure en radians est le réel α.

Valeur approchée de tg x.

18 Nous avons établi (n° 8, p. 165) : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x < \operatorname{tg} x$.

Soit x_0 un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le réel x_0 **est une valeur approchée de** $\operatorname{tg} x_0$ **par défaut.**

---

19 Soit ε un réel positif ; en pratique, on cherche à déterminer un réel α positif, aussi grand que possible, tel que : $(0 < x < \alpha) \Longrightarrow (\operatorname{tg} x - x < \varepsilon)$.

Nous donnons, sans démonstration, les résultats de cette détermination pour $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}1$. (Voir Tableau n° V, page 285.)

Nous donnons aussi la mesure en degrés, β, de l'angle $\widehat{\varphi}$ dont une mesure en radians est le réel α.

Tables numériques.

Table d'une fonction.

Définitions.

0 Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle E de $\mathbb{R}$.
Soient k réels $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de l'intervalle E, qui vérifient les inégalités :
$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.
Pour chaque entier i de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$, désignons par y_i le réel $f(x_i)$ ou une valeur approchée de ce réel.
Une table de la fonction f pour l'intervalle E est l'ensemble des couples (x_i, y_i).
Le réel y_i est appelé **valeur tabulée** de $f(x_i)$.

21 En pratique, les réels $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont choisis de la façon suivante :
1. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des nombres décimaux.
2. La différence de deux nombres consécutifs est un nombre décimal p appelé **pas de la table**.

Exemple : Pour la table de la fonction cosinus (p. 282), nous avons :
$x_1 = 0$; $p = 0{,}01$; $x_k = 1$.

22 On appelle **différence tabulaire** entre x_i et x_{i+1} le réel $y_{i+1} - y_i$, différence des valeurs tabulées.
Nous montrerons qu'une table de la fonction f permet de déterminer, pour tout réel x de l'intervalle $[x_1, x_k]$, une valeur approchée de $f(x)$.

Tables à n décimales.

23 Soit n un entier naturel. On dit qu'une table de la fonction f est une table à n décimales si, pour chaque x_i, la valeur tabulée y_i de $f(x_i)$ est un nombre décimal à n décimales qui vérifie :

$$y_i - \frac{1}{2}10^{-n} \leqslant f(x_i) < y_i + \frac{1}{2}10^{-n}.$$

y_i est donc une valeur approchée de $f(x_i)$ à $0{,}5.10^{-n}$ près.

Interpolation linéaire.

Problème direct.

24 **But** : Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et x un réel de l'intervalle $]a, b[$. On suppose que l'on connaît les réels $f(a)$ et $f(b)$ et l'on recherche une valeur approchée y du réel $f(x)$.

25 **Méthode** : Montrons qu'il existe une fonction affine unique t pour laquelle on a : $t(a) = f(a)$ et $t(b) = f(b)$.

En effet, soit t une fonction affine : $x \leadsto \lambda x + \mu$.

Nous avons les équivalences logiques :

$$\big(t(a) = f(a) \quad \text{et} \quad t(b) = f(b)\big) \iff \big(\lambda a + \mu = f(a) \quad \text{et} \quad \lambda b + \mu = f(b)\big);$$

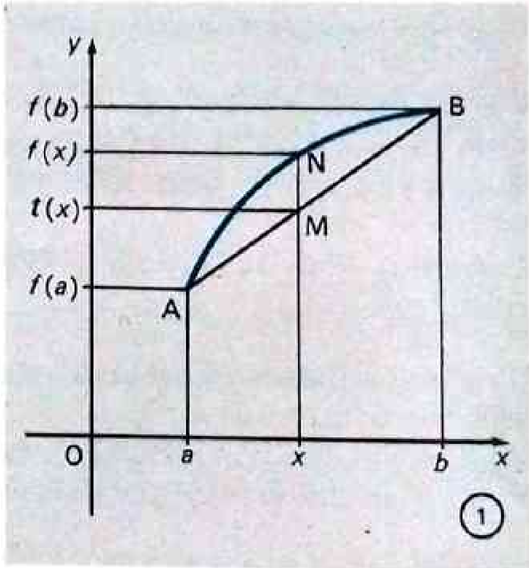
$$\big(\lambda a + \mu = f(a) \quad \text{et} \quad \lambda b + \mu = f(b)\big) \iff \begin{pmatrix} \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \text{et} \\ \mu = f(a) - a\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{pmatrix}.$$

La fonction affine t définie par : $x \leadsto f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ est donc l'unique fonction affine qui vérifie : $t(a) = f(a)$ et $t(b) = f(b)$.

Lorsque l'on prend le réel $y = t(x)$ pour valeur approchée du réel $f(x)$, on dit que l'on fait une **interpolation linéaire.**

La figure 1 donne une interprétation graphique de cette interpolation linéaire.

L'erreur : $y - f(x)$ due à la méthode d'interpolation linéaire est représentée par $\overline{MN}$.



26 **Utilisation pratique** : Soit f une fonction dont on connaît une table. Reprenons les notations du n° 20, p. 169. Pour chaque x_i, la table donne la valeur tabulée y_i de $f(x_i)$.

Soit x un réel de l'intervalle $[x_1, x_k]$.

Il existe un entier naturel i pour lequel on a : $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Si x est égal à x_i, le réel y_i est une valeur approchée de $f(x)$.

Si x appartient à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$, nous utilisons la méthode précédente pour déterminer une valeur approchée y de $f(x)$; nous avons donc :

$$y = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

En pratique, on ne connaît pas $f(x_{i+1})$ et $f(x_i)$, mais simplement les valeurs tabulées y_{i+1} et y_i.

Nous prenons donc pour valeur approchée de $f(x)$, le réel :

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i).$$

Soient D la différence tabulaire entre x_i et x_{i+1} et p le pas de la table, nous avons :

$$\boxed{y = y_i + \frac{D}{p}(x - x_i)}$$

27 **Remarque** : Lorsque l'on remplace $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$ par les valeurs tabulées y_i et y_{i+1}, on commet une erreur supplémentaire due à la table.

En pratique, les tables sont construites de façon que l'erreur due à la méthode soit négligeable devant l'erreur due à la table.

28 **Exemple** : Utilisons la table de la fonction : $x \rightsquigarrow \sqrt{x}$ pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{101{,}3}$.

Nous avons : $x_i = 101$; $y_i = 10{,}0499$.

$x_{i+1} = 102$; $y_{i+1} = 10{,}0995$.

Il en résulte : $p = 1$ et $D = 0{,}0496$.

Une valeur approchée de $\sqrt{101{,}3}$ est donc :

$$y_i = 10{,}0499 + \frac{0{,}0496}{1}(101{,}3 - 101) = 10{,}06478.$$

La table utilisée est à quatre décimales. Il paraît donc naturel de donner une valeur approchée de $\sqrt{101{,}3}$ à quatre décimales.

La cinquième décimale de y_1 est supérieure à 5 ; nous prenons pour valeur approchée de $\sqrt{101{,}3}$ le nombre décimal 10,0648.

D'une manière générale, pour une table à quatre décimales, si la cinquième décimale du résultat est l'un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, on garde les quatre premières décimales obtenues ; si la cinquième décimale est supérieure ou égale à 5, on augmente la quatrième décimale de 1 et l'on conserve les quatre premières décimales ainsi obtenues.

Problème réciproque.

29 **But** : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Nous supposons que, sur cet intervalle, la fonction f est continue et strictement monotone, par exemple, strictement croissante.

Soit y un réel de l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

On démontre et nous admettons que la continuité et la monotonie de f sur l'intervalle $[a, b]$ impliquent, pour ce réel y, l'existence d'un réel unique x pour lequel on a : $y = f(x)$.

On recherche une valeur approchée de ce réel x.

30 **Méthode** : Désignons par t l'unique fonction affine qui vérifie les égalités :

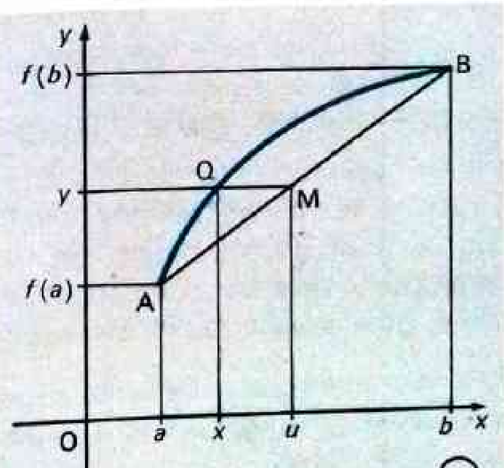
$t(a) = f(a)$ et $t(b) = f(b)$.

Soit u le réel dont l'image par t est y ; nous avons :

$$y = t(u) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(u - a).$$

Nous en déduisons :

$$u = a + \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\big(y - f(a)\big).$$



2

Lorsque l'on prend le réel u pour valeur approchée du réel x, on dit que l'on fait une **interpolation linéaire.**

La figure 2 donne une interprétation graphique de cette interpolation linéaire. L'erreur : $x - u$ due à la méthode d'interpolation linéaire est représentée par $\overline{MQ}$.

31 **Utilisation pratique** : Soit f une fonction strictement croissante dont on connaît une table. Reprenons les notations du n° 20, p. 169.
Soient y_1 et y_k les valeurs tabulées de $f(x_1)$ et de $f(x_k)$, et soit y un réel de l'intervalle $[y_1, y_k]$.
Il existe un entier naturel i pour lequel on a : $y \in [y_i, y_{i+1}]$.
Si y est égal à y_i, une valeur approchée de x est x_i.
Si y appartient à l'intervalle ouvert $]y_i, y_{i+1}[$, nous utilisons la méthode précédente pour déterminer une valeur approchée u de x ; nous avons donc :

$$u = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i}(y - y_i).$$

Soient D la différence tabulaire entre x_i et x_{i+1}, et p le pas de la table ; nous avons :

$$\boxed{u = x_i + \frac{p}{\mathrm{D}}(y - y_i)}$$

32 **Remarque** : L'interpolation linéaire conduit théoriquement à l'égalité :

$$u = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}(y - f(x_i)).$$

Lorsqu'on remplace $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$ par les valeurs tabulées y_i et y_{i+1}, on commet une erreur supplémentaire due à la table.

33 **Exemple** : Utilisons la table de la fonction : $x \leadsto \sqrt{x}$ pour déterminer une valeur approchée u du réel x qui vérifie : $\sqrt{x} = 8{,}3438$.
Nous avons : $y_i = 8{,}3066$; $x_i = 69$,
$y_{i+1} = 8{,}3666$; $x_{i+1} = 70$.
Il en résulte : $p = 1$ et $\mathrm{D} = 0{,}0600$.
Une valeur approchée u est donc : $u = 69 + \dfrac{1}{0{,}06}(8{,}3438 - 8{,}066)$;
$u = 69{,}64$.

Usage des tables de fonctions circulaires.

34 On trouve, page 282, des tables à quatre décimales des fonctions circulaires. Soit i un entier naturel de l'intervalle $[0, 100]$; pour tout réel x_i égal à $\dfrac{i}{100}$, ces tables donnent des valeurs tabulées de $\sin x_i$, $\cos x_i$, $\operatorname{tg} x_i$. Le pas de ces tables est donc 0,01.
Il résulte des propriétés des fonctions circulaires ,que nous pouvons déterminer une valeur approchée de $\sin x$ et de $\cos x$ pour tout réel x, et une valeur approchée de $\operatorname{tg} x$ pour tout réel x qui appartient à l'ensemble de définition de la fonction tangente. Nous nous bornons à donner deux exemples.

35 **Premier exemple** : Détermination d'une valeur approchée de sin 2,135.
Une valeur décimale approchée du nombre π à 10^{-3} près est : 3,142, et une valeur décimale approchée du nombre $\dfrac{\pi}{2}$ à 10^{-3} près est : 1,571.
De l'égalité : $\sin x = \sin(\pi - x)$, nous déduisons :
$\sin 2{,}135 = \sin(3{,}142 - 2{,}135) = \sin 1{,}007$.

De l'égalité : $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, nous déduisons :
$\sin 1{,}007 = \cos (1{,}571 - 1{,}007) = \cos 0{,}564$.
Nous avons donc : $\sin 2{,}135 = \cos 0{,}564$.
Faisons une interpolation linéaire ; nous lisons dans la table :
$\cos 0{,}56 = 0{,}8473$; $\cos 0{,}57 = 0{,}8419$.
Nous avons : $p = 0{,}01$ et $D = -0{,}0054$.
Il en résulte :

$$\cos 0{,}564 = 0{,}8473 - 0{,}004 \times \frac{0{,}0054}{0{,}01} = 0{,}8473 - 0{,}0022 = 0{,}8451.$$

Nous avons donc : $\sin 2{,}135 = 0{,}8451$.

36 **Deuxième exemple :** Détermination d'un réel x tel que : $\cos x = 0{,}3098$.
Les valeurs approchées de $\cos x$ données dans la table sont comprises entre 0,5403 et 1 ; celles de $\sin x$ sont comprises entre 0 et 0,8415.

De l'égalité : $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, nous déduisons que, pour déterminer un réel x tel que : $\cos x = 0{,}3098$, il suffit de déterminer un réel y tel que : $\sin y = 0{,}3098$, puis de calculer : $x = \frac{\pi}{2} - y$.

Faisons une interpolation linéaire ; nous lisons dans la table :
$\sin 0{,}31 = 0{,}3051$ et $\sin 0{,}32 = 0{,}3146$.
Nous avons : $p = 0{,}01$ et $D = 0{,}0095$; $\sin y - \sin 0{,}31 = 0{,}0047$.
Nous en déduisons :

$$y = 0{,}31 + 0{,}01 \times \frac{0{,}0047}{0{,}0095} = 0{,}31 + 0{,}005 = 0{,}315.$$

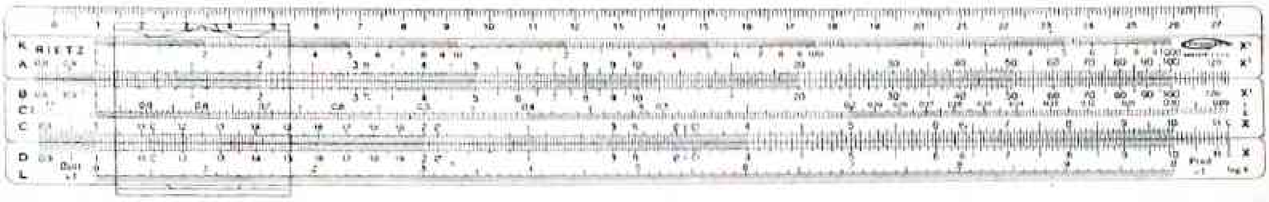
Une valeur approchée du réel x tel que : $\cos x = 0{,}3098$ est donc :
$x = 1{,}571 - 0{,}315 = 1{,}256$.

Usage des tables Sin $\hat{\varphi}$ et Cos $\hat{\varphi}$.

37 On est parfois conduit à déterminer le Sinus ou le Cosinus d'un angle $\widehat{\varphi}$ dont on connait une mesure en degrés ou en grades ; parfois aussi, on est conduit à déterminer une mesure en degrés ou en grades d'un angle $\widehat{\varphi}$ dont on connaît le Sinus ou le Cosinus. Pour effectuer de tels calculs, on utilise les tables données p. 283 et p. 284. L'usage de ces tables a été exposé dans les classes antérieures.

Usage de la règle à calculs.

38 En classe de Seconde, nous avons décrit une règle à calculs et indiqué une méthode de détermination de produits et de quotients de réels. Nous rappelons les principaux passages de cet exposé.



3

Échelles d'une règle à calculs.

Description des échelles.

39 Tous les modèles de règles à calculs (fig. 3) comportent au moins les échelles suivantes * :

1. **Sur le biseau de la règle,** une échelle graduée en centimètres, qui ne sert jamais dans les calculs ;

2. **Sur la règle :**

α) une échelle des nombres, notée X, située en face du bord inférieur de la réglette, et graduée de 1 à 10 ;

β) une échelle des carrés, notée X^2, située en face du bord supérieur de la réglette, et graduée de 1 à 100 ;

γ) une échelle des cubes, notée X^3, située au-dessus de l'échelle X^2 de la règle, et graduée de 1 à 100.

3. **Sur la réglette :**

α) au bord inférieur, une échelle des nombres, notée X, graduée de 1 à 10, et susceptible de coïncider avec l'échelle X de la règle ;

β) au bord supérieur, une échelle des carrés, notée X^2, graduée de 1 à 100, et susceptible de coïncider avec l'échelle X^2 de la règle ;

γ) au milieu, une échelle des inverses, notée $\frac{1}{X}$, graduée selon les modèles de 0,1 à 1 ou de 1 à 10, mais dont les graduations croissent de droite à gauche.

---

* 1° Les notations que nous indiquons pour désigner les différentes échelles sont les notations internationales standardisées. Sur les règles vendues en France jusqu'en 1968, les notations X, X^2, X^3 de la règle étaient désignées respectivement par B, B^2, B^3 ; les notations X, X^2, $\frac{1}{X}$ de la réglette étaient désignées respectivement par *b*, b^2, *a*.
2° Sur le bord gauche de la règle, les échelles X, X^2, X^3 sont désignées respectivement par D, A, K.
Sur le bord gauche de la réglette, les échelles X, X^2 $\frac{1}{X}$ sont désignées respectivement par C, B, CI.

Utilisation des échelles X.

40 Sur ces échelles, nous ne pouvons lire que les nombres décimaux qui appartiennent à l'intervalle [1, 10]. Si nous devons utiliser un nombre décimal compris entre 0 et 1, ou un nombre décimal supérieur à 10, nous devons d'abord écrire ce nombre sous la forme : $a.10^n$, où n est un entier relatif et où a appartient à l'intervalle [1, 10].

Utilisation des échelles X^2.

41 Sur ces échelles, nous ne pouvons lire que les nombres décimaux qui appartiennent à l'intervalle [1, 100]. Si nous devons utiliser un nombre décimal compris entre 0 et 1, ou un nombre décimal supérieur à 100, nous devons d'abord écrire ce nombre sous la forme : $a.10^{2p}$, où $2\,p$ est un entier relatif multiple de 2, et où a appartient à l'intervalle [1, 100].

Utilisation de l'échelle X^3.

42 Sur cette échelle, nous ne pouvons lire que les nombres décimaux qui appartiennent à l'intervalle [1, 1000]. Si nous devons utiliser un nombre décimal compris entre 0 et 1, ou un nombre décimal supérieur à 1000, nous devons d'abord écrire ce nombre sous la forme : $a.10^{3q}$, où $3\,q$ est un entier relatif multiple de 3, et où a appartient à l'intervalle [1, 1000].

Utilisation de l'échelle $\frac{1}{X}$.

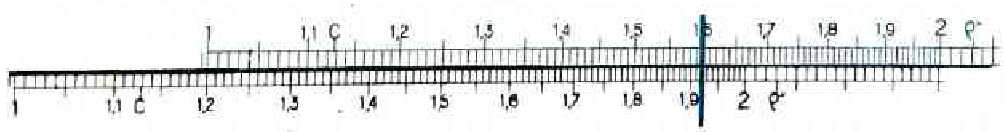
43 Si l'échelle est graduée de 1 à 10, nous utilisons cette échelle comme les échelles X. Si l'échelle est graduée de 0,1 à 1, et si nous devons utiliser un nombre décimal compris entre 0 et 0,1, ou un nombre décimal supérieur à 1, nous devons d'abord écrire ce nombre sous la forme : $a.10^n$, où n est un entier relatif, et où a appartient à l'intervalle [0,1 ; 1].

Calcul d'un produit.

44 Pour calculer le produit de deux nombres, on utilise l'échelle X de la règle et l'échelle X de la réglette. Nous rappelons la méthode sur l'exemple suivant.

Exemple : Calcul du produit : $a = 12 \times 160$.

1. Nous écrivons : $a = (1{,}2 \times 10) \times (1{,}6 \times 10^2)$, c'est-à-dire : $a = 1{,}2 \times 1{,}6 \times 10^3$.



4

2. Nous plaçons la graduation 1 de l'échelle X de la réglette en face de la graduation 1,2 de l'échelle X de la règle (fig. 4).
Nous plaçons le trait central du curseur sur la division 1,6 de l'échelle X de la réglette.
Nous lisons les chiffres significatifs du produit $1{,}2 \times 1{,}6$ sur l'échelle X de la règle, sous le même trait du curseur : 1 ; 9 ; 2.
3. Nous déterminons mentalement un ordre de grandeur du produit : $a = 1{,}2 \times 1{,}6 \times 10^3$.
Nous trouvons : $1 \times 2 \times 10 = 2\,000$.
4. Nous concluons : le produit 12×160 est égal à 1 920.

45 **Remarque** : Pour calculer le produit de plusieurs nombres, nous répétons plusieurs fois le procédé précédent; nous rappelons qu'il est inutile de déterminer les produits partiels.

Calcul d'un quotient.

Première méthode.

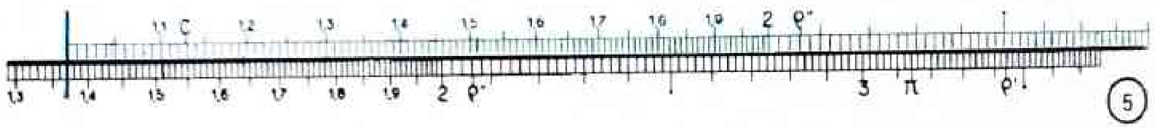
46 Pour calculer le quotient de deux nombres, on utilise l'échelle X de la règle et l'échelle X de la réglette. Nous rappelons la méthode sur l'exemple suivant :

Exemple : Calcul du quotient : $b = \frac{370}{27}$.

1. Nous écrivons : $b = \frac{3{,}70 \times 10^2}{2{,}7 \times 10}$, c'est-à-dire :

$b = \frac{3{,}7}{2{,}7} \times 10.$

2. Nous plaçons le trait central du curseur sur la graduation 3,7 de l'échelle X de la règle (fig. 5).



5

Nous plaçons la graduation 2,7 de l'échelle X de la réglette sous le même trait du curseur.

Nous lisons les chiffres significatifs du quotient $\frac{3{,}7}{2{,}7}$ sur l'échelle X de la règle en face de la graduation 1 de l'échelle X de la réglette : 1 ; 3 ; 7 ; 0.

3. Nous déterminons mentalement un ordre de grandeur du quotient $\frac{370}{27}$; nous trouvons 10.

4. Nous concluons : une valeur approchée du quotient $\frac{370}{27}$ est 13,70.

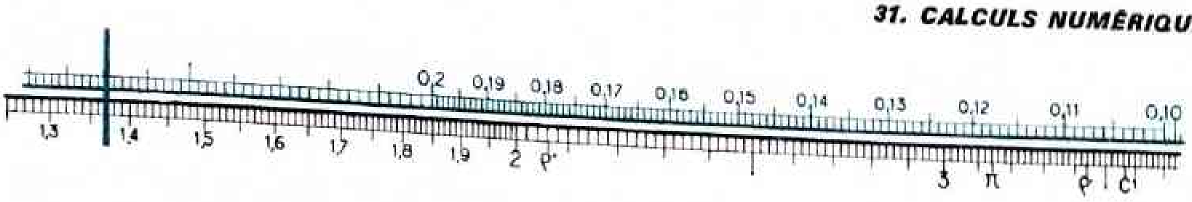
Deuxième méthode.

47 Pour calculer le quotient de deux nombres, on utilise l'échelle X de la règle et l'échelle $\frac{1}{X}$ de la réglette. Nous indiquons la méthode sur l'exemple suivant, en supposant que l'échelle $\frac{1}{X}$ est graduée de 0,1 à 1.

Exemple : Calcul du quotient : $b = \frac{370}{27}$.

1. Nous écrivons : $b = \frac{3{,}7}{0{,}27}$

2. Nous plaçons le trait central du curseur sur la graduation 3,7 de l'échelle X de la règle (fig. 6).



6

Nous plaçons la graduation 1 de l'échelle $\frac{1}{X}$ de la réglette sous le même trait du curseur. Nous lisons les chiffres significatifs du quotient $\frac{3{,}7}{0{,}27}$ sur l'échelle X de la règle, en face de la graduation 0,27 de l'échelle $\frac{1}{X}$ de la réglette : 1 ; 3 ; 7 ; 0.

3. Nous déterminons un ordre de grandeur du quotient $\frac{370}{27}$; nous trouvons : 10.

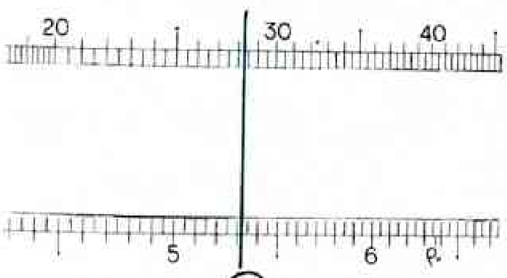
4. Nous concluons : une valeur approchée du quotient $\frac{370}{27}$ est 13,70.

Détermination du carré ou de la racine carrée d'un nombre.

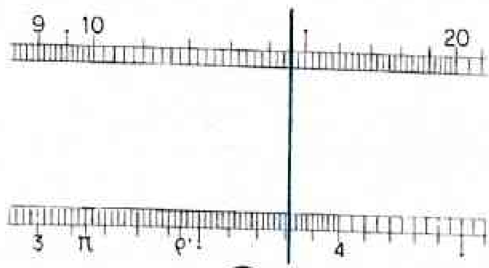
48 Pour déterminer le carré ou la racine carrée d'un nombre, on se sert des échelles X et X^2 de la règle. Pour toute position du curseur, le nombre lu sur l'échelle X^2 est le carré du nombre correspondant sur l'échelle X.

Premier exemple : Calcul du carré du nombre : $c = 0{,}533$.

1. Nous écrivons : $c = 5{,}33 \times 10^{-1}$.
2. Nous plaçons le trait central du curseur sur la graduation 5,33 de l'échelle X de la règle (fig. 7). Nous lisons les chiffres significatifs du carré de 5,33 sur l'échelle X^2 de la règle, sous le même trait du curseur : 2 ; 8 ; 4.
3. Nous déterminons mentalement un ordre de grandeur du carré de 0,533 ; nous trouvons : 0,25.
4. Nous concluons : une valeur approchée du carré de 0,533 est 0,284.



7



8

Deuxième exemple : Calcul de la racine carrée du nombre 0,1462.

1. Nous écrivons : $d = 14{,}62 \times 10^{-2}$.
2. Nous plaçons le trait central du curseur sur la graduation 14,62 de l'échelle X^2 de la règle (fig. 8). Nous lisons les chiffres significatifs de la racine carrée de 0,1462 sur l'échelle X de la règle, sous le même trait du curseur : 3 ; 8 ; 2.
3. Nous déterminons mentalement un ordre de grandeur de la racine carrée de 0,1462 ; nous trouvons 0,4.
4. Nous concluons : une valeur approchée de la racine carrée de 0,1462 est 0,382.

Détermination du cube ou de la racine cubique d'un nombre.

49 Pour déterminer le cube ou la racine cubique d'un nombre, on utilise les échelles X et X^3 de la règle. Pour toute position du curseur, le nombre lu sur l'échelle X^3 est le cube du nombre correspondant lu sur l'échelle X.

Exemples : Nous indiquons simplement qu'une valeur approchée du cube de 59 est 205 000, et qu'une valeur approchée de la racine cubique de 20 500 est 27,4.

EXERCICES

◆ Calculer par interpolation linéaire des valeurs approchées des réels suivants (nos 1 à 4) :

1 $(18,16)^2$, $(198,3)^2$, $(1,786)^2$.

2 $(173,6)^3$, $(121,6)^3$, $(18,13)^3$.

3 $\sqrt{83,2}$, $\sqrt{1,416}$, $\sqrt{0,763}$.

4 $\sqrt{8522}$, $\sqrt{33253}$, $\sqrt{21214}$.

◆ Calculer par interpolation linéaire des valeurs approchées des réels suivants (nos 5 à 10) :

5 sin (0,364), sin (0,483), sin (0,897).

6 sin (1,278), sin (1,642), sin (4,812).

7 cos (0,413), cos (0,628), cos (0,927).

8 cos (1,119), cos (1,618), cos (5,002).

9 tg (0,227), tg (0,319), tg (0,722).

10 tg (1,528), tg (3,285), tg (4,935).

◆ Déterminer une valeur approchée d'un réel x tel que : $\sin x = y$, pour les réels y suivants (nos 11 à 16) :

11 $y = 0,2292$. **12** $y = 0,6427$. **13** $y = 0,8258$.

14 $y = 0,8502$. **15** $y = 0,8939$. **16** $y = 0,9842$.

◆ Déterminer une valeur approchée d'un réel x tel que : $\cos x = y$, pour les réels y suivants (nos 17 à 22) :

17 $y = 0,8770$. **18** $y = 0,9200$. **19** $y = 0,5869$.

20 $y = 0,2225$. **21** $y = 0,4673$. **22** $y = 0,2635$.

◆ Déterminer une valeur approchée d'un réel x tel que : $\operatorname{tg} x = y$ pour les réels y suivants (n^{os} 23 à 28) :

23 $y = 0{,}2903$. **24** $y = 0{,}5527$. **25** $y = 1{,}4378$.

26 $y = 1{,}829$. **27** $y = 4{,}251$. **28** $y = 10{,}29$.

◆ Déterminer, à l'aide d'une règle à calculs, une valeur approchée de chacun des réels suivants (n^{os} 29 à 43) :

29 $241 \times 2{,}67$; $0{,}762 \times 18{,}2$; $617 \times 38{,}1$; $9{,}06 \times 372$.

30 $\dfrac{351}{445}$; $\dfrac{90{,}5}{21{,}9}$; $\dfrac{0{,}411}{0{,}0194}$; $\dfrac{13140}{78{,}7}$.

31 $\dfrac{1}{9{,}49}$; $\dfrac{1}{0{,}218}$; $\dfrac{10}{31{,}9}$; $\dfrac{0{,}1}{0{,}0406}$.

32 $(643)^2$; $(2{,}89)^2$; $(52{,}1)^2$; $(0{,}348)^2$.

33 $(7{,}46)^3$; $(15{,}8)^3$; $(568)^3$; $(0{,}805)^3$.

34 $\sqrt{3{,}13}$; $\sqrt{13{,}9}$; $\sqrt{837}$; $\sqrt{0{,}386}$.

35 $2{,}17\sqrt{9{,}19}$; $32{,}2\sqrt{23{,}1}$; $7{,}23\sqrt{527}$; $0{,}404\sqrt{0{,}312}$.

36 $\dfrac{\sqrt{68{,}6}}{3{,}49}$; $\dfrac{\sqrt{0{,}116}}{17{,}8}$; $\dfrac{52{,}4}{\sqrt{7{,}03}}$; $\sqrt{\dfrac{425}{0{,}91}}$.

37 $\dfrac{7{,}18 \times 1{,}32}{5{,}79}$; $\dfrac{0{,}1875 \times 95{,}5}{0{,}0266}$.

38 $\dfrac{304 \times \sqrt{7{,}4}}{709}$; $\dfrac{187 \times 15{,}9}{6{,}65}$.

39 $\dfrac{7{,}02}{4{,}23 \times 6{,}72}$; $\dfrac{151{,}5}{234 \times 17{,}05}$.

40 $\dfrac{\sqrt{216}}{18{,}8 \times 2{,}36}$; $\dfrac{375}{\sqrt{61{,}2} \times 27{,}6}$.

41 $4{,}76 \times 3{,}87 \times 1{,}62$; $631 \times 186 \times 0{,}279$.

42 $\sqrt{4{,}66} \times 3{,}38 \times 6{,}78$; $\sqrt{14{,}5} \times 12{,}7 \times \sqrt{22{,}3}$.

43 $\dfrac{(-508)(0{,}35)(-0{,}803)}{(865)(-15{,}7)}$; $\dfrac{(-4{,}72)(8{,}31)}{(32{,}7)(-9{,}4)(2{,}86)}$.

◆ Donner une valeur approchée d'un réel x solution de l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$ dans chacun des cas suivants :

44 $a = 52$, $b = 23$, $c = 45$. **45** $a = 26$, $b = 42$, $c = 5{,}2$.

46 $a = 11{,}81$, $b = 0{,}9$, $c = 7{,}49$. **47** $a = 0{,}125$, $b = 1{,}13$, $c = 0{,}09$.

SEPTIÈME PARTIE

cinématique

32. Mouvement rectiligne d'un point

Notions générales.

Mouvement rectiligne.

1 **DÉFINITIONS : On appelle mouvement rectiligne d'un point p, sur une droite affine Δ, toute application P d'un intervalle E de $\mathbb{R}$ dans Δ :**
P : $\forall t \in E,\ t \rightsquigarrow P(t)$.
La variable t est appelée le temps. Une valeur numérique t_0 du temps est appelée instant t_0, ou encore date t_0.
Le point $P(t)$ est appelé position du point p à l'instant t.

Si la fonction P est constante sur E, on dit que le mouvement est l'**équilibre.**
Si l'on a : $t'_1 \leqslant t'_2$, on appelle **durée** * entre les instants t'_1 et t'_2 le réel : $t'_2 - t'_1$.
Si E est l'intervalle $[t'_1, t'_2]$, on dit que la durée du mouvement étudié est : $t'_2 - t'_1$.

Trajectoire.

2 **DÉFINITION : On appelle trajectoire du point p l'image de l'intervalle E par l'application P.**

C'est donc une partie de la droite Δ. La trajectoire du point p est l'ensemble des positions de ce point lorsque t décrit E.

---

* L'unité légale de durée est la seconde. On utilise aussi pour unités de durée la minute qui est égale à 60 secondes, et l'heure qui est égale à 60 minutes.

Lois horaires.

3 Soient Δ une droite et $(O, \vec{u})$ un repère cartésien de Δ. Considérons le mouvement P d'un point p sur Δ. Pour tout réel t de l'intervalle E, la position $P(t)$ du point p à l'instant t est définie par son abscisse $x(t)$ dans le repère $(O, \vec{u})$: $\overrightarrow{OP}(t) = x(t)\,\vec{u}$.
La donnée du mouvement de p sur Δ, c'est-à-dire de l'application P : $E \longrightarrow \Delta$, $t \leadsto P(t)$, et du repère $(O, \vec{u})$ permet donc de définir une application x de E dans $\mathbb{R}$: $x : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \leadsto x(t)$.

DÉFINITION : On appelle loi horaire, dans le repère $(O, \vec{u})$, du mouvement P **du point p sur Δ, la fonction numérique de variable réelle définie par :** $x : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \leadsto x(t)$.

On appelle **diagramme du mouvement,** ou **diagramme des espaces,** une représentation graphique de la fonction x.

4 Réciproquement, considérons une application x_1 de E dans $\mathbb{R}$:
$x_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \leadsto x_1(t)$.
Pour tout réel t de l'intervalle E, désignons par $P_1(t)$ le point de Δ défini par :
$\overrightarrow{OP_1}(t) = x_1(t)\,\vec{u}$.

La donnée de l'application x_1 et du repère $(O, \vec{u})$ de Δ permet donc de définir une application P_1 par : $P_1 : E \longrightarrow \Delta$, $t \leadsto P_1(t)$,
c'est-à-dire un mouvement rectiligne P_1 du point p sur Δ. La loi horaire dans le repère $(O, \vec{u})$ de ce mouvement P_1 est, par construction, l'application x_1.
Nous disons que le mouvement P_1 du point p sur la droite Δ est défini, dans le repère $(O, \vec{u})$, par la loi horaire x_1.

Propriété des lois horaires.

5 Considérons un mouvement P d'un point p sur une droite Δ. Soient $(O_1, \vec{u}_1)$ et $(O_2, \vec{u}_2)$ deux repères cartésiens de Δ. Désignons par x_1 la loi horaire dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$ et par x_2 la loi horaire dans le repère $(O_2, \vec{u}_2)$.
Pour tout réel t de l'intervalle E, nous avons :
$\overrightarrow{O_1P}(t) = x_1(t)\,\vec{u}_1$ et $\overrightarrow{O_2P}(t) = x_2(t)\,\vec{u}_2$.
Posons : $\overrightarrow{O_1O_2} = \mu\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2 = \lambda\vec{u}_1$.
Le vecteur $\vec{u}_2$ est non nul ; le réel λ est donc non nul.
Pour tout réel t de E, nous avons :
$\overrightarrow{O_1P}(t) = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P}(t)$, c'est-à-dire : $x_1(t)\,\vec{u}_1 = \mu\vec{u}_1 + \lambda x_2(t)\,\vec{u}_1$.
Nous en déduisons : $\forall t \in E$, $x_1(t) = \lambda x_2(t) + \mu$.
Désignons par f la fonction affine sur $\mathbb{R}$ définie par :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \leadsto \lambda x + \mu$.
Nous avons alors : $\forall t \in E$, $f[x_2(t)] = \lambda x_2(t) + \mu$.
Il en résulte : $\forall t \in E$, $x_1(t) = f[x_2(t)]$, c'est-à-dire : $x_1 = f \circ x_2$.

THÉORÈME : Si x_1 et x_2 sont les lois horaires du mouvement d'un point p sur une droite Δ, respectivement dans un repère $(O_1, \vec{u}_1)$ et dans un repère $(O_2, \vec{u}_2)$, il existe une fonction affine f sur $\mathbb{R}$: $x \rightsquigarrow \lambda x + \mu$, avec $\lambda \neq 0$, pour laquelle on a : $x_1 = f \circ x_2$.

6 <u>Remarque</u> : Le réel λ est non nul, la fonction affine f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De l'égalité : $x_1 = f \circ x_2$, nous déduisons l'égalité : $x_2 = f^{-1} \circ x_1$, c'est-à-dire : $\forall t \in E, \quad x_2(t) = \dfrac{x_1(t)}{\lambda} - \dfrac{\mu}{\lambda}$.

7 Réciproquement, considérons le mouvement P d'un point p dont la loi horaire dans un repère $(O_1, \vec{u}_1)$ est x_1.
Montrons que, si f est une fonction affine sur $\mathbb{R}$: $x \rightsquigarrow \lambda x + \mu$, avec : $\lambda \neq 0$, alors l'application composée : $x_2 = f^{-1} \circ x_1$ est une loi horaire du mouvement P de p.
Nous avons : $\forall t \in E, \quad \overrightarrow{O_1P}(t) = x_1(t)\,\vec{u}_1$,
et : $\forall t \in E, \quad x_1(t) = (f \circ x_2)(t) = \lambda x_2(t) + \mu$.
Nous en déduisons : $\forall t \in E, \quad \overrightarrow{O_1P}(t) = \lambda x_2(t)\,\vec{u}_1 + \mu\,\vec{u}_1$.
Posons : $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$, et désignons par O_2 le point de Δ défini par : $\overrightarrow{O_1O_2} = \mu \vec{u}_1$.
Nous avons alors :
$\forall t \in E, \overrightarrow{O_1P}(t) = x_2(t)\,\vec{u}_2 + \overrightarrow{O_1O_2}$, c'est-à-dire : $\forall t \in E, \overrightarrow{O_2P}(t) = x_2(t)\,\vec{u}_2$.
L'application x_2 est donc la loi horaire du mouvement P de p sur Δ, dans le repère $(O_2, \vec{u}_2)$.

THÉORÈME : Si x_1 est une loi horaire du mouvement P d'un point p sur une droite Δ, pour toute application affine f sur $\mathbb{R}$: $x \rightsquigarrow \lambda x + \mu$, avec $\lambda \neq 0$, l'application $f^{-1} \circ x_1$ est une loi horaire de ce mouvement.

8 <u>Remarque</u> : Des deux théorèmes précédents, il résulte que, si x_1 est une loi horaire d'un mouvement P de p sur Δ, toute loi horaire de P est de la forme : $x_2 = f^{-1} \circ x_1$, où f est une application affine sur $\mathbb{R}$: $x \rightsquigarrow \lambda x + \mu$, avec : $\lambda \neq 0$.

9 <u>Exemple</u> : Considérons une droite Δ et un repère $(O_1, \vec{u}_1)$ de Δ. Soit P le mouvement d'un point p sur Δ dont la loi horaire x_1 dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$ est :
$\forall t \in E, \quad t \rightsquigarrow x_1(t) = -2t + 3$.
Désignons par O_2 le point défini par : $\overrightarrow{O_1O_2} = 5\vec{u}_1$ et par $\vec{u}_2$ le vecteur : $\vec{u}_2 = -2\vec{u}_1$.
Nous avons : $\lambda = -2$ et $\mu = 5$; nous avons donc : $f(x) = -2x + 5$.
Nous en déduisons : $\forall t \in E, \quad x_1(t) = -2x_2(t) + 5$,
c'est-à-dire : $\forall t \in E, \quad x_2(t) = -\dfrac{1}{2}(x_1(t) - 5) = t + 1$.

La loi horaire du mouvement P dans le repère $(O_2, \vec{u}_2)$ est donc :
$x_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightsquigarrow t + 1$.

Vitesse. Fonction vitesse.

10 Soit P le mouvement d'un point p sur une droite Δ :
$P: \ E \longrightarrow \Delta, \quad t \leadsto P(t)$.
Considérons un repère $(O, \vec{u})$ de Δ et la loi horaire x du mouvement P dans ce repère.

Vitesse à l'instant t.

11 Soit t un réel de l'intervalle E ; supposons la fonction x dérivable au point t.

DÉFINITION : On appelle vitesse * du point p à l'instant t, dans le repère $(O, \vec{u})$, le nombre dérivé de la fonction x au point t.

Fonction vitesse.

12 Supposons la fonction x définie et dérivable sur un intervalle ouvert $]t_1, t_2[$ inclus dans E. La vitesse est alors définie pour tout instant t de l'intervalle $]t_1, t_2[$.

DÉFINITION : On appelle fonction vitesse du point p, dans le repère $(O, \vec{u})$, la fonction dérivée x' de la loi horaire x dans ce repère.

Notons v la fonction vitesse dans le repère $(O, \vec{u})$; nous avons :
$\forall t \in]t_1, t_2[, \quad v(t) = x'(t)$.
On appelle **diagramme des vitesses** une représentation graphique de la fonction vitesse v.

Vecteur vitesse.

13 Soit P le mouvement d'un point p sur une droite Δ.
Considérons deux repères $(O_1, \vec{u}_1)$ et $(O_2, \vec{u}_2)$ de Δ, et désignons par x_1 et par x_2 les lois horaires du mouvement P respectivement dans $(O_1, \vec{u}_1)$ et dans $(O_2, \vec{u}_2)$.
Posons : $\overrightarrow{O_1O_2} = \mu \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$; nous avons : $\lambda \neq 0$.
Pour tout réel t de l'intervalle E, nous avons (n° 5, p. 183) :

$$x_1(t) = \lambda x_2(t) + \mu \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{x_1(t)}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}.$$

Il en résulte que **la fonction x_1 est dérivable sur un intervalle $]t_1, t_2[$, inclus dans E, si et seulement si la fonction x_2 est dérivable sur $]t_1, t_2[$.**
Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons qu'une loi horaire du mouvement de p est dérivable sur l'intervalle $]t_1, t_2[$; il en résulte que toutes les lois horaires du mouvement de p sont dérivables sur cet intervalle.

---

* Du point de vue physique, le réel qui exprime une vitesse est le quotient d'un réel qui exprime une longueur par un réel qui exprime une durée.
L'unité de vitesse dépend uniquement de l'unité de longueur et de l'unité de durée.
L'unité légale de vitesse est le mètre par seconde, en abrégé m/s.

14 Nous avons : $\forall t \in]t_1, t_2[, \quad x'_1(t) = \lambda x'_2(t)$.
x'_1 est la fonction vitesse v_1 du point p dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$;
x'_2 est la fonction vitesse v_2 du point p dans le repère $(O_2, \vec{u}_2)$.
Pour tout réel t de l'intervalle $]t_1, t_2[$, nous avons alors :
$v_1(t)\vec{u}_1 = (\lambda v_2(t))\vec{u}_1 = v_2(t)\vec{u}_2$.
Posons : $\vec{V}(t) = v_1(t)\vec{u}_1$; nous avons aussi : $\vec{V}(t) = v_2(t)\vec{u}_2$.
Le vecteur $\vec{V}(t)$ est donc indépendant du repère utilisé pour définir ce vecteur.

DÉFINITION : Soient P le mouvement d'un point p sur une droite Δ et v la fonction vitesse du point p dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ. On appelle vecteur vitesse du point p à l'instant t, le vecteur $\vec{V}(t)$ défini par :
$\vec{V}(t) = v(t)\vec{u}$.

15 **Remarque** : Nous avons démontré l'égalité : $\forall t \in]t_1, t_2[, \quad v_1(t) = \lambda v_2(t)$ où λ est le réel non nul défini par : $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
Il en résulte que la vitesse du point p à l'instant t dans un repère $(O, \vec{u})$ ne dépend pas de l'origine O de ce repère ; elle dépend uniquement du vecteur $\vec{u}$ de ce repère.

Accélération. Fonction accélération.

16 Soit P le mouvement d'un point p sur une droite Δ.
Considérons un repère $(O, \vec{u})$ de Δ et la loi horaire x du mouvement P dans ce repère. Nous supposons que x est dérivable sur un intervalle ouvert $]t_1, t_2[$, et nous désignons par v la fonction vitesse.

Accélération à l'instant t.

17 Supposons que la fonction vitesse soit dérivable au point t de l'intervalle $]t_1, t_2[$.

DÉFINITION : On appelle accélération* du point p à l'instant t, dans le repère $(O, \vec{u})$, le nombre dérivé de la fonction vitesse v au point t.

Fonction accélération.

18 Supposons la fonction vitesse v dérivable sur l'intervalle $]t_1, t_2[$. Nous supposons donc que la fonction x'' dérivée seconde de la fonction x est définie sur $]t_1, t_2[$ (n° 44, p. 180, tome I).

* Du point de vue physique, le réel qui exprime une accélération est le quotient d'un réel qui exprime une vitesse par un réel qui exprime une durée.
L'unité d'accélération dépend donc uniquement de l'unité de longueur et de l'unité de durée.
L'unité légale d'accélération est le mètre par seconde au carré, en abrégé : m/s²

L'accélération est alors définie pour tout instant t de l'intervalle $]t_1, t_2[$.

DÉFINITION : On appelle fonction accélération du point p, dans le repère $(O, \vec{u})$, la fonction dérivée v' de la fonction vitesse dans ce repère.

Notons γ la fonction accélération dans le repère $(O, \vec{u})$; nous avons :
$\forall t \in]t_1, t_2[, \quad \gamma(t) = v'(t)$, ou encore : $\gamma(t) = x''(t)$.
On appelle **diagramme des accélérations** une représentation graphique de la fonction γ.

Vecteur accélération.

19 Soit P le mouvement d'un point p sur une droite Δ.
Considérons deux repères $(O_1, \vec{u}_1)$ et $(O_2, \vec{u}_2)$ de Δ, et désignons par v_1 et par v_2 les fonctions vitesses du point p respectivement dans $(O_1, \vec{u}_1)$ et dans $(O_2, \vec{u}_2)$.
Posons : $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$; nous avons : $\lambda \neq 0$.
Pour tout réel t de l'intervalle $]t_1, t_2[$, nous avons (nº 14, p. 186) :
$v_1(t) = \lambda v_2(t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \dfrac{v_1(t)}{\lambda}$.
Il en résulte que la fonction v_1 est dérivable sur l'intervalle $]t_1, t_2[$ si et seulement si la fonction v_2 est dérivable sur $]t_1, t_2[$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons qu'une fonction vitesse de p est dérivable sur $]t_1, t_2[$; il en résulte que toutes les fonctions vitesses de p sont dérivables sur cet intervalle.

20 Nous avons : $\forall t \in]t_1, t_2[, \quad v_1'(t) = \lambda v_2'(t)$.
v_1' est la fonction accélération γ_1 du point p dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$;
v_2' est la fonction accélération γ_2 du point p dans le repère $(O_2, \vec{u}_2)$.
Pour tout réel t de l'intervalle $]t_1, t_2[$, nous avons alors :
$\gamma_1(t)\, \vec{u}_1 = (\lambda\gamma_2(t))\, \vec{u}_1 = \gamma_2(t)\, \vec{u}_2$.
Posons : $\vec{\Gamma}(t) = \gamma_1(t)\, \vec{u}_1$; nous avons aussi : $\vec{\Gamma}(t) = \gamma_2(t)\, \vec{u}_2$.
Le vecteur $\vec{\Gamma}(t)$ est donc indépendant du repère utilisé pour définir ce vecteur.

DÉFINITION : Soient P le mouvement d'un point p sur une droite Δ et γ la fonction accélération du point p dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ. On appelle vecteur accélération du point p à l'instant t le vecteur $\vec{\Gamma}(t)$ défini par : $\vec{\Gamma}(t) = \gamma(t)\, \vec{u}$.

21 Remarque : Nous avons démontré l'égalité : $\forall t \in]t_1, t_2[, \quad \gamma_1(t) = \lambda\gamma_2(t)$, où λ est le réel non nul défini par : $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
Il en résulte que l'accélération du point p à l'instant t, dans un repère $(O, \vec{u})$, ne dépend pas de l'origine O de ce repère; elle dépend uniquement du vecteur $\vec{u}$ de ce repère.

Nature d'un mouvement rectiligne.

22 Considérons le mouvement P d'un point p sur Δ. Soient $(O_1, \vec{u}_1)$ et $(O_2, \vec{u}_2)$ deux repères de Δ.
Reprenons les notations des paragraphes précédents. Nous avons montré l'égalité :
$\forall t \in]t_1, t_2[, \quad v_1(t) = \lambda v_2(t)$, où λ est le réel non nul défini par : $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
Nous en déduisons : $\forall t \in]t_1, t_2[, \quad (v_1(t))^2 = \lambda^2 (v_2(t))^2$.
Il en résulte que les deux fonctions :
$v_1^2 : \ t \rightsquigarrow (v_1(t))^2$ et $v_2^2 : \ t \rightsquigarrow (v_2(t))^2$
ont le même sens de variations sur l'intervalle $]t_1, t_2[$. Le sens de variations du carré de la fonction vitesse est donc indépendant du repère choisi sur Δ.

DÉFINITION : Soient P le mouvement d'un point p sur une droite Δ et v la fonction vitesse du point p dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ.
1. Si la fonction v^2 est strictement croissante sur un intervalle, on dit que le mouvement de p est accéléré sur cet intervalle.
2. Si la fonction v^2 est strictement décroissante sur un intervalle on dit que le mouvement de p est retardé sur cet intervalle.

---

23 La fonction v est dérivable sur $]t_1, t_2[$, la fonction v^2 est donc dérivable sur cet intervalle, et nous avons :
$[v^2]' = 2\, v.v'$, c'est-à-dire : $[v^2]' = 2\, v.\gamma$.
Du n° 45, p. 130, tome I, il résulte :
Le mouvement de p est accéléré sur un intervalle si et seulement si la fonction $v.\gamma$ est positive ou nulle et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur cet intervalle.
Le mouvement de p est retardé sur un intervalle si et seulement si la fonction $v.\gamma$ est négative ou nulle et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur cet intervalle.

Étude de mouvements rectilignes.

Mouvement rectiligne uniforme.

Définition.

24 Soient Δ une droite et $(O_1, \vec{u}_1)$ un repère de Δ.
Considérons le mouvement d'un point p sur Δ défini par la loi horaire x_1 dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$:
$x_1 : \ E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightsquigarrow x_1(t) = at + b$, où a et b sont des réels.
La loi horaire du mouvement de p dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$ est donc une fonction affine.

Soient $(O_2, \vec{u}_2)$ un repère de Δ et x_2 la loi horaire du mouvement de p dans ce repère.
Nous avons : $x_2 = f^{-1} \circ x_1$, où f^{-1} est une fonction affine sur $\mathbb{R}$ (n° 8, p. 184).
Nous en déduisons que x_2 est une fonction affine.
Si une loi horaire du mouvement de p est une fonction affine, toutes les lois horaires de ce mouvement sont des fonctions affines.

DÉFINITION : On dit que le mouvement rectiligne d'un point p est uniforme si et seulement si une loi horaire de ce mouvement est une fonction affine.

Caractérisation d'un mouvement rectiligne uniforme.

25 **THÉORÈME : Un mouvement rectiligne est uniforme sur un intervalle ouvert E si et seulement si l'on a :**
$\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{V}(t_1) = \vec{V}(t_2)$.

Soient P le mouvement d'un point p sur une droite Δ et $(O, \vec{u})$ un repère de Δ.
Supposons que la loi horaire x dans le repère $(O, \vec{u})$ soit une fonction affine :
$x : E \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \leadsto at + b$, avec : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel t de l'intervalle E, nous avons : $v(t) = a$.
Nous en déduisons : $\forall t \in E, \ \vec{V}(t) = a\vec{u}$.
Il en résulte : $\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{V}(t_1) = \vec{V}(t_2)$.

Réciproquement, supposons que l'on ait :
$\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{V}(t_1) = \vec{V}(t_2)$.
Nous en déduisons : $\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ v(t_1) = v(t_2)$.
La fonction vitesse est donc une fonction constante sur E.
Posons : $v(t_1) = a$, nous avons alors :
$\forall t \in E, \ v(t) = a$.
Soit x la loi horaire dans le repère $(O, \vec{u})$; nous avons :
$\forall t \in E, \ x'(t) = a$.
Considérons la fonction f définie par : $f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \leadsto at$.
Nous avons : $\forall t \in E, \ f'(t) = a$.
Nous avons donc : $\forall t \in E, \ (x' - f')(t) = 0$.
La fonction $(x - f)'$ est donc la fonction nulle sur E. Du n° 45, p. 130, tome I, il résulte que la fonction $x - f$ est une fonction constante sur E.
Il existe donc un réel b pour lequel on a : $\forall t \in E, \ (x - f)(t) = b$,
c'est-à-dire : $x = at + b$. Le mouvement rectiligne de p est donc uniforme sur E.

26 <u>Remarque</u> : Si le point p est en équilibre, nous avons : $\forall t \in E, \ x(t) = b$. Nous en déduisons : $\forall t \in E, \ \vec{V}(t) = \vec{0}$.
Réciproquement, si l'on a : $\forall t \in E, \ \vec{V}(t) = \vec{0}$, la démonstration précédente montre que l'on a : $\forall t \in E, \ x(t) = b$. Le point p est alors en équilibre.

Étude d'un mouvement rectiligne uniforme sur $\mathbb{R}$.

27 Considérons le mouvement uniforme d'un point p sur une droite Δ, défini par sa loi horaire x dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ :
$x: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ t \leadsto at + b.$
Si a est nul, le mouvement de p est l'équilibre ; nous supposons désormais a non nul.

28 **Trajectoire** : Soit $\mathcal{C}$ la trajectoire du point p.
Un point M_0 de Δ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel t_0 pour lequel on a : $M_0 = P(t_0)$. Posons $\overrightarrow{OM_0} = x_0 \vec{u}$.
Nous avons l'équivalence logique : $(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\exists\, t_0 \in \mathbb{R}, \ \ x_0 = at_0 + b)$.
L'équation du premier degré à une inconnue t : $at + b - x_0 = 0$ admet, pour tout réel x_0, une solution unique dans $\mathbb{R}$: $t = \dfrac{x_0 - b}{a}$.
La trajectoire $\mathcal{C}$ est donc la droite Δ.

29 **Description du mouvement :**
1. Si a est positif, dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, le point p se déplace dans le sens du vecteur $\vec{u}$.
2. Si a est négatif, dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, le point p se déplace dans le sens contraire du vecteur $\vec{u}$.

Mouvement rectiligne uniformément varié.

Définition.

30 Soient Δ une droite et $(O_1, \vec{u}_1)$ un repère de Δ.
Considérons le mouvement d'un point p sur Δ défini par la loi horaire x_1 dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$:
$x_1 : \ E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ t \leadsto x_1(t) = at^2 + bt + c$, où a, b, c sont des réels.
La loi horaire du mouvement de p dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$ est donc une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Soit $(O_2, \vec{u}_2)$ un repère de Δ et x_2 la loi horaire du mouvement de p dans ce repère. Avec les notations du n° 5, p. 183, nous avons :

$$\forall\, t \in E, \quad x_2(t) = \frac{x_1(t)}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}.$$

Nous en déduisons : $\forall\, t \in E, \quad x_2(t) = \dfrac{a}{\lambda} t^2 + \dfrac{b}{\lambda} t + \dfrac{c - \mu}{\lambda}.$

Toutes les autres lois horaires du mouvement de p sont donc des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

DÉFINITION : On dit que le mouvement rectiligne d'un point p est uniformément varié si et seulement si une loi horaire de ce mouvement est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

31 Remarque : Si la loi horaire x est définie par : $\forall t \in E, \quad t \leadsto at^2 + bt + c$ et si l'on a : $a = 0$, le mouvement est un mouvement rectiligne uniforme.

Caractérisation d'un mouvement rectiligne uniformément varié.

32 **THÉORÈME : Un mouvement rectiligne est uniformément varié sur un intervalle ouvert E si et seulement si l'on a :**
$\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{\Gamma}(t_1) = \vec{\Gamma}(t_2)$.

Soient P le mouvement d'un point p sur une droite Δ et $(O, \vec{u})$ un repère de Δ.
Si le mouvement est uniformément varié sur l'intervalle E, la loi horaire x dans le repère $(O, \vec{u})$ est :
$x: \ E \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \leadsto at^2 + bt + c$, où a, b, c sont des réels.
Nous en déduisons : $\forall t \in E, \ v(t) = 2at + b$,
puis : $\forall t \in E, \ \gamma(t) = 2a$.
Nous avons donc : $\forall t \in E, \ \vec{\Gamma}(t) = 2a\vec{u}$.
Il en résulte : $\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{\Gamma}(t_1) = \vec{\Gamma}(t_2)$.

Réciproquement, supposons que l'on ait :
$\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \vec{\Gamma}(t_1) = \vec{\Gamma}(t_2)$.
Nous en déduisons :
$\forall t_1 \in E, \ \forall t_2 \in E, \ \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.
La fonction accélération est donc une fonction constante sur E.
Posons : $\gamma(t_1) = 2a$, nous avons alors :
$\forall t \in E, \ \gamma(t) = 2a$, c'est-à-dire : $v'(t) = 2a$.
Soit g la fonction définie par : $g: \ E \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \leadsto 2at$.
Nous avons : $\forall t \in E, \ g'(t) = 2a$.
Nous en déduisons :
$\forall t \in E, (v - g)'(t) = 0$.
La fonction $(v - g)'$ est la fonction nulle sur E ; la fonction $v - g$ est donc une fonction constante sur E.
Il existe donc un réel b pour lequel nous avons :
$\forall t \in E, \ (v - g)(t) = b$, c'est-à-dire : $v(t) = 2at + b$.
Il en résulte : $\forall t \in E, \ x'(t) = 2at + b$.
Considérons la fonction h définie par :
$h: \ E \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \leadsto at^2 + bt$.
Nous avons : $\forall t \in E, \ h'(t) = 2at + b$.
Nous en déduisons :
$\forall t \in E, \ (x - h)'(t) = 0$.
La fonction $(x - h)'$ est la fonction nulle sur E ; la fonction $x - h$ est donc une fonction constante sur E.
Il existe donc un réel c pour lequel nous avons :
$\forall t \in E, \ (x - h)(t) = c$, c'est-à-dire : $x(t) = at^2 + bt + c$.
Le mouvement rectiligne de p est donc uniformément varié sur E.

Étude d'un mouvement rectiligne uniformément varié sur $\mathbb{R}$.

33 Considérons le mouvement uniformément varié d'un point p sur une droite Δ défini par sa loi horaire x dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ :
$x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \leadsto at^2 + bt + c.$
Si a est nul, le mouvement de p est rectiligne uniforme ; nous supposons désormais a non nul.

34 **Trajectoire** : Soit $\mathcal{C}$ la trajectoire du point p.
Un point M_0 de Δ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel t_0 pour lequel on a : $M_0 = P(t_0)$.
Posons : $\overrightarrow{OM_0} = x_0 \vec{u}$.
Nous avons l'équivalence logique :
$(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\exists\, t_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 = at_0^2 + bt_0 + c)$.
Le point M_0 appartient donc à $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation à une inconnue t : $at^2 + bt + c - x_0 = 0$, admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Le discriminant de cette équation est : $b^2 - 4ac + 4ax_0$.
Nous en déduisons :
$(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (4ax_0 \geqslant 4ac - b^2)$.
Soit A le point de Δ défini par : $\overrightarrow{OA} = \left(c - \dfrac{b^2}{4a}\right) \vec{u}$.

1. Si a est positif, nous avons : $(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(x_0 \geqslant c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$.

La trajectoire $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de Δ dont l'abscisse est supérieure à $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

2. Si a est négatif, nous avons : $(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(x_0 \leqslant c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$.

La trajectoire $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de Δ dont l'abscisse est inférieure à $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

35 **Fonction vitesse** : La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa fonction dérivée x' est définie par : $t \leadsto 2at + b$.
Nous avons donc : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = 2at + b$.
La vitesse du point p à l'instant : $t_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est nulle : $v(t_0) = 0$.
La position $P(t_0)$ du point p à cet instant est définie par : $\overrightarrow{OP}(t_0) = x(t_0)\, \vec{u}$.
Nous avons : $x(t_0) = a^2 \left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = c - \dfrac{b^2}{4a}$.
Nous en déduisons : $P(t_0) = A$.

36 **Fonction accélération** : La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction dérivée v' est définie par : $t \leadsto 2a$.
Nous avons donc : $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = 2a$.
La fonction accélération γ est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

37 Nature du mouvement : Pour tout réel t, nous avons :
$v(t)\,\gamma(t) = (2at + b)\,2a = 4a^2t + 2ab$.

Nous en déduisons : $\big(v(t)\,\gamma(t) = 0\big) \Longleftrightarrow \left(t = t_0 = -\dfrac{b}{2a}\right)$;

$\big(v(t)\,\gamma(t) < 0\big) \Longleftrightarrow (t < t_0)$;

$\big(v(t)\,\gamma(t) > 0\big) \Longleftrightarrow (t > t_0)$.

Le mouvement de p est donc retardé dans l'intervalle $]-\infty, t_0[$; il est accéléré dans l'intervalle $]t_0, +\infty[$.

38 Description du mouvement ; diagrammes. 1. Si a est positif, nous avons :

$\big(v(t) > 0\big) \Longleftrightarrow (t > t_0)$ et

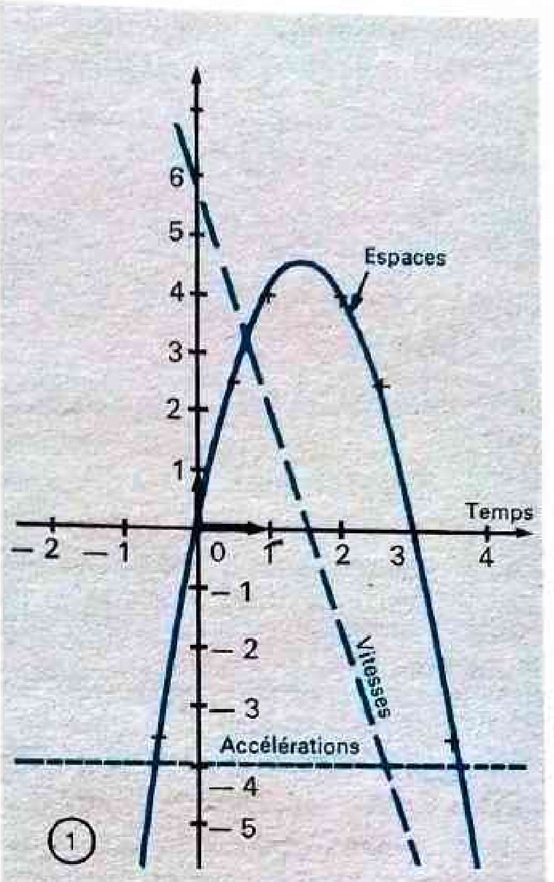
$\big(v(t) < 0\big) \Longleftrightarrow (t < t_0)$.

Dans l'intervalle $]-\infty, t_0[$, la vitesse du point p est négative ; le point p se déplace en sens contraire du vecteur $\vec{u}$; de plus, le mouvement est retardé.

A l'instant : $t_0 = -\dfrac{b}{2a}$, la position du point p est le point A.

Dans l'intervalle $]t_0, +\infty[$, la vitesse du point p est positive ; le point p se déplace dans le sens du vecteur $\vec{u}$; de plus, le mouvement est accéléré.

Les diagrammes respectifs des abscisses, des vitesses et des accélérations sont donnés sur la figure 1.



2. Si a est négatif, nous avons :

$\big(v(t) > 0\big) \Longleftrightarrow (t < t_0)$ et

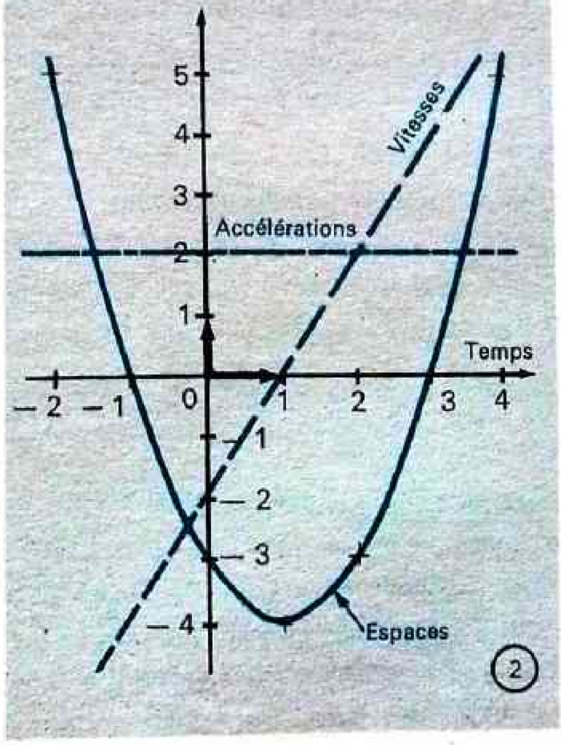
$\big(v(t) < 0\big) \Longleftrightarrow (t > t_0)$.

Dans l'intervalle $]-\infty, t_0[$, la vitesse du point p est positive ; le point p se déplace dans le sens du vecteur $\vec{u}$; de plus, le mouvement est retardé.

A l'instant $-\dfrac{b}{2a}$, la position de p est A.

Dans l'intervalle $]t_0, +\infty[$, la vitesse du point p est négative ; le point p se déplace en sens contraire du vecteur $\vec{u}$; de plus, le mouvement est accéléré.

Les diagrammes respectifs des abscisses, des vitesses et des accélérations sont donnés sur la figure 2.



Mouvement rectiligne vibratoire simple.

Définition.

39 Considérons quatre réels a, b, c, ω. Nous supposons a et b non tous les deux nuls, et ω non nul ; nous avons donc : $a^2 + b^2 \neq 0$ et $\omega \neq 0$.

Soient Δ une droite affine et $(O_1, \vec{u}_1)$ un repère de Δ.

Considérons le mouvement d'un point p sur Δ défini par la loi horaire x_1 dans le repère $(O_1, \vec{u}_1)$:

$x_1 : E \longrightarrow \mathbb{R},\ t \rightsquigarrow a \cos \omega t + b \sin \omega t + c.$

Soient $(O_2, \vec{u}_2)$ un repère de Δ et x_2 la loi horaire du mouvement du point p dans ce repère.

Avec les notations du n° 5, p. 183, nous avons : $\forall t \in E,\ x_2(t) = \dfrac{x_1(t)}{\lambda} - \dfrac{\mu}{\lambda}.$

Nous en déduisons : $\forall t \in E,\ x_2(t) = \dfrac{a}{\lambda} \cos \omega t + \dfrac{b}{\lambda} \sin \omega t + \dfrac{c - \mu}{\lambda}.$

$\dfrac{a}{\lambda}$ et $\dfrac{b}{\lambda}$ ne sont pas tous les deux nuls.

Toutes les lois horaires du mouvement du point p ont donc la même forme que la loi horaire x_1.

DÉFINITION : On dit que le mouvement rectiligne d'un point p est vibratoire simple sur E si et seulement si une loi horaire x de ce mouvement est : $x : E \longrightarrow \mathbb{R},\ t \rightsquigarrow x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$, **où** a, b, c, ω **sont des réels tels que :** $a^2 + b^2 \neq 0$ **et** $\omega \neq 0$.

Étude d'un mouvement rectiligne vibratoire simple.

40 Considérons un mouvement rectiligne vibratoire simple d'un point p, sur une droite Δ, défini par sa loi horaire dans un repère $(O, \vec{u})$ de Δ :

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \rightsquigarrow a \cos \omega t + b \sin \omega t + c$, avec : $a^2 + b^2 \neq 0$ et $\omega \neq 0$.

Soit C le point de Δ défini par : $\overrightarrow{OC} = c\vec{u}$.

Dans le repère $(C, \vec{u})$, la loi horaire x_1 du mouvement de p est :

$x_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \rightsquigarrow a \cos \omega t + b \sin \omega t.$

Nous avons montré, au n° 19, p. 155, qu'il existe un réel α pour lequel on a :

$\forall t \in \mathbb{R},\ a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \alpha).$

Posons : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; nous avons alors :

$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = A \cos(\omega t - \alpha).$

41 <u>Remarque</u> : Posons $\omega' = -\omega$ et $\alpha' = -\alpha$. Pour tout réel t, nous avons : $\cos(\omega t - \alpha) = \cos(\omega' t - \alpha')$.

Pour étudier le mouvement du point p, nous pouvons donc supposer que ω est positif.

Nous allons étudier le mouvement du point p défini par la loi horaire x_1 dans le repère $(C, \vec{u})$: $\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$, avec : $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

42 Périodicité : Posons : $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pour tout réel t, nous avons :

$$x_1(t + T) = A\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) - \alpha\right) = A\cos(\omega t - \alpha + 2\pi) = A\cos(\omega t - \alpha)$$

c'est-à-dire : $x_1(t + T) = x_1(t)$.

La fonction x_1 est donc une fonction périodique de période T.

Il en résulte : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x_1(t + kT) = x_1(t)$.

Les positions du point p aux instants t et $t + kT$ sont donc égales :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ P(t + kT) = P(t)$.

On dit que le mouvement du point p est un **mouvement périodique** de période :

$T = \frac{2\pi}{\omega}$.

43 Trajectoire : Soit $\mathcal{C}$ la trajectoire du point p. Un point M_0 de Δ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel t_0 pour lequel on a : $M_0 = P(t_0)$.

Posons : $\overrightarrow{CM_0} = x_0\vec{u}$.

Nous avons l'équivalence logique :

$(M_0 \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\exists\, t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 = A\cos(\omega t_0 - \alpha))$.

Le point M_0 appartient donc à $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation à une inconnue t :

$A\cos(\omega t - \alpha) - x_0 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Cette équation admet des solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\left|\frac{x_0}{A}\right| \leqslant 1$,

c'est-à-dire : $-A \leqslant x_0 \leqslant A$.

Soient M_1 et M_2 les points de Δ définis par : $\overrightarrow{CM_1} = A\vec{u}$; $\overrightarrow{CM_2} = -A\vec{u}$.

Il en résulte que la trajectoire $\mathcal{C}$ est le segment $[M_1, M_2]$.

Le point C, milieu de $[M_1, M_2]$, est appelé le **centre** du mouvement. Le réel A est appelé **amplitude** du mouvement.

44 Remarque : Si nous reprenons les notations du n° 40, p. 194, nous avons :

$\overrightarrow{OC} = c\vec{u}$ et $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

La trajectoire est le segment $[M_1, M_2]$ dont les extrémités sont définies par :

$\overrightarrow{OM_1} = \left(c + \sqrt{a^2 + b^2}\right)\vec{u}$; $\overrightarrow{OM_2} = \left(c - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\vec{u}$.

45 Fonction vitesse : La fonction x_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (n° 35, p. 127) ; sa fonction dérivée x_1' est définie par : $t \mapsto -A\omega\sin(\omega t - \alpha)$.

La fonction vitesse v_1 dans le repère $(C, \vec{u})$ est donc :

$v_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto v_1(t) = -A\omega\sin(\omega t - \alpha)$.

46 Fonction accélération : La fonction v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée v_1' est définie par : $t \mapsto -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha)$.

La fonction accélération γ_1 dans le repère $(C, \vec{u})$ est donc :

$\gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \gamma_1(t) = -A\omega^2\cos(\omega t - \alpha)$.

Nous avons donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma_1(t) = -\omega^2 x_1(t)$.

Des égalités : $\vec{\Gamma}(t) = \gamma_1(t)\vec{u}$ et $\overrightarrow{CP}(t) = x_1(t)\vec{u}$, nous déduisons :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \vec{\Gamma}(t) = -\omega^2\,\overrightarrow{CP}(t).}$$

47 **Description du mouvement ; diagrammes** : La fonction x_1 est une fonction périodique de période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Nous étudions donc le mouvement de p uniquement pendant une durée égale à T, par exemple, pendant l'intervalle de temps : $\left[\dfrac{\alpha}{\omega}, \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

Nous avons l'équivalence logique :

$$\left(t \in \left[\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\alpha}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\right]\right) \iff \left((\omega t - \alpha) \in [0, 2\pi]\right).$$

Nous en déduisons le sens de variations de chacune des fonctions x_1, v_1, γ_1 dans l'intervalle $\left[\dfrac{\alpha}{\omega}, \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$, puis le signe du produit $v_1(t)\ \gamma_1(t)$ sur cet intervalle. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

t	$\frac{\alpha}{\omega}$		$\frac{\alpha}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$		$\frac{\alpha}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}$		$\frac{\alpha}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}$		$\frac{\alpha}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}$
$x_1(t)$	A	$\searrow$	0	$\searrow$	$-A$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	A
$v_1(t)$	0	$\searrow$	$-A\omega$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$A\omega$	$\searrow$	0
$\gamma_1(t)$	$-A\omega^2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$A\omega^2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-A\omega^2$
$v_1(t)\ \gamma_1(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Les diagrammes respectifs des abscisses, des vitesses et des accélérations sont donnés sur la figure 3.

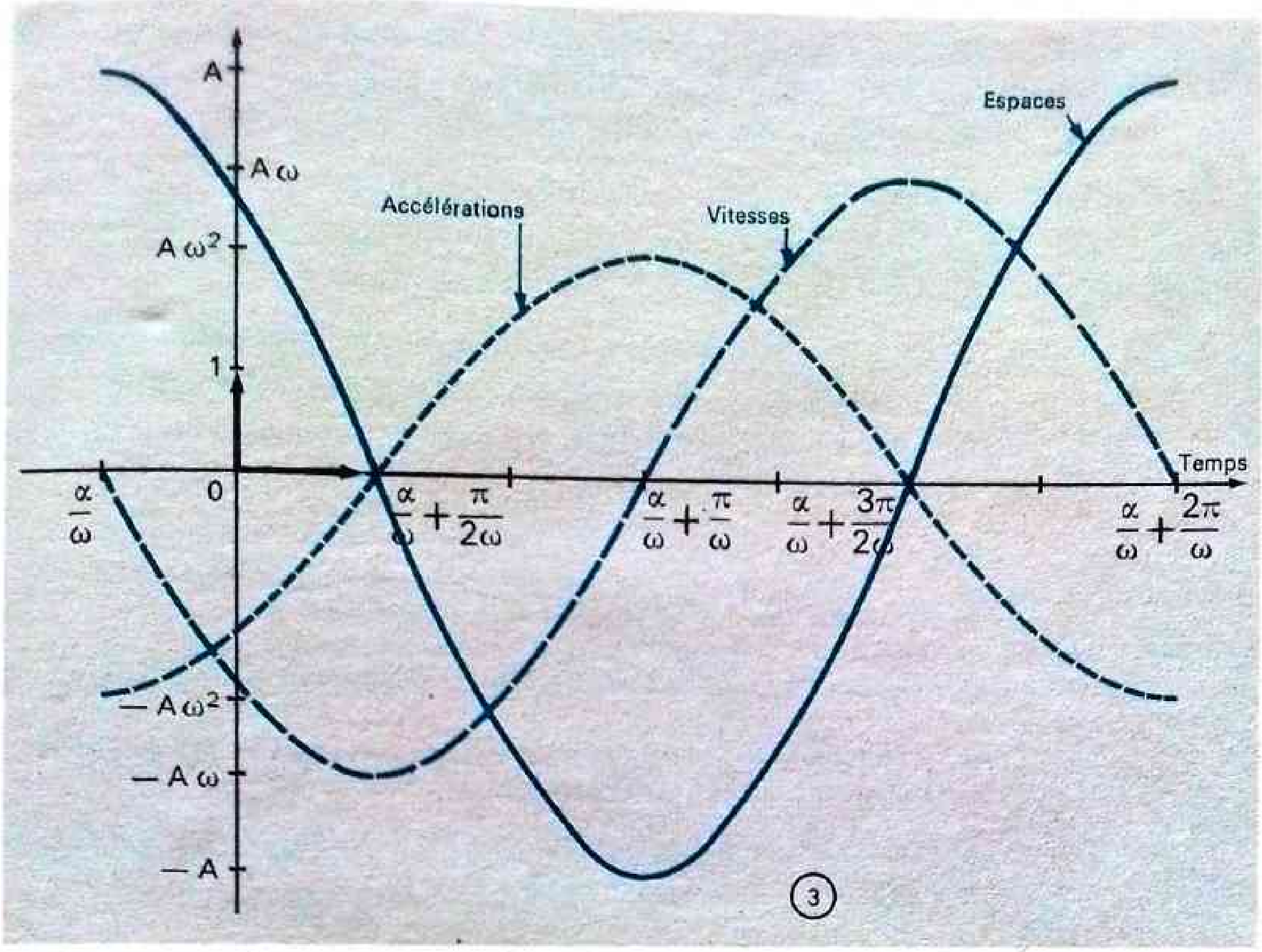
A l'instant : $t = \dfrac{\alpha}{\omega}$, la position du point p est le point M_1.

Dans l'intervalle $\left]\dfrac{\alpha}{\omega}, \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega}\right[$, la vitesse du point p est négative ; le point p se déplace de M_1 vers C. Le produit $v_1(t)\ \gamma_1(t)$ est positif ; le mouvement est accéléré.

A l'instant : $t = \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega}$, la position du point p est le point C.

Dans l'intervalle $\left]\dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{\pi}{\omega}\right[$, la vitesse du point p est positive ; le point p se déplace de C vers M_2. Le produit $v_1(t)\ \gamma_1(t)$ est négatif ; le mouvement est retardé.

A l'instant : $t = \dfrac{\alpha}{\omega} + \dfrac{\pi}{\omega}$, la position du point p est le point M_2.



Dans l'intervalle $\left]\frac{\alpha}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}, \ \frac{\alpha}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}\right[$, la vitesse du point p est positive ; le point p se déplace de M_2 vers C. Le produit $v_1(t)\ \gamma_1(t)$ est positif ; le mouvement est accéléré.

A l'instant : $t = \frac{\alpha}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}$, la position du point p est le point C.

Dans l'intervalle $\left]\frac{\alpha}{\omega} + \frac{3\pi}{2\omega}, \ \frac{\alpha}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\right[$, la vitesse du point p est positive ; le point p se déplace de C vers M_1. Le produit $v_1(t)\ \gamma_1(t)$ est négatif ; le mouvement est retardé.

EXERCICES

◆ Dans les exercices suivants (n^{os} 1 à 4), on considère une droite D, un repère $(O, \vec{u})$ de D et un mouvement d'un point p sur D. Étudier les mouvements du point p sur D définis par les lois horaires suivantes :

1 $t \rightsquigarrow 1 + 2t.$ **2** $t \rightsquigarrow 3t - 2.$

3 $t \rightsquigarrow 2(1 - t).$ **4** $t \rightsquigarrow 1 + 2\,|t|.$

◆ Dans les exercices suivants (n^{os} 5 à 10), on considère une droite D un repère $(O, \vec{u})$ de D et un mouvement rectiligne uniforme d'un point p sur D. Déterminer la loi horaire dans le repère $(O, \vec{u})$ et décrire le mouvement dans chacun des cas suivants :

5 A l'instant 0, le point p est en O et sa vitesse est 3.

6 A l'instant 0, le point p est en O et sa vitesse est -4.

7 A l'instant 0, la position de p est le point d'abscisse 2 et sa vitesse est 3.

8 A l'instant 0, la position de p est le point d'abscisse -3 et à l'instant 2, la position de p est le point d'abscisse 2.

9 A l'instant -1, la position de p est le point d'abscisse -1 et à l'instant 3, la position de p est le point d'abscisse 5.

10 A l'instant 3, la position de p est le point d'abscisse -5 et à l'instant 5, le point p est en O.

11 On considère deux points p et p' en mouvement rectiligne uniforme sur une droite D rapportée à un repère $(O, \vec{u})$.
A l'instant 0, la position de p est le point d'abscisse 1 et sa vitesse est 4, la position de p' est le point d'abscisse 19 et sa vitesse est -2.
1° Déterminer les lois horaires dans le repère $(O, \vec{u})$ des mouvements de chacun des points.
2° Déterminer l'instant t, pour lesquels les positions de p et p' coïncident. Calculer l'abscisse de cette position, et les vitesses de chacun des points à cet instant.

12 Même exercice que le n° 11, lorsque les pouvements de p et p' sont définis de la façon suivante :
A l'instant -1, la position de p est le point d'abscisse -5 et sa vitesse est 3, la position de p' est le point d'abscisse 3 et sa vitesse est 2.

13 Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en un point O et de vecteurs directeurs respectifs : $\vec{i}_1$ et $\vec{i}_2$.
Un point p_1 est en mouvement rectiligne uniforme sur D_1 : à l'instant 0, p est en O et sa vitesse dans le repère $(O, \vec{i}_1)$ est 2.
Un point p_2 est en mouvement rectiligne uniforme sur D_2 : à l'instant 0, p_2 est en O et sa vitesse dans le repère $(O, \vec{i}_2)$ est 4.
1° Écrire la loi horaire x_1 du mouvement du point p_1 dans le repère $(O, \vec{i}_1)$ et la loi horaire x_2 du mouvement du point p_2 dans le repère $(O, \vec{i}_2)$.

2° On désigne par $P_1(t)$ et $P_2(t)$ les positions respectives des points p_1 et p_2 à l'instant t. A chaque instant t, on associe le point $M(t)$ milieu du segment $[P_1(t), P_2(t)]$. Montrer qu'on définit ainsi le mouvement rectiligne M d'un point m sur une droite D que l'on déterminera.
3° Quelles sont les positions respectives $M(0)$ et $M(1)$ du point m aux instants 0 et 1 ? Soit $\mathcal{R}$ le repère $(M(0), \overrightarrow{M(0)\,M(1)})$. Quelle est la loi horaire du mouvement du point m dans $\mathcal{R}$? Décrire le mouvement de m.

14 Même exercice que le précédent dans le cas où les mouvements rectilignes uniformes des points p_1 et p_2 possèdent les propriétés :
A l'instant 0, les abscisses respectives des points p_1 et p_2 sont 4 et 5, la vitesse de p_1 dans $(O, \vec{i}_1)$ est -2 et la vitesse de p_2 dans $(O, \vec{i}_2)$ est 3.

◆ Dans les exercices suivants (nos 15 à 24), on considère une droite D, un repère $(O, \vec{u})$ de Δ et un mouvement d'un point p sur Δ. Étudier les mouvements du point p sur D définis par les lois horaires suivantes :

15 $t \rightsquigarrow 3t^2 - 4t + 2.$

16 $t \rightsquigarrow 5t^2 + 4t + 1.$

17 $t \rightsquigarrow (t-1)(t+3).$

18 $t \rightsquigarrow (6-t)(t+2).$

19 $t \rightsquigarrow t(3t-2).$

20 $t \rightsquigarrow t(4-t).$

21 $\forall t \in [-1, 2], \quad t \rightsquigarrow |t(t-1)|.$

22 $\forall t \in [-2, 2], \quad t \rightsquigarrow |3t^2 - t - 2|.$

23 $\forall t \in [0,2], \quad t \rightsquigarrow -t^2 + |4t-3|.$

24 $\forall t \in [0,5], \quad t \rightsquigarrow |(t-1)(3-t)|.$

◆ Dans les exercices suivants (nos 25 à 28), on considère une droite D, un repère $(O, \vec{u})$ de D et un mouvement rectiligne uniformément varié d'un point p sur D. Déterminer la loi horaire du mouvement dans le repère $(O, \vec{u})$ et décrire ce mouvement dans chacun des cas suivants :

25 A l'instant -1, la position de p est le point d'abscisse -1 et sa vitesse est -1 ; à l'instant 1, la vitesse de p est 11.

26 A l'instant 3, la position de p est le point d'abscisse -2 et sa vitesse est -4 ; à l'instant 0 ; la vitesse de p est 2.

27 A l'instant 0, la position de p est le point d'abscisse -2 et sa vitesse est 2 ; à l'instant 4 ; la position de p est le point d'abscisse 10.

28 A l'instant $\frac{3}{4}$, la position de p est le point d'abscisse $-\frac{1}{4}$, sa vitesse est 1 et son accélération est 6.

EXERCICES

29 On considère le mouvement uniformément varié d'un point p sur une droite Δ rapportée à un repère $(O, \vec{u})$ qui vérifie les propriétés suivantes :
a) A l'instant 0, la position de p est le point d'abscisse 80 et sa vitesse est -40 ;
b) L'abscisse de la position de p est maximum à l'instant 5.

Déterminer la loi horaire du mouvement dans le repère $(O, \vec{u})$ et étudier ce mouvement.

30 On considère le mouvement d'un point p_1 sur une droite Δ rapportée à un repère $(O, \vec{u})$ déterminé par la loi horaire x_1 :
$\forall t \in [1, +\infty[, t \rightsquigarrow t^2 - 4t + 9.$

1° Étudier le mouvement du point p_1.

2° On considère le mouvement rectiligne uniforme d'un point p_2 sur la droite Δ dont la loi horaire dans le repère $(O, \vec{u})$ est x_2 :
$\forall t \in R_+, t \rightsquigarrow Vt$ où V est un réel. Comment faut-il choisir V pour qu'il existe un instant t tel que les positions des deux points p_1 et p_2 à cet instant soient confondues ?

3° V est égal à $\frac{9}{4}$. A quels instants les positions des points p_1 et p_2 sont-elles confondues ? Déterminer leurs abscisses.

31 Soient deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2 de vecteur directeur $\vec{u}$, $(O_1, \vec{u})$ un repère de Δ_1 et $(O_2, \vec{u})$ un repère de Δ_2.

1. On considère le mouvement d'un point p_1 sur Δ_1 défini par sa loi horaire x_1 dans $(O_1, \vec{u})$. On considère le mouvement P_2 d'un point p_2 sur D_2 défini par sa loi horaire dans $(O_2, \vec{u})$. A chaque instant t, on associe le point $M(t)$ milieu du segment $[P_1(t), P_2(t)]$.
Montrer que l'on définit ainsi le mouvement rectiligne M d'un point m sur la droite Δ déterminée par le point O milieu de $[O_1, O_2]$ et le vecteur $\vec{u}$. Quelle est la loi horaire du mouvement du point m dans le repère $(O, \vec{u})$?

2. Étudier le mouvement du point m dans chacun des cas suivants :
a) $x_1 : t \rightsquigarrow (t+1)^2$ et $x_2 : t \rightsquigarrow -(t-1)^2 + 2$.
b) $x_1 : t \rightsquigarrow 2t^2 + 2t - 1$ et $x_2 : t \rightsquigarrow -t^2 + 3$.

32 Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en un point O et de vecteurs directeurs respectifs : $\vec{i_1}$ et $\vec{i_2}$.
Un point p_1 est en mouvement uniformément varié sur D_1 : à l'instant 0, sa vitesse dans le repère $(O, \vec{i_1})$ est 0 et sa position est le point d'abscisse 1 ; à l'instant 1 l'abscisse de la position de p_1 est 0.
Un point p_2 est en mouvement uniformément varié sur Δ_2 : à l'instant 0, sa vitesse dans le repère $(O, \vec{i_2})$ est nulle et sa position est le point d'abscisse 1 ; à l'instant 1 l'abscisse de la position de p_2 est 2.

1° Écrire la loi horaire de p_1 dans le repère $(O, \vec{i_1})$. Écrire la loi horaire de p_2 dans le repère $(O, \vec{i_2})$.

2° A chaque instant t, on associe le point $M(t)$ défini par :
$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OP}_1(t) + \overrightarrow{OP}_2(t)$.
Montrer qu'on définit ainsi le mouvement rectiligne d'un point m sur une droite Δ. Vérifier que le vecteur $\vec{u} = \vec{i}_1 - \vec{i}_2$ est un vecteur directeur de Δ.
On pose : $\{A\} = \Delta \cap \Delta_1$. Quelle est l'abscisse du point A sur la droite Δ_1 ?
3° Déterminer la loi horaire x du mouvement de m sur la droite Δ. Étudier le mouvement du point m.
4° Montrer que, pour tout t, on a : $P_1(t) = M(t)$. Montrer qu'il existe deux instants t_1 et t_2 pour lesquels on a :
$P_2(t_1) = M(t_1)$ et $P_2(t_2) = M(t_2)$.
Déterminer t_1 et t_2.

◆ Dans les exercices suivants (nos 33 à 38) on considère le mouvement d'un point p sur une droite Δ rapportée à un repère $(O, \vec{u})$, défini par sa loi horaire x.
1° Montrer que le mouvement est un mouvement vibratoire simple.
2° Déterminer le centre, l'amplitude et la période du mouvement.
3° Étudier ce mouvement.

33 $t \leadsto \sin t + \cos t + 1$.

34 $t \leadsto \sqrt{2}\,(\sin 2t + \cos 2t) - 3$.

35 $t \leadsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin 3t + \cos 3t) - 5$.

36 $t \leadsto \dfrac{1}{2}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2t\right) - 1$.

37 $t \leadsto 2\cos^2 t - 4\sin^2 t + 3$.

38 $t \leadsto 2\cos^2\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$.

39 Soient a, b, ω, c des réels tels que : $a^2 + b^2 \neq 0$ et $\omega \neq 0$. On considère le mouvement d'un point p sur une droite D rapportée à un repère $(O, \vec{u})$ défini par sa loi horaire x dans $(O, \vec{u})$:
$t \leadsto a\cos^2 \omega t + b\sin^2 \omega t + c$.
Montrer que le mouvement de p est un mouvement vibratoire simple.
Déterminer le centre, l'amplitude et la période de ce mouvement.

40 Soit Δ une droite rapportée à un repère $(O, \vec{u})$. On considère le mouvement d'un point p sur D défini par sa loi horaire x dans $(O, \vec{u})$:
$t \leadsto \cos^2 t + \lambda \cos t$, où λ est un réel. Déterminer λ pour que le mouvement de p soit un mouvement vibratoire simple.

HUITIÈME PARTIE

géométrie métrique

33. Espaces affines euclidiens

Généralités.

Distance euclidienne.

1 Considérons un espace affine A associé à un espace vectoriel euclidien E. A tout couple (M, N) de $A \times A$, associons la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
Pour tout vecteur x de E, nous avons : $\|x\| \geqslant 0$.
Nous définissons donc une application, notée d, de $A \times A$ dans $\mathbb{R}_+$:
$(M, N) \rightsquigarrow d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.

DÉFINITION : Soit A **un espace affine associé à un espace vectoriel euclidien** E. **L'application** d **de** $A \times A$ **dans** $\mathbb{R}_+$**, définie par :** $(M, N) \rightsquigarrow \|\overrightarrow{MN}\|$ **est appelée distance sur** A.

Le réel $d(M, N)$ est appelé **distance** des points M et N.

Propriétés de la distance.

2 Pour tout couple (M, N) de points de A, nous avons :
$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \|-\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{NM}\| = d(N, M)$.
Nous avons donc :

$$\boxed{\forall M \in A, \quad \forall N \in A, \quad d(M, N) = d(N, M)}$$

3 Pour tout couple (M, N) de points de A, nous avons les équivalences logiques :
$(d(M, N) = 0) \iff (\|\overrightarrow{MN}\| = 0)$;
$(\|\overrightarrow{MN}\| = 0) \iff (\overrightarrow{MN} = \vec{0})$;
$(\overrightarrow{MN} = \vec{0}) \iff (M = N)$.
Nous en déduisons :

$$\boxed{\forall M \in A, \quad \forall N \in A, \quad (d(M, N) = 0) \iff (M = N)}$$

4 Pour tout triplet (M, N, P) de points de A, nous avons :
$d(M, P) = \| \overrightarrow{MP} \| = \| \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \|$.
De l'inégalité : $\| \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \| \leqslant \| \overrightarrow{MN} \| + \| \overrightarrow{NP} \|$, nous déduisons :

$$\boxed{\forall M \in A, \quad \forall N \in A, \quad \forall P \in A, \quad d(M, P) \leqslant d(M, N) + d(N, P)}$$

Espace affine euclidien.

5 **DÉFINITION : Soient** A **un espace affine associé à un espace vectoriel euclidien** E **et** d **la distance sur** A. **L'espace affine** A **muni de la distance** d **est appelé espace affine euclidien.**

Espaces affines euclidiens de dimension 2.

6 Considérons un espace affine euclidien, noté P, associé à un espace vectoriel euclidien, noté $\vec{P}$, de dimension 2.
On dit que P est un plan affine euclidien.

Repère orthogonal; repère orthonormé.

7 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan affine P.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthogonal si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$ est orthogonale.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$ est orthonormée.

Expression analytique de la distance.

8 Considérons un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P et deux points M_1 et M_2 de P. Désignons par (x_1, y_1) et par (x_2, y_2) les coordonnées respectives de M_1 et de M_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons : $d(M_1, M_2) = \| \overrightarrow{M_1M_2} \|$, et : $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.
Du théorème du n° 11, p. 60, nous déduisons :

$$\boxed{d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Droites affines perpendiculaires.

9 **DÉFINITION : Soient D et D′ deux droites affines de P, de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$. On dit que D et D′ sont perpendiculaires si et seulement si les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.**

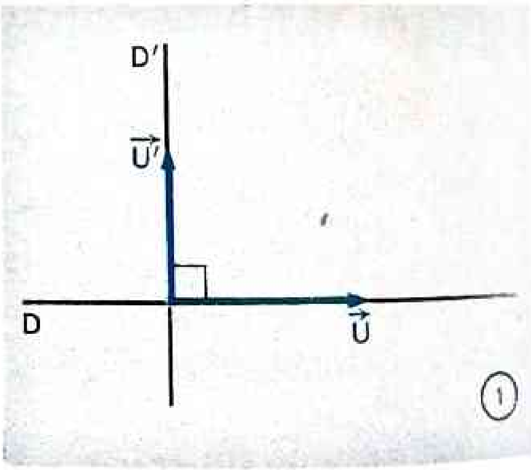
On dit aussi que D est perpendiculaire à D′ et que D′ est perpendiculaire à D.

10 Il résulte de la définition de deux droites vectorielles orthogonales (n° 15, p. 61), que les droites D et D′ sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur $\vec{U}$ de D est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{U'}$ de D′.

Intersection de deux droites affines perpendiculaires.

11 **THÉORÈME : Deux droites affines perpendiculaires sont sécantes.**

En effet, soient D et D′ deux droites perpendiculaires (fig. 1). Désignons par $\vec{U}$ un vecteur directeur de D et par $\vec{U'}$ un vecteur directeur de D′.
Nous avons :
$\vec{U} \neq \vec{0}$, $\vec{U'} \neq \vec{0}$, $\vec{U}.\vec{U'} = 0$.
Le système $(\vec{U}, \vec{U'})$ est un système orthogonal ; les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ ne sont pas liés. Il en résulte que les droites D et D′ ne sont pas parallèles ; elles sont donc sécantes.

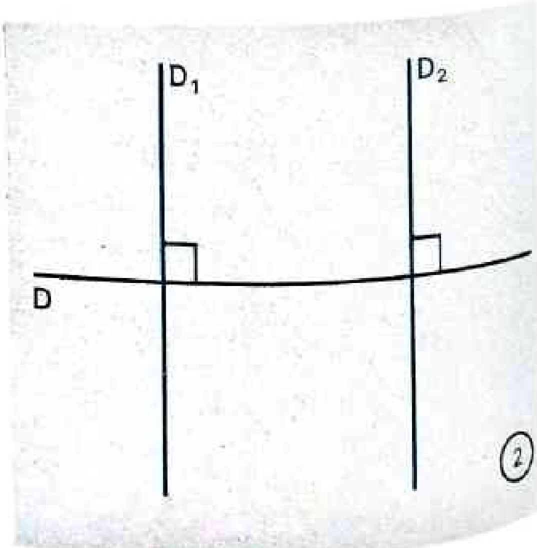


1

Droites affines perpendiculaires à une même droite.

12 **THÉORÈME : Si deux droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires à une droite D, les droites D_1 et D_2 sont parallèles.**

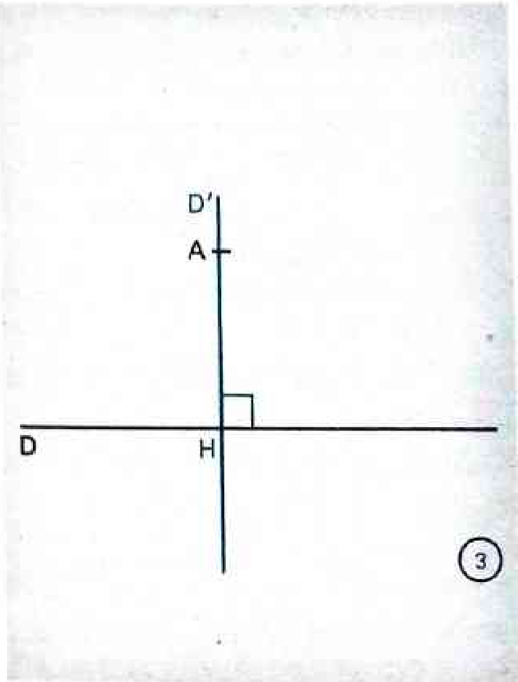
Soient trois droites D_1, D_2 et D, dont les directions respectives sont $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$ et $\vec{D}$.
Si les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires à D, les droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont orthogonales à $\vec{D}$. Les droites vectorielles $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ sont donc égales ; il en résulte que les droites D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 2).



2

Projection orthogonale d'un point sur une droite affine.

13 Considérons, dans le plan P, un point A et une droite D de direction $\vec{D}$ (fig. 3).
Démontrons qu'il existe une droite unique de P qui est perpendiculaire à D et qui passe par A.
En effet, il existe une droite vectorielle unique $\vec{D'}$ de $\vec{P}$ orthogonale à $\vec{D}$.
Soit D′ la droite qui passe par le point A et dont la direction est $\vec{D'}$. Cette droite D′ est une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à D.
De plus, une telle droite est unique. En effet, si D″ est une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à P, il résulte du n° 12, p. 206, que D′ et D″ sont parallèles. Ces droites parallèles passent toutes deux par A; elles sont donc égales.

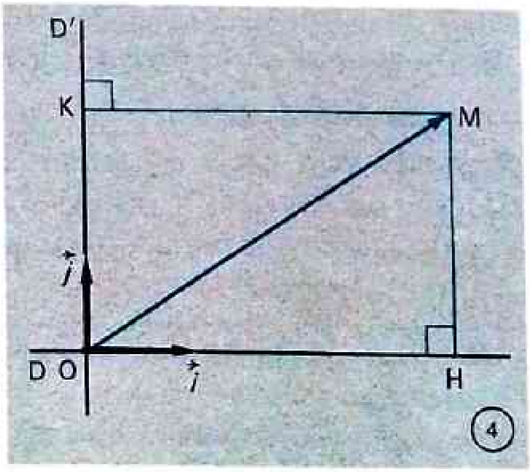


3

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient, dans le plan P, **une droite** D **et un point** A. **Par** A, **il passe une droite unique** D′ **perpendiculaire à** D.
On appelle projection orthogonale du point A **sur** D **le point d'intersection** H **des droites** D **et** D′.

Exemples.

14 Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Désignons par D la droite définie par le point O et le vecteur $\vec{i}$, et par D′ la droite définie par le point O et le vecteur $\vec{j}$.
Considérons un point M de coordonnées (x, y) ; nous avons : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Soient H et K les points déterminés par :
$\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$ et $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$ (fig. 4).
Le point H appartient à la droite D ; d'autre part, nous avons :
$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OM} = y\vec{j}$.



4

Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux; H est donc la projection orthogonale de M sur D.
De même, on vérifie que K est la projection orthogonale de M sur D′.

Distance d'un point à une droite affine.

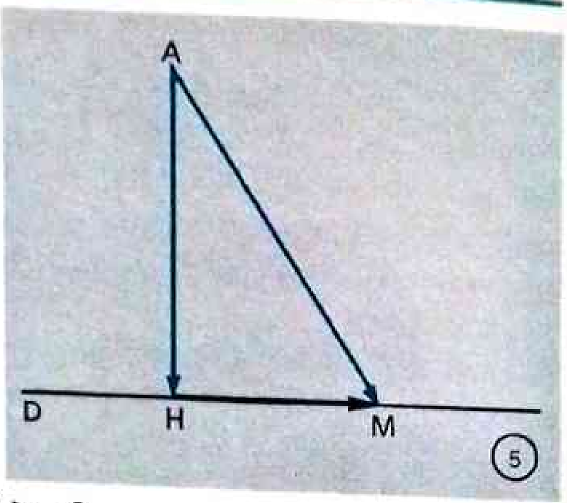
15 **DÉFINITION : Soient** A **un point et** D **une droite de** P. **On appelle distance du point** A **à la droite** D **la distance du point** A **au point** H, **projection orthogonale de** A **sur** D.

16 Considérons une droite D et un point A. Désignons par H la projection orthogonale de A sur D (fig. 5).

Par définition, la distance a de A à D est : $a = d(\mathrm{A}, \mathrm{H})$.

Pour tout point M de D, nous avons : $\overrightarrow{\mathrm{AH}} . \overrightarrow{\mathrm{HM}} = 0$.

Du théorème de Pythagore (n° 27, p. 52), nous déduisons : $\| \overrightarrow{\mathrm{AM}} \|^2 = \| \overrightarrow{\mathrm{AH}} \|^2 + \| \overrightarrow{\mathrm{HM}} \|^2$, c'est-à-dire : $[d(\mathrm{A}, \mathrm{M})]^2 = a^2 + [d(\mathrm{H}, \mathrm{M})]^2$.



Nous en déduisons : $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{D}, \quad [d(\mathrm{A}, \mathrm{M})]^2 \geqslant a^2$.

Nous avons : $d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$; il en résulte : $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{D}, \quad d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \geqslant a$.

THÉORÈME : Pour tout point M **d'une droite** D, **et pour tout point** A **du plan** P, **la distance** $d(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ **est supérieure ou égale à la distance du point** A **à la droite** D.

Condition pour que deux droites affines soient perpendiculaires.

17 Considérons un plan P et un repère orthonormé de ce plan.
Soient D et D′ deux droites du plan, d'équations respectives :
$ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$.

Le vecteur $\vec{\mathrm{X}}$ de coordonnées $(-v, u)$ est un vecteur directeur de $\vec{\mathrm{D}}$, et le vecteur $\vec{\mathrm{X}'}$ de coordonnées $(-v', u')$ est un vecteur directeur de $\overrightarrow{\mathrm{D}'}$.

Nous avons : $\vec{\mathrm{X}} . \vec{\mathrm{X}'} = (-v)(-v') + uu'$, c'est-à-dire : $\vec{\mathrm{X}} . \vec{\mathrm{X}'} = uu' + vv'$.
Il résulte du n° 10, p. 206, que les droites D et D′ sont perpendiculaires si et seulement si : $uu' + vv' = 0$.

THÉORÈME : Dans un repère orthonormé, deux droites D **et** D′ **d'équations respectives :** $ux + vy + w = 0$ **et** $u'x + v'y + w' = 0$ **sont perpendiculaires si et seulement si l'on a :** $uu' + vv' = 0$.

18 En particulier, soient D et D′ deux droites d'équations respectives :
$y = ax + b$ et $y' = a'x + b'$;
ces deux droites sont perpendiculaires si et seulement si l'on a : $aa' = -1$.

Équation de la droite qui passe par un point A et qui est perpendiculaire à une droite D.

19 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P.

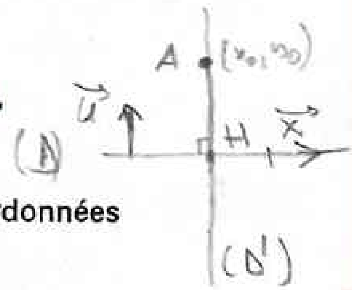
Considérons une droite affine D et un point A. Désignons par $\vec{U}$ un vecteur directeur de D, de coordonnées (u, v), et par (x_0, y_0) les coordonnées du point A.
Soit D′ la droite qui est perpendiculaire à D et qui passe par A.

Nous avons : $(M \in D') \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AM}.\vec{U} = 0)$.
Nous en déduisons qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à D′ si et seulement si l'on a : $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$.

Une équation de D′ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$\boxed{u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0}$$

Calcul de la distance d'un point à une droite affine.



20 Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P.
Soient D la droite d'équation : $ux + vy + w = 0$, et A le point de coordonnées (x_0, y_0).
Soit D′ la droite qui est perpendiculaire à D et qui passe par le point A.
Le point H d'intersection de D et de D′ est la projection orthogonale de A sur la droite affine D : $D \cap D' = \{H\}$.
Le vecteur : $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j}$ est orthogonal au vecteur : $\vec{X} = -v\vec{i} + u\vec{j}$.
$\vec{X}$ est un vecteur directeur de D ; $\vec{U}$ est donc un vecteur directeur de D′. H appartient à D′ ; il existe donc un réel λ pour lequel on a : $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{U}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AH} = \lambda u\vec{i} + \lambda v\vec{j}$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (x_0 + \lambda u)\vec{i} + (y_0 + \lambda v)\vec{j}$.
H appartient à D ; ses coordonnées vérifient donc l'équation : $ux + vy + w = 0$.
Nous en déduisons :

$u(x_0 + \lambda u) + v(y_0 + \lambda v) + w = 0$, c'est-à-dire : $\lambda = \dfrac{-ux_0 - vy_0 - w}{u^2 + v^2}$.

Soit a la distance de A à la droite D ; nous avons : $a = \|\overrightarrow{AH}\|$.
Il en résulte : $a = |\lambda| \, \|\vec{U}\|$, c'est-à-dire :

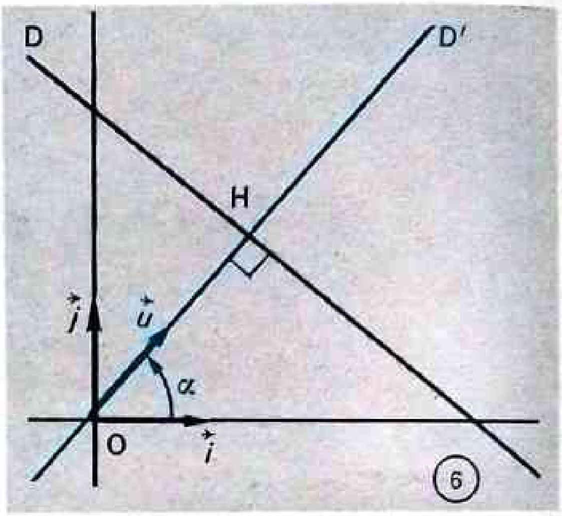
$$\boxed{a = \frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}}$$

Le vecteur $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite D′.

L'égalité : $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{U}$ implique l'égalité : $\overrightarrow{AH} = \lambda\|\vec{U}\|\vec{\alpha}$, c'est-à-dire :
$\overrightarrow{AH} = -\dfrac{ux_0 + vy_0 + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}\vec{\alpha}$.

Équation normale d'une droite affine.

21 Considérons un repère orthonormé positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P.
Soient D une droite et D' la droite perpendiculaire à D qui passe par O. Désignons par $\vec{u}$ un vecteur unitaire de D' et par H la projection orthogonale de O sur D. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires; il existe donc un réel p pour lequel on a : $\overrightarrow{OH} = p\vec{u}$ (fig. 6).



D'autre part, nous avons l'équivalence logique : $(M \in D) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0)$.
Nous avons :
$\overrightarrow{HM}.\vec{u} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}).\vec{u} = \overrightarrow{OM}.\vec{u} - p$.
Si α est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$, et si (x, y) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, nous avons :
$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Nous en déduisons :
$\overrightarrow{HM}.\vec{u} = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$.
Il en résulte : $(M \in D) \Longleftrightarrow (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0)$.
Une équation de D dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc :

$$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0}$$

Cette équation est appelée équation normale de la droite D.

22 Remarque : Nous avons : $\|\overrightarrow{OH}\| = |p|$. La valeur absolue du réel p est donc égale à la distance du point O à la droite D.

Espaces affines euclidiens de dimension 3.

23 Considérons un espace affine euclidien, noté A_3, associé à un espace vectoriel euclidien de dimension 3, noté E_3.

Repère orthogonal; repère orthonormé.

24 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de A_3.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Expression analytique de la distance.

25 Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de A_3 et deux points M_1 et M_2 de A_3. Désignons par (x_1, y_1, z_1) et par (x_2, y_2, z_2) les coordonnées respectives de M_1 et de M_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous avons :
$d(M_1, M_2) = \| \overrightarrow{M_1M_2} \|$, et : $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.
Du théorème n° 23, p. 64, nous déduisons :

$$\boxed{d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Droite affine et plan affine perpendiculaires.

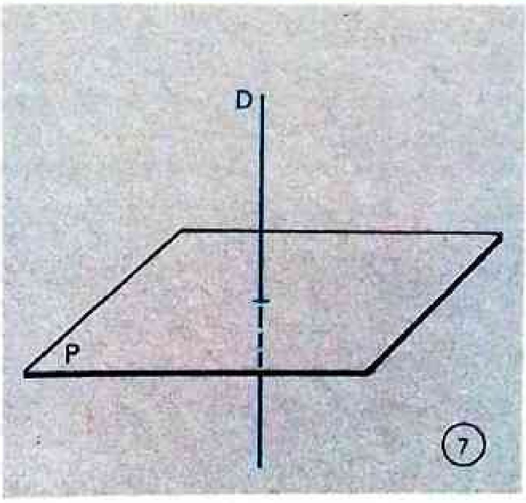
26 **DÉFINITION : Soient D une droite de direction $\vec{D}$ et P un plan de direction $\vec{P}$. On dit que D et P sont perpendiculaires si et seulement si la droite vectorielle $\vec{D}$ et le plan vectoriel $\vec{P}$ sont orthogonaux.**

On dit aussi que D est perpendiculaire à P et que P est perpendiculaire à D.

Intersection d'une droite et d'un plan perpendiculaires.

27 **THÉORÈME : Une droite D et un plan P perpendiculaires sont sécants.**

$\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont deux sous-espaces vectoriels ; nous avons donc l'inclusion : $\{\vec{0}\} \subset \vec{D} \cap \vec{P}$.
Réciproquement, pour tout vecteur $\vec{X}$ de $\vec{D} \cap \vec{P}$, on a : $\vec{X} \in \vec{D}$ et $\vec{X} \in \vec{P}$. Tout vecteur de $\vec{D}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{P}$; nous avons donc : $\vec{X} . \vec{X} = 0$, c'est-à-dire : $\vec{X} = \vec{0}$.
Il en résulte : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$.
Du n° 39, p. 31, nous déduisons que la droite D et le plan P sont sécants (fig. 7).



Plans affines perpendiculaires à une droite affine.

28 **THÉORÈME : Deux plans perpendiculaires à une droite sont parallèles.**

Soient en effet deux plans P_1 et P_2 et une droite D dont les directions respectives sont P_1, $\vec{P}_2$ et $\vec{D}$. Si les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires à D, les plans vectoriels $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont orthogonaux à $\vec{D}$. Les plans vectoriels $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont donc égaux; il en résulte que les plans P_1 et P_2 sont parallèles.

Droites affines perpendiculaires à un plan affine.

29 D'une manière analogue, on démontre le théorème :

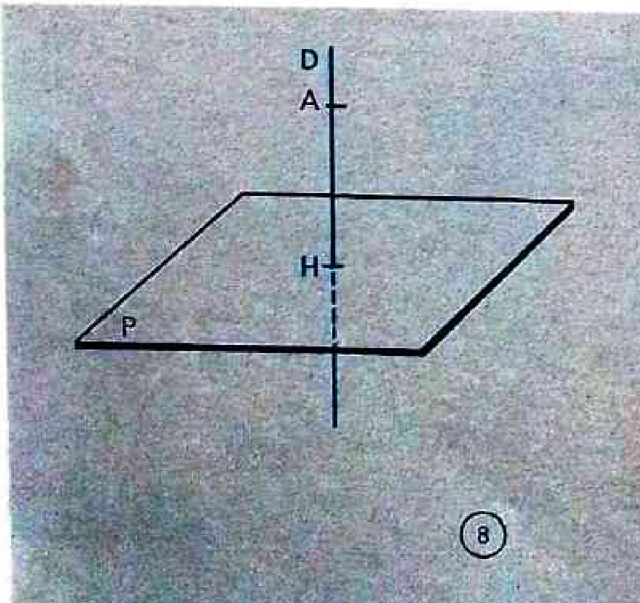
THÉORÈME : Deux droites perpendiculaires à un plan sont parallèles.

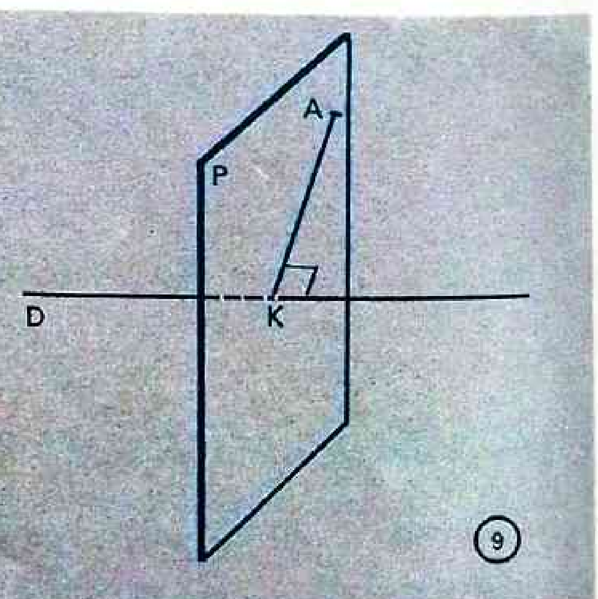
Projection orthogonale d'un point sur un plan affine.

30 Considérons, dans l'espace affine euclidien A_3, un point A et un plan P de direction $\vec{P}$. Démontrons qu'il existe une droite unique de A_3 qui est perpendiculaire à P et qui passe par A (fig. 8).

En effet, il existe une droite vectorielle unique $\vec{D}$ de E_3 orthogonale à $\vec{P}$. Soit D la droite affine qui passe par le point A et dont la direction est $\vec{D}$. Cette droite D est une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à P.
De plus une telle droite est unique. En effet, si D′ est une droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à P, il résulte du n° 29, p. 212, que D et D′ sont parallèles. Ces droites parallèles passent toutes deux par A; elles sont donc égales.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient, dans l'espace affine euclidien A_3, un plan P et un point A. Par A, il passe une droite unique D perpendiculaire à P.
On appelle projection orthogonale du point A sur P le point d'intersection H de D et de P.





Projection orthogonale d'un point sur une droite affine.

31 Considérons, dans l'espace affine euclidien A_3, un point A et une droite D. D'une manière analogue, on démontre qu'il existe un plan unique P qui passe par A et qui est perpendiculaire à D (fig. 9).

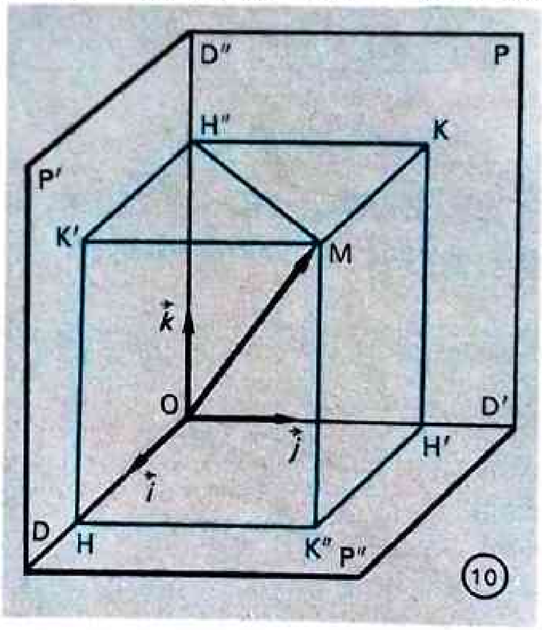
DÉFINITION : On appelle projection orthogonale du point A **sur la droite** D **le point d'intersection** K **de** P **et de** D.

Exemples.

32 Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un point M de coordonnées (x, y, z) : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

1. Désignons par P le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$, par P′ le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$, par P″ le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (fig. 10). Considérons alors les points K, K′, K″ respectivement définis par : $\overrightarrow{OK} = y\vec{j} + z\vec{k}$, $\overrightarrow{OK'} = x\vec{i} + z\vec{k}$, $\overrightarrow{OK''} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On démontre que K, K′, K″ sont les projections orthogonales de M respectivement sur P, sur P′ et sur P″.

2. Désignons par D la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{i}$, par D′ la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{j}$, par D″ la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{k}$. Considérons les points H, H′, H″ respectivement définis par :
$\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OH'} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OH''} = z\vec{k}$.
On démontre que H, H′, H″ sont les projections orthogonales de M respectivement sur D, sur D′ et sur D″.



10

Distance d'un point à un plan affine ou à une droite affine.

33 **DÉFINITION : Soient** H **et** K **les projections orthogonales respectives d'un point** A **sur un plan** P **et sur une droite** D.
On appelle distance du point A **au plan** P **la distance** $d(A, H)$ **des points** A **et** H; **on appelle distance du point** A **à la droite** D **la distance** $d(A, K)$ **des points** A **et** K.

Par une démonstration analogue à celle du n° 16, p. 208, on démontre :
$\forall M \in P, \quad d(A, M) \geqslant d(A, H)$; $\quad \forall N \in D, \quad d(A, N) \geqslant d(A, K)$.

Équation du plan qui passe par un point B et qui est perpendiculaire à une droite D.

34 Considérons l'espace affine euclidien A_3 et un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de cet espace.

Soient D une droite affine de A_3, de vecteur directeur $\vec{X}$ de coordonnées (u, v, w) et B le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Nous nous proposons d'établir une équation du plan affine P qui est perpendiculaire à D et qui passe par B.

Nous avons : $(M \in P) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{BM} \in \vec{P})$.

Du théorème n° 27, p. 66, nous déduisons : $(\overrightarrow{BM} \in \vec{P}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{BM}.\vec{X} = 0)$.

D'autre part, nous avons : $\overrightarrow{BM}.\vec{X} = u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0)$.

Nous en déduisons l'équivalence logique :

$(M \in P) \Longleftrightarrow (u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0)$.

Nous venons d'établir que, si D est une droite de A_3 dont un vecteur directeur $\vec{X}$ a pour coordonnées (u, v, w), et si B est un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), une équation du plan P qui est perpendiculaire à D et qui passe par B est :

$$\boxed{u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0}$$

Représentation paramétrique de la droite qui passe par un point B et qui est perpendiculaire à un plan P.

35 Considérons l'espace affine euclidien A_3 et un repère orthonormé de cet espace. Soient P un plan d'équation : $ux + vy + wz + h = 0$ et B un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Nous nous proposons d'établir une représentation paramétrique de la droite affine D qui est perpendiculaire à P et qui passe par le point B.

Soit M_1 un point de P de coordonnées (x_1, y_1, z_1). Pour tout point M de P, nous avons : $u(x - x_1) + v(y - y_1) + w(z - z_1) = 0$.

Désignons par $\vec{X}$ le vecteur de coordonnées (u, v, w).

Nous avons donc :

$\forall M \in P, \quad \vec{X}.\overrightarrow{M_1M} = 0$.

Le vecteur $\vec{X}$ est orthogonal à tout vecteur de $\vec{P}$.

La droite affine D est donc la droite qui admet $\vec{X}$ pour vecteur directeur et qui passe par B.

Du n° 56, p. 36, nous déduisons qu'une représentation paramétrique de D est :

$x = x_0 + ku; \quad y = y_0 + kv; \quad z = z_0 + kw.$

36 Remarque : Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est donc un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire au plan d'équation : $ux + vy + wz + h = 0$.

Calcul de la distance d'un point à un plan.

37 Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine euclidien A_3. Soient P le plan d'équation : $ux + vy + wz + h = 0$ et B le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0).
La droite D qui passe par B et qui est perpendiculaire au plan P admet le vecteur : $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, pour vecteur directeur.
Soit H la projection orthogonale de B sur P.
H appartient à D ; il existe donc un réel λ pour lequel on a :
$\overrightarrow{BH} = \lambda\vec{U}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{BH} = \lambda u\vec{i} + \lambda v\vec{j} + \lambda w\vec{k}$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = (x_0 + \lambda u)\vec{i} + (y_0 + \lambda v)\vec{j} + (z_0 + \lambda w)\vec{k}$.
H appartient à P ; ses coordonnées vérifient donc l'équation :
$ux + wy + wz + h = 0$.
Nous en déduisons : $u(x_0 + \lambda u) + v(y_0 + \lambda v) + w(z_0 + \lambda w) + h = 0$,
c'est-à-dire : $\lambda = \dfrac{-ux_0 - vy_0 - wz_0 - h}{u^2 + v^2 + w^2}$.
Soit a la distance de B au plan P ; nous avons : $a = \|\overrightarrow{BH}\|$,
c'est-à-dire : $a = |\lambda| \, \|\vec{U}\|$.

Nous en déduisons : $\boxed{a = \dfrac{|ux_0 + vy_0 + wz_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}}$

Droites affines orthogonales.

38 DÉFINITION : On dit que deux droites affines D et D′, de directions respectives $\vec{D}$ et $\vec{D'}$, sont orthogonales si et seulement si les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ sont orthogonales.

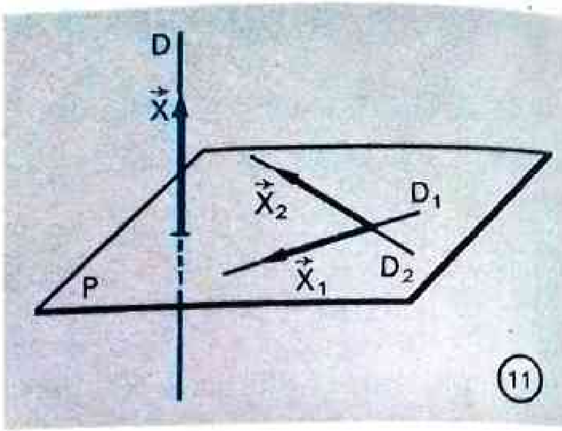
39 Il résulte de la définition de deux droites vectorielles orthogonales, que D et D′ sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur directeur de D′.

40 Remarque : Si D et D′ sont orthogonales et coplanaires, ces deux droites affines sont perpendiculaires (n° 9, p. 206).

41 THÉORÈME : Une droite D est perpendiculaire à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans P.

Considérons, en effet, une droite affine D de vecteur directeur $\vec{X}$, et deux droites sécantes D_1 et D_2 d'un plan affine P, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$. Le système $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ est une base de $\vec{P}$.

Du théorème n° 25, p. 65, il résulte que la droite vectorielle $\vec{D}$ est orthogonale au plan vectoriel $\vec{P}$ si et seulement si le vecteur $\vec{X}$ est orthogonal à $\vec{X}_1$ et à $\vec{X}_2$ (fig. 11).
La droite D est donc perpendiculaire à P si et seulement si elle est orthogonale aux droites sécantes D_1 et D_2 de P.



11

Plans affines perpendiculaires de A_3.

42 **DÉFINITION : Soient deux plans affines P et P′ de A_3, de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$. On dit que P et P′ sont perpendiculaires si et seulement si la droite vectorielle $\vec{D}$ orthogonale à $\vec{P}$ et la droite vectorielle $\vec{D'}$ orthogonale à $\vec{P'}$ sont orthogonales.**

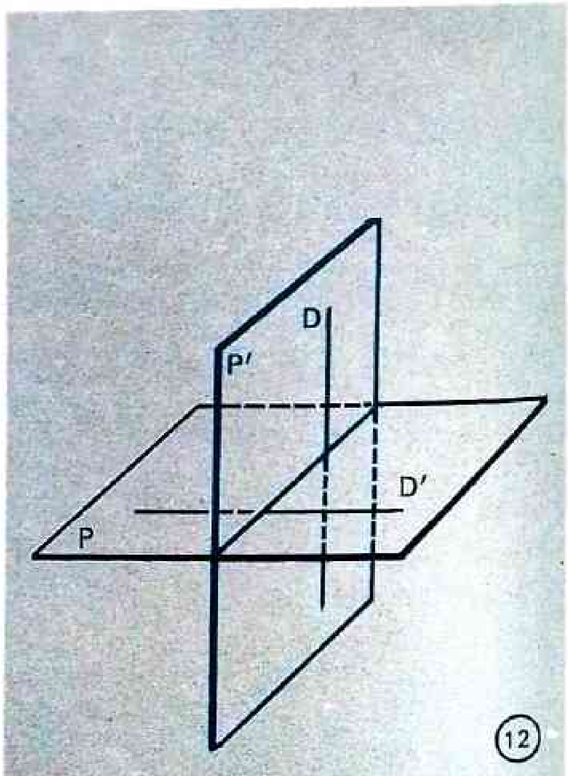
On dit aussi que P est perpendiculaire à P′ et que P′ est perpendiculaire à P.

43 Soient D une droite perpendiculaire à P et D′ une droite perpendiculaire à P′; il résulte de la définition que les plans P et P′ sont perpendiculaires si et seulement si D et D′ sont orthogonales (fig. 12).

44 Considérons deux plans P et P′ de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$.
Désignons par $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ les droites vectorielles respectivement orthogonales à $\vec{P}$ et à $\vec{P'}$. Les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ sont donc respectivement orthogonaux à $\vec{D}$ et à $\vec{D'}$.
Du n° 30, p. 67, il résulte l'équivalence logique :

$$(\vec{D} \text{ et } \vec{D'} \text{ sont orthogonales}) \iff (\vec{D'} \subset \vec{P}).$$

Nous en déduisons que les plans P et P′ sont perpendiculaires si et seulement si la droite vectorielle $\vec{D'}$ est incluse dans $\vec{P}$, c'est-à-dire si et seulement si une droite D′ de direction $\vec{D'}$ est parallèle au plan affine P.



12

THÉORÈME : Deux plans affines sont perpendiculaires si et seulement s'il existe une droite affine parallèle à l'un et perpendiculaire à l'autre.

Intersection de deux plans affines perpendiculaires.

45 THÉORÈME : Deux plans affines perpendiculaires sont sécants.

En effet, soient P et P′ deux plans affines de directions respectives $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ et les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ respectivement orthogonales à $\vec{P}$ et à $\vec{P'}$.

Si les plans affines P et P′ sont perpendiculaires, la droite vectorielle $\vec{D'}$ est incluse dans $\vec{P}$; nous savons qu'elle n'est pas incluse dans $\vec{P'}$.

Les plans vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ ne sont pas égaux ; nous en déduisons que les plans affines P et P′ ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants.

Condition pour que deux plans affines soient perpendiculaires.

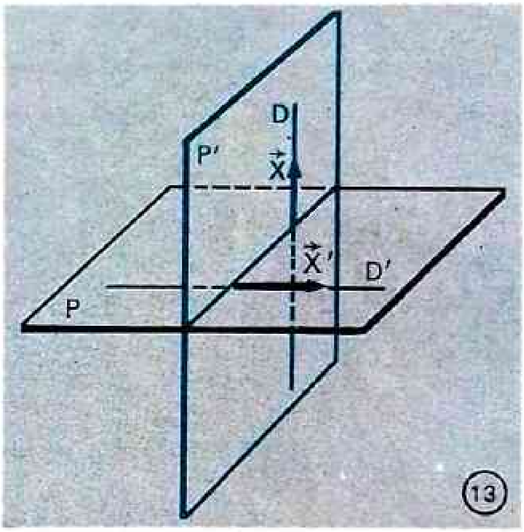
46 Soit l'espace affine A_3 et un repère orthonormé de A_3 (fig. 13).

Considérons le plan affine P d'équation : $ux + vy + wz + h = 0$,

et le plan affine P′ d'équation : $u'x + v'y + w'z + h' = 0$.

Soient D et D′ deux droites affines perpendiculaires respectivement à P et à P′.

Il résulte du n° 36, p. 214, qu'un vecteur directeur $\vec{X}$ de D a pour coordonnées : (u, v, w) et qu'un vecteur directeur $\vec{X'}$ de D′ a pour coordonnées : (u', v', w').



Les plans P et P′ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{X}$ et $\vec{X'}$ sont orthogonaux.

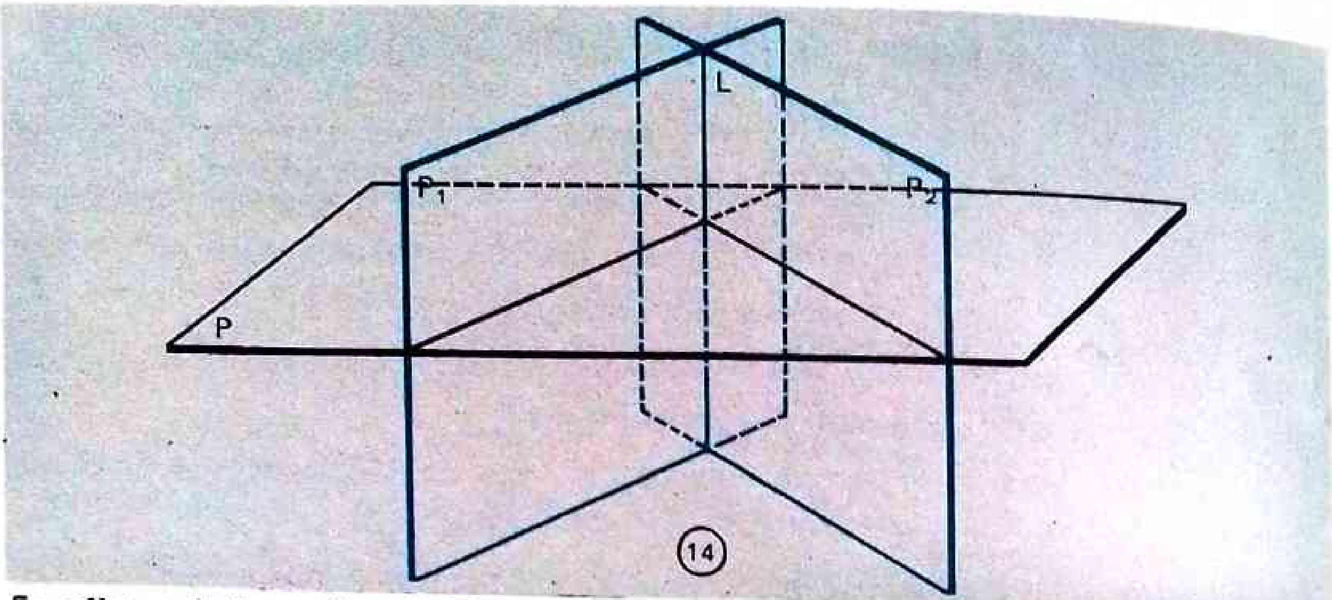
Nous avons : $\vec{X}.\vec{X'} = uu' + vv' + ww'$.

Nous en déduisons le théorème :

THÉORÈME : Dans un repère orthonormé, deux plans affines d'équations respectives : $ux + vy + wz + h = 0$ **et** $u'x + v'y + w'z + h' = 0$ **sont perpendiculaires si et seulement si l'on a :** $uu' + vv' + ww' = 0$.

Plans affines perpendiculaires à un plan affine de A_3.

47 THÉORÈME : Soient P **un plan,** P_1 **et** P_2 **deux plans sécants, d'intersection** L. **La droite** L **est perpendiculaire au plan** P **si et seulement si les plans** P_1 **et** P_2 **sont perpendiculaires à** P.



14

En effet, soit P un plan. Désignons par P_1 et par P_2 deux plans sécants, par L la droite $P_1 \cap P_2$. La direction de la droite L est la droite vectorielle $\vec{L}$ égale à $\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2$ (fig. 14).

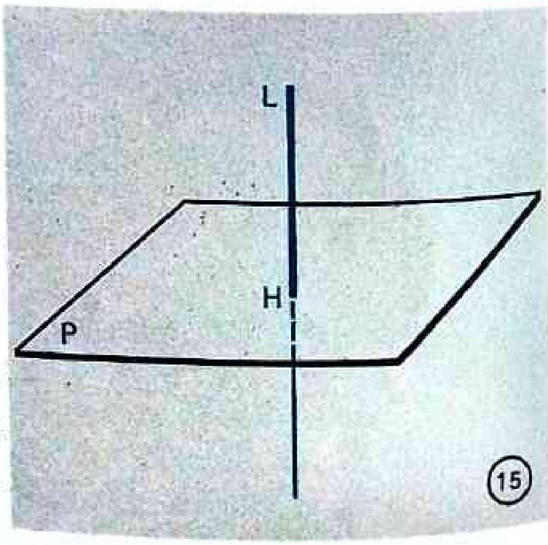
Soit $\vec{D}$ la droite vectorielle orthogonale à $\vec{P}$.

Le plan affine P_1 est perpendiculaire à P si et seulement si $\vec{D}$ est incluse dans $\vec{P}_1$; le plan affine P_2 est perpendiculaire à P si et seulement si $\vec{D}$ est incluse dans $\vec{P}_2$. Les plans affines P_1 et P_2 sont donc perpendiculaires à P si et seulement si la droite vectorielle $\vec{D}$ est incluse dans $\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2$, c'est-à-dire dans la droite vectorielle $\vec{L}$. L'inclusion : $\vec{D} \subset \vec{L}$ implique l'égalité : $\vec{D} = \vec{L}$.
Nous en concluons que P_1 et P_2 sont perpendiculaires à P si et seulement si L est perpendiculaire à P.

Projection orthogonale d'une droite affine sur un plan affine.

48 Soient P un plan affine et L une droite de direction $\vec{L}$. Désignons par $\vec{D}$ la droite vectorielle orthogonale à $\vec{P}$.

49 **Premier cas :** Les droites $\vec{L}$ et $\vec{D}$ sont égales. La droite L est perpendiculaire au plan P. Désignons par $\{H\}$ l'intersection de L et de P. La projection orthogonale sur P de tout point de L est le point H.
La projection orthogonale de L sur P est donc le singleton $\{H\}$ (fig. 15).



15

50 **Deuxième cas :** Les droites $\vec{L}$ et $\vec{D}$ ne sont pas égales. La droite L n'est pas perpendiculaire au plan P. Les droites vectorielles $\vec{D}$ et $\vec{L}$ déterminent un plan vectoriel $\vec{P'}$.

Considérons un point A de L et le plan P′, de direction $\vec{P'}$, et qui passe par A.

Nous avons : $\vec{D} \subset \vec{P'}$; le plan P′ est donc perpendiculaire à P.

De plus, nous avons l'implication : $(A \in P' \text{ et } \vec{L} \subset \vec{P'}) \Longrightarrow (L \subset P')$.

Il existe donc un plan P′ qui est perpendiculaire à P et qui contient la droite L non perpendiculaire à P.

Un tel plan est unique. En effet, supposons qu'il existe un plan P″, distinct de P′, qui contienne L et qui soit perpendiculaire à P.

L'intersection $P' \cap P''$, c'est-à-dire la droite L, devrait être perpendiculaire au plan P.

La droite vectorielle $\vec{L}$ serait alors égale à $\vec{D}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

---

51 **THÉORÈME ET DÉFINITION : Soit** L **une droite non perpendiculaire à un plan** P. **Il existe un plan unique** P′ **qui est perpendiculaire à** P **et qui contient** L.

On appelle projection orthogonale de la droite L **sur le plan** P **la droite** L′, **intersection des plans** P **et** P′.

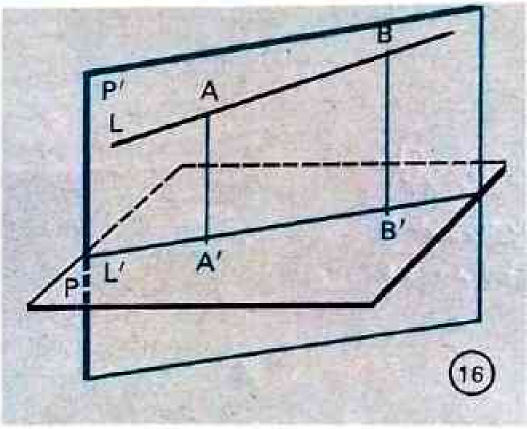
---

52 Considérons un plan affine P et une droite affine L non perpendiculaire au plan P.

Soient deux points distincts A et B de L.

Désignons respectivement par L′, par A′ et par B′ les projections orthogonales sur P de la droite L, du point A et du point B.

Soit P′ le plan qui contient L et L′ et qui est perpendiculaire à P. Les droites qui passent respectivement par A et par B et sont perpendiculaires à P sont contenues dans le plan P′.



16

Les points A′ et B′ appartiennent au plan P et au plan P′ ; donc ils appartiennent à l'intersection $P \cap P'$, c'est-à-dire à la droite L′ (fig. 16).

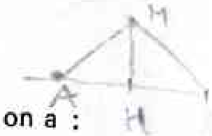
La droite affine L′, projection orthogonale sur P de la droite affine L non perpendiculaire à P est donc déterminée par les projections orthogonales A′ et B′ de deux points distincts A et B de L.

EXERCICES

Plan affine euclidien.

1 Soient deux points distincts A et B de P. Montrer qu'un point M de P appartient au segment [A, B] si et seulement si l'on a :
$d(M, A) + d(M, B) = d(A, B)$.

2 Soient deux points distincts A et B de P et soit D la droite qu'ils déterminent. On considère un point M de P et la projection orthogonale H de M sur D.



1° Montrer l'équivalence logique :
$\big(d(M, A) = d(M, B)\big) \Longleftrightarrow \big(d(H, A) = d(H, B)\big)$.
2° En déduire l'ensemble D' des points M de P pour lesquels on a : $d(M, A) = d(M, B)$.
D' est appelée médiatrice du segment [A, B].
3° Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. Les coordonnées des points A et B dans ce repère sont respectivement $(2, -3)$ et $(4, 1)$. Donner une équation de D'.
4° Soit C un point qui n'appartient pas à D. Montrer qu'il existe un point unique M du plan P tel que : $d(M, A) = d(M, B) = d(M, C)$.
M est centre du cercle circonscrit à ABC

3 Soient A et B deux points distincts et O le milieu du segment [A, B].
1° Montrer que, pour tout point M de P, on a l'égalité :
$\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OM}$.
2° On désigne par H la projection orthogonale d'un point M de P sur la droite déterminée par les points A et B. Démontrer l'égalité : (on introduit
$\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH}$. $= 2\,\overline{AB}\,\overline{OH}$
En déduire l'ensemble des points M de P pour lesquels on a :
$\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = k$, où k est un réel donné.

Il s'agit des mesures Algébriques

4 Soient A, B et C trois points non alignés de P. On désigne par D_1, D_2, D_3 les droites déterminées respectivement par les points B et C, par les points C et A et par les points A et B.
1° On considère l'application f :
$P \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \leadsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$.
Montrer que, pour tout couple (M, N) de points de P, on a : $f(M) = f(N)$.
En déduire : $\forall M \in P$, $f(M) = 0$. ← relation d'Euler

relation d'Euler

2° On désigne par D'_1 la droite orthogonale à D_1 et qui passe par A, par D'_2 la droite orthogonale à D_2 et qui passe par B, par D'_3 la droite orthogonale à D_3 et qui passe par C.
Montrer que D'_1 et D'_2 sont sécantes. On pose : $\{H\} = D'_1 \cap D'_2$.
De l'égalité : $f(H) = 0$, déduire que H appartient à D'_3.
3° Démontrer les égalités :
$\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{HB}\|^2 - \|\overrightarrow{HC}\|^2$ et
$\|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{HA}\|^2 - \|\overrightarrow{HC}\|^2$.

5 Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de P sécantes deux à deux.
On pose : $\{A\} = D_2 \cap D_3$, $\{B\} = D_3 \cap D_1$, $\{C\} = D_1 \cap D_2$. On désigne par A_1 la projection orthogonale de A sur D_1.
1° Démontrer les équivalences logiques :
$(D_2 \perp D_3) \Longleftrightarrow \big(\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA_1}\big)$ et
$(D_2 \perp D_3) \Longleftrightarrow \big(\|\overrightarrow{AA_1}\|^2 = -\,\overrightarrow{A_1B}.\overrightarrow{A_1C}\big)$.

2° On suppose que D_2 et D_3 sont perpendiculaires. Démontrer les égalités :

$$\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| . \|\overrightarrow{AA_1}\| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\overrightarrow{AA_1}\|^2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} + \frac{1}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}.$$

6 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. On considère la droite D d'équation : $3x + 4y + 2 = 0$ et le point A de coordonnées (1, 1).
1° Déterminer la distance du point A à la droite D.
2° On désigne par A′ le symétrique de A par rapport à D. Déterminer les coordonnées du point A′.

7 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. On considère le point A de coordonnées (1, 1), le vecteur $\vec{U}$ de coordonnées (3, 4) et la droite D de vecteur directeur $\vec{U}$ qui passe par A. Soit M le point de coordonnées (2, − 3).
1° Déterminer la distance du point M à la droite D.
2° Calculer les coordonnées du point M′ symétrique de M par rapport à D.

8 On considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives : $3x - y = 0$ et $x - 3y = 0$. Déterminer l'ensemble E des points M de P pour lesquels la distance de M à D_1 est égale à la distance de M à D_2. Montrer que E est la réunion de deux droites. (Bissectrices interieur et exterieur de $(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2})$)

9 Même exercice que le précédent dans le cas où les droites D_1 et D_2 ont pour équations respectives : $2x - y - 1 = 0$ et $3x + y - 4 = 0$.

10 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P, A et B deux points de coordonnées respectives (1, 2) et (5, − 1). $D : ax+by+c=0$, $B \in D \Rightarrow 5a-b+c=0$
1° Soit d un réel positif. Pour quelles valeurs de d existe-t-il une droite D qui possède les propriétés : D passe par B et la distance de A à D est égale à d. Montrer qu'il existe alors deux telles droites D_1 et D_2. $d(A, D) = d$
2° Écrire les équations de D_1 et de D_2 dans le cas où d est égal à $\sqrt{5}$.

11 Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine P associé à un plan vectoriel euclidien orienté.
1° On désigne par $\widehat{A}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Démontrer l'égalité :
$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\| \operatorname{Cos} \widehat{A}$.
2° On pose : $\|\overrightarrow{AB}\| = a$, $\|\overrightarrow{AC}\| = b$. On désigne par O le milieu du segment [B, C].
a) Calculer $d(A, O)$. — Cf théorème de la médiane
b) Calculer le Cosinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$.

Espace affine euclidien de dimension 3.

12 On considère une droite D de vecteur directeur $\vec{U}(1, 1, 1)$ et un point A de coordonnées (2, − 1, 3). Déterminer une équation du plan P orthogonal à D et qui passe par A. $\vec{u}$ vecteur normal et $A \in P$

◆ Même exercice que le précédent dans chacun des cas suivants (nos 13 à 16) :

13 $\vec{U}$: (1, 2, 3), A : (1, 0, 2). **14** $\vec{U}$: (4, 1, 2), A : (3, 1, 1).

15 $\vec{U}$: (6, 2, 5), A : (1, 4, 1). **16** $\vec{U}$: (3, 2, 3), A : (2, 4, 2).

EXERCICES

17 On considère le plan P d'équation : $2x + y - 3z - 1 = 0$ et le point A de coordonnées (1, 1, 1). Donner une représentation paramétrique de la droite D orthogonale à P et qui passe par A. $\vec{n}(2,1,-3)$ dirige !

18 Même exercice que le précédent pour un plan P d'équation : $5x + 2y - 4z + 2 = 0$ et pour un point A de coordonnées (2, − 5, 1).

19 On considère le plan P d'équation : $2x + y + 2 = 0$ et le point A de coordonnées (− 1, 1, 1). Posons $\vec{n} = (2,1,0)$

1° Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale du point A sur le plan P. $\vec{AH} = \lambda\vec{n}$ et $H \in \mathcal{P}$

2° Déterminer la distance du point A au plan P.

3° Déterminer les coordonnées du symétrique du point A par rapport au plan P.

◆ Même exercice que le précédent dans chacun des cas suivants (nos 20 et 21) :

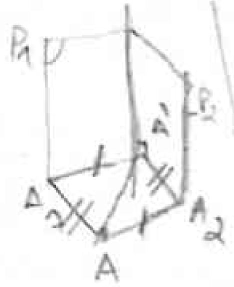
20 P : $x - y + z - 4 = 0$, A : (2, − 1, 4).

21 P : $3x - 2y + 2z - 3 = 0$, A : (− 2, 0, 0).

22 P : $x + y - z + 1 = 0$ A : (1, 1, 1).

23 P : $2x - y + z - 2 = 0$ A : (1, − 1, 0).

24 On considère deux plans perpendiculaires P_1 et P_2 et un point A qui n'appartient ni à P_1 ni à P_2. On désigne par D la droite $P_1 \cap P_2$, par A_1, A_2 et A′ les projections orthogonales respectives du point A sur P_1, sur P_2 et sur D.



1° Montrer que les points A, A_1, A_2 et A′ sont coplanaires.

2° Comparer les réels : $d(A, A_1)$ et $d(A_2, A')$, $d(A, A_2)$ et $d(A_1, A')$. En déduire que le carré de la distance de A à D est égale à la somme du carré de la distance de A à P et du carré de la distance de A à P_2. ce qui découle du théorème de PYTHAGORE -

◆ Dans les exercices nos 25 et 26, on utilisera le résultat démontré à l'exercice no 24.

25 On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :
$2x + y - 2z + 3 = 0$ et $x - 4y - z = 0$.

1° Vérifier que P_1 et P_2 sont orthogonaux.

2° Soit A le point de coordonnées (1, 1, 1). Déterminer la distance du point A à la droite $D = P_1 \cap P_2$.

26 On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives :
$x + y + z = 0$ et $2x - y + 2z - 2 = 0$.

1° Vérifier que ces plans sont sécants. On désigne par D la droite $P_1 \cap P_2$.

2° Soient m un réel et P_m le plan d'équation :
$x(1 + 2m) + y(1 - m) + z(1 + 2m) - 2m = 0$.
Montrer que D est incluse dans P_m.

3° Déterminer m pour que les plans P_1 et P_m soient perpendiculaires.

4° Soit A le point de coordonnées (1, 2, 1). Déterminer la distance de A à D.

27 On considère le plan P d'équation : $2x - y + 3z - 7 = 0$ et la droite D déterminée par le point $A(-1, 1, 1)$ et le vecteur $\vec{U}(1, -2, 1)$.
1° Vérifier que D n'est pas perpendiculaire à P. Déterminer une représentation paramétrique du plan Q qui contient D et qui est perpendiculaire à P.
2° En déduire une représentation paramétrique de la projection orthogonale de D sur P.

28 On considère un plan P dont la direction $\vec{P}$ est engendrée par les vecteurs $\vec{U}(1, -2, 1)$ et $\vec{V}(1, -2, 3)$, et une droite D de vecteur directeur $\vec{X}(1, 3, -2)$.
1° Vérifier que D n'est pas perpendiculaire à P.
2° On désigne par D′ la projection orthogonale de D sur P. Donner les coordonnées d'un vecteur unitaire directeur de D′.

29 On considère un plan P, et une droite D non perpendiculaire à P.
1° Montrer que, si D est parallèle à P, sa projection orthogonale Δ sur P est une droite parallèle à D.
2° Soit D′ une droite parallèle à D. Montrer que les projections orthogonales de D et de D′ sur le plan P sont parallèles.
3° Soit D″ une droite non perpendiculaire à P qui coupe D en un point A. On désigne respectivement par Δ'' et par a les projections orthogonales de D″ et de A sur le plan P. Caractériser l'intersection des droites Δ et Δ''.

30 On considère deux plans perpendiculaires P_1 et P_2 et on désigne par T la droite $P_1 \cap P_2$.
1° Soit Δ_1 une droite de P_1 et Δ_2 une droite de P_2. Dans quel cas existe-t-il une droite unique D telle que ses projections orthogonales sur P_1 et P_2 soient respectivement Δ_1 et Δ_2 ?
2° On suppose que Δ_1 et Δ_2 ne sont pas perpendiculaires à T.
Soit Δ'_1 une droite de P_1 parallèle à Δ_1 et Δ'_2 une droite de P_2 parallèle à Δ_2. On désigne par D′ la droite dont les projections orthogonales sur P_1 et P_2 sont respectivement Δ'_1 et Δ'_2. Que peut-on dire des droites D et D′ ?

31 Soient P un plan, D une droite de P, et A un point n'appartenant pas à P. On désigne respectivement par H et par H′, les projections orthogonales de A sur P et de A sur D. Montrer que H′ est la projection orthogonale de H sur D.

32 Soient D et D′ deux droites non coplanaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ et A un point de D. On considère le plan P déterminé par le point A et les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ et on désigne par Δ' la projection orthogonale de D′ sur P.
1° Montrer que le plan P ne dépend pas du choix du point A sur D. Que peut-on dire des droites D′ et Δ' ?
2° Les droites D et Δ' sont sécantes en un point H. On désigne par L la droite perpendiculaire en H au plan P. Montrer que L est perpendiculaire à D et à D′.
3° On pose : $\{H'\} = L \cap D'$. Montrer que, pour tout point M′ de D′, la distance de M′ au plan P est égale à $d(H, H')$.

EXERCICES

4° Montrer que, pour tout point M de D et pour tout point M′ de D′, on a l'inégalité : $d(M, M') \geqslant d(H, H')$.
Le réel positif $d(H, H')$ est appelé plus courte distance des droites D et D′.
5° Application : D est la droite dont une représentation paramétrique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé est : $x = -1 + 3\lambda$, $y = 1 - 4\lambda$, $z = \lambda$
et D′ est la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{k}$. Déterminer la plus courte distance des droites D et D′.

34. Cercles et sphères

Cercle dans un plan affine euclidien.

Dans toute cette partie (n^{os} 1 à 20), on considère un plan affine euclidien P associé à un plan vectoriel euclidien $\vec{P}$.

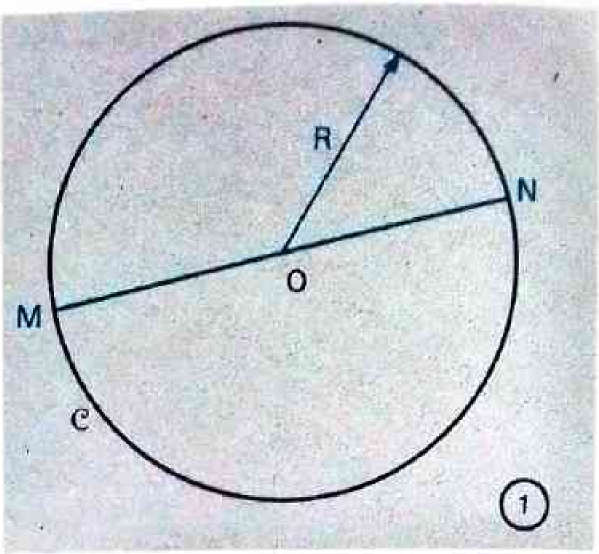
Cercle.

1 **DÉFINITION : Soient** O **un point de** P **et** R **un réel positif ou nul. On appelle cercle de centre** O **et de rayon** R **l'ensemble des points du plan affine** P **dont la distance à** O **est égale à** R.

Nous notons ce cercle $\mathcal{C}(O, R)$ ou plus simplement $\mathcal{C}$.
Par définition, nous avons donc les équivalences logiques :
$(M \in \mathcal{C}(O, R)) \Longleftrightarrow (d(O, M) = R)$, et : $(M \in \mathcal{C}(O, R)) \Longleftrightarrow (\|\overrightarrow{OM}\| = R)$.

2 Remarque : Si R est nul, nous avons l'égalité : $\mathcal{C}(O, R) = \{O\}$.
Dans ce cas, on dit que $\mathcal{C}$ est un cercle-point.

Centre de symétrie ; diamètre.



3 Soit M un point du cercle $\mathcal{C}(O, R)$.
Nous avons : $\|\overrightarrow{OM}\| = R$.
Considérons le point N de P défini par :
$\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$ (fig. 1).
Nous avons :
$\|\overrightarrow{ON}\| = \|-\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = R$.
Le point N appartient donc à $\mathcal{C}(O, R)$.
Il en résulte que le centre O du cercle $\mathcal{C}(O, R)$ est un **centre de symétrie** pour ce cercle.

---

4 **DÉFINITION : On dit que deux points** M **et** N **d'un cercle** $\mathcal{C}(O, R)$ **sont diamétralement opposés si et seulement si l'on a :** $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$.

On dit aussi que le segment [M, N] est un **diamètre** du cercle $\mathcal{C}(O, R)$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{MO}$.
Nous en déduisons : $\|\overrightarrow{MN}\| = 2\|\overrightarrow{MO}\| = 2R$.

5 Considérons deux points A et B du plan P et cherchons s'il existe un cercle $\mathcal{C}$ dont un diamètre soit le segment [A, B].
Si ce cercle existe, son rayon R est nécessairement égal à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$ et son centre est le milieu O du segment [A, B].
Réciproquement, le cercle $\mathcal{C}(O, R)$ admet le segment [A, B] pour diamètre.
Il existe donc un cercle $\mathcal{C}$ unique dont un diamètre est [A, B] ; on dit que $\mathcal{C}$ est le **cercle de diamètre** [A, B].

Propriété caractéristique des points d'un cercle.

---

6 **THÉORÈME : Soient** A **et** B **deux points du plan affine euclidien** P, **et** $\mathcal{C}$ **le cercle de diamètre** [A, B]. **On a l'équivalence logique :**
$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0)$.

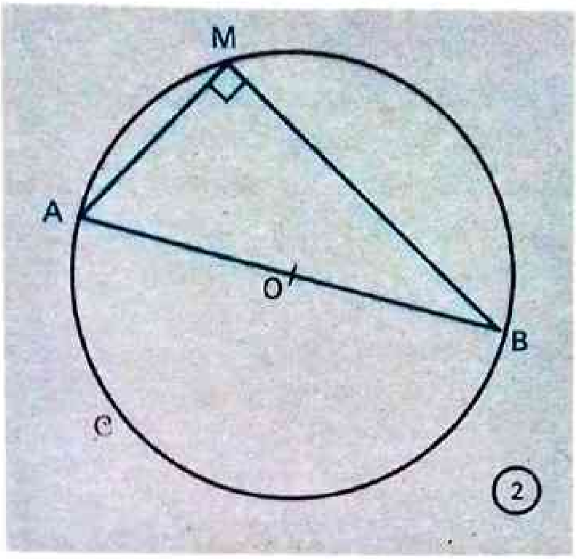
En effet, désignons par O le centre du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [A, B] ; le point O est le milieu du segment [A, B] ; nous avons donc : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ (fig. 2).
Pour tout point M du plan affine euclidien P, nous avons l'égalité :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$,
c'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$,
ou encore : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2$.
Un point M du plan P appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'on a : $\overrightarrow{MO}^2 = \overrightarrow{OA}^2$

Nous concluons :

$(M \in \mathcal{C}) \iff (\|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = 0)$,

c'est-à-dire :

$(M \in \mathcal{C}) \iff (\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0)$.



7 De l'équivalence logique précédente, nous déduisons :

$(M \in \mathcal{C}) \iff (\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB})$.

Intersection d'un cercle et d'une droite affine du plan P.

8 Considérons, dans le plan affine euclidien P, une droite affine D et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R. Désignons par H la projection orthogonale de O sur D, et par a la distance $d(O, H)$ du point O à la droite D.

Nous avons l'équivalence logique :

$(M \in \mathcal{C} \cap D) \iff (M \in D \text{ et } \|\overrightarrow{OM}\|^2 = R^2)$.

Pour tout point M de D, nous avons :

$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2$.

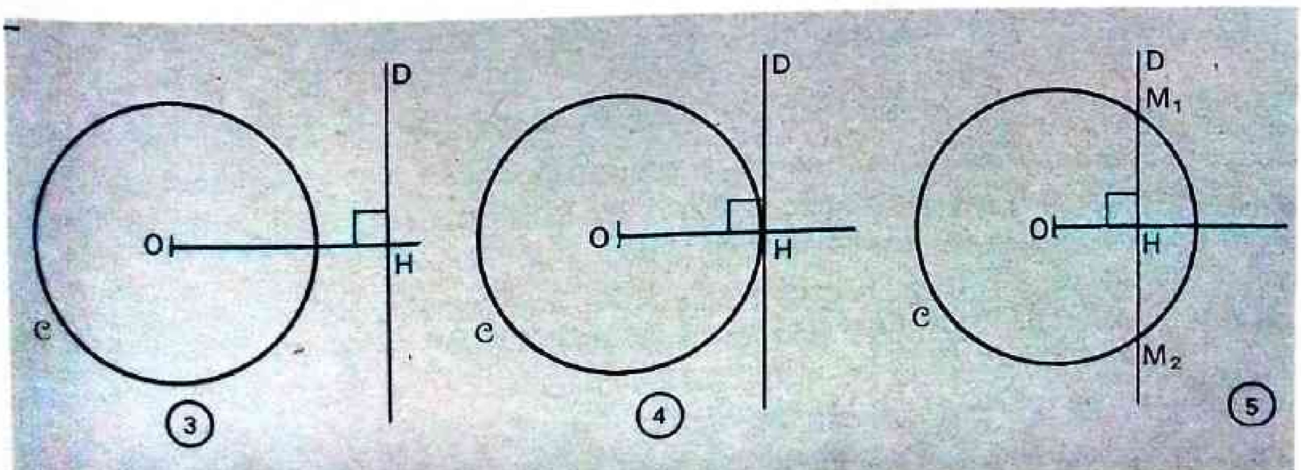
Nous en déduisons : $(M \in \mathcal{C} \cap D) \iff (M \in D \text{ et } \|\overrightarrow{HM}\|^2 = R^2 - a^2)$.

Comparons les réels R et a ; trois cas sont possibles :

9 <u>Premier cas :</u> $a > R$.

Nous avons alors : $R^2 - a^2 < 0$; l'ensemble des points M de D pour lesquels $\|\overrightarrow{HM}\|^2$ est égal à $R^2 - a^2$ est l'ensemble vide (fig. 3).

Si la distance du centre O du cercle $\mathcal{C}$ à la droite D est supérieure au rayon R, l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ est l'ensemble vide.



10 **Deuxième cas :** $a = R$.
Nous avons alors : $R^2 - a^2 = 0$. Nous avons l'équivalence logique :
$(\| \overrightarrow{HM} \|^2 = 0) \iff (M = H)$.
Nous en déduisons : $(M \in \mathcal{C} \cap D) \iff (M = H)$ (fig. 4).
Si la distance du centre O du cercle $\mathcal{C}$ à la doite D est égale au rayon R, l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ est le singleton $\{H\}$.
On dit alors que la droite D est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point H.

11 **Remarque :** Il résulte de la définition qu'en tout point M du cercle $\mathcal{C}$, il existe une tangente au cercle ; c'est la droite qui passe par M et qui est perpendiculaire à la droite déterminée par les points O et M.

12 **Troisième cas :** $a < R$.
Nous avons alors : $R^2 - a^2 > 0$. Il existe alors deux points M_1 et M_2 de D pour lesquels on a : $\| \overrightarrow{HM_1} \|^2 = \| \overrightarrow{HM_2} \|^2 = R^2 - a^2$ (fig. 5).
Si la distance du centre O du cercle $\mathcal{C}$ à la droite D est inférieure au rayon R, l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ est une paire $\{M_1, M_2\}$.
On dit alors que la droite D et le cercle $\mathcal{C}$ sont sécants.

Équation cartésienne d'un cercle.

13 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien P.
Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R. (fig. 6).
Désignons par (a, b) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout point M du plan P, de coordonnées (x, y), nous avons :
$\| \overrightarrow{AM} \|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$.
Nous en déduisons l'équivalence logique :
$(M \in \mathcal{C}) \iff ((x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2)$.
Nous avons : $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2$.
Posons : $c = a^2 + b^2 - R^2$.
Nous en déduisons qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où a, b, c sont des réels.
Remarquons que l'on a l'inégalité : $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$.

14 Réciproquement, soient trois réels a, b, c ; cherchons l'ensemble E des points M de P dont les coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'égalité : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Pour tout couple (x, y) de réels, nous avons :
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c - (a^2 + b^2)$.
Soit A le point de coordonnées (a, b) ; pour tout point M de coordonnées (x, y), nous avons : $\| \overrightarrow{AM} \|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$.
Nous avons donc l'équivalence logique :
$(M \in E) \iff (\| \overrightarrow{AM} \|^2 = a^2 + b^2 - c)$.

Distinguons deux cas :

Premier cas : $a^2 + b^2 - c < 0$.

Pour tout point M de P, nous avons : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 \geqslant 0$. Il n'existe donc aucun point M pour lequel on ait l'égalité : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = a^2 + b^2 - c$.

Nous en déduisons : $E = \varnothing$.

Deuxième cas : $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$.

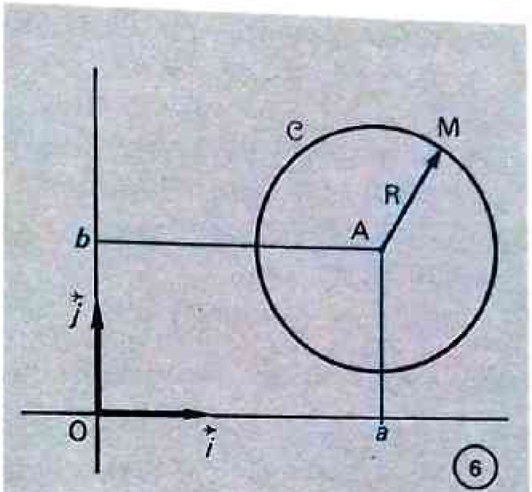
Désignons par R le réel positif ou nul défini par :

$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Nous avons alors l'équivalence logique :

$(M \in E) \iff (\|\overrightarrow{AM}\| = R)$.

L'ensemble E est donc le cercle de centre A de coordonnées (a, b) et de rayon R.



Exemples.

15 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien P.

1. Recherchons une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R.

Nous avons :

$(M \in \mathcal{C}) \iff (\|\overrightarrow{OM}\| = R)$.

Il en résulte qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est :

$x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

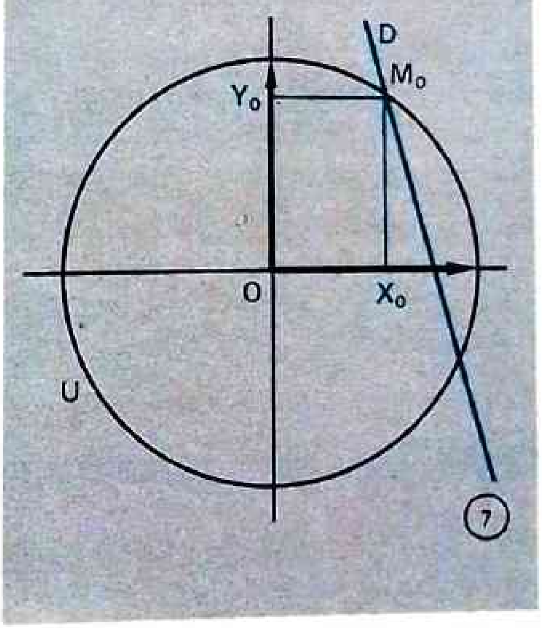
2. Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Recherchons une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [A, B].

Nous avons :

$(M \in \mathcal{C}) \iff (\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0)$.

Il en résulte qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est :

$(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$.



Application à l'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

16 Soient a, b, c trois réels ; supposons que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Nous avons appris au n° 21, p. 256, à résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$:

$a \cos x + b \sin x + c = 0$. (1)

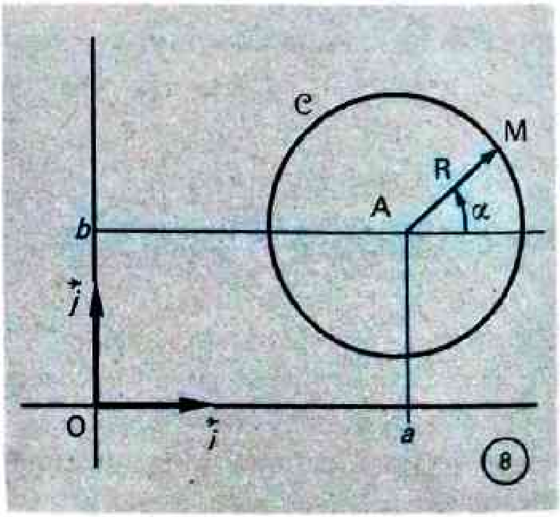
Nous nous proposons ici de donner une méthode de construction des images des solutions de l'équation (1) sur un cercle trigonométrique.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif et U le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, d'origine A (fig. 7).
Si x_0 est une solution de l'équation (1), son image M_0 sur le cercle U est définie par :
$\overrightarrow{OM_0} = \cos x_0 \vec{i} + \sin x_0 \vec{j}$.
Posons : $X_0 = \cos x_0$ et $Y_0 = \sin x_0$.
Les coordonnées (X_0, Y_0) du point M_0 vérifient donc :
$X_0^2 + Y_0^2 = 1$ et $aX_0 + bY_0 + c = 0$. (2)
$X^2 + Y^2 = 1$ est une équation du cercle U ; et, l'un des réels a et b étant non nul, $aX + bY + c = 0$ est l'équation d'une droite D.
Des égalités (2), nous déduisons : $M_0 \in U \cap D$.
Réciproquement, si M_1 est un point de l'intersection $U \cap D$, ses coordonnées (X_1, Y_1) vérifient :
$X_1^2 + Y_1^2 = 1$ et $aX_1 + bY_1 + c = 0$.
Soit x_1 une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}})$; nous avons :
$\overrightarrow{OM_1} = \cos x_1 \vec{i} + \sin x_1 \vec{j}$, c'est-à-dire : $X_1 = \cos x_1$ et $Y_1 = \sin x_1$.
Nous en déduisons : $a \cos x_1 + b \sin x_1 + c = 0$.
M_1 est donc l'image sur U d'un réel x_1 solution de l'équation (1).
En résumé, l'ensemble des images des solutions de l'équation :
$a \cos x + b \sin x + c = 0$, sur le cercle trigonométrique U est l'intersection du cercle U et de la droite D d'équation : $aX + bY + c = 0$.

17 **Remarque :** Il résulte de la démonstration précédente que l'équation (1) admet des solutions si et seulement si l'intersection $U \cap D$ est non vide, c'est-à-dire si et seulement si la distance de O à D est inférieure ou égale à 1.
Soit H la projection orthogonale de O sur D; nous avons (n° 20, p. 209)
$$d(O, H) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
L'équation (1) admet donc des solutions si et seulement si : $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.
Nous retrouvons ainsi la condition du n° 21, p. 156.

Représentation paramétrique d'un cercle.

18 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P.
Considérons un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon non nul R (fig. 8).
Désignons par (a, b) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit M un point de $\mathcal{C}$ de coordonnées (x, y).
Nous avons : $\|\overrightarrow{AM}\| = R$.
Posons : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{R}$.
Le vecteur $\vec{u}$ est unitaire.



8

Désignons par α une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$; nous avons donc : $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$.

Nous en déduisons : $\overrightarrow{AM} = R\cos\alpha\,\vec{i} + R\sin\alpha\,\vec{j}$.

Si un point M de coordonnées (x, y) appartient au cercle $\mathcal{C}$, de centre A et de rayon R, il existe donc un réel α pour lequel on a :

$x - a = R\cos\alpha$ et $y - b = R\sin\alpha$.

19 Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x, y) pour lequel il existe un réel α tel que l'on ait :

$x - a = R\cos\alpha$ et $y - b = R\sin\alpha$.

Nous en déduisons : $\overrightarrow{AM} = R\cos\alpha\,\vec{i} + R\sin\alpha\,\vec{j}$.

Nous avons alors : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha = R^2$.

Le point M appartient donc à $\mathcal{C}$.

20 En résumé, nous avons donc démontré l'équivalence logique :

$$\boxed{(M \in \mathcal{C}(A, R)) \iff (\exists\alpha \in \mathbb{R},\ x - a = R\cos\alpha \text{ et } y - b = R\sin\alpha)}$$

Sphère dans un espace affine euclidien de dimension 3.

Dans toute cette partie (nos 21 à 35), on considère un espace affine euclidien A_3 associé à un espace vectoriel euclidien E_3 de dimension 3.

Sphère.

21 **DÉFINITION : Soient O un point de A_3 et R un réel positif ou nul. On appelle sphère de centre O et de rayon R l'ensemble des points de A_3 dont la distance à O est égale à R.**

Nous notons cette sphère $\mathcal{S}(O, R)$, ou plus simplement $\mathcal{S}$.

Par définition, nous avons les équivalences logiques :

$(M \in \mathcal{S}(O, R)) \iff (d(O, M) = R)$, et :

$(M \in \mathcal{S}(O, R)) \iff (\|\overrightarrow{OM}\| = R)$.

22 Remarque : Si R est nul, nous avons l'égalité : $\mathcal{S}(O, R) = \{O\}$.
Dans ce cas on dit que $\mathcal{S}$ est une sphère-point.

Centre de symétrie; diamètre.

23 Soit M un point de la sphère $\mathcal{S}(O, R)$. Nous avons : $\| \overrightarrow{OM} \| = R$.
Considérons le point N défini par : $\overrightarrow{ON} = - \overrightarrow{OM}$.
Nous avons : $\| \overrightarrow{ON} \| = \| - \overrightarrow{OM} \| = \| \overrightarrow{OM} \| = R$.
Le point N appartient donc à $\mathcal{S}(O, R)$.
Il en résulte que le centre O de la sphère $\mathcal{S}(O, R)$ est un centre de symétrie pour cette sphère.

24 **DÉFINITION : On dit que deux points** M **et** N **d'une sphère** $\mathcal{S}(O, R)$ **sont diamétralement opposés si et seulement si l'on a :** $\overrightarrow{OM} = - \overrightarrow{ON}$.

On dit aussi que le segment $[M, N]$ est un diamètre de la sphère $\mathcal{S}(O, R)$.
Nous avons alors : $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MO}$; nous en déduisons : $\| \overrightarrow{MN} \| = 2R$.

25 Considérons deux points A et B de l'espace A_3 et cherchons s'il existe une sphère $\mathcal{S}$ dont un diamètre soit le segment $[A, B]$.
Si cette sphère existe, son rayon R est égal à $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \|$ et son centre est le milieu O du segment $[A, B]$.
Réciproquement, la sphère $\mathcal{S}(O, R)$ admet le segment $[A, B]$ pour diamètre.
Il existe donc une sphère $\mathcal{S}$ unique dont un diamètre est $[A, B]$; on dit que $\mathcal{S}$ est la sphère de diamètre $[A, B]$.

Propriété caractéristique des points d'une sphère.

26 **THÉORÈME : Soient** A **et** B **deux points de** A_3 **et** $\mathcal{S}$ **la sphère de diamètre** $[A, B]$. **On a l'équivalence logique :** $(M \in \mathcal{S}) \iff (\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 0)$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du n° 6, p. 226.

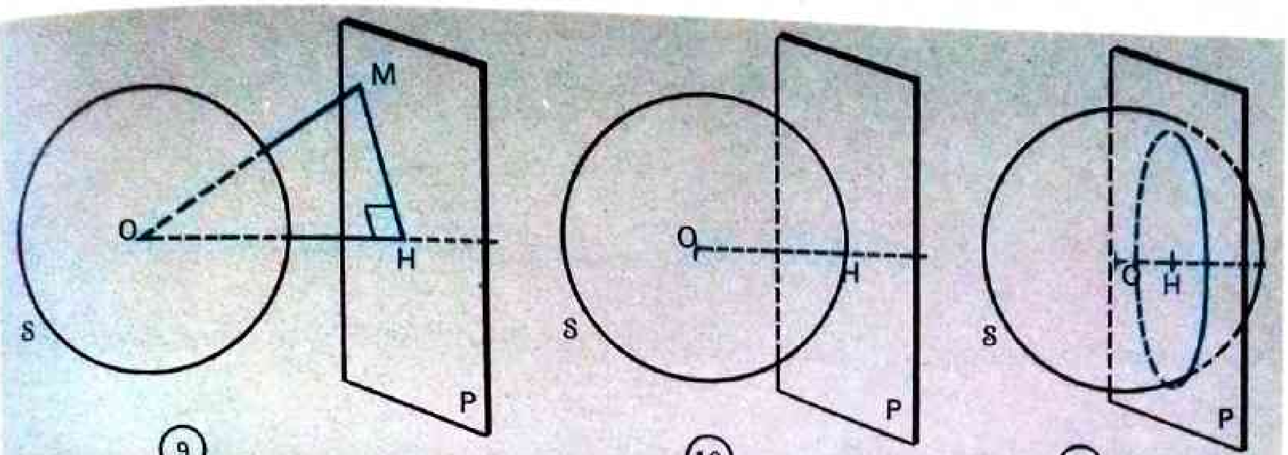
27 De l'équivalence précédente, nous déduisons : $(M \in \mathcal{S}) \iff (\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB})$.

Intersection d'une sphère et d'un plan.

28 Considérons un plan P et la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R. Désignons par M la projection orthogonale du point O sur le plan P, et par a la distance $d(O, H)$ du point O au plan P.

Nous avons l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{S} \cap P) \iff (M \in P \text{ et } \| \overrightarrow{OM} \|^2 = R^2)$.
Pour tout point M du plan P, les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux; nous avons donc : $\| \overrightarrow{OM} \|^2 = \| \overrightarrow{OH} \|^2 + \| \overrightarrow{HM} \|^2$.
Nous en déduisons : $(M \in \mathcal{S} \cap P) \iff (M \in P \text{ et } \| \overrightarrow{HM} \|^2 = R^2 - a^2)$.

Comparons les réels a et R ; trois cas sont possibles :



(9) (10) (11)

29 **Premier cas** : $a > R$.

Nous avons alors : $R^2 - a^2 < 0$; l'ensemble des points M de P pour lesquels $\|\overrightarrow{HM}\|^2$ est égal à $R^2 - a^2$ est l'ensemble vide (fig. 9).

Si la distance du centre O de la sphère $\mathcal{S}$ au plan P est supérieure au rayon R, l'intersection $\mathcal{S} \cap P$ est l'ensemble vide.

30 **Deuxième cas** : $a = R$.

Nous avons alors : $R^2 - a^2 = 0$ (fig. 10).

Nous avons l'équivalence logique : $(\|\overrightarrow{HM}\| = 0) \iff (M = H)$.

Nous en déduisons : $(M \in \mathcal{S} \cap P) \iff (M = H)$.

Si la distance du centre O de la sphère $\mathcal{S}$ au plan P est égale au rayon R, l'intersection $\mathcal{S} \cap P$ est le singleton $\{H\}$.

On dit alors que le plan P est tangent à la sphère $\mathcal{S}$ au point H.

31 **Remarque** : Il résulte de cette définition, qu'en tout point M de $\mathcal{S}$, il existe un plan P tangent à $\mathcal{S}$; c'est le plan qui passe par le point M et qui est perpendiculaire à la droite déterminée par les points O et M.

32 **Troisième cas** : $a < R$.

Nous avons alors : $R^2 - a^2 > 0$. Désignons par ρ le réel positif défini par : $\rho = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Nous avons l'équivalence logique :

$(M \in \mathcal{S} \cap P) \iff (M \in P \text{ et } \|\overrightarrow{HM}\| = \rho)$.

L'intersection $\mathcal{S} \cap P$ est donc le cercle, du plan P, de centre M et de rayon ρ (fig. 11).

Si la distance du centre O de la sphère $\mathcal{S}$ au plan P est inférieure au rayon R, l'intersection $\mathcal{S} \cap P$ est le cercle du plan P, de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - a^2}$.

On dit alors que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan P sont sécants.

Équation cartésienne d'une sphère.

33 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de A_3.

Considérons la sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R.

Désignons par (a, b, c) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tout point M de A_3, de coordonnées (x, y, z), nous avons :
$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.
Nous en déduisons l'équivalence logique :
$(M \in \mathcal{S}) \Longleftrightarrow \left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\right)$.
Nous avons :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$

Posons : $h = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.
Nous en déduisons qu'une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + h = 0$, où a, b, c, h sont des réels.

34 Réciproquement, soient quatre réels a, b, c, h ; cherchons l'ensemble E des points M de A_3, dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ vérifient l'égalité : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + h = 0$.
Pour tout triplet (x, y, z) de réels, nous avons :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + h = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + h - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Soit A le point de coordonnées (a, b, c) ; pour tout point M de coordonnées (x, y, z), nous avons : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.
Nous avons donc l'équivalence logique :
$(M \in E) \Longleftrightarrow \left(\|\overrightarrow{AM}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - h\right)$.
Distinguons deux cas :

Premier cas : $a^2 + b^2 + c^2 - h < 0$.
Pour tout point M de A_3, nous avons : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 \geqslant 0$. Il n'existe donc aucun point M pour lequel on a l'égalité : $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 - h$.
Nous en déduisons : $E = \varnothing$.

Deuxième cas : $a^2 + b^2 + c^2 - h \geqslant 0$.
Désignons par R le réel positif ou nul défini par :
$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - h}$.
Nous avons alors l'équivalence logique :
$(M \in E) \Longleftrightarrow \left(\|\overrightarrow{AM}\| = R\right)$.
L'ensemble E est donc la sphère de centre A de coordonnées (a, b, c) et de rayon R

Exemples.

35 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de A_3.
1. Recherchons une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R.
Nous avons : $(M \in \mathcal{S}) \Longleftrightarrow \left(\|\overrightarrow{OM}\| = R\right)$.
Il en résulte qu'une équation de la sphère $\mathcal{S}$ est :
$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

2. Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B).
Recherchons une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre [A, B].
Nous avons : $(M \in \mathcal{S}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0)$.
Il en résulte qu'une équation de la sphère $\mathcal{S}$ est :

$$(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) + (z_A - z)(z_B - z) = 0.$$

EXERCICES

Dans les exercices (nos 1 à 8), on considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Cercle.

◆ Écrire une équation du cercle de centre A (a, b) et de rayon R dans chacun des cas suivants :

1 $a = 3, \quad b = 0, \quad R = 2.$ **2** $a = -3, \quad b = 0, \quad R = 4.$

3 $a = 0, \quad b = 1, \quad R = 3.$ **4** $a = 0, \quad b = 2, \quad R = 1.$

5 $a = 1, \quad b = 2, \quad R = 4.$ **6** $a = -1, \quad b = 3, \quad R = 2.$

7 $a = -2, \quad b = -3, \quad R = 3.$ **8** $a = 1, \quad b = -3, \quad R = 5.$

◆ Déterminer le centre et le rayon des cercles qui ont pour équations :

9 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0.$ **10** $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0.$

11 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0.$ **12** $x^2 + y^2 - 3x + 3y + \frac{1}{2} = 0.$

13 $2x^2 + 2y^2 + 6x + 2y + 3 = 0.$

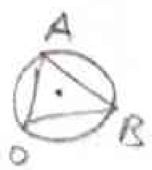
14 $3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

15 Soient deux points A et B de coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, 1)$.
Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [A, B].

◆ Même exercice que le précédent pour les points A et B suivants :

16 A : $(0, -3)$, B : $(1, -2)$. **17** A : $(1, 2)$, B : $(-5, 3)$.

18 A : $(2, 4)$, B : $(-2, 3)$. **19** A : $(-5, -1)$, B : $(-3, 4)$.



20 1° Montrer que par trois points non alignés il passe un cercle et un seul.
2° Écrire une équation du cercle qui passe par l'origine du repère $\mathcal{R}$ et par les points A et B de coordonnées respectives $(5, 1)$ et $(1, 3)$. Quels sont les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle ?

EXERCICES

◆ Même exercice que le précédent pour les points A et B suivants :

21 A : $(-1, 2)$, B : $(3, 5)$. **22** A : $(-1, -1)$, B : $(-2, 4)$.

23 A : $(-2, 1)$, B : $(4, -1)$. **24** A : $(3, -2)$, B : $(2, 5)$.

25 Soient A, B et C trois points de coordonnées respectives $(4, 1)$, $(-2, 3)$ et $(-3, -3)$.
1° Écrire une équation du cercle qui passe par ces trois points.
2° Quels sont les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle ?

◆ Même exercice que le précédent pour les points A, B, C suivants :

26 A : $(8, 0)$, B : $(-1, 2)$, C : $(6, -5)$.

27 A : $(3, 2)$, B : $(1, -3)$, C : $(7, -1)$.

28 A : $(0, 1)$, B : $(-2, -6)$, C : $(5, -3)$.

29 A : $(-1, 2)$, B : $(5, -1)$, C : $(6, 4)$.

30 Soient A et B deux points de P, et O le milieu du segment [A, B].
1° Montrer que pour tout point M de P, on a l'égalité :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 2\,\|\overrightarrow{MO}\|^2 + \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2}{2}.$$ théorème de la médiane

2° Soit k un réel. Déterminer l'ensemble E des points M de P pour lesquels on a : $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = k^2$.
3° Quel est l'ensemble E dans le cas suivant :
A : $(1, -2)$, B : $(2, 1)$, $k = 3$?

31 On considère le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D d'équations respectives :
$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$, D : $x + y - 3 = 0$.
1° Vérifier que D et $\mathcal{C}$ sont sécants. $d(\Omega, D) < r$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, r)$
2° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

◆ Même exercice que le précédent pour les cercles $\mathcal{C}$ et les droites D suivants :

32 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0$, D : $3x + 4y - 17 = 0$.

33 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 7y + 7 = 0$, D : $x + 2y - 3 = 0$.

34 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$, D : $x + 2y - 6 = 0$.

35 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 12y + 17 = 0$, D : $x - 3y + 9 = 0$.

36 On considère le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D d'équations respectives :
$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$, D : $x - 3y + 2 = 0$.
1° Vérifier que D et $\mathcal{C}$ sont tangents. $d(\Omega, D) = r$
2° Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

◆ Même exercice que le précédent pour les cercles $\mathcal{C}$ et les droites D suivants :

37 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0,$ $\quad$ D : $y + 2x - 4 = 0.$

38 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0,$ $\quad$ D : $3y + 2x - 1 = 0.$

39 On considère le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D d'équations respectives :
$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0,$ $\quad$ D : $2x - 3y - 7 = 0.$
1° Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite D.
2° Écrire les équations respectives des tangentes en A et en B au cercle $\mathcal{C}$.

◆ Même exercice que le précédent pour les cercles $\mathcal{C}$ et les droites D suivants (nos 40 à 42) :

40 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0,$ $\quad$ D : $x + y - 5 = 0.$

41 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 7x + y = 0,$ $\quad$ D : $4x + 3y + 3 = 0.$

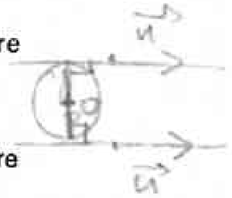
42 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 37 = 0,$ $\quad$ D : $x - 3y + 11 = 0.$

43 On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$ et le point A (0, 5). $A \notin \mathcal{C}$
1° Montrer qu'il existe deux droites D et D′ qui passent par A et qui sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$.
2° Calculer les coordonnées du point commun à D et à $\mathcal{C}$ et les coordonnées du point commun à D′ et à $\mathcal{C}$.

44 Même exercice que le précédent pour le point A (3, 0) et le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 + 14x - 4y + 1 = 0.$

Cf fin du livre

45 Soit le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0.$ Écrire les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ de vecteur directeur $\vec{U}\,(1, -1)$.



$D : x + y - x_0 - y_0 = 0$ où $(x_0, y_0) \in \mathcal{C} \cap D$, $d(\Omega, (x_0,y_0)) = R$

46 Soit le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$ Écrire les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ de vecteur directeur $\vec{U}\,(1, 1)$.

47 On considère un cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et un point A (x_0, y_0) de ce cercle. Montrer qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A est : $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$

obtenu par dédouble. de l'équation

CNRS & Olympe

48 Soit m un réel. On considère la droite D_m d'équation :
$(4m^2 - 9)\,x + 12my - 4(4m^2 + 9) = 0.$
Montrer que, pour tout réel m, D_m est tangente à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

49 On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre A (a, b) et de rayon R et une droite D d'équation : $ux + vy + w = 0.$
Montrer que D est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si :
$R^2(u^2 + v^2) - (ua + vb + w)^2 = 0.$

$d(A, D) = \dfrac{|ua + vb + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = R$

EXERCICES

50 On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O (a, b) et de rayon R et un point M. On pose : $d = d(\mathrm{O}, \mathrm{M})$. Soit D une droite qui passe par M et qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On désigne par A′ le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point A.

1° Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA'}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$.

2° En déduire : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = d^2 - \mathrm{R}^2$.

OLYMPE

51 On considère le cercle $\mathcal{C}$ et la droite D d'équations respectives :
$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 8y - 10 = 0$, D : $x + y - 2 = 0$.
1° Soit m un réel. Montrer que, pour tout réel m, l'ensemble des points M tels que : $(x+\frac{m}{2})^2+(y+\frac{m}{2}+4)^2 = \frac{2m^2+24m+14}{4} > 0$
$(x^2 + y^2 + 8y - 10) + m(x + y - 2) = 0$ est un cercle $\mathcal{C}_m$.
Quel est l'ensemble des centres ω_m des cercles $\mathcal{C}_m$? $\omega_m = (\frac{m}{2} ; \frac{m}{2}+4)$
2° Montrer que, pour tout réel m, le cercle $\mathcal{C}_m$ passe par deux points A et B dont les coordonnées sont indépendantes de m.

Sphère. Dans les exercices suivants (n^{os} 52 à 67) on considère un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

♦ Écrire une équation de la sphère de centre A (a, b, c) et de rayon R dans chacun des cas suivants :

52 $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $\mathrm{R} = 1$.

53 $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$, $\mathrm{R} = 2$.

54 $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, $\mathrm{R} = 3$.

55 $a = 5$, $b = -2$, $c = -3$, $\mathrm{R} = 2$.

♦ Déterminer le centre et le rayon des sphères qui ont pour équations :

56 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

57 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 2 = 0$.

58 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12x - 4z - 3 = 0$.

59 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

60 Soient deux points A et B de coordonnées respectives $(3, 1, 0)$ et $(1, -2, 0)$. Écrire une équation de la sphère de diamètre [A, B].

♦ Même exercice que le précédent pour les points A et B suivants (n^{os} 61 et 62) :

61 A : $(-1, 1, -1)$, B : $(3, 2, -1)$.

62 A : $(5, -3, 1)$, B : $(0, 2, -4)$.

63 On considère la sphère S d'équation :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 9 = 0$
et la droite D déterminée par le point A $(2, 2, 2)$ et le vecteur $\vec{\mathrm{U}}$ $(1, 1, 1)$. Déterminer l'intersection de D et de S.

64 Même exercice que le précédent dans le cas suivant :
S : $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 2z - 3 = 0$, A : $(9, 0, -1)$,
$\vec{U}$: $(-7, 1, 2)$.

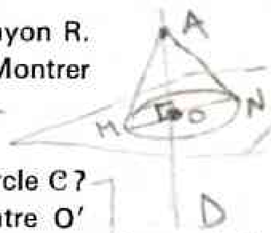
65 On considère la sphère S d'équation :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 6z + 10 = 0$
et le plan P d'équation : $2x + y + z - 2 = 0$.
1° Montrer que S et P sont sécants.
2° Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} = S \cap P$.

66 Même exercice que le précédent dans le cas suivant :
S : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 3 = 0$
P : $x + y + 2z - 2 = 0$.

67 On considère la sphère S d'équation :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 3 = 0$
et le plan P d'équation : $2x + 3y - 2z - 7 = 0$.
Montrer que S et P sont tangents en un point A dont on donnera les coordonnées. $d(\Omega, P) = R$

68 1° Quel est l'ensemble des centres de sphères de rayon R qui passent par un point A ? $\mathcal{S}(A, R)$
2° Quel est l'ensemble des centres des sphères qui passent par deux points A et B ? plan médiateur
3° Quel est l'ensemble des centres des sphères de rayon R qui passent par deux points A et B ? Cercle de Centre $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ de Rayon R du plan médiateur

69 Soient P un plan et $\mathcal{C}$ un cercle de ce plan de centre O et de rayon R. Soit D la droite perpendiculaire à P au point O et A un point de D. Montrer la propriété suivante : utiliser le théorème de PYTHAGORE
$\forall M \in \mathcal{C}$, $\forall N \in \mathcal{C}$, $d(A, M) = d(A, N)$.



2° Quel est l'ensemble des centres des sphères qui contiennent le cercle $\mathcal{C}$? ↳ c'est D
3° Soit P' un plan parallèle à P, et soit $\mathcal{C}'$ un cercle de P' de centre O' et de rayon R'. A quelle condition existe-t-il une sphère qui contient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$? condition que $O' \in D$ (Car D // P')
4° Soit P'' un plan qui coupe P suivant une droite D. Soit $\mathcal{C}''$ un cercle de P'' de centre O'' et de rayon R''. A quelle condition existe-t-il une sphère contenant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$?

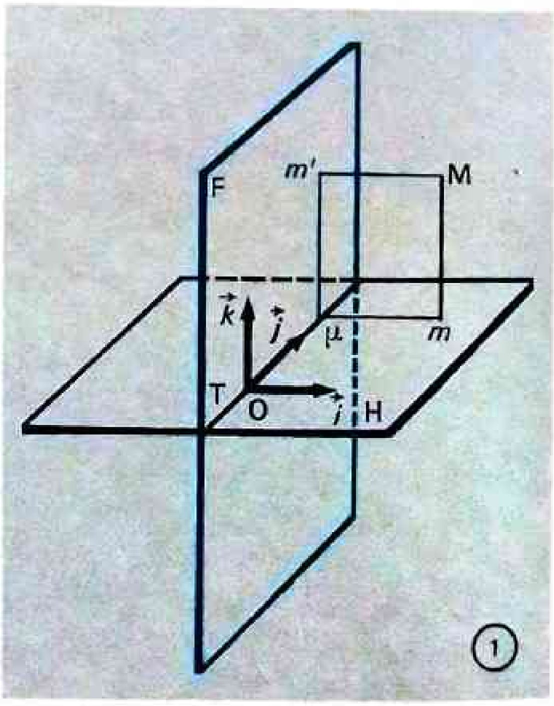
NEUVIÈME PARTIE

compléments pour la section E

35. Géométrie descriptive

Épure d'un point.

1 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien orthonormé d'un espace affine euclidien A_3.
Désignons par H le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et par F le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ (fig. 1).
Les plans H et F sont respectivement appelés **plan horizontal de projection** et **plan frontal de projection.**
Les plans H et F sont perpendiculaires ; leur intersection T, déterminée par le point O et le vecteur $\vec{j}$, est appelée **ligne de terre.**
Soit M un point de A_3. Désignons respectivement par μ, m, m' les projections orthogonales de M sur la droite T, sur le plan H et sur le plan F (fig. 1).



1

Si (x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous avons :
$\overrightarrow{O\mu} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{\mu m} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{\mu m'} = z\vec{k}$.

Réciproquement, soit m un point de H et m' un point de F.

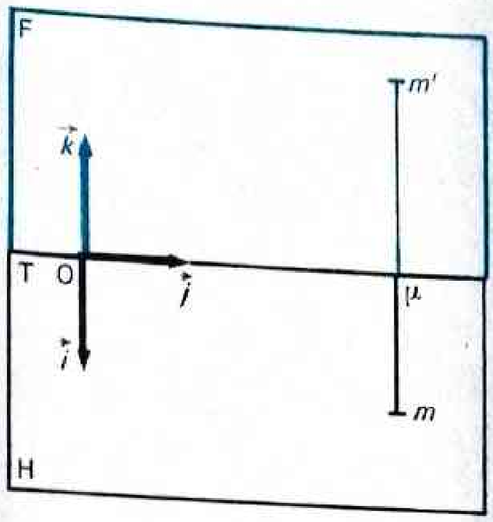
Supposons que ces deux points aient la même coordonnée sur $\vec{j}$.

Posons alors :

$\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\overrightarrow{Om'} = y\vec{j} + z\vec{k}$.

m et m' sont les projections orthogonales sur H et sur F du point M défini par :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



2

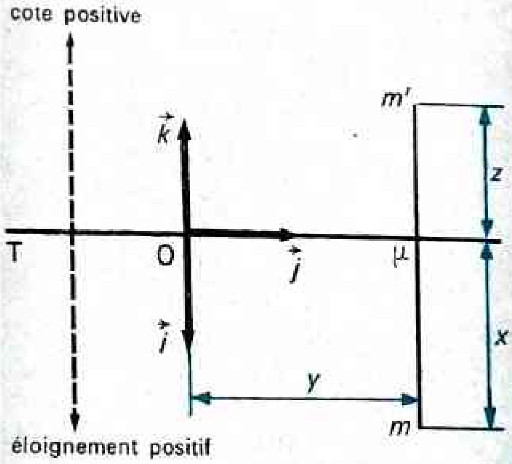
2 Afin de faciliter la représentation des figures, on convient de représenter sur le même dessin le plan H et le plan F (fig. 2).

De cette façon, les points m et m' sont représentés sur une même perpendiculaire en μ à la droite T.

Le couple (m, m') est appelé **épure** du point M. La droite perpendiculaire en μ à la ligne de terre est appelée **ligne de rappel** du point M.

Il résulte de l'étude faite au numéro précédent qu'un couple (m, m') est l'épure d'un point M si et seulement s'ils sont situés sur une même ligne de rappel.

On dit que m est la **projection horizontale** de M et que m' est la **projection frontale** de M.



3

3 <u>Remarque:</u> En pratique, nous dirons souvent : point (m, m'), au lieu de : point M dont l'épure est (m, m').

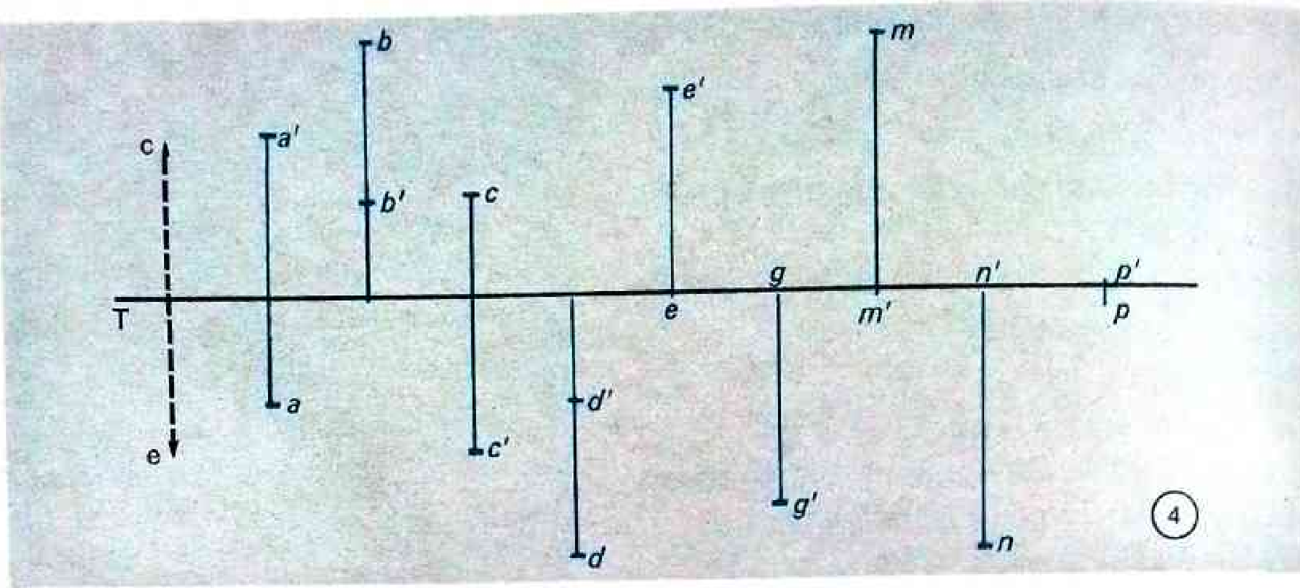
Éloignement et cote d'un point.

4 Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

x est appelé **l'éloignement** du point M ;
z est appelé la **cote** du point M.

Sur la figure 3, nous avons :

$\overrightarrow{\mu m} = x\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mu m'} = z\vec{k}$.



5 On dit qu'un point M est au-dessus de H si sa cote est positive ; on dit qu'il est au-dessous de H si sa cote est négative.
On dit qu'un point M est en avant de F si son éloignement est positif ; on dit qu'il est en arrière de F si son éloignement est négatif.

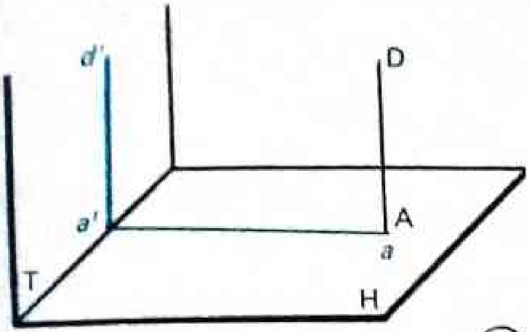
Exemples : Sur la figure 4, nous avons représenté les neuf points suivants :
un point (a, a') qui est en avant de F et au-dessus de H ;
un point (b, b') qui est en arrière de F et au-dessus de H ;
un point (c, c') qui est en arrière de F et au-dessous de H ;
un point (d, d') qui est en avant de F et au-dessous de H ;
un point (e, e') qui appartient à F et qui est au-dessus de H ;
un point (g, g') qui appartient à F et qui est au-dessous de H ;
un point (m, m') qui est en avant de F et qui appartient à H ;
un point (n, n') qui est en arrière de F et qui appartient à H ;
un point (p, p') qui appartient à la ligne de terre T.

Épure d'une droite.

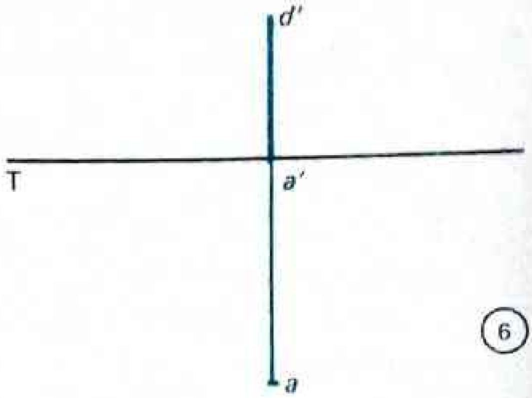
6 Soit D une droite. Désignons par d la projection orthogonale de D sur H et par d' la projection orthogonale de D sur F.
Le couple (d, d') est appelé **épure de la droite** D.
d est la projection horizontale de D ; d' est la projection frontale de D.
Distinguons trois cas :

7 Premier cas : D est perpendiculaire à H (fig. 5).
La projection orthogonale de D sur H est le singleton $\{A\}$ défini par : $\{A\} = D \cap H$.
Soit (a, a') l'épure de A. Il en résulte que, sur l'épure, d est le singleton $\{a\}$ et que d' est la droite perpendiculaire en a' à la ligne de terre (fig. 6).

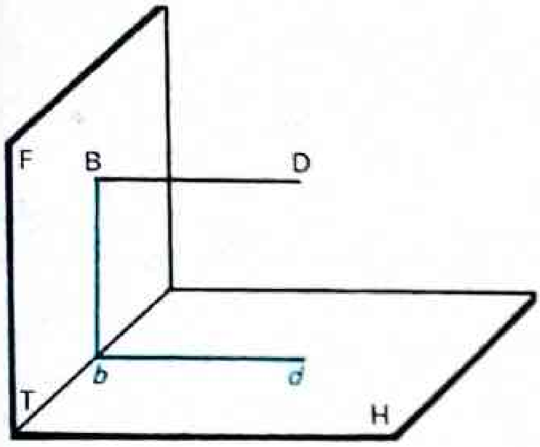
8 Deuxième cas : D est perpendiculaire à F (fig. 7).
La projection orthogonale de D sur F est le singleton $\{B\}$ défini par : $\{B\} = D \cap F$.
Soit (b, b') l'épure de B. Il en résulte que, sur l'épure, d est la droite perpendiculaire en b à la ligne de terre et que d' est le singleton $\{b'\}$ (fig. 8).



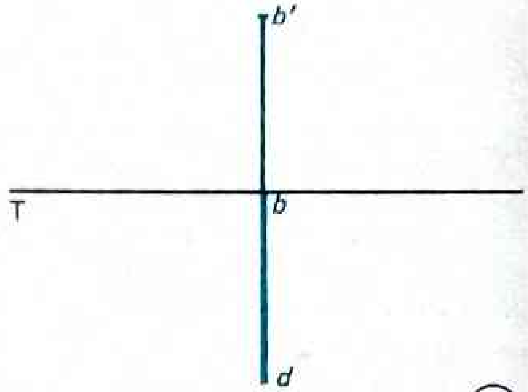
5



6

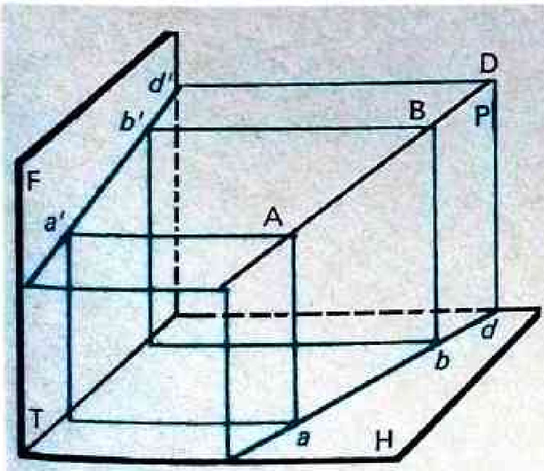


7

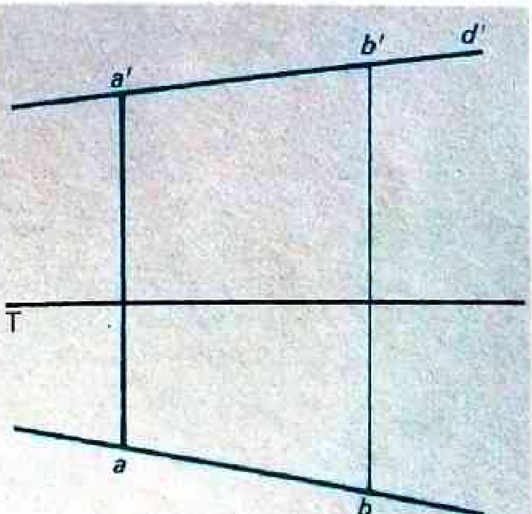


8

9 **Troisième cas :** D n'est perpendiculaire ni à H, ni à F (fig. 9).
Dans ce cas, il existe un plan perpendiculaire unique P passant par D et orthogonal à H et un plan perpendiculaire unique Q, passant par D et orthogonal à F.
Les plans P et Q sont appelés **plans projetants** de la droite D.
Les projections orthogonales de D sur H et sur F sont les droites d et d' déterminées respectivement par : $d = P \cap H$ et $d' = Q \cap F$.
Si D est la droite déterminée par deux points A et B dont les épures sont (a, a') et (b, b'), d est la droite déterminée par les points a et b, et d' est la droite déterminée par les points a' et b' (fig. 10).



9



10

Épures de droites particulières.

Droite verticale. Droite de bout.

10 **DÉFINITIONS : 1. On dit qu'une droite est verticale si et seulement si elle est perpendiculaire au plan horizontal** H.
2. On dit qu'une droite est de bout si et seulement si elle est perpendiculaire au plan frontal F.

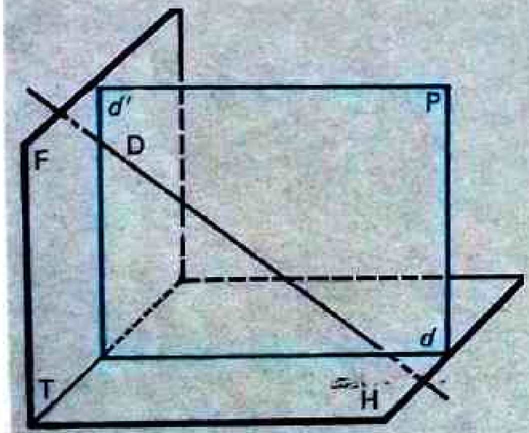
L'épure d'une droite verticale a été donnée au n° 7, p. 244 ; l'épure d'une droite de bout a été donnée au n° 8, p. 244.

Droite de profil.

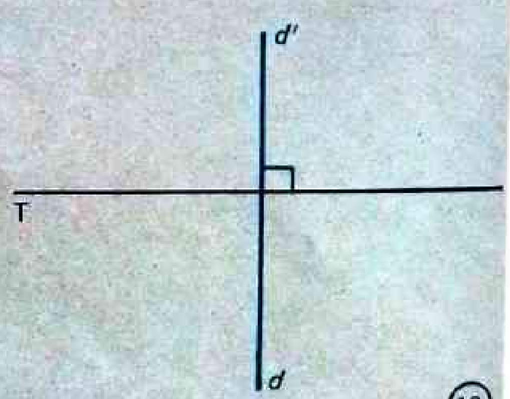
11 **DÉFINITION : On dit qu'une droite** D **est de profil si et seulement si elle est orthogonale à la ligne de terre.**

Les droites verticales et les droites de bout sont donc des droites de profil.
Si D est une droite de profil qui n'est ni verticale, ni de bout, les plans projetants P et Q sont égaux (fig. 11).
Il en résulte que, sur l'épure, la projection horizontale *d* de D et la projection frontale *d'* de D sont égales et perpendiculaires à la ligne de terre (fig. 12).

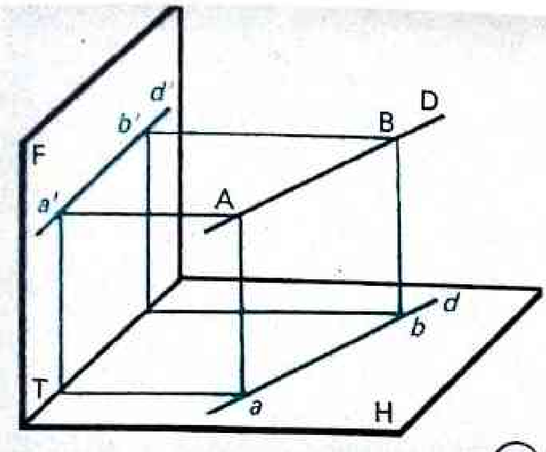
12 **Remarques** : 1. Soit D une droite de profil qui n'est ni verticale, ni de bout et soit (*d*, *d'*) son épure. Toute droite D' du plan P qui n'est ni verticale ni de bout admet aussi (*d*, *d'*) comme épure. Il en résulte que la donnée de (*d*, *d'*) ne suffit pas à déterminer la droite de profil D. Une telle droite n'est déterminée que par la donnée de deux de ses points (*a*, *a'*) et (*b*, *b'*).
2. Tout couple (*d*, *d'*) de droites non perpendiculaires à la ligne de terre est l'épure d'une droite D. On dit alors que D est la droite (*d*, *d'*).



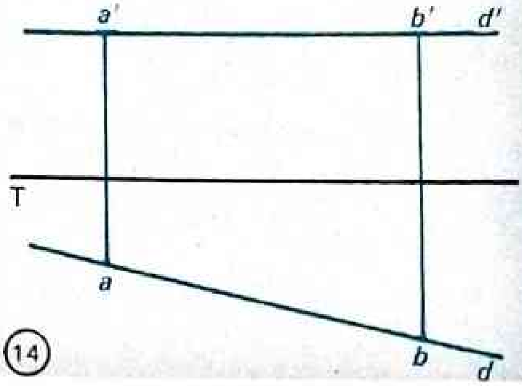
11



12



13



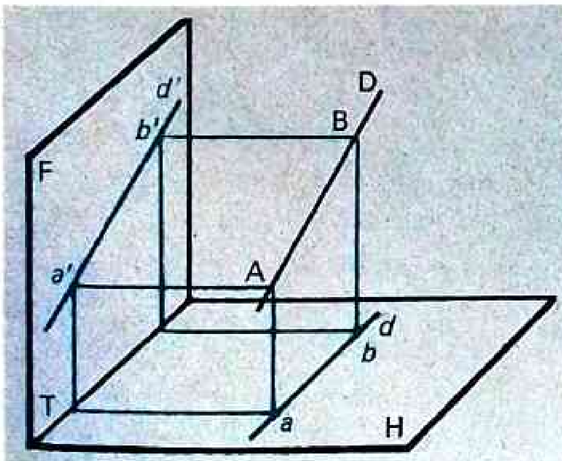
14

Droite horizontale. Droite frontale.

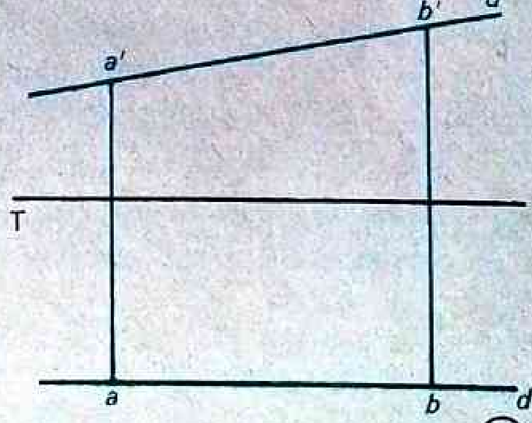
13 **DÉFINITIONS : 1. On dit qu'une droite est horizontale si et seulement si elle est parallèle au plan horizontal** H.
2. On dit qu'une droite est frontale si et seulement si elle est parallèle au plan frontal F.

Les droites de bout sont des droites horizontales.
Soit D une droite horizontale ; tous les points de D ont la même cote (fig. 13).
Si la droite D n'est pas de bout, sa projection frontale *d'* est une droite parallèle à la ligne de terre.
Nous en déduisons l'épure de D (fig. 14).

Les droites verticales sont des droites frontales.
Soit D une droite frontale ; tous les points de D ont le même éloignement (fig. 15).
Si la droite D n'est pas verticale, sa projection horizontale *d* de D est une droite parallèle à la ligne de terre.
Nous en déduisons l'épure de D (fig. 16).



15

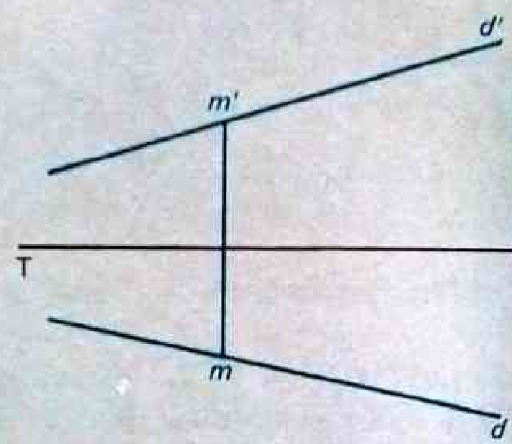


16

14 **Remarques** : 1. Soient A et B deux points d'une droite horizontale, (a, a') et (b, b') les épures de ces points. La distance des points A et B est égale à la distance des points a et b (fig. 14).
2. Soient A et B deux points d'une droite frontale, (a, a') et (b, b') les épures de ces points. La distance des points A et B est égale à la distance des points a' et b' (fig. 16).

Épure d'un point d'une droite.

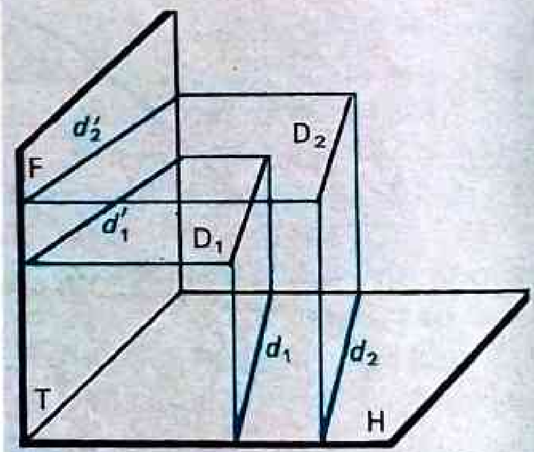
15 Soient D une droite non de profil et (d, d') son épure.
Un point M d'épure (m, m') appartient à D si et seulement si l'on a :
$m \in d$ et $m' \in d'$.
Si M est un point de D dont on connaît, par exemple, la projection horizontale m, il est possible de déterminer sa projection frontale m'. En effet, m' est le point d'intersection de d' et de la ligne de rappel qui passe par m (fig. 17). De même, si l'on connaît m', on détermine m d'une manière analogue.



17

16 **Remarque** : Nous étudierons au n° 47, p. 259, le cas où D est une droite de profil.

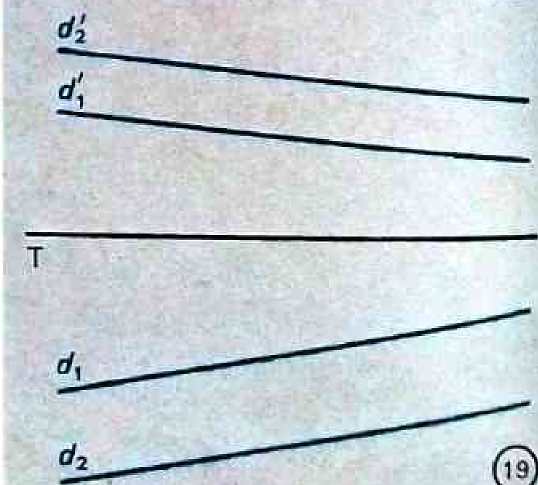
Droites parallèles.



18

17 Soient D_1 et D_2 deux droites **non de profil** et soient (d_1, d'_1) et (d_2, d'_2) leurs épures respectives.
Si D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 18), les plans projetant respectivement D_1 et D_2 sur le plan horizontal H sont parallèles ; il en résulte que d_1 et d_2 sont parallèles.
De même, les droites d'_1 et d'_2 sont parallèles.

Réciproquement si d_1 est parallèle à d_2 et si d'_1 est parallèle à d'_2, les droites D_1 et D_2 sont parallèles.
Pour deux droites D_1 et D_2 non de profil, nous avons donc :
$(D_1 /\!/ D_2) \Longleftrightarrow (d_1 /\!/ d_2$ et $d'_1 /\!/ d'_2)$.

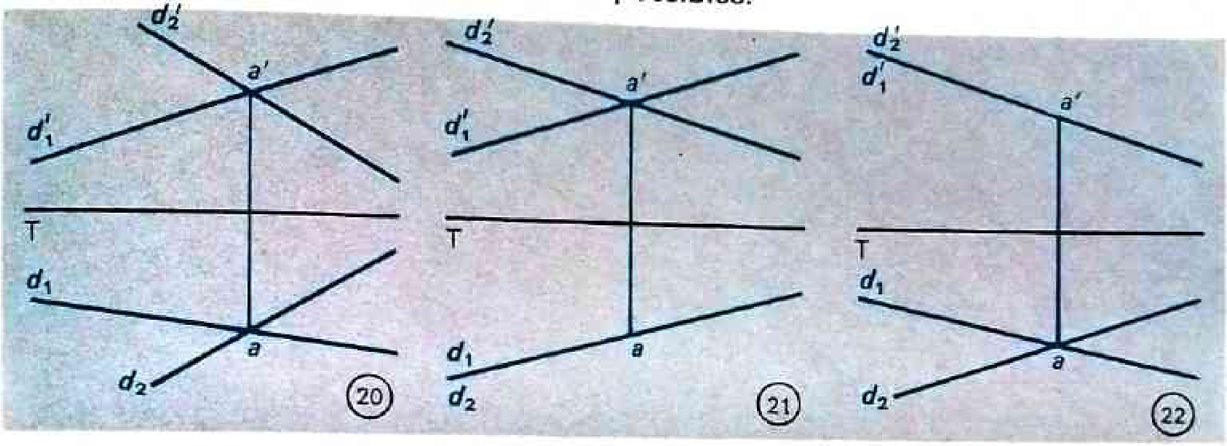


19

La figure 19 représente les épures de deux droites, non de profil, parallèles.

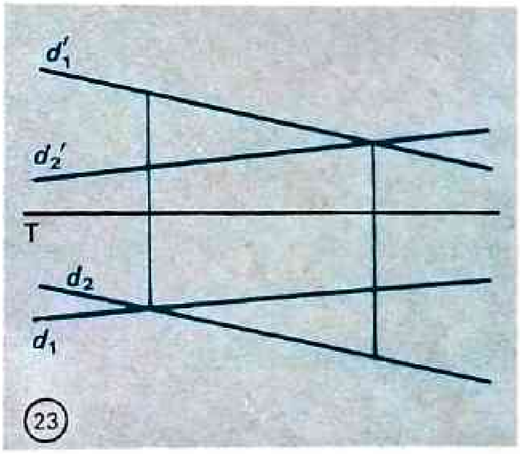
Droites sécantes.

18 Soient D_1 et D_2 deux droites **non de profil** et soient (d_1, d_1') et (d_2, d_2') leurs épures respectives.
Si D_1 et D_2 sont sécantes en un point A dont l'épure est (a, a'), nous avons :
$a \in d_1 \cap d_2$ et $a' \in d_1' \cap d_2'$.
Trois cas, et trois seulement, sont donc possibles.



1. $d_1 \cap d_2 = \{a\}$, $d_1' \cap d_2' = \{a'\}$ et les points a et a' sont sur une même ligne de rappel (fig. 20).
2. $d_1 = d_2$ et $d_1' \cap d_2' = \{a'\}$ (fig. 21).
3. $d_1 \cap d_2 = \{a\}$ et $d_1' = d_2'$ (fig. 22).

Réciproquement, si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, (d_1, d_1') et (d_2, d_2') sont les épures de deux droites sécantes dont aucune n'est de profil.



19 **Remarque :** Sur la figure 23, les couples (d_1, d_1') et (d_2, d_2') sont les épures de deux droites qui ne sont pas sécantes.

Représentation d'un plan.

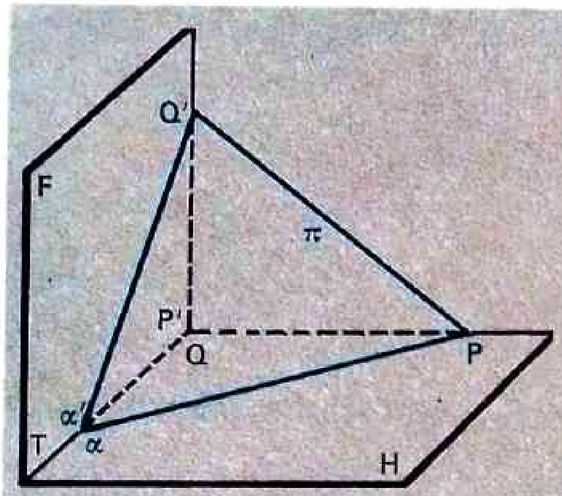
20 Les façons usuelles de déterminer un plan sont :
1. la donnée de trois points A, B, C non alignés;
2. la donnée d'une droite D et d'un point A qui n'appartient pas à D;
3. la donnée de deux droites sécantes D_1 et D_2;
4. la donnée de deux droites strictement parallèles D_1 et D_2.

En géométrie descriptive, un plan est donc défini :
1. soit par la donnée des épures de trois points non alignés;
2. soit par la donnée des épures d'une droite et d'un point qui n'appartient pas à cette droite;
3. soit par la donnée des épures de deux droites sécantes;
4. soit par la donnée des épures de deux droites strictement parallèles.

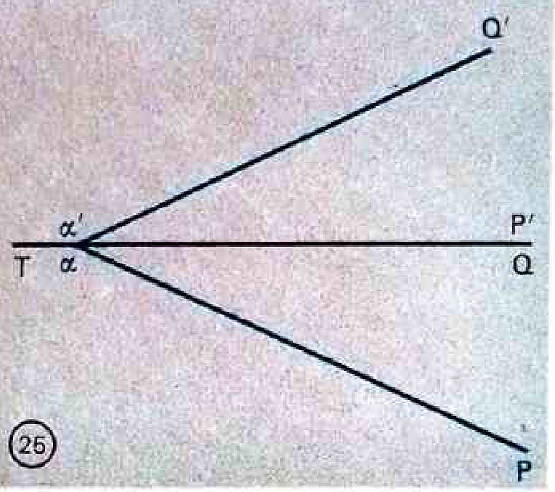
Les figures 20, 21 et 22 représentent le plan déterminé par deux droites (d_1, d_1') et (d_2, d_2') sécantes.

Traces d'un plan.

21 Si un plan π n'est pas parallèle au plan horizontal de projection H, l'intersection $\pi \cap H$ est une droite appelée **trace horizontale** de π.
Si un plan π n'est pas parallèle au plan frontal de projection F, l'intersection $\pi \cap F$ est une droite appelée **trace frontale** de π.
Si un plan π ne contient pas la ligne de terre T, et s'il n'est parallèle ni à H, ni à F, il admet une trace horizontale et une trace frontale qui sont deux droites distinctes.
Supposons que π coupe la ligne de terre en un point (α, α') (fig. 24).



24



25

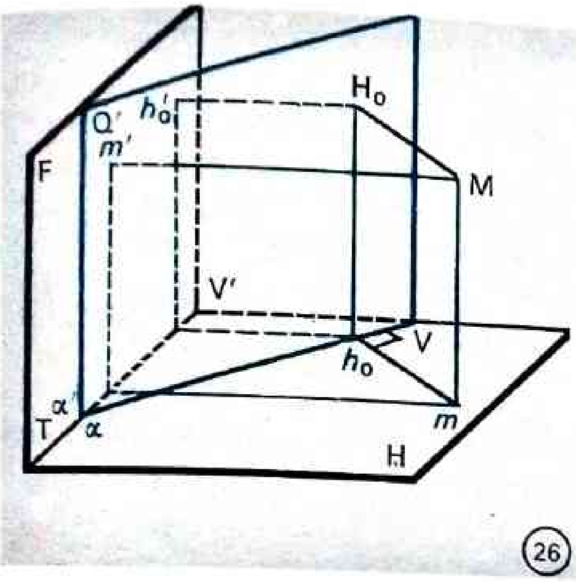
Sur la figure 25, nous avons représenté un plan π qui n'est perpendiculaire à aucun des deux plans H et F.
La trace horizontale de π est la droite (P, P'); la trace frontale de π est la droite (Q, Q').
Sur l'épure, les droites P' et Q sont confondues avec la ligne de terre.

Plans particuliers.

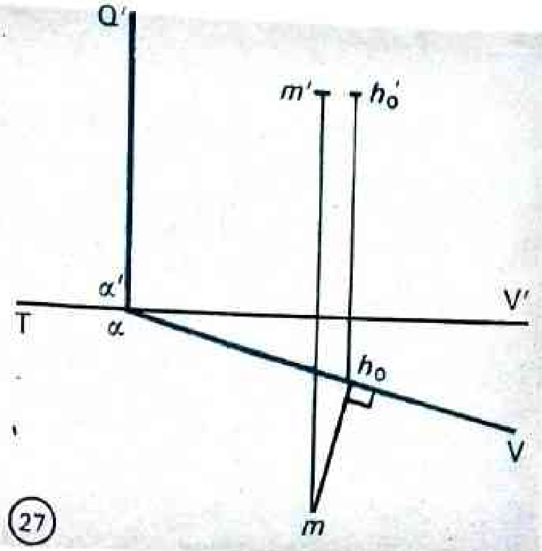
Plan vertical. Plan de bout.

22 **DÉFINITIONS : 1. On dit qu'un plan est vertical si et seulement s'il est perpendiculaire au plan horizontal** H.
2. On dit qu'un plan est de bout si et seulement s'il est perpendiculaire au plan frontal F.

23 Tout plan vertical admet une trace horizontale. Un plan vertical est déterminé par la donnée de sa trace horizontale.
Si un plan vertical n'est pas parallèle au plan frontal F (fig. 26), il admet une trace frontale qui est une droite perpendiculaire à la ligne de terre.
La figure 27 représente un plan vertical π qui n'est pas parallèle au plan frontal F et qui n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre. L'épure de la trace horizontale de π est (V, V'); l'épure de la trace frontale de π est $(\{\alpha\}, Q')$.

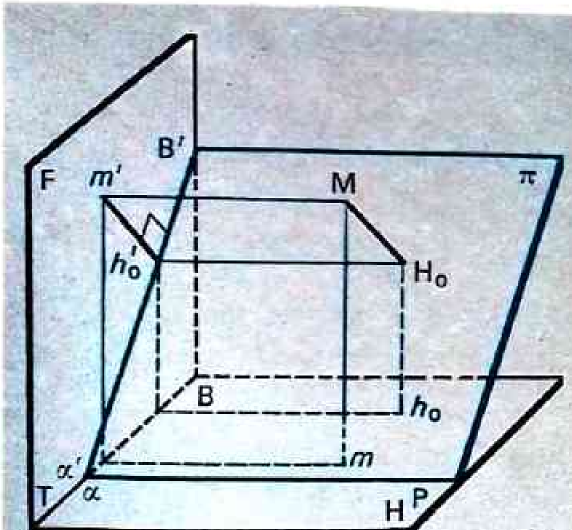


26

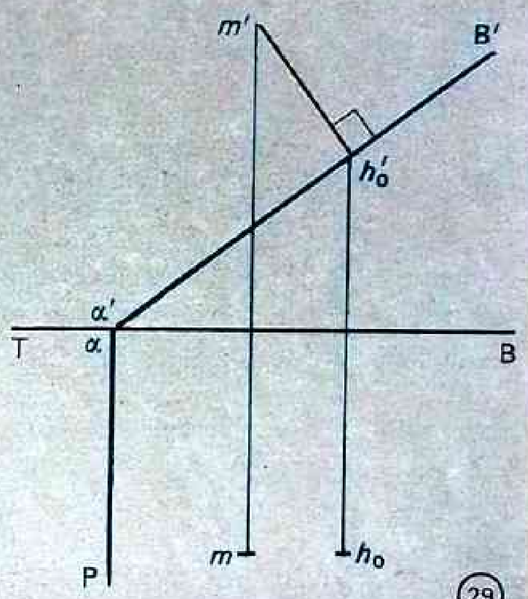


27

24 Tout plan de bout admet une trace frontale. Un plan de bout est déterminé par la donnée de sa trace frontale.
Si un plan de bout n'est pas parallèle au plan horizontal H (fig. 28), il admet une trace horizontale qui est une droite perpendiculaire à la ligne de terre.



28



29

La figure 29 représente un plan de bout π qui n'est pas parallèle au plan horizontal et qui n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre. L'épure de la trace horizontale de π est $(P, \{\alpha'\})$; l'épure de la trace frontale de π est (B, B').

25 **Remarques** : 1. Soit M un point dont l'épure est (m, m'). Soit H_0 la projection orthogonale de M sur un plan vertical π et soit (h_0, h'_0) l'épure de ce point. Nous avons : $d(M, H_0) = d(m, h_0)$ (fig. 26).
Il en résulte que, sur l'épure (fig. 27), la distance de M à π est égale à la distance de m à V.
2. De même, si π est un plan de bout, la distance de M à π est égale à la distance de m' à B' (fig. 29).

Plan de profil.

26 **DÉFINITION : On dit qu'un plan est un plan de profil si et seulement s'il est perpendiculaire à la ligne de terre.**

Sur l'épure, la trace horizontale et la trace frontale d'un plan de profil sont représentées par une même droite perpendiculaire à la ligne de terre.

Plan horizontal. Plan frontal.

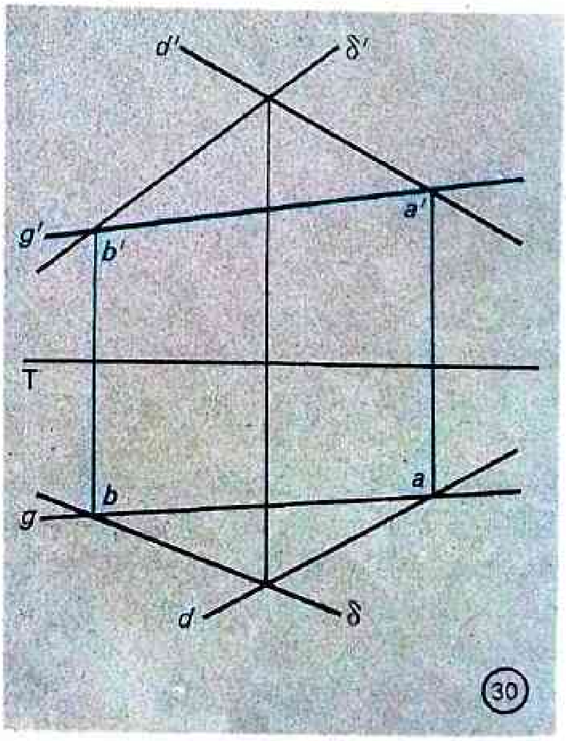
27 **DÉFINITIONS : 1. On dit qu'un plan est horizontal si et seulement s'il est parallèle au plan horizontal** H.
2. On dit qu'un plan est frontal si et seulement s'il est parallèle au plan frontal F.

Tout plan horizontal est un plan de bout.
Un plan horizontal n'a pas de trace horizontale. La trace frontale d'un plan horizontal est parallèle à la ligne de terre.
Tout plan frontal est un plan vertical.
Un plan frontal n'a pas de trace frontale. La trace horizontale d'un plan frontal est parallèle à la ligne de terre.

Épure d'une droite d'un plan.

28 Nous allons exposer sur un exemple une méthode qui permet, en général, de déterminer l'une des projections d'une droite d'un plan lorsque l'on connaît l'autre projection de cette droite.

29 <u>Exemple</u> : Considérons le plan P défini par les deux droites sécantes D et Δ d'épures respectives (d, d') et (δ, δ') (fig. 30).
Soit G la droite du plan P dont la projection horizontale est g. Déterminons la projection frontale g' de G.
Les projections horizontales g et d des droites G et D sont sécantes. Les droites G et D sont donc sécantes en un point A. De même les droites G et Δ sont sécantes en un point B.
Soit (a, a') l'épure de A. a est le point d'intersection de g et d : $\{a\} = g \cap d$.
a' est donc le point d'intersection de la ligne de rappel qui passe par a et de la droite d'.
De même, soit (b, b') l'épure de B. b est le point d'intersection de g et δ : $\{b\} = g \cap \delta$.



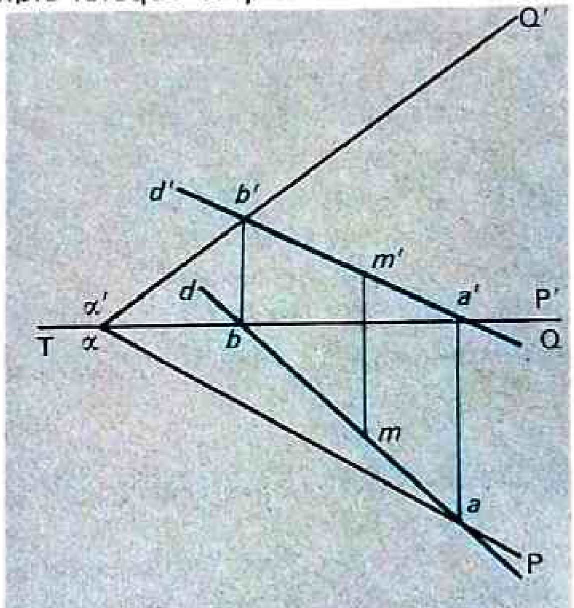
30

b' est donc le point d'intersection de la droite δ' et de la ligne de rappel qui passe par b.
Il en résulte que la projection frontale g' de la droite G du plan P est la droite déterminée par les points a' et b'.

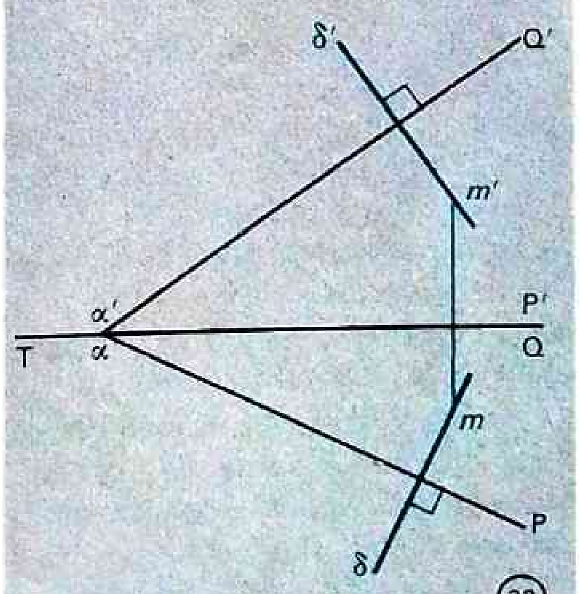
Épure d'un point d'un plan.

30 Soient π un plan non de profil et M un point de ce plan dont on connaît par exemple la projection horizontale m.
Pour déterminer la projection frontale m' de M, on détermine l'épure (d, d') d'une droite D non de profil du plan π qui passe par M. Le point m' est alors le point d'intersection de d' et de la ligne de rappel qui passe par m.
Nous donnons cette construction sur un exemple lorsque le plan π est déterminé par ses traces.

31 Exemple : Considérons le plan π déterminé par ses traces (P, P′) et (Q, Q′) et le point M de π dont la projection horizontale est m (fig. 31).
Soit d une droite qui passe par m et D la droite du plan π dont la projection horizontale est d. Le point M appartient à D. Le point m' appartient donc à la projection frontale d' de D.
Déterminons d' ; utilisons la méthode donnée au n° 29.
Soient a le point d'intersection de P et d, b le point d'intersection de Q et d.
La ligne de rappel qui passe par a coupe P′ en a' ; la ligne de rappel qui passe par b coupe Q′ en b'. La droite d' est déterminée par les points a' et b'. m' est le point d'intersection de d' et de la ligne de rappel qui passe par m.



31



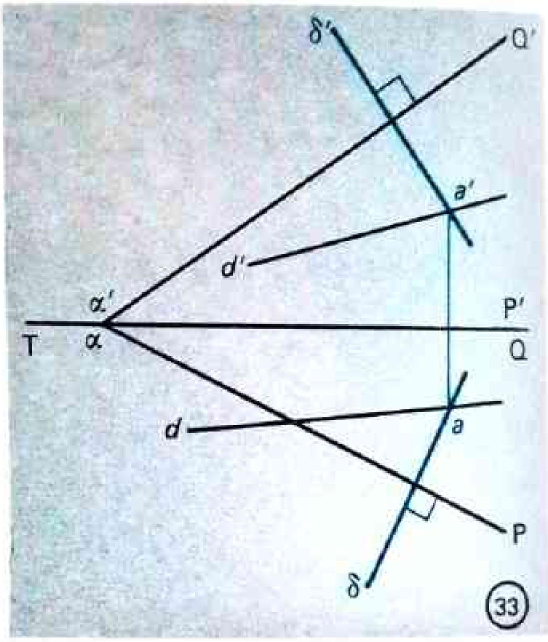
32

Épure d'une droite perpendiculaire à un plan.

32 Considérons le plan π déterminé par ses traces (P, P′) et (Q, Q′) et le point M d'épure (m, m') (fig. 32).
Proposons-nous de déterminer l'épure (δ, δ') de la perpendiculaire Δ menée par le point M au plan π.

La droite Δ est orthogonale à toutes les droites du plan M ; en particulier elle est orthogonale aux traces de ce plan. Il en résulte que la projection horizontale δ de Δ est perpendiculaire à la projection horizontale P de la trace horizontale et que la projection frontale δ' de Δ est perpendiculaire à la projection frontale Q' de la trace frontale. m appartient à δ, m' appartient à δ'. Pour construire l'épure (δ, δ') de la droite Δ qui passe par M et qui est perpendiculaire au plan π, il suffit de mener par m la droite δ perpendiculaire à P et par m' la droite δ' perpendiculaire à Q'.

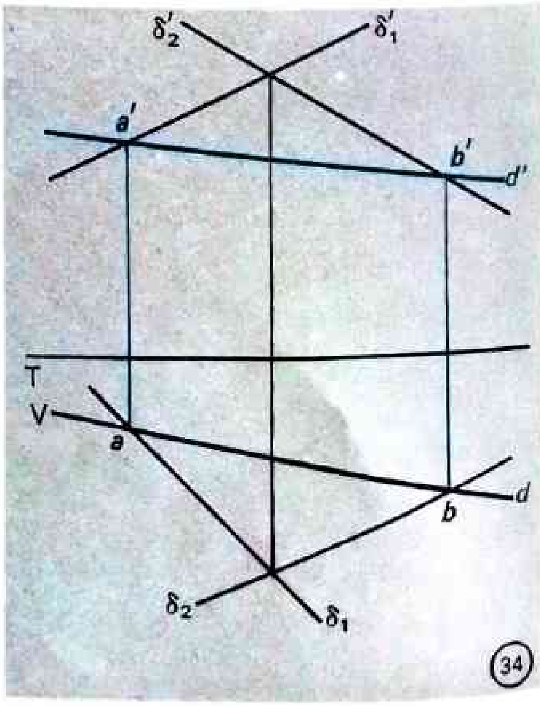
Plans perpendiculaires.



33 Considérons le plan π déterminé par ses traces (P, P') et (Q, Q') et la droite (d, d') non perpendiculaire à ce plan (fig. 33).
Proposons-nous de déterminer le plan π' qui passe par D et qui est perpendiculaire à π.
Soit A un point de la droite D et soit Δ la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à π. Les droites sécantes D et Δ déterminent le plan π'.
Pour construire l'épure de Δ, on utilise la méthode donnée au numéro précédent.

Intersection de deux plans.

34 Soient P_1 et P_2 deux plans sécants et D l'intersection de ces plans.
Proposons-nous de déterminer l'épure de la droite D lorsque cette droite n'est pas de profil.



35 Premier cas : P_2 est un plan vertical ou de bout. Si P_2 est vertical, la projection horizontale de D est la trace horizontale de P_2.
Si P_2 est de bout, la projection frontale de D est la trace frontale de P_2.
Dans les deux cas, nous connaissons donc l'une des projections de la droite D.
Pour construire l'épure (d, d') de D, nous utilisons la méthode donnée au n° 29.
Exemple : Soient P_1 le plan déterminé par deux droites sécantes (δ_1, δ_1') et (δ_2, δ_2') et P_2 le plan vertical dont la trace horizontale est (V, V') (fig. 34).
Déterminons la droite (d, d') intersection de P_1 et P_2.

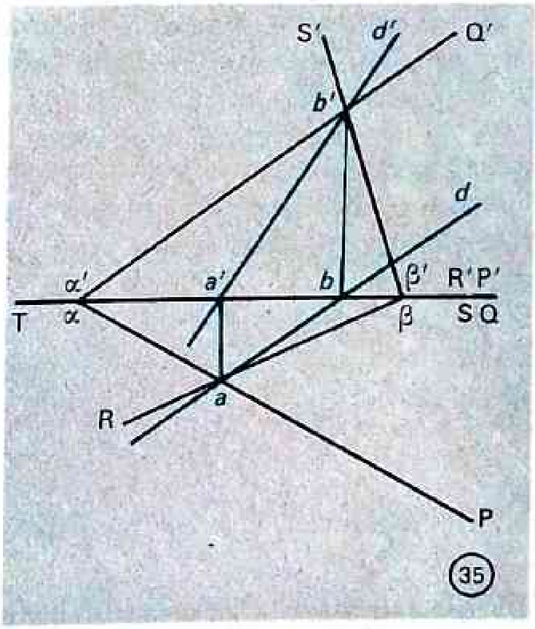
La projection horizontale d est V. Elle coupe δ_1 et δ_2 respectivement en a et en b. Les projections frontales sont a' et b'. La droite d' est la droite déterminée par les points a' et b'.

36 <u>Remarques :</u> 1. La méthode précédente permet, en général, de déterminer les intersections d'un plan π avec un plan horizontal ou avec un plan frontal. Ces droites sont respectivement appelées **horizontales** et **frontales** de π.
2. Cette méthode permet aussi de déterminer les traces d'un plan.

37 <u>Deuxième cas :</u> P_1 et P_2 ne sont ni verticaux ni de bout.
Pour déterminer D on utilise la méthode suivante :
On considère un plan auxiliaire P qui coupe respectivement P_1 et P_2 suivant une droite D_1 et suivant une droite D_2. Trois cas peuvent se présenter :
1. D_1 et D_2 sont sécantes. Leur point d'intersection A est un point de D.
2. D_1 et D_2 sont parallèles. D est une droite parallèle à D_1 et à D_2.
3. D_1 et D_2 sont égales. D est égale à D_1 et à D_2.

Dans les deux premiers cas, pour déterminer D, on utilise un deuxième plan auxiliaire.
Nous savons déterminer l'intersection d'un plan et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection. Nous choisirons donc pour plans auxiliaires des plans verticaux ou des plans de bout.

<u>Exemple :</u> Déterminons l'intersection de deux plans définis par leurs traces (fig. 35).
Choisissons comme premier plan auxiliaire le plan horizontal de projection. Ce plan coupe les deux plans suivant leurs traces horizontales. Le point d'intersection (a, a') de ces traces appartient à la droite D.
Choisissons comme deuxième plan auxiliaire le plan frontal de projection.
Ce plan coupe les deux plans suivant leurs traces frontales. Le point d'intersection (b, b') de ces traces appartient à la droite D.
La projection horizontale d de la droite D est donc la droite déterminée par les points a et b et la projection frontale d' de cette droite est la droite déterminée par les points a' et b'.

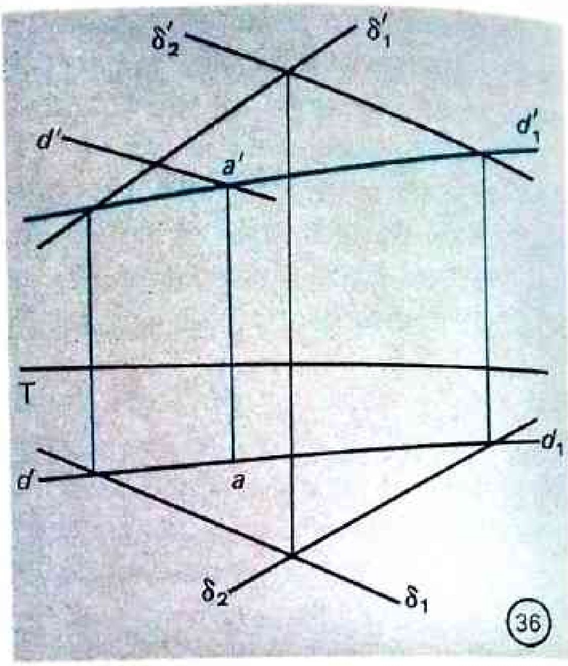


35

Intersection d'une droite et d'un plan.

38 Soient P un plan et D une droite qui n'est pas parallèle à P. Pour déterminer le point d'intersection A de P et de D, on considère un plan auxiliaire π qui contient D. Le plan π coupe P suivant une droite D_1. A est le point d'intersection de D et de D_1.

39 **Exemple :** Déterminons l'intersection de la droite (d, d') et du plan défini par les droites sécantes (δ_1, δ'_1) et (δ_2, δ'_2) (fig. 36). Choisissons pour plan auxiliaire, le plan projetant de la droite D sur le plan horizontal. Nous en déduisons la droite (d_1, d'_1), intersection de ce plan et du plan donné. d_1 est égale à d. La droite d_1 coupe d' au point a'. Le point d'intersection du plan et de la droite est donc le point (a, a').



36

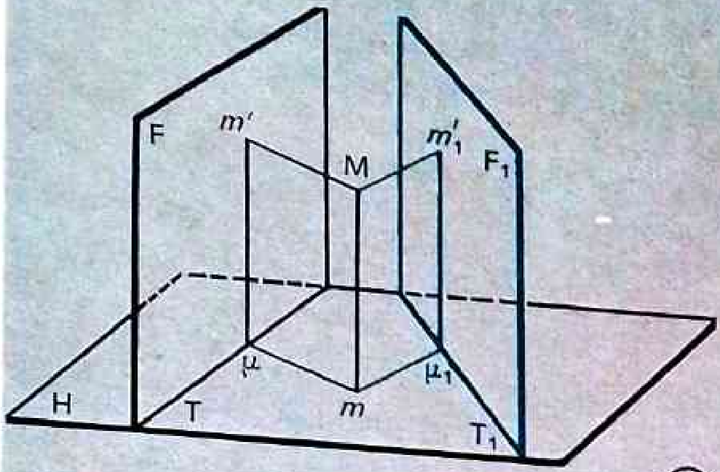
Changement de plan de projection.

40 Nous avons remarqué que la réalisation d'une épure présente des singularités lorsque les données occupent certaines positions particulières par rapport aux plans de projection.
Par exemple, la méthode donnée au n° 15, p. 248 pour déterminer la projection frontale d'un point M d'une droite Δ, lorsque l'on connaît la projection horizontale de M, ne peut pas être utilisée si la droite Δ est de profil.
Nous avons aussi remarqué qu'une disposition particulière des données peut permettre de résoudre certains problèmes. Par exemple, la distance d'un point à un plan est déterminée simplement lorsque le plan est soit vertical soit de bout.
Lors de la réalisation d'une épure, il peut donc être utile de changer de plans de projection.
Faire un changement de plan frontal, c'est prendre pour nouveau plan frontal de projection un plan vertical et conserver le plan horizontal de projection.
Faire un changement de plan horizontal, c'est prendre pour nouveau plan horizontal de projection un plan de bout et conserver le plan frontal de projection.

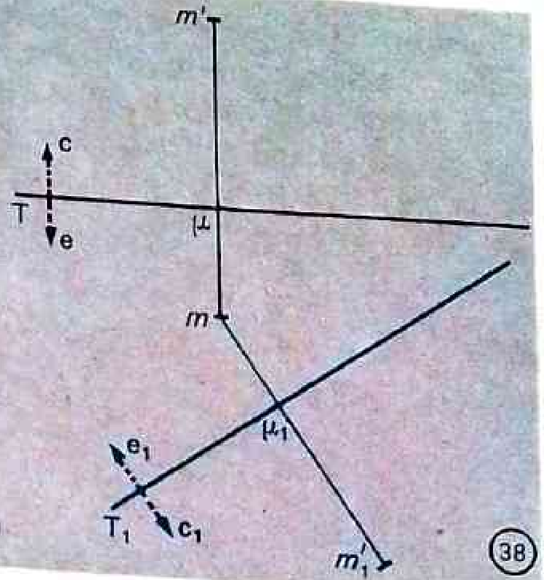
Changement de plan pour un point.

Changement de plan frontal.

41 Soient F_1 un plan frontal et T_1 la trace horizontale de ce plan : $T_1 = H \cap F_1$. Déterminons l'épure d'un point M dans le système de plans de projection (H, F_1), à partir de l'épure de M dans le système de plans de projection (H, F). Désignons par m, m' et m'_1 les projections orthogonales respectives du point M sur les plans H, F et F_1. De même, désignons par μ et μ_1 les projections orthogonales respectives de M sur les droites T et T_1. Nous avons (fig. 37) : $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{\mu m'} = \overrightarrow{\mu_1 m'_1}$. Sur l'épure, la nouvelle ligne de terre est la droite T_1. La projection horizontale de M est inchangée : c'est m. La nouvelle projection frontale m'_1 appartient à la nouvelle



(37)



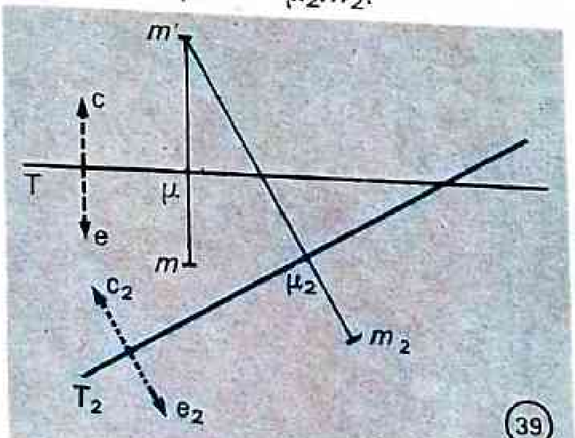
(38)

ligne de rappel de m, perpendiculaire à T_1. De plus la cote est conservée. Choisissons l'un des demi-plans de frontière T_1 pour représenter les points de cotes positives. Sur la figure 38 ce choix est indiqué par la place des lettres e_1 et c_1. Nous en déduisons le point m'_1.

Changement de plan horizontal.

42 Soient H_2 un plan horizontal et T_2 la trace frontale de ce plan : $T_2 = F \cap H_2$. Déterminons l'épure d'un point M dans le système de plans de projection (H_2, F) à partir de l'épure de M dans le système de plans de projection (H, F). Désignons par m, m_2 et m' les projections orthogonales respectives du point M sur les plans H, H_2 et F. De même, désignons par μ et μ_2 les projections orthogonales respectives de M sur les droites T et T_2. Nous avons : $\overrightarrow{m'M} = \overrightarrow{\mu m} = \overrightarrow{\mu_2 m_2}$.

Sur l'épure, la nouvelle ligne de terre est la droite T_2. La projection frontale de M est inchangée : c'est m'. La nouvelle projection horizontale m_2 appartient à la nouvelle ligne de rappel de m', perpendiculaire à T_2. De plus l'éloignement est conservé. Choisissons l'un des demi-plans de frontière T_1 pour représenter les points d'éloignements positifs. Sur la figure 39 ce choix est indiqué par la place des lettres e_2 et c_2. Nous en déduisons le point m_2.

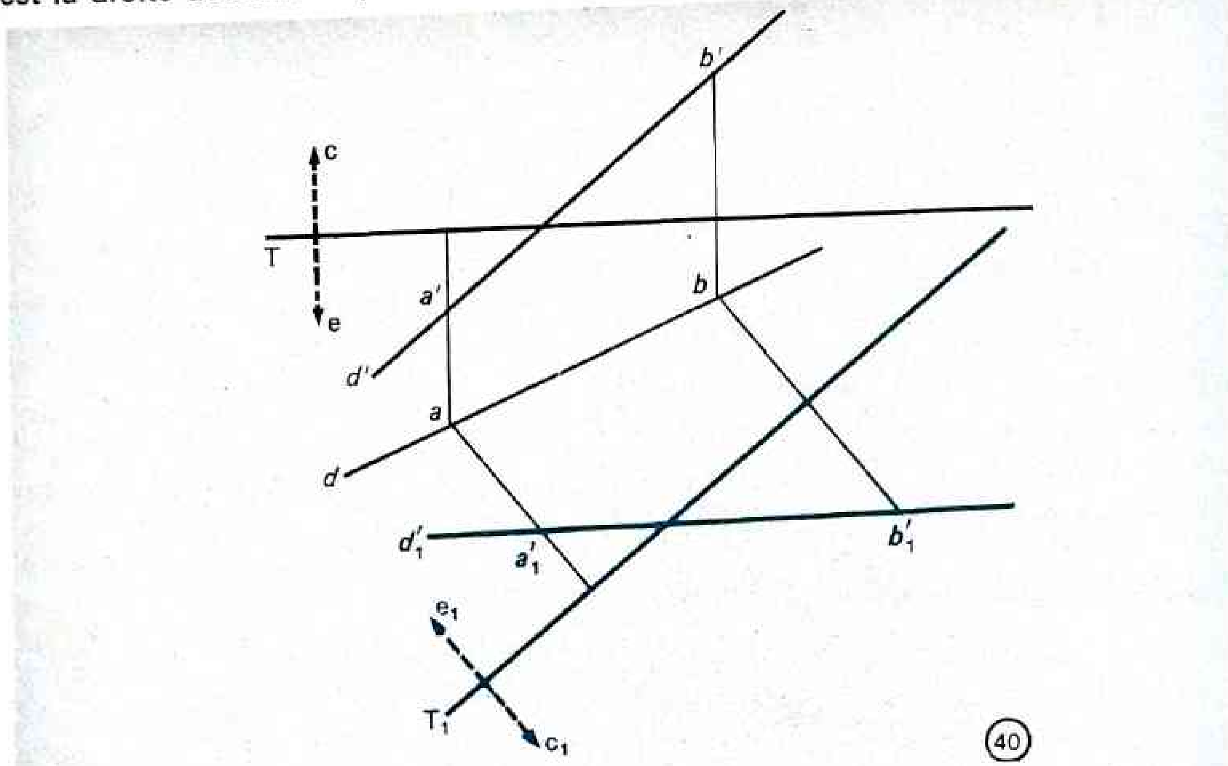


(39)

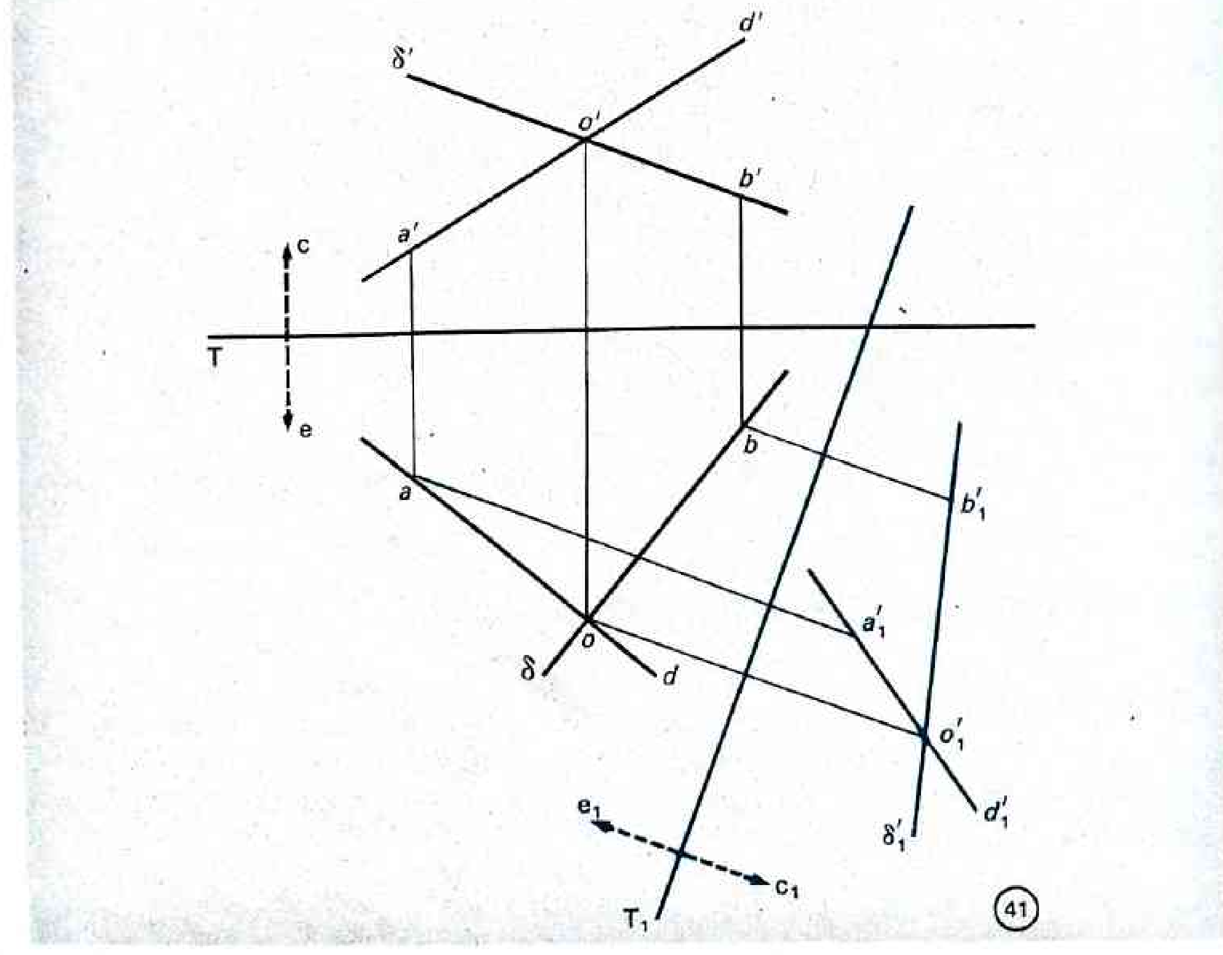
Changement de plan pour une droite.

43 Si on fait un changement de plan, pour trouver la nouvelle épure d'une droite, il suffit de déterminer les nouvelles épures de deux points distincts de cette droite. Il en résulte que, dans un changement de plan frontal, la projection horizontale d'une droite est conservée, dans un changement de plan horizontal, la projection frontale d'une droite est conservée.

44 **Exemple :** Considérons la droite (d, d') et effectuons le changement de plan frontal de façon que la nouvelle ligne de terre soit la droite T_1 (fig. 40). Soient deux points distincts (a, a') et (b, b') de la droite. Les nouvelles épures de ces points sont (a, a'_1) et (b, b'_1). La nouvelle épure de la droite est donc (d, d'_1), où d'_1 est la droite déterminée par les points a'_1, et b'_1.



40



41

Changement de plan pour un plan.

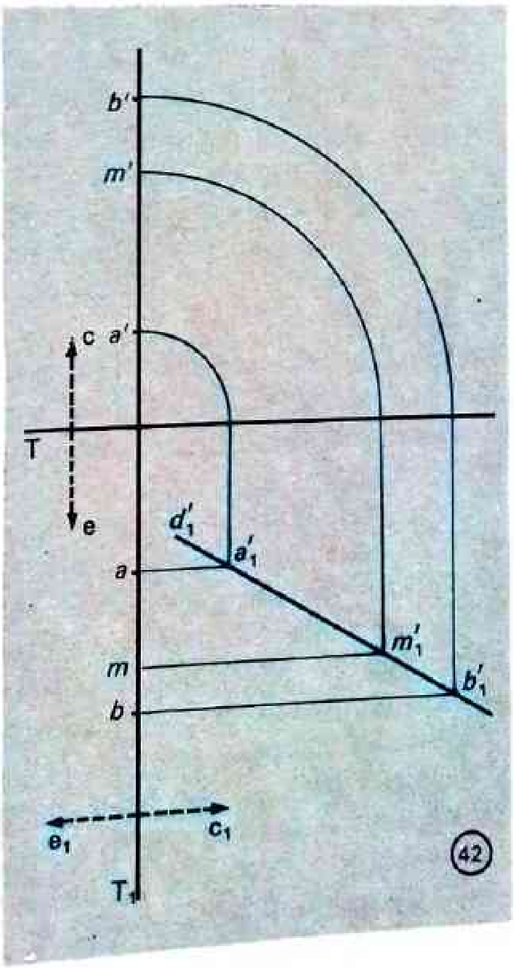
45 Pour faire un changement de plan pour un plan, il suffit de faire le changement de plan pour trois points non alignés du plan ou pour deux droites distinctes de ce plan.

46 Exemple : Considérons le plan défini par deux droites (d, d') et (δ, δ') sécantes au point (o, o') et effectuons un changement de plan frontal de façon que la nouvelle ligne de terre soit la droite T_1 (fig. 41).
Soient (a, a') un point de (d, d') et (b, b') un point de (δ, δ').
Déterminons les nouvelles épures des trois points (a, a'), (b, b') et (o, o').
Dans ce nouveau système de plans de projection, le plan est alors défini par les droites (d, d_1'), et (δ, δ_1') sécantes au point (o, o_1').

Applications des changements de plan.

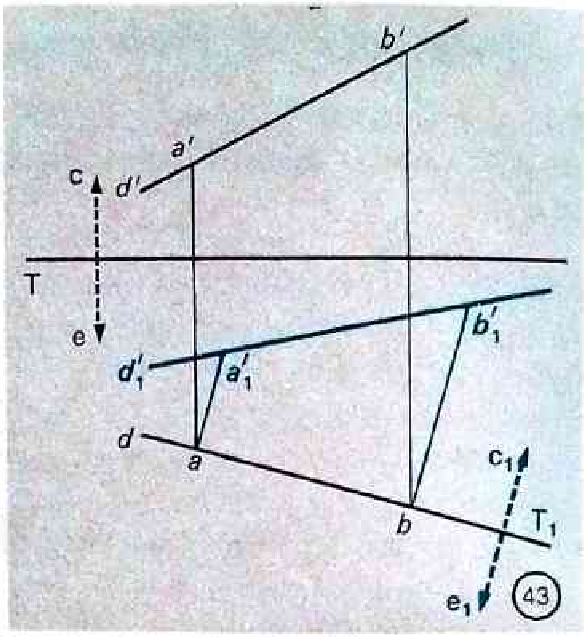
Épure d'un point d'une droite de profil.

47 Considérons la droite de profil D définie par deux de ses points (a, a') et (b, b') et le point M de cette droite, dont la projection horizontale est m (fig. 42).
Nous nous proposons de déterminer la projection frontale m' du point M.
Prenons comme nouveau plan frontal, le plan projetant horizontalement D. La nouvelle ligne de terre T_1 est donc confondue avec les projections horizontale et frontale de D. Les nouvelles épures des points (a, a') et (b, b') sont (a, a_1') et (b, b_1'). La nouvelle épure de la droite D est donc (d, d_1'). La nouvelle épure du point M est (m, m_1'). Dans un changement de plan frontal, la cote d'un point est conservée. Nous en déduisons la projection frontale m' du point M.



42

Distance de deux points.



43

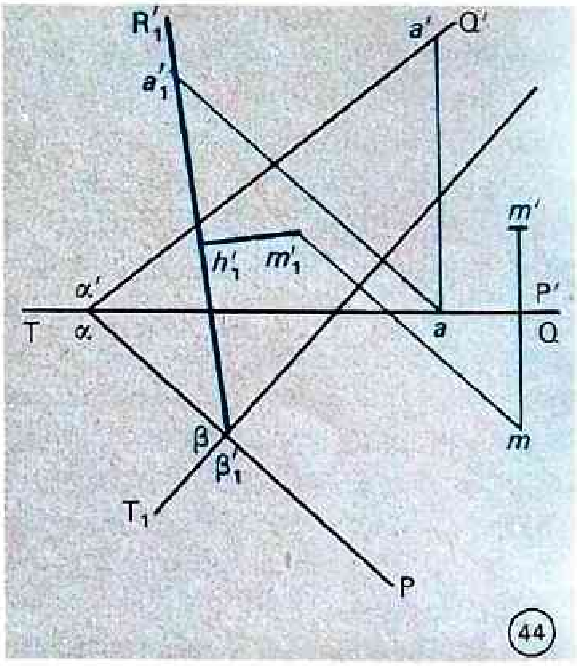
48 Considérons deux points A et B, tels que la droite D qu'ils déterminent ne soit ni verticale ni de bout. Soient (a, a') et (b, b') les épures de ces points.

Nous nous proposons de déterminer la distance des points A et B.

Nous avons remarqué au n° 14, p. 248 que l'on trouve directement sur l'épure la distance de deux points dans le cas où la droite D qu'ils déterminent est une droite horizontale ou une droite frontale.

Faisons, par exemple, un changement de plan frontal, de façon que, dans le nouveau système de plans de projection, la droite D soit frontale. Choisissons, comme nouveau plan frontal, le plan projetant horizontalement la droite D. Les nouvelles épures des points A et B sont (a, a'_1) et (b, b'_1). La distance des points A et B est donc égale à la distance des points a'_1 et b'_1 (fig. 43).

Distance d'un point à un plan.



44

49 Considérons le point M dont l'épure est (m, m') et le plan π défini par ses traces (fig. 44). Nous nous proposons de déterminer la distance du point M au plan π.

Nous avons remarqué au n° 25, p. 251, que l'on trouve directement sur l'épure la distance d'un point à un plan dans le cas où le plan est un plan vertical ou un plan de bout.

Faisons, par exemple, un changement de plan frontal de façon que, dans le nouveau système de plans de projection, le plan π soit un plan de bout.

Choisissons, comme nouveau plan frontal, un plan vertical F_1 dont la trace horizontale T_1 est perpendiculaire à la trace horizontale P du plan π. P est une droite du plan perpendiculaire au plan F_1. Le plan est donc perpendiculaire au plan F_1. Dans le système de plans de projection (H, F_1), le plan π est donc un plan de profil. Déterminons la nouvelle trace frontale R'_1 de π. Le point d'intersection (β, β'_1) de la trace horizontale P et de la nouvelle ligne de terre T_1 est un point de R'_1. De plus, soient (a, a') un point de la trace frontale Q' et (a, a'_1) la nouvelle épure de ce point. Dans le nouveau système de plans de projection, le plan π est de bout. Il en résulte que le point a'_1 appartient à R'_1. R'_1 est donc la droite déterminée par les points β'_1 et a'_1. Si (m, m'_1) est la nouvelle épure du point M et si h'_1 est la projection orthogonale de m'_1 sur R'_1, la distance du point M au plan π est donc égale à la distance du point m'_1 au point h'_1.

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal.

Notion de rabattement.

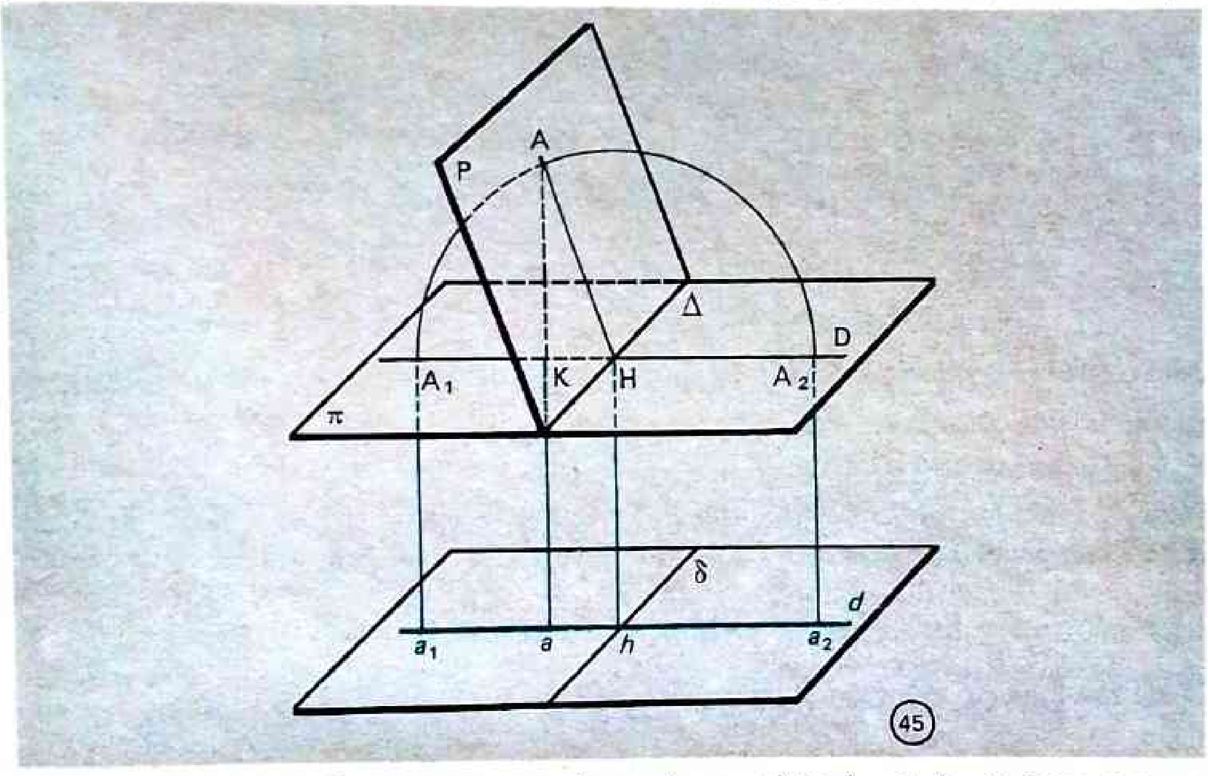
50 Considérons un plan horizontal π et un plan P qui n'est pas horizontal. Désignons par D la droite d'intersection du plan π et du plan P. La droite D est donc une droite horizontale.

Intuitivement, rabattre le plan P sur le plan horizontal π, c'est faire tourner ce plan autour de la droite D de façon à l'amener en coïncidence avec le plan π. La droite horizontale D est appelée **charnière** du rabattement (fig. 45).

L'étude théorique du rabattement ne pourra être abordée qu'en classe Terminale.

Rabattement d'un point du plan.

51 Soient A un point du plan P, H la projection orthogonale de A sur D, K la projection orthogonale de A sur π, et Q le plan qui est perpendiculaire à π et qui passe par A. Posons : $D = \pi \cap Q$. Donc les points H, K et A sont des points de Q et les points H et K sont des points de D. Considérons, dans Q, le cercle de centre H qui



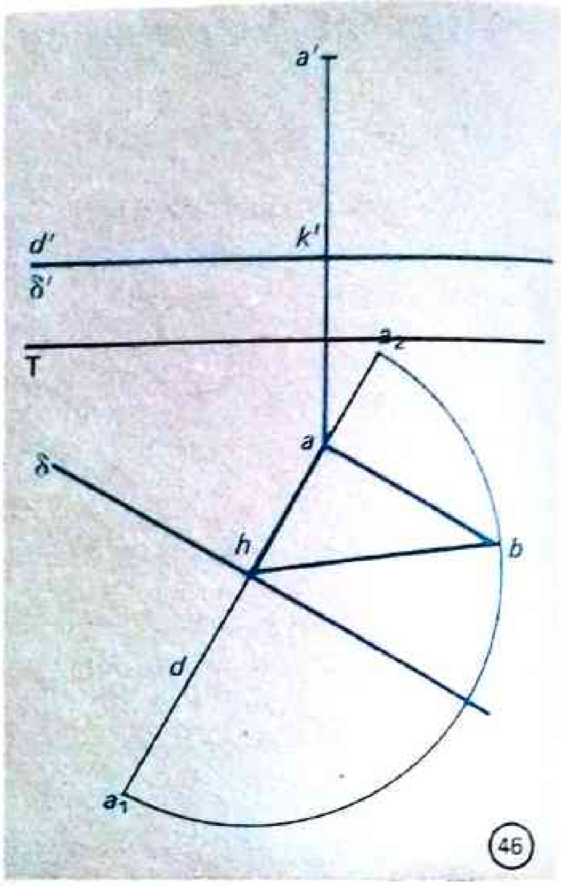
45

passe par le point A. D coupe ce cercle en deux points A_1 et A_2 et nous avons : $\| \overrightarrow{HA_1} \| = \| \overrightarrow{HA_2} \| = \| \overrightarrow{HA} \|$.

Il paraît naturel d'admettre qu'après rabattement du plan P sur le plan π dans le sens indiqué sur la figure, le point A vient coïncider avec le point A_1. Si l'on avait rabattu le plan P dans l'autre sens le point A serait venu coïncider avec le point A_2. Intuitivement, il y a donc deux rabattements possibles du plan P sur le plan π. Chacun des points A_1 ou A_2 est appelé **rabattement** du point A. Remarquons que si l'on choisit comme rabattement du point A, le point A_1 par exemple, alors tout autre point de P a un rabattement bien déterminé.

52 Remarque : Le rabattement de tout point M de la charnière est M.

53 Proposons-nous de construire sur l'épure les projections horizontales a_1 et a_2 des points A_1 et A_2.
Nous connaissons l'épure (δ, δ') de la droite Δ et l'épure (a, a') du point A.
Nous en déduisons la projection horizontale d de la droite D : d est la droite qui est perpendiculaire à δ et qui passe par a.
D est une droite du plan π, l'épure de D est donc : (d, δ'). Les points a_1 et a_2 appartiennent à d et le point h, projection horizontale de H, est le point d'intersection de δ et de d (fig. 46).
De plus K est un point de D dont la projection horizontale est a. Rappelons a en k' sur δ'; (a, k') est l'épure du point K.
D est une droite horizontale. Il en résulte les égalités :



46

$d\,(\mathrm{H}, \mathrm{A}_1) = d\,(h, a_1) = d\,(\mathrm{H}, \mathrm{A}_2) = d\,(h, a_2) = d\,(\mathrm{H}, \mathrm{A})$ et $d\,(\mathrm{H}, \mathrm{K}) = d\,(h, a)$.
Les points K et A appartiennent à une verticale; nous avons donc : $d\,(\mathrm{K}, \mathrm{A}) = d\,(k', a')$.

De l'égalité : $\|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{HK}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\|^2$, il résulte :
$\|\overrightarrow{ha_1}\|^2 = \|\overrightarrow{ha_2}\|^2 = \|\overrightarrow{ha}\|^2 + \|\overrightarrow{k'a'}\|^2$.
Afin de faciliter la construction des points a_1 et a_2, marquons sur la droite perpendiculaire en a à la droite d un point b tel que $\|\overrightarrow{ab}\| = \|\overrightarrow{a'k'}\|$.
Nous avons alors : $\|\overrightarrow{ha_1}\|^2 = \|\overrightarrow{ha_2}\|^2 = \|\overrightarrow{hb}\|^2$.
Nous en déduisons la construction des points a_1 et a_2 : a_1 et a_2 sont les points d'intersection de la droite d et du cercle de centre h qui passe par b.

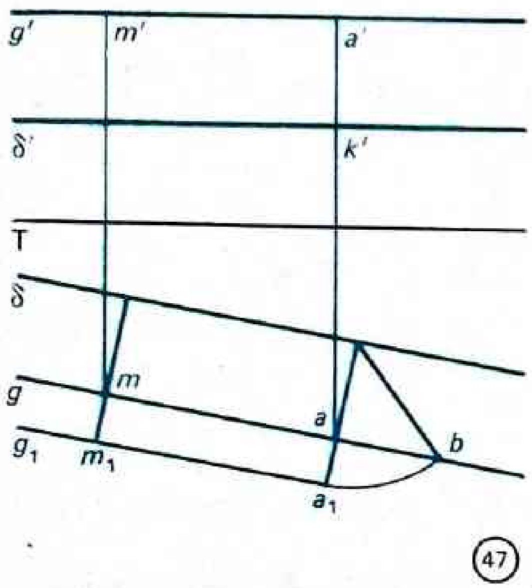
Rabattement d'une droite du plan.

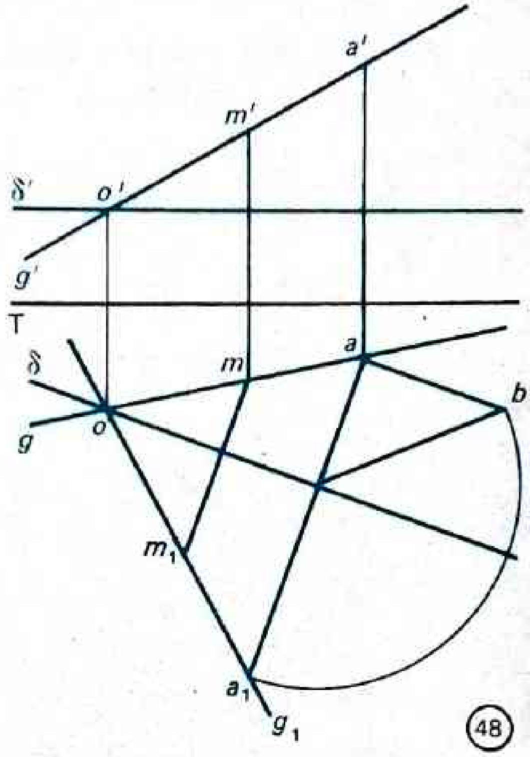
54 Soit G une droite du plan P.
1. Si G est parallèle à D, le rabattement G_1 de G est parallèle à D.
2. Si G est une droite qui coupe D au point O, le rabattement G_1 de G est une droite qui coupe D au point O.

Dans les deux cas, pour déterminer le rabattement d'une droite G du plan P, il suffit de connaître le rabattement d'un point de cette droite.
Le rabattement de tout autre point de la droite est alors déterminé.
Sur l'épure, si G et D sont parallèles, les projections horizontales g et δ sont parallèles. La projection horizontale g_1 de G_1 est alors parallèle à δ.

Si G coupe Δ au point O, les projections horizontales g et δ de ces droites se coupent au point o, projection horizontale du point O. La projection horizontale g_1 de G_1 est alors une droite qui passe par o.

Soit A un point du plan et choisissons A_1 comme rabattement du point A. Utilisons les remarques précédentes pour déterminer le rabattement M_1 d'un point M de P dont l'épure est (m, m'). Désignons par G la droite déterminée par A et M.





Premier cas : G est parallèle à D (fig. 47). g_1 est donc la droite qui est parallèle à D et qui passe par a_1. Le point m_1 appartient à g_1. De plus m_1 appartient à la droite qui est perpendiculaire à δ et qui passe par m. Le point m_1 est donc le point d'intersection de ces deux droites.

Deuxième cas : G coupe D au point O (fig. 48). g_1 est donc la droite déterminée par les points a_1 et o. Le point m_1 est le point d'intersection de g_1 et de la droite qui est perpendiculaire à δ et qui passe par m.

EXERCICES

◆ Soit M un point défini par son épure (nos 1 à 4).

1 Déterminer l'épure du point M_1 symétrique du point M par rapport au plan horizontal.

2 Déterminer l'épure du point M_2 symétrique du point M par rapport au plan frontal.

3 Déterminer l'épure du point N symétrique du point M par rapport à la ligne de terre.

4 Déterminer l'épure d'un point M équidistant du plan horizontal et du plan frontal.

5 Soit D une droite non de profil déterminée par son épure (d, d'). Déterminer l'épure d'un point M de D dont la cote est égale à l'éloignement.

6 Soit D une droite non de profil déterminée par son épure (d, d').
Déterminer les épures respectives du point d'intersection de D et du plan horizontal et du point d'intersection de D et du plan frontal.

7 Soient D une droite non de profil déterminée par son épure (d, d') et A un point d'épure (a, a'). Déterminer, si elle existe, l'épure de la droite horizontale qui passe par A et qui coupe D. Déterminer si elle existe, l'épure de la droite frontale qui passe par A et qui coupe D.

8 Soient (d_1, d_1') et (d_2, d_2') deux droites D_1 et D_2 non de profil et non coplanaires. Dire dans quel cas il existe une droite verticale Δ qui coupe D_1 et D_2. Donner alors l'épure de Δ et les épures des points d'intersection respectifs de Δ et D_1, de Δ et D_2.

9 Soient D_1 et D_2 deux droites non de profil qui ne sont pas horizontales. Donner l'épure d'une droite horizontale de cote donnée qui coupe D_1 et D_2.

10 Soient D_1 une droite verticale, D_2 une droite non de profil qui n'est pas verticale et A un point qui n'appartient ni à D_1 ni à D_2. Dans quel cas existe-t-il une droite D qui passe par A et qui coupe D_1 et D_2? Déterminer alors l'épure de cette droite.

Plans.

11 Un plan P est déterminé par la ligne de terre T et un point (a, a') qui n'appartient pas à T.
1° Soit M un point du plan dont la projection frontale est m'. Déterminer sa projection horizontale m.
2° Déterminer l'épure de la droite horizontale de P qui passe par M.

12 On considère un plan P déterminé par une droite horizontale (d_1, d_1') et une droite frontale (d_2, d_2') sécantes au point (a, a').
Déterminer les traces du plan P.

13 On considère un plan P déterminé par une droite (d, d') parallèle à la ligne de terre et un point (a, a') qui n'appartient pas à cette droite.
Déterminer les traces du plan P.

14 Soient (a, a') et (b, b') deux points d'une droite de profil D et (c, c') un point de la ligne de terre n'appartenant pas à D. On considère le plan défini par D et le point (c, c').
1° Déterminer l'épure de la droite horizontale du plan P qui passe par le point (a, a').
2° Déterminer les traces du plan P.

15 On considère un plan P déterminé par deux droites sécantes non de profil (d_1, d_1') et (d_2, d_2'). Déterminer les traces de P.

◆ Déterminer l'intersection de deux plans P_1 et P_2 dans chacun des cas suivants (nos 16 à 20) :

16 P_1 est déterminé par deux droites sécantes, P_2 est déterminé par deux droites sécantes.

17 P_1 est déterminé par ses traces, P_2 est déterminé par deux droites sécantes.

18 P_1 et P_2 ont leurs deux traces respectivement parallèles.

19 P_1 est parallèle à la ligne de terre ; P_2 est un plan de profil.

20 P_1 et P_2 sont deux plans parallèles à la ligne de terre définis par leurs traces.

◆ Déterminer l'intersection d'un plan P et d'une droite D dans chacun des cas suivants (nos 21 à 23).

21 P est déterminé par ses traces ; D est une droite non de profil.

22 P est déterminé par la ligne de terre T et un point (a, a') qui n'appartient pas à T ; D est une droite non de profil.

23 P est défini par deux droites (d_1, d_1') et (d_2, d_2') sécantes au point (o, o') ; D est une droite (d, d') telle que d passe par o et d' soit parallèle à d_1'.

24 Soient P_1, P_2 et P_3 trois plans non parallèles deux à deux, définis par leurs traces. Déterminer le point d'intersection de ces trois plans.

25 Déterminer l'épure d'une droite qui coupe deux droites non coplanaires (d_1, d_1') et (d_2, d_2') et qui passe par un point (a, a').

26 Déterminer l'épure d'une droite parallèle à une droite (d, d') et qui coupe deux droites non coplanaires (d_1', d_1') et (d_2, d_2').

27 On donne un plan P défini par ses traces, une droite (d, d') non parallèle à P, et un point (a, a') qui n'appartient pas à (d, d'). Déterminer l'épure d'une droite parallèle au plan P, qui passe par un point (a, a') et qui coupe une droite (d, d') qui ne contient pas (a, a') et qui n'est pas parallèle à P.

EXERCICES

Changement de plan.

28 On considère un point (c, c') et une droite de profil D définie par deux de ses points (a, a') et (b, b'). Soit P le plan perpendiculaire à D qui passe par (c, c'). Utiliser un changement de plan frontal, pour déterminer la trace horizontale du plan P. Déterminer la distance du point C à la droite D.

29 Utiliser un changement de plan horizontal pour déterminer la distance de deux points (a, a') et (b, b').

30 Utiliser un changement de plan horizontal pour déterminer la distance d'un point à un plan défini par ses traces.

31 Soit P un plan défini par ses traces. On fait un changement de plan horizontal. Déterminer les nouvelles traces de ce plan.

32 Utiliser un changement de plan pour que, dans le nouveau système de plans de projection une droite (d, d') soit de profil.

33 Utiliser un changement de plan pour déterminer l'intersection de deux droites de profil incluses dans un plan de profil et déterminée respectivement par deux de leurs points.

34 1° Montrer que, par un changement de plan horizontal, on peut rendre horizontal un plan de bout.
2° Montrer que, par un changement de plan frontal, on peut rendre frontal un plan vertical.

35 Soient P un plan parallèle à la ligne de terre défini par ses traces et (a, a') un point qui n'appartient pas à P.
1° Montrer que, par un changement de plan, on peut rendre de bout le plan P.
2° En déduire la distance du point A au plan P.

36 Même exercice que le précédent dans le cas où P est un plan défini par deux droites concourantes.

Rabattements.

37 Soient A le point d'épure (a, a') et D la droite d'épure (d, d'). A n'appartient pas à D et on désigne par P le plan défini par A et D.
1° Déterminer la droite horizontale D_1 du plan P qui passe par A.
2° Rabattre le plan P sur un plan horizontal autour de D_1.
Construire le rabattement de la droite D. En déduire la distance du point A à la droite D.

36.
Calculs numériques (suite)

Ce chapitre ne concerne que la section E. Il constitue un rappel de définitions et de résultats admis et utilisés pour les calculs numériques en classe de Seconde T.

Séries Renard.

Fonction Rang.

1 La fonction Rang est une application de l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
Pour tout réel positif x, l'image de x par la fonction Rang est notée : $\text{Rg } x$.
Cette fonction possède les propriétés suivantes :
1. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout réel z, il existe un réel positif unique x qui vérifie l'égalité : $\text{Rg } x = z$.
3. Pour tout couple (x, y) de réels positifs, on a les égalités :

$\text{Rg } xy = \text{Rg } x + \text{Rg } y$ et $\text{Rg } \frac{x}{y} = \text{Rg } x - \text{Rg } y$.

4. Pour tout réel positif x, on a les égalités :

$\text{Rg } \frac{1}{x} = - \text{Rg } x$ et $\text{Rg } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \text{Rg } x$.

5. Pour tout réel positif x et pour tout entier relatif n, on a l'égalité :
$\text{Rg } x^n = n \text{ Rg } x$.
6. Soit q le réel positif unique qui vérifie l'égalité : $q^{10} = 10$.
Pour tout entier relatif n, on a l'égalité : $\text{Rg } q^n = n$.
En particulier, on a les égalités : $\text{Rg } 1 = 0$ et $\text{Rg } 10 = 10$.

Rang d'une puissance de 10.

2 Pour tout entier relatif n, nous avons l'égalité : $\text{Rg } 10^n = n \text{ Rg } 10$.
Le rang de 10 est égal à 10 ; nous en déduisons l'égalité :
$\text{Rg } 10^n = 10\, n$.
En particulier : $\text{Rg } 0{,}1 = - 10$; $\text{Rg } 100 = 20$; $\text{Rg } 1\,000 = 30$.

Série Renard R_{10} et nombres normaux.

3 Considérons la suite formée des onze nombres suivants :
$1 = q^0$; q; q^2; q^3; q^4; q^5; q^6; q^7; q^8; q^9; $q^{10} = 10$.
Ces nombres admettent pour rangs respectifs les onze entiers suivants :
0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

4 Dans de nombreux calculs approchés de Technologie, il est utile de connaître des valeurs approchées des puissances précédentes de q.
On utilise alors systématiquement les valeurs suivantes :
1; 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,2; 4; 5; 6,4; 8; 10.
Cette suite de nombres est appelée **série Renard** R_{10} ; les nombres qui la composent sont appelés **nombres normaux.**
Le tableau suivant contient les nombres normaux et leurs rangs respectifs :

Nombres	1	1,25	1,6	2	2,5	3,2	4	5	6,4	8	10
Rangs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5 **Remarques :** 1. Dans le tableau précédent, nous constatons que, pour tout entier n compris entre 3 et 10, le nombre normal de rang n est égal au double du nombre normal de rang $n - 3$.
Pour retenir la série Renard R_{10}, il suffit donc d'apprendre les trois premiers nombres normaux : 1; 1,25; 1,6.
2. La propriété précédente tient à l'égalité : $q^n = q^{n-3} \times q^3$.
En effet, le nombre 2 est une valeur approchée de q^3 ; le produit $2\,q^{n-3}$ est donc une valeur approchée de q^n.

Série Renard R_{40}.

6 Les nombres dont le rang est un entier de l'intervalle [0,10] sont donnés approximativement par la série Renard R_{10}.
Dans la pratique, pour augmenter la précision des calculs, on a aussi besoin de connaître les nombres dont le rang appartient à l'intervalle [0,10] et est égal au quart d'un entier.
On utilise alors systématiquement une suite de valeurs approchées, appelée série Renard R_{40} et dont on trouvera un tableau à la fin de ce livre (Voir Tableau VI).

Calcul du rang d'un nombre.

7 **Premier exemple :** Calculer le rang du nombre 640.
Nous avons l'égalité : $640 = 6{,}4.10^2$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } 640 = \text{Rg } 6{,}4 + \text{Rg } 10^2$.
Nous avons : $\text{Rg } 10^2 = 2 \times 10 = 20$.
Nous lisons dans la table : $\text{Rg } 6{,}4 = 8$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } 640 = 28$.

8 **Deuxième exemple :** Calculer le rang du nombre 0,0071.
Nous avons l'égalité : $0{,}0071 = 7{,}1.10^{-3}$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } 0{,}0071 = \text{Rg } 7{,}1 + \text{Rg } 10^{-3} = \text{Rg } 7{,}1 - 30$.
Le nombre 7,1 ne figure pas dans la colonne "Nombres" de la table ; le nombre le plus proche de 7,1 qui figure dans cette colonne est 7,2.
Nous lisons : $\text{Rg } 7{,}2 = 8{,}5$.
Nous adoptons alors pour valeur approchée du rang du nombre 7,1 le nombre 8,5 : $\text{Rg } 7{,}1 = 8{,}5$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } 0{,}0071 = 8{,}5 - 30$, c'est-à-dire : $\text{Rg } 0{,}0071 = -21{,}5$.

Valeur approchée d'un nombre dont on connaît le rang.

9 **Premier exemple :** Calculer le nombre x dont le rang est égal à 34,5.
Nous avons l'égalité : $34{,}5 = 30 + 4{,}5$. (1)
Désignons par x' le nombre dont le rang est égal à 4,5.
Nous avons les égalités : $\text{Rg } x = 34{,}5$; $30 = \text{Rg } 10^3$; $4{,}5 = \text{Rg } x'$. (2)
Des égalités (1) et (2), nous déduisons l'égalité : $\text{Rg } x = \text{Rg } 10^3 + \text{Rg } x'$,
c'est-à-dire : $\text{Rg } x = \text{Rg } 10^3.x'$.
Deux nombres dont les rangs sont égaux sont nécessairement égaux ; nous avons donc l'égalité : $x = 10^3.x'$.
Dans la table, nous lisons une valeur approchée du nombre x' dont le rang est 4,5 : $x' = 2{,}8$. Nous en déduisons : $x = 2\,800$.

10 **Deuxième exemple :** Calculer le nombre y dont le rang est égal à -14.
Nous avons l'égalité : $-14 = -20 + 6$.
Désignons par y' le nombre dont le rang est égal à 6.
Nous avons alors l'égalité : $\text{Rg } y = \text{Rg } 10^{-2} + \text{Rg } y'$,
c'est-à-dire : $\text{Rg } y = \text{Rg } 10^{-2}.y'$.
Comme précédemment, nous en déduisons l'égalité : $y = 10^{-2}.y'$.
Dans la table, nous lisons une valeur approchée du nombre y' dont le rang est 6 : $y' = 4$. Nous en déduisons : $y = 0{,}04$.

Applications pratiques de la série Renard.

11 **Premier exemple :** Calculer le quotient : $x = \dfrac{0{,}585 \times 214}{4{,}259}$.
Nous avons l'égalité : $\text{Rg } x = \text{Rg } 0{,}585 + \text{Rg } 214 - \text{Rg } 4{,}259$. (1)
Dans la table, nous lisons : $\text{Rg } 5{,}85 = 7{,}75$; $\text{Rg } 2{,}14 = 3{,}25$; $\text{Rg } 4{,}259 = 6{,}25$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } 0{,}585 = -10 + 7{,}75 = -2{,}25$;
$\text{Rg. } 214 = 20 + 3{,}25 = 23{,}25$.
L'égalité (1) implique alors les égalités :
$\text{Rg } x = -2{,}25 + 23{,}25 - 6{,}25 = 14{,}75 = 10 + 4{,}75$.
Dans la table, nous lisons : $4{,}75 = \text{Rg } 3$.
Nous en déduisons : $\text{Rg } x = \text{Rg } 10 + \text{Rg } 3$, c'est-à-dire : $x = 30$.

12 **Remarque :** Un calcul plus approché, effectué à la règle, donne : $x = 29{,}4$.

13 **Deuxième exemple :** Calculer le produit : $y = (0{,}938)^3 \times \sqrt{4{,}52}$.

Nous avons l'égalité : $\text{Rg}\, y = 3\ \text{Rg}\, 0{,}938 + \frac{1}{2}\ \text{Rg}\, 4{,}52$. (2)

Dans la table, nous lisons : $\text{Rg}\, 9{,}38 = 9{,}75$; $\text{Rg}\, 4{,}52 = 6{,}5$.
Nous en déduisons : $3\ \text{Rg}\, 0{,}938 = 3\,(-10 + 9{,}75) = 3\,(-0{,}25) = -0{,}75$;
$\frac{1}{2}\ \text{Rg}\, 4{,}52 = \frac{6{,}5}{2} = 3{,}25$.
L'égalité (2) implique : $\text{Rg}\, y = -0{,}75 + 3{,}25 = 2{,}5$.
Dans la table, nous lisons : $2{,}5 = \text{Rg}\, 1{,}8$.
Nous en déduisons : $y = 1{,}8$.

Logarithmes décimaux.

Fonction logarithme décimal.

14 La fonction logarithme décimal est une application de l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
Pour tout réel positif x, l'image par la fonction logarithme décimal est notée : $\log x$.
Cette fonction possède les propriétés suivantes :
1. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout réel z, il existe un réel positif unique x qui vérifie l'égalité : $\log x = z$.
3. Pour tout couple (x, y) de réels positifs, on a les égalités :

$\log xy = \log x + \log y$ et $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$.

4. Pour tout réel positif x, on a les égalités :

$\log \frac{1}{x} = -\log x$ et $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$.

5. Pour tout réel positif x et pour tout entier relatif n, on a l'égalité : $\log x^n = n \log x$.
6. Pour tout entier relatif n, on a l'égalité : $\log 10^n = n$.

En particulier, on a les égalités : $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.

Table de logarithmes à quatre décimales.

15 Nous donnons à la fin de ce livre, p. 286, une table qui fait connaître, avec quatre décimales, des valeurs approchées des mantisses des logarithmes décimaux des entiers naturels compris entre 1 et 1000.

Caractéristique et mantisse d'un logarithme.

16 Soit x un réel positif, et $\log x$ le logarithme décimal de ce réel.
On appelle caractéristique de $\log x$ **la partie entière de ce logarithme; on appelle mantisse de** $\log x$ **la différence de ce logarithme et de sa partie entière.**
Soit n la caractéristique de $\log x$; nous avons donc :
$n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant \log x < n + 1$.
Soit d la mantisse de $\log x$; nous avons : $d = \log x - n$.
Nous en déduisons : $0 \leqslant d < 1$.
Les tables de logarithmes donnent des valeurs approchées des mantisses; elles ne donnent pas les caractéristiques.
Nous rappelons la détermination de la caractéristique de $\log x$.

Caractéristique de log x.

17 Soit x un nombre décimal positif.
1. Si x est supérieur ou égal à 1, la caractéristique de $\log x$ est égale au nombre des chiffres qui précèdent la virgule, diminué de 1.
2. Si x est compris entre 0 et 1, la caractéristique de $\log x$ est négative; sa valeur absolue est égale au nombre des zéros qui précèdent le premier chiffre non nul, y compris le zéro qui précède la virgule.

Exemples : 1. La caractéristique de log 326,6 est 2.
2. La caractéristique de log 1,83 est 0.
3. La caractéristique de log 0,0085 est -3; nous l'écrivons $\bar{3}$.

Mantisse de log x.

18 **Pour tout réel positif** x **et pour tout entier relatif** n**, les nombres** $\log x$ **et** $\log(x.10^n)$ **ont même mantisse.**
Il en résulte que, si x est un nombre décimal, la mantisse de $\log x$ ne dépend que des chiffres significatifs de x.
Exemple : Les mantisses de log 2,83, de log 283 et de log 0,0283 sont égales; nous lisons leur valeur commune dans la table : 4518.

Écriture de log x.

19 Pour écrire $\log x$, nous écrivons :
1. Avant la virgule, la valeur absolue de la caractéristique, surmontée du signe $-$ si cette caractéristique est négative.
2. Après la virgule, la mantisse de $\log x$.

Exemples : 1. Le logarithme de 2,83 est égal à 0,4518.
2. Le logarithme de 0,0283 est égal à $\bar{2}{,}4518$.

Cologarithme d'un nombre.

20 Soit x un réel positif; on appelle cologarithme de x l'opposé du logarithme de x. Le cologarithme de x est donc le logarithme de l'inverse de x. Nous notons :

$$\operatorname{colog} x = -\log x = \log \frac{1}{x}.$$

Écriture du cologarithme d'un nombre.

21 Soit x un réel positif.
1. Si la mantisse de $\log x$ est nulle, la mantisse de $\operatorname{colog} x$ est nulle; les caractéristiques respectives de $\log x$ et de $\operatorname{colog} x$ sont opposées.
2. Si la mantisse de $\log x$ n'est pas nulle, la somme des mantisses respectives de $\log x$ et de $\operatorname{colog} x$ est égale à 1 ; la somme des caractéristiques respectives de $\log x$ et de $\operatorname{colog} x$ est égale à -1.

Exemples : 1. Si $\log x$ est égal à 3,0000, $\operatorname{colog} x$ est égal à $\bar{3},0000$.
2. Si $\log x$ est égal à $\bar{2},3421$, $\operatorname{colog} x$ est égal à 1,6579.

Détermination du logarithme d'un nombre positif.

22 Premier cas : le nombre donné x est un nombre décimal positif qui comporte au plus trois chiffres significatifs.
On détermine la caractéristique du logarithme de x en appliquant la règle n° 17, p. 271 ; on lit directement la mantisse dans la table.

Exemples : 1. $\log 17,3 = 1,2380$.
2. $\log 0,0484 = \bar{2},6848$.

23 Deuxième cas : on connaît une valeur décimale approchée de x avec au moins quatre chiffres significatifs.
On conserve quatre chiffres significatifs, en ajoutant 1 au dernier chiffre conservé si le cinquième chiffre significatif est supérieur ou égal à 5. On détermine la caractéristique du logarithme de x en appliquant la règle du n° 17; on calcule la mantisse de $\log x$ en faisant une interpolation linéaire.

Exemple : Calcul de $\log 208,324$.
Nous conservons quatre chiffres significatifs, et nous calculons $\log 208,3$ par interpolation linéaire. Nous avons : $\log 208 = 2,3181$, $\log 209 = 2,3201$.
La différence tabulaire est 0,0020; nous en concluons :

$$\log 208,3 = \log 208 + \frac{3}{10} \times 0,0020 = \log 208 + 0,0006.$$

Nous avons donc : $\log 208,3 = 2,3187$.

Détermination d'un nombre dont on connaît le logarithme.

24 **Premier cas** : la mantisse du logarithme est dans la table.
On détermine alors trois chiffres significatifs par simple lecture dans la table ; puis le nombre des zéros qui précèdent ou qui suivent ces chiffres significatifs, et la place de la virgule à l'aide de la caractéristique.

Exemples : 1. Si l'on donne : $\log x = 2{,}7782$, on a : $x = 600{,}0$.
2. Si l'on donne : $\log x = \bar{1}{,}8482$, on a : $x = 0{,}7050$.

25 **Deuxième cas** : la mantisse du logarithme n'est pas dans la table.
On détermine alors une valeur approchée du nombre x par interpolation linéaire.

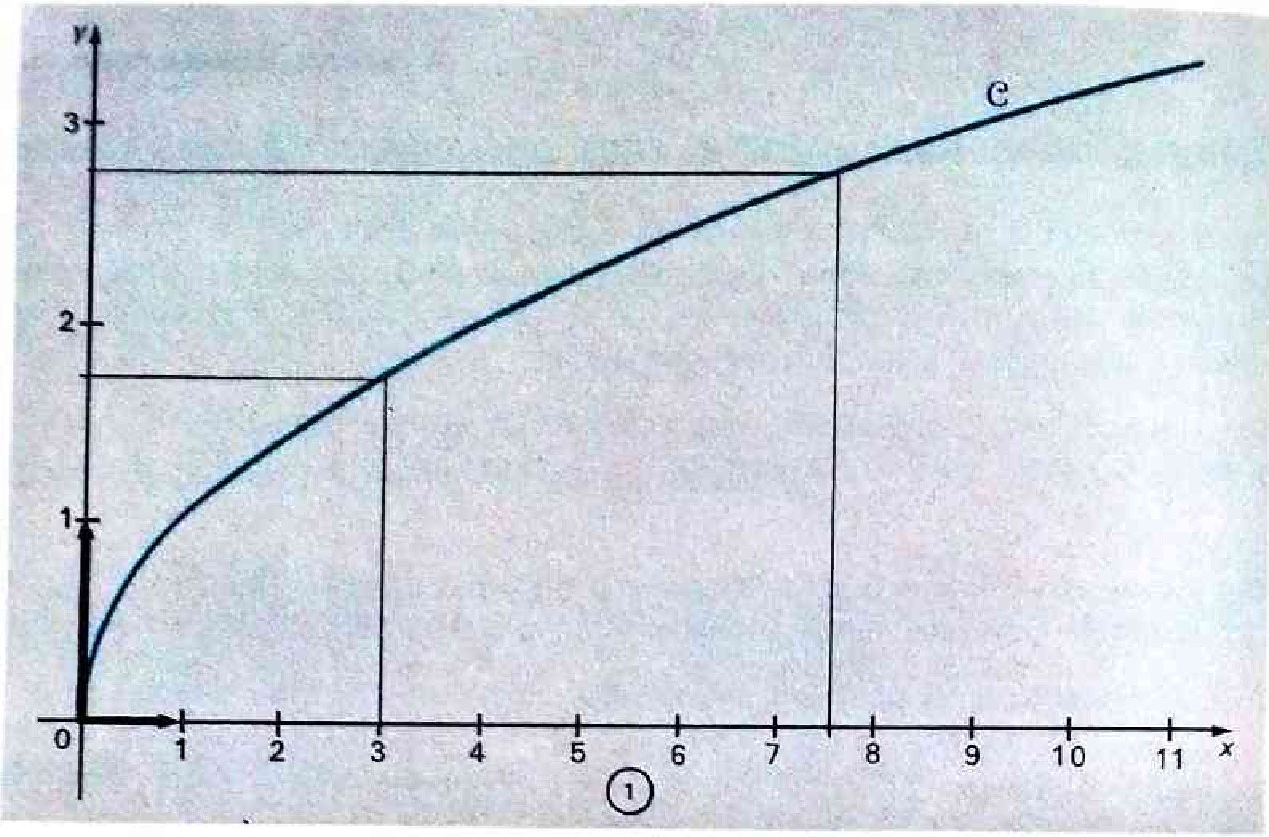
Exemple : Si l'on donne : $\log x = 1{,}9055$, on a :
$\log 80{,}4 = 1{,}9053$,
$\log 80{,}5 = 1{,}9058$.
Nous en déduisons : $\log 80{,}44 = 1{,}9055$.
Une valeur approchée du nombre x dont le logarithme est 1,9055 est égale à 80,44.

Notions sur les abaques.

26 Un abaque est un graphique qui permet d'obtenir sans calcul certains résultats numériques.

Abaque à courbe unique.

27 Soit f une fonction définie sur un intervalle E. Considérons le tracé de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$; nous pouvons résoudre graphiquement les deux problèmes suivants :
1. Déterminer une valeur approchée du réel $f(x)$ pour un réel x de l'intervalle E.
2. Déterminer, pour un réel y de l'ensemble $f(E)$, une valeur approchée de chacun des réels x qui vérifient : $f(x) = y$.



1

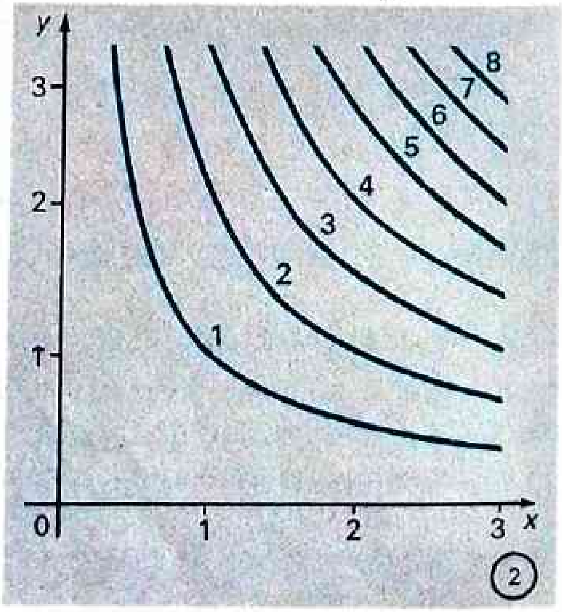
Exemple : La figure 1 donne la courbe représentative de la fonction f :
$f: \forall x \in [0, 12], \quad x \leadsto \sqrt{x}$.
Nous lisons sur la figure qu'une valeur approchée de $\sqrt{3}$ est 1,73 et qu'une valeur approchée du réel positif x qui vérifie : $\sqrt{x} = 2,75$ est : 7,5.

Abaque cartésien.

28 Nous allons donner un exemple d'abaques qui fait intervenir une famille de courbes représentatives.

Exemple : Soient trois réels positifs, x, y, z.
Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et pour certains réels $z_0, z_1, \ldots$, traçons les courbes représentatives des fonctions : $f_z : \forall x \in]0, 5], \quad x \leadsto \frac{z}{x}$.

Soit C_{z_0} la courbe représentative de la fonction f_{z_0}. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe C_{z_0} si et seulement si les réels positifs x, y, z_0 vérifient l'égalité : $xy = z_0$.
Sur la figure 2, nous avons tracé les courbes C_z pour les entiers non nuls inférieurs à 8. Nous lisons sur cette figure que le produit $1,4 \times 1,3$ est compris entre 3 et 4. Il serait possible d'obtenir une précision plus grande en traçant un réseau de courbes plus serré ; mais les abaques sont surtout utilisés pour déterminer de façon rapide des résultats assez grossièrement approchés.



2

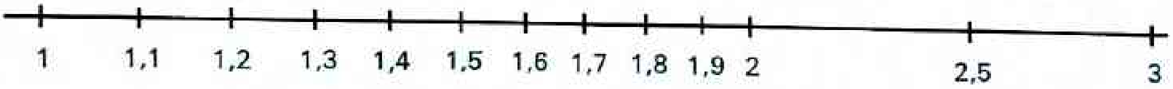
Échelle fonctionnelle.

29 Soient Δ une droite et $(O, \vec{u})$ un repère de Δ.
Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle E, on appelle échelle fonctionnelle de la fonction f sur Δ l'ensemble $\mathcal{E}$:
$\mathcal{E} = \{(M, x) \mid M \in \Delta, \quad x \in E, \quad \overrightarrow{OM} = f(x)\,\vec{u}\}$.
Un élément d'une **échelle fonctionnelle** de f sur Δ est donc un couple formé d'un point M de Δ et d'un réel x appelé **cote** du point M.
Pour représenter une échelle fonctionnelle sur une droite Δ, on marque sur Δ différents points et l'on indique seulement la cote de ces points.

Exemples : 1. Sur la figure 3, nous avons représenté une échelle de la fonction : $x \leadsto x^2$. Nous avons marqué sur Δ les points dont la cote est un entier naturel inférieur à 7.

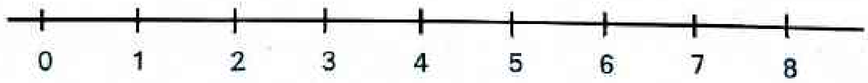
3

2. Sur la figure 4, nous avons représenté une échelle fonctionnelle de la fonction : $x \leadsto \log x$. Nous avons marqué sur Δ les points dont la cote est un nombre décimal de la forme $a.10^{-1}$ où a est un entier naturel compris entre 10 et 30.



4

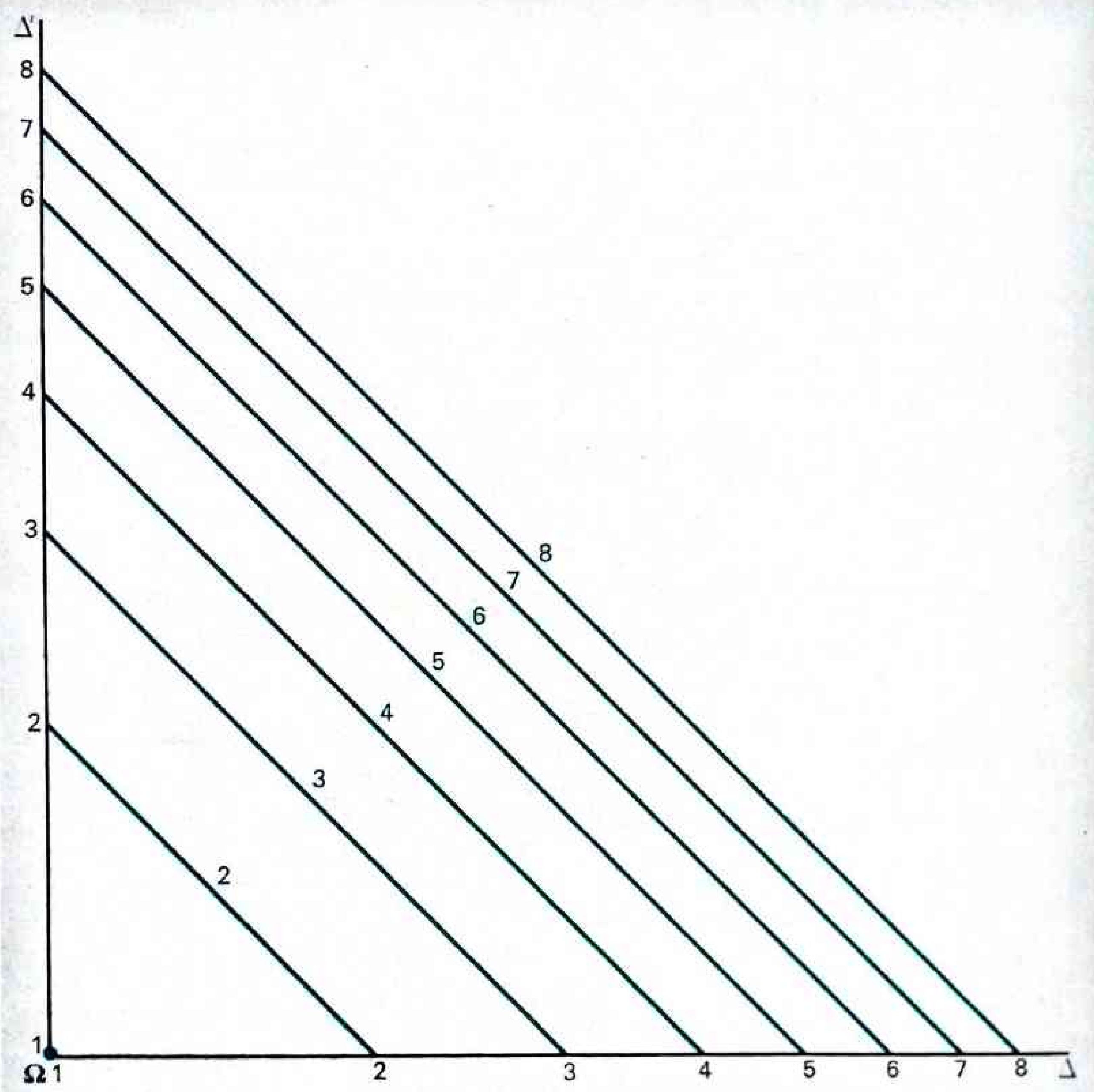
3. Sur la figure 5, nous avons représenté une échelle fonctionnelle d'une fonction affine : $x \leadsto ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Une telle échelle est appelée **échelle métrique.**



5

Utilisation d'échelles fonctionnelles.

30 Pour tracer l'abaque du n° 28, nous avons utilisé des échelles métriques. L'emploi d'échelles fonctionnelles non métriques permet parfois de simplifier le tracé des courbes de l'abaque.
Reprenons l'exemple du n° 28.
Pour cet exemple, nous avons l'équivalence logique :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^*, \quad (xy = z) \Longleftrightarrow (\log x + \log y = \log z)$.
Posons : $X = \log x$; $Y = \log y$; $Z = \log z$; nous avons : $X + Y = Z$.



6

Soit $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ un repère cartésien. Désignons par Δ la droite déterminée par Ω et le vecteur $\vec{u}$, par Δ' la droite déterminée par Ω et le vecteur $\vec{v}$ (fig. 6).
Munissons Δ et Δ' des échelles fonctionnelles attachées à la fonction logarithme.
Pour un réel positif Z donné, $X + Y = Z$ est l'équation d'une droite D_z qui coupe Δ en A et Δ' en A'. Les points A et A' sont les points respectifs de Δ et de Δ' dont la cote est le réel z tel que : $\log z = Z$.

EXERCICES

◆ Déterminer, à l'aide de la série Renard R_{40}, une valeur approchée de chacun des réels suivants :

1 $75 \times 8700 \times 63$; $\quad (5,2)^3 \times 62 \times (18)^2$.

2 $\dfrac{15 \times 680}{560 \times 34}$; $\quad \dfrac{24 \times (0,85)^4}{(1,9)^3 \times 0,34}$.

3 $\dfrac{(41)^2 \sqrt{18}}{(7,5)^6}$; $\quad \dfrac{\sqrt{7,2} \times (9,1)^3}{850}$.

◆ Calculer les logarithmes des réels positifs suivants :

4 7513 ; 257,3 ; 0,5428. **5** 16230 ; 33,18 ; 0,005112.

6 5031,4 ; 2,0035 ; 0,04856. **7** 0,40342 ; 346,18 ; 3242800.

8 1257,58 ; 45,9349 ; 8,76217. **9** 1,73928 ; 0,314586 ; 963649.

◆ Calculer les réels positifs dont les logarithmes respectifs sont :

10 2,6732 ; 0,8702 ; $\bar{3}$,1846. **11** 4,2889 ; $\bar{1}$,7002 ; 0,9837.

12 $\bar{4}$,9622 ; 1,4707 ; 0,3009. **13** 0,4770 ; 3,6008 ; $\bar{2}$,8953.

14 5,0871 ; $\bar{1}$,5718 ; 2,8456. **15** $\bar{5}$,9028 ; 0,7100 ; 2,1362.

◆ Calculer les cologarithmes des réels positifs dont les logarithmes respectifs sont :

16 2,1342 ; 0,7152 ; $\bar{2}$,1420. **17** 3,5238 ; $\bar{1}$,2631 ; 3,3021.

◆ Calculer les cologarithmes des réels positifs suivants :

18 3204 ; 0,021823 ; 734,67. **19** 87,42 ; 0,68215 ; 1627,58.

◆ Calculer les réels positifs dont les cologarithmes respectifs sont :

20 2,6017 ; 0,5464 ; $\bar{3}$,1324. **21** $\bar{2}$,2050 ; $\bar{1}$,1296 ; 3,9101.

◆ Calculer une valeur approchée de chacun des réels suivants :

22 $2,7453 \times 2,43 \times 278$. **23** $\dfrac{45,43}{18,7253 \times 726,26}$.

24 $(17,256)^5 \times (315,73)^7$. **25** $(0,5272)^2 \times \sqrt{55,892}$.

26 $\dfrac{(55,812)^2}{\sqrt{(0,38721)(0,053652)}}$. **27** $\sqrt{\dfrac{12,568 \times (5,2324)^3}{(3,116)^5}}$.

28 $(3,725)^2 + (2,6873)^5 - (11,678)^2$.

29 $3,4587 \times \sqrt{0,52324} + 8,2834 \times \sqrt{0,34652}$.

EXERCICES

Échelles.

30 On considère la fonction f : $\forall x \in [0, 1]$, $x \leadsto x\sqrt{x}$.
1° Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1]$.
2° Donner une table à deux décimales de la fonction f dont le pas p est égal à 0,1.
3° Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère cartésien.
4° Déterminer une valeur approchée du réel y, image du réel x dans chacun des cas suivants : $x = 0{,}13$, $x = 0{,}26$, $x = 48$.
5° Déterminer une valeur approchée du réel x tel que : $f(x) = y$ dans chacun des cas suivants : $y = 0{,}1$, $y = 0{,}2$, $y = 0{,}3$, ... $y = 0{,}9$.
6° Marquer sur une droite D les points de l'échelle de la fonction f dont les cotes sont respectivement : 0, 0,1 0,2, ..., 0,9, 1.

31 Même exercice que le précédent dans le cas où la fonction f est la fonction : $\forall x \in [0, 1]$, $x \leadsto x^2\sqrt{x}$.

Abaques.

32 Soient deux fils électriques dont les résistances électriques, exprimées en ohms, sont R_1 et R_2. On démontre que, si ces fils sont montés en parallèle, la résistance R de l'ensemble, exprimée en ohms, est : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
1° Montrer que, par un choix convenable d'échelle fonctionnelle, on obtient un abaque cartésien dont les courbes sont des droites.
2° Construire cet abaque pour les valeurs entières de R comprises entre 1 et 10.

33 Soit un fil électrique dont la résistance exprimée en ohms est R ; lorsque ce fil est parcouru par un courant continu dont l'intensité exprimée en ampères est i, la puissance dégagée P, exprimée en watts, est : $P = Ri^2$.
1° Montrer que, pour P donné, on obtient, par un choix convenable d'échelles fonctionnelles, des abaques cartésiens dont les courbes sont des droites.
2° Construire cet abaque pour les valeurs de P comprises entre 1 kW et 100 kW, et égales à 10^{λ} kW, avec $\lambda \in \mathbb{N}$.

DIXIÈME PARTIE

tables numériques

Table n° I Carrés, cubes, inverses et racines carrées des nombres entiers de 1 à 200.

Table n° II Table des fonctions circulaires.
Cette table donne sin x, cos x, tg x pour les nombres décimaux x de la forme $a.10^{-2}$, où a est un entier naturel inférieur à 100.

Table n° III Table des fonctions Sinus et Cosinus d'un angle $\widehat{\varphi}$ dont on connaît une mesure en degrés y.
Cette table donne, pour chaque entier y compris entre 0 et 90, les valeurs de Sin $\widehat{\varphi}$, $\dfrac{\text{Sin } \widehat{\varphi}}{\text{Cos } \widehat{\varphi}}$, $\dfrac{\text{Cos } \widehat{\varphi}}{\text{Sin } \widehat{\varphi}}$, Cos $\widehat{\varphi}$.

Table n° IV Table des fonctions Sinus et Cosinus d'un angle $\widehat{\varphi}$ dont on connaît une mesure en grades z.
Cette table donne, pour chaque entier z compris entre 0 et 100, les valeurs de Sin $\widehat{\varphi}$, $\dfrac{\text{Sin } \widehat{\varphi}}{\text{Cos } \widehat{\varphi}}$, $\dfrac{\text{Cos } \widehat{\varphi}}{\text{Sin } \widehat{\varphi}}$, Cos $\widehat{\varphi}$.

Tableau n° V

Table n° VI Série Renard R_{40}.
Cette table donne, pour tout entier naturel n inférieur à 40, le réel x dont le rang est $\frac{n}{4}$.

Table n°• VII Logarithmes décimaux à quatre décimales.
Cette table donne, pour tout entier naturel n inférieur à 1 000, une valeur approchée de la mantisse de log n avec quatre décimales.

Tableau n° VIII Valeurs approchées.
Ce tableau rappelle un certain nombre de résultats établis en classe de Seconde et en classe de Première, pour les valeurs approchées usuelles de quelques réels.

Table n° I

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$
1	1	1	1	1	**51**	2 601	132 651	0,0196	7,141
2	4	8	0,5000	1,414	**52**	2 704	140 608	0,0192	7,211
3	9	27	0,3333	1,732	**53**	2 809	148 877	0,0189	7,280
4	16	64	0,2500	2,000	**54**	2 916	157 464	0,0185	7,348
5	25	125	0,2000	2,236	**55**	3 025	166 375	0,0182	7,416
6	36	216	0,1667	2,449	**56**	3 136	175 616	0,0179	7,483
7	49	343	0,1429	2,646	**57**	3 249	185 193	0,0175	7,550
8	64	512	0,1250	2,828	**58**	3 364	195 112	0,0172	7,616
9	81	729	0,1111	3,000	**59**	3 481	205 379	0,0169	7,681
10	100	1 000	0,1000	3,162	**60**	3 600	216 000	0,0167	7,746
11	121	1 331	0,0909	3,317	**61**	3 721	226 981	0,0164	7,810
12	144	1 728	0,0833	3,464	**62**	3 844	238 328	0,0161	7,874
13	169	2 197	0,0769	3,606	**63**	3 969	250 047	0,0159	7,937
14	196	2 744	0,0714	3,742	**64**	4 096	262 144	0,0156	8,000
15	225	3 375	0,0667	3,873	**65**	4 225	274 625	0,0154	8,062
16	256	4 096	0,0625	4,000	**66**	4 356	287 496	0,0152	8,124
17	289	4 913	0,0588	4,123	**67**	4 489	300 763	0,0149	8,185
18	324	5 832	0,0556	4,243	**68**	4 624	314 432	0,0147	8,246
19	361	6 859	0,0526	4,359	**69**	4 761	328 509	0,0145	8,307
20	400	8 000	0,0500	4,472	**70**	4 900	343 000	0,0143	8,367
21	441	9 261	0,0476	4,583	**71**	5 041	357 911	0,0141	8,426
22	484	10 648	0,0455	4,690	**72**	5 184	373 248	0,0139	8,485
23	529	12 167	0,0435	4,796	**73**	5 329	389 017	0,0137	8,544
24	576	13 824	0,0417	4,899	**74**	5 476	405 224	0,0135	8,602
25	625	15 625	0,0400	5,000	**75**	5 625	421 875	0,0133	8,660
26	676	17 576	0,0385	5,099	**76**	5 776	438 976	0,0132	8,718
27	729	19 683	0,0370	5,196	**77**	5 929	456 533	0,0130	8,775
28	784	21 952	0,0357	5,292	**78**	6 084	474 552	0,0128	8,832
29	841	24 389	0,0345	5,385	**79**	6 241	493 039	0,0127	8,888
30	900	27 000	0,0333	5,477	**80**	6 400	512 000	0,0125	8,944
31	961	29 791	0,0323	5,568	**81**	6 561	531 441	0,0123	9,000
32	1 024	32 768	0,0313	5,657	**82**	6 724	551 368	0,0122	9,055
33	1 089	35 937	0,0303	5,745	**83**	6 889	571 787	0,0120	9,110
34	1 156	39 304	0,0294	5,831	**84**	7 056	592 704	0,0119	9,165
35	1 225	42 875	0,0286	5,916	**85**	7 225	614 125	0,0118	9,220
36	1 296	46 656	0,0278	6,000	**86**	7 396	636 056	0,0116	9,274
37	1 369	50 653	0,0270	6,083	**87**	7 569	658 503	0,0115	9,327
38	1 444	54 872	0,0263	6,164	**88**	7 744	681 472	0,0114	9,381
39	1 521	59 319	0,0256	6,245	**89**	7 921	704 969	0,0112	9,434
40	1 600	64 000	0,0250	6,325	**90**	8 100	729 000	0,0111	9,487
41	1 681	68 921	0,0244	6,403	**91**	8 281	753 571	0,0110	9,539
42	1 764	74 088	0,0238	6,481	**92**	8 464	778 688	0,0109	9,592
43	1 849	79 507	0,0233	6,557	**93**	8 649	804 357	0,0108	9,644
44	1 936	85 184	0,0227	6,633	**94**	8 836	830 584	0,0106	9,695
45	2 025	91 125	0,0222	6,708	**95**	9 025	857 375	0,0105	9,747
46	2 116	97 336	0,0217	6,782	**96**	9 216	884 736	0,0104	9,798
47	2 209	103 823	0,0213	6,856	**97**	9 409	912 673	0,0103	9,849
48	2 304	110 592	0,0208	6,928	**98**	9 604	941 192	0,0102	9,899
49	2 401	117 649	0,0204	7,000	**99**	9 801	970 299	0,0101	9,950
50	2 500	125 000	0,0200	7,071	**100**	10 000	1 000 000	0,0100	10,000

Table n° I (suite)

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$
101	10 201	1 030 301	0,0099	10,0499	**151**	22 801	3 442 951	0,0066	12,2882
102	10 404	1 061 208	0,0098	10,0995	**152**	23 104	3 511 808	0,0066	12,3288
103	10 609	1 092 727	0,0097	10,1489	**153**	23 409	3 581 577	0,0065	12,3693
104	10 816	1 124 864	0,0096	10,1980	**154**	23 716	3 652 264	0,0065	12,4097
105	11 025	1 157 625	0,0095	10,2470	**155**	24 025	3 723 875	0,0065	12,4499
106	11 236	1 191 016	0,0094	10,2956	**156**	24 336	3 796 416	0,0064	12,4900
107	11 449	1 225 043	0,0093	10,3441	**157**	24 649	3 869 893	0,0064	12,5300
108	11 664	1 259 712	0,0093	10,3923	**158**	24 964	3 944 312	0,0063	12,5698
109	11 881	1 295 029	0,0092	10,4403	**159**	25 281	4 019 679	0,0063	12,6095
110	12 100	1 331 000	0,0091	10,4881	**160**	25 600	4 096 000	0,0063	12,6491
111	12 321	1 367 631	0,0090	10,5357	**161**	25 921	4 173 281	0,0062	12,6886
112	12 544	1 404 928	0,0089	10,5830	**162**	26 244	4 251 528	0,0062	12,7279
113	12 769	1 442 897	0,0089	10,6301	**163**	26 569	4 330 747	0,0061	12,7671
114	12 996	1 481 544	0,0088	10,6771	**164**	26 896	4 410 944	0,0061	12,8062
115	13 225	1 520 875	0,0087	10,7238	**165**	27 225	4 492 125	0,0061	12,8452
116	13 456	1 560 896	0,0086	10,7703	**166**	27 556	4 574 296	0,0060	12,8841
117	13 689	1 601 613	0,0085	10,8167	**167**	27 889	4 657 463	0,0060	12,9228
118	13 924	1 643 032	0,0085	10,8628	**168**	28 224	4 741 632	0,0060	12,9615
119	14 161	1 685 159	0,0084	10,9087	**169**	28 561	4 826 809	0,0059	13,0000
120	14 400	1 728 000	0,0083	10,9545	**170**	28 900	4 913 000	0,0059	13,0384
121	14 641	1 771 561	0,0083	11,0000	**171**	29 241	5 000 211	0,0058	13,0767
122	14 884	1 815 848	0,0082	11,0454	**172**	29 584	5 088 448	0,0058	13,1149
123	15 129	1 860 867	0,0081	11,0905	**173**	29 929	5 177 717	0,0058	13,1529
124	15 376	1 906 624	0,0081	11,1355	**174**	30 276	5 268 024	0,0057	13,1909
125	15 625	1 953 125	0,0080	11,1803	**175**	30 625	5 359 375	0,0057	13,2288
126	15 876	2 000 376	0,0079	11,2250	**176**	30 976	5 451 776	0,0057	13,2665
127	16 129	2 048 383	0,0079	11,2694	**177**	31 329	5 545 233	0,0057	13,3041
128	16 384	2 097 152	0,0078	11,3137	**178**	31 684	5 639 752	0,0056	13,3417
129	16 641	2 146 689	0,0078	11,3578	**179**	32 041	5 735 339	0,0056	13,3791
130	16 900	2 197 000	0,0077	11,4018	**180**	32 400	5 832 000	0,0056	13,4164
131	17 161	2 248 091	0,0076	11,4455	**181**	32 761	5 929 741	0,0055	13,4536
132	17 424	2 299 968	0,0076	11,4891	**182**	33 124	6 028 568	0,0055	13,4907
133	17 689	2 352 637	0,0075	11,5326	**183**	33 489	6 128 487	0,0055	13,5277
134	17 956	2 406 104	0,0075	11,5758	**184**	33 856	6 229 504	0,0054	13,5647
135	18 225	2 460 375	0,0074	11,6190	**185**	34 225	6 331 625	0,0054	13,6015
136	18 496	2 515 456	0,0074	11,6619	**186**	34 596	6 434 856	0,0054	13,6382
137	18 769	2 571 353	0,0073	11,7047	**187**	34 969	6 539 203	0,0053	13,6748
138	19 044	2 628 072	0,0072	11,7473	**188**	35 344	6 644 672	0,0053	13,7113
139	19 321	2 685 619	0,0072	11,7898	**189**	35 721	6 751 269	0,0053	13,7477
140	19 600	2 744 000	0,0071	11,8322	**190**	36 100	6 859 000	0,0053	13,7840
141	19 881	2 803 221	0,0071	11,8743	**191**	36 481	6 967 871	0,0052	13,8203
142	20 164	2 863 288	0,0070	11,9164	**192**	36 864	7 077 888	0,0052	13,8564
143	20 449	2 924 207	0,0070	11,9583	**193**	37 249	7 189 057	0,0052	13,8924
144	20 736	2 985 984	0,0069	12,0000	**194**	37 636	7 301 384	0,0052	13,9284
145	21 025	3 048 625	0,0069	12,0416	**195**	38 025	7 414 875	0,0051	13,9642
146	21 316	3 112 136	0,0068	12,0830	**196**	38 416	7 529 536	0,0051	14,0000
147	21 609	3 176 523	0,0068	12,1244	**197**	38 809	7 645 373	0,0051	14,0357
148	21 904	3 241 792	0,0068	12,1655	**198**	39 204	7 762 392	0,0051	14,0712
149	22 201	3 307 949	0,0067	12,2066	**199**	39 601	7 880 599	0,0050	14,1067
150	22 500	3 375 000	0,0067	12,2474	**200**	40 000	8 000 000	0,0050	14,1421

Table n° II

x	cos x	sin x	tg x	x	cos x	sin x	tg x
0,00	1	0	0	**0,50**	0,877 6	0,479 4	0,546 3
0,01	1	0,010 0	0,010 0	**0,51**	0,872 7	0,488 2	0,559 4
0,02	0,999 8	0,020 0	0,020 0	**0,52**	0,867 8	0,496 9	0,572 6
0,03	0,999 6	0,030 0	0,030 0	**0,53**	0,862 8	0,505 5	0,585 9
0,04	0,999 2	0,040 0	0,040 0	**0,54**	0,857 7	0,514 1	0,599 4
0,05	0,998 8	0,050 0	0,050 0	**0,55**	0,852 5	0,522 7	0,613 1
0,06	0,998 2	0,060 0	0,060 1	**0,56**	0,847 3	0,531 2	0,626 9
0,07	0,997 6	0,069 9	0,070 1	**0,57**	0,841 9	0,539 6	0,641 0
0,08	0,996 8	0,079 9	0,080 2	**0,58**	0,836 5	0,548 0	0,655 2
0,09	0,996 0	0,089 9	0,090 2	**0,59**	0,830 9	0,556 4	0,669 6
0,10	0,995 0	0,099 8	0,100 3	**0,60**	0,825 3	0,564 6	0,684 1
0,11	0,994 0	0,109 8	0,110 4	**0,61**	0,819 6	0,572 9	0,698 9
0,12	0,992 8	0,119 7	0,120 6	**0,62**	0,813 9	0,581 0	0,713 9
0,13	0,991 6	0,129 6	0,130 7	**0,63**	0,808 0	0,589 1	0,729 1
0,14	0,990 2	0,139 5	0,140 9	**0,64**	0,802 1	0,597 2	0,744 5
0,15	0,988 8	0,149 4	0,151 1	**0,65**	0,796 1	0,605 2	0,760 2
0,16	0,987 2	0,159 3	0,161 4	**0,66**	0,790 0	0,613 1	0,776 1
0,17	0,985 6	0,169 2	0,171 7	**0,67**	0,783 8	0,621 0	0,792 3
0,18	0,983 8	0,179 0	0,182 0	**0,66**	0,777 6	0,628 8	0,808 7
0,19	0,982 0	0,188 9	0,192 3	**0,69**	0,771 2	0,636 5	0,825 3
0,20	0,980 1	0,198 7	0,202 7	**0,70**	0,764 8	0,644 2	0,842 3
0,21	0,978 0	0,208 5	0,213 1	**0,71**	0,758 4	0,651 8	0,859 5
0,22	0,975 9	0,218 2	0,223 6	**0,72**	0,751 8	0,659 4	0,877 1
0,23	0,973 7	0,228 0	0,234 1	**0,73**	0,745 2	0,666 9	0,894 9
0,24	0,971 3	0,237 7	0,244 7	**0,74**	0,738 5	0,674 3	0,913 1
0,25	0,968 9	0,247 4	0,255 3	**0,75**	0,731 7	0,681 6	0,931 6
0,26	0,966 4	0,257 1	0,266 0	**0,76**	0,724 8	0,688 9	0,950 5
0,27	0,963 8	0,266 7	0,276 8	**0,77**	0,717 9	0,696 1	0,969 7
0,28	0,961 1	0,276 4	0,287 6	**0,78**	0,710 9	0,703 3	0,989 3
0,29	0,958 2	0,286 0	0,298 4	**0,79**	0,703 8	0,710 4	1,009 2
0,30	0,955 3	0,295 5	0,309 3	**0,80**	0,696 7	0,717 4	1,029 6
0,31	0,952 3	0,305 1	0,320 3	**0,81**	0,689 5	0,724 3	1,050 5
0,32	0,949 2	0,314 6	0,331 4	**0,82**	0,682 2	0,731 1	1,071 7
0,33	0,946 0	0,324 0	0,342 5	**0,83**	0,674 9	0,737 9	1,093 4
0,34	0,942 8	0,333 5	0,353 7	**0,84**	0,667 5	0,744 6	1,115 6
0,35	0,939 4	0,342 9	0,365 0	**0,85**	0,660 0	0,751 3	1,138 3
0,36	0,935 9	0,352 3	0,376 4	**0,86**	0,652 4	0,757 8	1,161 6
0,37	0,932 3	0,361 6	0,387 9	**0,87**	0,644 8	0,764 3	1,185 3
0,38	0,928 7	0,370 9	0,399 4	**0,88**	0,637 2	0,770 7	1,209 7
0,39	0,924 9	0,380 2	0,411 1	**0,89**	0,629 4	0,777 1	1,234 6
0,40	0,921 1	0,389 4	0,422 8	**0,90**	0,621 6	0,783 3	1 260,2
0,41	0,917 1	0,398 6	0,434 6	**0,91**	0,613 7	0,789 5	1,286 4
0,42	0,913 1	0,407 8	0,446 6	**0,92**	0,605 8	0,795 6	1,313 3
0,43	0,909 0	0,416 9	0,458 6	**0,93**	0,597 8	0,801 6	1,340 9
0,44	0,904 8	0,425 9	0,470 8	**0,94**	0,589 8	0,807 6	1,369 2
0,45	0,900 4	0,435 0	0,483 1	**0,95**	0,581 7	0,813 4	1,398 4
0,46	0,896 1	0,443 9	0,495 4	**0,96**	0,573 5	0,819 2	1 428 4
0,47	0,891 6	0,452 9	0,508 0	**0,97**	0,565 3	0,824 9	1,459 2
0,48	0,887 0	0,461 8	0,520 6	**0,98**	0,557 0	0,830 5	1,491 0
0,49	0,882 3	0,470 6	0,533 4	**0,99**	0,548 7	0,836 0	1,523 7
0,50	0,877 6	0,479 4	0,546 3	**1,00**	0,540 3	0,841 5	1,557 4

Mesure en degrés de l'angle $\widehat{\varphi}$	Sin $\widehat{\varphi}$	$\dfrac{\text{Sin } \widehat{\varphi}}{\text{Cos } \widehat{\varphi}}$	$\dfrac{\text{Cos } \widehat{\varphi}}{\text{Sin } \widehat{\varphi}}$	Cos $\widehat{\varphi}$	
0	0,0000	0,0000		1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,247	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	45
	Cos $\widehat{\varphi}$	$\dfrac{\text{Cos } \widehat{\varphi}}{\text{Sin } \widehat{\varphi}}$	$\dfrac{\text{Sin } \widehat{\varphi}}{\text{Cos } \widehat{\varphi}}$	Sin $\widehat{\varphi}$	Mesure en degrés de l'angle $\widehat{\varphi}$

Table n° IV

Mesure en grades de l'angle $\widehat{\varphi}$	$\sin \widehat{\varphi}$	$\frac{\sin \widehat{\varphi}}{\cos \widehat{\varphi}}$	$\frac{\cos \widehat{\varphi}}{\sin \widehat{\varphi}}$	$\cos \widehat{\varphi}$	
0	0,0000	0,0000		1,0000	100
1	0,0157	0,0157	63,66	0,9999	99
2	0,0314	0,0314	31,82	0,9995	98
3	0,0471	0,0472	21,20	0,9989	97
4	0,0628	0,0629	15,89	0,9980	96
5	0,0785	0,0787	12,71	0,9969	95
6	0,0941	0,0945	10,58	0,9956	94
7	0,1097	0,1104	9,058	0,9940	93
8	0,1253	0,1263	7,916	0,9921	92
9	0,1409	0,1423	7,026	0,9900	91
10	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	90
11	0,1719	0,1745	5,730	0,9851	89
12	0,1874	0,1908	5,242	0,9823	88
13	0,2028	0,2071	4,829	0,9792	87
14	0,2181	0,2235	4,474	0,9759	86
15	0,2334	0,2401	4,165	0,9724	85
16	0,2487	0,2568	3,895	0,9686	84
17	0,2639	0,2736	3,655	0,9646	83
18	0,2790	0,2905	3,442	0,9603	82
19	0,2940	0,3076	3,251	0,9558	81
20	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	80
21	0,3239	0,3424	2,921	0,9461	79
22	0,3387	0,3600	2,778	0,9409	78
23	0,3535	0,3779	2,646	0,9354	77
24	0,3681	0,3959	2,526	0,9298	76
25	0,3827	0,4142	2,414	0,9239	75
26	0,3971	0,4327	2,311	0,9178	74
27	0,4115	0,4515	2,215	0,9114	73
28	0,4258	0,4706	2,125	0,9048	72
29	0,4399	0,4899	2,041	0,8980	71
30	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	70
31	0,4679	0,5295	1,889	0,8838	69
32	0,4818	0,5498	1,819	0,8763	68
33	0,4955	0,5704	1,753	0,8686	67
34	0,5090	0,5914	1,691	0,8607	66
35	0,5225	0,6128	1,632	0,8526	65
36	0,5358	0,6346	1,576	0,8443	64
37	0,5490	0,6569	1,522	0,8358	63
38	0,5621	0,6796	1,471	0,8271	62
39	0,5750	0,7028	1,423	0,8181	61
40	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	60
41	0,6004	0,7508	1,332	0,7997	59
42	0,6129	0,7757	1,289	0,7902	58
43	0,6252	0,8012	1,248	0,7804	57
44	0,6374	0,8273	1,209	0,7705	56
45	0,6494	0,8541	1,171	0,7604	55
46	0,6613	0,8816	1,134	0,7501	54
47	0,6730	0,9099	1,099	0,7396	53
48	0,6845	0,9391	1,065	0,7290	52
49	0,6959	0,9691	1,032	0,7181	51
50	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	50
	$\cos \widehat{\varphi}$	$\frac{\cos \widehat{\varphi}}{\sin \widehat{\varphi}}$	$\frac{\sin \widehat{\varphi}}{\cos \widehat{\varphi}}$	$\sin \widehat{\varphi}$	Mesure en grades de l'angle $\widehat{\varphi}$

Tableau N° V

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les réels positifs les plus grands possibles pour lesquels l'incertitude est 0,001, ou 0,01, ou 0,1.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sont les mesures en degrés des angles $\widehat{\varphi_1}, \widehat{\varphi_2}, \widehat{\varphi_3}, \widehat{\varphi_4}$ dont des mesures en radians sont x_1, x_2, x_3, x_4.

Valeur exacte du réel	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
Valeur approchée du réel	x	1	$1 - \frac{x^2}{2}$	x

		x_1	β_1	x_2	β_2	x_3	β_3	x_4	β_4
Incertitude ε tolérée	0,001	0,18	10	0,04	2,5	0,39	22,5	0,14	8
	0,01	0,39	22	0,14	8	0,70	40	0,30	17
	0,1	0,83	48	0,44	25	1,24	71	0,58	33

Table n° VI

Rangs	Nombres
0	1
0,25	1,06
0,5	1,12
0,75	1,18
1	1,25
1,25	1,32
1,5	1,4
1,75	1,5
2	1,6
2,25	1,7
2,5	1,8
2,75	1,9
3	2
3,25	2,12
3,5	2,25
3,75	2,36
4	2,5
4,25	2,64
4,5	2,8
4,75	3
5	3,2

Rangs	Nombres
5	3,2
5,25	3,4
5,5	3,6
5,75	3,8
6	4
6,25	4,25
6,5	4,5
6,75	4,75
7	5
7,25	5,3
7,5	5,6
7,75	6
8	6,4
8,25	6,8
8,5	7,2
8,75	7,6
9	8
9,25	8,5
9,5	9
9,75	9,5
10	10

Table n° VII

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0 000	0 043	0 086	0 128	0 170	0 212	0 253	0 294	0 334	0 374	10
1	0 414	0 453	0 492	0 531	0 569	0 607	0 645	0 682	0 719	0 755	1
2	0 792	0 828	0 864	0 899	0 934	0 969	1 004	1 038	1 072	1 106	2
3	1 139	1 173	1 206	1 239	1 271	1 303	1 335	1 367	1 399	1 430	3
4	1 461	1 492	1 523	1 553	1 584	1 614	1 644	1 673	1 703	1 732	4
5	1 761	1 790	1 818	1 847	1 875	1 903	1 931	1 959	1 987	2 014	5
6	2 041	2 068	2 095	2 122	2 148	2 175	2 201	2 227	2 253	2 279	6
7	2 304	2 330	2 355	2 380	2 405	2 430	2 455	2 480	2 504	2 529	7
8	2 553	2 577	2 601	2 625	2 648	2 672	2 695	2 718	2 742	2 765	8
9	2 788	2 810	2 833	2 856	2 878	2 900	2 923	2 945	2 967	2 989	9
20	3 010	3 032	3 054	3 075	3 096	3 118	3 139	3 160	3 181	3 201	20
1	3 222	3 243	3 263	3 284	3 304	3 324	3 345	3 365	3 385	3 404	1
2	3 424	3 444	3 464	3 483	3 502	3 522	3 541	3 560	3 579	3 598	2
3	3 617	3 636	3 655	3 674	3 692	3 711	3 729	3 747	3 766	3 784	3
4	3 802	3 820	3 838	3 856	3 874	3 892	3 909	3 927	3 945	3 962	4
5	3 979	3 997	4 014	4 031	4 048	4 065	4 082	4 099	4 116	4 133	5
6	4 150	4 166	4 183	4 200	4 216	4 232	4 249	4 265	4 281	4 298	6
7	4 314	4 330	4 346	4 362	4 378	4 393	4 409	4 425	4 440	4 456	7
8	4 472	4 487	4 502	4 518	4 533	4 548	4 564	4 579	4 594	4 609	8
9	4 624	4 639	4 654	4 669	4 683	4 698	4 713	4 728	4 742	4 757	9
30	4 771	4 786	4 800	4 814	4 829	4 843	4 857	4 871	4 886	4 900	30
1	4 914	4 928	4 942	4 955	4 969	4 983	4 997	5 011	5 024	5 038	1
2	5 051	5 065	5 079	5 092	5 105	5 119	5 132	5 145	5 159	5 172	2
3	5 185	5 198	5 211	5 224	5 237	5 250	5 263	5 276	5 289	5 302	3
4	5 315	5 328	5 340	5 353	5 366	5 378	5 391	5 403	5 416	5 428	4
5	5 441	5 453	5 465	5 478	5 490	5 502	5 514	5 527	5 539	5 551	5
6	5 563	5 575	5 587	5 599	5 611	5 623	5 635	5 647	5 658	5 670	6
7	5 682	5 694	5 705	5 717	5 729	5 740	5 752	5 763	5 775	5 786	7
8	5 798	5 809	5 821	5 832	5 843	5 855	5 866	5 877	5 888	5 899	8
9	5 911	5 922	5 933	5 944	5 955	5 966	5 977	5 988	5 999	6 010	9
40	6 021	6 031	6 042	6 053	6 064	6 075	6 085	6 096	6 107	6 117	40
1	6 128	6 138	6 149	6 160	6 170	6 180	6 191	6 201	6 212	6 222	1
2	6 232	6 243	6 253	6 263	6 274	6 284	6 294	6 304	6 314	6 325	2
3	6 335	6 345	6 355	6 365	6 375	6 385	6 395	6 405	6 415	6 425	3
4	6 435	6 444	6 454	6 464	6 474	6 484	6 493	6 503	6 513	6 522	4
5	6 532	6 542	6 551	6 561	6 571	6 580	6 590	6 599	6 609	6 618	5
6	6 628	6 637	6 646	6 656	6 665	6 675	6 684	6 693	6 702	6 712	6
7	6 721	6 730	6 739	6 749	6 758	6 767	6 776	6 785	6 794	6 803	7
8	6 812	6 821	6 830	6 839	6 848	6 857	6 866	6 875	6 884	6 893	8
49	6 902	6 911	6 920	6 928	6 937	6 946	6 955	6 964	6 972	6 981	49

Table n° VII (suite)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
50	6 990	6 998	7 007	7 016	7 024	7 033	7 042	7 050	7 059	7 067	50
1	7 076	7 084	7 093	7 101	7 110	7 118	7 126	7 135	7 143	7 152	1
2	7 160	7 168	7 177	7 185	7 193	7 202	7 210	7 218	7 226	7 235	2
3	7 243	7 251	7 259	7 267	7 275	7 284	7 292	7 300	7 308	7 316	3
4	7 324	7 332	7 340	7 348	7 356	7 364	7 372	7 380	7 388	7 396	4
5	7 404	7 412	7 419	7 427	7 435	7 443	7 451	7 459	7 466	7 474	5
6	7 482	7 490	7 497	7 505	7 513	7 520	7 528	7 536	7 543	7 551	6
7	7 559	7 566	7 574	7 582	7 589	7 597	7 604	7 612	7 619	7 627	7
8	7 634	7 642	7 649	7 657	7 664	7 672	7 679	7 686	7 694	7 701	8
9	7 709	7 716	7 723	7 731	7 738	7 745	7 752	7 760	7 767	7 774	9
60	7 782	7 789	7 796	7 803	7 810	7 818	7 825	7 832	7 839	7 846	60
1	7 853	7 860	7 868	7 875	7 882	7 889	7 896	7 903	7 910	7 917	1
2	7 924	7 931	7 938	7 945	7 952	7 959	7 966	7 973	7 980	7 987	2
3	7 993	8 000	8 007	8 014	8 021	8 028	8 035	8 041	8 048	8 055	3
4	8 062	8 069	8 075	8 082	8 089	8 096	8 102	8 109	8 116	8 122	4
5	8 129	8 136	8 142	8 149	8 156	8 162	8 169	8 176	8 182	8 189	5
6	8 195	8 202	8 209	8 215	8 222	8 228	8 235	8 241	8 248	8 254	6
7	8 261	8 267	8 274	8 280	8 287	8 293	8 299	8 306	8 312	8 319	7
8	8 325	8 331	8 338	8 344	8 351	8 357	8 363	8 370	8 376	8 382	8
9	8 388	8 395	8 401	8 407	8 414	8 420	8 426	8 432	8 439	8 445	9
70	8 451	8 457	8 463	8 470	8 476	8 482	8 488	8 494	8 500	8 506	70
1	8 513	8 519	8 525	8 531	8 537	8 543	8 549	8 555	8 561	8 567	1
2	8 573	8 579	8 585	8 591	8 597	8 603	8 609	8 615	8 621	8 627	2
3	8 633	8 639	8 645	8 651	8 657	8 663	8 669	8 675	8 681	8 686	3
4	8 692	8 698	8 704	8 710	8 716	8 722	8 727	8 733	8 739	8 745	4
5	8 751	8 756	8 762	8 768	8 774	8 779	8 785	8 791	8 797	8 802	5
6	8 808	8 814	8 820	8 825	8 831	8 837	8 842	8 848	8 854	8 859	6
7	8 865	8 871	8 876	8 882	8 887	8 893	8 899	8 904	8 910	8 915	7
8	8 921	8 927	8 932	8 938	8 943	8 949	8 954	8 960	8 965	8 971	8
9	8 976	8 982	8 987	8 993	8 998	9 004	9 009	9 015	9 020	9 025	9
80	9 031	9 036	9 042	9 047	9 053	9 058	9 063	9 069	9 074	9 079	80
1	9 085	9 090	9 096	9 101	9 106	9 112	9 117	9 122	9 128	9 133	1
2	9 138	9 143	9 149	9 154	9 159	9 165	9 170	9 175	9 180	9 186	2
3	9 191	9 196	9 201	9 206	9 212	9 217	9 222	9 227	9 232	9 238	3
4	9 243	9 248	9 253	9 258	9 263	9 269	9 274	9 279	9 284	9 289	4
5	9 294	9 299	9 304	9 309	9 315	9 320	9 325	9 330	9 335	9 340	5
6	9 345	9 350	9 355	9 360	9 365	9 370	9 375	9 380	9 385	9 390	6
7	9 395	9 400	9 405	9 410	9 415	9 420	9 425	9 430	9 435	9 440	7
8	9 445	9 450	9 455	9 460	9 465	9 469	9 474	9 479	9 484	9 489	8
9	9 494	9 499	9 504	9 509	9 513	9 518	9 523	9 528	9 533	9 538	9
90	9 542	9 547	9 552	9 557	9 562	9 566	9 571	9 576	9 581	9 586	90
1	9 590	9 595	9 600	9 605	9 609	9 614	9 619	9 624	9 628	9 633	1
2	9 638	9 643	9 647	9 652	9 657	9 661	9 666	9 671	9 675	9 680	2
3	9 685	9 689	9 694	9 699	9 703	9 708	9 713	9 717	9 722	9 727	3
4	9 731	9 736	9 741	9 745	9 750	9 754	9 759	9 763	9 768	9 773	4
5	9 777	9 782	9 786	9 791	9 795	9 800	9 805	9 809	9 814	9 818	5
6	9 823	9 827	9 832	9 836	9 841	9 845	9 850	9 854	9 859	9 863	6
7	9 868	9 872	9 877	9 881	9 886	9 890	9 894	9 899	9 903	9 908	7
8	9 912	9 917	9 921	9 926	9 930	9 934	9 939	9 943	9 948	9 952	8
99	9 956	9 961	9 965	9 969	9 974	9 978	9 983	9 987	9 991	9 996	99

Tableau n° VIII

Valeur exacte	Valeur approchée	Incertitude absolue	
		$0 < x < \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$
$(1 + x)^2$	$1 + 2x$, par défaut	erreur égale à x^2	
$\frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}$	$1 - x$, par défaut	x^2	$2x^2$
$\frac{1}{(1 + x)^2} = (1 + x)^{-2}$	$1 - 2x$, par défaut	$3x^2$	$8x^2$
$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{2}}$	$1 + \frac{x}{2}$, par excès	$\frac{x^2}{8}$	$\frac{x^2}{4}$
$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = (1 + x)^{-\frac{1}{2}}$	$1 - \frac{x}{2}$, par défaut	$\frac{3x^2}{8}$	$\frac{3x^2}{4}$
$\sin x$	x, par excès	$\frac{x^3}{2}$	
$\cos x$	1, par excès	$\frac{x^2}{2}$	
$\operatorname{tg} x$	x, par défaut		

PROBLÈMES

1 1° Soit m un réel strictement positif.

a) Déterminer m pour les équations : $x^2 + mx - 2 = 0$ et $mx - 1 = 0$ admettent dans $\mathbb{R}$ une racine commune.

b) Dans la suite du problème, on suppose que m est un réel strictement positif différent de 1. On considère la fonction f_m définie sur un ensemble D_{f_m} par :

$$\forall x \in D_{f_m}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}.$$

Déterminer l'ensemble D_{f_m}. Étudier le sens de variations de f_m. Préciser pour quelles valeurs de m la fonction f_m correspondante présente un maximum. Construire dans un repère cartésien la courbe représentative de la fonction f_m dans chacun des cas suivants : $m = 2$ et $m = \frac{1}{2}$.

2° On désigne par $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m dans un plan P rapporté à un repère cartésien.

a) Montrer que, pour tout réel m de l'ensemble $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la courbe $\mathcal{C}_m$ passe par trois points de P dont les coordonnées sont indépendantes de m.

b) Soient k un réel et D_k une droite de P d'équation : $y = kx$. Déterminer l'ensemble des réels m qui possèdent la propriété : $\forall k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}_m \cap D_k \neq \varnothing$.

3° Soit M_1 un point de P distinct de O, de coordonnées (x_1, y_1).

a) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ déterminée par les points O et M_1 est : $x = \frac{x_1}{1 + \lambda}$ et $y = \frac{y_1}{1 + \lambda}$ où λ est un réel différent de -1.

b) On suppose : $m < 1$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels il existe un point unique d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ et de la droite Δ qui appartienne au segment $[O, M_1]$.

4° On suppose : $m < 1$. On désigne par $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de Δ. Soit a un réel. On désigne par Δ_m l'ensemble des points M_1 pour lesquels on a : $x'(x_1 - x'') + x''(x_1 - x') + ax'x'' = 0$.
Déterminer l'ensemble Δ_m.

2 Soient D une droite, $(O, \vec{u})$ un repère de D, a un réel positif, S et S' les points de D d'abscisses respectives a et $-a$.

I. On considère le mouvement d'un point p_1 sur D qui possède les propriétés suivantes :

a) Le mouvement du point p_1 est un mouvement vibratoire simple.

b) Pour tout instant t, on a l'égalité : $\vec{\Gamma}_1(t) = -\overrightarrow{SP_1}(t)$, où $\vec{\Gamma}_1(t)$ est le vecteur accélération du point p_1 à l'instant t et $P_1(t)$ la position du point p_1 à l'instant t.

c) A l'instant $t = 0$, la position de p_1 est le point A d'abscisse $a(1 + \sqrt{2})$ et sa vitesse est égale à 0.

1° Déterminer la loi horaire du mouvement du point p_1 dans le repère $(O, \vec{u})$. Étudier ce mouvement.

2° Déterminer le plus petit réel positif t_1, pour lequel on a : $P_1(t_1) = 0$. Quelle est la vitesse du point p_1 dans le repère $(O, \vec{u})$ à l'instant t_1 ?

II. On considère le mouvement d'un point p_2 sur D qui possède les propriétés suivantes :

a) Le mouvement du point p_2 est un mouvement vibratoire simple.

b) Pour tout instant t, on a l'égalité : $\vec{\Gamma}_2(t) = -\overrightarrow{S'P}_2(t)$.

c) A l'instant t_1, on a les égalités : $P_2(t_1) = P_1(t_1)$ et $\vec{V}_2(t_1) = \vec{V}_1(t_1)$, où $\vec{V}_1(t_1)$ et $\vec{V}_2(t_1)$ désignent les vecteurs vitesses respectifs des points p_1 et p_2 à l'instant t_1.

1° Déterminer la loi horaire du mouvement du point p_2 dans le repère $(O, \vec{u})$. Étudier ce mouvement.

2° Déterminer le plus petit réel positif t_2 supérieur à t_1 pour lequel on a : $P_2(t_2) = 0$. Quelle est la vitesse du point p_2 dans le repère $(O, \vec{u})$ à l'instant t_2 ?

III. On considère le mouvement d'un point p_3 sur D .qui possède les propriétés suivantes :

a) Le mouvement du point p_3 est un mouvement vibratoire simple.

b) Pour tout instant t, on a l'égalité : $\vec{\Gamma}_3(t) = -\overrightarrow{SP}_3(t)$.

c) A l'instant t_2, on a les égalités : $P_3(t_2) = P_2(t_2)$ et $\vec{V}_3(t_2) = \vec{V}_2(t_2)$.

1° Déterminer la loi horaire du mouvement du point p_3 dans le repère $(O, \vec{u})$. Étudier ce mouvement.

2° Déterminer le plus petit réel positif t_3 supérieur à t_2 pour lequel on a : $P_3(t_3) = A$. Quelle est la vitesse du point p_3 dans le repère $(O, \vec{u})$ à l'instant t_3 ?

IV. On considère le mouvement d'un point p sur D, qui est défini sur l'intervalle $[0, t_3]$ et qui possède les propriétés :

a) $\forall t \in [0, t_1]$, $\quad P(t) = P_1(t)$,

b) $\forall t \in [t_1, t_2]$, $\quad P(t) = P_2(t)$,

c) $\forall t \in [t_2, t_3]$, $\quad P(t) = P_3(t)$.

1° Montrer que, pour tout instant t de l'intervalle $[0, t_3]$, on peut définir la vitesse du point p. Préciser les instants pour lesquels cette vitesse présente un maximum ou un minimum. Décrire le mouvement du point p.

2° Peut-on définir l'accélération du point p aux instants t_1 et t_2 ? Montrer que la fonction vitesse est dérivable à gauche et à droite aux instants t_1 et t_2 et calculer les nombres dérivés à gauche et à droite en ces points.

3 Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f_α de P dans P qui à chaque point M de coordonnées (x, y) associe le point M′ de coordonnées (x', y') défini par : $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y\cos\alpha$ et $y' = 1\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$ où α est un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1° Montrer que f_α est une bijection de P sur P. Déterminer, suivant les valeurs de α, l'ensemble des points M qui vérifient : $f_\alpha(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.
Déterminer l'image D′ d'une droite D par l'application f_α.

2° Soit k un réel non nul. On se propose de déterminer l'ensemble E des points M de P qui possèdent la propriété : $\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.
Montrer qu'il existe deux valeurs de k pour lesquelles on a : $\mathrm{E} \neq \{0\}$.
En déduire qu'il existe deux droites D_1 et D_2 qui possèdent respectivement la propriété : $f_\alpha(\mathrm{D}_1) = \mathrm{D}_1$ et $f_\alpha(\mathrm{D}_2) = \mathrm{D}_2$.
Vérifier que D_1 et D_2 ont pour vecteurs directeurs respectifs :
$\vec{u}_1 : \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}_2 : \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right)$.

3° Dans cette question, on suppose : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Montrer que le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est orthogonal. Soient (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
Déterminer les coordonnées de ce point dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

4° Dans cette question, on suppose : $\alpha = 0$ et on désigne par f_0 l'application correspondante.
a) Montrer que l'on a : $f_0 \circ f_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{P}}$.
b) Soit Q le milieu du segment [M, M′] où M′ est l'image de M par f_0. Déterminer l'ensemble des points Q.
c) On pose $\mathrm{M}' = f_0(\mathrm{M})$ et $\mathrm{N}' = f_0(\mathrm{N})$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NN}'}$ sont linéairement dépendants.
d) Soient A un point, A′ son image par f_0 et on suppose : $\mathrm{A}' \neq \mathrm{A}$. Déduire des questions (*b*) et (*c*) la construction de l'image M′ par f_0 d'un point M de P.

4 On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Soient Δ la droite d'équation $x - y = 0$, R le point de Δ d'abscisse α et Q la projection orthogonale de R sur la droite de vecteur directeur $\vec{j}$ qui passe par O. On désigne A et B les points définis respectivement par : $\overrightarrow{\mathrm{RA}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{RB}} = a\vec{j}$, où a est un réel strictement positif.

1° Soit D la droite déterminée par les points B et Q et soit D′ la droite déterminée par les points B et R. La droite perpendiculaire en Q à la droite D coupe D′ au point N. La droite perpendiculaire en A à la droite déterminée par les points A et N coupe D′ en M. Calculer les coordonnées (x, y) de M et vérifier l'égalité : $y = \dfrac{2x^3 + a^3}{2x^2}$.

2° On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \rightsquigarrow \dfrac{2x^3 + a^3}{2x^2}$. Étudier le sens de variations de f_a.
Tracer lorsque a est égal à 1 la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les asymptotes à cette courbe.
On désigne par $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la fonction f_a dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'il existe un point M_a de $\mathcal{C}_a$ pour lequel la tangente en ce point a pour vecteur directeur $\vec{j}$. Déterminer l'ensemble des points M_a.

3° On suppose : $a = 1$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}_1$; la tangente en M à $\mathcal{C}_1$ coupe la droite de vecteur directeur $\vec{j}$ qui passe par O, au point H, la droite Δ au point K et recoupe $\mathcal{C}_1$ au point M'. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{C}_1$, on a : $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{M'H}$. On pose $\overrightarrow{MH} = \lambda \overrightarrow{MK}$. Montrer que λ est un réel qui ne dépend ni de x_0 ni de y_0.

5 On considère un espace affine euclidien A_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D l'ensemble des réels φ tels que : $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.
Soit R un réel strictement positif. On considère l'application f de D dans A_3 qui, à φ, associe le point M dont les coordonnées sont :
$x = R\cos^2\varphi, \quad y = R\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad z = R\sin^2\varphi.$

1° *a*) Soit $\vec{U}$ le vecteur de coordonnées $(1, 0, 1)$. Montrer que, pour tout réel φ, on a : $\overrightarrow{OM}.\vec{U} = R$. En déduire que l'image $f(D)$ de D par f est incluse dans un plan P.
b) Montrer que $f(D)$ est incluse dans la sphère S de centre O et de rayon R.
c) En déduire que $f(D)$ est incluse dans un cercle Γ. On désigne par ω le centre de Γ, par R_1 le rayon de Γ. Déterminer les coordonnées de ω. Exprimer le rayon R_1 en fonction de R. Montrer que f est injective.

2° On considère un point M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient les égalités : $x + z = R, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
a) Démontrer les inégalités : $0 \leqslant x \leqslant R$ et $0 \leqslant z \leqslant R$.
b) Montrer qu'il existe un réel φ de D pour lequel on a : $x = R\cos^2\varphi$ et $z = R\sin^2\varphi$.
c) Exprimer y en fonction φ.
d) En déduire que f est une surjection de D sur Γ.

3° On désigne par H le plan déterminé par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, par γ l'ensemble des points m projections orthogonales des points M de Γ sur H. Donner une équation de γ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4° Soit M le point de Γ image par f d'un réel φ de D. Donner une représentation paramétrique de la tangente Δ à Γ au point M.
Étudier l'intersection de Δ et du plan H. Dans le cas où $\Delta \cap H$ est non vide, calculer les coordonnées (x_G, y_G) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de leur point d'intersection G. Remarquer que l'on a l'égalité : $y_G = R_1 \operatorname{tg}\varphi$.
On suppose que P est orienté, donner une interprétation du réel φ.

6 On considère un plan P et un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de P. Soient λ un réel et μ un réel non nul. On désigne par $f_{\lambda,\mu}$ l'application de P dans P qui à chaque point M de coordonnées (x, y) associent le point M' de coordonnées (x', y') définies par : $x' = x$ et $y' = \lambda x + \mu y$.

1° *a*) Montrer que $f_{\lambda,\mu}$ est une bijection. Comment doit-on choisir λ et μ pour que l'on ait : $f_{\lambda,\mu} \circ f_{\lambda,\mu} = \mathrm{id}_P$.
b) Quel est l'ensemble des points M qui possèdent la propriété : $f_{\lambda,\mu}(M) = M$?
c) Montrer que l'image par $f_{\lambda,\mu}$ d'une droite est une droite.

d) Montrer que, si μ est différent de 1, l'ensemble des points M de P pour lesquels il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ est la réunion de deux droites distinctes. Quel est cet ensemble si Γ est égal à 1 ?

2° On considère l'ensemble E des applications $f_{\lambda,\mu}$.

a) Définir l'application $f_{\lambda,\mu} \circ f_{\lambda',\mu'}$. Montrer que (E, $\circ$) est un groupe.

b) Vérifier que ce groupe n'est pas commutatif. Soit $f_{\lambda,\mu}$ une application. Montrer qu'il existe au moins une application $f_{\lambda',\mu'}$ pour laquelle on a : $f_{\lambda,\mu} \circ f_{\lambda',\mu'} = f_{\lambda',\mu} \circ f_{\lambda,\mu'}$.

3° Dans les questions 3 et 4, on étudie la transformation : $f = f_{1,1}$.
Donner une équation de l'image $\mathcal{C}'$ par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

4° On suppose désormais que P est orienté et que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé positif. Soit α un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On désigne par $\vec{I}$ le vecteur unitaire tel qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{I}})$ soit égale à α et par $(O, \vec{I}, \vec{J})$ le repère orthonormé positif associé à $\vec{I}$.

Soient (X, Y) les coordonnées d'un point $M(x, y)$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$. Écrire une équation de $\mathcal{C}'$ dans ce repère. Déterminer α pour que cette équation ne contienne pas de terme en XY.

5° On désigne par A_1 et A_2 les points d'intersection de $\mathcal{C}'$ et de la droite déterminée par le point O et le vecteur $\vec{I}$, par Γ le cercle de diamètre $[A_1, A_2]$. Soient respectivement M et N les points de $\mathcal{C}'$ et de Γ d'abscisse X, Y et Y_1 les ordonnées respectives de ces points. Comparer Y et Y_1. En déduire une construction de la courbe $\mathcal{C}'$.

7 1° Soient D une droite, $(O, \vec{u})$ un repère de D, a un réel positif et C le point de D d'abscisse a.

On considère le mouvement vibratoire simple, de centre C, d'un point p sur D, pour lequel à l'instant $t = 0$, la position de p est un point P_0 d'abscisse x_0 positive et la vitesse de p dans $(O, \vec{u})$ est un réel x_0. La période du mouvement est 2π. Donner la loi horaire dans le repère $(O, \vec{u})$ du mouvement de p.

2° Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé positif $(\alpha, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D_t d'équation : $X \cos t + Y \sin t + a = 0$, où t est un réel.

a) Montrer que, pour tout réel t, la droite D_t est tangente à un cercle $\mathcal{C}$.

b) Soit M_0 un point de coordonnées (X_0, Y_0). A quel demi-plan le point M_0 doit-il appartenir pour que l'on ait l'inégalité : $X_0 \cos t + Y_0 \sin t + a \geqslant 0$.
En déduire l'ensemble des points M_0 du plan qui possèdent la propriété :
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_0 \cos t + Y_0 \sin t + a \geqslant 0$.

c) Soit M un point du cercle de centre O et de rayon a. Montrer qu'il existe un réel t_0 tel que la droite D_{t_0} correspondante passe par M. On désigne par (X, Y) les coordonnées de M. Démontrer l'égalité : $X \sin t_0 - Y \cos t_0 = 0$.

3° On désigne par $x(t)$ l'abscisse de la position du point p à l'instant t. Utiliser les résultats du 2°, pour démontrer l'équivalence logique :
$(\forall t \in \mathbb{R}, \ x(t) \geqslant 0) \iff (0 \leqslant x_0 \leqslant 2a \quad \text{et} \quad |x_0| \leqslant \sqrt{x_0(2a - x_0)})$.

8 Soient P un plan associé à un plan vectoriel euclidien orienté, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P. On considère l'application f de P dans P qui, à chaque point M de coordonnées (x, y) associe le point M′ de coordonnées (x', y') définies par : $x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y' = \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$.

1° Montrer qu'il existe un point Ω unique tel que : $f(\Omega) = \Omega$.

2° Soient (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les coordonnées (X', Y') dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ du point M′ image de M par f. Vérifier que f est bijective. Déterminer les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de l'image par f^{-1} d'un point $M(X, Y)$ de P.

3° Soit M un point distinct de Ω et soit M′ l'image de M par f. Calculer $\frac{d(\Omega, M')}{d(\Omega, M)}$ et l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$. En déduire une caractérisation de l'application f.

4° On considère le cercle $\mathcal{C}$ dont une équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :
$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
Déterminer l'ensemble $f(\mathcal{C})$.

9 Soient P un plan affine euclidien et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé positif de P.

I. Soient R un réel positif, $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R, deux points distincts M_1 et M_2 de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. On désigne par $2\alpha_1$ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}})$ et par $2\alpha_2$ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_2}})$.
Soit H la projection orthogonale de O sur la droite D_1 déterminée par les points M_1 et M_2. On pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$.

1° Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{\alpha}})$ et une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{u}})$.

2° Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{OH}$.

3° En déduire qu'une équation de la droite D_1 est :
$x\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + y\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - R\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$.

II. Soient a un réel et r un réel positif. On considère le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O′ et de rayon r, où O′ est le point de coordonnées $(a, 0)$. Soit M un point de $\mathcal{C}'$ et soit θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

1° Écrire une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}'$ au point M.

2° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que, quel que soit le point M de $\mathcal{C}'$, la tangente en M à $\mathcal{C}'$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts est :
$r < R$ et $|a| < R - r$.

III. On suppose : $r < R$ et $|a| < R - r$.

1° Soit M_1 un point de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout point M_1 de $\mathcal{C}$, il existe un point M_2 de $\mathcal{C}$ distinct de M_1 tel que la droite D déterminée par les points M_1 et M_2 soit tangente à $\mathcal{C}'$. Écrire alors l'équation de la droite D. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite D déterminée par deux points distincts M_1 et M_2 de $\mathcal{C}$ soit tangente au cercle $\mathcal{C}'$ est :
$(a - R) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - (a + R) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + r = 0.$

2° Soit M un point de $\mathcal{C}$. Vérifier qu'il existe deux points distincts M_1 et M_2 qui sont aussi distincts de M et deux seulement, tels que les droites D_1 et D_2 déterminées respectivement par les points M et M_1 et par les points M et M_2 soient tangentes à $\mathcal{C}'$.

On pose : $2\alpha_1 = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}})$ et $2\alpha_2 = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM_2}})$. Montrer que α_1 et α_2 vérifient une égalité de la forme : $A \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + B \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + C = 0$.
Déterminer en fonction de a, R et r les réels A, B, C.

3° Déduire des questions III-1° et III-2° que, pour tout point M, la droite déterminée par les points M_1 et M_2 est tangente à un cercle $\mathcal{C}''$. Préciser le centre et le rayon de $\mathcal{C}''$.
Dans quel cas a-t-on l'égalité : $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}'$?

10 On considère un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit D la droite déterminée par les points $A(1, 1, 0)$ et $B(2, 2, 4)$.
Soit Δ la droite déterminée par les points $I(4, 0, 0)$ et $J(0, 4, 0)$.

1° Montrer que D et Δ sont orthogonales.

2° A chaque point M de D, on associe le plan $\varphi(M)$ défini par le point M et la droite Δ. On pose $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}$.

a) Déterminer en fonction de λ les coordonnées de M et une équation du plan $\varphi(M)$.

b) Montrer qu'il existe un point H de D tel que le plan $\varphi(H)$ soit perpendiculaire à D.
Donner une équation de $\varphi(H)$.

3° On choisit comme plan horizontal et comme plan frontal de projection les plans définis respectivement par le point O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, par le point O et les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

a) Tracer les épures de la droite D et de la droite Δ.

b) Déterminer le plan $\varphi(H)$ par ses traces.

c) Déterminer l'épure du point H.

4° Soit $\delta(\lambda)$ la distance de O au plan $\varphi(M)$.

a) Étudier le sens de variations de la fonction δ. En donner une courbe représentative.

b) Déterminer λ pour que le plan $\varphi(M)$ correspondant soit tangent à la sphère d'équation : $9(x^2 + y^2 + z^2) - 64 = 0$.

index

Kam Tsemo Patrick Noël
PLEG - Mathématiques
CN 1ere Dan JUDO

Imprimé en France
FIRMIN-DIDOT S.A. - 9969
Dépôt légal : 2e trimestre 1977. N° d'édition 3984