COLLECTION SPM

MATHÉMATIQUES

1ère C

- COURS
- APPLICATIONS DU COURS
- EXERCICES CORRIGÉS
- EXERCICES
- PROBLEMES

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$a + b + c \neq 0$$

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

EDITION 2016
REVUE ET CORRIGEE

APMGB

AVANT-PROPOS

AVANT PROPOS

Fondée sur la pratique du programme de mathématiques actuellement en vigueur en Première C en Côte d'Ivoire, la collection SPM propose un ouvrage clair et concis.
Elle est l'œuvre des conseils d'enseignement mathématique (C.E) et de l'association des professeurs de mathématiques de la région du Gbéké (APMGB).
Dans l'élaboration de ce manuel, notre souci a été de respecter strictement le programme défini par les instructions officielles et précisé dans le document <u>Enseignement mathématique</u>
Les chapitres de ce manuel ont la même structure :

◆ des prérequis

Les exercices proposés visent à consolider les acquis des classes antérieures.

◆ le cours

Il est bref mais complet. Nous avons respecté strictement les limites du programme, évité tout débordement qui impacte négativement les progressions.

◆ des exercices d'applications

Ces exercices corrigés visent à l'acquisition des définitions et propriétés. Nous avons beaucoup mis l'accent sur la rédaction afin d'aider nos élèves à rédiger avec clarté et précision.

◆ des exercices

Nombreux et variés, ces exercices permettent aux élèves de s'entrainer efficacement et aborder ainsi les devoirs dans les meilleures dispositions.

Nous espérons, par ce manuel, améliorer l'enseignement des Mathématiques en Côte d'Ivoire et lutter efficacement contre l'échec scolaire.

Pour la rédaction de ce manuel, nous remercions tous les C.E et U.P de la région du Gbéké qui par leur contribution ont rendu possible la réalisation de cet ouvrage.

Les auteurs

SOMMAIRE

1

FONCTIONS ET APPLICATIONS

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à :
- poursuivre l'étude des notions de fonctions et d'applications introduites en classe de seconde ;
- définir les injections, surjections, bijections, la composition des fonctions ;
- étudier les particularités des fonctions numériques.

► Les notions d'injection et de bijection seront utilisées dans la partie dénombrement.

► Dans ce chapitre, les notions abordées peuvent être illustrées graphiquement, en particulier l'étude des fonctions numériques injectives, surjectives et bijectives doit être accompagnée d'un support graphique.

La plupart des fonctions étudiées se basent sur les fonctions de référence.

On évitera :
- l'usage de fonctions compliquées ; - de composer plus de deux fonctions ;
- la décomposition de fonctions ; - la détermination de l'expression de la bijection réciproque ;
- les notions d'injections et surjections.

► Les représentations graphiques des fonctions associées seront traitées sur des exemples. On limitera le choix de la fonction f aux fonctions de référence.

Dans le cas contraire, on fournira la courbe représentative de f.
Sont hors programme, les représentations graphiques de $x \mapsto af(x)$ et $x \mapsto f(ax)$ ($a \neq 1$ *et* $a \neq -1$).

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
I. Définition de la restriction d'une fonction et du prolongement d'une fonction II. Définition de la composée de deux fonctions : III. Définition d'une application -injective ; - surjective ; - bijective : IV. Définition de la bijection réciproque • Représentation graphique de la bijection réciproque V. Comparaisons de deux fonctions : VI. Opérations VII. Fonctions associées VIII. Parité Définition Interprétation graphique IV. Périodicité Définition Interprétation graphique X. Axe et centre de symétrie	☞ Déterminer la restriction d'une fonction à un intervalle ou le prolongement d'une fonction sur un intervalle : - en montrant que cette fonction est égale à une autre fonction définie sur cet intervalle ; - en limitant la détermination (graphique, formule explicite) de cette fonction à cet intervalle ; - par la transformation de l'écriture de f(x) : (différentes écritures d'un polynôme et d'une fraction rationnelle ; suppression du symbole valeur absolue ; expressions conjuguées). ☞ Déterminer : - l'ensemble de définition d'une fonction composée ; - la formule explicite de la composée de deux fonctions ; - l'ensemble de définition de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions. ☞ Ecrire une fonction comme somme, produit ou quotient de fonctions. ☞ Démontrer qu'une application f de E dans G est injective, surjective ou bijective par : - la détermination du nombre de solutions de l'équation $x \in E$, $f(x) = b$, pour tout b de G ; - la détermination graphique du nombre d'antécédents de b . ☞ Démontrer que : - une fonction est paire ou impaire ; - un nombre réel strictement positif T est une période d'une fonction ; - la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie. - le point A(a ;b) est un centre de symétrie. ☞ Conjecturer : - la représentation graphique d'une bijection ; - d'une fonction périodique - un axe de symétrie et un centre de symétrie. ☞ Connaissant la représentation graphique : - d'une bijection, construire la représentation graphique de sa bijection réciproque ; - d'une fonction, construire la représentation graphique des fonctions associées ; - d'une fonction paire ou impaire sur un ensemble d'étude, la construire sur son ensemble de définition ; - d'une fonction périodique sur un intervalle d'amplitude la période, la construire sur son ensemble de définition. ☞ Construire - l'image d'une courbe par une translation, une symétrie par rapport à l'origine du repère ; - l'image d'une courbe par une symétrie orthogonale par rapport aux axes du repère où à la première bissectrice. ☞ Résoudre et interpréter graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

COURS

I. RESTRICTION, PROLONGEMENT D'UNE FONCTION

Définition

Soit la fonction f: E $\rightarrow$ F
$x \mapsto f(x)$ et K une partie de E.

La fonction g: K $\rightarrow$ F
$x \mapsto f(x)$

est appelée la **restriction** de f à K et f est un **prolongement** de g à E.

Exemple 1

Soient les fonctions $f : IR \rightarrow IR$ et g : $]-\infty; 0[\rightarrow$ IR
$x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

g est la restriction de f à $]-\infty; 0[$ *et f est un prolongement de g à IR.*

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = |6 - 2x|$ et g la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par g$(x) = -6 + 2x$.

$\forall x \in [3; +\infty[, \mathrm{g}(x) = f(x)$. *Donc g est la restriction de f à* $[3; +\infty[$.

Exemple 3

Soient les fonctions f et g de IR vers IR et définies par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}-2}$ et g$(x) = -2 - \sqrt{3-x}$.

Justifier que g est un prolongement de f à IR.

$*$ $D_f = \{x \in IR / 3 - x \geq 0 \text{ et } \sqrt{3-x} - 2 \neq 0\}$

• $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ (1)

• $\sqrt{3-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow 3 - x = 4 \Leftrightarrow x = -1$ (2)

On déduit de (1) et (2) que : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 3]$.

$* D_g = \{x \in IR / 3 - x \geq 0\} =]-\infty; 3]$.

On a : $D_f \subset D_g$

Transformons $f(x)$ *à l'aide de l'expression conjuguée :*

$\forall x \in Df$, $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}-2} = \frac{(1+x)(\sqrt{3-x}+2)}{(\sqrt{3-x}-2)(\sqrt{3-x}+2)} = \frac{(1+x)(\sqrt{3-x}+2)}{-x-1} = -2 - \sqrt{3-x} = g(x)$.

Donc g est un prolongement de f *à IR.*

II. COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Activité

Soit les fonctions f et g de IR vers IR et définies par : $f(x) = \frac{x+1}{2x+4}$ et $g(x) = 3\sqrt{x}$.
a) Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g de f et g .
b) On note gof la fonction de IR vers IR et définie par : $gof(x) = g(f(x))$.
En utilisant la définition de gof, justifier que : $D_{gof} =]-\infty; -2[\cup [-1; +\infty[$, puis calculer $gof(x)$.

Définition

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit f une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G.
La composée gof ("g $rond$ f ") est la fonction de E vers G définie par : $gof(x) = g(f(x))$.

Remarques

- Dans l'écriture gof la première fonction est f et la seconde est g.
- gof est appelée aussi f suivie de g.
- $gof(x)$ existe si et seulement si, $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- $foId_{\mathrm{E}} = Id_{\mathrm{F}}of = f$.

Exemple

Soit $f: x \longmapsto x^2 - 4$ et $g: x \longmapsto \frac{3}{x}$.
Déterminer l'ensemble de définition de gof et calculer $gof(x)$.

Solution
Soit D_f , D_g *et D les ensembles de définitions respectifs de* f, g et gof .
$D_f = IR$ *et* $D_g = IR - \{0\}$.
$x \in D \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$
$x \in D \Leftrightarrow x \in IR$ et $x^2 - 4 \neq 0$
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $x = 2$.
Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$.
Donc $D = IR - \{-2; 2\}$.
$\forall\, x \in IR - \{-2; 2\}, gof(x) = g(x^2 - 4) = \frac{3}{x^2-4}$.

Exercice

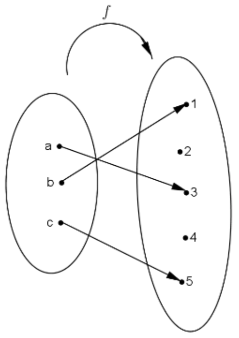
Soit $f: x \longmapsto (x-1)^2$ et $g: x \longmapsto \frac{3x}{x-2}$.
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions fog , gof et calculer $fog(x)$, $gof(x)$.

III. APPLICATION INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE

1. Application injective

Définition

Soit f une application de E vers F.
On dit que f est une i**njection** (ou f est injective) si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f.



Remarque

Une définition équivalente est : « si deux éléments de E ont la même image alors, nécessairement, ils sont égaux », c'est-à-dire
« $\forall(a;b) \in E \times E$: *f(a) = f(b)* ⟹a = b».

Exemple 1

Soit l'application $f:\ \text{IR} \to \text{IR}$
$$x \mapsto x$$
Justifier que f est une injection.
$\forall(x;x') \in IR \times IR$ *: f(x) = f(x') ⟹x = x'* .
Donc f est une injection.

Exemple 2

Soit l'application $f:\ [0;+\infty[\to \text{IR}$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$
Justifier que f est une injection.

$\forall(x;x') \in [0;+\infty[\times [0;+\infty[$ *: f(x) = f(x')* $\Longrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x'}$
$\Longrightarrow$ x = x'
Donc f est une injection.

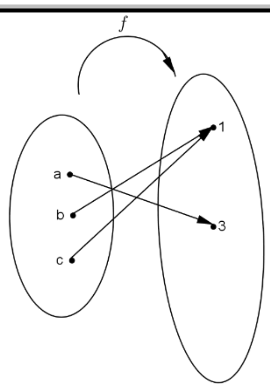
Exercice

Soit l'application $f:\ \text{IR} \to \text{IR}$
$$x \mapsto x^2$$
Justifier que f n'est pas injective.

1. Application surjective

Définition

Soit f une application de E vers F.
On dit que f est une **surjection** (ou f est surjective) si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f.



Méthode : Pour démontrer qu'une application f de E vers F est surjective : pour tout élément y de F, on résout l'équation: $f(x) = y$ et on prouve qu'il y toujours au moins une solution dans E (ne pas oublier de vérifier qu'une solution trouvée est bien dans E).

Exemple

Soit l'application $f : [2; 4] \to [1; 10]$
$x \mapsto x^2 + 1$

Démontrer que f est une surjection.

Pour tout y de $[1; 10]$.

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1$.

Comme $y \in [1; 10]$ *donc :* $x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$ *ou* $x = -\sqrt{y-1}$.

Prouvons que $\sqrt{y-1}$ *appartient à* $[0; 4]$.

$y \in [1; 10] \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y-1} \leq 3 \leq 4$. *Donc* $\sqrt{y-1} \in [2; 4]$.

On a prouvé que pour tout y de [1 ;10], l'équation f(x) = y admet au moins une solution dans [2 ;4] donc f est une surjection.

3. Application bijective

Définition

Soit f une application de E vers F.
On dit que f est une **bijection** (ou f est bijective) si et seulement si elle est injective et surjective.

Méthode : Pour montrer qu'une application f de E vers F est bijective : soit on démontre successivement qu'elle est injective puis surjective, soit on résout, pour tout élément y de F, l'équation: $f(x) = y$ et on prouve que cette équation admet une solution unique dans E.

Exemple 1

Soit l'application f : $[2;+\infty[\ \rightarrow\ ]-\infty;-5]$

$x \mapsto \quad 1 - 3x$

Démontrer que f est une bijection.

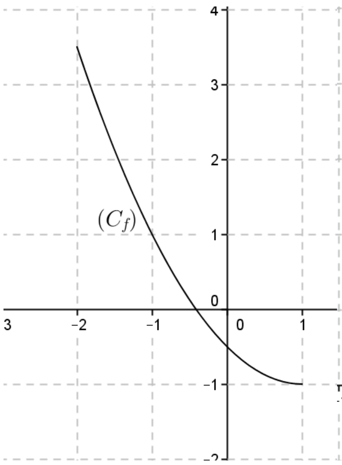
Pour tout y de $]-\infty;-5]$. *f(x) = y* $\Leftrightarrow$ *x =* $\frac{1-y}{3}$.

Prouvons que $\frac{1-y}{3}$ *appartient à* $[2;+\infty[$ *avec la condition* $y \leq -5$.

$y \leq -5 \Rightarrow -y \geq 5 \Leftrightarrow 1-y \geq 6 \Rightarrow \frac{1-y}{3} \geq 2$. *Ainsi* , $\frac{1-y}{3} \in [2;+\infty[$.

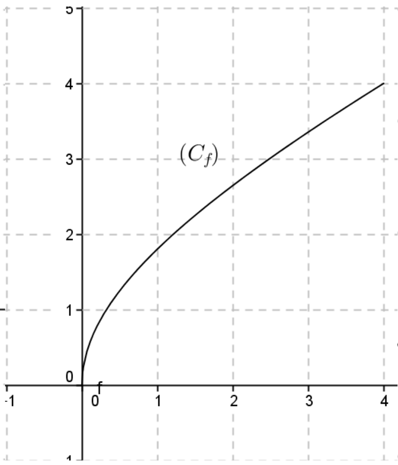
On a prouvé que pour tout y de $]-\infty;-5]$, *l'équation f(x) = y admet une solution unique dans* $[2;+\infty[$ *donc f est une bijection.*

Exemple 2

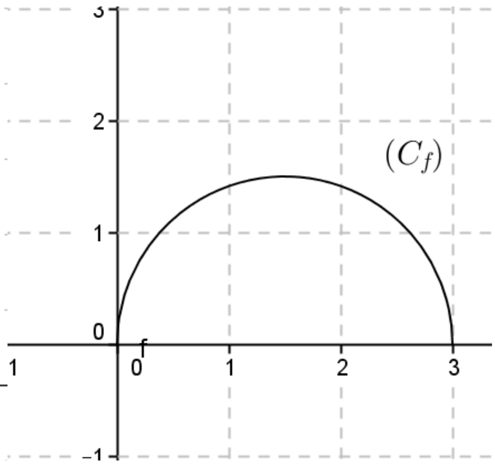


f est une bijection de $[-2;1]$ sur $[-1;3{,}5]$:

tous les éléments de [-1 ;3,5] admettent un antécédent unique dans [-2 ;1].



f est une bijection de $[0;4]$ sur $[0;4]$:
tous les éléments de [0 ;4] admettent un antécédent unique dans [0 ;4]



f n'est pas une bijection de [0 ;3] sur [0 ;1,5] :
certains éléments de [0 ;1,5] ont deux antécédents.

2. Bijection réciproque

Définition

Soit f une bijection de E sur F.
Ainsi tout élément y de F admet un antécédent unique x dans E.
La bijection réciproque de f noté f^{-1}, est l'application qui à chaque y de F fait correspondre son unique antécédent x dans E.

Remarques :

• Ainsi : $\begin{cases} y \in \text{F} \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{E} \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$

• f étant une bijection de E sur F et f^{-1} sa bijection réciproque, on a :
$f^{-1}of = Id_E$ et $fof^{-1} = Id_F$.

Exemple

Soit l'application $f: [0; +\infty[\to [-1; +\infty[$
$x \mapsto x^2 - 1$

Démontrer que f est une bijection puis déterminer la bijection réciproque de f^{-1} de f.

Solution

Soit y un nombre réel quelconque appartenant à $[-1; +\infty[$,

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = 1 + y$

comme $y \in [-1; +\infty[$ *alors* $1 + y \geq 0$. *Donc* $x^2 = 1 + y \Leftrightarrow x = -\sqrt{1+y}$ *ou* $x = \sqrt{1+y}$.

On a : $\sqrt{1+y} \in [0; +\infty[$.

Par contre $-\sqrt{1+y} \notin [0; +\infty[$ *pour tout* $y \in [-1; +\infty[$, *en particulier lorsque*
$y = 0, -\sqrt{1+y} = -1$ *et* $-1 \notin [0; +\infty[$.

Donc pour tout $y \in [-1; +\infty[$, *l'équation* $f(x) = y$ *admet dans* $[0; +\infty[$ *une unique solution.*

Nous venons de prouver que chaque élément de l'ensemble d'arrivée $[-1; +\infty[$ *admet un antécédent unique dans l'ensemble de départ* $[0; +\infty[$ *donc f est une bijection.*

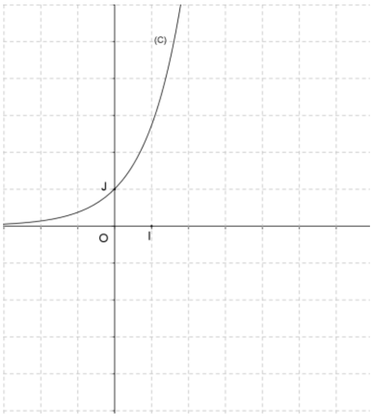
La bijection réciproque $f^{-1} : [-1; +\infty[\to [0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{1+x}$

Propriété

Soit f une bijection de E sur F et f^{-1} sa bijection réciproque.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

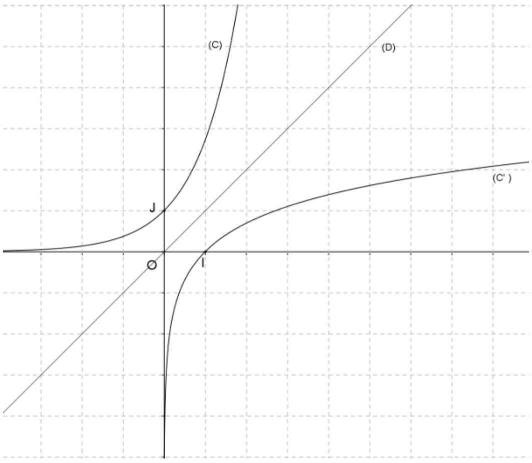
Exemple

(C) est la courbe représentative d'une bijection f .



Construire la courbe (C') de la bijection réciproque f^{-1} de f.

(C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation y = x.



IV. COMPARAISONS DE DEUX FONCTIONS

Définitions

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un ensemble E.
On dit que :
- f est **inférieure** à g sur K lorsque : pour tout $x \in$ K, $f(x) \leq$ g(x) . On note : $f \leq$ g sur K.
- f est **positive** sur K lorsque : pour tout $x \in$ K, $f(x) \geq 0$. On note : $f \geq 0$ sur K.
- f est **majorée** sur K s'il existe M ∈ IR tel que : pour tout $x \in$ K, $f(x) \leq$ M.
- f est **minorée** sur K s'il existe m ∈ IR tel que : pour tout $x \in$ K, $f(x) \geq$ m .
- f est **bornée** sur K s'il existe deux réels m et M tels que : pour tout $x \in$ K, m $\leq f(x) \leq$ M.

Exemple

Soient les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = x^2$ et g$(x) = x^3$.
(Cf) et (Cg) désignent les courbes représentatives dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
Comparer f et g puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

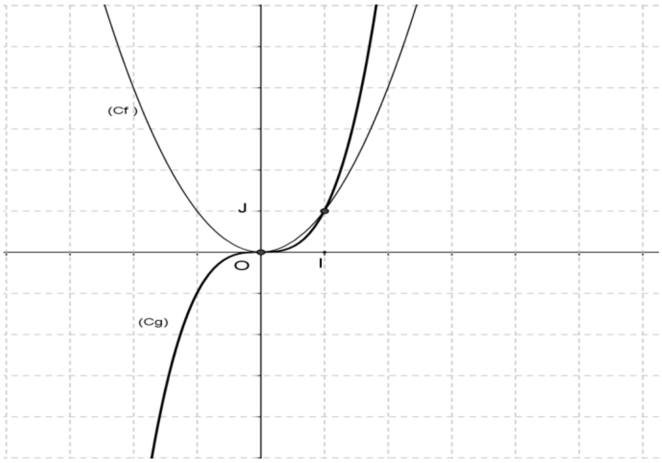
Pour cela, étudions le signe de f(x) – g(x).
Pour tout x∈IR, on a : $f(x)-g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$.
Pour tout x∈IR : $x^2 \geq 0$, *donc f(x) − g(x) a le signe de 1-x .*

$f(x) - g(x) > 0 \iff x \in]-\infty ;0 [\cup]0 ;1[$. *Donc* $f > g$ *sur* $]-\infty ;0 [\cup]0 ;1[$.
$f(x) - g(x) < 0 \iff x \in]1 ;+\infty[$. *Donc* $f < g$ *sur* $]1 ;+\infty[$.
$f(x) - g(x) = 0 \iff x \in \{0; 1\}$. *Donc* $f = g$ *sur* $\{0; 1\}$.

<u>*Interprétation graphique :*</u>
. (Cf) est au-dessus de (Cg) sur $]-\infty ;0 [\cup]0 ;1[$.

. (Cf) est au-dessous de (Cg) sur]1 ;+∞[.
. (Cf) et (Cg) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

Illustration graphique :



V. OPÉRATIONS

Définitions

Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g.
• On définit sur $D_f \cap D_g$ la fonction somme $\boldsymbol{f+g}$ par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
• On définit sur $D_f \cap D_g$ la fonction produit $\boldsymbol{fg}$ par : $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
• On définit sur $D_f \cap D_g - \{x \in IR / g(x) = 0\}$ la fonction quotient $\frac{f}{g}$ par : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 1

Soit f *et* g *les fonctions définies sur IR par* : $f(x) = 2x + 5$ et $g(x) = -3x + 6$.
• *f + g est définie sur IR par : (f + g)(x) = -x + 11 .*
• *fg est définie sur IR par : (fg)(x) = (2x + 5)(-3x + 6).*
• $\frac{f}{g}$ *est définie sur IR-*{2} *par :* $\frac{f}{g}(x) = \frac{2x+5}{-3x+6}$.

Exemple 2

Soit f et g les fonctions de IR vers IR et définies par : $f(x) = \sqrt{1-2x}$ et $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$.
Déterminer les fonctions f + g, fg, $\frac{f}{g}$.

• *f(x) existe si et seulement si* $1 - 2x \geq 0$. *Donc* $D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
• *g(x) existe si et seulement si* $1 - x^2 \neq 0$. *Donc* $D_g = IR - \{-1; 1\}$.
• *f(x) + g(x) existe si et seulement si,* $x \in D_f \cap D_g$.

L'ensemble de définition de f + g est donc $]-\infty;-1[\cup\left]-1;\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup\left]-1;\frac{1}{2}\right], (f+g)(x) = \sqrt{1-2x} + \frac{x}{1-x^2}$

• *fg(x) existe si et seulement si,* $x \in D_f \cap D_g$.

L'ensemble de définition de fg est donc $]-\infty;-1[\cup\left]-1;\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup\left]-1;\frac{1}{2}\right], fg(x) = \frac{x\sqrt{1-2x}}{1-x^2}$

• $\frac{f}{g}$*(x) existe si et seulement si,* $x \in D_f \cap D_g$ *et* $g(x) \neq 0$.

Donc l'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$ *est* $]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right], \frac{f}{g}(x) = \frac{(1-x^2)\sqrt{1-2x}}{x}$

VI. FONCTIONS ASSOCIEES

Le plan est muni du repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

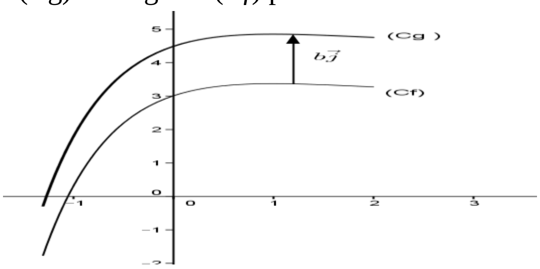
Soit f une fonction numérique et (C) sa courbe représentative, a et b deux nombres réels.

Les fonctions $x \mapsto f(x)+\mathrm{b}$, $x \mapsto f(x+\mathrm{a})$, $x \mapsto f(x+\mathrm{a})+\mathrm{b}$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto |f(x)|$ sont dites **associées** à f.

L'utilisation des fonctions associées permet de construire la courbe d'une fonction g à partir de celle d'une fonction de référence f.

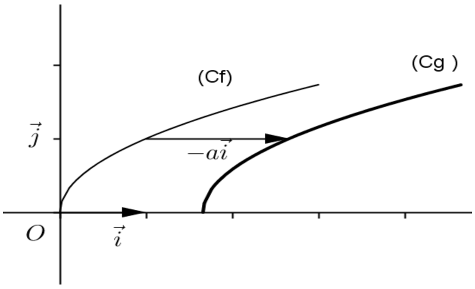
Propriétés

f est une fonction numérique et g la fonction associée à f. (C*f*) et (Cg) sont les courbes représentatives respectives de f et g.

Fonction associée g	**(Cg) est l'image de (C*f*) par la transformation :**
$x \mapsto f(x)+\mathrm{b}$	(Cg) l'image de (C*f*) par la translation de vecteur $\mathrm{b}\vec{\jmath}$. 

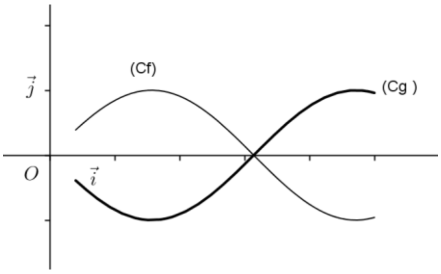
(Cg) est l'image de (C*f*) par la translation de vecteur -a$\vec{\imath}$.

$x \mapsto f(x + \text{a})$



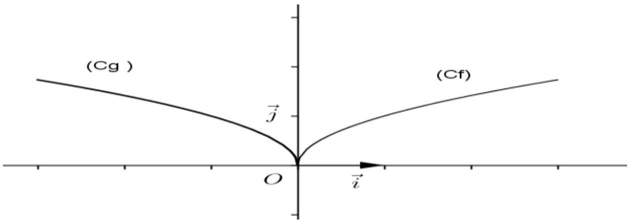
La courbe (Cg) est l'image de (C*f*) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

$x \mapsto -f(x)$



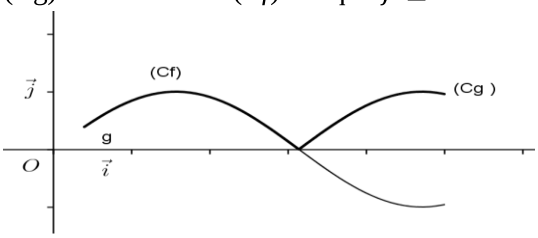
(Cg) est l'image de (C*f*) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

$x \mapsto f(-x)$



(Cg) coïncide avec (C*f*) lorsque $f \geq 0$ et avec (C-*f*) lorsque $f \leq 0$.

$x \mapsto |f(x)|$



Exemple

Soit f la fonction racine carrée et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Tracer (C_f).
2. En déduire la représentation graphique des fonctions g, h, k et l définies par :

g : $x \mapsto \sqrt{x+3}$; h : $x \mapsto \sqrt{x} + 2$; k : $x \mapsto -\sqrt{x}$ et l : $x \mapsto \sqrt{-x}$.

On précisera également l'ensemble de définition de chacune de ces quatre fonctions.

On fera une nouvelle figure dans chaque cas.

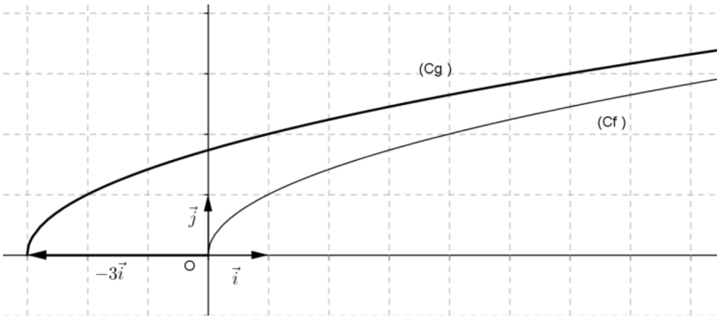
1. Voir ci-dessous

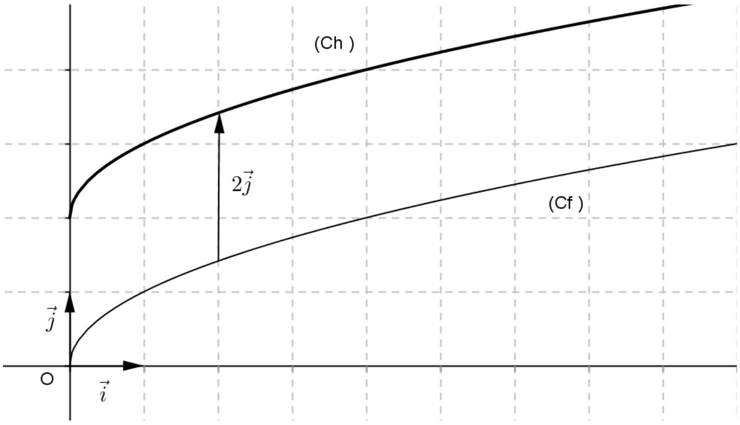
2. • Dg = $[-3;+\infty[$*.* $\forall\, x \in [-3;+\infty[, g(x) = f(x+3)$*, donc la courbe représentative (Cg) de g est l'image de (Cf) par la translation de vecteur* $-3\vec{\imath}$ *.*

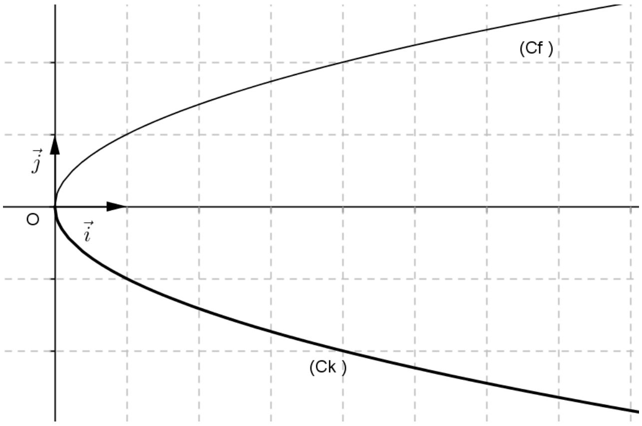
• Dh = $[0;+\infty[$ *.* $\forall\, x \in [0;+\infty[, h(x) = f(x)+2$*, donc la courbe représentative (Ch) de h est l'image de (Cf) par la translation de vecteur* $2\vec{\jmath}$ *.*

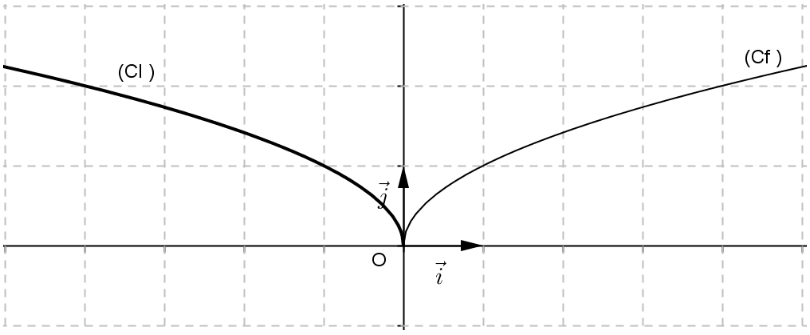
• Dk = $[0;+\infty[$ *.* $\forall\, x \in [0;+\infty[, k(x) = -f(x)$*, donc la courbe représentative (Ck) de k est l'image de (Cf) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.*

• Dl = $]-\infty;0]$ *.* $\forall\, x \in]-\infty;0], l(x) = f(-x)$*, donc la courbe représentative (Cl) de l est l'image de (Cf) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.*









VII. PARITÉ- PÉRIODICITÉ

1. Fonction paire

Définition

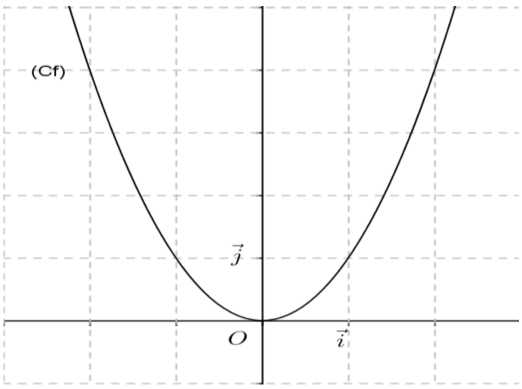
Soit f une fonction et E son ensemble de définition.
La fonction f est **paire** si E est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in$ E, on a :$f(-x) = f(x)$.

Propriété

Dans un repère orthogonal, une fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

Exemple 1

La fonction : $f : x \mapsto x^2$ est paire.



La courbe représentative (C_f) de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 2

Les fonctions suivantes sont paires : $x \mapsto$ k (k $\in$IR) ; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto x^4$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

Exemple 3
Soit $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
Démontrer que f est paire.

Soit D l'ensemble de définition de f.
$x \in D \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0.$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc D = $[-1;1]$*. D est symétrique par rapport à 0.*
Pour tout $x \in [-1;1]$*, on a :* $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2}$ *car* $(-x)^2 = x^2$
Donc pour tout $x \in [-1;1]$*, on a :* $f(-x) = f(x)$*. D'où f est paire.*

2. Fonction impaire

Définition

Soit f une fonction et E son ensemble de définition.
La fonction f est **impaire** si E est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in$E, on a :
$f(-x) = -f(x)$.

Propriété

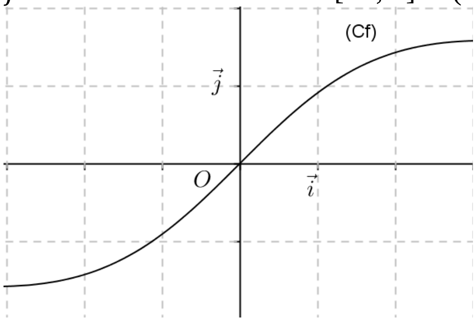
Une fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.

Exemple 1
Les fonctions suivantes sont impaires : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exemple 2
Soit $f: x \mapsto -2x^3 + 7x$.
Démontrer que f est impaire.
L'ensemble de définition de f est IR. IR est symétrique par rapport à 0.
Pour tout $x \in IR$*, on a :* $f(-x) = -2(-x)^3 + 7(-x) = 2x^3 - 7x$
et $-f(x) = -(-2x^3 + 7x) = 2x^3 - 7x$.
Donc pour tout $x \in IR$*, on a :* $f(-x) = -f(x)$*. D'où f est impaire.*

Exemple 3

f est la fonction définie sur [-3 ; 3] et (Cf) sa courbe représentative.



f est une fonction impaire car O est un centre de symétrie de (Cf).

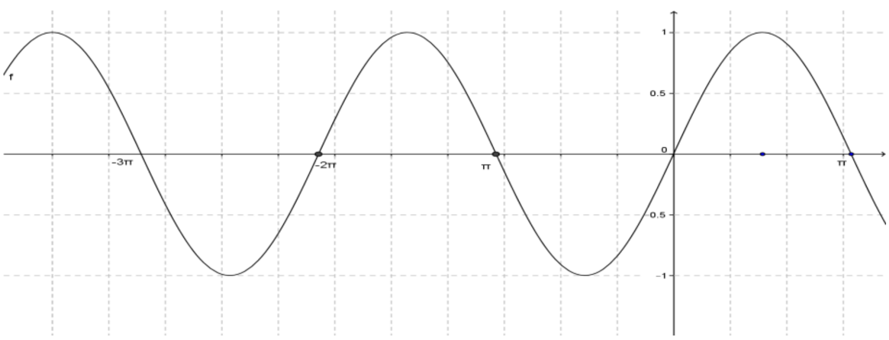
3. Fonction périodique

Définition

Soit f une fonction et E son ensemble de définition et T un nombre réel non nul.
La fonction f est **périodique de période T**,
si $x \in$ E, on a x + T $\in$ E et x −T $\in$ E et $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

Exemple

(C) est la courbe représentative d'une fonction périodique de période 2π .



Remarque

Le plan étant muni d'un repère (O,I,J), une fonction f est périodique de période T si et seulement si sa courbe représentative (C) est globalement invariante par la translation de vecteur T$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$.
Pour tracer une fonction T-périodique, il suffit de la tracer sur un intervalle d'amplitude T puis de faire des translations de vecteurs kT$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ où k est un entier relatif.

VIII. AXE ET CENTRE DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Propriété

Soit f une fonction et D_f son ensemble. Soit (C) sa courbe représentative.
La droite $(\mathcal{D})$ d'équation : x = a est un axe de symétrie de (C) si et seulement si pour tout nombre réel h tel que a + h $\in D_f$, on a : a -h $\in D_f$ et f(a -h) = f(a+h).

Exemple
Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + 3x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).
Démontrer que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation : $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

Soit h un nombre réel tel que : $-\frac{3}{2} + h \in IR$. *On a* $-\frac{3}{2} - h \in IR$.
On a : $f\left(-\frac{3}{2} + h\right) = \left(-\frac{3}{2} + h\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2} + h\right) = \frac{9}{4} - 3h + h^2 - \frac{9}{2} + 3h = -\frac{9}{4} + h^2$
$f\left(-\frac{3}{2} - h\right) = \left(-\frac{3}{2} - h\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2} - h\right) = \frac{9}{4} + 3h + h^2 - \frac{9}{2} - 3h = -\frac{9}{4} + h^2$
Puisque $f\left(-\frac{3}{2} + h\right) = f\left(-\frac{3}{2} - h\right)$.
On en déduit : la droite ($\mathcal{D}$) d'équation : $x = -\frac{3}{2}$ *est un axe de symétrie de (C).*

Exercice
Démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$.

2. Centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Propriété

Soit f une fonction et D_f son ensemble. Soit (C) sa courbe représentative.
Le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (C) si et seulement si pour tout h tel que a + $h \in D_f$, on a : a - $h \in D_f$ et $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}$ = b .

Exemple
Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{4-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).
Démontrer que le point $\Omega(4; -2)$ est un centre de symétrie de (C).

L'ensemble de définition de f est IR$-\{4\}$.
Soit h un nombre réel tel que 4 + h $\in IR-\{4\}$.
● *Prouvons que* $4-h$ *appartient à IR*$-\{4\}$. *Utilisons un raisonnement par l'absurde.*
Supposons que $4-h$ *n'appartient pas à IR*$-\{4\}$.
$4-h \notin IR-\{4\} \Longrightarrow 4 - h = 4$
$\Longrightarrow h = 0$
$\Longrightarrow 4 + h = 4$
$\Longrightarrow 4 + h \notin IR-\{4\}$. *Ce qui contredit le fait que 4 + h* $\in IR-\{4\}$.
On en déduit : 4 + h $\in IR-\{4\} \Longrightarrow$ *4 - h* $\in IR-\{4\}$.
● *Pour tout nombre réel h tel que 4 + h* $\in IR-\{4\}$ *,démontrons que :* $\frac{f(4-h)+f(4+h)}{2}$ = -2 .
On a : $f(4-h) + f(4+h) = \frac{-2h+9}{h} + \frac{-2h-9}{h} = \frac{-4h}{h} = -4.$
Donc $\frac{f(4-h)+ f(4+h)}{2} = -2$.
Donc le point $\Omega(4; -2)$ *est un centre de symétrie de (C).*

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Soit g la fonction définie sur IR$-\{2\}$ par : $g(x) = -4 - \frac{1}{x-2}$.

Démontrer que g est bornée sur $[-3; 1]$ et donner un encadrement de $g(x)$.

Solution

$-3 \leq x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq x - 2 \leq -1$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{1}{5}$

$\Longrightarrow \frac{1}{5} \leq -\frac{1}{x-2} \leq 1$

$\Longrightarrow -4 + \frac{1}{5} \leq -4 - \frac{1}{x-2} \leq -4 + 1$

Il vient $-\frac{19}{5} \leq g(x) \leq -3$. *Donc g est bornée sur* $[-3; 1]$.

Exercice résolu 2

Soit la fonction $f: IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

Déterminer l'ensemble de définition Df de f puis démontrer que $\forall x \in Df$, $\left|f(x) - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{16}|x|$

Solution

Df = $\{x \in IR / 4 + x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$

Df = $[-4; 0[\cup]0; +\infty[$.

$\forall x \in Df, f(x) - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} - \frac{1}{4} = \frac{4\sqrt{4+x}-(8+x)}{4x} = \frac{[4\sqrt{4+x}-(8+x)][4\sqrt{4+x}+(8+x)]}{4x[4\sqrt{4+x}+(8+x)]}$

$\forall x \in Df, f(x) - \frac{1}{4} = \frac{-x}{4[4\sqrt{4+x}-(8+x)]}$

$\forall x \in Df, \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| = \frac{|x|}{4[4\sqrt{4+x}+(8+x)]}$ *car* $\forall x \in Df, 8 + x \geq 4 > 0$ *et* $4\sqrt{4+x} \geq 0$

De $8 + x \geq 4$ *et* $4\sqrt{4+x} \geq 0$, *il vient* $4\left[4\sqrt{4+x} + (8+x)\right] \geq 16$.

Donc $\frac{1}{4[4\sqrt{4+x}+(8+x)]} \leq \frac{1}{16}$. *En multipliant cette inégalité par* $|x|$, *on obtient :*

$\forall x \in Df, \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{|x|}{16}$.

EXERCICES

1 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction g est la restriction de la fonction f à l'ensemble de définition de g.

a) f : IR → IR et
$x \mapsto |3-2x| - 4|x+1| - 7$

g: $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[\to$ IR
$x \mapsto -x-14$

b) f : IR → IR et
$x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} + x$

g: $]0; +\infty[\to$ IR
$$x \mapsto \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1}$$

c) f : IR → IR et
$x \mapsto \sqrt{x^2+1} + x - 2$

g: $]-\infty; 0[\to$ IR
$$x \mapsto \frac{-4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x}}$$

d) f : IR → IR et
$x \mapsto \frac{x^3-1}{|x|+1}$

g: $[-5; 0] \to$ IR
$x \mapsto -x^2 - x - 1$

2 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{-x+|2-x|}{x^2-x}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Soit g la restriction de f à $]1; 2]$.
Donner une expression de g(x) sans le symbole valeur absolu.

3 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = |1-x| - 2|2x+1|$.
Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

4 Soit les fonctions f et g de IR vers IR et définies par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et g$(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
1. f est-elle égale à g ?
2. Déterminer la plus grande partie E de IR sur laquelle f et g ont la même restriction.

5 On considère les fonctions
h : IR → IR et
$x \mapsto \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$

u: $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[\to$ IR
$x \mapsto \sqrt{x-5} + 2$

a) Déterminer les ensembles de définition de h et u.
b) Démontrer que u est un prolongement de h à $[5; +\infty[$.

6 On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = |17x - 12x^2 - 6|$.
Déterminer un polynôme du second degré P ayant même restriction que f à $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

7 Soit f et g deux fonctions de IR vers IR.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles de définition de fog, gof, fof puis donner la formule explicite de chacune de ces fonctions.
a) $f(x) = 5$ *et* $g(x) = x^3 - x + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $g(x) = x + 2$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ et $g(x) = \frac{4}{x-1}$
d) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 - |x|$.

$\boxed{8}$ Soit la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = -\sqrt{2}x + 2$.
Déterminer toutes les fonctions affines g telles que :
$fog = gof$.

$\boxed{9}$ Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :
$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.
Démontrer que : $\forall x \in [0; 1], fof(x) = x$.

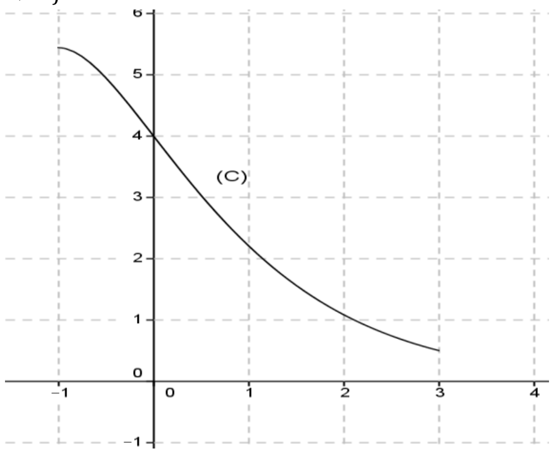
$\boxed{10}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \sqrt{1-x}$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles de définition de la fonction g puis donner la formule explicite de $g(x)$.
a) $g(x) = f(2x)$
b) $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
c) $g(x) = f(-x)$.

$\boxed{11}$ f est une fonction f de IR vers IR.
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de f.
a) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$
e) $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^6}$

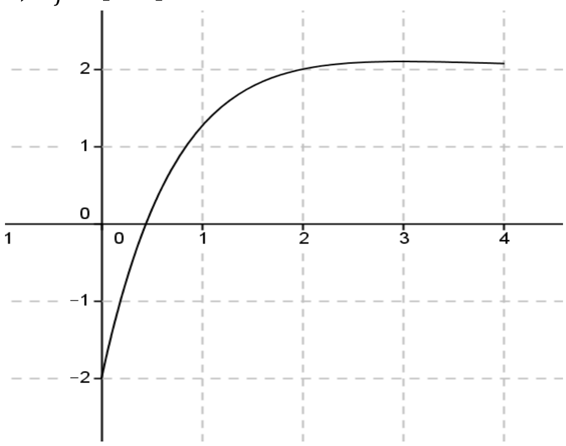
$\boxed{12}$ Soit f et g deux fonctions de IR vers IR.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions $f + g, fg, \frac{f}{g}$ après avoir précisé leurs ensembles de définition.
a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ et $g(x) = \frac{2}{x+1}$
b) $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^3 + x$
c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
d) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2-2}$

$\boxed{13}$ Dans chacun des cas suivants, (C) désigne la courbe représentative d'une application f dans un repère orthonormé (O,I,J), dites si f est bijective ou non.
D_f désigne l'ensemble de définition de f.

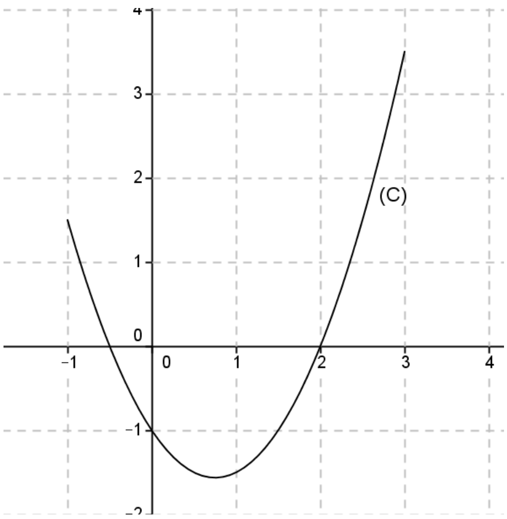
a) $D_f = [-1; 3]$



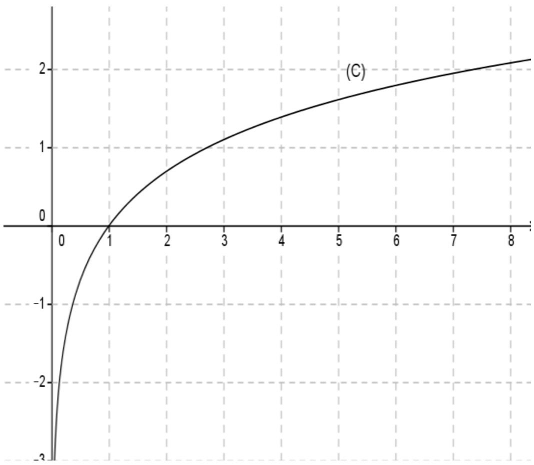
b) $D_f = [0; 4]$



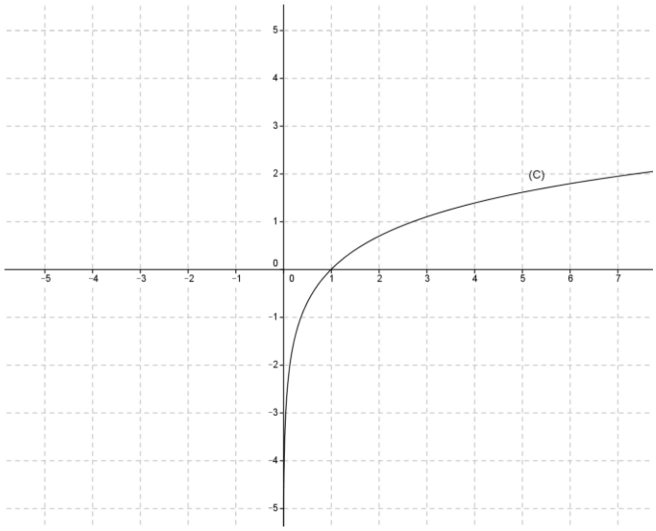
c) $D_f = [-1;3]$



d) $D_f =]0;+\infty[$



14 (C) désigne la courbe représentative d'une application bijective f dans un repère orthonormé (O,I,J).
Construire la courbe représentative (C') de sa bijection réciproque f^{-1} .



15 Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$a)$ $f : \mathrm{IR} \setminus \{1/2\} \to \mathrm{IR} \setminus \{-2\}$
$x \mapsto \frac{4x+1}{1-2x}$

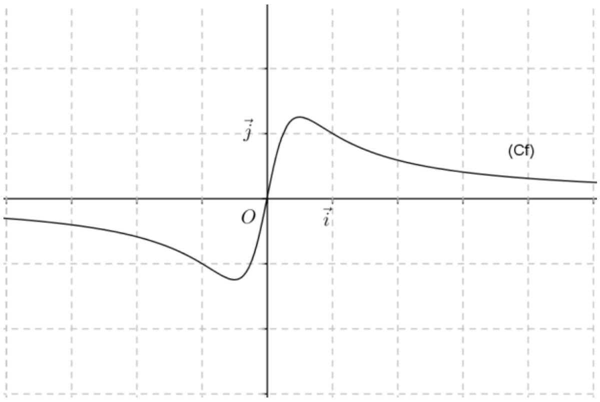
$b)$ $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$
$x \mapsto 3x - 5$

$c)$ $f : [1;+\infty[\to]-\infty;2]$
$x \mapsto 2 - 2(x-1)^2$

16 (Cf) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;5]$.
Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe représentative de la fonction g et déterminer son ensemble de définition

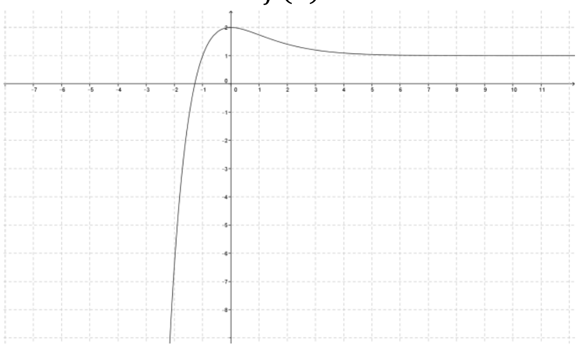
a) $g(x) = |f(x)|$;
b) $g(x) = f(-x)$;
c) $g(x) = f(x+1)$;
d) $g(x) = f(x-2) + 3$;

e) $g(x) = -f(x)$.



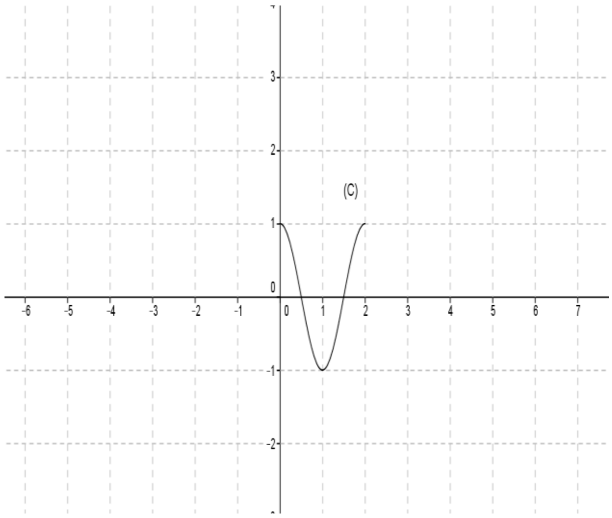
17 Le plan est muni du repère orthogonal (O,I,J). (C) désigne la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.

1. Construire la courbe représentative (C_g) de la fonction $g: x \longmapsto f(x) - 2$.
2. Construire la courbe représentative (C_h) de la fonction $h: x \longmapsto -f(x)$.



18 La courbe (C) ci-dessous désigne la représentation d'une fonction périodique de période 2.

Compléter la courbe, en justifiant.



19 Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f de IR vers IR.

a) $f(x) = -3x^2 + 5$

b) $f(x) = x^3 - 2x + 3$

c) $f(x) = 2x + 5x^3$

d) $f(x) = 2x - \frac{5}{x}$

e) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

f) $f(x) = \frac{4|x|}{x}$

g) $f(x) = \frac{-2x^4 - 3}{x^2 + 1}$

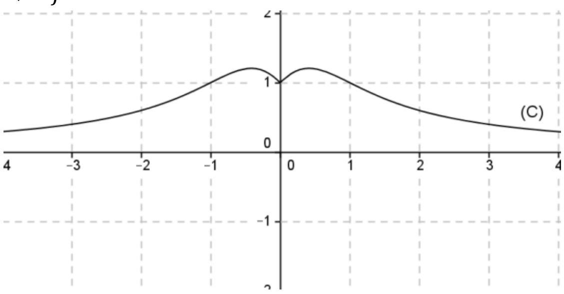
h) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x^2 - 1}$

i) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

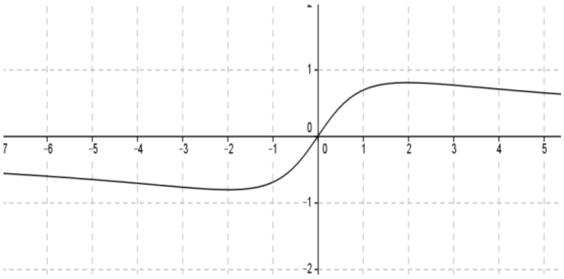
20 Dans chacun des cas suivants, (C) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J), dites si f est paire ou impaire.

D_f désigne l'ensemble de définition de f.

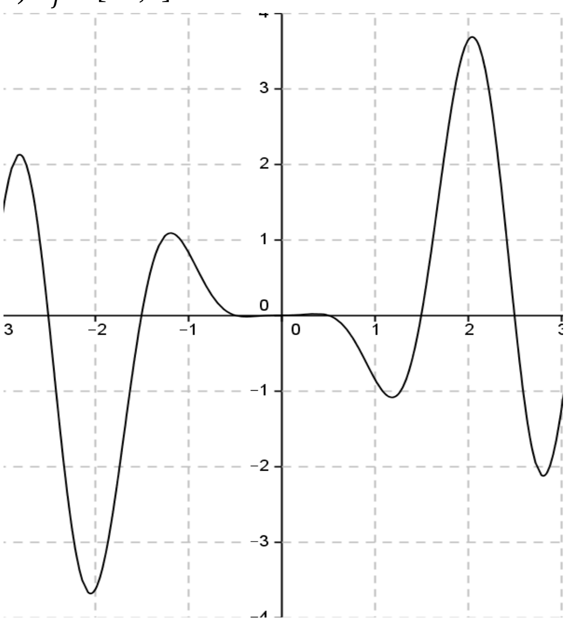
a) D_f = [-4 ;4]



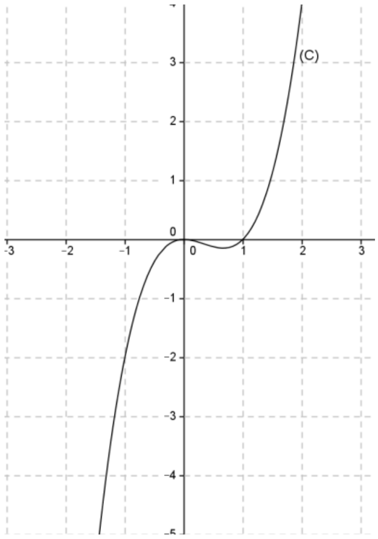
b) D_f = IR



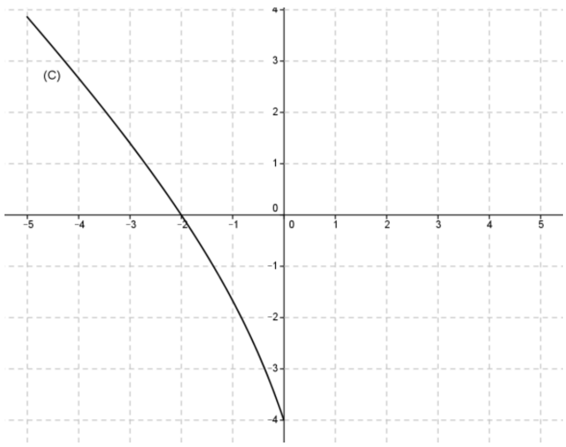
c) D_f = [-3 ;3]



d) D_f = [-3 ;3]



21 La courbe (C) ci-dessous désigne la représentation d'une fonction paire f.
a) Reproduire et compléter la courbe, en justifiant.
b) Dresser le tableau de variation de f.



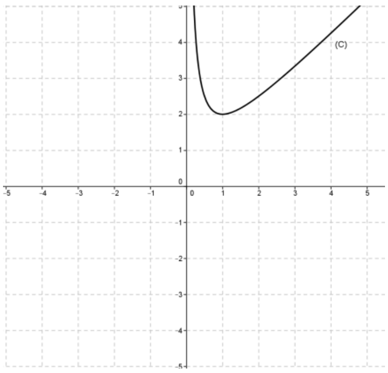
22 f est une fonction définie sur IR et admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$

$f(x)$	↘	2	↗

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

$\boxed{23}$ La courbe (C) ci-dessous désigne la représentation d'une fonction impaire f.
a) Reproduire et compléter la courbe, en justifiant.
b) Dresser le tableau de variation de f.



$\boxed{24}$ Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR.
Démontrer que la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé admet l'élément de symétrie indiqué

a) $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$
Axe de symétrie : (D) : $x = 1$.

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
Centre de symétrie : $\Omega(1;1)$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
Axe de symétrie : (D) : $x = \frac{3}{2}$.

d) $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$
Centre de symétrie : $\Omega(2;1)$

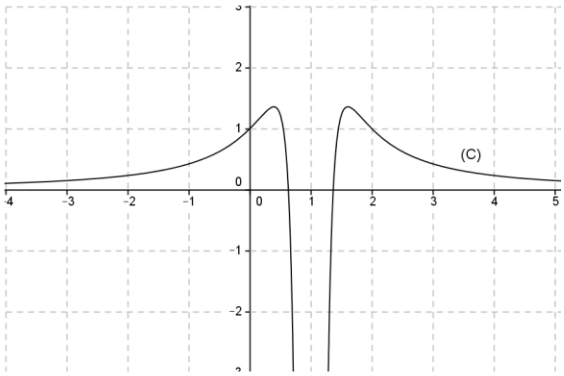
e) $f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$
Axe de symétrie : (D) : $x = -\frac{1}{2}$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$
Centre de symétrie : $\Omega(1;-2)$.

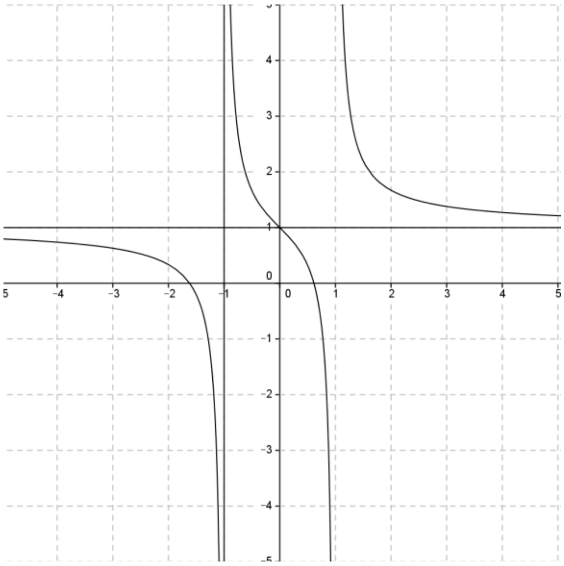
g) $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} - 1$
Axe de symétrie : (D) : $x = \frac{1}{2}$.

h) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$
Centre de symétrie : $\Omega\ (1; 1)$.

$\boxed{25}$ (C) est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé (O,I,J). Conjecturer l'existence d'un axe de symétrie (D) de (C) dont on donnera l'équation.



$\boxed{26}$ (C) est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère (O,I,J).
Conjecturer l'existence d'un centre de symétrie A de (C) dont on précisera les coordonnées.



27 On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$.
Démontrer que : $\forall x \in IR, 1 \leq f(x) \leq 2$.

28 On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x(1-x)$.
Démontrer que f est majorée sur IR par $\frac{1}{4}$.

29 On considère les fonctions f, g et h de IR vers IR et définies par :
$f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = -\frac{x}{2} + 1$,
$h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$.
Démontrer que : $\forall x \in [0; 1]$,
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

30 Soit la fonction

$$f: IR \to IR$$
$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

1. Etudier la parité de f.
2. Démontrer que : $\forall x \in IR^*$,
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$
3. En déduire que $\forall x \in IR^*, |f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$.

31 Soit la fonction Le plan est muni du repère (O,I,J). On considère les fonctions f et g de IR vers IR et définies par :
$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$, $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$.
(C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.
1.Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

32 Le plan est muni du repère (O,I,J).
Soit la fonction f de IR vers IR et définie par :
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$
(C) la courbe représentative de f.
Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$.
Etudier la position de (C) par rapport à (D).

33 f est une fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+5}$.
Démontrer que :
$\forall x \in$IR, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 3$.

34 f est une fonction définie sur IR et admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

Démontrer que f est positive sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

2

EQUATIONS, INEQUATIONS, SYSTEMES LINEAIRES

COMMENTAIRES

► Ce chapitre :

- met à la disposition des élèves le discriminant pour résoudre les problèmes du second degré ;
- permet de réinvestir les acquis sur la représentation graphique des polynômes du second degré.

► La méthode de Pivot de Gauss est un procédé de résolution par combinaisons.
Elle ne fait pas appel à des connaissances nouvelles.

► On établira chaque fois que c'est possible, le lien entre les résultats algébriques et la représentation graphique associée.

► On demandera d'écrire sous la forme d'un produit de polynômes du 1er degré et non pas factoriser.

► Quelques situations concrètes (géométrie, physique, économie).

► La résolution des équations et inéquations irrationnelles se fera sur des exemples.

<table>
<tr><th>CONTENUS</th><th>CAPACITÉS ATTENDUES</th></tr>
<tr><td>I. Discriminant d’un polynôme, d’une équation du second degré

II. Formules donnant les zéros éventuels d’un polynôme à l’aide du discriminant

III. Expression de la somme et du produit des solutions d’une équation du second degré

IV. Factorisation
V. Règles donnant le signe d’un polynôme du second degré suivant le signe de son discriminant et du coefficient de x^2 :</td><td>☞ Calculer le discriminant :d’un polynôme, d’une équation du second degré .
☞ Utiliser le discriminant pour:
- résoudre une équation du second degré ;
- écrire sous forme d’un produit de polynômes du premier degré un polynôme du second degré ;
- étudier le signe d’un polynôme du second degré ;
- résoudre une inéquation du second degré.
☞ Résoudre des équations et inéquations bicarrées ;
☞ Utiliser la somme et le produit des solutions d’une équation du second degré pour
- calculer l’une connaissant l’autre ;
- déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
☞ Résoudre des équations ou inéquations irrationnelles du type :
• $\sqrt{P(x)} = Q(x)$; • $\sqrt{P(x)} < Q(x)$
• $\sqrt{P(x)} > Q(x)$ • $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$
•$\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$ où P et Q sont des polynômes tels que degré(P) ≤ 2 et degré(Q) ≤ 1.
☞ Résoudre des systèmes de trois équations linéaires dans IR^3 ayant une solution unique par :
- substitution ;
-la méthode du pivot de Gauss.</td></tr>
</table>

COURS

I. DISCRIMINANT D'UN POLYNOME, D'UNE EQUATION DU SECOND DEGRE

$\mathrm{P}(x)$ désigne un polynôme défini par $\mathrm{P}(x) = \mathrm{a}x^2 + bx + c$ avec a $\in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Définition

On appelle discriminant de $\mathrm{P}(x)$ ou de l'équation : $x \in IR$, $\mathrm{P}(x) = 0$, le réel Δ défini par :
$\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemples

Calculer le discriminant du polynôme $\mathrm{P}(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
Calculer le discriminant de l'équation (E): $x \in IR,\ -x^2 + 2x + 5 = 0$.
Calculer le discriminant du polynôme $\mathrm{Q}(x) = 2x^2 + 3$.

Le discriminant du polynôme P(x) est $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(1) = 13$.
Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2)^2 - 4(-1)(5) = 29$.
Le discriminant du polynôme Q(x) est $\Delta = (0)^2 - 4(2)(3) = -24$.

II. FORMULES DONNANT LES ZEROS EVENTUELS D'UN POLYNOME A L'AIDE DU DISCRIMINANT

$\mathrm{P}(x)$ désigne un polynôme défini par $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Propriété

Les zéros de $\mathrm{P}(x)$ peuvent être déterminés de la façon suivante :
– Si $\Delta < 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ n'a pas de zéro.
– Si $\Delta = 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ admet un seul zéro : $-\frac{b}{2a}$
– Si $\Delta > 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ admet deux zéros : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple 1

Déterminer les zéros éventuels de chacun des polynômes $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ et $\mathrm{R}(x)$ définis par :
$\mathrm{P}(x) = 2x^2 - 4x - 6$, $\mathrm{Q}(x) = -x^2 + 2x - 3$ et $\mathrm{R}(x) = x^2 - \sqrt{10}\, x + \frac{5}{2}$.

• *Le discriminant du polynôme P(x) est* $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 64$.

$\Delta > 0$ *donc P(x) admet deux zéros :* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{4} = -1$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\mp8}{4} = 3$

• *Le discriminant du polynôme Q(x) est* $\Delta = -8$. $\Delta < 0$ *donc P(x) n'admet pas de zéro.*

• *Le discriminant du polynôme R(x) est* $\Delta = 0$ *. Donc R(x) admet un seul zéro :* $\frac{-b}{2a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Exemple 2

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $-x^2 + 6x - 10 = 0$

b) $x^2 + 4x - 21 = 0$

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

a) *Le discriminant de l'équation est* $\Delta = -4$*.* $\Delta < 0$ *donc l'équation n'admet pas de solution.*

b) Le discriminant de l'équation est $\Delta = 100$.

$\Delta > 0$ *donc l'équation admet deux solutions :* 3 *et* -7.

c) Le discriminant de l'équation est $\Delta = 0$.

$\Delta > 0$ *donc l'équation admet une seule solution :* $-\frac{1}{3}$.

III. SOMME ET PRODUIT DES ZÉROS

P(x) désigne un polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Propriété 1

Si P(x) admet deux zéros x_1 et x_2 alors $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Exemple

Soit le polynôme P(x) défini par : P(x) = $2x^2 + x - 15$.

Vérifier que -3 est un zéro de P(x) puis en déduire l'autre zéro.

On a : $P(-3) = 2(-3)^2 + (-3) - 15 = 18 - 18 = 0$ *donc* -3 *est un zéro de P(x) .*

En notant $x_1 = -3$ *et* x_2 *l'autre zéro de P(x), on obtient :* $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{2}$ *. Donc* $x_2 = \frac{5}{2}$.

Exercice

Résoudre dans IR, les équations suivantes en cherchant une solution évidente :

a) $6x^2 - 7x + 1 = 0$ *b)* $2x^2 + 9x + 7 = 0$.

Propriété 2

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation : $x \in IR,\ x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple

Trouver deux nombres sachant que leur somme est 16 et leur produit est 63.

Ces deux nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation : $x \in IR,\ x^2 - 16x + 63 = 0.$
$\Delta = 4$. *Donc cette équation a deux solutions : 7 et 9.*
Les deux nombres cherchés sont donc 7 et 9 .

Exercice

a) Déterminer deux nombres dont la somme est 25 et le produit égal à -2814.
b) Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que son aire est égale à 57 cm^2 et son périmètre égal à 30,2 cm.

IV. FACTORISATION

P(x) désigne un polynôme défini par P$(x) = ax^2 + bx + c$ avec a $\in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Propriété

– Si $\Delta < 0$ alors P(x) ne peut pas être factorisé.
– Si $\Delta = 0$ alors P(x) = a$(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
– Si $\Delta > 0$ alors P(x) = a$(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les zéros de P(x).

Exemple

Soit P(x), Q(x) et R(x) les polynômes définis par :
P(x) = $-3x^2 + 4x - 1$;
Q(x) = $x^2 + x - 6$;
R(x) = $-4x^2 + 20x - 25$.
Ecrire P(x), Q(x) et R(x) comme produit de deux polynômes du 1er degré.

• *Le discriminant du polynôme P(x) est* $\Delta = (4)^2 - 4(-3)(-1) = 4$.
$\Delta > 0$ *donc P(x) admet deux zéros :* $x_1 = = \frac{-4\ -2}{-6} = 1$ *et* $x_2 = = \frac{-4\mp 2}{-6} = \frac{1}{3}$
Donc P(x) = $-3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$ = $(-3x + 3)(x - \frac{1}{3})$
• *Q(x) admet deux zéros :* -3 *et* 2 . Donc Q(x) = $(x + 3)(x - 2)$.
• *R(x) admet un seul zéro :* $\frac{5}{2}$. Donc R(x) = $-4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

V. INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. Signe d'un polynôme du second degré

P(x) désigne un polynôme défini par P$(x) = ax^2 + bx + c$ avec a $\in IR^*$, b $\in IR$ et c $\in IR$.

Propriété

$\Delta < 0$

P n'a pas de zéro

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

$\Delta = 0$

P a un seul zéro $-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

$\Delta > 0$

P a deux zéros x_1 et x_2

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

Exemple

Étudier, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

a) f(x) = 8x² + 8x + 2 ;   b) f(x) = -2x² + 3x + 2 ;   c) f(x) = -x² -3x - 10 .

a) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = 0$.

$\Delta > 0$ *donc f(x) admet un seul zéro :* $x_0 = -\frac{1}{2}$. *a = 8 donc a > 0. Par suite :*

$\forall\, x \in IR - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f(x) > 0;$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

b) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = 25$.

$\Delta > 0$ *donc f(x) admet deux zéros :* $-\frac{1}{2}$ *et* 2.

a = -2 , a < 0. Par suite :

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup\,]2; +\infty[,\ f(x) < 0$;

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[,\ f(x) > 0$;

$\forall\, x \in \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\},\ f(x) = 0$.

c) *Le discriminant du polynôme f(x) est* $\Delta = -36$. $\Delta < 0$ *donc f(x) n'admet pas de zéro .*

a = -1, a < 0. Par suite : $\forall\, x \in IR,\ f(x) < 0$.

Exercice

Déterminer le signe des polynômes P(x), Q(x) , R(x) et T(x) définis par

P(x) = $-3x^2 + 4x - 1$ et Q(x) = $x^2 + x - 6$, R(x) = $-4x^2 + 12x - 9$ et T(x) = $x^2 - x + 3$

2. Inéquation du second degré

Exemples

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} > 0$;

b) $-3x^2 + x + 44 \leq 0$.

a) Soit P le polynôme défini par : P(x) = $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

On a : $\Delta = 0$, *donc P a un seul zéro :* $\frac{1}{2}$.

Le coefficient de x^2 *est positif, donc le polynôme P*(x) *est strictement positif pour* $x \neq \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions est donc IR$\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Soit Q le polynôme défini par : Q(x) = $-3x^2 + x + 44$.

On a : $\Delta = 529$, *donc Q a deux zéros :* $-\frac{11}{3}$ *et 4 .*

Le coefficient de x^2 *est négatif, donc le polynôme Q(x) est négatif à l'extérieur des zéros .*

L'ensemble des solutions est donc $\left]-\infty; -\frac{11}{3}\right] \cup [4; +\infty[$.

Exercice

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{3}x - x^2 - 20 < 0$;

b) $3x^2 - 15 \leq 0$;

c) $-x^2 + x - 1 > 0$;

d) $x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x + 3 - 2\sqrt{2} > 0$.

3. Interprétation graphique

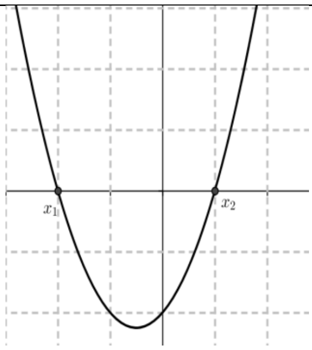
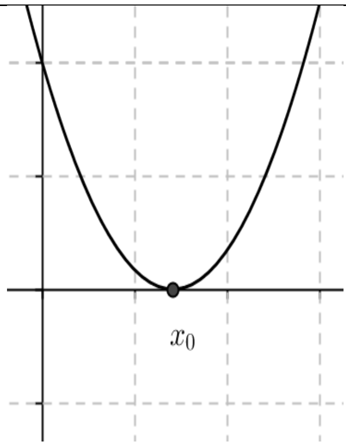
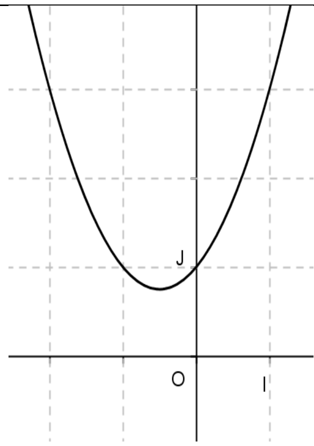
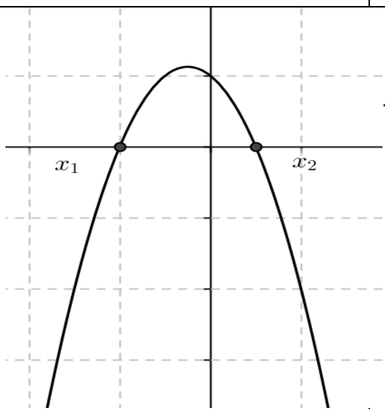
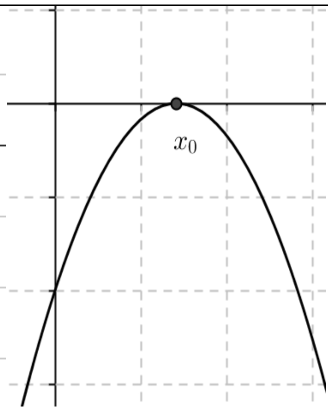
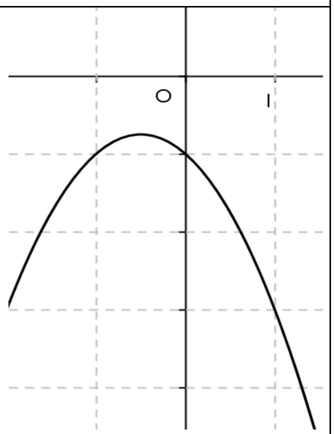
Soit (O; $\vec{i}, \vec{j}$) un repère du plan et P(x) le polynôme du second degré défini par :
P(x) = a$x^2 + bx + c$.

Propriété

La représentation graphique de P est l'image par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} \\ -\frac{\Delta}{4a} \end{pmatrix}$ de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$.

C'est donc une parabole de sommet S$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Illustration :

	$\Delta > 0$	$\Delta = \mathbf{0}$	$\Delta < \mathbf{0}$
Zéro de P(x)	2 zéros x_1 et x_2	1 zéro x_0	Pas de zéro
a > **0**			
	Signe de P(x) : • $\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, P$(x) > 0$ • $\forall x \in]x_1; x_2[$, P$(x) < 0$	Signe de P(x) : $\forall x \in]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$, P$(x) > 0$.	Signe de P(x) : $\forall x \in IR$, P$(x) > 0$.
a < **0**			
	Signe de P(x) : • $\forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, P$(x) < 0$; • $\forall x \in]x_1; x_2[$, P$(x) > 0$.	Signe de P(x) : $\forall x \in]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$, P$(x) < 0$.	Signe de P(x) : $\forall x \in IR$, P$(x) < 0$.

TRAVAUX PRATIQUES

$\boxed{\text{TP1}}$ EXEMPLES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS IRRATIONNELLES

Exercice résolu 1
Résoudre dans IR l'équation (E) : $\sqrt{x+5} = x+3$.

Solution

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x+5 = x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3;+\infty[\\ x^2+5x+4=0 \quad (1) \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les solutions de (1) qui appartiennent à $[-3;+\infty[$
$x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow x=-1$ *ou* $x=-4$.
-1 *appartient à* $[-3;+\infty[$ *;* -4 *n'appartient à* $[-3;+\infty[$.
D'où : l'ensemble des solutions de (E) est : $\{-1\}$.

Exercice résolu 2
Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $\sqrt{3x^2+2x} \leq 6-x$.

Solution

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x \geq 0 \quad (1) \\ 6-x \geq 0 \quad (2) \\ \left(\sqrt{3x^2+2x}\right)^2 \leq (6-x)^2 \quad (3) \end{cases}$

- $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=-\frac{2}{3}$.

Le coefficient de x^2 *est positif donc* $3x^2+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup [0;+\infty[$.

- $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty;6]$.
- *(3)* $\Leftrightarrow 3x^2+2x \leq x^2-12x+36 \Leftrightarrow x^2+7x-18 \leq 0$

Le discriminant de $x^2+7x-18$ *est* $\Delta = 121$.
Les zéros de $x^2+7x-18$ *sont* -9 *et* 2 .
$x^2+7x-18 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-9;2]$.
Les solutions de (I) sont les réels qui appartiennent à la fois à $\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup [0;+\infty[$ *, à* $]-\infty;6]$ *et à* $[-9;2]$. *D'où : l'ensemble des solutions de (E) est :* $\left[-9,-\frac{2}{3}\right] \cup [0;2]$.

Exercice résolu 3
Résoudre dans IR l'inéquation (I) : $\sqrt{1-2x} > 2x+11$.

Solution
Soit D l'ensemble de validité de (I).
D = $\{x \in IR/1-2x \geq 0\}$ = $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.
Il y a deux cas à examiner :
1er cas : x ∈ D et $2x+11 < 0$.
Si $x \in D$ *et* $2x+11 < 0$ *alors l'inéquation est vérifiée. Donc on trouve un premier ensemble solution*
$S_1 = D \cap \left]-\infty;-\frac{11}{2}\right[= \left]-\infty;-\frac{11}{2}\right[$.
2e cas : x ∈ D et $2x+11 \geq 0$.

Si $x \in D$ *et* $2x+11 \geq 0$ *alors : (I)* $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \quad (1) \\ x \geq -\frac{11}{2} \quad (2) \\ \left(\sqrt{1-2x}\right)^2 > (2x+11)^2 \quad (3) \end{cases}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \quad (1) \\ x \geq -\frac{11}{2} \quad (2) \\ 2x^2+23x+60 < 0 \quad (3) \end{cases}$$

Le discriminant du polynôme $2x^2+23x+60$ *est 49 et les zéros du polynômes sont* $-\frac{15}{2}$ *et* -4 *. Le polynôme* $2x^2+23x+60$ *est du signe de a (a = 2), donc :*
$2x^2+23x+60 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{15}{2};-4\right[$.
Donc on trouve un deuxième ensemble solution
$S_2 = D \cap \left[-\frac{11}{2};+\infty\right[\cap \left]-\infty;-\frac{11}{2}\right] \cap \left]-\frac{15}{2};-4\right[= \left[-\frac{11}{2};-4\right[$.
<u>Conclusion</u> : l'ensemble des solutions de (I) est : $S_1 \cup S_2 =]-\infty;-4]$.

Exercice résolu 4
Résoudre dans IR :
a) l'équation (E) : $-4x^4-17x^2+4=0$
b) l'inéquation (I) : $-4x^4-17x^2+4 > 0$.

Solution
a) Soit P le polynôme défini par : P(x) = $-4x^4-17x^2+4$.
Posons X = x^2*, on a :* $-4x^4-17x^2+4 = -4X^2-17X+4$.
Les zéros de $-4X^2-17X+4$ *sont 4 et* $\frac{1}{4}$.
On a : $-4X^2-17X+4 = -4(X-4)\left(X-\frac{1}{4}\right) = -4(x^2-4)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$
Donc P(x) = $-4(x^2-4)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$.

P(x) = 0 $\Leftrightarrow -4(x^2-4)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0$ *ou* $x^2-\frac{1}{4}=0$

P(x) = 0 $\Leftrightarrow x=-2$ *ou* $x=2$ *ou* $x=-\frac{1}{2}$ *ou* $x=\frac{1}{2}$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{-2;2;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

b) *P(x) =* $(-4x^2+16)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$.

On obtient le tableau de signe de P(x) :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-4x^2+16$		-	0	+		+		+	0	-	
$x^2-\frac{1}{4}$		+		+	0	-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

L'ensemble des solutions de (I) est donc : $\left]-2;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};2\right[$.

$\boxed{\text{TP2}}$ EXEMPLES D'ÉQUATIONS LINEAIRES DANS IR^3

Exercice résolu 1

Résoudre dans IR^3 le système suivant par substitution :

$$\begin{cases} 3x-7y-z=-12 \\ x+4y+2z=-3 \\ -4x+y-6z=36 \end{cases}$$

Solution

On isole z dans la première équation et on remplace dans les deux autres :

$$\begin{cases} 3x-7y-z=-12 \\ x+4y+2z=-3 \\ -4x+y-6z=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x-7y\ +\ 12 \\ x+4y+2(3x-7y\ +\ 1)=-3 \\ -4x+y-6(3x-7y\ +\ 1)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x-7y\ +\ 12 \\ 7x-10y=-27 \\ -22x+43y=108 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=3x-7y\ +\ 12 \\ y=\frac{7}{10}x+\frac{27}{10} \\ -22x+43\left(\frac{7}{10}x+\frac{27}{10}\right)=108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x-7y\ +\ 12 \\ y=\frac{7}{10}x+\frac{27}{10} \\ \frac{81}{10}x=-\frac{81}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-5 \end{cases}$$

Le système a pour solution le triplet $(-1;2;-5)$.

Exercice résolu 2

Résoudre dans IR^3 le système suivant par la méthode du **pivot de Gauss** :

$$\begin{cases} 40x - 15y - z = 128 \\ 81x - 27y - 2z = 337 \\ 25x - 9y - 3z = 72 \end{cases}$$

Solution

On isole z dans la première équation et on remplace dans les deux autres :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 40x - 15y - z = 128 \\ 81x - 27y - 2z = 337 \\ 25x - 9y - 3z = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} 40x - 15y - z = 128 \\ x + 3y = 81 \\ -95x + 36y = -312 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 95L_2 \end{matrix} \begin{cases} 40x - 15y - z = 128 \\ x + 3y = 81 \\ 321y = 7383 \end{cases}$$

On tire successivement : $y = 23$ *;* $x = 12$ *;* $z = 7$.

Le système a pour solution le triplet $(12; 23; 7)$.

$\boxed{\text{TP3}}$ SITUATIONS CONCRÈTES

Exercice résolu2

Un grossiste propose à Moussa un certain nombre de boîtes de lait identiques dont le coût total est de 59400 F. Il met ces boîtes de lait dans un gros sac.

Moussa hésite au dernier moment et demande au commerçant de diminuer le prix de chaque boîte de 90 F.

Ce dernier accepte et dit à Moussa avec peine qu'il devra ajouter 5 boîtes supplémentaires dans le gros sac. Moussa lui remet alors les 59400 F.

Combien de boîtes de lait Moussa a-t-il achetés et à quel prix unitaire ?

Solution

Soit x le prix d'une boîte de lait et y le nombre de boîtes de lait qu'il a achetés.

On a : $\begin{cases} xy = 59400 \\ (x - 90)(y + 5) = 59400 \end{cases}$

On obtient l'équation : $x^2 - 118y - 90 = 0 \quad avec\ y = \frac{59400}{x}$.

Soit : $x^2 - 90x - 1069200 = 0$.

Le discriminant $\Delta = 4284900$.

Les solutions sont $x_1 = -990 \quad et \quad x_2 = 1080$ *.Seule la solution positive répond à la question.*

Le prix d'une boîte de lait est 1080 F et le nombre de boîtes de lait qu'il a achetés est $\frac{59400}{1080} = 55$.

EXERCICES

1 Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $5x^2 + 4 = 0$

b) $4x^2 - \frac{25}{4} = 0$

c) $2x^2 - 1 = 0$

d) $-3x^2 + 7x = 0$

e) $x^2 - x - 12 = 0$

f) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

g) $-x^2 + 8x - 7 = 0$

h) $-3x^2 - x - 12 = 0$

i) $x^2 + x - 1 = 0$

j) $1 - 4x^2 = 0$

k) $4x^2 - x - 3 = 0$

l) $x^2 + 4x + 7 = 0$

m) $2x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} + 2 = 0$

n) $-3x^2 + 7x + 4 = 0$

2 On donne l'équation (E) :

$x \in IR,\ 2x^2 + (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3} - 3 = 0$.

1. Justifier que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une solution de (E) .
2. Déterminer l'autre solution de (E).

3 Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

a) $x^2 - 2 < 0$

b) $3x^2 + 1 < 0$

c) $-x^2 - 5 < 0$

d) $4x^2 + 16 \geq 0$

e) $4x^2 + 2x - 2 < 0$

f) $2x^2 + 5x + 3 \leq 0$

g) $-x^2 + 8x - 7 > 0$

h) $-3x^2 - x - 12 < 0$

i) $x^2 + x - 1 > 0$

j) $x - 4x^2 \leq 0$

k) $-x^2 - x + 1 \geq 0$

l) $x(1 + 4x) < 0$

m) $x^2 - 2x + \sqrt{3} > 0$

n) $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$

4 Étudier, suivant les valeurs de x, le signe du polynôme $f(x)$ dans chaque cas :

a) $f(x) = -2x^2 + 7x - 5$

b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

c) $f(x) = 1 - x^2$

d) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

e) $f(x) = -4x^2 + 6x - \frac{9}{4}$.

5 Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $\frac{x^2+x-2}{x-9} = 0$

b) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$

c) $\frac{x^2-x-2}{x^2-9} = 3x - 6$

d) $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2) = 0$

e) $(x + 1)(x + 2) = (2x + 1)(3x + 1)$.

6 Soit P le polynôme défini sur IR par :

$P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

1. Calculer P(3).
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre dans IR, $P(x) \leq 0$.

7 Résoudre dans IR les équations suivantes:

a) $x^4 = 1$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

c) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

d) $\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 - 2 = 0.$

8 Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

a) $x^4 < 16$

b) $-2x^4 + 3x^2 - 1 > 0$

c) $2x^4 + 3x^2 - 9 \geq 0$

d) $x^2 - x^4 < 0.$

9 Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $(x^2 - x)(2x + 1) \geqslant 0$

b) $\frac{x^2+x-2}{x-9} \leq 0$

c) $\frac{4x^2-12x+9}{-2x^2-7x-3} > 0$

d) $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2) < 0$

e) $(x + 1)(x + 2) \geqslant (2x + 1)(3x + 1)$

f) $\frac{x^2-x-2}{x^2-9} \leq 3x - 6$

g) $\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{2}{x+1} - 1.$

10 Soit les fonctions f et g définies sur IR par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1$.

1. Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses, ($x_A < x_B$).
2. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g) .

11 Résoudre dans IR :

a) $\sqrt{6-x} = 7x - 12$

b) $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} = x - 2$

c) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq 1 - x$

d) $x + 2 > \sqrt{2 + 7x}$

e) $\sqrt{6 + 10x} \leq 3 + x$

f) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 4x + 6$

g) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} \leq 4x + 6$

h) $\sqrt{3 - x^2 + 2x} < 1 - x$

i) $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \geq x - 1$

k) $\sqrt{1 - 4x^2} > x$

l) $\sqrt{x - 1} \geq 3 - x$

m) $\sqrt{3 - x^2} > 1$.

12 Résoudre dans IR, les équations et inéquations suivantes :

a) $3x^4 - 10x^2 + 24 = 0$;

b) $(2x^2 + x + 1)(-x^2 + x - 2) \leq 0$;

c) $\frac{4x^2-1}{3+6x} > 0$;

d) $\sqrt{3x + 4} < 2 - x$.

13 f est une fonction de IR vers IR .
Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

a) $f(x) = 5x - 4\sqrt{x^2 + 81}$

b) $f(x) = 3x - 2\sqrt{3(x^2 - 1)}$

14 f est une fonction de IR vers IR et (C) sa courbe représentative dans un repère (O,I,J).
Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la position de (C) par rapport à la droite (D).

a) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ *et (D) :* $y = 2x$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$ *et* (D) : $y = -\frac{1}{3}x$;

c) $f(x) = 3x - 2\sqrt{3(x^2 - 1)}$ *et* (D) : $y = \left(-2 + \sqrt{3}\right)x$.

15 Soit l'équation (E) : $x \in$IR,
$(m + 1)x^2 + (m + 1)x + m = 0$, où m désigne un réel quelconque.

1. Déterminer m pour que (E) ne soit pas une équation du second degré ; résoudre alors l'équation.
2. On suppose désormais que l'équation (E) est une équation du second degré.

a) Déterminer m pour que -2 soit une racine de (E).

b) Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation (E) admet-elle une seule solution ?
Dans ce(s) cas, calculer cette solution.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de m,
$(m + 1)x^2 + (m + 1)x + m < 0$ sur IR?

16 Résoudre dans IR×IR les systèmes suivants

a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{23}{15} \\ xy = 6 \end{cases}$

$b)\begin{cases} x^2+y^2=193 \\ xy=-84 \end{cases}$

$c)\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\sqrt{3} \\ 2xy=1 \end{cases}$.

17 On appelle format f d'un rectangle le quotient de la longueur L par la largeur l. (f = $\frac{L}{l}$)

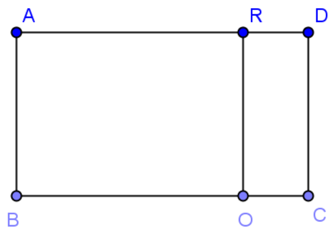
On considère un rectangle ABCD de largeur AB = 1 cm et de longueur AD = x cm. ($1 < x < 2$)

a) Exprimer en fonction de x le format f du rectangle ABCD.

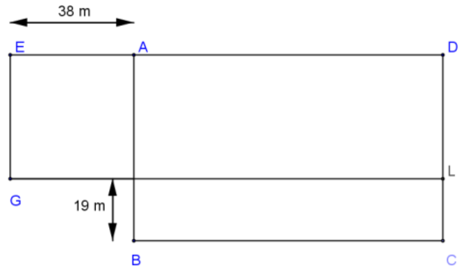
b) On découpe dans le rectangle ABCD ci-dessous un carré ABOR.

Exprimer en fonction de x le format f' du rectangle ORDC.

c) Quelle valeur donner à x pour que les rectangles ABCD et ORDC aient le même format ?



18 Dans le cadre d'un remembrement, un cultivateur qui possède un champ rectangulaire ABCD de 6432 m^2 voit le tracé de son champ modifié en EGLD, sans perte de terrain, comme l'indique la figure ci-dessous.



Quelles sont les dimensions du champ avant et après le remembrement ?

19 Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- la somme de ces chiffres est égale à 17 ;
- si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360 ;
- si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

20 Au marché, trois clientes Marie, Amy et Nourah achètent les même variétés de fruits.

- Marie achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes ; elle paye 620 F.
- Amy achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papayes ; elle paye 530 F.

Nourah achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes .

Combien doit-elle payer ?

21 Mr Bamba place 100000 F sur un compte rémunéré à intérêt composé à un certain taux par an.

Au bout de 10 ans, il retire son capital qu'il place avec les intérêts produits à un taux supérieur de 1% au taux primitif. Son revenu annuel est alors de 7975 F.

Quel était le taux initial ?

3

LIMITES ET CONTINUITÉ

COMMENTAIRES

Ce chapitre vise à :
- développer une image intuitive de la notion de limites à l'infini, en un nombre réel, à droite ou à gauche en un nombre réel ;
- donner aux élèves les techniques de base pour déterminer les limites ;
- introduire la notion de continuité en un nombre réel.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Limites des fonctions de référence en a. 2. Propriétés des opérations sur les limites. 3. Limite à droite, limite à gauche en a. 4. Continuité en a. 5. Opérations sur les fonctions continues. 6. Limites en l'infini des fonctions de référence. 7. Limites en l'infini des fonctions polynômes et rationnelles. 8. Théorèmes de comparaison 9. Asymptotes horizontales et verticales. 10. Définition de la continuité d'une fonction en un réel. 11. Continuité de fonctions élémentaires en un réel. 12- Continuité des fonctions polynômes et rationnelles en un réel. 14. Opérations sur les fonctions continues. 15. Définition d'un prolongement par continuité.	☞ Conjecturer la limite d'une fonction sur une représentation graphique où à l'aide de la calculatrice. ☞ Utiliser les théorèmes de comparaison ou les opérations sur les limites pour calculer les limites de fonctions en un nombre réel ou en l'infini. ☞ Calculer les limites des fonctions polynômes et rationnelles. ☞Interpréter graphiquement les limites obtenues. ☞ Justifier qu'une fonction est continue en a . ☞ Prolonger par continuité une fonction en un réel.

A C T I V I T É S P R É P A R A T O I R E S

Activité 1

Considérons la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

1. Déterminer D_f.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant (les résultats sont arrondis à d'ordre 3):

x	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1	2
$f(x)$													

Lorsque les nombres x deviennent de plus en plus proche de 1, les nombres $f(x)$ se rapprochent de quel nombre réel ?

On dira que la limite de $f(x)$ est égale à $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 1 .

On é***crit***: $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}}$.

3. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	2	5	60	100	900	1000	10000	100000	10^6
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$									

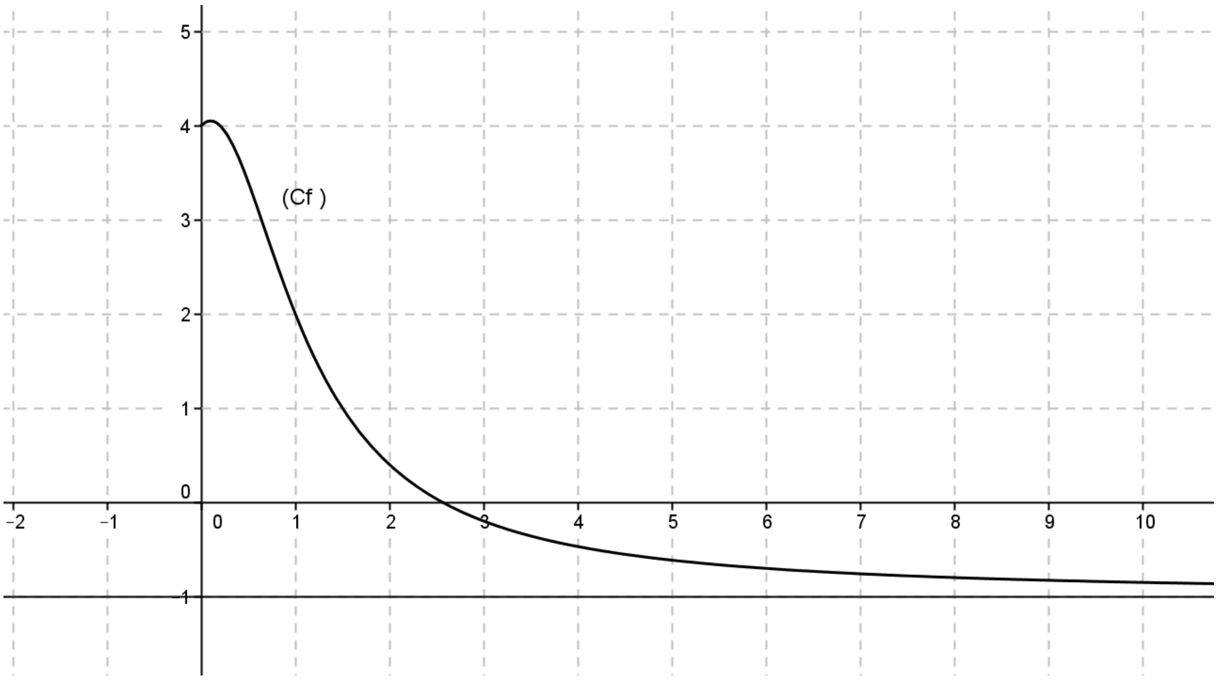
Lorsque les nombres x deviennent de plus en plus grands, les nombres les nombres $f(x)$ se rapprochent de quel nombre réel ?

On dira que la limite de $f(x)$ est égale à 0 lorsque x tend vers + ∞ .

On é***crit*** : $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Activité 2

(Cf) est la courbe représentative d'une fonction numérique f.



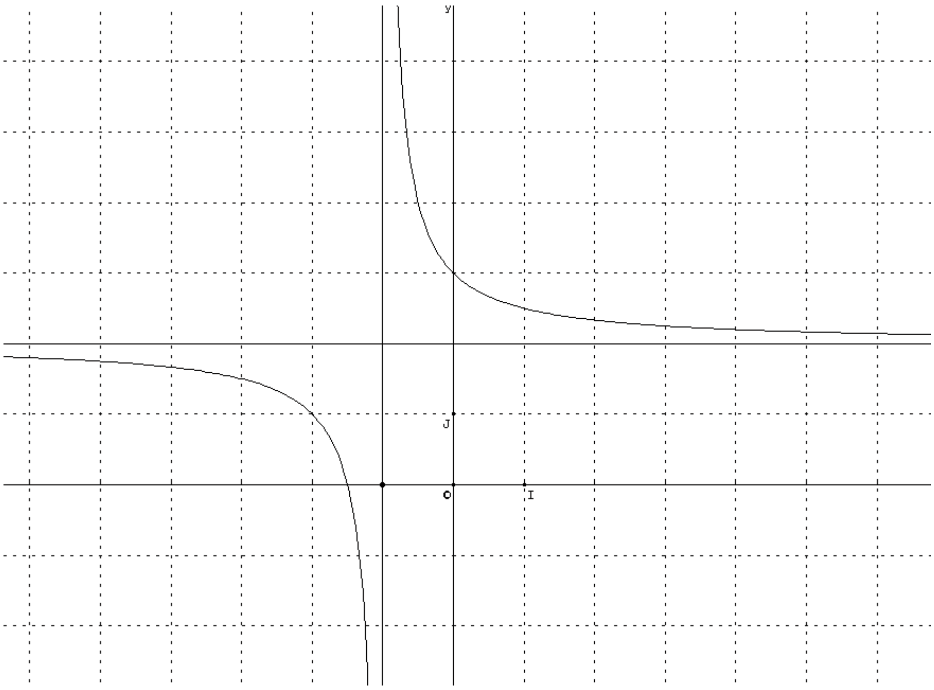
Compléter : $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x)} = \cdots$

On interprète graphiquement ce résultat, en disant que la droite d'équation y = -1 est asymptote à (Cf) en +∞ .

Activité 3

Considérons la fonction f définie sur IR$-\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



• On constate, que selon le côté dont on s'approche de la valeur interdite -1 (droite ou gauche), les nombres $f(x)$ n'ont pas le même comportement .
Lorsque les nombres réels s'approchent de -1 par valeurs supérieures, que deviennent les nombres $f(x)$?
Lorsque les nombres réels s'approchent de -1 par valeurs inférieures, que deviennent les nombres $f(x)$?
On dira que la fonction f n'a pas de limite en 1.
On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$.
On interprète graphiquement ce résultat, en disant que la droite d'équation x = -1 est asymptote à (Cf) .

• Compléter : $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = \ldots\ldots\ldots$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)} = \ldots\ldots\ldots$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

COURS

I. LIMITES EN UN RÉEL ET A L'INFINI DES FONCTIONS DE REFERENCE

1. Limite en un réel

Propriétés

Soit a un nombre réel.

$\lim\limits_{x\to a}(k) = k$, où k *est une constante réelle*;

$\lim\limits_{x\to a}(x) = a$; $\lim\limits_{x\to a}(x^2) = a^2$; $\lim\limits_{x\to a}(x^n) = a^n$, où $n \in IN^*$;

$Si\ a \neq 0\ alors\ \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{a^n}$, où $n \in IN^*$;

$Si\ a \geq 0\ \ alors\ \lim\limits_{x\to a}\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{a}$;

$\lim\limits_{x\to a} cosx = \cos(a)\ \ et\ \lim\limits_{x\to a} sinx = \sin(a)$

$Si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\ alors\ \lim\limits_{x\to a} tanx = \tan(a)$

Exemples

$\lim\limits_{x\to 2}(5) = 5$; $\lim\limits_{x\to -2}(x^3) = -8$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{3}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} cosx = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} tanx =$ 1.

2. Limite à l'infini

Propriétés

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(k) = k\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to -\infty}(k) = k$ où k *est une constante réelle*;
- Soit $n \in IN^*$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^n) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x^n) = +\infty\ \ si\ n\ est\ pair$;

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x^n) = -\infty\ \ si\ n\ est\ \ impair$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0\ et\ \ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$;

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Exemples

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^6}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^6}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^6) = +\infty$.

3. Limite à gauche et à droite en zéro

Propriété

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$;

Généralisation :

$-$Si n est impair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$;

$-$Si n est pair alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$.

Exemples

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x^4}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x^4}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x^3}\right) = +\infty$.

II. THÉORÈMES DE COMPARAxISON

Théorèmes 1

f, g et h sont des fonctions numériques ; a un nombre fini ou infini.

Hypothèse 1 Inégalité vraie pour x assez proche de a	*Hypothèse 2* comportement lorsque tend vers a	*Conclusion*
$f(x) \leq g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$f(x) \geq g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
$\lvert f(x) - \ell\rvert \leq g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
$f(x) \leq g(x)$	f et g admettent des limites finies	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Remarques
• Dans la conclusion, on obtient une inégalité large entre les limites même si $f(x) < g(x)$.
• la propriété :
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ *donc* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
est appelée **théorème des gendarmes**.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^3 + x - sin^2x}{x^2 + 1}$.
1. Démontrer que : $\forall\, x \in IR,\ f(x) \leq x$.
2. En déduire la limite de f en $-\infty$.

1. $\forall\, x \in IR, f(x) - x = \frac{x^3 + x - sin^2x}{x^2 + 1} - x = -\frac{sin^2x}{x^2 + 1}$
$\forall\, x \in IR, -sin^2x \leq 0$ *et* $x^2 + 1 > 0$ *donc* $\forall\, x \in IR, -\frac{sin^2x}{x^2 + 1} \leq 0.$
Il vient, $\forall\, x \in IR,\ f(x) - x \leq 0$, soit $\forall\, x \in IR,\ f(x) \leq x$.
2. $\forall\, x \in IR$, *on a* : $f(x) \leq x$.
$\lim\limits_{x \to -\infty}(x) = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (*théorème de comparaison*).

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur IR$-\{0\}$ par : $f(x) = \frac{sinx}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\forall\, x \in IR - \{0\}$, *on a* : $-1 \leq sinx \leq 1$. *Donc* $\forall\, x > 0$, *on a* : $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *donc* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (*théorème des gendarmes*).

Théorème 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

III. OPERATIONS SUR LES LIMITES

Dans les tableaux suivants, a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
ℓ et ℓ' deux nombres réels.

1. Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

Exemples

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+\dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(x^3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

• $On\ a : \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)=0\end{cases}$ $donc\ par\ somme :$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

• $On\ a : \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x^3)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(-\frac{4}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$ $donc\ par\ somme :$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(x^3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$.

2. Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	ℓ	$\ell\neq0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}f(x)\,g(x)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples

a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x^3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

• $On\ a$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x^3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\dfrac{x^5+4x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x^5+4x-1)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$On\ a$ $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x^5+4x-1)=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$

$donc\ \ par\ produit,$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x^5+4x-1)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty.$ $Donc$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x^3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty.$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}-3\right)(x^4+1)$

$On\ a$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x}-3\right)=-3$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3)=-3$

$On\ a$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+1)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1)=1$.

$Donc\ par\ produit,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x}-3\right)(x^4+1)=-\infty$.

3. Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	?	$\pm\infty$	?

Remarque

$Si \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ et que g garde un signe constant au voisinage de a alors :

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ lorsque $g(x) > 0$ *au voisinage de* a;
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = -\infty$ lorsque $g(x) < 0$ *au voisinage de* a.

Exemples 1

Déterminer

$a)\ \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + 4x - 5}{3x + 2}\right)$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + 4x - 12}{4 - x^2}\right)$

$c)\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

Solution

$a)\ \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 + 4x - 5}{3x + 2}\right) = \dfrac{7}{8}$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x^2 - x - 10}{4 - x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(3x + 5)}{(2 - x)(2 + x)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x - 5}{2 + x} = -\dfrac{11}{4}$

$c)\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x + 1)^2} = +\infty\ car\ \lim\limits_{x \to -1} (x + 1)^2 = 0$ et $(x + 1)^2 > 0\ pour\ x \neq -1$

Exemple 2

Calculer la limite de la fonction suivante à gauche et à droite en 3.

$f : x \longmapsto \dfrac{-2x + 1}{x - 3}$.

Solution

$D_f =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3}(-2x+1)$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x-3	-	0	+

$$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}}(-2x+1) = -5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty \end{cases} \qquad donc\ \ par\ produit,\ \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3}(-2x+1) = -\infty.$$

$Donc\ \ \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ >}} f(x) = -\infty.$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3}(-2x+1)$

$$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}}(-2x+1) = -5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty \end{cases} \qquad donc\ \ par\ produit, \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3}(-2x+1) = +\infty.$$

$Donc\ \ \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ <}} f(x) = +\infty.$

4. Limite d'une valeur absolue

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)\rvert$	$\lvert\ell\rvert$	$+\infty$

Exemple 1

Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} \left|x - \frac{1}{x^2}\right|$.

$On\ a$: $\lim\limits_{x\to -\infty}(x) = -\infty\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$

$donc\ \ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty\ \ \ (\ limite\ d'une\ somme)$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to -\infty}\left|x-\dfrac{1}{x^2}\right|=+\infty$ (*limite d'une valeur absolue*)

Exemple 2

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}|-2x^3+2x^2-x-7|$.

On a: $\lim\limits_{x\to 1}(-2x^3+2x^2-x-7)=-8$ *donc* $\lim\limits_{x\to 1}|-2x^3+2x^2-x-7|=8$
(*limite d'une valeur absolue*)

5. Limite d'une racine carrée

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell(\ell\geq 0)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

Exemple 1

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}$.

On a: $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ *donc* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ (*limite d'une somme*)

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$ (*limite d'une racine carrée*)

Exemple 2

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+2}}$

On a: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{2}$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (*limite d'une racine carrée*)

6. Limite de $x\mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soit f une fonction, a un nombre réel non nul et x_0 un nombre réel.
Si f admet une limite en ax_0+b alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(ax+b)=\lim\limits_{X\to ax_0+b} f(X)$.

Exemple 2

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x}{x}$.

Posons X = 2x. Quand x tend vers 0, X tend vers 0 ; donc

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin2x}{x} = \lim\limits_{X \to 0} 2\frac{sinX}{X} = 2 \times 1 = 2.$

IV. LIMITE EN L'INFINI DES FONCTIONS POLYNÔMES ET RATIONNELLES

1. Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Exemples

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 + 5x - 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty.$

2. Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 4}{2x + 9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{2} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 4}{2x + 9} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2+4}{2x^2-x+6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 4}{2x^2 - x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{x^5+3x^2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x^4} = 0$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x^5+3x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^4} = 0$$

V. ASYMPTOTES

f est une fonction numérique et (C_f) désigne sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonale (O, I, J).

1. Asymptote verticale

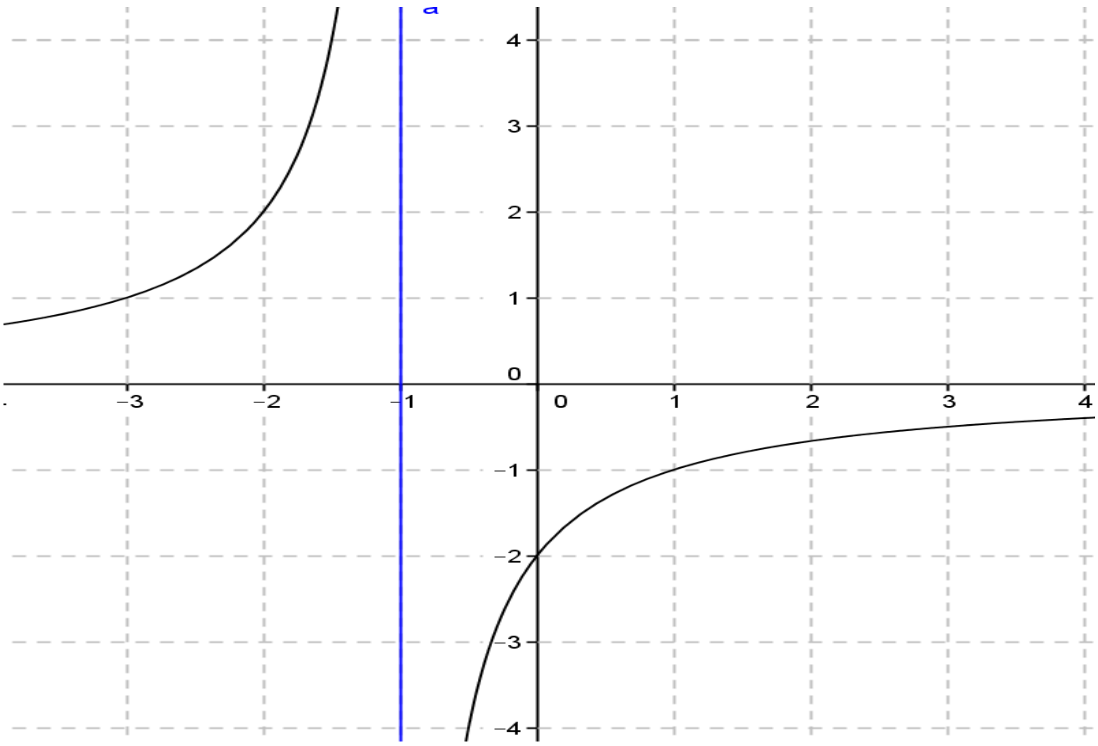
Définition

Soit a un nombre réel tel que a soit une borne d'un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de la fonction f.
Si f admet une **limite infinie** à gauche ou à droite en a, on dit que la droite d'équation **x = a** est **une asymptote verticale à (C_f)**.

Exemple

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : f(x) = $\frac{-2}{x+1}$.

On a : $\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \left(\frac{-2}{x+1}\right) = +\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \left(\frac{-2}{x+1}\right) = -\infty$ *donc la droite déquation* $x = -1$ *est une asymptote verticale à* (C_f).



2. Asymptote horizontale

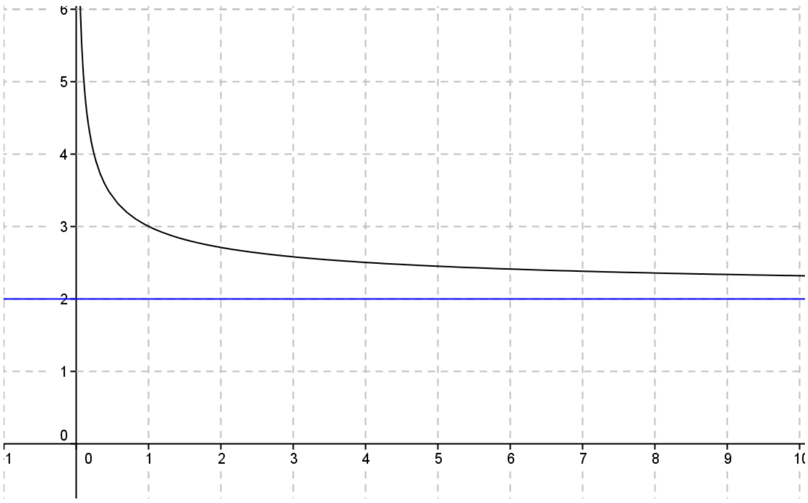
Définition

Soit k un nombre réel.
$Si \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{k}$ $\left(\text{resp} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \mathrm{k}\right)$, on dit que la droite d'équation $\mathrm{y} = \mathrm{k}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$ (resp en $-\infty$).

Exemple

Soit f la fonction de IR vers IR et définie par : f(x) = $2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$On\ a : \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2\ car \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, donc\ donc\ la\ droite\ déquation\ y = 2\ est\ une$ *asymptote horizontale à la courbe* (C_f) *en* $+\infty$.

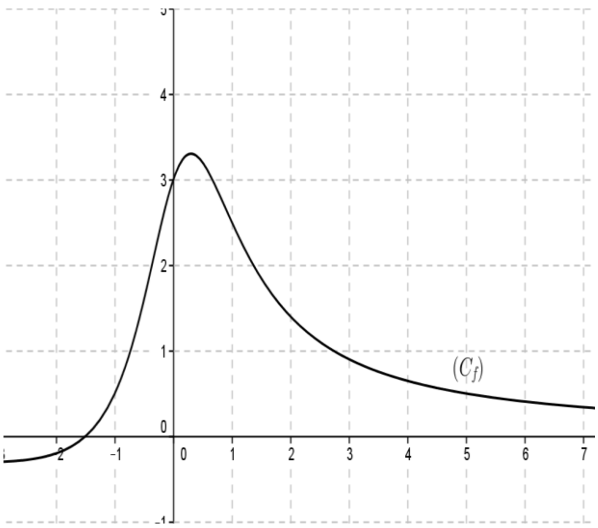


VI. CONTINUITÉ

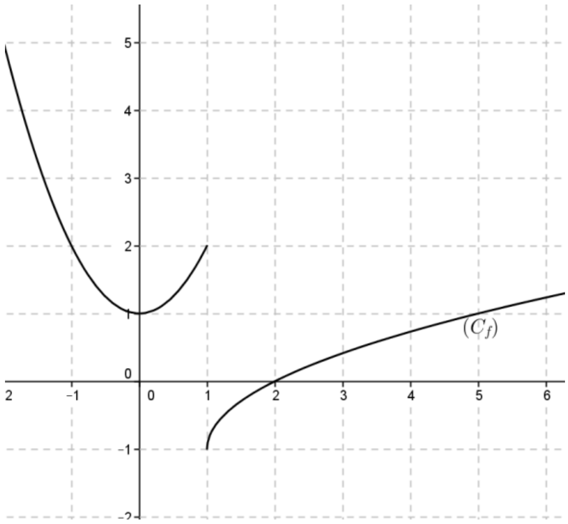
1. Définition

Soit f une fonction et a un nombre réel.
On dit que f est continue en a si f est définie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Graphiquement



La courbe ci-dessus représente une fonction f continue en 2.



La courbe ci-dessus représente une fonction f qui n'est pas continue en 1.

Exemples

Etudier la continuité de la fonction f en x_0 .

a) f est définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 2 - x\,, & si\ x\ \leq -1 \\ f(x) = \frac{4x+7}{x+2}\,, & x > -1 \end{cases}$ $\quad x_0 = -1,$.

b) f est définie sur [0 ; + ∞[par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\,, & si\ x\ \neq 4 \\ f(4) = 1 \end{cases}$

a) f(-1) = 2-(-1)=3

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} (2 - x) = 3 \ \ et\ \ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{4x+7}{x+2} = \frac{4(-1)+7}{(-1)+2} = 3.$$

$$On\ a\text{:}\ \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = f(-1)\ \ donc\ \ f\ est\ continue\ en - 1.$$

b) f(4)= 1

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\ .$$

$$Donc\ \ \lim_{x\to 4} f(x) = \frac{1}{4}\ .$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)\ \ donc\ \ f\ \ n'est\ \ pas\ continue\ en\ 4.$$

2. Propriétés 1

Les fonctions suivantes sont continues en tout nombre réel x_0 de leur ensemble de définition.
$x \mapsto x^n (n \in IN^*)$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in IN^*)$; $x \mapsto sinx$; $x \mapsto cosx$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \sqrt{x}$.

3. Propriétés 2

Soit f et g deux fonctions continues en un nombre réel x_0 .

- Les fonctions $f + g, fg$, kf (k $\in IR$) et $|f|$ sont continues en x_0 .
- Si g ne s'annule pas en x_0, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0 .
- Si $f(x_0) \geq 0$ alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0 .

Exemples

Les fonctions polynômes sont continues en tout nombre réel.
Les fonctions rationnelles sont continues en tout nombre réel de leur ensemble de définition.
La fonction tan est continue en tout nombre réel de son ensemble de définition.

4. Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction non définie en un nombre réel x_0 et vérifiant $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $(\ell \in IR)$.
La fonction g définie sur D$f \cup \{x_0\}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x), \ si\ x \in Df \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ qui est continue en x_0 est appelée **le prolongement par continuité** de f en x_0 .

Exemple

Soit f al fonction de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2} \ -2}{x-1}$.
Démontrer que f admet en 1 un prolongement par continuité g et définir g.

$Df = \{x \ \in IR/1 + 3x^2 \geq 0 \ et \ x - 1 \neq 0\}$.
$\forall x \ \in IR, on\ a: 3x^2 \geq 0 \ et \ 1 > 0, donc \ \forall x \ \in IR, 1 + 3x^2 > 0$.
$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.\ Donc\ Df = IR - \{1\}$.
On a : $\forall x \ \in Df, f(x) = \frac{(\sqrt{1+3x^2} \ -2)(\sqrt{1+3x^2} \ +2)}{(x-1)(\sqrt{1+3x^2} \ +2)} = \frac{3(x+1)}{\sqrt{1+3x^2} \ +2}$.
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x+1)}{\sqrt{1+3x^2} \ + 2} = \frac{3}{2}$.
f admet une limite finie en 1 donc f est prolongeable par continuité en 1.
La fonction g définie sur $Df \cup \{1\}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x), \ si\ x \in Df \\ g(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ *est le prolongement par continuité de f en 1 .*

TRAVAUX PRATIQUES

Dans les exercices ci-dessous f désigne une fonction de IR vers IR.

Exercice résolu 1

Calculer la limite de la fonction f en x_0 .

a) f(x) = $-3x^2 + 5x + 1$, $x_0 = -3$.

b) f(x) = $\frac{x^2+3x-5}{2x^2-4x}$, $x_0 = 1$.

c) f(x) = $\frac{x^3-4x-3}{x^2+5x+4}$, $x_0 = -1$.

d) f(x) = $\frac{1-2x}{(x-4)^2}$, $x_0 = 4$.

e) f(x) = $\frac{x+3}{\sqrt{2-x}}$, $x_0 = 2$.

f) f(x) = $\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}$, $x_0 = -2$.

Solution

a) Df == IR.

$\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = -7$.

b) $x \in Df \iff 2x^2 - 4x \neq 0$

- $2x^2 - 4x = 0 \iff 2x(x-2) = 0 \iff x = 0 \ ou \ x = 2.$

$Donc \ \ Df = IR - \{0; 2\}.$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

c) $x \in Df \iff x^2 + 5x + 4 \neq 0$

- $x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Delta = 9$

$x_1 = -4 \ \ et \ \ x_2 = -1$

$Donc \ \ Df = IR - \{-4; -1\}.$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-4x-3}{x^2+5x+4} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x-3)}{(x+1)(x+4)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-3}{x+4}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-3}{x+4} = -\frac{1}{3} \ .$$

$$Donc \ \ \lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{1}{3} \ .$$

d) $Df = IR - \{4\}.$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{1-2x}{(x-4)^2} = \lim_{x\to 4} (1-2x) \frac{1}{(x-4)^2}$$

$$On\ a: \begin{cases} \lim_{x\to 4}(1-2x) = -7 \\ \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{x\to 4}(1-2x)\dfrac{1}{(x-4)^2} = -\infty$ (*limite d'un produit*).

Donc $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$.

e) $x \in Df \iff 2-x>0 \iff x<2.$ *Donc* $Df =]-\infty;2[$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3)\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

On a: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty \end{cases}$

donc $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$ (*limite d'un produit*).

Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

f) $x \in Df \iff 5-2x \geq 0$ *et* $x+2 \neq 0 \iff x \leq \frac{5}{2}$ *et* $x \neq -2$. .

Donc $Df =]-\infty;-2[\cup]-2;\dfrac{5}{2}]$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(\sqrt{5-2x}-3)(\sqrt{5-2x}+3)}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-2}{\sqrt{5-2x}+3}$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Exercice résolu 2

Déterminer les limites, si elles existent de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = -3x^2+5x+1$.

b) $f(x) = -x^5+3x+2$.

c) $f(x) = x^3 - x$.

d) $f(x) = \frac{3x-5}{2-4x}$.

e) $f(x) = \frac{x^3-4x-3}{x^2+x-2}$.

f) $f(x) = \frac{x^2+2x+7}{(2x-1)^3}$.

g) $f(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x}}$.

h) $f(x) = -2x+\sqrt{x}+5$.

Solution

a) D_f = IR .

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(-3x^2) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-3x^2) = -\infty$.

b) D_f = IR .

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(-x^5) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-x^5) = -\infty$.

c) D_f = IR .

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x^3) = +\infty$.

d) D_f = IR$-\{\frac{1}{2}\}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x}{-4x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-3}{4} = \frac{-3}{4}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x}{-4x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3}{4} = \frac{-3}{4}$.

e) $x \in Df \iff x^2 + x - 2 \neq 0$

$Donc\ \ Df = IR - \{-2; 1\}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.

f) D_f = IR$-\{\frac{1}{2}\}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(2x)^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{8x} = 0$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{(2x)^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{8x} = 0$.

g) $x \in Df \iff x > 0$

$Donc\ \ Df =]0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3x+4}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}})$

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-3\sqrt{x}}{2}) = -\infty\ et\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0\ \ donc\ \ par\ \ somme\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}) = -\infty$

$Donc\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

h) D_f = [0 ; + ∞[.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-2\mathrm{x} + \sqrt{x} + 5) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(-2 + \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{5}{x}) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(-2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x})$

$On\ a\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

$On\ a\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} (-2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x}) = -2\ \ car\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5}{x} = 0$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} x(-2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x}) = -\infty$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice résolu 3

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).
Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats.

a) $f(x)= \frac{2x+5}{-x+1}$.

b) $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$.

Solution

a) D_f = IR−{1} = $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x}{-x} = \lim\limits_{x\to -\infty}(-2) = -2$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty}(-2) = -2$

On en déduit que la droite d'équation y = -2 est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{-x+1}(2x+5)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x+1$	+	0	-

$$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(2x+5) = 5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{-x+1} = -\infty \end{cases}$$

donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{-x+1}(2x+5) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{-x+1}(2x+5)$

$$On\ a \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(2x+3) = 5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{-x+1} = +\infty \end{cases}$$

donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{-x+1}(2x+5) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite d'équation x = 1 est asymptote à (C).

EXERCICES

1 Etudier la limite de la fonction f en x_0 .

a) $f(x) = -3x^5 - 2x^3 + x + 1, \quad x_0 = -1$.

b) $f(x) = \frac{3x-5}{2x^2+4}$, $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x - 5}$, $x_0 = -1$.

d) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$, $x_0 = 0$.

e) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{3-x}}$, $x_0 = 3$.

f) $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$, $x_0 = 4$.

g) $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$, $x_0 = 1$.

h) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = 1$.

i) $f(x) = \frac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{x-1}$, $x_0 = 1$.

j) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+3-x^2} - 2}$, $x_0 = 2$.

l) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4\right)$, $x_0 = 0$.

2 Déterminer les limites, si elles existent de la fonction f en en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = x^2 - x$.

b) $f(x) = -3x^3 + x^2 + 4x + 2$.

c) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 5x - \sqrt{2}$.

d) $f(x) = \frac{x+5}{3x+1}$.

e) $f(x) = \frac{4x^2 - x - 3}{2x^2 + 5x + 1}$.

f) $f(x) = \frac{-x-3}{2x^2 + 5x - 7}$.

g) $f(x) = \frac{5x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 + 1}$.

h) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 7}{(x-1)^2}$.

i) $f(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x} + 4}$.

k) $f(x) = x^2 - x\sqrt{x} + 2$.

l) $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(2\sqrt{x} - x + 1\right)$.

3 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{x^3+1}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{x-1}{2x+3}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{x}{\sqrt{x^2+3x}}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1-2x}{-2x^2+3x+2}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+2}$;

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{4x-\sqrt{x}}{x}$;

h) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-1}{\sqrt{3x^2+x-2}}$;

i) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{4x+1}{x^4}$;

j) $\lim\limits_{x \to 10} \frac{2\sqrt{x-1}-6}{x-10}$;

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2-3x+2}{x+3}$;

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+2}{2x^2+5x+3}$;

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^5-3x+2}{x^2+x}$;

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 - 3x + 2)$;

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x - 1 + \frac{-3x+2}{x^2+x+4}\right]$;

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x - 1 - \frac{3x^2-2}{x+4}\right]$.

Dans les exercices 4 et 5 (C_f) désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).

$\boxed{4}$ Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats. Puis Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.

a) $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

b) $f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x-3}$.

c) $f(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$;

d) $f(x) = -\frac{3}{x} + \frac{4x-7}{2x-6}$.

$\boxed{5}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = 2 - \frac{x}{x^2-1}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.

$\boxed{6}$ Etudier la limite de la fonction $f: x \mapsto x\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ en 0.

$\boxed{7}$ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3}$.

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) < \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$\boxed{8}$ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{x}}$

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) > 2\sqrt{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$\boxed{9}$ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{4+x\sin x}{1+x^2}$

Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\boxed{10}$ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x-1}{2+\sin^2 x}$

Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\boxed{11}$ Soit la fonction $f: x \mapsto 2 + \frac{x\sin x}{1+x^2}$

1. Démontrer que pour tout $x < 0$, on a : $|f(x) - 2| \leq -\frac{1}{x}$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

$\boxed{12}$ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

1. Démontrer que :

$\forall\, x > 0$, on a : $\frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$;

$\forall\, x < 0$, on a : $x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$\boxed{13}$ Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$.

$\boxed{14}$ Soit f la fonction de IR vers IR définie par $f(x) = \frac{|x^2-2x|}{x^2-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 2.

f admet-elle une limite en 2 ? justifier votre réponse.

$\boxed{15}$ f est la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-|x|}{x}, & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Etudier la continuité de f en 0.

$\boxed{16}$ f est la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2, & si\ x \leq 2 \\ f(x) = -2x^3 + 10x, & si\ x > 2 \end{cases}.$$

Etudier la continuité de f en 2.

$\boxed{17}$ f est la fonction définie sur IR par
$\begin{cases} f(x) = x^2 - ax \text{ , si } x \leq -1 \\ f(x) = x^3 + 2x, \text{ si } x > 1 \end{cases}$.
Déterminer le nombre réel a pour que la fonction f soit continue en -1.

$\boxed{18}$ f est la fonction définie sur IR par
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} \text{ , si } x > 4 \\ f(x) = (x+k)^2, \text{ si } x \leq 4 \end{cases}$.
Déterminer les nombres réels k pour que la fonction f soit continue en 4.

$\boxed{19}$ f est la fonction définie sur $[-\frac{5}{4}; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+5} - 3}{x-1}, \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$
Démontrer f est continue en 1.

$\boxed{20}$ f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \text{ , si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{4}{x^2}, \text{ si } 0 < x < 2 \end{cases}$.
Démontrer f est continue en 2.

$\boxed{21}$ f est la fonction définie sur IR par
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+4x+2} - 3}{x-1}, \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$
Démontrer f est continue en 1.

$\boxed{22}$ f est la fonction définie sur IR par
$f(x) = x - E(x)$.
Etudier la continuité de f en 1.

$\boxed{23}$ f est la fonction définie sur $[0; 2]$ par
$f(x) = E(x) + [x - E(x)]^2$.
Etudier la continuité de f en 1.

$\boxed{24}$ Soit la fonction f de IR vers IR définie par
$f(x) = \frac{|3-x| - x^2 + 3x}{2x^2 - 5x - 3}$ $si\ x \neq 3\ et\ f(3) = -\frac{2}{7}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité de f en 3.

$\boxed{25}$ Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer s'il existe le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.
a) $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$, $x_0 = 2$;
b) $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^3+1}$, $x_0 = -1$;
c) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{-2x^2+3x-1}}{x-1}$, $x_0 = 1$;
d) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$, $x_0 = 3$;
e) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{1+x}-3}$, $x_0 = 8$.
f) $f : x \mapsto \frac{2x^2-x-3}{\sqrt{x+5}-2}$, $x_0 = -1$.
g) $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$, $x_0 = 2$.
h) $f : x \mapsto \frac{|x+2|}{x+2}$, $x_0 = -2$.
i) $f : x \mapsto \frac{\tan x}{x}$, $x_0 = 0$.
j) $f : x \mapsto \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$.
k) $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2x}$, $x_0 = 0$.
l) $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$, $x_0 \in \{-1; 1\}$.
m) $f : x \mapsto \frac{3-x^2}{x+\sqrt{3}}$, $x_0 = -\sqrt{3}$.

$\boxed{26}$ Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$:
a) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+7}$;
b) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+3x-5} - x + 1$;
c) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x+5} + x - 2$;
d) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x-1}$;
e) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}-3x}{x\sqrt{x}+2}$;
f) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{1+x}-3}$;
g) $f : x \mapsto \left|\frac{3x^2-x+3}{x+1}\right|$.

$\boxed{27}$ Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les limite de f aux bornes de son ensemble de définition :
a) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$; b) $f : x \mapsto \left|\frac{-4x+3}{1-x}\right|$.

4

DÉRIVATION

COMMENTAIRES

Ce chapitre vise :

- à développer une image intuitive de la notion de limites à l'infini en un nombre réel, à droite ou à gauche en un nombre réel ;
- à donner aux élèves les techniques de base pour déterminer les limites ;
- introduire la notion de continuité en un nombre réel.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Nombre dérivé en un nombre réel. 2. Interprétation graphique du nombre dérivé. 3. Définition de la fonction dérivée. 4. Tableau de dérivées des fonctions de référence : $x \longmapsto ax + b$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x^n$; $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$; $x \longmapsto cosx$; $x \longmapsto sinx$; $x \longmapsto tanx$.	☞ Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel ☞ Donner une équation de la tangente à une courbe en un point donné. ☞ Connaissant le nombre dérivé d'une fonction en x_0 , construire la tangente à la courbe sans utiliser une équation de cette tangente . ☞ Utiliser les opérations sur les fonctions

5. Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient. 6. Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$ où f est une fonction de référence 7. Dérivabilité et continuité. 8. Théorème (admis) donnant le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle à partir du signe de sa dérivée. 9. Extremum relatif d'une fonction	dérivables et les dérivées des fonctions de référence pour calculer des fonctions dérivées. ☞ Utiliser la dérivée pour déterminer le sens de variation d'une fonction.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Activité 1

Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point K(-1 ;3) et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Activité 2

Considérons la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -(x+1)^2 + 5$.

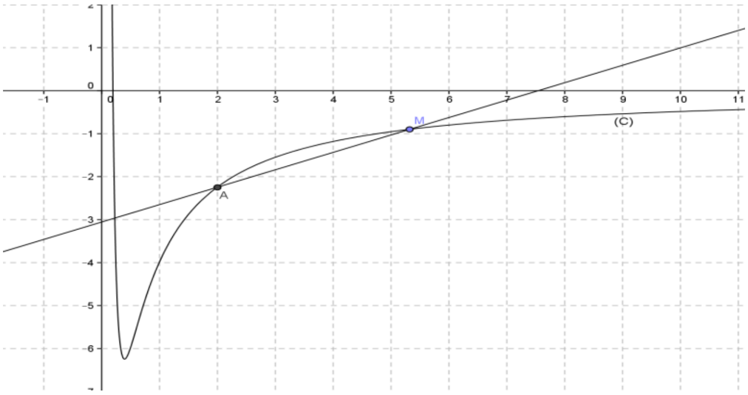
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

On note A le point de (C) d'abscisse 2 et B le point de (C) d'abscisse -3.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Donner une équation de la droite (AB).

Activité 3

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2}$.



A est le point de (C) d'abscisse 2 et M est un point de (C) distinct de A et d'abscisse x.

1. On note $\varphi(x)$ le coefficient directeur de la droite (AM).

Calculer $\ell = \lim\limits_{x \to 2} \varphi(x)$. ℓ est appelé le nombre dérivé de f en 2.

2. Démontrer qu'une équation de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur ℓ est :

$y = x - \frac{17}{4}$.

Tracer (D).

COURS

I. NOMBRE DERIVÉ EN UN NOMBRE RÉEL.

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et a un nombre réel de K.

On dit que f est **dérivable en a** si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .
Cette limite finie est appelée **le nombre dérivé de f en a** et noté $\boldsymbol{f'(a)}$.
$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 3x^2 - 1$.
Démontrer que f est dérivable en 4 et calculer $f'(4)$.

On a f(4) = 47 .

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 1 - 47}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 48}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3(x-4)(x+4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} 3(x+4) = 24.$$

On en déduit que f est dérivable en 4 et que $f'(4) = 24$.

2. Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et a un nombre réel de K tel que f soit dérivable en a.
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Définition et propriété

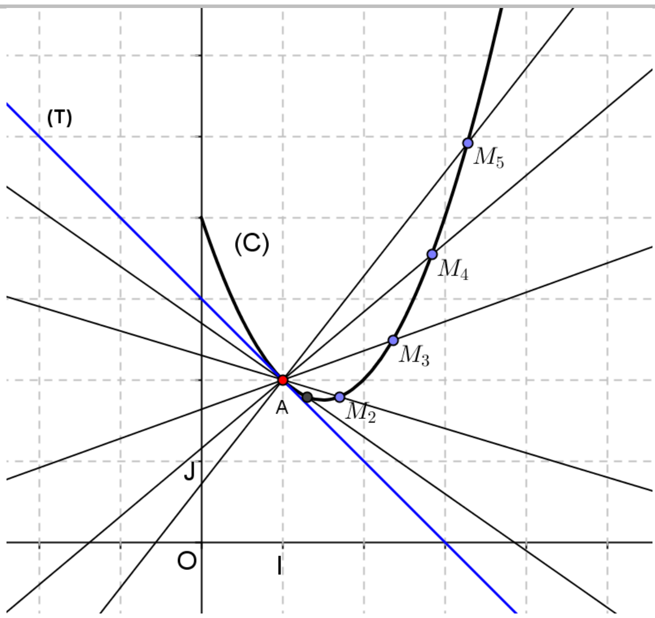
On appelle **tangente** à (C) au point A$(a, f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation cartésienne de la tangente à (C) en A est :
$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.

Remarques

● La tangente (T) à (C) au point A est la position limite des sécantes (AM) lorsque le point M se rapproche de A en restant sur (C).

● Un vecteur directeur de la tangente (T) à (C) en A est le vecteur $\vec{u}(1; f'(a))$.

● Si $f'(a) = 0$, alors la tangente (T) à (C) au point A est parallèle à la droite (OI) : on dit que (C) au point **A une tangente horizontale.**

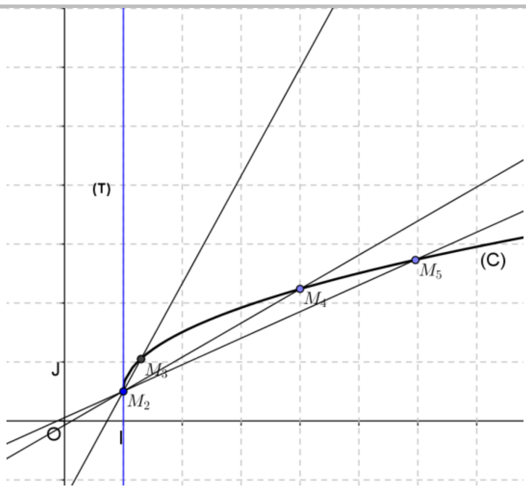


● Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$,

alors f n'est pas dérivable en a.

La droite passant par A et parallèle à (OJ) représente la position limite des sécantes (AM).

On dit que (C) admet au point A une **tangente verticale** .



Exemple 1

Soit la fonction f définie sur IR par : *f(x)* = $3x^2 - 1$.

(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 4.

f est dérivable en 4 et $f'(4) = 24$.

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 4 est : $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.

Soit : $y = 24(x-4) + 47$

Soit : $y = 24x - 49$.

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.
(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Etudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *n'est pas finie.*
(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

II. FONCTION DÉRIVÉE

1.Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K.
Si f est dérivable en tout nombre réel de K, on dit que f est dérivable sur K.
La fonction $\boldsymbol{x\mapsto f'(x)}$, est appelée **la fonction dérivée** de f sur K et notée f' .

Exemples

Calculer la dérivée de la fonction f:
$a)\ f: x\mapsto x^2$
$b)\ f: x\mapsto \sqrt{x}$

a) Soit $a\in IR$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2.$$

On en déduit que $f'(a)=2a$.
Donc $\forall\ x\in IR, f'(x)=2x$.
b) Soit $a\in]0\,;+\infty[$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ .$$

On en déduit que $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
Donc $\forall\ x\in]0\,;+\infty[, f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Tableau de dérivées des fonctions élémentaires

Propriétés

fonction f	**Dérivée f'**	**f est dérivable sur**
$x \longmapsto a$ *(a constante réelle)*	$x \longmapsto 0$	IR
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	IR
$x \longmapsto x^n$ $\quad(n \in IN^*)$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	IR
$\longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,; 0[$ *ou* $]\,0\,; +\infty[$
$\longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,; 0[$ *ou* $]\,0\,; +\infty[$
$\longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,; +\infty[$
$x \longmapsto sinx$	$x \longmapsto cosx$	IR
$x \longmapsto cosx$	$x \longmapsto -sinx$	IR
$x \longmapsto tanx$	$x \longmapsto \frac{1}{cos^2x}$ *ou* $x \longmapsto 1 + tan^2x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ *où* $k \in \mathbb{Z}$

III. DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

1. Propriétés

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K et a un nombre réel.

fonction	**Dérivée**	**dérivable sur**
$u + v$	$u' + v'$	K
au	au'	K
uv	$u'v + uv'$	K
$\frac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	dérivable en toute valeur x de K où $v(x)$ est non nul.
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	dérivable en toute valeur x de K où $v(x)$ est non nul.

Remarque
Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle ouvert inclus dans leur ensemble de définition.

Exemples

a) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 6$.
f est dérivable su IR.
$\forall\, x\ \in IR, f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$.

b) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (3x^2 + x)(4x - 1)$.
f est dérivable su IR.
$\forall\, x\ \in IR, f'(x) = (6x + 1)(4x - 1) + (3x^2 + x)(4)$.
Soit $\forall\, x\ \in IR, f'(x) = 36x^2 + 2x - 1$.

c) Soit la fonction f définie sur IR$-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ par : $f(x) = \frac{1}{3x-2}$.
f est dérivable sur $]-\infty\,; \frac{2}{3}\,[$ *et sur* $]\,0\,; +\infty[$. $\forall\, x\ \in IR - \left\{\frac{2}{3}\right\}, f'(x) = \frac{-3}{(3x-2)^2}$.
d) Soit la fonction f définie sur IR$-\{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,; -1\,[\,,\,]-1\,; 1\,[,\ \ ]\,1\,; +\infty[$.
$\forall\, x\ \in IR - \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{1(x^2-1)-2x(x)}{(x^2-1)^2}$.
Soit $\forall\, x\ \in IR - \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

2. Dérivée de la fonction $\boldsymbol{x \longmapsto u(ax + b)}$

Propriété 1

Soit a et b deux nombres quelconques.
Soit f la fonction composée définie sur un intervalle ouvert K par $f(x) = u(ax + b)$ où u est une fonction numérique.
Si la fonction u dérivable en a$x + b$ alors f est dérivable en x et on a :
$f'(x) = au'(ax + b)$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2x - 3}$.
On admet que f est dérivable sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$..

Solution
Posons $u(x) = \sqrt{x}$ *, on a :* $f(x) = u(2x - 3)$
$\forall\, x\ \in]0; +\infty[, u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *, donc* $\forall\, x\ \in]\frac{3}{2}; +\infty[, f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$.

Propriétés 2
Soient a et b sont deux nombres réels.

fonction f	**Dérivée f'**	**Commentaire**
$x \longmapsto \sqrt{ax+b}$	$x \longmapsto \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	si $ax+b>0$
$x \longmapsto sin(ax+b)$	$x \longmapsto a\,cos(ax+b)$	Sur IR
$x \longmapsto cos(ax+b)$	$x \longmapsto -asin(ax+b)$	Sur IR
$x \longmapsto tan(ax+b)$	$x \longmapsto \frac{a}{[cos(ax+b)]^2}$ *ou* $x \longmapsto a[1+tan^2(ax+b)]$	$Si\ ax+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Exemples
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$f: x \longmapsto \sqrt{-x+4}$, $g: x \longmapsto sin(x+1)$; $h: x \longmapsto cos(3x)$

Solution
Df = $]-\infty\,;4]$. *f est dérivable sur* $]-\infty\,;4[$. $\forall\, x \in]-\infty\,;4[$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+4}}$.

Dg = IR. g est dérivable sur IR. $\forall\, x \in IR$, $g'(x) = cos(x+1)$.

Dh = IR. h est dérivable sur IR. $\forall\, x \in IR$, $h'(x) = -3sin(x+1)$.

IV. DERIVÉE ET VARIATIONS DE FONCTIONS

1. Dérivabilité et continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K.
- Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur K, alors f est continue sur K .

2. Dérivée et variations

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K et f' sa fonction dérivée.
- f est constante sur K si et seulement si f' est nulle sur K .
- f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K .
- f est décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K .

Remarques

- Si f' est strictement positive sur K, alors f est strictement croissante sur K.
- Si f' est strictement négative sur K, alors f est strictement décroissante sur K.

Exemple 1

Etudier les variations de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^3 + 4x$.

f est dérivable sur IR et pour tout x de IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = 3x^2 + 4.$
$\forall\, x \in IR, f'(x) > 0,$ *donc f est strictement croissante sur IR.*

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Solution

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty;$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty.$

f est dérivable sur IR et pour tout x de IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = -3x^2 + 6x + 9.$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \; ou \; x = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-3x^2+6x+9$		$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, f'(x) < 0;$
$\forall\, x \in]-1; 3[, f'(x) > 0;$
$\forall\, x \in \{-1; 3\}, f'(x) = 0.$
Il en résulte que :
f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ *et sur* $[3; +\infty[$.
f est strictement croissante sur $[-1; 3]$.

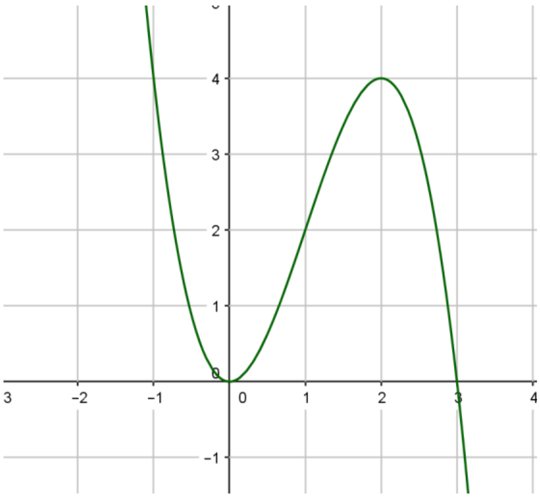
Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

V. EXTREMUM RELATIF D'UNE FONCTION

Exemple

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur IIR :



1. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
2. En déduire que :
a) $\forall\ x \in [-1; 1], f(x) \geq 0$
b) $\forall\ x \in [1; 3], f(x) \leq 4$.

On dit que :

f admet **un minimum relatif** en 0 égal à 0 ;

f admet **un maximum relatif** en 2 égal à 4.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un **extremum** relatif de f .

Remarque

Le tableau de variations permet de connaître la nature des extremums relatifs :

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

f' s'annule en x_0 en étant négative, puis positive donc $f(x_0)$ est minimum relatif.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

f' s'annule en x_0 en étant positive, puis négative donc $f(x_0)$ est maximum relatif.

Exemple

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$.
Déterminer les extremums relatifs de f et préciser la nature de ces extremums.

L'étude des variations de f donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		*-1*		*3*		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	*0*	$\nearrow$	*32*	$\searrow$	$-\infty$

● *La fonction f' s'annule en -1 en changeant de signe alors f admet un extremum relatif en -1 égal à 0.*
On a : $\forall x \in]-\infty; -1[, f'(x) < 0$ *et* $\forall x \in]-1; 3[, f'(x) > 0$. *Donc 0 est un minimum relatif de f.*
● *La fonction f' s'annule en 3 en changeant de signe alors f admet un extremum relatif en 3 égal à 32.*
On a : $\forall x \in]-1; 3[, f'(x) > 0$ *et* $\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) < 0$. *Donc 32 est un maximum relatif de f.*

TRAVAUX PRATIQUES

Dans les exercices ci-dessous f désigne une fonction de IR vers IR.

Exercice résolu 1

Calculer la dérivée de la fonction f.

a) f(x) = -5 ; b) f(x) = $(x+1)(2x-4)$ *; c) f(x) =* $-2x^4+5x+1$ *; d) f(x) =* $\frac{3x-5}{2x-4}$ *;*

e) f(x) = cos(2x-1) ; f) f(x) = $\frac{x^2-x+4}{x+1}$.

Solution

a) Df = IR. f est dérivable sur IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = 0$.

b) Df = IR. f est dérivable sur IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = 2x - 4 + 2(x+1) = 4x - 2$.

c) Df = IR. f est dérivable sur IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = -8x^3 + 5$.

d) $Df = IR - \{2\}$. *f est dérivable sur* $]-\infty; 2[$ *et sur* $]2; +\infty[$.

$\forall\, x \in IR - \{2\}, f'(x) = \frac{3(2x-4)-2(3x-5)}{(2x-4)^2} = \frac{-2}{(2x-4)^2}$.

d) $Df = IR$ *. f est dérivable sur IR.*

$\forall\, x \in IR, f'(x) = -2sin(2x-1)$.

f) $Df = IR - \{-\}$. *f est dérivable sur* $]-\infty; -1[$ *et sur* $]-1; +\infty[$.

$\forall\, x \in IR - \{-1\}, f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+4)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$.

Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie sur IR $- \{-\frac{3}{2}\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{2(2x+3)}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

Solution

f est dérivable sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ *et sur* $]-\frac{3}{2}; +\infty[$.

$\forall\, x \in IR - \{-\frac{3}{2}\},\ f'(x) = \frac{(2x-1)(2x+3)-2(x^2 - x + 3)}{2(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-9}{2(2x+3)^2}$.

Une équation de la tangente (T) est : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$.

On a $f'(-1) = -\frac{13}{2}$ *et* $f(-1) = \frac{5}{2}$.

Une équation de la tangente (T) est donc : $y = -\frac{13}{2}(x+1) + \frac{5}{2}$. *Soit* $y - \frac{13}{2}x - 4$.

Exercice résolu 3

f désigne une fonction de IR vers IR .

Dans chacun des cas suivants étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

a) f(x) = $\frac{3x-5}{1-x}$ *; b) f(x) =* $\frac{x^2-3x+1}{x+2}$.

Solution

a)Df = IR$-\{1\}$.

f est dérivable sur $]-\infty;1[$ *et sur* $]1;+\infty[$.

$\forall\, x\ \in IR-\{1\}, f'(x)=\frac{3(1-x)-(3x-5)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-2}{(1-x)^2}$.

$\forall\, x\ \in IR-\{1\}, -2<0$ *et* $(1-x)^2>0$ *donc* $\forall\, x\ \in IR-\{1\}, f'(x)<0$.

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ *et sur* $]1;+\infty[$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

b) Df = IR$-\{-2\}$

f est dérivable sur $]-\infty;-2[$ *et sur* $]-2;+\infty[$.

$\forall\, x\ \in IR-\{-2\}, f'(x)==\frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}$.

$\forall\, x\ \in IR-\{-2\}, (x+2)^2>0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* x^2+4x-7.

$x^2+4x-7=0 \Leftrightarrow x=-2-\sqrt{11}$ *ou* $x=-2+\sqrt{11}$.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		-2		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		+	*0*	-	‖	-	*0*	+	

Donc : $\forall\, x\ \in]-\infty;-2-\sqrt{11}[\,\cup\,]-2+\sqrt{11};+\infty[,\quad f'(x)>0;$

$\forall\, x\ \in]-2-\sqrt{11};-2[\,\cup\,]-2;-2+\sqrt{11}[,\quad f'(x)<0;$

$\forall\, x\ \in \{-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\}, f'(x)=0.$

Il en résulte que :

f est strictement croissante sur $]-\infty;-2-\sqrt{11}]$ *et sur* $[-2+\sqrt{11};+\infty[$;

f strictement décroissante sur $[-2-\sqrt{11};-2[$ *et sur* $]-2;-2+\sqrt{11}]$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		-2		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	*0*	-	‖	-	*0*	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-2-\sqrt{11})$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$f(-2+\sqrt{11})$	$\nearrow$	

$f(-2-\sqrt{11})\approx -13{,}62$ *et* $f(-2+\sqrt{11})\approx -0{,}37$.

Exercice résolu 4

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x + \frac{5}{3}$.

Etudier les variations de f puis en déduire que $\forall\ x \in$ IR, $f(x) > 0$.

Solution.

f est dérivable sur IR. $\forall\ x\ \in IR,\ f'(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x - 2 = (x-1)(4x^2+2)$.

$\forall\ x\ \in IR, 4x^2 + 2 > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\forall\ x\ \in]-\infty; 1[$, $f'(x) < 0$ *et* $\forall\ x\ \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ *. Donc :*

f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ *et strictement décroissante sur* $]-\infty; 1]$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$

f' s'annule en 1 en changeant de signe, donc f(1) est un minimum relatif car elle est d'abord strictement décroissante, puis strictement croissante. f(1)= $\frac{1}{3}$.

Comme f(1) > 0, donc $\forall\ x\ \in IR, f(x) > 0$.

Exercice résolu 5

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos(2x - \frac{2\pi}{3})$.

1. Justifier que π est une période de f.
2. Etudier les variations de f sur $[0\ ;\pi]$ puis dresser son tableau de variation.

Solution

1. Pour tout nombre réel x, on a : f$(x+\pi) = cos\left(2x + 2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$ *puisque* 2π *est une période de la fonction cosinus. Il en résulte que* π *est une période de f.*

2. f est dérivable sur $[0\ ;\pi]$.

$\forall x \in [0\ ;\pi], f'(x) = -2\sin(2x - \frac{2\pi}{3})$.

Résolvons l'inéquation $x \in [0\ ;\pi], f'(x) > 0$.

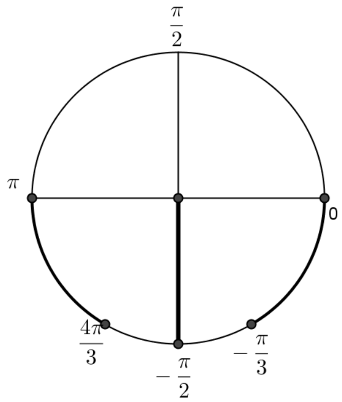
Posons $X = 2x - \frac{2\pi}{3}$

$x \in [0\ ;\pi], f'(x) > 0 \Leftrightarrow X \in [-\frac{\pi}{3}\ ;\frac{4\pi}{3}],\quad -2\sin X > 0 \Leftrightarrow X \in [-\frac{\pi}{3}\ ;\frac{4\pi}{3}],\quad \sin X < 0$

• *Résolvons l'équation* $X \in [-\frac{\pi}{3}\ ;\frac{4\pi}{3}],\quad \sin X = 0$.

Les solutions sont 0 et π .

Les solutions de : $X \in [-\frac{\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}]$*, sinX < 0 s'obtiennent à partir du cercle trigonométrique :*



$X \in [-\frac{\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}], \sin X < 0 \Leftrightarrow X \in [-\frac{\pi}{3} ; 0[\cup \ ]\pi ; \frac{4\pi}{3}]$

Soit $x \in [0 ; \pi], f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3} ; 0[\cup \ ]\pi ; \frac{4\pi}{3}] \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{2\pi}{3} < 0$ *ou* $\pi < 2x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow$

$0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ *ou* $\frac{5\pi}{6} < x \leq \pi$

Conclusion :

$\forall \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; \pi\right], f'(x) > 0;$

$\forall \in \left]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right[, f'(x) < 0.$

Par conséquent,

f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ *et sur* $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ *;*

f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

EXERCICES

Dans les exercices 1 à 7, f est une fonction de IR vers IR.

$\boxed{1}$ Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = -2$;
b) $f(x) = 5x$;
c) $f(x) = x - 3$;
d) $f(x) = x^5$;
e) $f(x) = 2x^2$;
f) $f(x) = \frac{x^3}{3}$;
g) $f(x) = \frac{1}{x^3}$;
h) $f(x) = \frac{-2}{x^3}$;
i) $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^2} + x$;
j) $f(x) = -3x^3 + x^2 + 4x + 2$;
k) $f(x) = \frac{2x}{3x + 1}$;
l) $f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x+3}$;
m) $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$;
n) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$;
o) $f(x) = \tan 2x$;
p) $f(x) = 2\cos(5x-1)$;
q) $f(x) = x\sqrt{x} - 1$;
r) $f(x) = \sqrt{4x - 2}$;
s) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{1 - 2x}}$;
t) $f(x) = \frac{-x - 3}{2x^2 + 5x - 7}$;
u) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 5}$;
v) $f(x) = \left(-\frac{x}{2} + 1\right)^2$;
w) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$;
x) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 5x - \sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = -x + 1 + \frac{5}{x^2}$;
b) $f(x) = 4x - \frac{1}{(2x-3)^2}$;
c) $f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2x+3}$.

$\boxed{3}$ Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 :

a) $f(x) = -2x^3 + x + 1, \quad x_0 = -1$;
b) $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad x_0 = 2$.

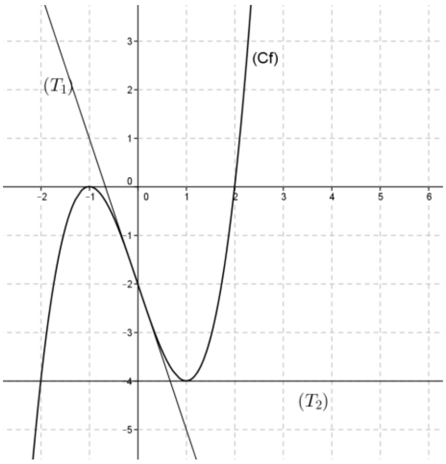
$\boxed{4}$ Etudier les variations de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = x^2 - x$;
b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$;
c) $f(x) = x^3 + x^2$;
d) $f(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 1$;
d) $f(x) = \frac{-2x + 1}{x + 1}$;
e) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$;
f) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$;
g) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
h) $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$;
i) $f(x) = \sqrt{-x + 3}$;
j) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4x + 5}$;
k) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$;
l) $f(x) = x^2 + 1 - \frac{2}{x}$;
m) $f(x) = -\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$;
n) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$.

$\boxed{5}$ Etudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants après avoir étudier la parité de f puis démontrer que T est une période de f :

a) $f(x) = 5\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right), \; T = \frac{2\pi}{3}$;
b) $f(x) = 6\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \; T = 4$;
c) $f(x) = \sin(2x), \quad T = \pi$.

6 (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f.
(T_1) et (T_2) sont les tangentes à (C_f) aux points d'abscisses respectives 0 et 1.



Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$, puis les équations de (T_1) et (T_2).

7 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-3}{x^2+1}$.
Déterminer les extremums relatifs de la fonction f .

8 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
$f(x)$		↗	-2	↘	0	↗	

Préciser les extremums relatifs de f.

9 Pour réaliser un enclos rectangulaire à l'aide d'une clôture électrique, un cultivateur dispose de 100 m de fil.
On désigne par x et y les dimensions de l'enclos, tout le fil étant utilisé.
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine ainsi réalisé en fonction de x .
1. Démontrer que : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$.
2. Etudier les variations de la fonction $\mathcal{A}$.
3. En déduire qu'il existe une valeur de x pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale.

10 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression
$C(v) = 0{,}06v + \frac{150}{v}$.
A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

11 On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.
Déterminer les nombres réels a et b pour que (Cf) passe par le point A(0 ;3) et admette en ce point une tangente d'équation y = $4x + 3$.

12 On considère la fonction f définie sur IR$-\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{-x^2-2x+3}{x+1}$.
Démontrer qu'il existe deux points A et B de (Cf) où la tangente est parallèle à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation y = $-\frac{5}{2}x + 1$.
A est le point d'abscisse strictement négative.
Déterminer les coordonnées de A et B.

13 Le but de l'exercice est de démontrer que :
$\forall\, x \in [0;+\infty[,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$
1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$, $f(x) = x - \sin x$.
a) Etudier les variations de f.
b) Calculer $f(0)$ puis justifier que :
$\forall\, x \in [0;+\infty[,\ \sin x \leq x.$
2. Soit g et h les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$ et
$h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$.
a) Etudier les variations de g.
b) Calculer $g(0)$ puis justifier que :
$\forall\, x \in [0;+\infty[,\ 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.
c) Etudier les variations de h puis en déduire que : $\forall\, x \in [0;+\infty[,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.
3. Déduire des questions précédentes que :
$\forall\, x \in [0;+\infty[,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$

5

ÉTUDE DE FONCTIONS

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à:
- définir la notion d'asymptote oblique ;
- réinvestir les connaissances des chapitres précédents pour l'étude globale d'une fonction ;
- représenter graphiquement les fonctions du programmes.

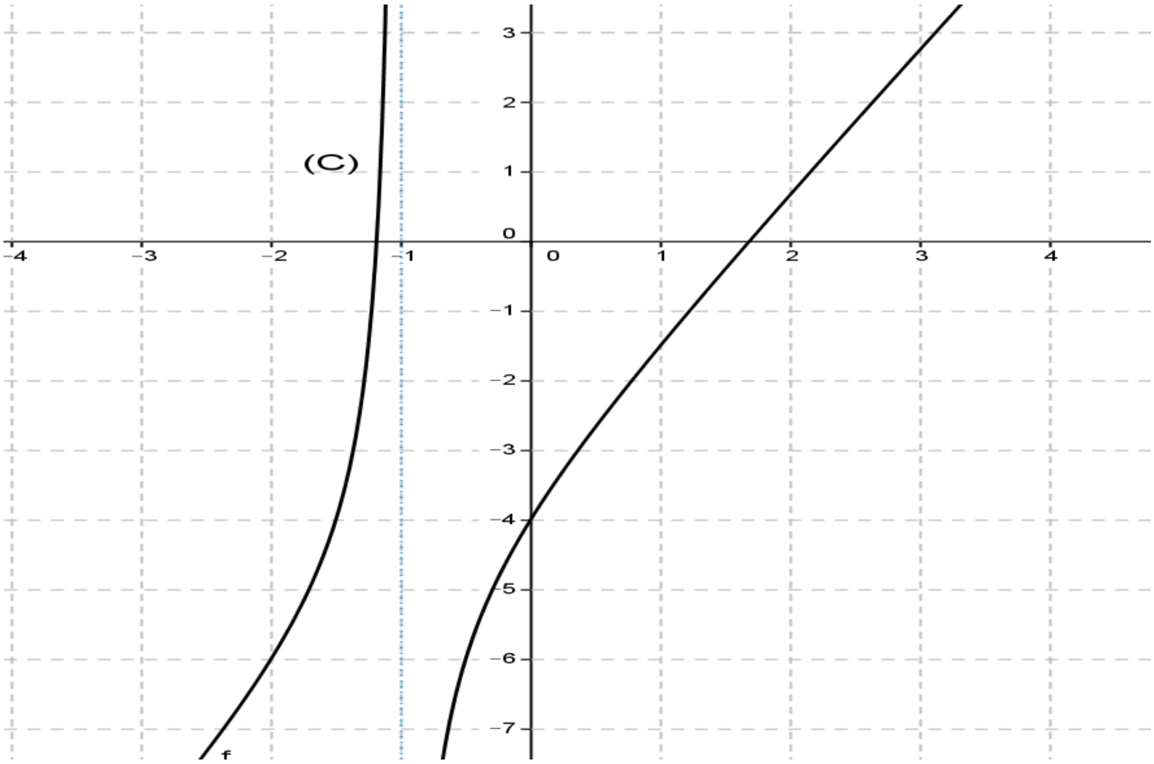
► Ce chapitre sera traité comme une séance de travaux dirigés consacrés à des fonctions bien choisies, sans oublier les fonctions trigonométriques.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Définition d'une asymptote oblique. 2. Plan d'étude d'une fonction 3. Etude et représentation des fonctions sinus, cosinus et tangente.	☞ Démontrer qu'une droite donnée est asymptote oblique à(Cf). ☞ Interpréter graphiquement $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ☞ Construire la représentation graphique des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. ☞ Construire la représentation graphique des fonctions homographiques. ☞ Construire la représentation graphique des fonctions de type : $x \longmapsto ax + b + \frac{e}{cx+d}$. ☞ Donner l'allure de la représentation graphique d'une fonction à partir de son tableau de variation. ☞ Etudier et représenter graphiquement les fonctions de type : $x \longmapsto \cos(ax+b)$; $x \longmapsto \sin(ax+b)$.

A C T I V I T É S   P R É P A R A T O I R E S

Activité

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR$-\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2-x-4}{x+1}$.



1. Tracer la droite (D) d'équation y = $2x$-3 .
2. Démontrer que $\lim_{x\to -\infty}[f(x)-(2x-3)] = 0$ et $\lim_{x\to +\infty}[f(x)-(2x-3)] = 0$.

On dit que la droite (D) est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

COURS

I. ASYMPTOTE OBLIQUE

1. Définition

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
a et b deux nombres réels.
● Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
● Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Exemple

Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-2}$.
(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
1. Démontrer que la droite (D) d'équation y = $2x$ + 4 est asymptote à (C).
2. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

Solution

1.Df = IR−{2}.

$$\forall \boldsymbol{x} \in IR - \{2\}, f(x) - (2x + 4) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2} - (2x + 4) = \frac{7}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 4)] = \lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 4)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} = 0$$

Donc la droite (D) d'équation y = 2x + 4 est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $\mp\infty$.

2. Le signe de $[f(x) - (2x + 4)]$ permet de déterminer la position de (C) par rapport à (D).

$$\forall \boldsymbol{x} \in IR - \{2\}, f(x) - (2x + 4) = \frac{7}{x - 2}$$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
7		+		+	
$x - 2$		-	0	+	
$\frac{7}{x-2}$		-		+	

$\forall x \in]-\infty; 2[$, $f(x) - (2x + 4) < 0$;
$\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) - (2x + 4) > 0$.
D'où (C) est au-dessous de (D) sur $]-\infty; 2[$ *et (C) est au-dessus de (D) sur* $]2; +\infty[$.

II. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

Pour étudier une fonction f en l'absence de consigne, on peut adopter le plan suivant :
1.Ensemble de définition
2. Ensemble d'étude
Certaines propriétés comme parité, périodicité peuvent permettre de réduire l'ensemble sur lequel on étudie f.
3. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
4. Recherche éventuelle des asymptotes à (C_f).
5. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Tracer (C_f).

III. ÉTUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS SINUS, COSINUS, TANGENTE

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto sinx$.

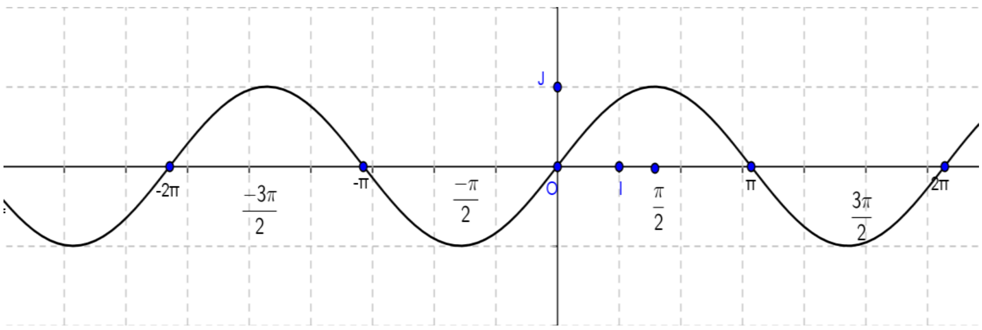
Etudier f et tracer (C_f).

Solution

• *Df = IR .*
• $\forall\, x \in$ *IR, f(x+ 2π) = f(x) donc 2π est la période de f.*
On peut donc étudier la fonction sinus sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi;\ \pi]$ *On trace la fonction sinus sur* $[-\pi;\ \pi]$ *et on obtient toute la courbe (C) à l'aide de translations de vecteurs* $k2\pi\vec{\imath}$ *, k étant un nombre entier relatif.*
• $\forall\, x \in$ *IR, f(-x) = −f(x) donc f est impaire. Donc O est centre de symétrie de (C).*
On peut donc représenter (C) sur $[0;\ \pi]$ *et obtenir le tracé sur* $[-\pi;\ \pi]$ *en utilisant la symétrie par rapport à O.*
• $\forall\, x \in [0;\ \pi], f'(x) = cosx$.
$\forall\, x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) > 0 \ et\ \forall\, x \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right], f'(x) < 0.$
f est strictement croissante sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ *et strictement décroissante sur* $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

X	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	1	+	0	−	-1
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

Traçons (C) sur $[0;\ \pi]$ *et obtenons le tracé sur* $[-\pi;\ \pi]$ *en utilisant la symétrie par rapport à O.*
Puis à l'aide des translations de vecteurs $k2\pi\vec{\imath}$*, on obtient le tracé sur IR.*



2. Soit la fonction $f : x \longmapsto cosx$.

Etudier f et tracer (C_f).

Solution

• *Df = IR*

• $\forall\ x\ \in IR$*, f(x+ 2π) = f(x) donc 2π est la période de f. On peut donc étudier la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple* $[-\pi;\ \pi]$.

On trace la fonction sinus sur $[-\pi;\ \pi]$ *et on obtient toute la courbe (C) à l'aide de translations de vecteurs* $k2\pi\vec{\imath}$ *, k étant un nombre entier relatif.*

• $\forall\ x\ \in IR$*, f(-x) = f(x) donc f est paire. Donc (OJ) est axe de symétrie de (C).*

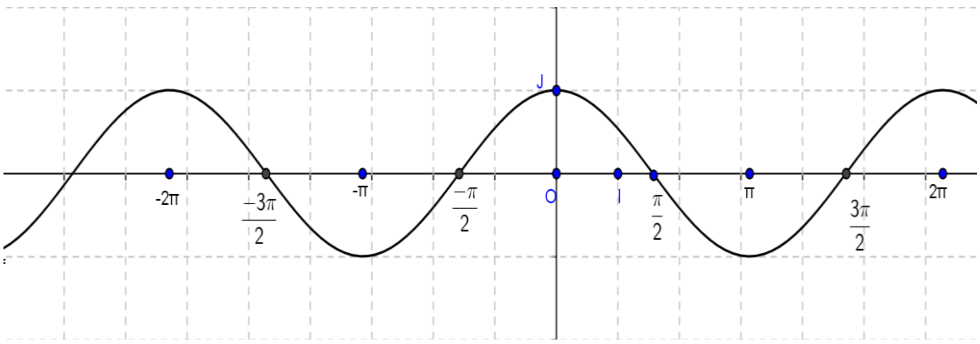
On peut donc représenter (C) sur $[0;\ \pi]$ *et obtenir le tracé sur* $[-\pi;\ \pi]$ *en utilisant la symétrie par rapport à (OJ).*

$\forall\ x\ \in [0;\ \pi], f'(x) = -sinx$.

$\forall\ x\ \in]0;\ \pi[, f'(x) < 0.$ *Donc f est strictement décroissante sur* $[0;\ \pi]$.

x	*0*		π
$f'(x)$	*0*	$-$	*0*
$f(x)$	*1*	↘	*-1*

Traçons (C) sur $[0;\ \pi]$ *et obtenons le tracé sur* $[-\pi;\ \pi]$ *en utilisant la symétrie par rapport à (OJ).*
Puis à l'aide des translations de vecteurs $k2\pi\vec{\imath}$*, on obtient le tracé sur IR.*



3. Soit la fonction $f : x \longmapsto tanx$.

Etudier f et tracer (C_f).

Solution

• *Df* = *IR*$-\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• $\forall\, x \in Df$, *f(x+ π) = f(x) donc π est la période de f. On peut donc étudier la fonction tan sur un intervalle d'amplitude π par exemple* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On trace la fonction sinus sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et on obtient toute la courbe (C) à l'aide de translations de vecteurs* $k\pi\vec{\imath}$ *, k étant un nombre entier relatif.*

• $\forall\, x \in IR$, *f(-x) = -f(x) donc f est impaire. Donc O est centre de symétrie de (C).*

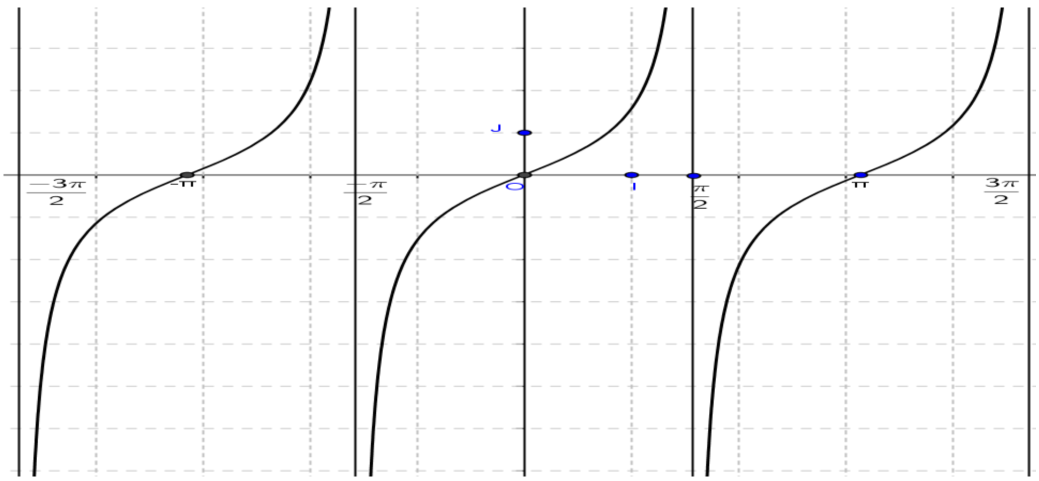
On peut donc représenter (C) sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et obtenir le tracé sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *en utilisant la symétrie par rapport à O.*

• $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x) = 1 + tan^2x$. $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) > 0.$

Donc f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. *On obtient :*

x	*0*	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	*1* $+$	
$f(x)$	*0* ↗ $+\infty$	

Traçons (C) sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et obtenons le tracé sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *en utilisant la symétrie par rapport à O. Puis à l'aide des translations de vecteurs* $k\pi\vec{\imath}$, *on obtient le tracé sur Df.*



TRAVAUX PRATIQUES

Dans les exercices ci-dessous f est une fonction numérique et (C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Exercice résolu 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de (C).
5. Tracer (C).

Solution

1.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2) = -\infty.$

2. f est dérivable su IR.

$\forall\ x \in IR, f'(x) = -2x + 4$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

D'où :

$\forall\ x \in]-\infty; 2[, \quad f'(x) > 0;$

$\forall\ x \in]2; +\infty[, f'(x) < 0;$

Par conséquent :

f est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$.

f est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$.

On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

3. • Les points d'intersection de (C) avec (OI) sont les points d'abscisses x tels que f(x) = 0.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = 0.$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = 20$.

Les solutions de l'équation sont : $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ *et* $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

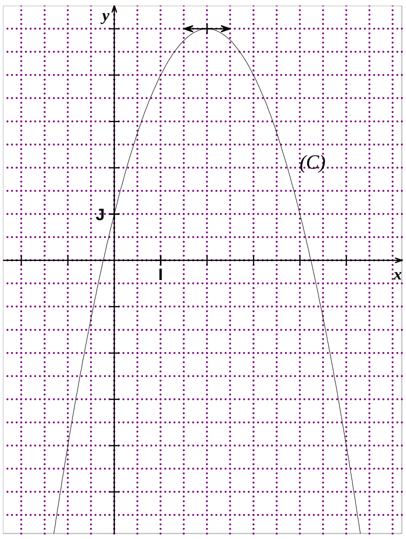
Les points d'intersection de (C) avec (OI) sont donc : $A(2 - \sqrt{5}; 0)$ *et* $B(2 + \sqrt{5}; 0)$.

• Le point d'intersection de (C) avec (OJ) est le point d'abscisse nulle.
f(0) = 1. Le point d'intersection de (C) avec (OJ) est donc le point K(0 ;1).

4. (D) est axe de symétrie de (C) si $\forall\, x \in IR, 2 \times 2 - x \;\in IR\;$ *et* $f(2 \times 2 - x\,) = f(x)$.
$\forall\, x \in IR, on\ a\ 4 - x \in IR.$
$\forall\, x \in IR, f(4 - x) = -(4 - x)^2 + 4(4 - x) + 1 = -(16 - 8x + x^2) + 16 - 4x + 1$
$\forall\, x \in IR, f(4 - x) = -16 + 8x - x^2 + 16 - 4x + 1 = -x^2 + 4x + 1 = f(x).$
Donc la droite (D) est donc axe de symétrie de (C).

5. Le tableau de valeurs suivant et les points d'intersections de (C) avec (OI) et (OJ) permettent de tracer (C).

X	*-1,5*	*-1*	*-0,5*	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*	*5*	*5,5*
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	*-7,3*	*4*	*-1,3*	*1*	*2,8*	*4*	*4,8*	*4,8*	*4*	*2,8*	*1*	*-1,3*	*-4*	*-7,3*



Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
4. Pour tout nombre réel x, on pose : $\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right)$.

a) Justifier que : $\forall\, x \in IR,\;\; \varphi(x) = \frac{1}{12}(2 - x)(2x - 1)^2$.

b) Etudier le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x, puis en déduire la position de (C) par rapport à (T).

5. Tracer (T) et (C).

Solution

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-\frac{x^3}{3}) = +\infty;$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\dfrac{x^3}{3}) = -\infty.$

2. f est dérivable su IR. $\forall\, x \in IR, f'(x) = -x^2 + 2x$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$.
D'où :
$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\;\; f'(x) < 0;$
$\forall\, x \in]0; 2[, f'(x) > 0;$
Par conséquent :
f est strictement croissante sur $[0; 2]$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ *et sur* $[2; +\infty[$.
On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		*0*		*2*		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	*1*	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Une équation de la tangente (T) est : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

On a $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ *et* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{24}$.

Une équation de la tangente (T) est donc : $y == \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{29}{24}$

soit $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$.

4. Pour tout réel x, on pose : $\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right)$.

a) $\forall\, x \in IR,\;\; \varphi(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{6} = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$

$\forall\, x \in IR,\;\; \varphi(x) = \frac{1}{12}(-4x^3 + 12x^2 - 9x + 2)$ *(1)*

D'autre part : $\forall\, x \in IR, \frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2 = \frac{1}{12}(2-x)(4x^2 - 4x + 1)$

$\forall\, x \in IR,\; \frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2 = \frac{1}{12}(8x^2 - 8x + 2 - 4x^3 + 4x^2 - x)$

$\forall\, x \in IR,\; \frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2 = \frac{1}{12}(-4x^3 + 12x^2 - 9x + 2)$ *(2)*

D'après (1) et (2), on a donc : $\forall\, x \in IR,\;\; \varphi(x) = \frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2$.

b) $\forall\, x \in IR,\;\; \varphi(x) = \frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \; ou \;\; x = \frac{1}{2}$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	-∞		$\frac{1}{2}$		*2*		+∞
2-x		+		+	*0*	−	
$(2x-1)^2$		+	*0*	+		+	
$\frac{1}{12}(2-x)(2x-1)^2$		+	*0*	+	*0*	−	

$\forall\, x \;\in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right[\;\; , f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right) > 0;$

$\forall\, x \;\in]2; +\infty[\;\; , f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right) < 0 \,;$

$\forall\, x \;\in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}, f(x) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right) = 0.$

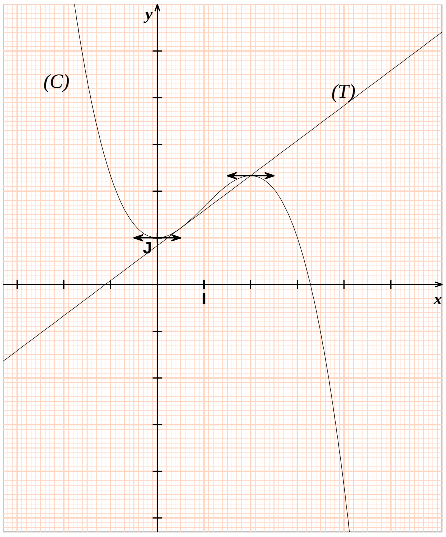
D'où :

(C) est au-dessous de (T) sur $]2; +\infty[$.

(C) est au-dessus de (T) sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right[$.

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ *et 2 .*

5. Figure.



Exercice résolu 3

Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x\,+\,1}{x\,+\,1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C).

Solution

1. D_f = IR$-\{-1\} =]-\infty;-1[\ \cup]-1;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{2x + 1}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} (2x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $+\infty$
$x+1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} (2x+1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} \left(\frac{1}{x+1}\right) = -\infty \end{cases}$ donc par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} (2x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right) = +\infty$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} (2x+1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \left(\frac{1}{x+1}\right) = +\infty \end{cases}$ donc par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} (2x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\infty$.

<u>Interprétation graphique des limites :</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \ et \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \ donc\ la\ droite\ d'équation\ y = 2\ est\ asymptote$ à $(C) en - \infty\ et\ en + \infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = +\infty\ et\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} f(x) = -\infty\ donc\ la\ droite\ d'équation x = -1\ est\ asymptote$ à (C)

3. f est dérivable sur $]-\infty\,;-1\,[$ et sur $]\,\text{-}1\,;+\infty[$. $\forall\, x \in IR - \{-1\}, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

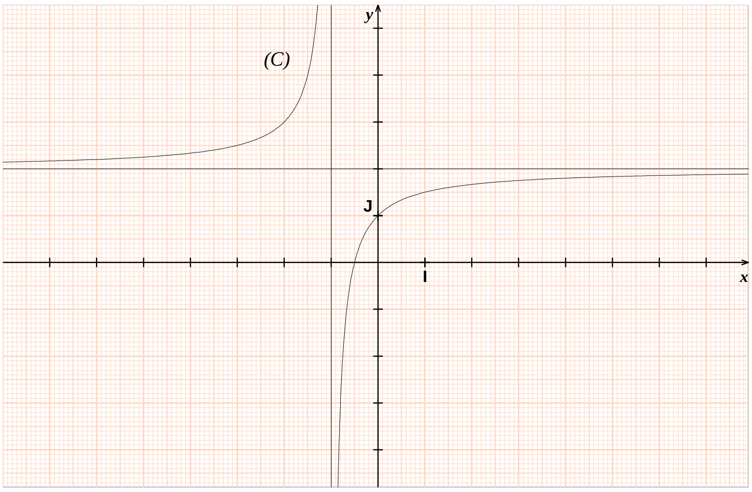
$\forall\, x \in IR - \{-1\},\ (x+1)^2 > 0\ donc\ \forall\, x \in IR - \{-1\}, f'(x) > 0.$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[\ et\ sur]-1;+\infty[$.

On obtient donc le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

4. Figure.



Exercice résolu 4

Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2(x-1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.

3.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C).

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer (C).

Solution

1. Df = *IR*$-\{1\} =]-\infty; 1[\ \cup]1; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x^2-3x+6}{2(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (x^2-3x+6)\left(\dfrac{1}{2(x-1)}\right)$

Le signe de $2(x-1)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2(x-1)$	$-$	0	$+$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x^2-3x+6)=4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{2(x-1)}\right)=-\infty \end{cases}$ donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x^2-3x+6)\left(\frac{1}{2(x-1)}\right) = -\infty$.

On a $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2-3x+6)=4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{2(x-1)}\right)=+\infty \end{cases}$ donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2-3x+6)\left(\frac{1}{2(x-1)}\right) = +\infty$.

<u>Interprétation graphique des limites :</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ *donc la droite d'équation* $x = 1$ *est asymptote* à (C)

3. $a)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2} = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2} = +\infty.$

$b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudions le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x-1\right)$:

$\forall\, x \in]-\infty;1[\ \cup\ ]1;+\infty[\ , f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right) = \frac{x^2-3x+6}{2(x-1)} - \left(\frac{1}{2}x-1\right)$

$\forall\, x \in]-\infty;1[\ \cup\ ]1;+\infty[\ , f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right) = \frac{2}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\frac{2}{x-1}$	$-$		$+$

$\forall\, x \in]-\infty;1[\ , f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right) < 0$ et $\forall\, x \in]1;+\infty[\ , f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right) > 0.$

D'où : (C) est au-dessous de (D) sur $]-\infty;1[$. (C) est au-dessus de (D) sur $]1;+\infty[$.

4. f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$. $\forall\, x \in IR-\{1\}, f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}$.

$\forall\, x \in IR-\{1\}, 2(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 2x - 3$.

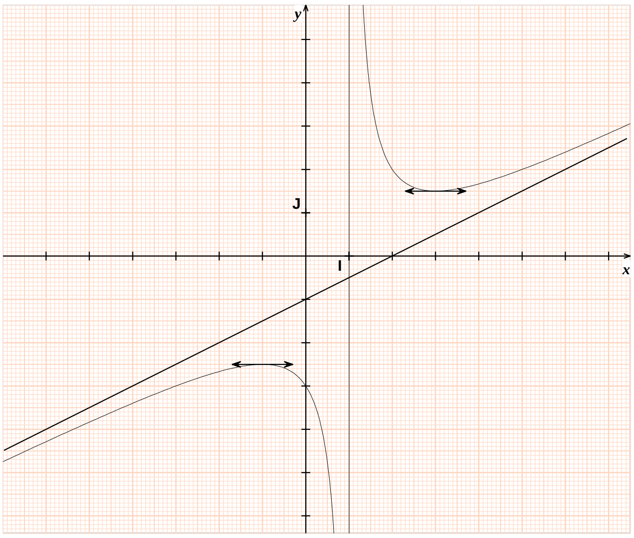
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = -1\ ou\ x = 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$\forall\ x\ \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[, f'(x) > 0;$
$\forall\ x\ \in]-1;1[\cup]1;3[, f'(x) < 0;$
$\forall\ x\ \in \{-1;3\}, f'(x) = 0.$
Il en résulte que :
f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ *et sur* $[3;+\infty[$.
f est strictement décroissante sur $[-1;1[$ *et sur* $]1;3]$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

4. Représentation graphique



Exercice résolu 5

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}\cos(3x)$.

1.a) Justifier que $\frac{2\pi}{3}$ est une période de f.

b) Justifier que f est paire.

c) A quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ?

2. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right]$.
3. Tracer (C). Unités : OI = 2 cm et OJ = 4 cm.

Solution

1.a) $\forall\, x \in IR$, $f(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}\cos 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(3x+2\pi) = \frac{1}{2}\cos 3x = f(x)$ *donc* $\frac{2\pi}{3}$ *est une période de f.*

b) $\forall\, x \in IR$, $f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-3x) = f(x)$ *donc f est paire.*

c) Comme $\frac{2\pi}{3}$ *est une période de f, on trace la fonction f sur* $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ *et on obtient toute la courbe (C) à l'aide de translations de vecteurs* $k\frac{2\pi}{3}\vec{\imath}$ *, k étant un nombre entier relatif.*

f étant paire, on peut réduire cet ensemble à $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ *et obtenir le tracé sur* $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ *en utilisant la symétrie par rapport à (OJ).*

2. $\forall\, x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], f'(x) = -\frac{3}{2}\sin(3x)$.

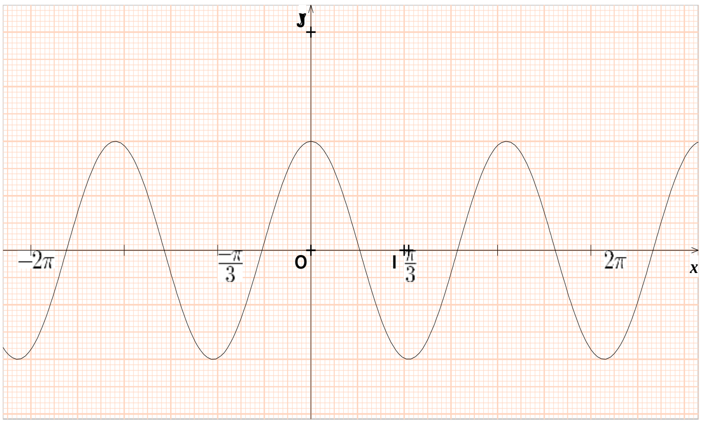
$x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right], \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$.

$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{3}\right[, 3x \in]0;\pi[\Rightarrow \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{3},\right[\sin 3x > 0 \Rightarrow \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{3},\right[, f'(x) < 0.$

f est donc strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

x	*0*		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	*0*	$-$	*0*
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

3. Représentation graphique



EXERCICES

Dans les exercices ci-dessous f est une fonction numérique et (C) désigne sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

1 On considère f la fonction
$f: x \mapsto \frac{-2x^2-3x+2}{x+1}$.
Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + (2x+1)]$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 On considère f la fonction
$f: x \mapsto x\sqrt{3} + 2\sqrt{1+x^2}$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\mathrm{f(x)} - \left(\sqrt{3}+2\right)x\right]$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = -\frac{3}{4}$ est axe de symétrie de (C).
5. Tracer (C).

4 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$.
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C).
5. Tracer (T) et (C).

5 Soit f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et
$g(x) = -3x^2 - x + 7$.
(C_f) et (C_g) désignent respectivement les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2.a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g).
4. Tracer (C_f) et (C_g).

6 Soit f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
(C_f) et (C_g) désignent respectivement les courbes représentatives de f et g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2.a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g).
4. Tracer (C_f) et (C_g).

7 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = x^3 - 3x - 1$
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que le point A(0 ;-1) est centre de symétrie de (C).
5. Tracer (T) et (C).

8 Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 1$
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Calculer $f(1)$.
b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels

que, pour tout x de IR, on a :
$f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
5.a) Démontrer que, pour tout x de IR :
$f(x)-(x-1) = (-x+2)(x-1)^2$
b) En déduire les positions relatives de (C) et (T).
6. Tracer (T) et (C).

$\boxed{9}$ Soit f la fonction définie sur IR par :
$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2$
1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que le point A(1 ;1) est centre de symétrie de (C).
4.a) Déterminer que la droite (T) d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ est tangente à (C) au point d'abscisse 1.
b) Justifier que pour tout x de IR, on a :
$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(x-1)^3$
c) En déduire les positions relatives de (C) et (T).
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ)..
6. Tracer (T) et (C).

$\boxed{10}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats.
3. . Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer que le point A$\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C).
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ).
Tracer les tangentes en ces points.
6. Tracer (C).

$\boxed{11}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que le point A$(-1;2)$ est centre de symétrie de (C).
5. Tracer (C).
6. a) Déduire de la courbe (C), la courbe (C') de la fonction g définie sur IR$-\{-1\}$, par : g(x) = $|f(x)|$.
b) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de g.

$\boxed{12}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$.
1. Etudier la parité de f.
2. Calculer la limite de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
3.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
6. Tracer (D) et (C).

$\boxed{13}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = -\frac{x}{3} + 1 + \frac{1}{1-x}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.
3.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{3} + 1$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
6. Tracer (D) et (C).

$\boxed{14}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$.
1. Déterminer les nombres réels a et b pour que (C) passe par le point A$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}-1\right)$ et admette en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Démontrer que le point E(0 ; -2) est un centre de symétrie de (C).
3.a) Calculer la limite de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
6. Tracer (D) et (C).

15 Soit la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = x^3 + px + 2$, où p est un nombre réel.
1. Démontrer que le point K(0 ; 2) est un centre de symétrie de (C).
2. Déterminer p sachant que la droite (OI) est tangente à (C).
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. (C).

16 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{8x^2-14x+5}{2(4x-1)}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en $\frac{1}{4}$ puis interpréter graphiquement les résultats.
3.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (C).
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Démontrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right)$ est centre de symétrie de (C).
5. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ) .
7. Tracer (D) et (C).

17 Soit la fonction f définie sur $]-\infty; -2[\ \cup\ ]-2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$.
1. Justifier que pour tout $x \neq -2$, on a :
$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}$.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en -2 puis interpréter graphiquement les résultats.
3.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C).
c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .
6. Tracer (T) et (C).

18 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
1. Etudier la parité de f.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathrm{IR}\setminus\{-1; 1\}$:
$f(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats.
5. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Tracer (D) et (C). Unité : OI = OJ = 2cm.

19 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{2x^2-4x}{x^2-2x-3}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Justifier que $\forall\ x \in D_f$:
$f(x) = -\frac{3}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-3)} + 2$
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats.
4. Démontrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de (C).
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ) .
7. Tracer (C) (unité graphique 2 cm).

20 Soit la fonction f définie sur IR^* par :
$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
1. Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer (D) et (C). Unités : OI = 1 cm
OJ = 4 cm.

21 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
$f(x)$	-2	↗	1	↘	0	↗	2

Donner l'allure de (C).

22 Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$.
1. Etudier la parité de f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en $\sqrt{3}$ puis interpréter graphiquement les résultats.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur $[0;\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3};+\infty[$. .
5.a) Démontrer que : $\forall\, x \in [0;\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3};+\infty[$, $f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (OI) et (OJ) .
7. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Tracer (D), (T) et (C).

23 Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1;+\infty[$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

On donne :
- $f(-2) = 0$;
- la droite (D) d'équation y = $x + 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

Donner l'allure de (C).

24 Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	4	↘	1

Donner l'allure de (C).

25 Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{4x-2}$.
1. Etudier la dérivabilité de f en $\frac{1}{2}$.
Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer (C).
5. a) Justifier que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur $[0;+\infty[$.
b) Tracer la courbe (C') de la bijection réciproque de f^{-1} de la fonction f.

26 Soit la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{3-x}$.
Partie A
1. Etudier la dérivabilité de f en 3 .
Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer (C).

Partie B

Soit la fonction

F : $x \longmapsto \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$.

1. Etudier la dérivabilité de F en 3 .
Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de F en $-\infty$.
3. a) Démontrer que F'(x) a le même signe que $f(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$.
b) Dresser le tableau de variation de F.
4. Tracer la courbe (C') de F.

$\boxed{27}$ Soit la fonction f de IR vers IR et définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}\ -1)}$.

1.Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 1.
Interpréter graphiquement le résultat.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$.
4. Etudier la dérivabilité de f en 0 .
Interpréter graphiquement le résultat.
5. a) Démontrer que :
$\forall\ x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,
$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{4(\sqrt{x}-1)^2}$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
c) Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer (C).

$\boxed{28}$ Etudier et représenter la fonction f après avoir justifié que le nombre T donné est une période de f.

a) $f: x \longmapsto 4sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $T = 2\pi$;
b) $f: x \longmapsto 3cos(2x)$, $T = \pi$;
c) $f: x \longmapsto 2sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $T = 4\pi$

$\boxed{29}$ Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :
$f(x) = tanx - x$.

1. Etudier f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
2. On admet que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.
Soit F la bijection réciproque de f . Construire la représentation graphique de F.

$\boxed{30}$ (C) est la courbe représentative de la fonction f de IR vers IR définie par
$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2-x}$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner une équation de la droite (D_2) asymptote verticale à (C).
4.a)Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
b)Etudier la position de (C) par rapport à (D_1).
4. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5. Déterminer les points A et B de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$ tels que $x_A < x_B$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
7. Déterminer les points d'intersection de (C) et l'axe (OI).
8. Démontrer que le point $E(2; 1)$ est un centre de symétrie de (C).
9.Tracer (T) et (C).

6

DÉNOMBREMENT

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à :

- utiliser des arbres de choix, des diagrammes, des tableaux, etc… pour dénombrer ;
- apprendre à choisir l'outil approprié pour résoudre des problèmes de dénombrement ;
- utiliser quelques résultats combinatoires de base.

► Ce chapitre doit être traité en deux temps :

- dans un premier temps, introduire les méthodes de dénombrement (arbres de choix, tableaux, diagrammes, …) ;

L'élève doit être capable de faire des exercices sans connaissance des formules, ni du vocabulaire de la combinatoire.

- dans un deuxième temps, utiliser les formules (n^p, A_n^p, C_n^p) pour résoudre des exercices.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
I. Cardinal d'un ensemble fini : • Card(AUB) • Card(A×B) • Card(A^p), pour p∈IN* II. Liste à p-éléments : p-listes : 1.Définition 2. Nombre de p-listes avec répétition : n^p 3. Nombre de p-listes sans répétition (arrangements) : A_n^p 4. Nombre de permutations : n! III. Combinaisons - Définition - Nombre de combinaisons : C_n^p -Propriété : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ et $C_n^p = C_n^{n-p}$ - Le triangle de Pascal	☞ Utiliser des arbres de choix, des diagrammes, des tableaux, etc… pour dénombrer . ☞ Utiliser Card(AUB), Card(A×B), Card(A^p) pour résoudre des problèmes de dénombrement. ☞Calculer n!, A_n^p, C_n^p. ☞ Savoir choisir une des trois notions : p-listes, arrangement, combinaison dans des problèmes de dénombrement. ☞ Donner des valeurs de C_n^p à l'aide du triangle de Pacal.

A C T I V I T É S   P R É P A R A T O I R E S

Activité 1

Un enfant possède 4 cartons portant respectivement les lettes P, A, I, X.

1. Utiliser un arbre de choix pour citer tous les mots commençant par A qu'il peut former.
2. Déduire le nombre de mots qu'il peut former à l'aide de ces 4 cartons.

Activité 2

Avec les lettres de l'alphabet, on souhaite former des mots de 5 lettres.

On schématise la situation à l'aide des 5 cases suivantes :

la 1ère lettre	la 2e lettre	la 3e lettre	la 4e lettre	la 5e lettre

Combien de façon a-t-on de choisir

la 1ère lettre ? la 2e lettre ? la 3e lettre ? la 4e lettre ? la 5e lettre ?

En notant n_1, n_2, n_3, n_4 et n_5 le nombre de façon de choisir respectivement - la 1ère lettre, la 2e lettre, la 3e lettre, la 4e lettre et la 5e lettre, le **principe multiplicatif** (ou principe du produit) permet d'affirmer qu'il y a $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5$ de former des mots de 5 lettres.

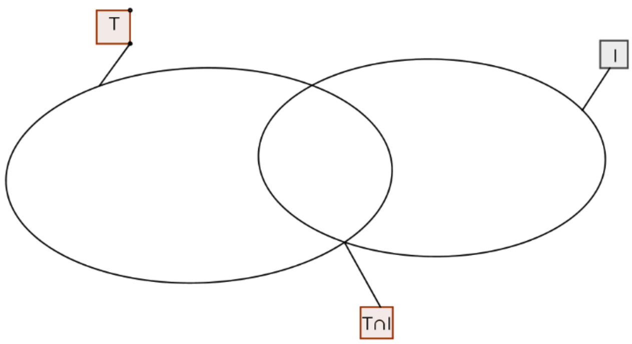
Déduire le nombre de mots de 5 lettres que l'on peut former à l'aide des lettres de l'alphabet.

Activité 3
Utiliser le principe multiplicatif pour dénombrer le nombre de mots de 4 lettres distinctes que l'on peut former à l'aide des lettres de l'alphabet.

Activité 4
Un code comporte 3 lettres distinctes suivies de deux chiffres.
Combien peut-on former de codes distincts ?

Activité 5
Combien existe-t-il de numéros de téléphone composés de 8 chiffres et commençant par 05.

Activité 6
Dans une classe de 30 élèves sont formés un club de théâtre et un club d'informatique.
Le club théâtre est composé de 15 membres, le club informatique de 20 membres. Il y a 7 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.
On désigne par T l'ensemble des élèves qui appartiennent au club de théâtre et par I l'ensemble des élèves qui appartiennent au club informatique.
On peut représenter la situation par le diagramme suivant :



A l'aide du diagramme ci-dessus, combien d'élèves :
a) appartiennent au club théâtre et n'appartiennent pas au club informatique.
c) n'appartiennent ni au club théâtre, ni au club informatique.

COURS

I. CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

1. Définition

• Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que son **cardinal** est n.
On note : **Card(E)** = n .
• Lorsqu'un ensemble E ne contient aucun élément, on dit que son cardinal est 0.
On note : Card(E) = 0 .

Exemple
Soit E = $\{0; 2; 4; 6; 8\}$. Card(E) = 5.

2. Cardinal d'une réunion quelconque

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.
Card(A∪B) = Card(A) + Card(B) – Card(A ∩ B).

Exercice résolu 1
Dans une classe de Terminale D, 10 élèves suivent des cours de soutien scolaire en mathématiques et 13 élèves suivent des cours des cours de soutien scolaire en Sciences Physiques. De plus, 8 d'entre eux suivent des cours de soutien scolaire en mathématiques et en Sciences Physiques.
Combien a-t-on d'élèves dans cette classe de Terminale D suivent au moins l'un des deux cours de soutien scolaire ?

Solution
Notons M l'ensemble des élèves qui suivent des cours de soutien scolaire en mathématiques ; S l'ensemble des élèves qui suivent des cours de soutien scolaire en Sciences Physiques.
Card(M) = 10, Card(S) = 13 ; Card(M∩ S) = 8.
L'ensemble des d'élèves de cette classe qui suivent au moins l'un des deux cours de soutien scolaire est MUS.
Card(MUS) = Card(M) + Card(S) - Card(M∩ S) = 10 + 13 -8 = 15.
Il y a donc 15 d'élèves de cette classe qui suivent au moins l'un des deux cours de soutien scolaire.

3. Cardinal du produit cartésien

Définition

Soit A et B deux ensembles.
On appelle produit cartésien de A par B, noté A×B, l'ensemble des couples (a,b), où a est élément de A et b est élément de B.

Exemple

Soit A = $\{0; 1\}$ et B = $\{a; e, i, u\}$
Citons tous les éléments de A×B en utilisant un tableau :

0	a		$(0, a)$
	e		$(0, e)$
	i		$(0, i)$
	u		$(0, u)$
1	a		$(1, a)$
	e		$(1, e)$
	i		$(1, i)$
	u		$(1, u)$

Les éléments de A×B sont : $(0, a)$, $(0, e)$, $(0, i)$,$(0, u)$, $(1, a)$, $(1, e)$, $(1, i)$,$(1, u)$.
Card(A×B) = 8. Le principe du produit donne le résultat : il y a 2 façons de choisir un élément de A et 4 façons de choisir un élément de B.

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis.
Card(A×B) = Card(A) × Card(B) .

Remarques :

- Ce résultat se généralise au produit cartésien de p ensembles finis E1,…, Ep, p ≥ 1.

L'ensemble E1 × · · · × Ep est fini et on a :
Card(E1 × ⋯ × Ep) = Card(E1) × Card(E2) ×…× Card(Ek).

- Soit A un ensemble fini et p un entier supérieur ou égal à 2.

Le produit cartésien A×A×…×A (p fois) est noté A^p :
Card(A^p) = $(\text{Card}(A))^p$.

Exercice résolu 2
Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Solution
Notons :
E l'ensemble des trois entrées disponibles, E = {E1; E2; E3}. Card (E) = 3.
P l'ensemble des deux plats disponibles, P = {P1; P2} . Card (P) = 2 .
D l'ensemble des quatre desserts disponibles, D = {D1; D2; D3; D4} . Card (D) = 4 .
Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E, P et D.
Chaque menu est donc un élément du produit cartésien $E \times P \times D$.
Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à
Card (E)×Card (P)×Card (D) = 3×2×4 = 24

On peut donc composer 24 menus différents.

Exercice résolu 3
Combien de mots de 6 lettres peut-on former ?

Solution
Notons E l'ensemble des lettres de l'alphabet. Card (E) = 27.
Chaque mot est un élément du produit cartésien E^6 .
Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à
Card (E^6) = $27^6 = 387420489$.
On peut donc former 387420489 *mots différents.*

II. LISTE A P-ELEMENTS :P-LISTES

1. Définition

Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul.
On appelle **p-liste** ou **p-ulplet** de E tout élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p.

Remarques
• Dans une p-liste, on peut répéter les éléments et l'ordre compte.
• Situation type : « tirages successifs avec remise ».

Exemples : (4, 3, 0, 4, 7), (0, 6, 3, 2, 4), (3,3,3,3,3) sont des 5-listes de l'ensemble des chiffres.

Propriété

Soit n un entier naturel et p un entier naturel non nul.
Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exercice résolu 4
Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y en a-t-il

a) ne comprenant que des jetons verts ?

b) ne comprenant aucun jeton vert ?
c) comprenant un seul jeton vert ?

Solution
1. *Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi 9 éléments.*
Le nombre de tirages que possibles est donc égal à $9^3 = 729$.

2.a) *Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi les 5 jetons verts.*
Le nombre de tirages que possibles est donc égal à $5^3 = 125$.
b) Un tirage est une 3-liste de trois éléments choisis parmi les 4 jetons rouges.
Le nombre de tirages que possibles est donc égal à $4^3 = 64$.
c) Utilisons un tableau pour dénombrer le nombre de tirages possibles :

Position des jetons	*V*	*R*	*R*
Nombre de possibilités	*5*	*4*	*4*

Il y a 5 ×4 ×4 = 80 tirages possibles.

Position des jetons	*R*	*V*	*R*
Nombre de possibilités	*4*	*5*	*4*

Il y a 4 × 5 *×4 = 80 tirages possibles.*

Position des jetons	*R*	*R*	*V*
Nombre de possibilités	*4*	*4*	*5*

Il y a 4 ×4 ×5 = 80 tirages possibles.

Conclusion : Il y a donc en tout 80×3 = 240 tirages possibles.

Exercice résolu 5
Un élève possède 4 livres : 1 livre de mathématiques, 1 livre de chimie, 1 livre de français et 1 livre d'anglais. Il souhaite ranger ces 4 livres dans 3 tiroirs, chaque tiroir pouvant contenir plusieurs livres. De combien de façon peut-il ranger ces livres ?

Solution

Livres	*maths*	*chimie*	*français*	*anglais*
Nombre de choix	*3*	*3*	*3*	*3*

Il y a 3^4 *= 81 rangements possibles*

2. Arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini et n et p deux entier naturels tels que : $1 \leq p \leq n$.
On appelle **arrangement de p éléments** de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Remarques

- Dans un arrangement, les éléments sont différents et l'ordre compte.
- Situation type : « tirages successifs sans remise ».

Exemple 1

(4, 3, 0, 7), (1, 6, 9, 2) sont des arrangements de 4 éléments de l'ensemble des chiffres.

Exemple 2

On veut former des mots de 5 lettres distinctes à l'aide de l'alphabet français. Combien y en a-t-il ?

Solution

Chaque mot formé est un arrangement de 5 lettres choisies parmi 27 lettres.
Pour la 1ère lettre, on a : 27 choix ; pour la 2e lettre, on a : 26 choix ; pour la 3e lettre, on a : 25 choix ; pour la 4e lettre, on a : 24 choix ; pour la 5e lettre, on a : 23 choix .
D'où le nombre de mots de 5 lettres distinctes que l'on peut former est :
$27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 9687600$.

Propriété

Soit n et p deux entier naturels tels que : $1 \leq p \leq n$..
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est
$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ (p facteurs).

Exemples

$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$; $A_7^1 = 7$; $A_7^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Exercice résolu 6

18 jeunes filles de Bouaké se présentent à la présélection du concours Miss.
On doit désigner la Miss et ses 2 dauphines.
Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Solution

Chaque podium est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 18 éléments.
Le nombre de podium est donc $A_{18}^3 = 4896$.

3. Permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \geq 1$).
On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Propriété 1

Soit E un ensemble fini de cardinal n (n ≥1).
Le nombre de permutations de E est le nombre noté n! (factorielle n) :
n! = n × (n − 1) × ⋯ 2×1 (n facteurs).

Exemples

5! = 5× 4 × 3 × 2 × 1 = 120 ; 3! = 3 × 2 × 1 = 6 ; 1! = 1.

Remarque : n! = A_n^n .

Convention : On convient que : **0 ! = 1**.

Exercice

n désignant un entier naturel, simplifier le nombre $\frac{(n+1)!}{n!}$

Propriété 2

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p inférieur ou égal à p, on a : $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{p} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}$

Exercice résolu 7

On appelle anagramme du mot BOUAKE tout mot de 6 lettres formé à l'aide des 6 lettres qui composent le mot BOUAKE.
Exemples : BOUAEK, OBKUEA, KBUOAE.
Dénombrer les anagrammes du mot BOUAKE.

Solution
Chaque anagramme est une permutation des 6 lettres du mot BOUAKE.
Le nombre de d'anagrammes possibles est donc $6! = 720$.

III. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel.
On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E à p éléments.

Remarques

• Dans une combinaison, on ne peut pas répéter les éléments et il n'y a pas d'ordre.
• Situation typique : « tirage simultané de p objets parmi n ».

Propriété

Soit E une ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que 0 ≤ p ≤ n.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\boldsymbol{C_n^p = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{p}}{p!}}$.

Remarques

$C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Exercice résolu 8

Un jeu de 32 cartes compte 4 as. On en extrait une main 8 cartes.

Déterminer :

a) le nombre total de mains possibles.

b) le nombre de mains ne contenant aucun as.

c) le nombre de mains avec contenant exactement 2 as.

Solution

a) Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 8 cartes parmi 32. Il y a : $C_{32}^8 = \frac{A_{32}^8}{8!}$ *= 10518300 mains différentes.*

b) Il y a façons C_{28}^8 *de choisir 4 cartes parmi les 28 autres. IL y a donc 3108105 mains possibles.*

c) Il y a façons C_4^2 *de choisir 2 as parmi 4 puis, pour chacune de ces façons, il y a* C_{28}^6 *façons de choisir 8 cartes parmi les 28 autres cartes.*

Le nombre de mains recherché est donc : $C_4^2 \times C_{28}^6$ *= 2260440.*

3. Le triangle de Pascal

La relation de Pascal

Pour tous entiers n et p tel que 1 ≤ p ≤ n – 1, on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Cette relation permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche, suivant le tableau ci-dessous appelé triangle de Pascal.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	**6**	**4**	1			
5	1	5	10	**10**	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Par exemple pour calculer $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$.

Dans la formule C_n^p, n désigne le numéro de la ligne et p le numéro de la colonne.

Par exemple, C_7^2 se trouve à l'intersection de la ligne numéro 7 et de la colonne numéro 2 : on trouve $C_7^2 = 21$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1
Un sac contient trois jetons : un vert, un noir, un rouge.
On tire successivement trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on remet le jeton tiré dans le sac.
a) Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce tirage.
b) Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons de la même couleur.

Solution
a) Dans le tableau ci-dessous notons : vert : V ; noir : N ; rouge : R

V	*V*	*V*	*(V,V,V)*
		N	(V,V,N) *
		R	*(V,V,R)* *
	N	*V*	*(V,N,V)* *
		N	*(V,N,N)* *
		R	*(V,N,R)*
	R	*V*	*(V,R,V)* *
		N	*(V,R,N)*
		R	*(V,R,R)* *
N	*V*	*V*	*(N,V,V)* *
		N	(N,V,N) *
		R	*(N,V,R)*
	N	*V*	*(N,N,V)* *
		N	*(N,N,N)*
		R	*(N,N,R)* *
	R	*V*	*(N,R,V)*
		N	*(N,R,N)* *
		R	*(N,R,R)* *
R	*V*	*V*	*(R,V,V)* *
		N	(R,V,N)
		R	*(R,V,R)* *
	N	*V*	*(R,N,V)*
		N	*(R,N,N)* *
		R	*(R,N,R)* *
	R	*V*	*(R,R,V)* *
		N	*(R,R,N)* *
		R	*(R,R,R)*

Il y a 27 résultats possibles.
b) Notons dans le tableau ci-dessous une astérisque à côté des résultats oû il y a exactement deux jetons de la même couleur.
Il y a donc 18 résultats possibles.

Exercice résolu 2
Un sac contient neuf jetons :
- cinq verts numérotés de 1 à 5 ;
- trois rouges numérotés de 1 à 3 ;
- un blanc numéroté 1 .
On tire successivement et sans remise trois jetons du sac.
a) Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
b) Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons verts ?

Solution

a) Chaque tirage est un arrangement de 3 éléments choisis parmi 9 éléments.
Pour obtenir un tirage tricolore, on peut tirer 3 jetons verts parmi 5 soit A_5^3 *possibilités, ou trois jetons rouges parmi 3 soit* A_3^3 *possibilités.*
Le nombre de possibilités est donc $A_5^3 + A_3^3 = 66$.

b) Utilisons un tableau pour dénombrer :

Jetons	*V*	*V*	*Autre couleur*
Nombre de choix	*5*	*4*	*4*

Il y a 80 possibilités.

Jetons	*V*	*Autre couleur*	*V*
Nombre de choix	*5*	*4*	*4*

Il y a 80 possibilités.

Jetons	*Autre couleur*	*V*	*V*
Nombre de choix	*4*	*5*	*4*

Il y a 80 possibilités.

<u>Conclusion</u> *: Il y a 240 possibilités d'avoir un tirage contenant exactement 2 jetons verts.*

EXERCICES

1 Un sac contient quatre jetons : un vert, un noir, un rouge et un gris.
On tire successivement et avec remise trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on remet le jeton tiré dans le sac.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles à l'issue de ce tirage ?
2. Combien y en a-t-il contenant exactement 1 jeton vert.
3. Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons verts.
4. Combien y en a-t-il contenant exactement 1 jeton vert et 2 jetons noirs.

2 Un sac contient quatre jetons : un vert, un noir, un rouge et un gris.
On tire successivement et sans remise trois jetons du sac de la façon suivante : après avoir tiré un jeton du sac et noté sa couleur, on ne le remet pas dans le sac.

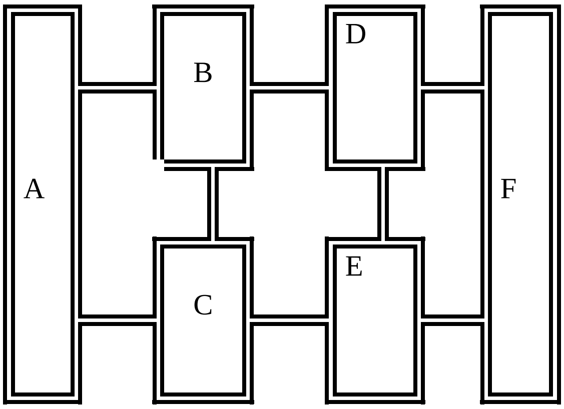
1. Combien y a-t-il de résultats possibles à l'issue de ce tirage ?
2. Combien y en a-t-il contenant le jeton vert ?
3. Combien y en a-t-il contenant exactement le jeton vert, le jeton rouge et le jeton gris ?

3 On dispose de deux dés, l'un noir (N) dont trois faces portent 1 point, deux faces portent 3 points et une face porte 5 points ; et l'autre rouge (R) dont deux faces portent 2 points, deux faces portent 4 points et deux faces portent 6 points.
On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des points marqués sur la face supérieure.
1. A l'aide d'un tableau, déterminer les valeurs possibles distinctes de S.
2. De combien de façon différentes peut-on obtenir une valeur de S égale à 7 ?

4 Un élève achète une canette dans une boutique qui coûte 300F ; il donne au boutiquier 1000F. Ce dernier ne possède que des pièces de 50F, de 100F, de 200F et de 500F pour lui rendre la monnaie.
De combien de façon peut-il rendre la monnaie à l'élève ?

5 1. Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot GARÇON ?
2. Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot FILLE ?

6 La figure ci-dessous représente six villes A, B, C ,D, E et F ainsi que les routes les reliant.



1. Combien y a-t-il de chemins menant de A à F sans passer deux fois par la même ville ?
2. Combien y a-t-il de chemins menant de A à F en passant par B et E sans passer deux fois par la même ville ?

$\boxed{7}$ 1. Combien peut-il y avoir au plus de numéros de téléphone fixe en Côte d'Ivoire avec notre système de numérotation à huit chiffres ?
2. Parmi ces numéros, combien
a) sont composés de chiffres distincts ?
b) contiennent au moins une fois le chiffre 0 ?
c) contiennent exactement 3 fois le chiffre 0 ?

$\boxed{8}$ Dix-huit chevaux sont au départ du tiercé.
1. De combien de façon peut-on jouer le tiercé au hasard ?
2. Pour un tiercé gagnant (dans l'ordre), combien y en a-t-il où figure le n° 13 ?

$\boxed{9}$ Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefours avec feux. Chaque feu peut être rouge (R), orange (O) ou vert (V).
On appelle trajet de l'automobiliste un ensemble ordonné de quatre lettres choisies parmi R, O et V : par exemple, VRVO.

1.Combien existe-t-il de trajets possibles ?
2. Combien y a-t-il de trajets pour lesquels :
a) les deux premiers feux sont rouges ?
b) exactement deux feux sont rouges ?

$\boxed{10}$ Calculer le nombre de façons de distribuer trois cahiers différents à trois enfants Alice, Louise et Sarah dans les cas suivants :
a) chaque enfant reçoit un cahier ;
b) chaque enfant peut recevoir 0, 1, 2 ou 3 cahiers ;
c) Sarah reçoit 2 cahiers.

$\boxed{11}$ Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiples (Q.C.M) autorisant une seule réponse par question, comprend 5 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles dont une seule est exacte.

1. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
2. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire :
a) s'il répond correctement à la première question et faux aux autres questions ?
b) s'il répond correctement à une seule question ?
b) s'il répond correctement à exactement deux questions ?

$\boxed{12}$ En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.
Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.
Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

$\boxed{13}$ Dans une classe de $1^{ère}$ D, il y a 40 élèves dont 30 filles.
On constitue le bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

1. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?
2. Combien y en a-t-il où le président est une fille ?
3. Combien y en a-t-il où le bureau ne comprend que deux filles ?

$\boxed{14}$ 1. Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres ?
2. Parmi ces nombres :
a) combien sont pairs ?
b) combien sont composés de chiffres distincts ?
c) combien composés exactement de deux chiffres identiques ?

$\boxed{15}$ Dans une classe de TC, il y a 20 élèves dont 8 filles.
On constitue un groupe de cinq élèves pour le balayage hebdomadaire de la classe.
1. De combien de manières peut-on former ce groupe ?
2. Combien y en a-t-il si le groupe est composé exactement de trois filles ?
3. Combien y en a-t-il si le groupe est comprend au moins une fille ?
4. Dans cette classe, il y a deux élèves qui ne

souhaitent pas faire partie du même groupe. Combien de groupes de peut-on constituer de telle façon que ces deux élèves ne se retrouvent pas ensemble ?

16 Au service du personnel, on compte 7 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.
1. Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2. Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3. Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

17 Un sac contient 10 jetons :
4 jetons blancs numérotés de 1 à 4 ;
4 jetons rouges numérotés de 1 à 4 ;
2 jetons verts numérotés de 1 à 2 .
On tire simultanément 3 jetons du sac.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages :
a) ne contenant des numéros identiques ? b) ne contenant que des jetons de la même couleur ?
c) contenant exactement 2 jetons blancs ?
d) contenant au moins un jeton blanc ?
e) contenant au plus 2 jetons blancs ?

18 Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.
1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

19 Quatre garçons et deux filles s'assoient autour d'une table ronde.
1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

20 Le club informatique d'un lycée se compose :
− de 10 élèves de Seconde dont 7 proviennent d'une série scientifique;
− de 15 élèves de Première dont 5 proviennent d'une série scientifique;
− de 10 élèves de Terminale dont 8 proviennent d'une série scientifique.
On offre à trois élèves de ce club un voyage gratuit en Inde pour visiter un lycée d'excellence.
Pour désigner les heureux bénéficiaires, on choisit trois élèves du club informatique.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Démontrer que le nombre de choix où un seulement des trois élèves choisis est en Seconde est égal à 3000.
3. Combien y a-t-il de choix possibles où :
a) les trois élèves choisis appartiennent à même niveau scolaire ?
b) deux élèves exactement proviennent d'une série scientifique ?
c) au moins l'un des élèves choisis est en Première et provient d'une série scientifique ?

21 Le code de la porte d'entrée d'un immeuble est composé d'une lettre suivie de deux chiffres (par exemple A02, ou G40 ou U33).
On rappelle que l'alphabet comporte 26 lettres dont 6 voyelles.
1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y en a-t-il où
a) la lettre est un S ?
b) la lettre est une voyelle ?
c) il y a exactement un chiffre impair dans le code ?
d) il y a au moins un chiffre impair dans le code ?

22 On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme.
Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1.Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :
a) les trois chiffres sont pairs ;
b) les deux lettres sont identiques ;
c) le code contient deux chiffres impairs.
3. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

23 Les êtres humains sont répartis, suivant la composition du sanguin en quatre groupes : O, A, B, AB.
Dans une assemblée de dix donneurs de sang, quatre personnes appartiennent au groupe O, trois au groupe A, deux au groupe B et une au groupe AB.
On choisit au hasard trois personnes de l'assemblée.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y en a-t-il où les trois personnes appartiennent au même groupe sanguin ?
3. Combien y en a-t-il où deux personnes exactement appartiennent au même groupe sanguin ?
4. Combien y en a-t-il où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin ?

24 Un libraire dispose de 20 livres d'auteurs différents qu'il veut répartir dans six tiroirs numérotés de 1 à 6 (tiroir peut contenir de zéro à 20 livres).
1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles où le tiroir numéro 1 contient deux livres exactement ?
3. Combien y a-t-il de rangements possibles où un tiroir contient les vingt livres ?
4. Combien y a-t-il de rangements possibles où chaque tiroir contient au moins un livre ?

25 On jette deux cubiques A et B dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note X la somme des points marqués sur la face supérieure de chaque dé.
1. Combien y a-t-il de possibilités où X est égal à 7 ?
2. Combien y a-t-il de possibilités où la somme des points est strictement inférieure à 10 ?

26 On jette trois cubiques A, B et C dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir :
a) exactement un as ?
b) au moins un as ?
c) trois faces identiques ?
d) exactement deux faces identiques ?
e) une somme des points égale à 12 ?

27 On veut construire un tableau de mots croisés ayant cinq lignes et cinq colonnes comme ci-dessous.
On noircit au hasard huit des 25 cases du tableau.
1. De combien de manières peut-on choisir les huit cases noires dans le tableau ?
2. De combien de manières peut-on obtenir un tableau constitué : une case noire au centre et une à chacun des sommets ?

28 On dispose d'un tableau ayant cinq lignes et cinq colonnes comme ci-dessous.
On range au hasard sept jetons numérotés de 1 à 7 dans sept des 25 cases du tableau.
1. De combien de manières peut-on ranger ces sept jetons dans le tableau ?
2. De combien de manières peut-on obtenir un tableau constitué : chaque case d'une diagonale contient un jeton ?

29 Un conseil municipal comprend 13 élus : 8 femmes et 5 hommes. On désire déterminer l'équipe des 4 adjoints au maire :
1. combien d'équipes différentes peut-on former ?
2. combien d'équipes comportant exactement 2 hommes peut-on former ?
3. combien d'équipes comportant au moins un homme peut-on former ?

30 1. De combien de façons peut-on placer six convives autour d'une table dont les sièges sont numérotés de 1 à 6 ?
2. De combien de façons peut-on placer les convives sachant qu'il y a trois hommes et trois femmes et que l'on alterne hommes et femmes ?

31 Une entreprise possède six voitures.
Comment peut-on les répartir :
1. si elles doivent être placées chacune dans un garage différent ?
2. si elles sont placées deux à deux dans trois garages différents ?
3. s'il y a quatre garages, deux recevant deux voitures et deux autres une seule voiture ?

32 Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 8 des 15 leçons proposées.
On a mis 12 papiers contenant chacun une question portant respectivement sur les 12 leçons dans une urne.
Le candidat tire simultanément 4 papiers.
1. Combien y a-t-il de tirages où le candidat ne connait aucun de ces sujets ?
2. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait les quatre sujets ?
3. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait un et un seul de ces sujets ?
4. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connait au moins de ces sujets ?

33 Dans un stock de 1000 pièces usinées, on dénombre 50 pièces défectueuses. On prélève au hasard 3 pièces. On suppose que chaque tirage d'une pièce se fait dans la population totale. (on parle alors de tirage avec remise).
Combien de tirages différents peut-on faire ne contenant :
1. qu'une seule pièce défectueuse ?
2. au moins une pièce défectueuse ?
3. aucune pièce défectueuse ?
4. au moins 2 pièces défectueuses ?

34 Afin de donner des notes de rattrapage, le professeur de mathématiques interroge l'un après l'autre deux garçons (TOGBE et BAMBA) et trois filles (ROKIA, KEVINE et MARIAM).
1. De combien de manières peut-il procéder ?
2. De combien de manières peut-il procéder si le premier élève interrogé doit être une fille ?

35 Déterminer les entiers naturels n tels que :
$C_{100-n}^{2} \leq 190$.

36 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Simplifier les nombres A, B et C :
A = $\frac{n}{n!}$; B= $\frac{(n+2)!}{n!}$; C = $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

7

SUITES NUMÉRIQUES

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise :
- Introduire le concept de suite numérique ;
- Dégager quelques propriétés concernant les suites arithmétiques, géométriques ;
- Familiariser les élèves avec la notation indicielle.

► Pour introduire ce chapitre , on s'appuiera sur des situations issues de la géométrie ou de la vie économique et sociale.

► La représentation graphique des termes d'une suite sur un axe n'est pas à faire.
La sommation et le produit membre à membre sont des techniques qui devront être connues des élèves.

► Sont hors programme :
- des majorations, minorations de suites ;
- des variations de suite ;
- la convergence d'une suite.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Définition d'une suite numérique. 2. Suite déterminée par : − une formule explicite − une formule de récurrence 3. Suites arithmétiques, géométriques : − défnition − expression du terme général en fonction d'un terme quelconque − somme de n termes consécutifs	☞ Calculer les premiers termes d'une suite. ☞ Dans le plan, en utilisant la droite d'équation y = x, représenter les premiers termes d'une suite définie par une formule de récurrence. ☞ Justifier qu'une suite est arithmétique ou géométrique. ☞ Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique connaissant deux terme. ☞ Calculer un terme de rang quelconque d'une suite arithmétique ou géométrique connaissant un terme et la raison. ☞ Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

A C T I V I T É S   P R É P A R A T O I R E S

Activité 1

Au 1er janvier 2014, une marchandise valait 10000F. Elle subit une augmentation de 12% par mois.

On note p_0 la valeur de cette marchandise au 1er janvier 2014 ;

On note p_1 la valeur de cette marchandise au 1er février 2014 ;

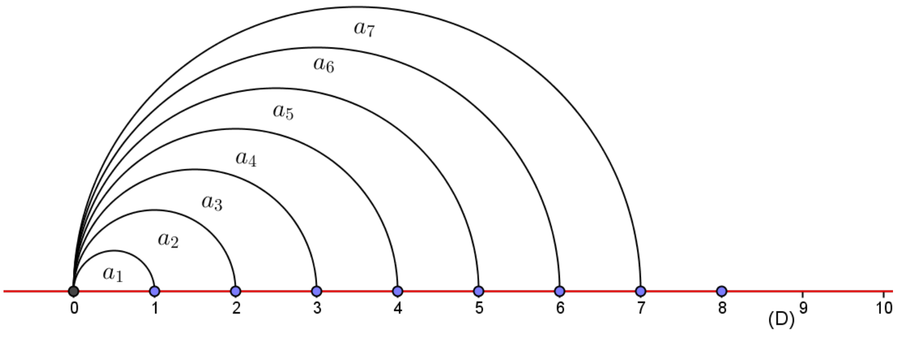
On note p_2 la valeur de cette marchandise au 1er mars 2014 ;

On note p_3 la valeur de cette marchandise au 1er avril 2014 ;

1. Donner les valeurs de p_0 , p_1 , p_2 , p_3 .
2. Combien vaudrait cette marchandise au 1er juin 2014 ?
3. 2. Combien vaudrait cette marchandise au 1er juin 2015 ?

Activité 2

On considère la figure suivante :



a_1 est l'aire de la portion du plan comprise entre le 1er demi-cercle et la droite (D) ;
a_2 est l'aire de la portion du plan comprise entre le 1er demi-cercle, le 2^{e} demi-cercle et la droite (D) ;
a_3 est l'aire de la portion du plan comprise entre le 2^{e} demi-cercle, le 3^{e} demi-cercle et la droite (D) ;
a_4 est l'aire de la portion du plan comprise entre le 3^{e} demi-cercle, le 4^{e} demi-cercle et la droite (D) ;
………
a_n est l'aire de la portion du plan comprise entre le (n-1)^{e} demi-cercle, le n^{e} demi-cercle et la droite (D) .

1. Calculer a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 .
2. Exprimer une relation entre a_{n+1} et a_n .

COURS

I. DÉFINITION

1. Définition

Une suite numérique est une fonction de IN vers IR.

2. Notations et vocabulaire.

Soit la suite $u: \mathrm{IN} \longrightarrow \mathrm{IN}$
$\qquad\qquad n \longmapsto u(n)$

$u(n)$ se note u_n .
u_n est appelé le terme de rang n ou encore terme d'indice *n* .
Si E est l'ensemble de définition de la suite *u* alors la suite u est notée $(u_n)_{n\in E}$ ou (u_n) .
u_n est appelé terme général de la suite (u_n).

3. Exemples

a) Suite définie par une formule explicite

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{1}{2n+3}$.

$u_0 = \frac{1}{3}$, $u_1 = \frac{1}{5}$, $u_2 = \frac{1}{7}$, $u_3 = \frac{1}{9}$

u_0 *est le terme de rang 0 ;* u_0 *est le 1*^{er} *terme de la suite .*
u_1 *est le terme de rang 1 ;* u_1 *est le 2*^{e} *terme de la suite .*
u_2 *est le terme de rang 2 ;* u_2 *est le 3*^{e} *terme de la suite .*
u_3 *est le terme de rang 3 .*

b) Suite définie par une formule de récurrence

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$

Calculer les 5 premiers termes de la suite u.

Solution

$u_0 = -2$; $u_1 = 3u_0 + 5 = -1$; $u_2 = 3u_1 + 5 = 2$; $u_3 = 3u_2 + 5 = 11$; $u_4 = 3u_3 + 5 = 38$.

Exercice 1

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, calculer les 6 premiers termes .

1. $u_n = \frac{1}{n}$.

2. $u_n = \sqrt{n-3}$.

3. u_n est la somme des n premiers entiers naturels pairs strictement positifs.

4. $\mathrm{u_n} = -3n^2 + 2n + 1$.

5. $\mathrm{u_n} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 2

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, calculer les 6 premiers termes .

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

2. $u_0 = \sqrt{2}$, $\quad \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

3. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} \end{cases}$

II. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE

Exemple

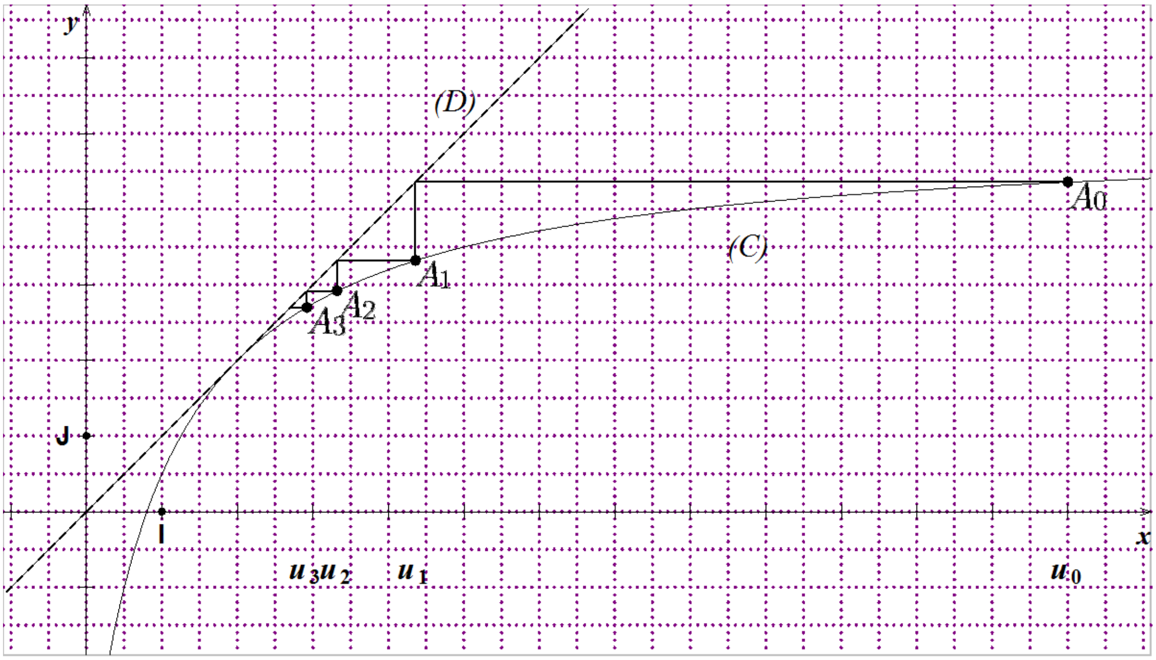
Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$

Soit (C) la représentation graphique de la fonction $f: x \longmapsto \frac{5x - 4}{x + 1}$ dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) et (D) la droite d'équation y = x .

A_0 est le point de (C) d'abscisse u_0 .

On construit A_1 en projetant A_0 sur (D) parallèlement à (OI) ; le point obtenu est en suite projeté sur (C) parallèlement à (OJ).

De la même façon, on construit A_2 à partir de A_1, puis A_3 à partir de A_2 .



1. Justifier que les abscisses respectives des points A_1, A_2, A_3 sont u_1, u_2, u_3.
2. Placer u_4 sur (OI) à l'aide de (C) et (D).

Cette méthode permet de construire de proche en proche sur (OI) à l'aide de (C) et (D) les termes de la suite sans utiliser la calculatrice.

Exercice

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 à l'aide de la droite (D) d'équation y = x et de la courbe représentative (C) de la fonction f donnée.

1. $u_0 = 4$, $\forall n \in IN,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$; $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

2. $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$; $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x + 1$.

3. $u_0 = \frac{1}{2}$, $\forall n \in IN,\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}{u_n}^2 + \frac{4}{3}u_n$; $f : x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

III. SUITES ARITHMÉTIQUES

1. Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que :
$u_{n+1} = u_n + r$, pour tout indice *n*.
Le nombre r est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Remarques

• Une suite (u_n) est dite arithmétique lorsqu'on passe de chaque terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre.
• La suite (u_n) est arithmétique lorsque $u_{n+1} - u_n$ est constante quel que soit l'entier n. Cette constante est la raison de la suite arithmétique.

Exemples 1

• *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

(u_n) *est une suite arithmétique de raison -3 et de 1*[er] *terme* u_0 .

• *la suite des nombres impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; … est une suite arithmétique de raison 2.*

Exemples 2

Les suites suivantes (u_n) et (v_n) sont-elles arithmétiques ?

$\forall\, n \in IN, \quad u_n = 5n + 8$; $\forall\, n \in IN, \quad v_n = n^2 + 1$.

Solution

● $\forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 8 - 5n - 8 = 5$,

donc (u_n) *est une suite arithmétique de raison 5.*

● $v_1 - v_0 = 2 - 1 = 1$ *et* $v_2 - v_1 = 5 - 2 = 3$.

Comme $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ *donc v n'est pas une suite arithmétique.*

2. Expression de u_n en fonction de u_p

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers naturels *n* et *p* : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple 1

(u_n) est une suite arithmétique.

Sachant que $u_2 = -\frac{1}{2}$ $et\ u_7 = -\frac{17}{4}$, calculer la raison de la suite (u_n).

Solution

On a : $u_7 = u_2 + (7-2)r$ *donc* $r = \frac{u_7 - u_2}{5} = \frac{-\frac{17}{4} + \frac{1}{2}}{5} = -\frac{3}{4}$.

Exemple 2

(v_n) est une suite arithmétique de raison r.

Sachant que $v_0 = 3\ \ et\ \ r = -2$, calculer v_{10} .

Solution

$v_{10} = v_0 + 10 \times (-2) = 3 - 20 = -17$.

3. Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers naturels *n* et *p* tels que $p \leq n$:

$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$.

Remarque

On retient la formule suivante donnant la somme S des N termes consécutifs d'une suite arithmétique : $S = \frac{N(P+D)}{2}$

où N = le nombre de termes, P = 1er terme, D = dernier terme.

Exemple 1

Calculer la somme $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, pour tout entier naturel n.

Solution

S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1, de 1er terme 1 et de dernier terme n. Ce qui donne : $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie sur IN par : par $u_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \text{IN}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$.

Calculer en fonction de n, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison $-\frac{1}{3}$.

$\forall n \in \text{IN}, u_n = u_0 + (n-0)\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{3}n$.

S_n est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$, de 1er terme $\sqrt{2}$.

Donc : $\forall n \in \text{IN}, S_n = \frac{(n-0+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(6\sqrt{2}-n)}{6}$.

Exemple 3

$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$, pour tout entier naturel n.

a) Calculer S_0, S_1 , S_4 .

b) Calculer S_n .

Solution

a) $S_0 = 1$; $S_1 = 1 + 3 = 4$; $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

b) S_n est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2, de 1er terme 1 et de dernier terme (2n + 1).

Déterminons le nombre de termes.

Posons $u_1 = 1$ et $u_N = 2n + 1$ où N désigne le nombre de termes.

On a : $u_N = u_1 + (N-1) \times 2$ donc : N = n+1.

Ce qui donne : $S_n = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2$.

IV. SUITES GÉOMÉTRIQUES

1. Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que :
$u_{n+1} = q\, u_n$, pour tout indice *n*.
Le nombre *q* est appelé la **raison** de la suite (u_n).

Remarques

• (u_n) est une suite géométrique lorsqu'on passe de chaque terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre.

• Si $u_n \neq 0$, pour tout n alors la suite (u_n) est géométrique lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant quel que soit l'entier *n*. Cette constante est la raison de la suite géométrique.

Exemples 1

• *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_1 = -1 \\ \forall\, n \in IN^*, \quad u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$

(u_n) *est une suite géométrique de raison 5 et de 1[er] terme* u_1 .

• *la suite des nombres pairs : 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; … est une suite géométrique de raison 2.*

Exemple 2

Les suites suivantes (u_n) et (v_n) sont-elles géométriques ?

$\forall\, n \in IN, \quad u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\forall\, n \in IN, \quad v_n = n^2$.

Solution

• $\forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} = 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}u_n$, *donc* (u_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{2}{3}$.

• $v_0 = 0$, $v_1 = 1$; $v_2 = 4$; $v_3 = 9$.

On a $\frac{v_2}{v_1} = 4$ *et* $\frac{v_3}{v_2} = \frac{9}{4}$. *Ainsi* $\frac{v_3}{v_2} \neq \frac{v_2}{v_1}$. *La suite* v *n'est donc pas une suite géométrique.*

2. Expression de u_n en fonction de u_p

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison *q*.
Pour tous entiers naturels *n* et *p* : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple 1

(u_n) est une suite géométrique. Sachant que $u_2 = \frac{3}{4}$ *et* $u_5 = -\frac{3}{32}$, calculer la raison de la suite (u_n).

Solution

On a : $u_5 = u_2 \times q^3$ *donc* $q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{-\frac{3}{32}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{8}$. *D'où :* $q = -\frac{1}{2}$.

Exemple 2
(v_n) est une suite géométrique de raison q.
Sachant que $v_0 = 3 \ et \ q = -2$, calculer v_8 .
Solution
$v_8 = v_0(-2)^8 = 768$.

3. Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers naturels n et p tels que p $\leq n$:
$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_p \left[\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right]$, si q$\neq 1$

$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n - p + 1)u_p$, si q = 1.

Remarque
On retient la formule suivante donnant la somme S des N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q $\neq 1$:
S $= \frac{P(1-q^N)}{1-q}$, où N = le nombre de termes, P = 1[er] terme.

Exemple 1
Calculer la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 131072$.

Solution
S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2, de 1[er] terme 1 et de dernier terme 131072.
Déterminons le nombre de termes.
Posons $u_1 = 1 \ et \ u_N = 131072$ où N désigne le nombre de termes.
On a : $u_N = u_1 2^{N-1}$ donc : $2^{N-1} = \frac{u_N}{u_1} = 131072 = 2^{17}$.
Donc N-1= 17, soit N = 18. Ce qui donne : $S = \frac{P(1-q^N)}{1-q} = \frac{1-2^{18}}{1-2} = 262143$.

Exemple 2
Soit x un nombre réel distinct de -1. On pose pour tout entier naturel n,
$S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$.
Calculer S_n .

Solution
$S_n = (-x)^0 + (-x)^1 + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n$.
S_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x$, de 1[er] terme 1 et de dernier terme $(-x)^n$.
Le nombre de termes est N = n – 0 + 1 = n + 1. D'où : $S_n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1 + x}$.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in$ IN, $u_n = -2n + 3$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.

2. On pose : $\forall\, n \in IN,\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Calculer S_n en fonction de n.

Solution

1. $\forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = -2(n+1) + 3 = -2n + 1$

$\forall\, n \in IN, u_{n+1} - u_n = -2n + 1 + 2n - 3 = -2$

$\forall\, n \in IN, u_{n+1} - u_n = -2$*, donc la suite* (u_n) *est une suite arithmétique de raison 2.*

2. $\forall\, n \in IN,\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(3-2n+3)}{2}$

$\forall\, n \in IN,\ S_n = (n+1)(3-n)$.

Exercice résolu 2

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in IN,\ u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+3}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

2. On pose : $\forall\, n \in$ IN, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Calculer S_n en fonction de n.

Solution

1. $\forall\, n \in IN,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{2n+5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{2n+3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$. (u_n) *est donc une suite géométrique de raison* $\frac{4}{25}$ *et de premier terme* $u_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

2. $\forall\, n \in IN,\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0\left[1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{8}{105}\left[1 - \left(\frac{4}{25}\right)^{n+1}\right]$.

Exercice résolu 3

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 \end{cases}$

1. Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), représenter sur (OI) les termes u_0 , u_1 et u_2 .

2. On pose : $\forall\, n \in IN,\ v_n = u_n - \frac{9}{2}$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Calculer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

4. On pose : $\forall\, n \in IN,\ S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

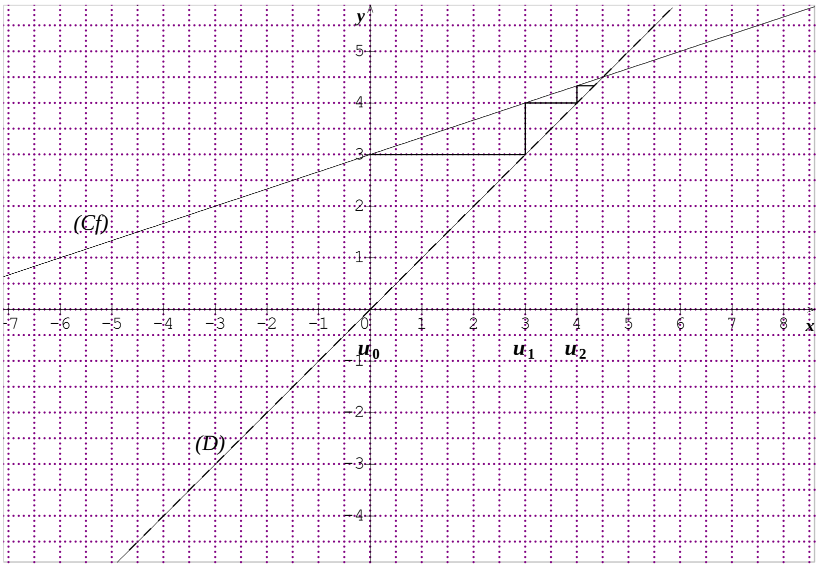
b) Démontrer que : $\forall\, n \in IN,\quad S'_n = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3^n} - 2n - 1\right]$.

Solution

1. Soit f la fonction définie sur IN par : f(x) = $\frac{1}{3}x + 3$.

$\forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Traçons (Cf) et la droite (D) d'équation y = x.



2. On pose : $\forall\, n \in IN,\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{9}{2} = \frac{1}{3}u_n + 3 - \frac{9}{2} = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$.

$\forall\, n \in IN,\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$.

3. (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme v_0 .

donc $\forall\, n \in IN,\ v_n = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$u_n - \frac{9}{2} = v_n \Rightarrow u_n = \frac{9}{2} + v_n = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\forall\, n \in IN,\ u_n = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. a) On pose : $\forall\, n \in IN,\ S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \dfrac{-\frac{9}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{27}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

b) $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \left(\frac{9}{2} + v_0\right) + \left(\frac{9}{2} + v_1\right) + \cdots + \left(\frac{9}{2} + v_n\right)$

Donc : $\forall\, n \in IN,\ S'_n = \frac{9}{2}(n+1) - \frac{27}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

$\forall\, n \in IN,\ S'_n = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3^n} - 2n - 1\right]$.

EXERCICES

1 Pour toutes les suites définies ci-dessous, calculer u_1, u_2 , u_3 , u_4, u_5 .

a) $\forall\, n \in IN,\ u_n = \frac{5n-2}{n+3}$

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in IN,\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall\, n \in IN^*,\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \end{cases}$

e) $\forall\, n \in$ IN, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - n$

f) $\forall\, n \in$ IN*, $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}$

g) $u_1 = -\frac{1}{2}$ *et pour* $n \geq 1$,
$u_{n+1} = u_1 \times u_2^2 \times \ldots \times u_n^n$

2 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3 .
2. Vérifier que : pour tout entier k ≥ 1 :
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

3 On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par :
$u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1.a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
b) Démontrer que : $\forall\, n \geq 5$, on a :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$.
2. En déduire que : $\forall\, n \geq 5$, on a :
$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$

4 Soit la suite u définie par :
$\forall\, n \in$ IN, $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$.
1. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
2. En déduire que $\forall\, n \in$ IN, $u_{n+1} - u_n > 0$

5 Soit la suite u définie par :
$\forall\, n \in$ IN, $u_n = -n^2 + 2n + 4$.
Démontrer que $\forall\, n \in IN^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$

6 Soit la suite u définie par :
$\forall\, n \in$ IN, $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. En déduire que $\forall\, n \in$ IN, $u_{n+1} < u_n$.

7 On considère la suite numérique (v_n) définie sur IN* par : $v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.
Démontrer que :
$\forall\, n \in$ IN*, $v_{n+1} - v_n > 0$.

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur (OI) à l'aide de la droite d'équation y = x les 5 premiers termes de la suite u.

a) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall\, n \in \text{IN},\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall\, n \in \text{IN},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \text{IN},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

9 On définit pour tout entier naturel n, la suite (t_n) par : $t_n = 5n - 7$.

Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

10 On définit pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = \frac{3^{n+1}}{5}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

11 La suite (u_n) définie pour tout $n \in$ N par : $u_n = \frac{2^{4n+7}}{5^n}$
est-elle une suite géométrique?
Si oui, précisez sa raison et son premier terme.

12 Dans chacun des cas ci-dessous, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
a) $u_0 = 2$ $et\ r = -5$, calculer u_{10} .
b) $u_1 = 3$ $et\ r = 7$, calculer u_5 .
c) $u_0 = 5\ et\ r = \frac{1}{3}$
calculer le 9ième terme et les sommes
S= $u_0 + u_4 + \cdots + u_8$ et
T = $u_0 + u_4 + \cdots + u_n$ *pour tout n.*
d) $u_3 = -12$ $et\ u_7 = 2$, calculer r et u_5 .
Calculer S = $u_3 + u_4 + \cdots + u_{50}$
e) $u_7 = \frac{5}{3}$ $et\ u_{10} = \frac{4}{9}$, calculer u_0 .

13 Dans chacun des cas ci-dessous, (u_n) est une suite géométrique de raison q.
a) $u_0 = 8$ $et\ q = -\frac{1}{2}$, calculer u_{13} .
b) $u_1 = -3$ $et\ q = 2$, calculer u_6 .
c) $u_1 = \frac{1}{81}\ et\ q = -3$
calculer u_7 et les sommes
S= $u_1 + u_4 + \cdots + u_7$ et
T = $u_1 + u_4 + \cdots + u_n$ *pour tout n.*
d) $u_4 = \frac{3}{16}$ $et\ u_7 = \frac{1}{18}$, calculer q et u_0 .
Calculer S = $u_3 + u_4 + \cdots + u_{50}$

14 (u_n) est une suite géométrique dont les termes sont positifs et de raison q .

Déterminer u_1 et q sachant que :
$u_3 + u_4 = 160$ et $u_1 \times u_3 = 64$.

15 Calculer :
S = 11 + 14 + 17 + . . . + 170 + 173 ;
T= $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{8192}$.

16 Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ \forall\ n\ \in \text{IN}^*,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

17 Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\ n\ \in \text{IN},\ u_{n+1} = u_n - \frac{2}{3} \end{cases}$$
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

18 Calculer en fonction de n, la somme $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ pour tout entier naturel n.

19 Soit a un nombre réel strictement positif, différent de 1.
On pose pour tout entier naturel n :
$S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$ et
$T_n = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} ... + \frac{1}{a^{2n}}$.
1. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $S_n = \frac{1}{a-1}\left[1 - \frac{1}{a^n}\right]$.
2. Calculer T_n en fonction de n.

20 Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \text{IN},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - \frac{4}{5} \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J), représenter sur (OI) les termes u_0 , u_1, u_2 , u_3
2. On pose : $\forall n \in IN,\ v_n = u_n + 1$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme..
3. Calculer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
4. On pose :
$\forall n \in IN,\ S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et
$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
a) Calculer S_n en fonction de n.

21 Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in \text{IN}^*,\ u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), représenter sur (OI) les termes u_0 , u_1, u_2 , u_3 .
2. On pose : $\forall n \in \text{IN}^*,\ v_n = u_n - \frac{4}{7}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Calculer u_n en fonction de n.

22 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \text{IN},\quad u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ (unité graphique 2 cm).
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par :
$\forall n \in \text{IN},\quad v_n = u_n - \frac{5}{2}$.
a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est une géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

23 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in \text{IN}^*, u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre réel a pour que la suite $(v_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Calculer $\sum_{i=1}^{n} v_i$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

24 Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n},\ \forall n \in \text{IN} \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+x}{x}$.
a) Etudier f et représenter sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O,I ;J).
b) Résoudre l'équation : $x\in]0;+\infty[,\ f(x) = x$.
c) Représenter les 4 premiers de la suite u sur l'axe (OI) à l'aide de (C).
2. On considère la suite v définie sur IN par : $v_n = \frac{-2+u_n}{1+u_n}$.
a)Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Démontrer que : $\forall n \in \text{IN},\ v_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$.
c) En déduire u_n en fonction de n.

25 Soit a un réel différent de 0 et de 1.
La suite (u_n) est définie par :
$u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in IN$,
$u_{n+2} = a u_{n+1} - (a-1)u_n$

1. Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est-elle arithmétique ?
Dans la suite de l'exercice, on suppose $a \neq 2$.
2. On pose que : $\forall n \in \text{IN}$,
$v_n = u_{n+1} - u_n$

a)Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme..

b) Calculer v_n en fonction de n et de a.

3.a) Démontrer que : $\forall n \in$ IN*,

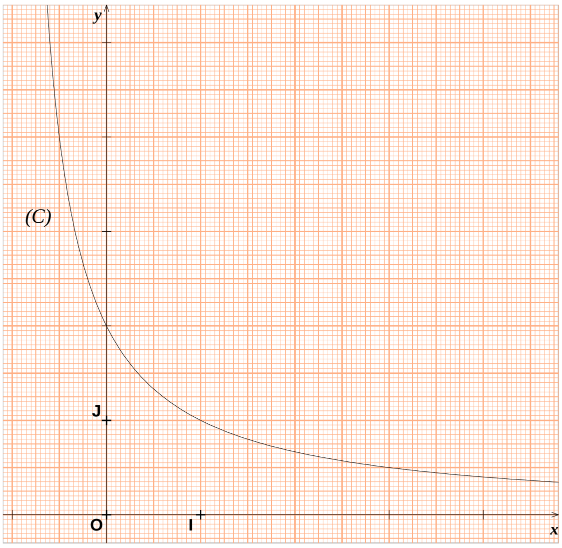
$u_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

b) Calculer u_n en fonction de n et de a.

26 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in IN, \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{1+x}$.



1. Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 de la suite $(u_n)_{n\in IN}$
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par :

$\forall n \in$ IN, $\quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

27 Soit les suites (u_n) et (v_n)définies sur IN par :

$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2n - 5$$

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2n + 5$$

On pose : $\forall n \in IN,\ w_n = u_n + v_n$ et $\forall n \in IN,\ t_n = u_n - v_n$.

1. Démontrer que la suite w est une géométrique.
2. Démontrer que la suite t est une arithmétique.
3. Justifier que : $u_n = \frac{1}{2}[w_n + t_n]$
4. On pose : $\forall n \in$ IN,

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Calculer S_n en fonction de n.

28 On définit deux suites u et v par :

$u_0 = 1,\ v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}[u_n + 3v_n]$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}[u_n + 4v_n]$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que la suite w est une géométrique dont on précisera la raison.

2. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 5v_n + 4u_n$.

Démontrer que la suite t est une suite constante.

Déterminer cette constante.

3. Déduire des questions précédentes, l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

29 Mr KONE loue un appartement au 1er janvier 20014 ; le loyer annuel payé pour l'année 2014 est L_0 = 400 000 F.

Pour chacune des années qui suivent, le loyer annuel subit une augmentation de 10% par rapport au loyer de l'année précédente.

On appelle L_n le loyer versé pour l'année 2014+n.

1. Calculer le loyer versé en 2016.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $L_n = 400000 \times (1{,}1)^n$.
3. Calculer le loyer versé en 2023.
4. On appelle S le montant total du loyer versé par Mr KONE pendant 10 ans.

Calculer S.

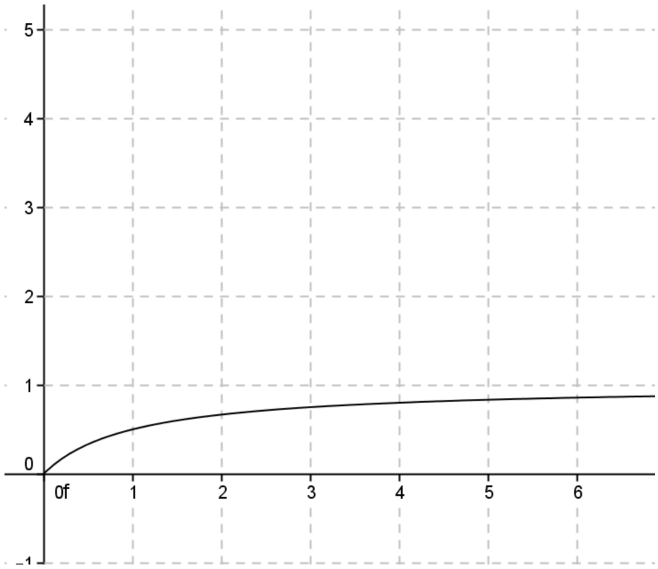
30 Une enquête étudie le nombre de clients dans un supermarché.
On constate que chaque mois 70% des clients du mois précédent restent fidèles à ce supermarché et que 3000 nouveaux clients apparaissent.
On note u_n le nombre de clients venus au cours du nième mois de l'enquête.
Ainsi $u_1 = 8000$.

1. Démontrer que $u_2 = 8600$, puis calculer u_3 .
2. Calculer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul, par :
$v_n = 10000 - u_n$.
a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1} = 7000 - 0{,}7u_n$.
b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

31 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$
On pose : $\forall\, n \in$ IN, $v_n = u_n - 4n + 10$.
1. Démontrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer en fonction de n la somme S_n définie par :
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

32 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}$$
On pose : $\forall\, n \in$ IN, $v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$.
1. Démontrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique.
2. Exprimer u_n en fonction de n .

33 Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in IN, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$
(C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.



1. Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ 2.
Soit la suite v définie par :
$\forall\, n \in$ IN, $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$
a) Démontrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$u_n = \frac{4}{1 + 4n}$.

8

STATISTIQUES

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise :

- à approfondir l'étude des séries statistiques regroupées en classes(les classes ne sont pas nécessairement de même amplitude) ;
- introduire les séries statistiques à deux caractères et l'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

► On habituera les élèves à l'usage du symbole $\sum$ et des indices.

► Pour traiter ce chapitre, on choisira des exemples dans la vie économique, dans l'environnement des élèves afin de les motiver.

► Tout le chapitre doit être traité en exercices et travaux dirigés.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
I. Séries statistiques à un caractère regroupé en classes : 1. Représentation graphique : - l'histogramme ; - courbes cumulatives ; - polygones des effectifs cumulés et des fréquences. 2. Caractéristiques de position : - classes modales ; - moyenne, médiane. 3. Caractéristiques de dispersion : - écart moyen ; - variance, écart type. II. Séries statistiques à deux caractères 1. Nuage de points. 2. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés : - covariance ; - droite de régression ; - coefficient de corrélation linéaire.	☞ Regrouper les modalités en classes données. ☞ Représenter : - un histogramme. - le polygone des effectifs et des fréquences. - le polygone des effectifs cumulés et des fréquences cumulés d'une série regroupée en classes. ☞ Déterminer les caractéristiques de position et de dispersion d'une série regroupée en classes. ☞ Représenter une série à deux variables par un nuage de points. ☞ Représenter une série statistique à deux variables par un tableau à double entrée. ☞ Calculer la covariance, le coefficient de corrélation linéaire. ☞ Déterminer les droites d'ajustement linéaires par la méthode des moindres carrés. ☞ Interpréter le coefficient de corrélation linéaire.

COURS

I. SERIES STATISTIQUES A UN CARACTERE REGROUPE EN CLASSES

1. Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Activité 1

Lors d'un devoir commun sur 45 élèves d'une classe de Première D du lycée classique, on a obtenu la répartition suivante des notes sur 20 points :

Notes	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18
Effectifs	2	4	2	2	7	7	7	3	2	4	2	1	1	1

a. Compléter le tableau suivant : *(Série 1)*

Notes	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20]$
Effectifs				
Effectifs cumulés croissants				
Effectifs cumulés décroissants				
Fréquences cumulées croissantes				
Fréquences cumulées décroissantes				

b) Construction d'un histogramme et du polygone des effectifs

● Portons en abscisse les bornes de chaque classe et construisons sur chacun de ses intervalles pris comme base un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de la classe correspondante.

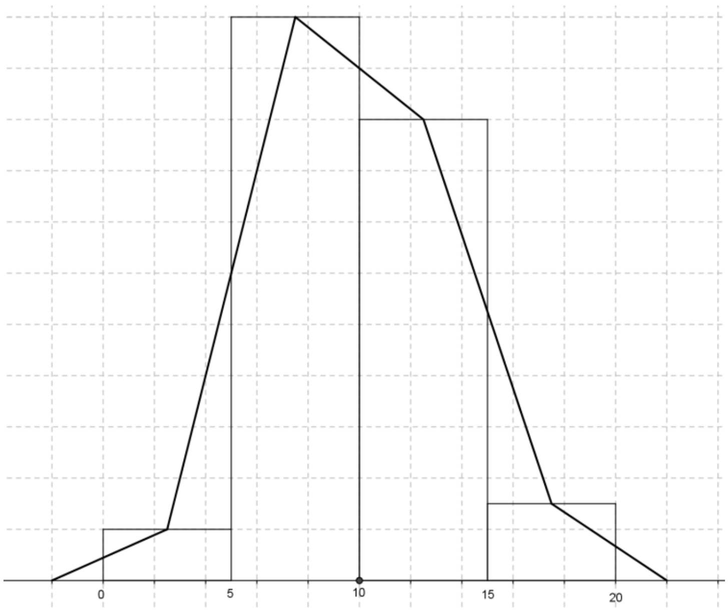
La représentation graphique ainsi obtenue est appelée **histogramme**.

En prenant 1 cm^2 pour 0,8, justifier le graphique ci-dessous.

● La ligne brisée obtenue en joignant les milieux des côtés des rectangles parallèles à l'axe des abscisses est le **polygone des effectifs**.

On complète ce polygone en imaginant deux classes extrêmes d'effectif nul.

Voir graphique ci-dessous.



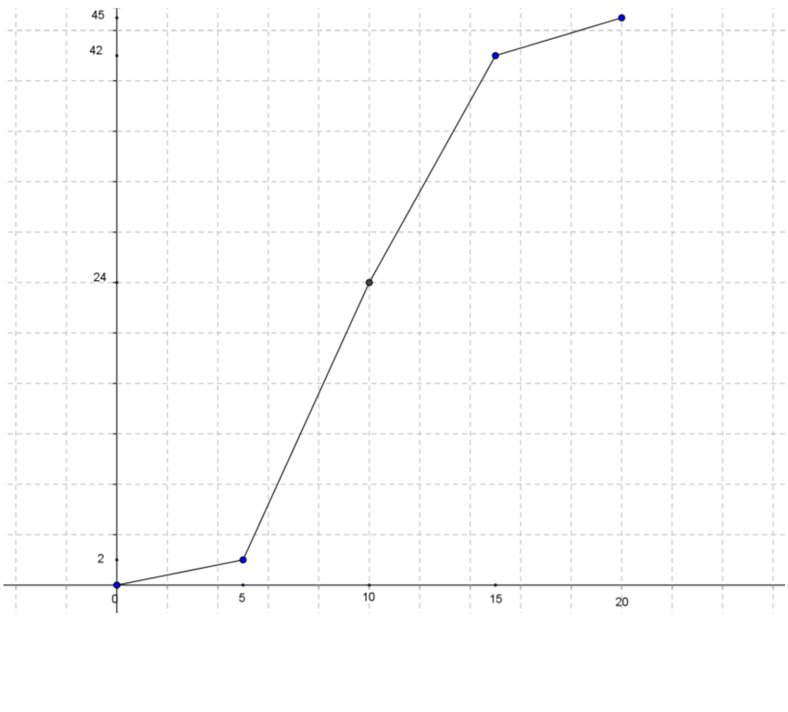
c) Construction du polygone des effectifs cumulés croissants.

Placer les de coordonnées (0 ;0),$(5;2)$,$(10;24)$, $(15;42)$, $(20;45)$.

La ligne brisée par ces points est appelée le **polygone des cumulés croissants.**

En abscisse 1 cm représente 2.

En ordonnées 1 cm représente 4 notes.



Activité 2

La structure de la population en Côte D'Ivoire est donnée par le tableau (série 2) ci-dessous.

Age (an)	$[0; 15[$	$[15; 65[$	[65 ;110]
Fréquence (%)	39,8	57,2	3
Fréquence cumulée croissantes (%)	39,8	97	100

a) Construire un histogramme représentant cette série statistique.

b) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.

2. Caractéristiques de position

a) Classe modale

Définition

La classe modale est la classe de plus grand effectif.

Remarque : Il peut y avoir plusieurs modes ou classes modales.

Exemple : Dans la série 1, la classe modale est $[5; 10[$.

b) Moyenne

Définition

Soit une série statistique (x_i, n_i) d'effectif total N.

La moyenne est le réel, noté $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\, x_i$$

Dans le cas d'une série où les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Exemple : Déterminer la moyenne de la série 1.

Notons $\bar{x}$ la moyenne de la série 1.

$\bar{x} = \frac{2\times2,5+22\times7,5+18\times12,5+3\times17,5}{45} \approx$ 9,94 à 10^{-2} près.

c) Médiane

Définition

On appelle médiane tout réel M tel que :

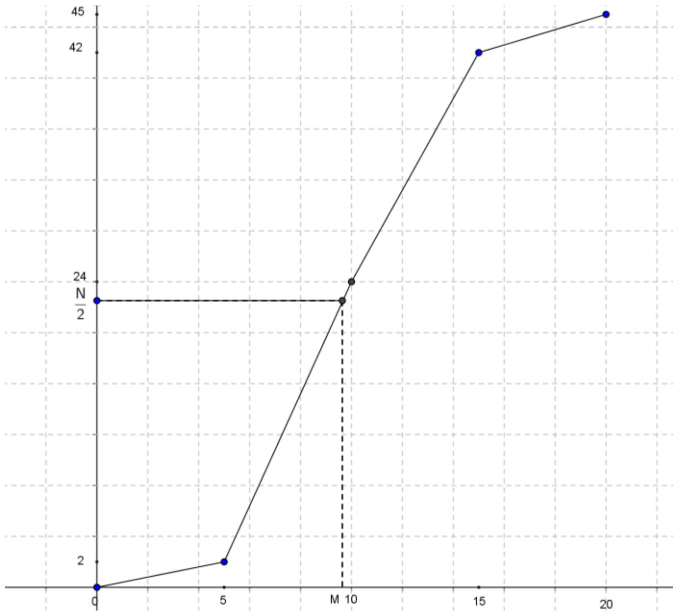
au moins 50% des termes de la série ont une valeur inférieure ou égale à M

et au moins 50% des termes de la série ont une valeur supérieure ou égale à M.

Remarque : la médiane M peut s'obtenir à partir du polygone des effectifs cumulés croissants ou des

fréquences cumulées croissantes :
- dans le cas du polygone des effectifs cumulés croissants, la médiane M est l'abscisse du point de ce polygone qui a pour effectif $\frac{N}{2}$;
- dans le cas du polygone des fréquences cumulées croissantes, la médiane M est l'abscisse du point de ce polygone qui a pour fréquence 50%.

Exemple :
Utiliser le polygone des effectifs cumulés croissants de la série 1 pour déterminer graphiquement la médiane.



Pour la série 1, on trouve M ≈ 9,66.
Retrouvons ce résultat par calcul.
La médiane M est dans la classe [5 ;10[.
Posons A(5; 2), B(10 ; 24) et Q(M ; 22,5). On utilise la disposition pratique suivante :

A	Q	B
5	M	10
2	22,5	24

On a : $\frac{M-5}{22{,}5-2} = \frac{10-5}{24-2}$
$\Longrightarrow$ M ≈ 9,66 .
Interprétation : la moitié des élèves de cette classe a une note inférieure ou égale à 9,66.

Exemple : Utiliser le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série 2 pour déterminer graphiquement la médiane puis retrouver le résultat par calcul.

Remarque : Graphiquement, la médiane s'obtient aussi à l'aide des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants : la médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes cumulatives.

3. Caractéristiques de dispersion

Pour mesurer la dispersion d'une série, on peut s'intéresser à la moyenne des distances des valeurs à la moyenne.

Définitions

Soit une série statistique (x_i, n_i) d'effectif total N.

• L'écart moyen est le nombre réel e_m défini par :

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\,|x_i - \bar{x}|.$$

• La variance est le nombre réel V(x) défini par :

$$\mathrm{V(x)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\,(x_i - \bar{x})^2$$

• L'écart type est le nombre réel σ défini par :

$$\sigma = \sqrt{V(x)}.$$

Dans le cas d'une série ou les valeurs sont regroupées en classes, x_i désigne le centre de chaque classe.

Théorème

La variance d'une série statistique (x_i, n_i) peut se calculer avec la relation suivante :

$$\mathrm{V(x)} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\,{x_i}^2\right) - (\bar{x})^2.$$

La variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

Exemple : Compléter le tableau de la série 1.

Classe	x_i	n_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	${x_i}^2$	$n_i{x_i}^2$
$[0;5[$						
$[5;10[$						
$[10;15[$						
$[15;20]$						

Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

II. SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

1. Nuage de points

Exemple

Les deux caractères étudiés sont les notes obtenues en mathématiques et en sciences physiques au bac blanc 2014 par 12 élèves d'une classe de TC.

Notes en mathématiques(x_i)	5	5	7	9	10	10	10	13	15	16	17	18
Notes en sciences physiques (y_i)												

L'ensemble de ces couples forme une série statistique à deux caractères notée $(x_i ; y_i)$.

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points $M_i(x_i ; y_i)$ est appelé le **nuage de points**.

a) Représenter le nuage de points de la série $(x_i ; y_i)$.

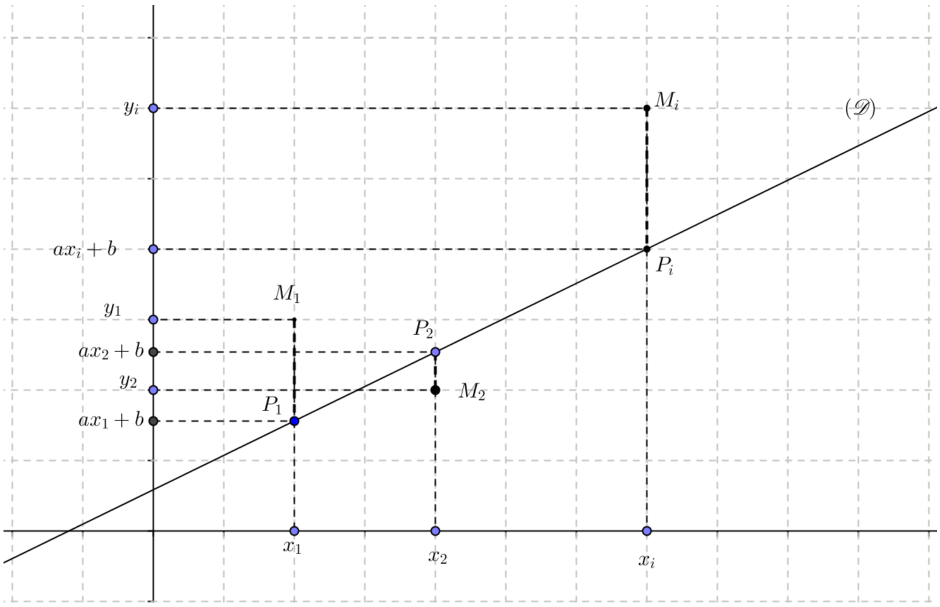
b) Calculer $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Placer le point G$(\bar{x} ; \bar{y})$.

G est appelé le **point moyen** de la série $(x_i ; y_i)$.

2. Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés

Soit $(x_i ; y_i)$ une série telle que les séries (x_i) et (y_i) ne sont pas constantes, représentée par les points $M_i(x_i ; y_i)$ suivants.



Effectuer un ajustement linéaire d'un nuage de points consiste à trouver une droite (D) d'équation y = ax + b qui passe le plus près possible de l'ensemble des points $M_i(x_i ; y_i)$.

Effectuer un ajustement de y en x d'un nuage de points par **la méthode des moindres carrés** consiste à trouver la droite d'équation y = ax + b qui minimise la somme des carrés des écarts entre les valeurs y_i observées et les valeurs ax_i + b données par la droite.
Cela revient à minimiser la somme des carrés des distances « verticales » entre la courbe et les points du nuage : $(M_1P_1)^2 + (M_2P_2)^2 + \cdots + (M_nP_n)^2$.
La droite qui minimise cette somme est appelée **droite de régression de y en x**.

3. Covariance

Définition

La **covariance** de la série $(x_i; y_i)$ est le nombre réel, noté Cov(x; y) défini par :

$$Cov(x; y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad .$$

Théorème

La **covariance** de la série $(x_i; y_i)$ peut se calculer avec la relation suivante :

$$Cov(x; y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y} \, .$$

Exemple : Dans le cas des notes obtenues au bac blanc, calculer Cov(x; y).

4. Droite de régression

Propriété

La **droite de régression de y en x** par la méthode des moindres carrés est la seule droite (D) d'équation y = ax + b tel que :
a = $\frac{Cov(x;y)}{V(x)}$ et b = $\bar{y} - a\bar{x}$.
Cette droite passe par le point moyen G$(\bar{x}; \bar{y})$.

Exemple : Dans le cas des notes obtenues au bac blanc, justifier qu'une équation de la droite (D) de régression de y en x est :

5. Coefficient de corrélation linéaire

Ce coefficient permet de mesurer la validité de l'ajustement linéaire autrement dit dépendance des deux caractères x et y.

Définition

Le **coefficient de corrélation linéaire** entre les caractères x et y est le nombre réel, noté r défini par :

$$r = \frac{Cov(x; y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} .$$

Remarques

On admet que : $|r| \leq 1$.
On considère qu'il y a une forte corrélation entre x et y lorsque $|r|$ est proche de 1(on donne comme critère $|r| > 0{,}8$).

Exemple : Dans le cas des notes obtenues au bac blanc, déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Interpréter.

TRAVAUX PRATIQUES

Lors d'une enquête sur 100 familles, on a relevé le nombre x d'enfants de chaque famille et le nombre y de pièces de leur habitation.
Les résultats sont représentés dans le tableau à double entrée suivants :

y_j \ x_i	0	1	2	3	4	5	6
1	13	4	1	1	0	0	0
2	4	4	9	8	1	0	0
3	0	2	4	9	8	7	2
4	0	0	1	3	2	8	9

1.a) Compléter les tableaux ci-après représentant les séries marginales associées aux caractères x et y :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i							

y_j	1	2	3	4
n_j				

b) Calculer $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
c) Calculer la variance V(x) de x et la variance V(y) de y.
2. Compléter le tableau ci-dessous qui donne tous les couples $(x_i; y_j)$ d'effectifs non nuls :

x_i	y_j	n_{ij}	$n_{ij}x_iy_j$
0	1		
0	2		
1	1		

1	2		
1	3		
2	1		
2	2		
2	3		
2	4		
3	1		
3	2		
3	3		
3	4		
4	2		
4	3		
4	4		
5	3		
5	4		
6	3		
6	4		

a)Représenter le nuage de points associés à la série double de caractère (x ;y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
Placer le point moyen G du nuage.
b) Calculer la covariance Cov(x ;y) de la série double de caractère (x ;y).
c) Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à 0,81.
3. Soit (D) la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : y = 0,43x + 1,34.
4. Selon l'ajustement réalisé, quelle pour être le nombre de pièces d'habitation d'une famille de 7 enfants ?

EXERCICES

1 On a mesuré de jeunes basketteurs lors d'un stage. Les tailles, en cm, sont les suivantes :
165 175 187 165 170 181 174 184 171 166 178 177 176 174 176

1. Regrouper ces tailles par classes d'amplitude 5, la première étant [165 ;170[, puis dresser le tableau des effectifs et des effectifs cumulés croissants de la série obtenue.
2. Calculer la taille moyenne de ces basketteurs.
3. Quelle est la taille médiane de ces sportifs ? Justifier.

2 Une station-service a noté les achats de Gazole pour une journée donnée. Les résultats, répartis en classes (intervalles), sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Volume en litres	Nombre de clients
]0;10]	47
]10;20]	108
]20;30]	173
]30;40]	182
]40;50]	245
]50;60]	168
]60;70]	175
]70; 80]	68
]80; 90]	22
]90;100]	3

1. Calculer le volume moyen acheté par un client. (On arrondira le résultat au dixième)
2. Construire l'histogramme de cette série statistique.
3. a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
 b) Déterminer graphiquement la valeur de la médiane de cette série et en donner une signification.
 c) Retrouver la médiane par un calcul.

3 Une étude des achats d'un échantillon de clients d'une grande surface a donné, un vendredi soir, les résultats suivants :

Classes d'achats en francs	Nombre de clients
$[2500; 3500[$	24
$[3500; 4000[$	32
$[4000; 4500[$	51
$[4500; 5000[$	70
$[5000; 5250[$	47
$[5250; 5500[$	41
$[5500; 6000[$	70
$[6000; 6500[$	58
$[6500; 7000[$	40
$[7000; 8000[$	24
$[8000; 9000[$	3

2. Construire l'histogramme de cette série statistique et le polygone des effectifs.
2. Calculer le montant moyen des achats.
3. a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
 b) Déterminer graphiquement la valeur de la médiane de cette série et en donner une

signification.
c) Retrouver la médiane par un calcul.

4 1. Représenter par un histogramme la répartition des salariés d'une entreprise suivant leur salaire mensuel net (en dizaine de milliers de francs).

Salaire	[8,5; 10[	[10; 12[	[12; 15[	[15; 20]	
Effectif	24	20	9	8	

Quelle est la classe modale ?
2. Calculer le salaire mensuel net moyen.
3. Mesurer la dispersion des salaires en calculant l'écart type de cette distribution.

5 La répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de première donne le tableau suivant :

Taille	Effectif
[145;155[	3
[155 ; 160[	5
[160;165[	6
[165 ;170[	8
[170 ;175[	8
[175 ;185]	6

1. Représenter cette série par l'histogramme des effectifs.
2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Déterminer graphiquement la médiane de cette série statistique puis interpréter le résultat.

6 Le tableau ci-dessous donne la taille moyenne x (en cm) des nouveaux nés en fonction du nombre de l'âge gestationnel y (en semaines)

x_i	30	36	40	41	42	43
y_i	47,5	50,8	52,2	52,5	52,8	53

1. Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal en prenant comme unités :
en abscisse : 1 cm pour 1 semaine
en ordonnée : 2 cm par unité .
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer (D).
4. Selon l'ajustement linéaire réalisé, qu'elle pourrait être la taille d'un nouveau- né de 45 semaines ?

8 D'après BAC D 2009
L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450
Coût de production(en millions de francs)	40	45	50	55
Années	2004	2005	2006	
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	580	650	700	
Coût de production(en millions de francs)	60	65	70	

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X,Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2. a) Calculer le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$.

b) Calculer le coût de production moyen $\overline{Y}$.

3. a) Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance Cov(X, Y) de la série statistique est égale à 1193.

b) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

b) Construire (D) dans le repère (O, I, J).

5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

$\boxed{\textbf{9}}$ Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1980 et 2010.

Année	1980	1985	1990	1995
Rang de l'année x	0	5	10	15
Population en milliers d'habitants y	10	21	25	30

Année	2000	2005	2010
Rang de l'année x	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	36	42	50

1. Représenter le nuage de points associé à la série double (x ; y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
On prendra 1 cm pour 3 sur (OI) et 1 cm pour 4000 habitants sur (OJ).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G.

3.a) Calculer la variance V(x) de x et la variance V(y) de y.

b) Calculer la covariance Cov(x ;y) de la série double (x ; y).

c) Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à 0,99.

4. a) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x.

b) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2016, à un millier .

9

BARYCENTRE

COMMENTAIRES

Ce chapitre vise :
- Définir le barycentre de 2 ou 3 points pondérés ;
- Mettre en œuvre la notion de barycentre dans des problèmes variés

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Définition et notation de point pondéré 2. Définition du barycentre de 2, 3 et 4 points pondérés. 3. Définition de l'isobarycentre de de 2, 3 et 4 points pondérés. 4. Propriétés du barycentre : • homogénéité ; • conservation du barycentre par projection ; • théorème des barycentres partiels ; • ensemble des barycentre de deux points ; • réduction de la somme	☞Traduire par une égalité vectorielle qu'un point est barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés. ☞ Reconnaitre à partir d'une égalité vectorielle le barycentre de 2, 3 et 4 points pondérés ☞ Construire le barycentre de 2 points pondérés : - en utilisant une égalité vectorielle ; - en utilisant le partage d'un segment vu en 4ème . ☞ Construire le barycentre de 3 ou 4 points pondérés : - en utilisant une égalité vectorielle ; - en utilisant les barycentres partiels. ☞ Exprimer un point donné d'une droite graduée comme barycentre de 2 points pondérés : - par lecture graphique ; - par une relation vectorielle. ☞ Exprimer un point donné d'un plan comme le barycentre de 3

$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ $(a + b \neq 0)$ • Coordonnées du barycentre coordonnées du barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés ; 5. Définition d'une ligne de niveau. 6. Nature des lignes de niveau de : $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$ (a+b ≠0) $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	autres points donnés par une égalité vectorielle. ☞ Démontrer qu'un point donné est barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés à partir d'une égalité vectorielle. ☞ Utiliser la réduction vectorielle pour ; - simplifier des relations vectorielles ; - construire géométriquement un barycentre. ☞ Calculer les coordonnées du barycentre de 3, 3 ou 4 points pondérés. ☞ Utiliser les barycentres partiels pour résoudre des problèmes de concours et d'alignement. ☞ Déterminer et construire des lignes de niveau des applications $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$ (a+b ≠0) ; $M \mapsto \frac{MA}{MB}$.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

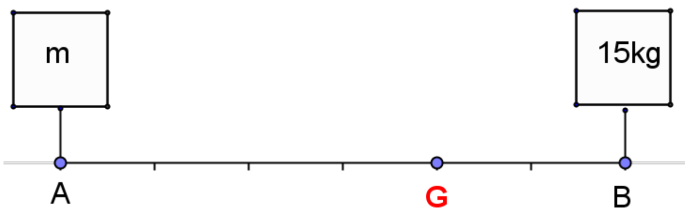
Activité 1

Une tige AB rigide de longueur 60 cm, de masse négligeable, porte à ses extrémités deux solides de masse m et 15 kg.

G est un point situé entre A et B.

1. Sachant que GA = 40 cm et que la tige est en équilibre, quelle est la masse du solide qu' il faut placer en A ?

L'expérience montre que la tige est en équilibre lorsque : $m \times GA = 15 \times GB$.



2. Si m = 21 kg, déterminer la position du point G.

Activité 2

Soit A et B deux points du plan ; a et b deux nombres réels tels que a + b ≠ 0.

1. Démontrer qu'il existe un unique point G tel que : $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

COURS

I. BARYCENTRE DE 2, 3 ET 4 POINTS PONDERES

1. Barycentre de deux points pondérés

Définition 1

On appelle **point pondéré** tout couple (A, a) où A est un point du plan et a un nombre réel .

Définition 2

Soient a et b deux nombres réels tels que $a + b \neq 0$.
On appelle **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b), l'unique point G tel que :
$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On note $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ ou G = bar

A	B
A	B

Conséquence

$G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Exemple

Soit A et B deux point donnés.
Construire le barycentre G des points pondérés (A, -5) et (B, 2).

G = bar

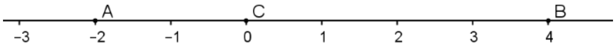
A	B
-5	2

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercices

$\boxed{1}$ A, B et G sont des points tels que : $\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB}$.
Déterminer un couple (a ; b) tel que G soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

$\boxed{2}$ Ecrire chaque point comme étant le barycentre des deux autres :



2. Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C,c), l'unique point G tel que :
$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Remarque :
On définit de manière analogue le barycentre de 4 points pondérés.

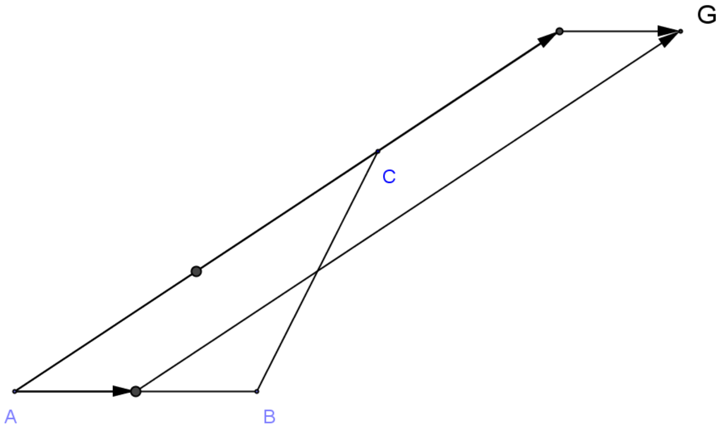
Conséquence :
$G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Exemple
Soit ABC un triangle.
Construire le barycentre G des points pondérés (A, -2), (B, 1) et (C, 3).

G = bar

A	B	C
-2	1	3

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



II. ISOBARYCENTRE DE 2, 3 ET 4 POINTS PONDERES

1. Isobarycentre de 2 points

Définition

On appelle isobarycentre de 2 points, le barycentre de ces 2 points affectés par un même coefficient non nul.

Propriétés

- l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu de [AB] .
- G est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2. Isobarycentre de 3 ou 4 points

Définition

On appelle isobarycentre de 3 ou 4 points, le barycentre de ces 3 ou 4 points affectés par un même coefficient non nul.

Propriétés

Soit ABC un triangle.

- L'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .
- G est le centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

III. PROPRIETES DU BARYCENTRE

1. Homogénéité

Propriété

Le barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul.

Exemple

- Si G = $\text{bar}\{(\text{A}, 60), (\text{B}, 25)\}$ alors Si G = $\text{bar}\{(\text{A}, 12), (\text{B}, 5)\}$.
- Si G = $\text{bar}\{(\text{A}, 1), (\text{B}, -2), (\text{C}, -1)\}$ alors Si G = $\text{bar}\{(\text{A}, -1), (\text{B}, 2), (C, 1)\}$.

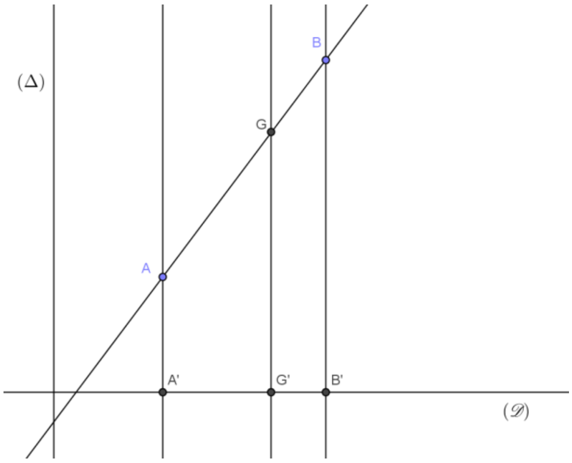
2. Conservation du barycentre par projection

Propriété

Le projeté du barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés est le barycentre des projeté de ces 2, 3 ou 4 points affectés des mêmes coefficients.

On dit que la projection conserve le barycentre.
Exemple : Soit G = $\text{bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$.
Soit A', B' et G' les projetés respectifs des point A, B et G sur (D) parallèlement à (Δ).

On a : G’ = bar$\{(A', 1), (B', 2)\}$



3. Barycentre partiel

Propriété

Soient A, B et C trois points. a, b et c trois nombres réels tels que a + b + c $\neq 0$ et a + b $\neq 0$.

Si $\begin{cases} \mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}, \mathrm{a}), (\mathrm{B}, \mathrm{b}), (\mathrm{C}, \mathrm{c})\} \\ \mathrm{H} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}, \mathrm{a}), (\mathrm{B}, \mathrm{b})\} \end{cases}$ Alors $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{H}, \mathrm{a}+\mathrm{b}), (\mathrm{C}, \mathrm{c})\}$

Exemple

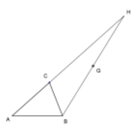
Soit ABC un triangle.

Construire le barycentre G des points pondérés (A, -2), (B, 1) et (C, 3).

$$G = bar \begin{array}{ccc} A & B & C \\ -2 & 1 & 3 \end{array}$$

Soit H = $bar\{(A, -2), (C, 3)\}$ *(-2+ 3 ≠0) . Donc G =* $bar\{(H, 1), (B, 1)\}$.

On a : $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AC}$ *et G est le milieu de [HB].*



4. Ensemble des barycentres de 2 ou 3 points pondérés

Propriété 1

• L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).
• Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients de même signe.
• (AB)$-]AB[$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients de signes contraires.

Propriété 2

L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

5. Réduction vectorielle

Propriété 1

Si G est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors pour tout point M du plan, on a :
$\mathrm{a}\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \mathrm{b}\overrightarrow{\mathrm{MB}} = (\mathrm{a}+\mathrm{b})\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

Propriété 2

Si G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) alors pour tout point M du plan, on a :
$\mathrm{a}\,\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \mathrm{b}\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \mathrm{b}\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

Exercice

ABC est un triangle.
Soit G le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}, 1)$, $(\mathrm{B}, -2)$ et (C, 4) .
Déterminer et construire l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|$ = 12.

6. Coordonnées du barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés

Propriété 1

Soit (O, I, J) un repère du plan. Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{y_B})$
Si G est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors : $\mathrm{G}\left(\frac{\mathrm{a}x_\mathrm{A} + \mathrm{b}x_\mathrm{B}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\ ;\ \frac{\mathrm{ay_A} + \mathrm{by_B}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)$.

Propriété 2

Soit (O, I, J) un repère du plan. Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{y_A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ \mathrm{y_B})$ et $\mathrm{C}(x_\mathrm{C}\ ;\ \mathrm{y_C})$
Si G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) alors :
$\mathrm{G}\left(\frac{\mathrm{a}x_\mathrm{A} + \mathrm{b}x_\mathrm{B} + \mathrm{c}x_\mathrm{C}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\ ;\ \frac{\mathrm{ay_A} + \mathrm{by_B} + \mathrm{c\,y_C}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right)$.

Exemple

Soit A(4 ; 0) et B(5 ;8).

Déterminer les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(\mathrm{A}, 2)$ et $(\mathrm{B}, -3)$.

On a : $\begin{cases} x_G = \frac{2\times 4 + (-3)(5)}{-1} = 7 \\ y_G = \frac{2\times 0 + (-3)(8)}{-1} = 24 \end{cases}$ *Ainsi* $G(7; 24)$

IV. LIGNES DE NIVEAU

1. Définition

Soit k un nombre réel et f une application du plan $\mathcal{P}$ dans IR .
On appelle ligne de niveau k de f, l''ensemble des points M du plan tel que : f(M) = k.

2. Lignes de niveau de M $\mapsto$ aMA^2 + bMB^2 (a + b ≠ 0)

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés du plan tels que : a + b ≠ 0 et G est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).
Soit k un nombre réel .
Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans IR définie par : f(M) = aMA^2 + bMB^2 .

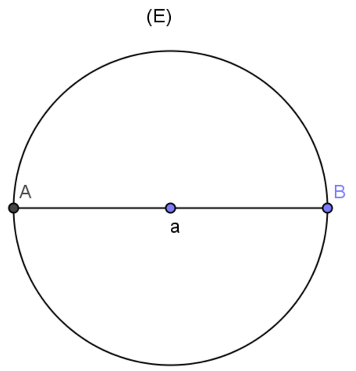
Propriété

• Pour tout point M du plan, on a : f(M) = $(a+b)MG^2$ + f(G) . (forme réduite de f(M))
• La ligne de niveau k de f est soit $\emptyset$, soit $\{G\}$ soit un cercle de centre G.

Exemple

Soit A et B deux points distincts du plan.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \mathrm{AB}^2$

Posons pour tout point M du plan, f(M) = $MA^2 + MB^2$.
(E) est la ligne de niveau AB^2 *de f.*
La somme des coefficients est non nulle, notons G le milieu de [AB].
Pour tout point M du plan, on a : f(M) = $2MG^2$ *+ f(G).*
f(G) = $GA^2 + GB^2 = \frac{1}{2}AB^2$
Donc, pour tout point M du plan, on a : f(M) = $2MG^2 + \frac{1}{2}AB^2$.
M ∈ (E) $\Leftrightarrow 2MG^2 + \frac{1}{2}AB^2 = AB^2 \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}AB$.
Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{2}AB$.
Figure



2. Lignes de niveau de M $\mapsto \frac{\mathbf{MA}}{\mathbf{MB}}$

Soit A et B deux points distincts du plan et f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans IR définie par :
f(M) = $\frac{\text{MA}}{\text{MB}}$.

Propriété

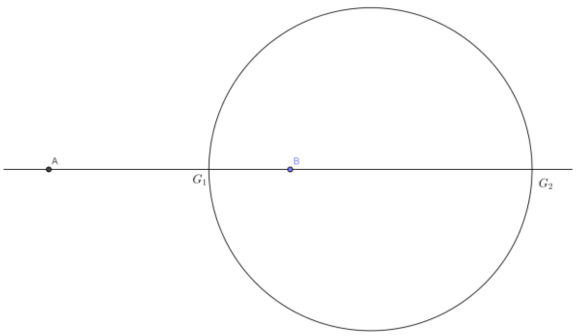
> Soit k un nombre réel strictement positif et différent de 1.
> La ligne de niveau k de f est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$
> où $\text{G}_1 = \text{bar}\{(\text{A},1),(\text{B},\text{k})\}$ et $\text{G}_2 = \text{bar}\{(\text{A},1),(\text{B},-\text{k})\}$.

Exemple

Soit A et B deux points distincts du plan.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2$.

M ∈ (E) ⟺ $\text{MA} = 2\text{MB}$
M ∈ (E) ⟺ $\text{MA}^2 = 4\text{MB}^2 \Leftrightarrow \text{MA}^2 \ -4\text{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow \ \left(\overrightarrow{\text{MA}} + 2\overrightarrow{\text{MB}}\right)\left(\overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}}\right) = 0$.
Posons $\text{G}_1 = \text{bar}\{(\text{A},1),(\text{B},2)\}$ et $\text{G}_2 = \text{bar}\{(\text{A},1),(\text{B},-2)\}$.
Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{\text{MA}} + 2\overrightarrow{\text{MB}} = 3\overrightarrow{\text{MG}_1}$ et $\overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}} = -\overrightarrow{\text{MG}_2}$

Donc : M ∈ (E) ⟺ $3\overrightarrow{\text{MG}_1}.\left(-\overrightarrow{\text{MG}_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MG}_1}.\overrightarrow{\text{MG}_2} = 0$
(E) est le cercle de diamètre $[\text{G}_1\text{G}_2]$.
Figure



TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

A et B sont deux points donnés.

Le point G est tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 5\overrightarrow{\mathrm{GB}}$.

Déterminer les nombres réels a et b tels que le point G soit le barycentre de (A, a) et (B, a).

Solution

$\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On a 1 + 4$\neq$*0, donc G =* $\{(A,1),(B,4)\}$.

Exercice résolu 2

ABC est un triangle. Le point D est défini par : $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Déterminer les nombres réels a, b et c tels que le point D soit le barycentre de (A, a), (B, a) et (C, c).

Solution

$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

On a 2+(-2) + 1$\neq$*0, donc D =* $\{(A,2),(B,-2),(C,1)\}$.

Exercice résolu 3

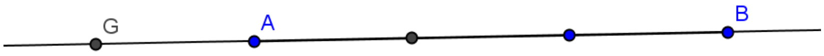
A et B sont deux points distincts du plan. Construire dans chaque cas le barycentre G de :

a) $(\mathrm{A}, -6)$ et $(\mathrm{B}, -6)$; b) $(\mathrm{A}, -4)$ et $(\mathrm{B}, 1)$.

Solution

a) G = bar $\{(A,-6),(B,-6)\}$. *G est l'isobarycentre de A et B donc G est le milieu de [AB].*

b) G = bar $\{(A,-4),(B,1)\}$ *donc* $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



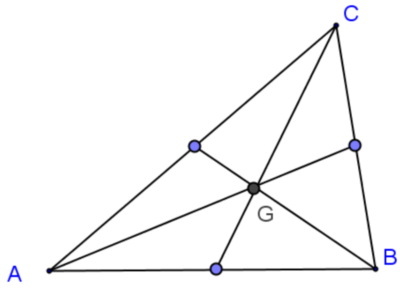
Exercice résolu 4

ABC est un triangle. Construire dans chaque cas le barycentre G de :

a) $(\mathrm{A}, 1)$, $(\mathrm{B}, 1)$ et $(\mathrm{C}, 1)$; b) $(\mathrm{A}, 1)$, $(\mathrm{B}, 1)$ et $(\mathrm{C}, 2)$; c) $(\mathrm{A}, 2)$, $(\mathrm{B}, 5)$ et $(\mathrm{C}, -1)$.

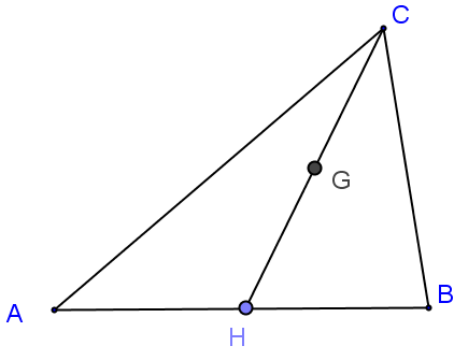
Solution

a) $G = bar\ \{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ *donc G est le centre de gravité du triangle ABC.*



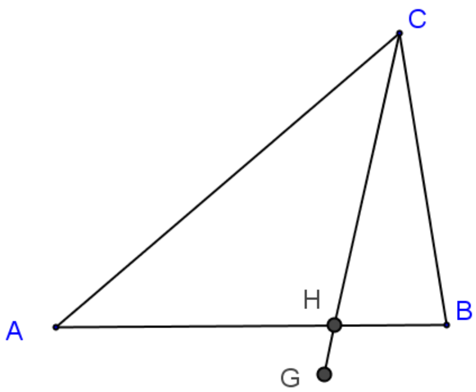
b) Soit $H = bar\{(A,1),(B,1)\}$. *H est le milieu de [AB].*

Donc $G = \{(H,2),(C,2)\}$. *G est le milieu de [HC].*



c) Soit $H = bar\{(A,2),(B,5)\}$. *Donc* $G = \{(H,7),(C,-1)\}$.

On a : $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{HC}$.



EXERCICES

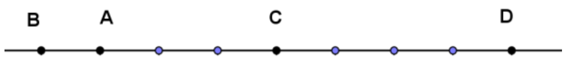
$\boxed{1}$ A et B sont deux points distincts.
Construire, s'il existe, le barycentre :
a) G des points pondérés (A; 1) et (B; 3).
b) H des points pondérés (A; 2) et (B; 2).
c) J des points pondérés (A; -1) et (B; 2).
d) K des points pondérés (A; -2) et (B; -6).
e) L des points pondérés (A; -2) et (B; 2).

$\boxed{2}$ ABC est un triangle. Construire le barycentre :
a) G des points pondérés (A; 1), (B; 3) et (C, 4).
b) H des points pondérés (A; 2), (B; 2) et (C, 2).
c) J des points pondérés (A; -1), (B; 2) et (C, 3).
d) K des points pondérés (A; 2), (B; -2) et (C,4).
e) L des points pondérés (A; 2), (B; 3) et (C,-6).

$\boxed{3}$ Déterminer les nombres réels a et b tels que le point G défini ci-dessous soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .
a) $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

$\boxed{4}$ Déterminer les nombres réels a, b et c tels que le point G défini ci-dessous soit le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).
a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
b) $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{2GC} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\boxed{5}$ Déterminer dans chaque cas, sans calcul, les nombres réels a et b tels que :
a) C soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) ;
b) C soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (D, b) .
c) D soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .
d) A soit le barycentre des points pondérés (C, a) et (B, b) .



$\boxed{6}$ Dans le plan muni d'un repère (O, J, J), on considère les points A(8 ; -1) et B(5 ; 3).
1. Calculer les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).
2. Déterminer des nombres réels a et b tels que H(-1 ; 0) soit le barycentre des points pondérés (A ; a) et (B; b).
3. Peut-on trouver m et n tels que O soit le barycentre des points pondérés (A; m) et (B; n)?

$\boxed{7}$ Soit A et B deux points tels que AB = 4. On considère le barycentre G des points pondérés (A; 1) et (B; 3) et le barycentre K des points pondérés (A; 3) et (B; 1).
1. Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
2. Démontrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

$\boxed{8}$ Soit ABCD un quadrilatère.
Construire le barycentre G des points pondérés (A; 1), (B; 1), (C; -2) et (D; -1).

9 Soit ABCD un parallélogramme.
Construire l'isobarycentre G des points A, B, C et D.

10 Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pondérés (A;1), (B;1) et (C;1).
1. Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (C; 1) et (C'; 2).
2. En déduire la position de G sur le segment [CC'].
3. Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on en déduire ?

11 Soit ABCD un quadrilatère.
On désigne par K, L, M, N les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA] et par G l'isobarycentre des quatre points A, B ,C et D.
Prouver que G est le milieu de [KM] et de [NL].
Que peut-on dire du quadrilatère KLMN ?

12 Soit ABCD un parallélogramme.
On définit les points P et Q par : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;
Q est le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A.
1. Faire une figure.
2. Ecrire P comme barycentre de A et B ; Q comme barycentre de A et D ;
C comme barycentre de A, B et D.
3. Démontrer que Q = bar{(P,3), (C,-1)}.
Que peut-on en déduire de la position des points Q, P et C ?

13 Soit D = bar{(A,4) ;(B,-3) ;(C,5)} et H le point défini par : $\overrightarrow{BH} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que D = bar{(A,2) ;(H,1)}.

14 ABCD est un parallélogramme.
Déterminer les nombres réels a, b et c tels que le point D soit le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

15 On donne les points I, J, K et L tels que $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL} = \vec{0}$.
Déterminer les nombres réels a, b et c tels que le point I soit le barycentre des points pondérés (J, a), (K, b) et (L, c).

16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, J, J), on considère les points A(0 ; -1), B(8 ; 5) et C(8 ;-5).
1. Calculer les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; -1), (B ; 1) et (C,-1).
2. Démontrer que le quadrilatère ABCG est un losange.

17 ABC est un triangle équilatéral.
Soit D le symétrique de B par rapport à A.
G est le point défini par : $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -3)$, $(C, 2)$.

18 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B et de sens direct tel que $AB = 5$ cm. On note O le milieu de [AC] et D le symétrique de B par rapport à O.
1.Ecrire D comme barycentre de O et B.
2. Démontrer que D est le barycentre de $(A; 1); (B; -1); (C; 1)$.
3. Démontrer que ABCD est un carré.

19 Soit ABCD un parallélogramme, I le milieu de [AB] et E le point de [ID] tel que IE = $\frac{1}{3}$ ID.
Il s'agit d'établir que A, E et C sont alignés.
1. Ecrire E et C comme barycentre de A, B et D.
2. En déduire que E est le barycentre de (A, 2) et (C, 1) et conclure.

20 Soit ABC un triangle.
1. Construire les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

21 Soit O et B deux points distincts et (E) l'ensemble des points M du plan tels que $2MO^2 - MB^2 = 25$.
1. Vérifier que $B \in (E)$.

2. Déterminer et construire (E).

$\boxed{22}$ Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 6cm$ et $BC = 5cm$; K le milieu de $[BC]$ et T le barycentre de(A,3), (B,1) et $(C, 1)$.
1. Faire une figure.
2. Soit les points H et I tels que
$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
a) Construire H et I.
b) Démontrer que les droites (IC) et (BH) passent par T .

$\boxed{23}$ A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$ cm.
On considère l'application
$f: M \longmapsto 4MA^2 - MB^2$
Soit I le milieu de [AB] et G le barycentre de$(A, 4)$ et $(B, -1)$.
1. Calculer $f(I)$et $f(G)$.
2. Soit (E) la ligne de niveau 27 de f. Déterminer (E).

$\boxed{24}$ Soit ABC un triangle équilatéral tel que : AB = a (a > 0).
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + 5MB^2 = 3a^2$.
1. Vérifier que C appartient à (Γ).
2. Déterminer et construire (Γ).

$\boxed{25}$ Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 3$ cm.
1. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tels que $MA = MB$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $MA = 2MB$.

$\boxed{26}$ A et B sont deux points du plan tels que AB = 2a (a > 0).
Déterminer et construire l'ensemble (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + 2MB^2 = 8a^2$.

$\boxed{27}$ Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$ cm .
1. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 12$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (C') des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$
3. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|$

$\boxed{28}$ Soit ABCD un carré de côté a (a > 0).
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = AB$.

$\boxed{29}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
1.a) Démontrer que D est le barycentre du système : {(A, 3) ; (B, −2) ; (C, 3)}.
b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].
2. Démontrer que : $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$
3. Calculer DA^2 et DB^2.

$\boxed{30}$ ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
1. Prouver que le point B appartient à (E).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix de M.
3. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, −4) et (C, 1).
Prouver que $GM = 3\sqrt{3}$ et en déduire la nature de (E) puis tracer (E).

$\boxed{31}$ Soit ABC un triangle.
Soit I le barycentre de (B, 1), (C, 2), J celui de (A , −3), (C, 2) et K celui de (B, 1), (A, −3).

Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.

10

ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMETRIE

COMMENTAIRES

► Les notions d'angle orienté, de mesure principale d'un angle orienté, du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté ont été vues en seconde.

► **Ce chapitre vise :**

- à prolonger l'étude des angles orientés ;
- à définir le cosinus, le sinus et la tangente d'un nombre réel ;
- à utiliser le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions trigonométriques.

► **Pour ce chapitre,** on évitera tout formalisme excessif et les abus de notations seront tolérés dans la mesure où le contexte permet de lever toute ambiguïté.

► **Remarques :**

● Les congruences sont hors programmes. On s'abstiendra donc de **toute notation de la forme ≡ [2π]**

● Sont hors programme :

- les expressions de cosa, sina et tana en fonction de $\tan\frac{a}{2}$;
- les équations trigonométriques avec paramètres.

► Les résolutions d'inéquations seront traités sous forme d'exercices sans complexité.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Mesures d'un angle orienté de vecteurs. 2. Mesures de $\left(\widehat{k\vec{u}, \overrightarrow{k'v}}\right)$ 3. Somme et différence d'angles orientés. 4. Double d'un angle orienté. 5. Angle au centre orienté, angle inscrit orienté. 6. Propriété des angles inscrits orientés. 7. Cocyclicité . 8. sinus, cosinus et tangente d'un nombre réel. 9. Relations entre les lignes trigonométriques. 10. Formules d'addition 11. Formules de duplication et de linéarisation 12. Réduction de acosx+bsinx. 13. Equations trigonométriques du type : cos x = cos a ; sinx = sin a ; tanx = tan a 14. Représentation graphiques des fonctions circulaires : $x \longmapsto \cos x$ $x \longmapsto \sin x$ $x \longmapsto \tan x$	☞ Placer sur le cercle trigonométrique le point image d'un nombre réel. ☞ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ☞ Justifier que deux réels donnés sont des mesures du même angle orienté. ☞ Démontrer que trois points sont alignés en utilisant l'angle orienté double. ☞ Démontrer qu'un point appartient à un cercle. ☞ Démontrer que 4 points sont cocycliques. ☞ Déterminer les lignes trigonométriques de $-x$, $x + \pi$, π-x, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ à partir de celle de x. ☞ Transformer des expressions trigonométriques en utilisant les formules d'addition, de duplication, de linéarisation pour : ☞ Résoudre les équations du type : cos x = a ; sinx = a ; tanx = a ; acosx + bsinx + c = 0 Résoudre des équations se ramenant aux cas précédents. Placer les points images des solutions des équations sur le cercle trigonométrique. ☞ Résoudre des inéquations du type : $\cos x \leq a$ ou $\cos x \geq a$; $\sin x \leq a$ ou $\sin x \geq a$; $\tan x \leq a$ ou $\tan x \geq a$. Résoudre des inéquations se ramenant aux cas précédents. Placer les points images des solutions des inéquations sur le cercle trigonométrique.

COURS

I. Mesures d'un angle orienté de vecteurs

1. Définition

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et θ la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tout nombre réel de la forme $\theta + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On note mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \theta + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Soit ABC un triangle équilatéral direct.
Les nombres réels $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{31\pi}{3}$ *sont des mesures de l'angle orienté* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

2. Propriété

- Si x et y sont deux mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ alors $y = x + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Si x et y sont deux nombres réels tels que $y = x + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors x et y sont deux mesures d'un même angle orienté.

Exemple 1

Justifier que $\frac{19\pi}{7}$ et $-\frac{163\pi}{7}$ sont deux mesures d'un même angle orienté.
On a : $\frac{19\pi}{7} - \left(-\frac{163\pi}{7}\right) = \frac{182\pi}{7} = 26\pi = 2 \times 13\pi$ *donc* $\frac{19\pi}{7}$ *et* $-\frac{163\pi}{7}$ *sont deux mesures d'un même angle orienté.*

Exemple 2

Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est $\frac{198\pi}{5}$.
Déterminons $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $-\pi < \frac{198\pi}{5} + 2k\pi \leq \pi$.
$-\pi < \frac{198\pi}{5} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 < \frac{198}{5} + 2k \leq 1 \Leftrightarrow -19{,}3 < k \leq -19{,}3$. *Il vient k = -20.*
Donc la mesure principale de l'angle est $\frac{198\pi}{5} + 2(-20)\pi = -\frac{2\pi}{5}$.
La mesure principale d'un angle dont une mesure est $\frac{198\pi}{5}$ *est* $-\frac{2\pi}{5}$.

3. Somme et différence d'angles orientés

Définition

Soit x et y deux mesures respectives des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{w},\vec{t}})$.

- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{w},\vec{t}})$ est l'angle orienté dont une mesure est x + y.
- $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) - (\widehat{\vec{w},\vec{t}})$ est l'angle orienté dont une mesure est x − y.

4. Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

Exemple 1

A, B et C sont des points tels que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{5\pi}{6}$.

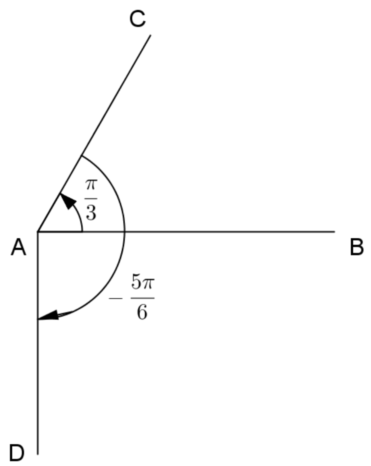
Faire une figure et démontrer que $(AB) \perp (AD)$.

On a : $mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Donc : $mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc $(AB) \perp (AD)$.



Conséquences

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

mes$(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ (1)

mes$(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) =$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ (2)

mes$(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) =$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ (3)

mes$(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}) =$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ (4)

Remarques :

Soit λ et λ' deux nombres réels non nuls.

Si λ et λ' sont de même signes alors mes$(\widehat{\lambda\vec{u},\lambda'\vec{v}}) =$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Si λ et λ' sont de signes contraires alors mes$(\widehat{\lambda\vec{u},\lambda'\vec{v}}) = \pi +$ mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice

A, B et C sont des points tels que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{6}$.

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}})$.

5. Double d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté. On appelle double de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et on noté $2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, l'angle défini par :
$2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Propriété

Soit A, B et C trois points distincts.

A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$).

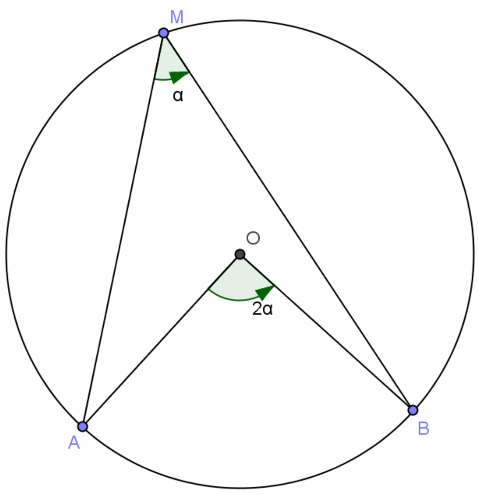
6. Angles orientés et cercle

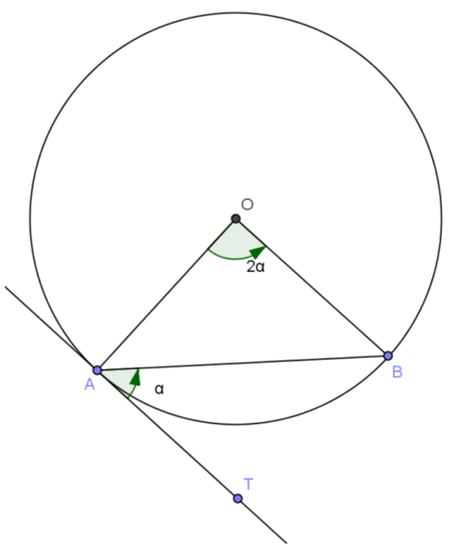
Propriété 1

Soit (C) un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle.
(1) Pour tout point M distinct de A et B, on a :

M $\in$ (C) $\Leftrightarrow$ 2mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = $ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

(2) T (distinct de A) appartient à la tangente à (C) en A $\Leftrightarrow$ 2mes$(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = $ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$





Conséquence

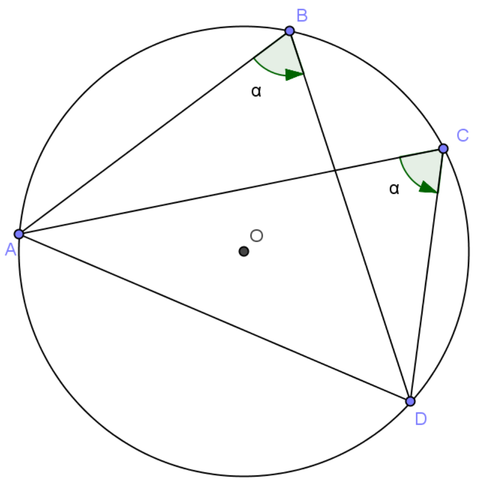
Soit (C) un cercle de diamètre [AB].

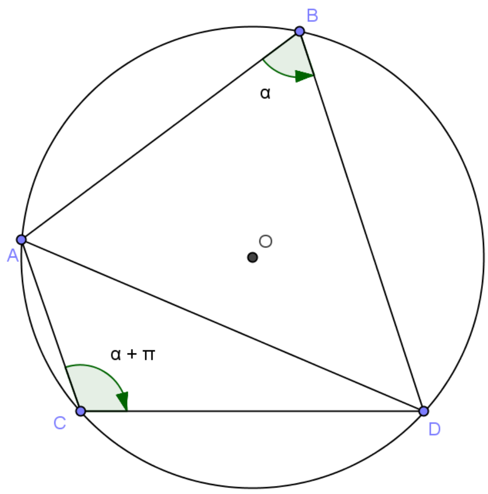
Pour tout point M distinct de A et B, on a : M ∈ (C) ⟺ $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MA}},\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈$\mathbb{Z}$).

Propriété 2

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

A, B, C et D sont cocycliques $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AC}},\overrightarrow{AD}}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) + k\pi$ (k ∈$\mathbb{Z}$) .





Exercice résolu

Soient ABC un triangle rectangle en B et ADC un triangle rectangle en D.
Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques**.**

ABC est un triangle rectangle en B donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

ADC est un triangle rectangle en D donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Il en résulte que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

*Donc les points A, B, C et D sont cocycliques***.**

II. Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

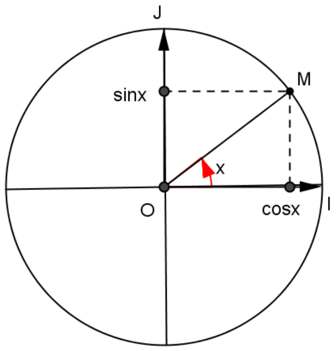
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). (C) le cercle trigonométrique de centre O.

1. Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Définitions

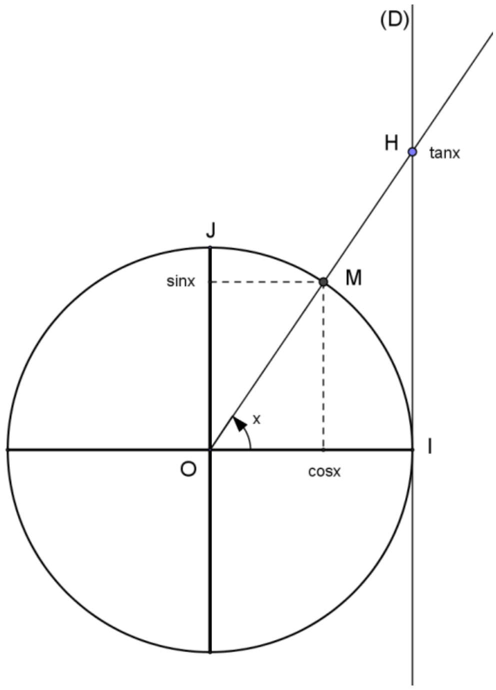
Pour tout réel x, il existe un unique point M de (C) tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

- cos x est l'abscisse de M dans (O; I, J) .
- sin x est l'ordonnée de M dans (O; I, J).
- Si x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$), tanx = $\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}}$.



Remarque

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$) .
Soit (D) la droite d'équation x = 1 dans le repère (O ; I, J) et H le point d'intersection de (OM) et (D).
tan$x$ est l'ordonnée du point H dans le repère (O ; I, J)



Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos$x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$t$anx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Propriétés immédiates 1

Pour tout $x \in$ IR :
$-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall$ k $\in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
Pour tout $x \in \text{IR} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$: $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Exemple

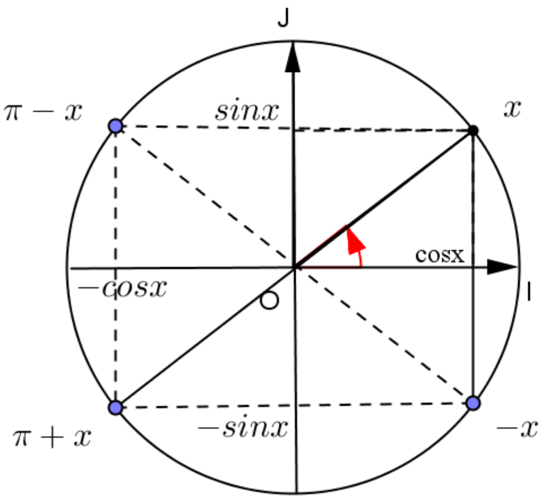
Sachant que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ et de $\tan\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$ **.**

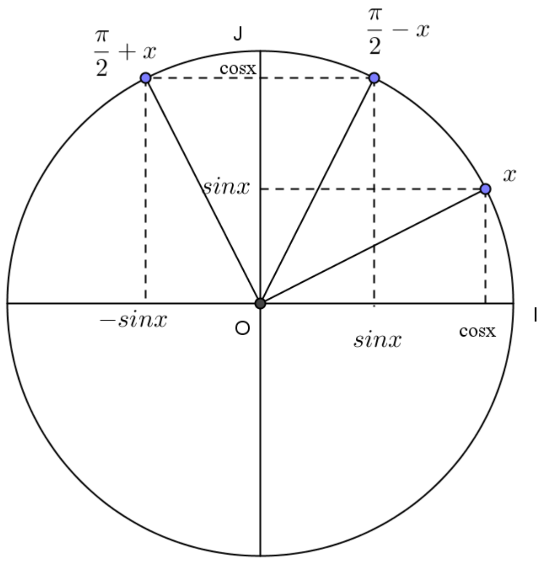
On a : $sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\frac{\pi}{12} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *donc* $sin\frac{\pi}{12} > 0.$

Donc $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. *Il vient* $tan\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$ **.**

Lignes trigonométriques d'angles associés





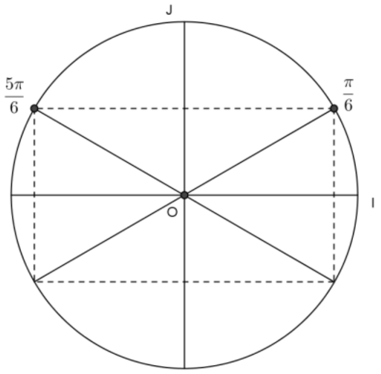
Propriétés 2

Pour tout nombre réel x,
(1) $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$
(2) $\cos(x+\pi) = -\cos x$; $\sin(x+\pi) = -\sin x$
(3) $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$
(4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Exemple

Déterminer $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$ et $\tan\frac{5\pi}{6}$.

Plaçons $\frac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.



$cos\frac{5\pi}{6} = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $sin\frac{5\pi}{6} = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

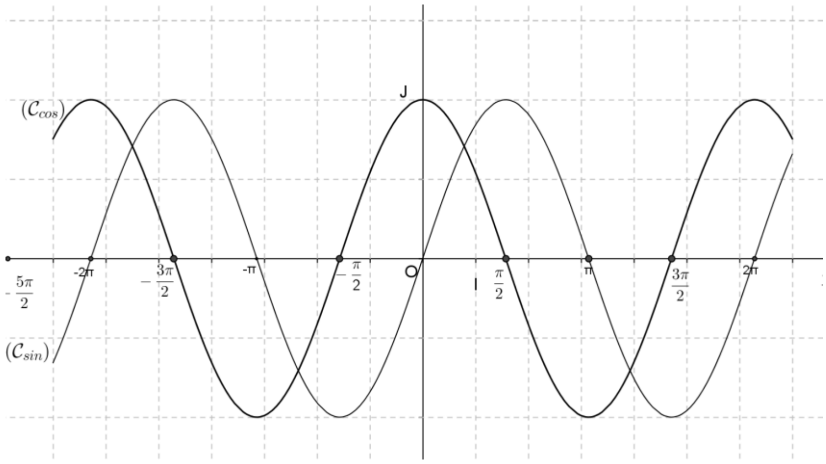
$tan\frac{5\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Représentation graphique des fonctions sinus, cosinus et tangente

• La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

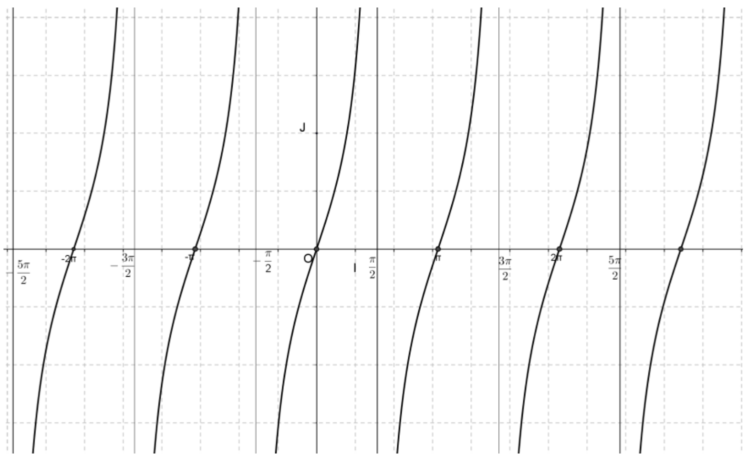
• Les égalités $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ permettent de dire que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus



• La fonction tan est impaire.
• L'égalité $\tan(x + \pi) = \tan x$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈ ℤ), permet de dire que la fonction tan est périodique de période π .

Représentation graphique de la fonction tan



3. Formules d'addition

Propriétés

Quels que soient les nombres réels a et b,
cos(a − b) = cos a cos b + sin a sin b (1)
cos(a + b) = cos a cos b − sin a sin b (2)
sin(a − b) = sin a cos b − cos a sin b (3)
sin(a + b) = sin a cos b + cos a sin b (4)

Exemple

Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ à l'aide de l'égalité $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

$$cos\,\frac{\pi}{2} = cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = cos\,\frac{\pi}{3}\,cos\,\frac{\pi}{4} + sin\,\frac{\pi}{3}\,sin\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il vient $cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Sin $\frac{\pi}{2} = sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{3}\,cos\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{3}\,sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

Il vient $sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. Formules de duplication

Propriétés

Quel que soit le nombre réel a ,
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ (1)
$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ (2)

5. Formules de linéarisation

Propriétés

Quel que soit le nombre réel a,
$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ (1) ; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ (2) .

Exemple

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ à l'aide des formules de linéarisation.

$cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\ cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ *or* $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *donc* $cos\frac{\pi}{8} > 0$. *Il vient* $cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

On trouve $sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

6. Réduction de acos$x$ + bsin$x$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$.
Quel que soit le nombre réel x, acos$x$ + bsin$x$ s'écrit : **acos$x$ + bsin$x$ = rcos$(x-\alpha)$**
avec r = $\sqrt{a^2+b^2}$ et α un nombre réel tel que $\begin{cases} cos\alpha = \frac{a}{r} \\ sin\alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$.
L'écriture rcos$(x-\alpha)$ est appelée **forme réduite** de acos$x$ + bsin$x$.

Exemple

Donner la forme réduite de $\sqrt{3}cosx + sinx$.

Ecrivons la forme réduite : $\sqrt{3}cosx + sinx = rcos(x-\alpha)$

Il vient : $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$ *et* $\alpha \in]-\pi;\pi]$ *tel que* $\begin{cases} cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $\alpha = \frac{\pi}{6}$

On en déduit $\sqrt{3}cosx + sinx = 2cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

III. Résolution d'équations

Propriétés 1

Quels que soient les nombres réels a et b :

● cos$a$ = cosb ⇔ $\begin{cases} a = b + \mathrm{k} \times 2\pi \\ \quad ou \\ a = -b + \mathrm{k} \times 2\pi \end{cases}$ $, k \in \mathbb{Z}$;

● sin$a$ = sinb ⇔ $\begin{cases} a = b + \mathrm{k} \times 2\pi \\ \quad ou \\ a = \pi - b + \mathrm{k} \times 2\pi \end{cases}$ $, k \in \mathbb{Z}$

Exemple 1

Résoudre dans IR l'équation (E) : cos $x = $ cos $\frac{\pi}{5}$.

$$cos\ x = cos\ \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k \times 2\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{5} + k \times 2\pi \end{cases} , k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ *ou* $x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2

Résoudre dans IR l'équation (E) : cos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\ x = cos\ \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases} , k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi[$, l'équation (E) : sin $\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow sin\ \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = sin\ \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \end{cases} , k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de (E) sont : $\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}$.

Exemple 4

Résoudre dans IR l'équation (E) : sin $2x = -\frac{1}{2}$ et représenter les images des solutions de (E).

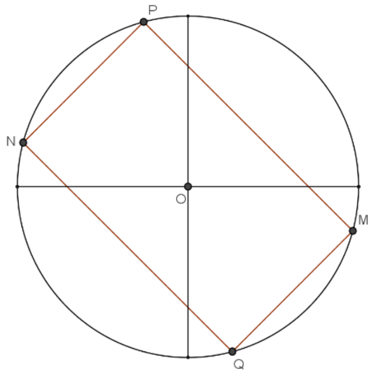
● sin $2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow sin2x = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

● *Représenter les images des solutions de (E).*

Les nombres $-\frac{\pi}{12} + k\pi$ *sont représentés par 2 points* $M\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $N\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ *obtenus respectivement*

pour k = 0 et k = 1.
Les nombres $-\frac{\pi}{12}+k\pi$ *sont représentés par 2 points* $P\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ *et* $Q\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ *obtenus respectivement pour k = 0 et k = -1.*



Le quadrilatère MPNQ est un rectangle.

Propriété 2

Quels que soient les nombres réels a et b tels que tan a et tan b soient définis,
tan a = tan b $\Leftrightarrow$ $a = b + k\times\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

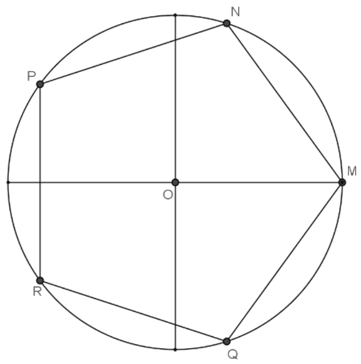
Exemple 1

Résoudre dans IR l'équation (E) : $\tan x = -\sqrt{3}$.
$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme : $-\frac{\pi}{3} + k\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2

Résoudre dans IR l'équation (E) : $\tan\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$, puis représenter les images des solutions de (E).

$\tan\left(\frac{5x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{5x}{2}\right) = \tan(0) \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \quad, k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme : $\frac{2k\pi}{5} \quad, k \in \mathbb{Z}$.
● *Représenter les images des solutions de (E).*
Les nombres $\frac{2k\pi}{5}$ *sont représentés par 5 points* $M(0)$, $N\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $P\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $Q\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$ *et* $R\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$ *obtenus respectivement pour k = 0, k = 1, k = 2, k = -1 et k = -2.*



MNPRQ est un pentagone régulier.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

Résoudre dans IR, l'équation (E) : cos$x = -\frac{1}{2}$.

Solution

$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, *il vient :*

$cosx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow cosx = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow cos\ x = cos\ \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ *ou* $x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 2

Résoudre dans IR, l'équation (E) : sin$x$ = 0 .

$sin0 = 0$, *il vient :*

$sinx = 0 \Leftrightarrow sinx = sin\,0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k \times 2\pi \\ ou \\ x = \pi - 0 + k \times 2\pi \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = k \times 2\pi$ *ou* $x = \pi + k \times 2\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Remarque : $x = \mathrm{k} \times 2\pi$ ou $x = \pi + \mathrm{k} \times 2\pi$ $,k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \mathrm{k}\pi$, $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 3

Résoudre dans IR, l'équation (E) : $\sqrt{3}$ tan$x$ = 1 .

Solution

$\sqrt{3}$ *tanx = 1* $\Leftrightarrow$ *tanx =* $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *tan* $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, *il vient*

: tanx = $\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow tanx = tan\ \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 4

Résoudre dans [0 ; 4π] l'équation (E) : $2\cos(2x) + 1 = 0$.

$2cos(2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\ (2x) = cos\ \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \\ ou \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- *Déterminons* $k \in \mathbb{Z}$, *tel que* $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq 4\pi$. *On trouve* $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Il vient les nombres réels de la forme $\frac{\pi}{3} + k\pi$ *qui appartiennent à [0 ; 4π] sont :* $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$.

- *Déterminons* $k \in \mathbb{Z}$, *tel que* $0 \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq 4\pi$.

On trouve $k \in \{1; 2; 3; 4\}$

Il vient les nombres réels de la forme $-\frac{\pi}{3} + k\pi$ *qui appartiennent à [0 ; 4π] sont :* $\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$

.Les solutions de (E) sont : $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Exercice résolu 5

Résoudre dans IR l'équation (E) : $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

Ecrivons la forme réduite : $\sqrt{3}cosx - sinx = rcos(x - \alpha)$

Il vient : $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ *et* $\alpha \in]-\pi; \pi]$ *tel que* $\begin{cases} cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$ *donc* $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

On en déduit $\sqrt{3}cosx - sinx = 2cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Donc (E) $\Leftrightarrow 2cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ ou \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k \times 2\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{4} + k \times 2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

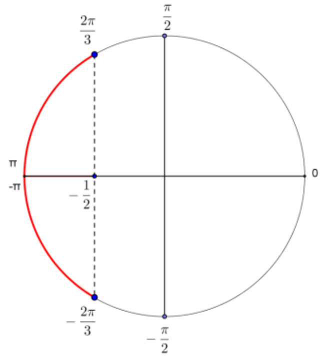
$x = \frac{\pi}{12} + k \times 2\pi$ *ou* $x = -\frac{5\pi}{4} + k \times 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 6

Résoudre dans IR, l'inéquation (I) : $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Utilisons le cercle trigonométrique l'inéquation (I) .

- *Résolvons dans* $]-\pi; \pi]$, $\cos x < -\frac{1}{2}$. (1)



$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, *il vient : l'ensemble des solutions de (1) est* $\left]-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

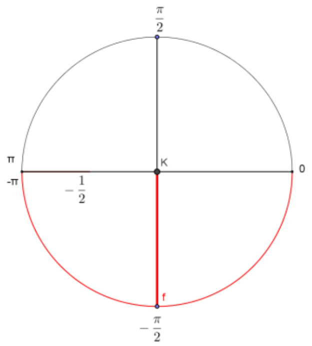
● *L'ensemble des solutions de (I) est la réunion des intervalles de la forme* $\left]-\pi + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ *ou* $\left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 7

Résoudre dans IR, l'inéquation (I) : $\sin x \leq 0$.

Utilisons le cercle trigonométrique l'inéquation (I).

● *Résolvons dans* $]-\pi; \pi]$, $\sin x \leq 0$. (1)



$sin(0) = 0$, *il vient : l'ensemble des solutions de (1) est* $]-\pi; 0]$.

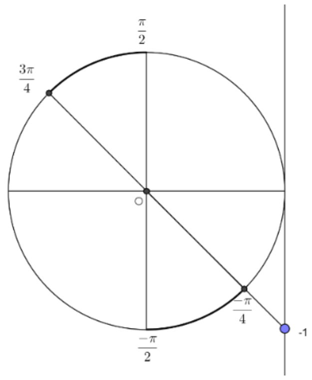
● *L'ensemble des solutions de (I) est la réunion des intervalles de la forme* $]-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 8

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, l'inéquation (I) : $\tan x \leq -1$.

Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Utilisons le cercle trigonométrique l'inéquation (I) :



$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, il vient : l'ensemble des solutions de (I) est $\left]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[$.

EXERCICES

1 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est α .

a) $\alpha = \frac{7\pi}{3}$.

b) $\alpha = -\frac{13\pi}{4}$.

c) $\alpha = \frac{23\pi}{6}$.

d) $\alpha = \frac{125\pi}{2}$.

e) $\alpha = -\frac{47\pi}{5}$.

f) $\alpha = 2014\pi$.

g) $\alpha = \frac{95\pi}{3}$.

h) $\alpha = -\frac{7\pi}{2}$.

i) $\alpha = \frac{19\pi}{4}$.

j) $\alpha = -\frac{19\pi}{11}$.

k) $\alpha = -\frac{67\pi}{6}$.

2 Soit un angle orienté dont une mesure est $\frac{7\pi}{6}$.
Déterminer cinq autres mesures de cet angle orienté.

3 Construire un cercle trigonométrique et placer les images des nombres réels suivants :
$\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $-\pi$; $\frac{25\pi}{2}$; $\frac{2014\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{5}$; 210π .

4 Le plan est muni du repère orthonormé direct (O,I,J).
Sur le cercle trigonométrique (C) de centre O, placer les points A et B d'images respectives $-\frac{89\pi}{8}$ et $-\frac{3\pi}{5}$.
Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AJ})}$, $\widehat{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})}$.

5 A et B sont deux points distincts du plan.
Représenter l'ensemble (E) des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\text{Mes}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = -\frac{5\pi}{6}$;

b) $\text{Mes}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MA}) = \frac{2\pi}{3}$;

c) $\text{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$;

d) $\text{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0$;

e) $\text{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pi$;

f) $\frac{35\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})$.

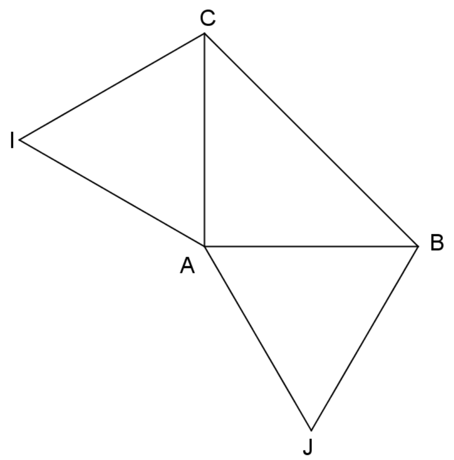
6 Soit ABC un triangle tel que :
$\text{Mes}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$.
1. Faire une figure.
2. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
$\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$.

7 Soit PQR un triangle tel que :
- $-\frac{9\pi}{5}$ est une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP})}$;
- $\frac{22\pi}{5}$ est une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QP})}$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature du triangle PQR.

8 On considère un triangle ABC direct, isocèle et rectangle en A ; on construit les deux triangles équilatéraux indirects AIC et BJA.
(figure ci-dessous)
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
1. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI})}$.
b) En déduire une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI})}$.
2. a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants :
$\widehat{(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JB})}$, $\widehat{(\overrightarrow{JB},\overrightarrow{BA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$.
b) En déduire une mesure de l'angle oriente´ $\widehat{(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{BC})}$.

3. Déduire des questions 3. et 4. une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{BC}})$.
Conclure.



$\boxed{9}$ On considère ABC un triangle et H son orthocentre.
On note A' le pied de la hauteur issue de A.
B' le pied de la hauteur issue de B.
C' le pied de la hauteur issue de C.
K le symétrique de H par rapport à (AB).
1. Démontrer que les points H, A', C et B' sont cocycliques.
2. Démontrer que les points A, K, B et C sont cocycliques.

$\boxed{10}$ Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des nombres réels suivants :
$\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{105\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{131\pi}{6}$; 209π ; -44π.

$\boxed{11}$ Calculer le sinus, cosinus et la tangente des nombres réels $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.
On vérifiera que :
$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{12}$ Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :
$A(x) = \cos(x+\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sin^2(-x)$;
$B(x) = sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x)sin(-x)$;
$C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
$D(x) = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + cos(-x)$;
$E(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + sin(x)$;
$F(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + sin(-\frac{3\pi}{2} - x)$.

$\boxed{13}$ Démontrer que pour tout x de IR :
a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \times sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4} - sin^2 x$;
b) $cos^4 x - sin^4 x = cos2x$;
c) $1 + \cos x = 2cos^2\frac{x}{2}$;
d) $1 - \cos x = 2sin^2\frac{x}{2}$;
e) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

$\boxed{14}$ A l'aide des formules de linéarisation, démontrer que :
$cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{8}cos4x$.
En déduire :
$cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

$\boxed{15}$ On définit un nombre réel x par :
$sinx = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
1.Calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$.
2. Vérifier que : $\cos 4x = \sin x$.
3. En déduire x.

$\boxed{16}$ On définit un nombre réel x par :
$cosx = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
1. Calculer $\cos 2x$.
2. En déduire x .

$\boxed{17}$ Soit x un nombre réel tel que
$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$
Démontrer que : $\tan 2x = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$.

$\boxed{18}$ Soit x un nombre réel tel que

$x \neq \pi + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Démontrer que : $\frac{sinx}{1+cosx} = tan\frac{x}{2}$.

$\boxed{19}$ Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) cos x = cos $\frac{5\pi}{7}$;

b) sin$x$ = sin $\frac{5\pi}{7}$;

c) tan x = tan $\frac{25\pi}{12}$.

$\boxed{20}$ Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) cos$x$ = 0 ;

b) sin$x$ = 0 ;

c) tan$x$ = 0 ;

d) cos$(2x) = -\frac{1}{2}$;

e) cos$(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

f) sin$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

g) $1 + tanx = 0$;

h) 1 - 2cos$(x) = 0$;

i) cos$(4x)$ = cos(x) ;

j) sin$x$ = sin$\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$;

k) cos$(2x)$ + cos$x = 0$;

l) cos$\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ − sin$\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

m) sin$(2x) = -$ sin$x$;

n) $-\sqrt{6}\, cosx + 3\sqrt{2}\, sinx = \sqrt{6}$;

o) $-\ cox(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}$;

p) sin$(2x)$ = cos$^2 x$;

q) cos$(2x)$ + 2sin$x$cos$x$ = 0 ;

r) cos$^2 x$ – sin$^2 x$ = cos5x ;

s) cos$^2 x$ -2sin$x$cos$x$ + 2sin$^2 x$ = 2 ;

t) 2sin$^2 x$ – sin$x$ -1 = 0 ;

u) 2sin$^2 x$ – $\sqrt{3}$sin$x \geq 0$.

$\boxed{21}$ Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) cos$x$ < - 1 ;

b) cos$(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) sin$x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) tan2x < 0 ;

e) cos$(x) > -\frac{1}{2}$;

f) sin$x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $1 + tanx < 0$

h) $\sqrt{3}tanx + 1 < 0$;

i) 1 - 2cos$(x) > 0$;

j) sin$(2x) < 0$;

k) 2cos$\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0$;

l) sin$x \leq$ cos$x$.

$\boxed{22}$ Résoudre dans l'intervalle I donné :

a) 2sin$(2x)$ + 3 = 0 , I = IR .

b) cos^2 2x + 4cos 2x + 3 = 0, I =]-π ; π]

c) cos$\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, I = [0 ; 2π[

d) sin x = sin$(2x)$, I =IR

e) cos$x$ = sin$(2x)$, I =IR

f) $(sinx)^2 = \frac{3}{4}$, I =IR

g) cos$(3x) = sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, I =]-π ; π]

h) $x \in]-2\pi, 2\pi]$,

$-\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sqrt{6}$

i) tan$^2 x$ + (1 + $\sqrt{3}$)tan$x$ + $\sqrt{3}$ = 0,
I = [0 ; 2π[

k) $\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} \geq 0$, I =]-π ; π].

$\boxed{23}$ AOI est un triangle équilatéral avec direct. Les triangles OIJ et IBA sont rectangles isocèles direct respectivement en O et I.

Le but de l'exercice est de calculer l'angle Mes$\left(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AB}\right)$ et d'en tirer une conséquence.

1. Faire une figure avec OA = 5 cm.
2. Donner la mesure principale des angles $\left(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AI}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB}\right)$
3. Quelle est la nature du triangle AJO ? En déduire la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AO}\right)$.
4. En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{AB}\right)$ et conclure.

11

TRANSFORMATIONS DU PLAN

COMMENTAIRES

► Utiliser les translations, les rotations et les homothéties pour
– démontrer des propriétés
– résoudre des problèmes de construction
- trouver des lieux géométriques.
► Les définitions, les propriétés et les activités devront être illustrées par des figures.
► Sont hors programme :
- les similitudes ;
- toute référence à la notion d'isométrie ;
- les propriétés de conservation du produit scalaire, du barycentre et du contact.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Translations - Propriété caractéristique de la translation. - Composée de deux translations. 2. Symétries orthogonales Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ou sécants. 3. Rotations - Composée de deux rotations de même centre. - Composée de deux rotations de centres différents. 4. Homothéties. - Composée de deux homothéties de même centre. - Composée de deux homothéties de centres différents.	<u>Pour les translations :</u> ☞ Construire l'image d'un point par la composée de deux translations. ☞ Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une translation. ☞ Déterminer la translation, si elle existe, transformant une configuration en une autre. ☞ Déterminer la nature et le vecteur de la composée de deux translations. <u>Pour les symétries orthogonales :</u> ☞ Construire l'image d'un point par la composée de deux symétries orthogonales. ☞ Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie orthogonale d'axe parallèle à l'un des axes de coordonnées ou d'axe la première bissectrice. ☞ Déterminer la symétrie orthogonale, si elle existe, transformant une configuration en une autre. ☞ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux symétries orthogonales. <u>Pour les rotations :</u> ☞ Construire l'image d'un point par la composée de deux rotations. ☞ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux rotations. ☞ Mettre en évidence une rotation pour : - construire et déterminer un ensemble de points, - démontrer une propriété. <u>Pour les homothéties :</u> ☞ Construire l'image d'un point par la composée de deux homothéties. ☞ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties. ☞ Mettre en évidence une homothétie pour : - construire et déterminer un ensemble de points, - démontrer une propriété. ☞ Utiliser la composée de deux homothéties pour : - construire et déterminer un ensemble de points, - démontrer une propriété. ☞ Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une homothétie.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

Activité 1

ABCD est un parallélogramme. E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.
Démontrer que le quadrilatère ABEC est un parallélogramme.

Activité 2

Soit ABC un triangle quelconque. M est un point quelconque de [AC].

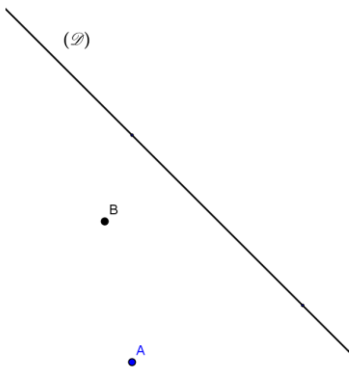
M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

C' est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Démontrer que les points B, M' et C' sont alignés.

Activité 3

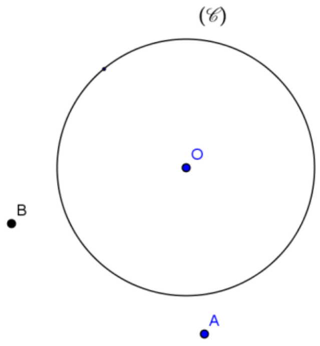
Soit A et B deux points distincts et (D) une droite donnée.



M est un point quelconque de la droite (D) ; N est le point tel que ABNM soit un parallélogramme.
Quel est le lieu des points N lorsque M décrit la droite (D) ?

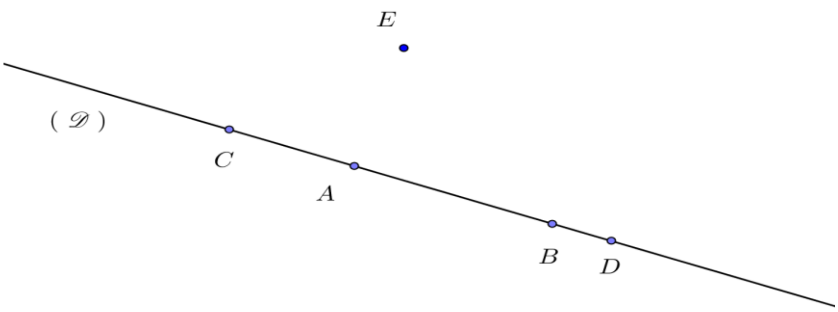
Activité 4

Soit A et B deux points distincts et (C) un cercle donné.



M est un point quelconque du cercle (C) ; N est le point tel que ABNM soit un parallélogramme.
Quel ensemble décrit le point N lorsque M décrit la droite (C) ? Construire cet ensemble.

Activité 5
(D) est une droite donnée, A, B, C et D sont des points appartenant à (D). E est un point n'appartenant pas à (D).



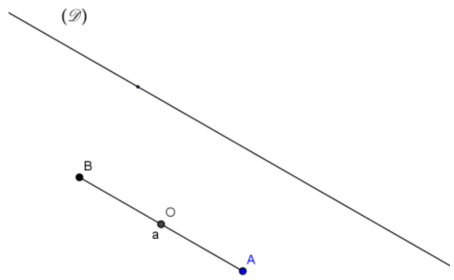
Construire l'image des points E et D par l'homothétie h de centre A qui transforme B en C.

Activité 6
ABC est un triangle. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme B en I et C en J.
2. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme B en J et C en I.

Activité 7
ABCD est un parallélogramme.
E est le milieu de [C].
F est l'image de E par l'homothétie de centre A et de rapport 2 .
1. Faire une figure.
2. Démontrer que le quadrilatère ACFD est un parallélogramme.
3. Démontrer que C est le milieu de [BF].

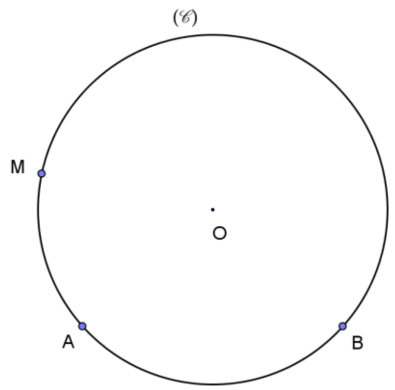
Activité 8
Soit ABC un triangle quelconque.
I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.
1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Activité 9
Soit A et B deux points distincts et (D) une droite strictement parallèle à (AB).
O est le milieu de [AB].
M est un point quelconque de la droite (D) ; N est le symétrique de A par rapport à M.



1.Quel est le lieu des points N lorsque M décrit la droite (D) ?
2. P est le point d'intersection des droites (BM) et (ON).
a) Déterminer une homothétie qui transforme M en P.
b) Déterminer le lieu des points P lorsque M décrit la droite (D).

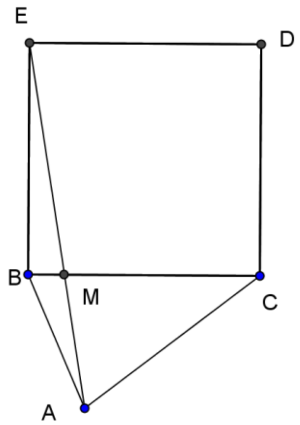
Activité 10
Soit A et B deux points distincts d'un cercle (C) de centre O.



M est un point quelconque du cercle (C) distinct de A et B ; G est le centre de gravité du triangle ABC.
Quel ensemble décrit le point G lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B? Construire cet ensemble.

Activité 11
ABC est un triangle et BCDE un carré.

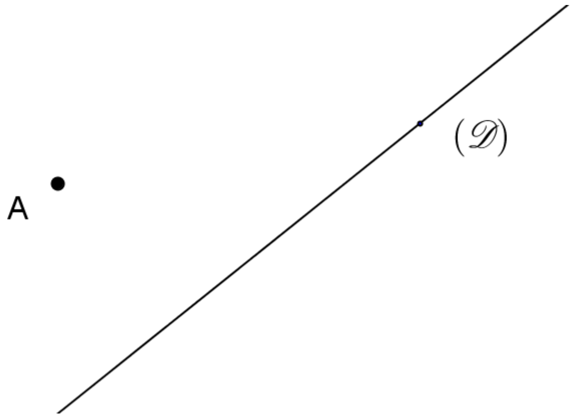
1. M est le point d'intersection de (BC) et de (AE).
Soit h l'homothétie de centre A qui transforme E en M.
Construire l'image du carré BCDE.



2. Application
ABC est un carré.
Construire un carré MNPQ tel que M et N soient sur [BC], P sur [AC] et Q sur [AB].

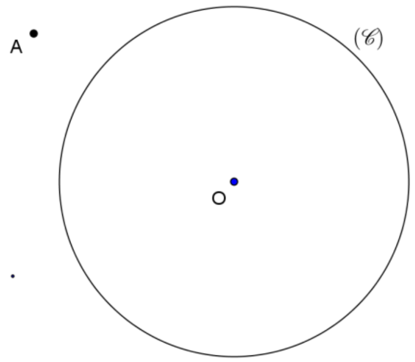
Activité 12
ABC est un triangle équilatéral de centre G.
1.Construire l'image du triangle ABC par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Quelle est l'image des points A, B et C par la rotation r' de centre G et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Activité 13
1. On donne la figure ci-dessous.



Construire l'image de la droite (D) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. On donne la figure ci-dessous.



Construire l'image du cercle (C) par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Activité 14

(D) est une droite et A un point n'appartenant pas à (D).

Etant donné un point M de (D), on construit le point N tel que le triangle AMN soit rectangle en A, isocèle et de sens direct.

1. Faire une figure.
2. Quel est le lieu géométrique du point N lorsque M décrit la droite (D) ?

COURS

I. TRANSLATIONS

1. Propriété caractéristique d'une translation

Propriété

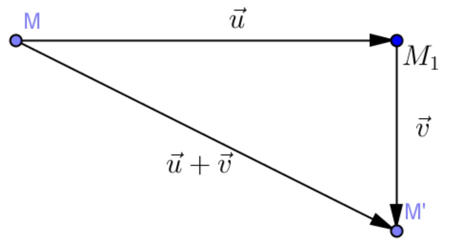
Soit f une application du plan dans lui-même.
f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

2. Composée de deux translations

Propriété

La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
On a : $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

La figure ci-après illustre le résultat.



Remarques

- Pour des translations t_1 et t_2 , on a : $t_1 o t_2 = t_2 o t_1$.
- La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$: $t_{\vec{u}} o t_{-\vec{u}} = Id_{\mathcal{P}}$.

Exercices

$\boxed{1}$ Soit ABC un triangle.

On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
1. Construire les points E et F, images respectives des points A et B par $t_2 o t_1$.
2. En déduire la nature du quadrilatère AEFB.

$\boxed{2}$ Le plan est muni du repère (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Soit les points $A(-1; 1)$, B$(-2; -1)$, $C(1; 2)$, $D(3; 0)$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation y = $2x$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
1. On pose A' = t(A) et B' = t(B).

Déterminer les coordonnées de A' et B'.
2. Soit M(x ;y) et M'(x' ; y') son image par t.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y puis x et y en fonction de x' et y'.
3. En déduire une équation de ($\mathcal{D}'$) image de la droite ($\mathcal{D}$) par t.

II. SYMETRIES ORTHOGONALES

Activité 1
ABCD est un rectangle.
Soit $S_{(DC)}$ et $S_{(AB)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (DC) et (AB).
Pour tout point M du plan, on pose $M_1 = S_{(DC)}(M) \; et \; M' = S_{(AB)}(M_1)$.
I et J sont les milieux respectifs des segments [DC] et [AB].
1. Faire une figure.
2. Justifier que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Activité 2
ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
Soit $S_{(AB)}$ et $S_{(AC)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) et (AC).
Pour tout point M du plan, on pose $M_1 = S_{(AB)}(M) \; et \; M' = S_{(AC)}(M_1)$.
1. Faire une figure.
2. Justifier que : AM = AM' et Mes$\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})} = \frac{2\pi}{3}$.

Composée de deux symétries orthogonales

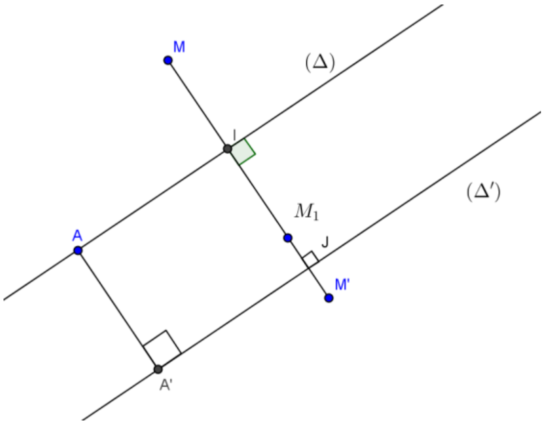
Soit (Δ) et (Δ') deux droites du plan.
Soit $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ').

● Cas où (Δ) et (Δ') sont parallèles

Propriété

Lorsque (Δ) et (Δ') sont parallèles, la composée $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$ est une translation .
Si A est un point de (Δ) et A' son projeté orthogonal sur (Δ') alors $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$.

La figure ci-après illustre le résultat.



Remarques

● $S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)} = Id_{\mathcal{P}}$.

La transformation réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta)}$.

● Si (Δ) et (Δ') sont distinctes, $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} \neq S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')}$.

● Cas où (Δ) et (Δ') sont sécantes

Propriété

Lorsque les droites (Δ) et (Δ') sécantes en O, la composée $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$ est une rotation de centre O .

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur quelconque de (Δ) et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur quelconque de (Δ') alors $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = r_{(O;\,2\theta)}$ où θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}})$.

Remarques

● Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires , $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')} = S_O$ (symétrie centrale de centre O).

● Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires ,les composées $S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')}$ sont distinctes.

Exercices

1 ABCD est un carré de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB],[BC], [CD] et [DA].

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AB)} o S_{(CD)}$ et de $S_{(AC)} o S_{(IJ)}$.

2 ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G.

I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

Déterminer dans chacun des cas suivants, la nature et les éléments de la transformation f :

a) $f = S_{(AB)} o S_{(AC)}$; b) $f = S_{(AG)} o S_{(AB)}$; c) $f = S_{(AI)} o S_{(BJ)}$.

3 ABCD est un carré direct de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB],[BC], [CD] et [DA].
Déterminer dans chacun des cas suivants, la nature et les éléments de la transformation f :
a) $f = S_{(AB)} o S_{(AD)}$; b) $f = S_{(AC)} o S_{(KI)}$.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Soit le point $A(-2; 3)$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation y = x.
1. Soit $S_{(OI)}$ et $S_{(OJ)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (OI) et (OJ).
Déterminer les coordonnées des points B et C images respectives de A par $S_{(OI)}$ et $S_{(OJ)}$.
2. Soit $S_{(\mathcal{D})}$ la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$.
Soit M(x ;y) et M'(x' ; y') son image par $S_{(\mathcal{D})}$.
a) Justifier que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.
b) En déduire les coordonnées du point D image de A par $S_{(\mathcal{D})}$.

III. ROTATIONS

1. Propriété caractéristique

Propriété

Soit f une application du plan dans lui-même, θ un nombre réel différent de 2kπ, $(k \in \mathbb{Z})$.
f est une rotation d'angle θ si, et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', on a :
MN = M'N' et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Exercice
ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
1. Construire le point D image de B par r.
2. Justifier que : AB = AD et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.

2. Composée de deux rotations

Composée de deux rotations de même centre
Propriété

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs θ et θ'.
La composée $r' o r$ est la rotation de centre O et d'angle θ+θ'.

Cas particuliers

● Si $\theta + \theta' = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alors $r'or$ est l'application identique.

● Si $\theta + \theta' = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$' alors $r'or$ est la symétrie centrale de centre O.

Remarques

● Si r et r' sont deux rotations de même centre alors r'or $= ror'$.

● La transformation réciproque de la rotation $r_{(O,\theta)}$ est la rotation $r_{(O,-\theta)}$: $r_{(O,\theta)}or_{(O,-\theta)} = Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple

Soit O un point du plan.

r est l'homothétie de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; r' est l'homothétie de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r'or$.

Solution

$r'or$ est la composée de deux rotations de même centre O donc $r'or$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Composée de deux rotations de centres distincts

Propriété

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ et r' la rotation de centre O' et d'angle θ'.
La composée r'or est une translation ou une rotation :
● lorsque $\theta + \theta' = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, il s'agit d'une translation.
● lorsque $\theta + \theta' \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, il s'agit d'une rotation 'angles θ + θ'.

Remarque

Les composées r'or et ror' sont en général distinctes.

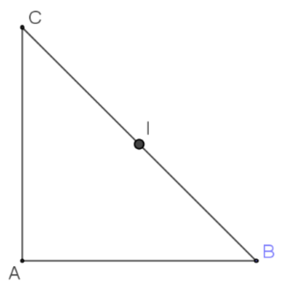
Exemple

Soit ABC est un triangle direct, rectangle en A et isocèle. I est le milieu de [BC].

On pose $f = r_{\left(\mathrm{A},\ \frac{\pi}{2}\right)}or_{\left(\mathrm{B},\ \frac{\pi}{2}\right)}$.

1. Déterminer $f(\mathrm{B})$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Solution



1. $f(B) = r_{\left(A,\ \frac{\pi}{2}\right)}or_{\left(B,\ \frac{\pi}{2}\right)}(B)$

$r_{\left(B,\ \frac{\pi}{2}\right)}(B)$ = B car le centre est invariant ;

$r_{\left(A,\ \frac{\pi}{2}\right)}(B)$ = C car AB = AC et Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$. Donc $f(B) = C$.

2. f est la composée de deux rotations. La somme de leurs angles est π donc f est une symétrie centrale.

f(B) = C donc le centre de f est le milieu de [BC]. f est la symétrie centrale de centre I.

Exercices

$\boxed{1}$ O est un point donné ;

r est l'homothétie de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$; r' est l'homothétie de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'or.

$\boxed{2}$ O est un point donné ;

r est l'homothétie de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$; r' est l'homothétie de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ror'.

$\boxed{3}$ Soit A et B deux points distincts, et S_A et S_B les symétries centrales de centres respectifs A et B.

Démontrer que $S_B o S_A$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

$\boxed{4}$ Soit ABCD un losange de sens direct tel que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

On pose g = $r_{\left(\text{A},\ \frac{2\pi}{3}\right)} o r_{\left(\text{B},\ \frac{2\pi}{3}\right)}$.

1. Justifier que g est une rotation dont on précisera l'angle.
2. Déterminer g(B) puis démontrer que le centre de g est C.

IV. HOMOTHETIES

Activité

ABCD est un trapèze tel que AB = 2 et CD = 6.

Expliquer pourquoi il existe une homothétie h qui transforme A en C et B en D.

Déterminer son rapport et construire son centre Ω .

1. Composée de deux homothéties de même centre

Propriété

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k'.
La composée h'oh est l'homothétie de centre O et de rapport kk' .

Remarque : On a : h'oh = hoh'.

Cas particuliers

• Si kk' = 1 alors h'oh est l'application identique.
• Si kk' = -1 alors h'oh est la symétrie centrale de centre O.

Remarque
La transformation réciproque de l'homothétie $h_{(O,k)}$ est l'homothétie $h_{\left(O,\ \frac{1}{k}\right)}$: $h_{(O,k)}oh_{\left(O,\ \frac{1}{k}\right)} = Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple
O est un point du plan.
h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$; h' est l'homothétie de centre O et de rapport -2 .
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h'oh$.

$h'oh$ est la composée de deux rotations de même centre O ; le produit de leurs rapport est -3 donc $h'oh$ est l'homothétie de centre O et de rapport -3.

Exercice
Ω est un point donné ;
h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -3 ; h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{3}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de hoh' .

2. Composée de deux homothéties de centres distincts
Propriété

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k et h' l'homothétie de centre O' et de rapport k'.
La composée h'oh est une translation ou une homothétie :
● lorsque kk' = 1, il s'agit d'une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OO'}$.
● lorsque kk' ≠ 1, il s'agit d'une homothétie de rapport kk' et de centre alignés avec O et O'.

Remarque
Les composées h'oh et hoh' sont en général distinctes.

Exercices
1 ABC est un triangle de centre de gravité G.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
h est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.
h' est l'homothétie de centre C et de rapport 2 .
1. Déterminer l'image de G par h'oh.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h'oh$.'.

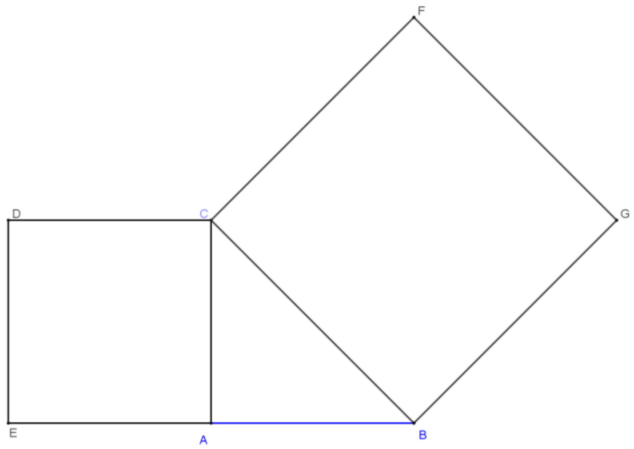
2 Le plan est muni du repère (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$). Soit les points $\Omega(1;2), A(-1;1)$, B$(-2;-1)$ et (D) la droite d'équation 2y + x -3 = 0.
Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
1. On pose A' = h(A) et B' = h(B). Déterminer les coordonnées de A' et B'.
2. Soit M(x ;y) et M'(x' ; y') son image par h.
Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. En déduire une équation de (D') image de la droite (D) par h.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice résolu 1

ABC est un triangle de sens direct rectangle en A.

On construit à l'extérieur du triangle les carrés ACDE et BCFG.



Démontrer que : (BD) ⊥ (AF) et que BD = AF.

Solution

Considérons la rotation r(C , $\frac{\pi}{2}$) :

Le triangle CBF est rectangle isocèle en C et de sens direct, donc : r(B) = F.

Le triangle CDA est rectangle isocèle en C et de sens direct, donc : r(D) = A.

<u>Récapitulons</u> : r(B) = F et r(D) = A donc d'après la propriété caractéristique d'une rotation :

BD = FA et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{FD}}\right) = \frac{\pi}{2}$ *(angle de r).*

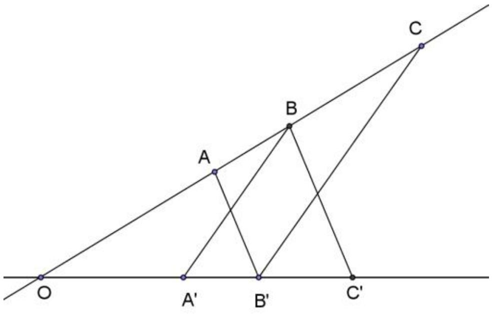
Conclusion : (BD) ⊥ (AF) et que BD = AF.

Exercice résolu 2

Dans la figure ci-dessous, les droites (AB') et (BC') d'une part, (BA') et (CB') d'autre part, sont parallèles.

On désigne par h_1 et h_2 les homothéties de centre O telles que $h_1(A) = B$ et $h_2(B) = C$.

1. Déterminer l'image de A par $h_2 o h_1$, puis l'image de A' par $h_1 o h_2$.
2. En déduire que les droites (AA') et (CC') sont parallèles.



Solution

1. • Déterminons l'image de A par $h_2 o h_1$.

On a : $h_1(A) = B$ *et* $h_2(B) = C$ *donc :* $h_2 o h_1(A) = C$.

• Déterminons l'image de A' par $h_1 o h_2$.

Déterminer l'image de A' par h_2 *:*

$h_2(A')$ *appartient à la droite (OA') car par une homothétie le centre, un point et son image sont alignés.*

Or A' ∈ (A'B) ⟹ h_2*(A') ∈* h_2*(A'B).*

$h_2(B) = C$ *donc* h_2*(A'B) est la droite passant par C et parallèle à (A'B).C'est donc (CB').*

Donc h_2*(A') ∈ (CB').*

Récapitulons : $h_2(A')$ ∈ *(OA') et* h_2*(A') ∈ (CB').*

Donc $h_2(A') = B'$.

Déterminons l'image de B' par h_1 *:*

$h_1(B')$ *appartient à la droite (OB') car par une homothétie le centre, un point et son image sont alignés.*

Or B' ∈ (AB') ⟹ h_1*(B') ∈* h_1*(AB').*

$h_1(A) = B$ *donc* h_1*(AB') est la droite passant par B et parallèle à (AB').C'est donc (BC').*

Donc h_1*(B') ∈ (BC').*

Récapitulons : $h_1(B')$ ∈ *(OB') et* h_1*(B') ∈ (BC').*

Donc $h_1(B') = C'$.

Récapitulons : $h_2(A') = B'$ *et* $h_1(B') = C'$.

Donc $h_1 o h_2(A') = C'$.

2. Nous avons démontré que : $h_2 o h_1(A) = C$ *et que* $h_1 o h_2(A') = C'$.

Or $h_2 o h_1 = h_1 o h_2$ *donc*

on peut écrire $h_2 o h_1(A) = C$ *et* $h_2 o h_1(A') = C'$.

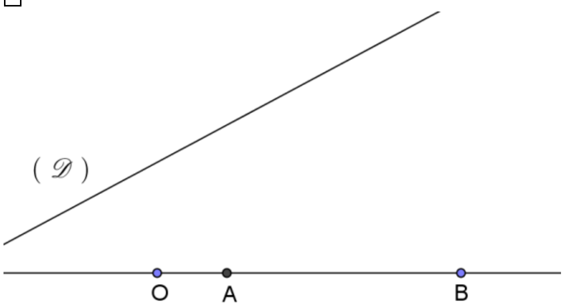
Il en résulte d'après la propriété caractéristique que (AA') ∥ (CC').

EXERCICES

1 O est un point donné.
Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
$r(O,\frac{\pi}{3})$o$r(O,\frac{2\pi}{3})$;
$r(O,\frac{\pi}{3})$o$r(O,-\frac{\pi}{3})$;
$r(O,\frac{\pi}{2})$o$r(O,\frac{\pi}{3})$;
$r(O,-\frac{\pi}{5})$o$r(O,\frac{\pi}{3})$;
$r(O,-\frac{\pi}{3})$o$r(O,-\frac{\pi}{2})$.

2 O est un point donné.
Donner la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
$h(O,2)$o$r(O,\frac{1}{2})$;
$h(O,3)$o$h(O,-\frac{1}{3})$;
$h(O,-4)$o$h(O,-2)$.

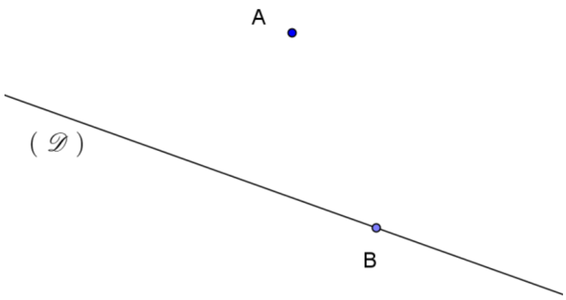
3



Construire l'image de la droite (D) par l'homothétie h de centre O qui transforme A en B.

4 Soit A et B deux points distincts et (D) une droite ne passant pas par A et B.
M est un point quelconque de la droite (D) ; N est le point tel que NABM soit un parallélogramme.
Déterminer et construire le lieu du point N lorsque M décrit (D).

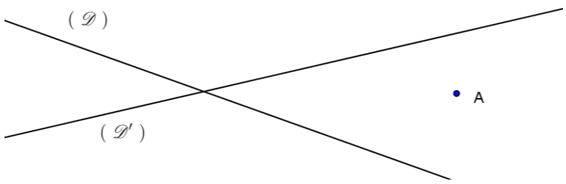
5 Sur la figure ci-dessous, (D) est une droite donnée, A un point n'appartenant pas à (D).
B est un point variable de (D).



1. Construire le point C tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A, de sens direct.
2. Déterminer et construire le lieu du point C lorsque B décrit la droite (D).

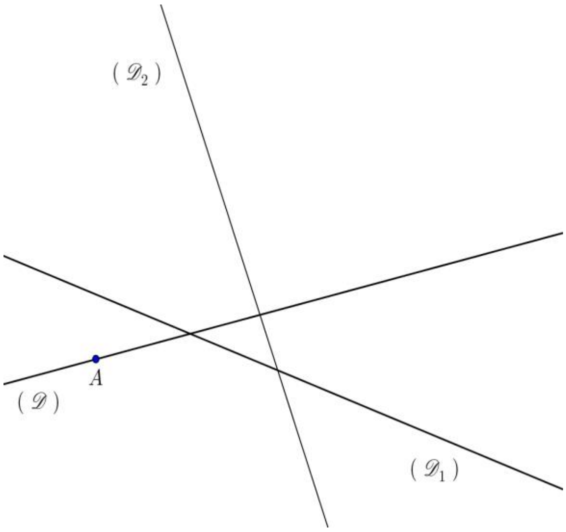
6 On considère (C) et une corde [AB] de ce cercle.
I est le milieu de [AB].
A tout point M de (C), distinct de A et B, on associe le point Q barycentre des points pondérés (B,1) et (M,2), et le point d'intersection R des droites (AM) et (IQ).
Déterminer et construire le lieu des points Q et R lorsque M décrit le cercle (C)$-\{A,B\}$.

7 Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites données, A un point n'appartenant ni à (D), ni à (D').



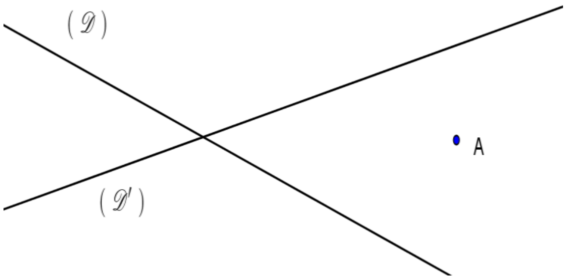
Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A, de sens indirect et dont les sommets appartiennent respectivement à (D) et à (D').

$\boxed{8}$ Sur la figure ci-dessous, (D), (D_1) et (D_2) sont trois droites données, A un point de (D) comme indiqué ci-dessous.



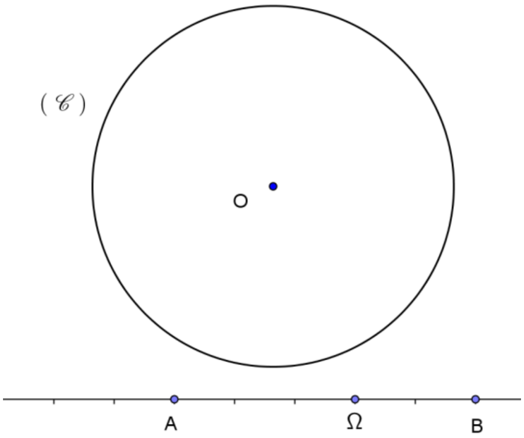
Construire un carré ABCD tel que C appartienne à (D), B appartienne à (D1), et D appartienne à (D2).

$\boxed{9}$ Sur la figure ci-dessous, (D) et (D') sont deux droites données, A un point n'appartenant ni à (D), ni à (D').

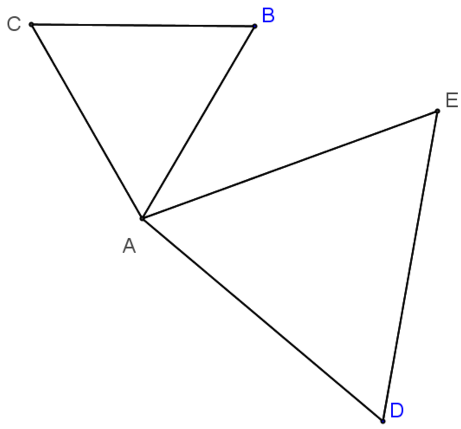


Construire deux points B et C appartenant respectivement à (D) et (D') et tels que : $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\boxed{10}$ (C) est le cercle de centre O et de rayon 3.
Construire l'image (C') du cercle (C) par l'homothétie h de centre Ω qui transforme A en B.
Préciser le rayon de (C').



$\boxed{11}$
ABC et ADE sont deux triangles équilatéraux.

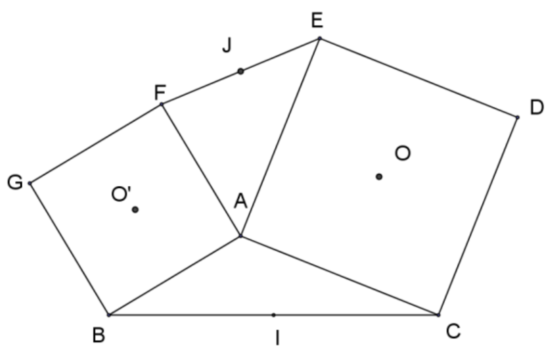


Démontrer que BD = CE.

$\boxed{12}$ ABC est un triangle de sens direct.
On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés ACRS, BAMN puis le parallélogramme MASD dont on notera le centre I.
Le but de l'exercice est de démontrer que la droite (AD) est une hauteur du triangle ABC et que AD = BC.
On considère la rotation r de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Déterminer les images des points M et C par r.

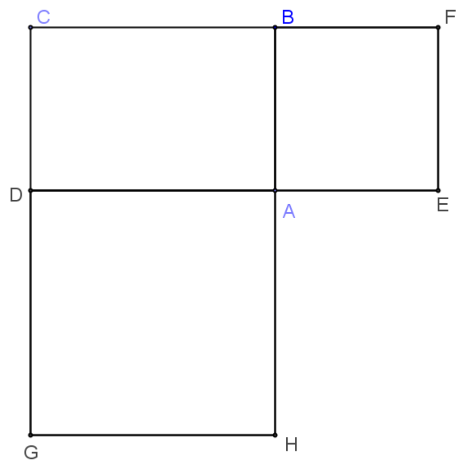
2. On note S' l'image de S par r.
Démontrer que A est le milieu de [CS'].
3. On note I' l'image de I par r.
Démontrer que I' est le milieu de [BS'].
4. En déduire que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que AD = BC.

13 Le triangle ABC étant donné, est un triangle.
On construit les carrés ACDE, AFGB de sens direct, de centres respectifs O et O', comme indiqué dans la figure ci-après.
I est le milieu de [BC], J est le milieu de [EF].
Le but de l'exercice est de démontrer que le quadrilatère JO'IO est un carré.
1. En utilisant la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, démontrer que :
(FC) ⊥ (BE) et que FC = BE.
2. En déduire que le triangle OIO' est un triangle rectangle en I et isocèle.
3. Démontrer que JO'IO est un carré.



14 ABCD est un carré direct de centre O comme indiqué ci-après.
Soit M un point quelconque de la droite (BD) différent de B.
On note P, P', Q, Q' les projetés orthogonaux du point M respectivement sur (AB), (DC), (AD), (BC).
Le but de l'exercice est de démontrer que la droite (MC) est orthogonale à la droite (PQ).
1. Placer les points P, P', Q et Q'.
2. Soit h l'homothétie de centre B telle que h(D) = M.
a) Démontrer que :
h(A) = P et que h(C) = Q'.
b) En déduire que :
Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{PM},\overrightarrow{MQ'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et que PM = MQ'.
3. Soit r la rotation telle que :
r(P) = M et r(M) = Q'.
a) Donner les éléments caractéristiques de r.
b) Déterminer l'image de Q par r.
4. En déduire que la droite (MC) est orthogonale à la droite (PQ).

15 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes.
I désigne le point d'intersection des droites (EG) et (FH).
Soit :
h_1 l'homothétie de centre I qui transforme G en E ;
h_2 l'homothétie de centre I qui transforme F en H.

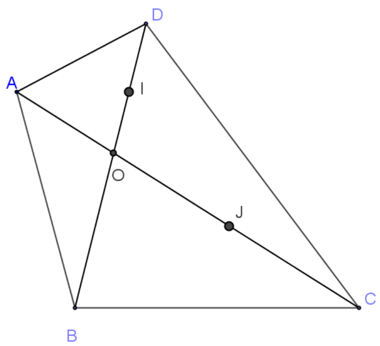
1. Déterminer l'image de la droite (CG) par h_1 puis par la composée $h_2 o h_1$.
2. Déterminer l'image de la droite (CF) par la composée $h_1 o h_2$.
3. Déduire des questions précédentes que la droite (AC) passe aussi par le point I.

16 Soit ABCD un carré de sens direct.
Etant donné un point M de (BC), on désigne par M' le point d'intersection de (CD) et de la perpendiculaire (D) menée de A à (AM).
On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Faire une figure.
2. Démontrer que l'image de la droite (BC) par r est la droite (CD).
3. En déduire l'image de M par r.
4. En déduire la nature du triangle AMM'.

17 Soit A et B deux points d'un cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm.
M est un point quelconque de (C), différent de A et B.
On désigne par G le centre de gravité du triangle AMB.
Déterminer le lieu géométrique du point G lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

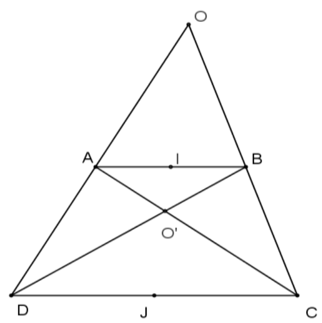
18 Soit O et O' deux points tels que OO' = 8 cm.(C) est le cercle de centre O et de rayon 4 ; (C') est le cercle de centre O', de rayon 2.
1. Faire une figure.
2. On admet qu'il existe deux homothéties h et h' qui transforment (C) en (C').
h désignant celle qui a son rapport positif.
a) Démontrer que le rapport h est $\frac{1}{2}$.
b) Déterminer le rapport de h'.
c) On note I le centre de h et J le centre de h'. Placer I et J.

19 ABCD est un quadrilatère
O est l'intersection des diagonales.
La parallèle à (BC) menée de A coupe (BD) en I, la parallèle à (AD) passant par B coupe (AC) en J.
Le but de l'exercice est de démontrer que (IJ)∥(CD).



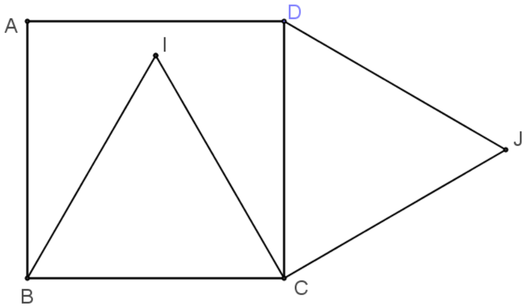
Soit :
h_1 l'homothétie de centre O qui transforme A en C ;
h_2 l'homothétie de centre O qui transforme B en D.
1. Déterminer l'image de I par la composée $h_2 o h_1$.
2. Déterminer l'image de J par la composée $h_1 o h_2$.
3. Déduire des questions précédentes que les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.

20 On considère un trapèze complet ABCD de bases (AB) et (CD).
I et J désignent les milieux respectifs de [AB] et [CD].
h_1 l'homothétie de centre O qui transforme A en D ;
h_2 l'homothétie de centre O' qui transforme A en C.



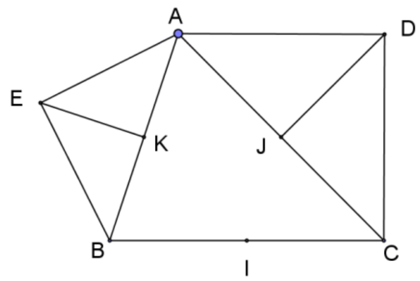
1.a) Déterminer les images de B et I par h_1 .
b) Déterminer les images de B et I par h_2
2. En déduire que les points O, I, O' et J sont alignés.

$\boxed{21}$ Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de sens direct, les triangles DCJ et BCI sont équilatéraux de sens direct.



Démontrer que les points A, I et J sont alignés et que IJ = BD.
On pourra construire le point K tel que le triangle AKC soit équilatéral de sens direct puis utiliser la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

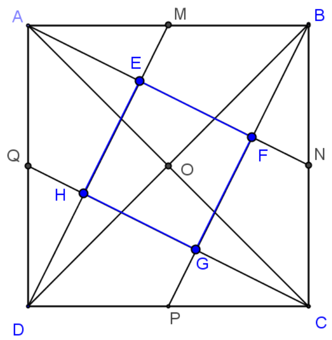
$\boxed{22}$ ABC est un triangle de sens direct .
On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles DAC et EAB isocèles te rectangles respectivement en D et E .



Soient I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].
1. Démontrer que DJ = KI et que EK = IJ.
2. Soit r la rotation telle que :
r(D) = I et r(J) = K.
a) Démontrer que l'angle de r est $-\frac{\pi}{2}$.
b) Construire le centre Ω de r.
3. Démontrer que r(I) = E.

4.a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ror.
b) En déduire la nature du triangle DEI.

$\boxed{23}$ ABCD est un carré de centre O et de sens indirect. Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Le but de l'exercice est de démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré,



Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
1.a) Justifier que r(N) = P.
b) Déterminer l'image de [AN] par r.
2. Déterminer l'image de [BP] par r.
3. En déduire r(F) et la nature du triangle FOG.
4. Déduire des questions précédentes que le quadrilatère EFGH est un carré.

12

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

COMMENTAIRES

► Ce chapitre vise à utiliser les définitions et propriétés de l'orthogonalité pour résoudre des problèmes et démontrer des propriétés.
► Les exercices doivent être résolus avec une figure comme support.
► On pourra raisonner sur des solides comme cube, pavé droit, prisme, tétraèdre, pyramide.
► La projection orthogonale sur une droite n'est pas au programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. Droites orthogonales : Définition Propriétés 2. Droite et plans orthogonaux : Définition Propriétés 3. Plans perpendiculaires Définition Propriétés 4. Projection orthogonale -Image d'un point, d'un segment -Propriété de l'image d'un segment	☞ Démontrer que deux droites sont orthogonales. ☞ Démontrer qu'une droite et un plan, ou deux plans sont parallèles. ☞ Démontrer que deux plans sont perpendiculaires. ☞ Déterminer sur un pavé droit, le projeté orthogonal d'un point, d'une droite, d'un segment sur un plan.

COURS

I. DROITES ORTHOGONALES

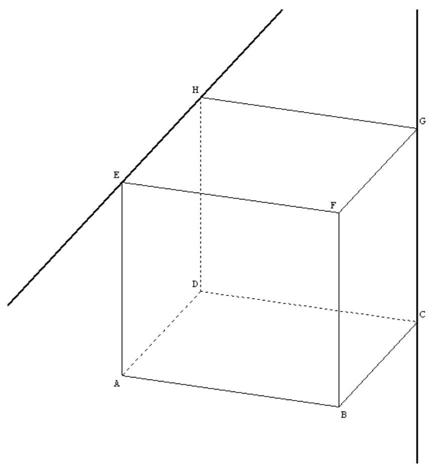
1. Définition

On dit que deux droites (D) et (D') de l'espace sont **orthogonales**, lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.
On note (D) ⊥ (D').

Exemple

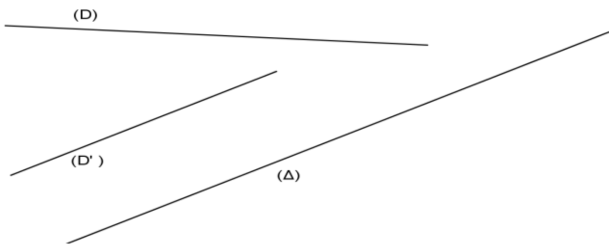
ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que les droites (EH) et (CG) sont orthogonales.

On sait par hypothèse que : (EH) ∥ (FG).
(EH) ∥ (FG) et (CG) ∥ (CG).Les droites (FG) et (CG) sont perpendiculaires dans le plan (FGC) donc (EH) ⊥ (FG).

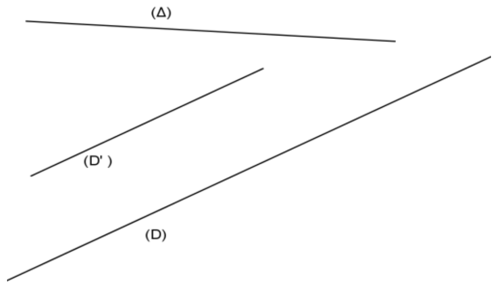


2. Propriétés

- Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Si $\begin{cases}(D) \perp (D') \\ (\Delta) \parallel (D)\end{cases}$ alors $(\Delta) \perp (D')$

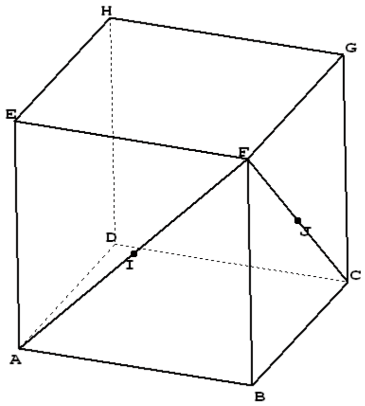


Si $\begin{cases}(D) \parallel (D') \\ (\Delta) \perp (D)\end{cases}$ alors $(\Delta) \perp (D')$

Exercice résolu 1

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs de [AF] et [CF].

1. Démontrer que le triangle AFC est équilatéral.
2. Démontrer que les droites (CI) et (DG) sont orthogonales.
3. Démontrer que les droites (IJ) et (BD) sont orthogonales.



Solution

1.Considérons le triangle AFC : [AF], [FC] et AC] sont les diagonales respectives des carrés ABFC, BCGF et ABCD.

Donc AF = FG = AC donc le triangle AFC est équilatéral.

2. Le triangle AFC est équilatéral et I est le milieu de [AF] donc (CI) est une hauteur du triangle AFC.

Donc : (CI) ⊥ (AF).

Justifions que (DG) ∥ (AF) :

ADHE est un carré donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$ *;*

EFGH est un carré donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ *.*

Il en résulte que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$ *.*

Donc le quadrilatère ADGF est un parallélogramme. Donc (AF) ∥ (DG).

<u>Récapitulons</u> : (CI) ⊥ (AF) et (DG) ∥ (AF)

<u>Conclusion :</u> (DG) ⊥ (CI).

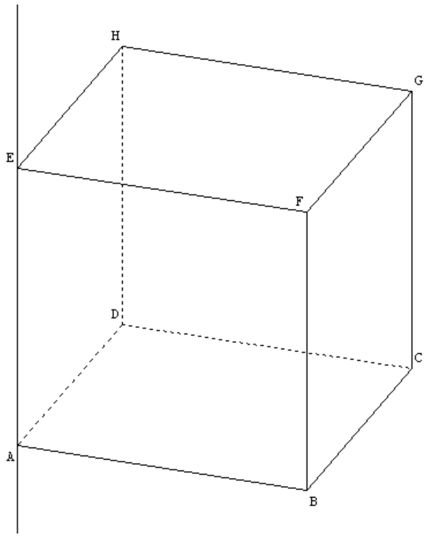
3. Dans le triangle AFC, (IJ) ∥ (AC) (théorème des milieux).
(AC) et (BD) sont les diagonales du carré ABCD donc (AC) ⊥ (BD).
<u>Récapitulons</u> : (IJ) ∥ (AC) et (AC) ⊥ (BD)
<u>Conclusion</u> : (IJ) ⊥ (BD).

II. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

1. Définition

On dit qu'une droite (D) et un plan (P) de l'espace sont **orthogonaux**, lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).
On note (D) ⊥ (P) ou (P) ⊥ (D).

Exercice résolu 1
ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que les droites (AE) et le plan (ABC) sont orthogonaux.



Solution
Pour prouver que (AE) ⊥ (ABC), il suffit de démontrer que (AE) est orthogonale à deux droites sécantes de (ABC).
(AE) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD) car les quadrilatères ABCD et ADHE sont des carrés.
Donc (AE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (AE) est orthogonale au plan (ABC) .

2. Propriétés

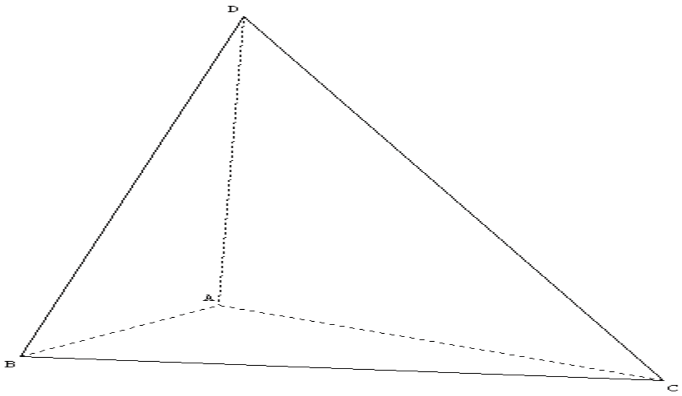
- Etant donné un point A et un plan (P), il existe une unique droite passant par A et orthogonale à (P).
- Etant donné un point A et une droite (D), il existe un unique plan passant par A et orthogonal à (D).
- Si une droite est orthogonale à un plan (P) alors elle est orthogonale à toute droite contenue dans (P).

Remarque

Pour prouver que deux droites (D) et (Δ) sont orthogonales dans l'espace, il suffit de montrer que la droite (Δ) est orthogonale à un plan (P) contenant (D).

Exercice résolu 2

ABCD est un tétraèdre trirectangle c'est-à-dire que les triangles ABC, ABD, ACD sont rectangles en A.



Démontrer que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

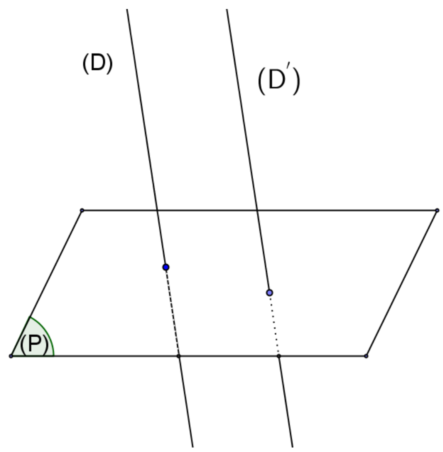
Solution

Pour prouver que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales, il suffit de montrer que (AB) est orthogonale à un plan contenant (CD).
(CD) ⊂ (ACD) ; (AC) et (AD) sont deux droites sécantes de ce plan.
(AB) est orthogonale aux droites (AC) et (AD) car les triangles ABC et ABD sont rectangles en A.
Donc (AB) ⊥ (ACD) et donc (AB) ⊥ (CD).

3. Autres propriétés

Propriété 1

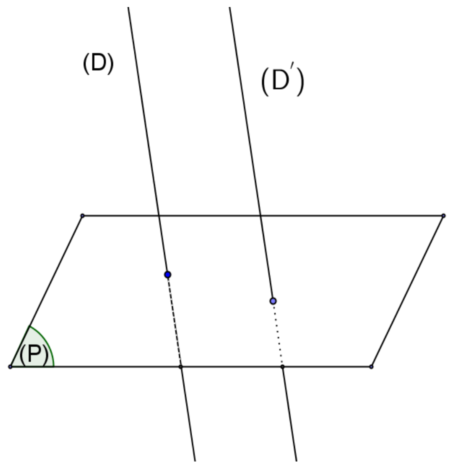
Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, tout plan (P) orthogonal à (D) est orthogonal à (D').



Si $\begin{cases} (D) \parallel (D') \\ (P) \perp (D) \end{cases}$ alors $(P) \perp (D')$

Propriété 2

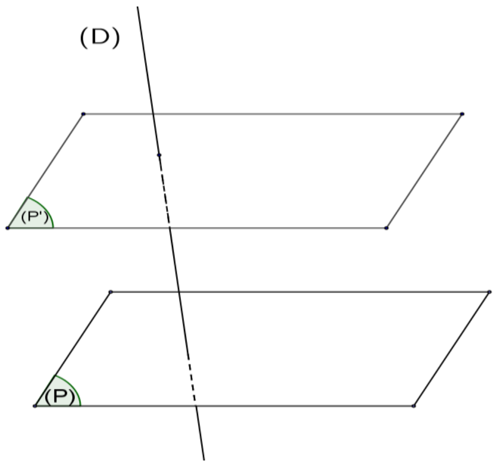
Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales à un même plan (P) alors elles sont parallèles.



Si $\begin{cases}(D) \perp (P) \\ (D') \perp (P)\end{cases}$ alors $(D) \parallel (D')$

Propriété 3

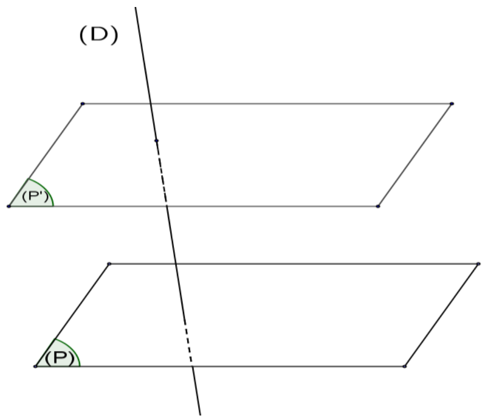
Si deux (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) orthogonale à (P) est orthogonale à (P').



Si $\begin{cases}(P) \parallel (P') \\ (D) \perp (P)\end{cases}$ alors $(D) \perp (P')$

Propriété 4

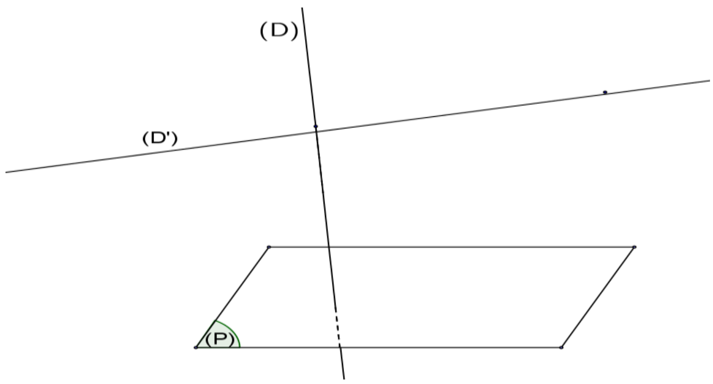
Si deux plans (P) et (P’) sont orthogonaux à une même droite (D) alors ils sont parallèles.



Si $\begin{cases} (P) \parallel (D) \\ (P') \perp (D) \end{cases}$ alors $(P) \parallel (P')$

Propriété 5

Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors toute droite (D’) orthogonale à (D) est parallèle à (P).

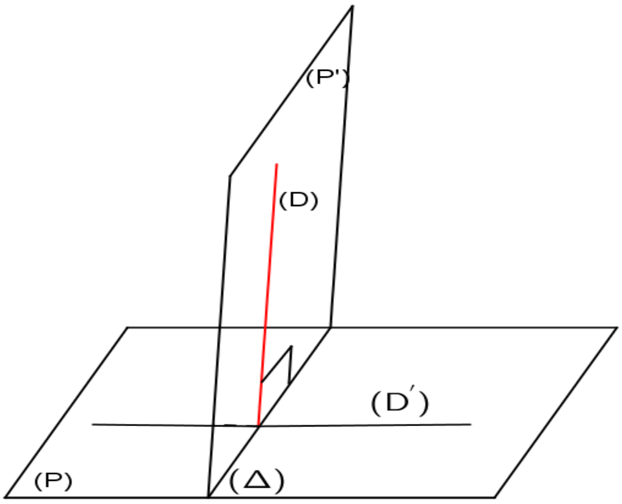


Si $\begin{cases} (D) \perp (P) \\ (D') \perp (D) \end{cases}$ alors $(D') \parallel (P)$

III. PLANS PERPENDICULAIRES

1. Définition

On dit que deux plans (P) et (P’) de l’espace sont **perpendiculaires**, lorsque l’un d’entre eux contient une droite orthogonale à l’autre. On note (P) ⊥ (P’).



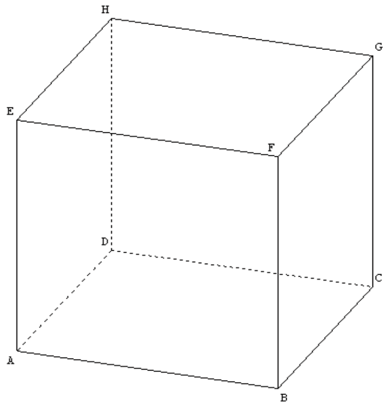
Remarques

● Deux plans perpendiculaires sont sécants.

● Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l'un n'est pas nécessairement orthogonale à toute droite de l'autre.

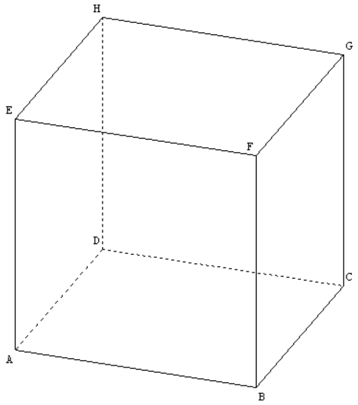
Exemple

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, les plans (ABC) et (ABF) sont perpendiculaires.

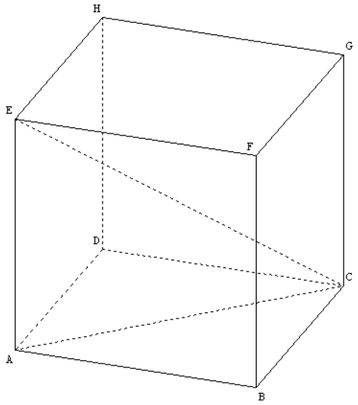


Exercice résolu

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, démontrer que les plans (EAC) et (ABC) sont perpendiculaires.



Solution



Pour prouver que les plans (ABC) et (EAC) sont perpendiculaires, il suffit de montrer que (EA) est orthogonale à un plan (ABC).

• (EA)⊥(AB) car EABF est un carré

• (EA)⊥(AD) car EADH est un carré or (AD)∥(BC) donc (EA)⊥(BC) car lorsque deux droites sont orthogonales toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

<u>Récapitulons</u> : (EA)⊥(AB) et (EA)⊥(BC).

<u>Conclusion</u> :(EA) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (EA)⊥(ABC) .

Comme (EA) est contenue dans le plan (EAC) donc (EAC)⊥(ABC).

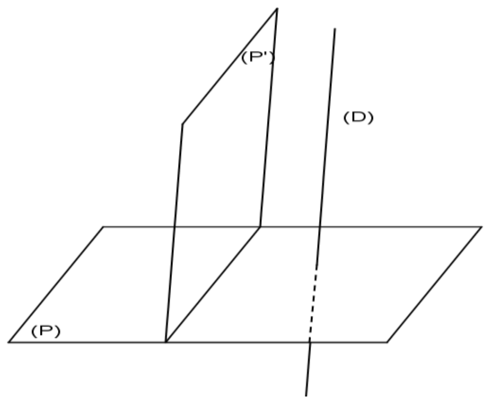
2. Propriété

Pour que deux plans soient perpendiculaires il suffit qu'une droite orthogonale à l'un et une droite orthogonale à l'autre soient orthogonales.

3. Autres propriétés

Propriété 1

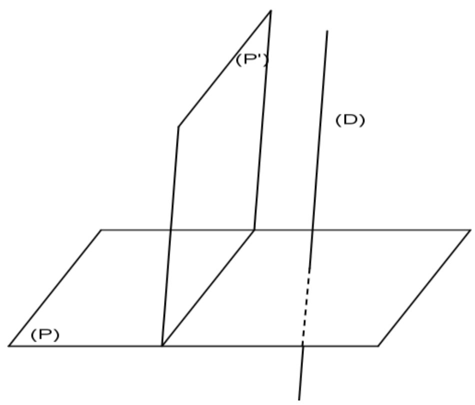
Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors tout plan (P') parallèle à (D) est orthogonale à (P).



Si $\begin{cases}(D) \perp (P) \\ (P') \parallel (D)\end{cases}$ alors $(P') \perp (P)$

Propriété 2

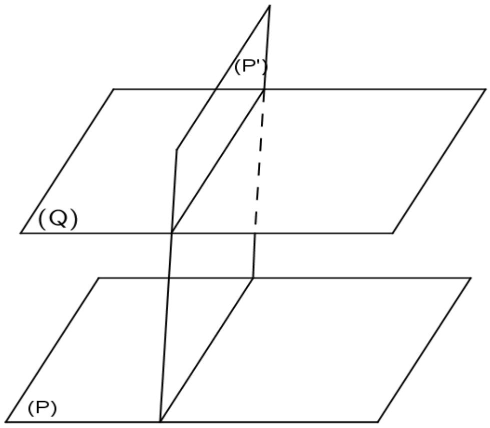
Si deux plans (P) et (P') sont perpendiculaires alors toute droite (D) orthogonale à (P) est parallèle à (P').



Si $\begin{cases}(P) \perp (P') \\ (D) \perp (P)\end{cases}$ alors $(D) \parallel (P')$

Propriété 3

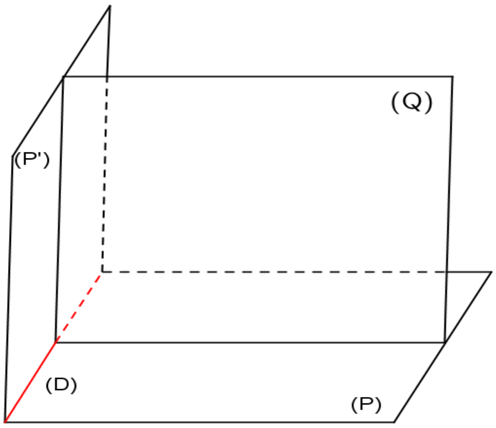
Si deux plans (P) et (P’) sont perpendiculaires alors tout plan (Q) parallèle à (P) est perpendiculaire à (P’).



Si $\begin{cases}(P) \perp (P') \\ (Q) \parallel (P)\end{cases}$ alors $(Q) \perp (P')$

Propriété 4

Soit (P) et (P’) sécants suivant une droite (D).
Un plan (Q) est perpendiculaire à (P) et (P’), si et seulement si (Q) est perpendiculaire à leur droite d’intersection (D).



$(P) \cap (P') = (D)$

$\begin{cases}(Q) \perp (P) \\ (Q) \perp (P')\end{cases} \Leftrightarrow (Q) \perp (D)$

IV.PROJECTION ORTHOGONALE

1. Image d'un point

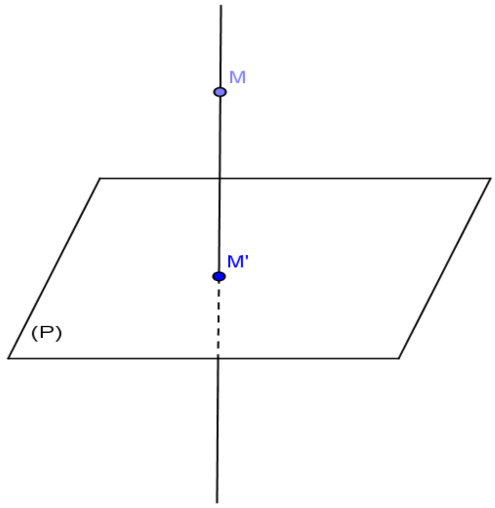
Définition

Soit un plan (P).
On appelle projection sur le plan (P) l'application p de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point M' tel que :

• si M ∈ (P) alors M' = M

• si M ∉ (P) alors M' est le point d'intersection du plan (P) et de la droite passant par M et orthogonale à (P).

Le point M' est appelé projeté orthogonal de M sur (P).

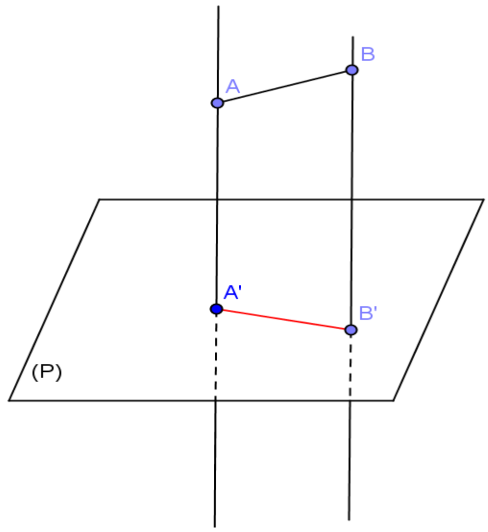


(MM')⊥(P)

2. Image d'un segment

Définition

Soit un plan (P) et A et B deux points de l'espace.
On appelle projeté orthogonal du segment [AB] sur le plan (P) le segment [A'B'] où A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur (P).

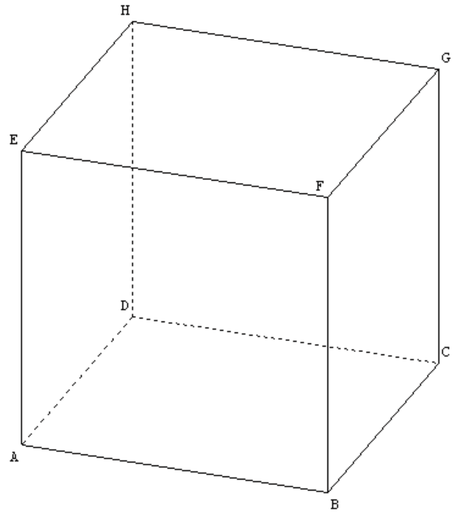


Propriété

Le projeté orthogonal sur un plan du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre,
- le projeté orthogonal de E sur le plan (ABC) est le point A ;
- le projeté orthogonal de A sur le plan (ABC) est le point A ;
- le projeté orthogonal du segment [EF] sur le plan (ABC) est le segment [AB] ;
- le projeté orthogonal du segment [EC] sur le plan (ABC) est le segment [AC].



Exercice
Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

1. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
2. Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
3. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales.

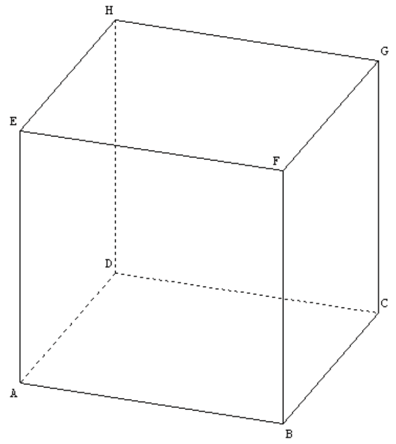
On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

4. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

TRAVAUX PRATIQUES

EXERCICE RÉSOLU 1

Dans le cube ABCDEFGH ci-après, démontrer que les droites (EB) et (DG) sont orthogonales.



Solution

EFGH est un carré donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ *;*

FGCB est un carré donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ *.*

Il en résulte que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$ *. Donc EHCB est un parallélogramme, donc (EB)* $\parallel$*(HC).*

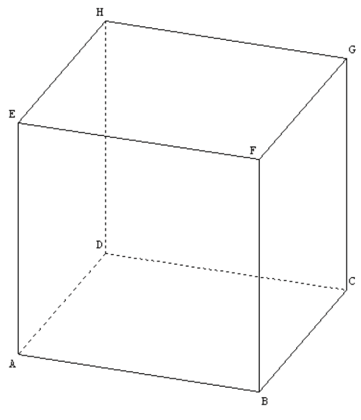
(HC) et (DG) sont les diagonales du carré DCGH donc (HC) $\perp$*(DG).*

<u>Récapitulons :</u> (HC) $\perp$*(DG) et (EB)*$\parallel$*(HC).*

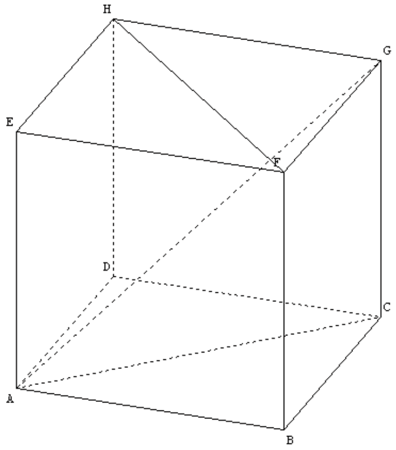
<u>Conclusion :</u> (EB) $\perp$ *(DG).*

EXERCICE RÉSOLU 2

Dans le cube ABCDEFGH ci-après, démontrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (ACG).



Solution

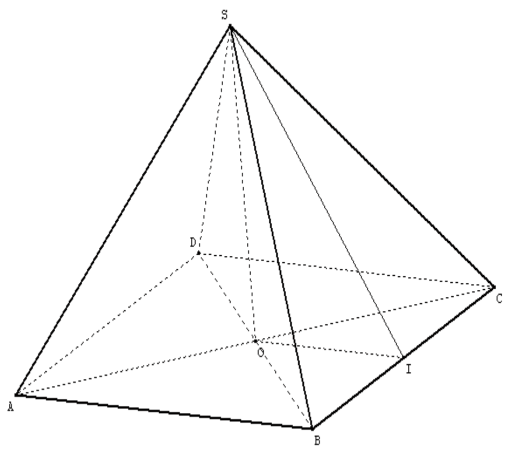


(AC) et (CG) sont deux droites contenues dans le plan (ACG).
Pour prouver que (HF) est orthogonale au plan (ACG), il suffit de montrer que (HF) est orthogonale aux droites (AC) et (CG).
$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB}$ *et* $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC}$ *donc* $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$*. Donc EACG est un parallélogramme. Donc (AC) ∥ (EG).*
(HF) et (EG) sont les diagonales du carré EFGH donc (HF) ⊥(EG).
(HF)⊥(EG) et (AC) ∥ (EG) donc (HF) ⊥(AC).
(CG) est orthogonale aux droites (GH) et (GF) car CGHD et CGFB sont des carrés.
Or (GH) et (GF) sont deux droites sécantes du plan (FGH) donc (CG) ⊥ (FGH).
Comme (HF) ⊂ (FGH) donc (CG) ⊥ (FH).
Récapitulons : (HF) ⊥(AC) et (CG) ⊥ (FH).
Conclusion : (HF) est orthogonale au plan (AGC).

EXERCICES

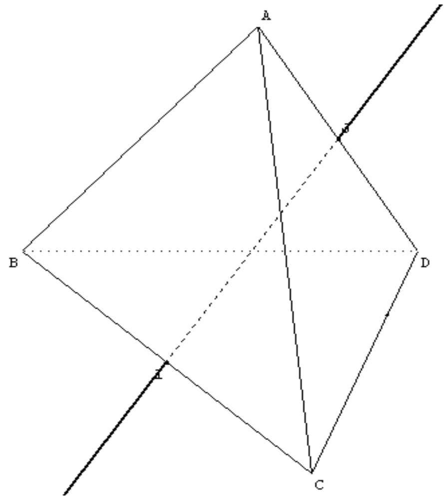
1 SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD ;
O est le centre de ABCD.
(SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].

1. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).
2. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).



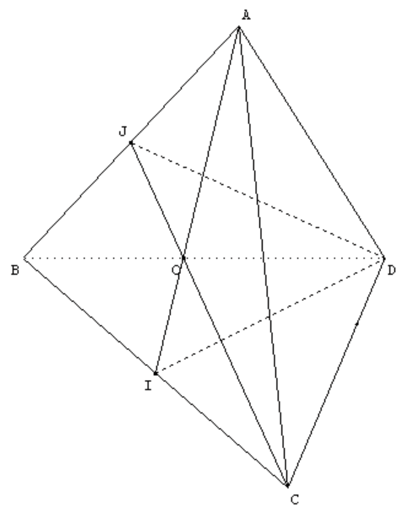
2 ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont même longueur).
I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [AD].

1. Démontrer que A et D appartiennent au plan médiateur de [BC].
2. En déduire que : (IJ) ⊥ (BC).

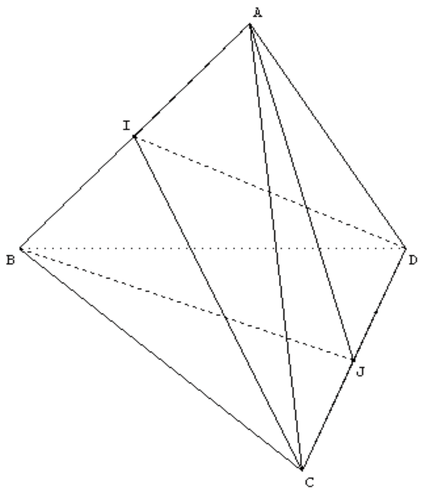


3 ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont même longueur).
I est le milieu de [BC] ,
J est le milieu de [AB] et
O désigne le centre de gravité du triangle ABC.

1. Démontrer que : (AID) ⊥ (ABC).
2. Démontrer que : (CDJ) ⊥ (ABC).
3. En déduire que : (OD) ⊥ (ABC).

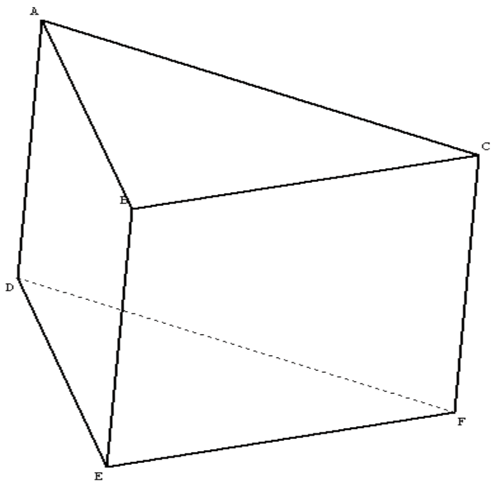


$\boxed{4}$ ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont même longueur).
I est le milieu de [AB], J est le milieu de [CD].



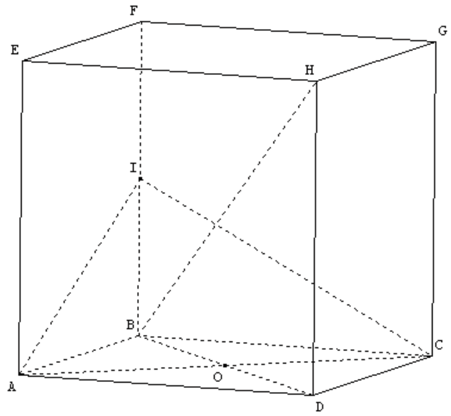
1. Démontrer que : (ICD) ⊥ (JAB).
2. Démontrer que : (ICD) ⊥ (ABC).
3. En déduire que : (ICD) ⊥ (ABD).
4. En déduire que : (ACD) ⊥ (BCD).

$\boxed{5}$ ABCDEF est un prisme droit tel que ABC est un triangle rectangle en B.



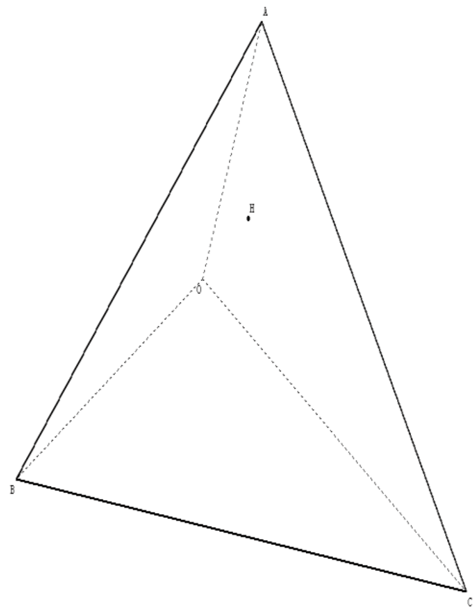
1. Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CEF).
2. Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (DEF).

$\boxed{6}$ On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous. O est le milieu de [BD] et I est le milieu de [BF].



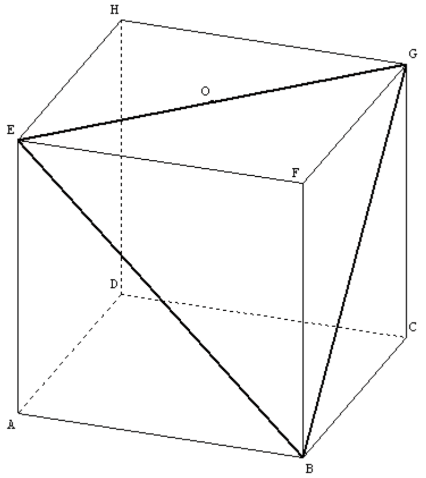
1. Démontrer que : (OA) ⊥ (OH).
2. Démontrer que : (IAC) ⊥ (BDH).

$\boxed{7}$ Soit OABC un tétraèdre tel que les droites (OA), (OB) et (OC) sont perpendiculaires deux à deux.
Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).



Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

$\boxed{8}$ On considère le cube ABCDEFGH d'arête 4 cm ci-dessous. O est le milieu de [EG].



1. Quelle est l'intersection des plans (BGE) et (DHF) ? Justifier.

2.a) Démontrer que $\text{mes}\widehat{FBO} = \text{mes}\widehat{BDF}$. (On pourra utiliser la trigonométrie)

b) En déduire que les droites (BO) et (DF) sont perpendiculaires.

On notera K leur point d'intersection.

3. a) Démontrer que les droites (BF) et (EG) sont orthogonales.

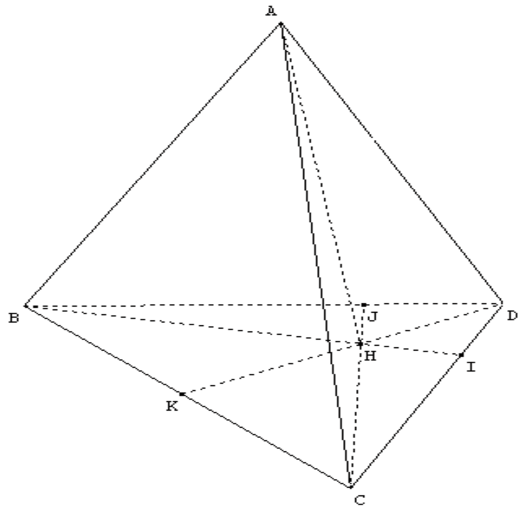
b) En déduire que la droite (EG) est perpendiculaire au plan (BFH).

c) Que peut-on en conclure pour les droites (EG) et (DF) ?

4. Démontrer que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BGE).

$\boxed{9}$ Soit ABCD un tétraèdre tel que les droites (AB) et (AC) sont respectivement orthogonales aux droites (CD) et (BD).

On désigne par H l'orthocentre du triangle BCD.



1. Démontrer que les plans (ABH) et (ACH) son perpendiculaires.

2. En déduire que : (AD) $\perp$ (BC).

$\boxed{10}$ ABCD est un tétraèdre tel que le triangle BCD soit équilatéral de côté a et tels que les triangles ABC, ACD et ABD soient rectangles en A et isocèles.

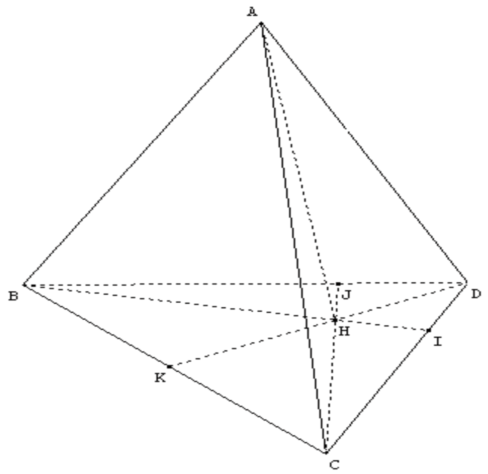
On désigne par G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Démontrer que G est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

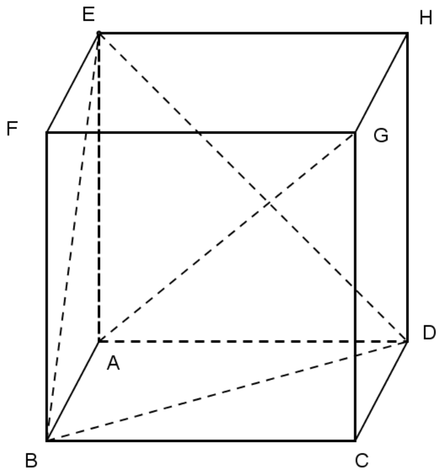
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est : $V = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{3}$.

$\boxed{11}$ ABCD un tétraèdre tel que les triangles ABC, ABD et ACD soient rectangles en A . On désigne par H l'orthocentre du triangle BCD.



1. Démontrer que les plans (AH) est orthogonale à (BC).
2. Déterminer le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

$\boxed{\textbf{12}}$ Soit le cube ABCDEFGH ci-dessous.



1.a) Démontrer que G appartient au plan (ACE).
b) Démontrer que (BD) est orthogonale au plan (ACE).
c) En déduire que les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.
2. Démontrer de même que les droites (AG) et (BE) sont orthogonales.

3. Déduire de ce qui précède la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

13

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DU PLAN

COMMENTAIRES

► Ce chapitre offre un nouveau point de vue pour résoudre les problèmes de géométrie.
► La seule nouveauté est la notion de vecteur normal.
► On pourra reprendre quelques exercices déjà résolus pour les traités analytiquement.
► Dans tout ce chapitre, le plan sera muni d'un repère orthonormé.
► Le recours à une figure sera un souci permanent du professeur.
► Les exercices de 2nde C en géométrie analytique pourrons être rappelés sous forme d'exercices.
► La notion d'équation normale d'une droite n'est pas un savoir exigible.
► La représentation paramétrique du cercle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
1. vecteur normal à une droite Définition Propriétés (vecteurs normaux de deux droites parallèles, de deux droites perpendiculaires, caractérisation d'une droite passant par un point et admettant un vecteur normal donné). 2. Equation cartésienne d'une droite d'une droite passant par un point et admettant un vecteur normal donné 3. Expression de la distance d'un point à une droite Propriété	☞ Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite dont une équation cartésienne est donnée. ☞ Déterminer une équation cartésienne d'une droite déterminée par un point et un vecteur normal. ☞ Etablir à l'aide de leurs vecteurs normaux que deux droites données par leurs équations cartésienne sont : parallèles ; Perpendiculaires. ☞ Calculer la distance d'un point à une droite dont une équation cartésienne est donnée.

COURS

Dans tout ce chapitre, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I. VECTEUR NORMAL A UNE DROITE

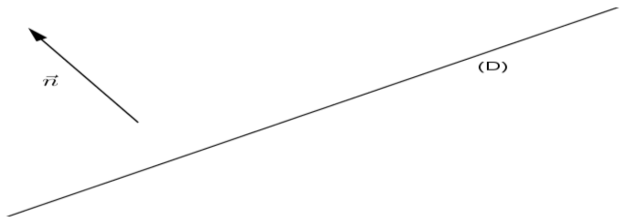
Activité

Soit la droite (D) dont une équation cartésienne est : $3x$-2y + 4= 0.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D).
2. Soit le vecteur $\vec{v}(3;-2)$. Démontrer que le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

1. Définition

On appelle vecteur normal à une droite (D) du plan, tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur quelconque de (D)



2. Equation cartésienne d'une droite

Propriétés

Soit a et b deux nombres réels tels que (a ; b) ≠ (0 ; 0).

● Toute droite du plan d'équation cartésienne de la forme $\mathrm{a}x + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$ a pour vecteur normal $\vec{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

● Toute droite de vecteur normal $\vec{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ admet une équation de la forme : $\mathrm{a}x + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$, où c est un nombre réel.

Exercices

1 Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dont une équation cartésienne est $7x - 4\mathrm{y} - 3 = 0$.

2 Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{\mathrm{n}}\binom{-2}{3}$.

3. Parallélisme et orthogonalité de droites

Propriétés

● Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
● Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exercices

$\boxed{1}$ Justifier que les droites (D) et (D') sont parallèles sachant que (D): $-x - 3y = 0$ et (D'): $2x + 6y - 1 = 0$.

$\boxed{2}$ Justifier que les droites (D) et (D') sont perpendiculaires sachant que (D): $8x - 5y + 2 = 0$ et (D') : $20x + 32y - 1 = 0$.

4. Caractérisation d'une droite passant par un point et admettant un vecteur normal donné

Propriété

La droite (D) passant par le point A(x_0, y_0) et admettant $\vec{n}\binom{a}{b}$ pour vecteur normal, admet une équation cartésienne de la forme $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Exercice

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(-3; -4)$ et de vecteur normal $\vec{u}\binom{2}{-1}$.

II. DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Activité

Soit le point A(-1 ;2) et la droite (D) d'équation $2x$ – y -3 = 0.
1. Construire A et (D).
2. Déterminer une équation de la droite (D') passant par le point A et perpendiculaire à (D).
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection H des droites (D) et (D').
4. En déduire la distance du point A à (D).

Propriété

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Pour tout point $M(x_0, y_0)$, la distance de M à (D) notée $d(M, (D))$, est donnée par :
$d(M, (D)) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercices

$\boxed{1}$ Calculer la distance du point A$(-1 ; 4)$ à la droite (D) d'équation : $6x - 5y + 2 = 0$.

$\boxed{2}$ Soit la droite (D) d'équation $x = -2$ et M(x ;y) un point donné.
Exprimer d(M ;(D)) en fonction de x et y.

EXERCICES

Dans tous les exercices, le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

$\boxed{1}$ Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur normal à la droite (D) :
a) (D) : $2x$-5y + 1 =0 ; b) (D) : y = x + 2 ;
c) (D) : y = -1 ; d) (D) : x = 5 ;
e) (D) est la droite passant par le point A(-1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}(5; -4)$;
e) (D) est la droite passant par le point I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$.

$\boxed{2}$ Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal :
a) A(0 ;$\sqrt{2}$) et $\vec{u}(1; 2)$; b) A(-5 ;3) et $\vec{u}(2; 0)$;
c) A= O et $\vec{u}\left(-3; \sqrt{3}\right)$.

$\boxed{3}$ Soit la droite (D) passant par le point K(-1 ; -2) et de vecteur normal $\vec{u}(3; 3)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point K et perpendiculaire à (D).

$\boxed{4}$ Soit la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.
1. Déterminer les vecteurs unitaires normaux à (D).
2. Déterminer les vecteurs normaux à (D) de norme égale à 2.

$\boxed{5}$ Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $4x$ + 6y +2 = 0 et $9x$ -6y +5 =0.
Démontrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

$\boxed{6}$ Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives x -3y +3 = 0 et $2x$ -6y +5 =0.
Démontrer que (D) et (D') sont parallèles.

$\boxed{7}$ Dans chacun des cas suivants, calculer la distance du point A à la droite (D) :
a) A(3 ;1) et (D) : $2x$-5y + 1 =0 ;
b) A(-1 ;-2) et (D) : y = 2 ;
c) A(2 ;2) et (D) : $2x$ + 5 = 0.

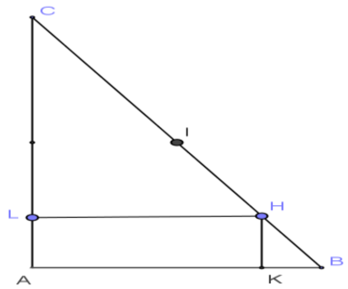
$\boxed{8}$ Soit M(x ; y) et (D) la droite d'équation : $2x$ + 4 = 0.
Calculer la distance de M à (D).

$\boxed{9}$ Soit A, B et C les points de coordonnées respectives (2 ; 5), (3 ; 1) et (-3 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle ABC et vérifier que ces hauteurs ont un point en commun.

$\boxed{10}$ Soit A, B et C les points de coordonnées respectives (-1 ; 2), (3 ; -2) et (-2 ; -1).
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Calculer CH.

$\boxed{11}$ Soit A, B et C les points de coordonnées respectives (-1 ; 5), (-2 ; -11) et (4 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de deux médiatrices du triangle ABC et calculer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit à ce triangle.

$\boxed{12}$ ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A, I est le milieu de [BC].
K et L sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur [AB] et [AC].



Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (AI) et (LK) sont perpendiculaires.
1. Choisir un repère orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées des points de la figure.
3. Conclure.

14

VECTEURS DE L'ESPACE

COMMENTAIRES

► Les élèves étant familiers des notions de vecteurs, de base, de repère et de produit scalaire dans le plan, on élargira rapidement sans théorie, ces notions à l'espace.
On évitera tout exposé magistral pour favoriser la mise en œuvre des propriétés dans des séances de travaux dirigés et d'exercices.
On s'appuiera le plus possible sur des supports visuels.
Le chapitre sera conduit comme une séance de TD.
► Sont hors programme :
- la notion de barycentre ;
- l'équation de la sphère et les surfaces de niveau.

CONTENUS	**CAPACITÉS ATTENDUES**
1. Vecteurs de l'espace, vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux Définition Propriétés 2. Caractérisation vectorielle d'une droite Propriété 3. Caractérisation vectorielle d'un plan Propriété 4.Vecteurs coplanaires Définition Propriétés 5. Bases de l'espace, bases orthonormées Définitions Coordonnées d'un vecteur Propriétés 6. Repères de l'espace, repères orthonormés Définitions Coordonnées d'un point 7. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace Définition Propriétés Expression du produit scalaire, de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée. Traduction de l'orthogonalité de deux vecteurs dans une base orthonormée. Expression de la distance de deux points dans un repère orthonormé.	☞ Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires. ☞ Démontrer qu'un triplet de vecteurs est une base. ☞ Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée. ☞ Effectuer des calculs dans une base donnée. ☞ Déterminer un repère de l'espace. ☞ Déterminer les coordonnées d'un point dans un repère donné. ☞ Représenter des points dans un repère donné. ☞ Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée. ☞ Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux. ☞ Calculer la norme d'un vecteur dans une base orthonormée. ☞ Calculer la distance de deux points dans un repère orthonormé.

COURS

I. VECTEURS DE L'ESPACE

1. Généralités

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace. Les propriétés suivantes, en particulier, restent vraie :

– Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

– Pour tous points A, B, C et D de l'espace, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.

– Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

– La définition du produit d'un vecteur par un réel ainsi que les règles de calcul sont les mêmes que celles du plan.

– Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel a tel que $\vec{u} = a\vec{v}$ ou $\vec{v} = a\vec{u}$.

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Dans la suite de cet ouvrage, l'ensemble des vecteurs de l'espace sera noté $\mathcal{W}$ et l'espace sera noté $\mathcal{E}$.

2. Caractérisation vectorielle d'une droite

Propriété

Soit A un point de l'espace $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un nombre réel est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

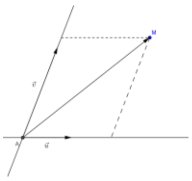
Cette droite est appelée droite de repère (A ; $\vec{u}$) et notée $\mathcal{D}(A; \vec{u})$.

3. Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété

Soit A un point de l'espace $\mathcal{E}$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $\mathcal{W}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels est un plan .

Ce plan est appelé plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou plan de repère (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$) noté $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.



4. Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque, ayant choisi un point O quelconque, ce point O et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont coplanaires.

Propriétés

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, non colinéaires.
Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété 2

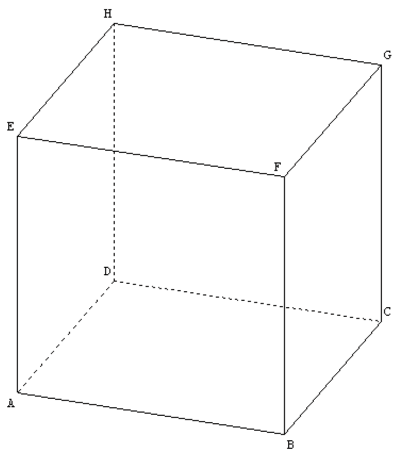
Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois nombres réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Propriété 3

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si l'unique triplet de nombres réels (α, β, γ) tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est $(0; 0; 0)$.

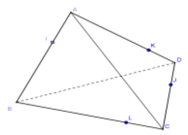
Exercice 1

ABCDEFGH est le cube ci-dessous.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires.



Exercice 2

ABCD est un tétraèdre et I,J,K,L sont les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

II. BASES DE L'ESPACE $\mathcal{W}$

1. Bases de l'espace, bases orthonormées

Définitions

· On appelle base de l'espace $\mathcal{W}$, tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs de l'espace, non coplanaires.
· Dire que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace signifie que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

2. Coordonnées d'un vecteur

Propriété et définition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace $\mathcal{W}$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels (x, y, z) tels que :
$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
(x, y, z) est appelé triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

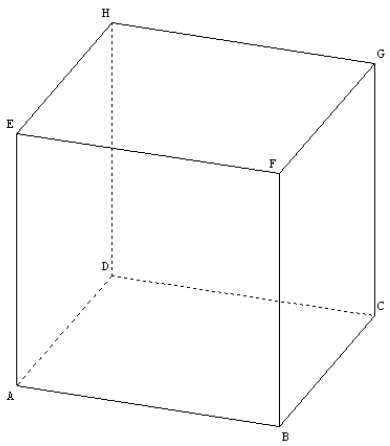
L'espace est muni de la base $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$. On considère les vecteurs $\vec{\mathrm{u}}$ et $\vec{\mathrm{v}}$ tels que :
$\vec{\mathrm{u}} = -5\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}}$ et $\vec{\mathrm{v}} = 2\vec{\mathrm{i}} - 3\left(2\vec{\mathrm{i}} + 3\vec{\mathrm{k}}\right) + 2(-\vec{\mathrm{j}} - 5\vec{\mathrm{k}})$.
Déterminer dans la base $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$, les coordonnées des vecteurs $\vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}$,$3\vec{\mathrm{u}}$ et $3\vec{\mathrm{u}} - 2\vec{\mathrm{v}}$.

Propriétés

Soit $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$ est une base de l'espace, k est un nombre réel ; $\vec{\mathrm{u}}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{\mathrm{u}'}(x'; y'; z')$ deux vecteurs.
● Les coordonnées de $\mathrm{k}\vec{\mathrm{u}}$ sont $(\mathrm{k}x; ky; kz)$.
● Les coordonnées de $\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{u}}'$ sont $(x + x'; y + y'; z + z')$.

Exercice 2

ABCDEFGH est le cube ci-dessous.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.



III. REPERES DE L'ESPACE, REPERES ORTHONORMES

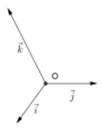
1. Repères de l'espace, repères orthonormés

Définitions

● On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$:
ou bien un quadruplet (O,I,J,K) de points de l'espace non coplanaires ;
ou bien un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ou O est point de $\mathcal{E}$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{W}$.

●Un repère (O, I, J, K) de l'espace est un repère orthonormé si $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est une base orthonormée de l'espace.

· Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est un repère orthonormé si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.



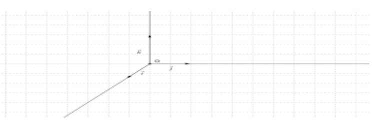
2. Coordonnées d'un point

Propriété et définition

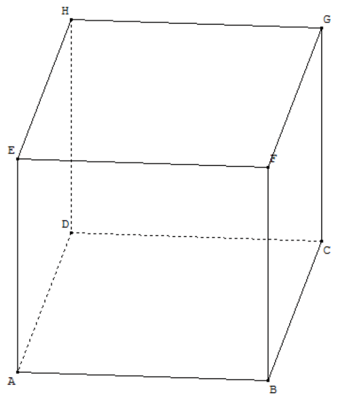
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels (x, y, z) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
(x, y, z) est appelé triplet de coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ci-dessous, construire les points A(2 ;4 ;5), B($-\frac{3}{2}$;-2 ;2) , C(0 ;1 ;-1).



Exercice 2
ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ci-dessous. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Déterminer les coordonnées des sommets du cube.

Exercice 3
L'espace est rapporté au repère$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées des points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} + 3\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{BI} - 4\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{JB} = \vec{O}$.

III. PRODUIT SCALAIRE

1. Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs (A, B) et(A, C) ,le nombre réel noté $\vec{u} \,.\, \vec{v}$ tel que :
$\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un au moins des deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ est nul ;
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$, si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

Remarques
- Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

2. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout nombre réel α :
(1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; (2) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;
(3) $\alpha \times (\vec{u}.\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v}$; (4) $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.

3. Expression du produit scalaire et de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace.
On a $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Conséquences

· Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

· Soit les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dan un repère orthonormé de l'espace.
On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exercice 1

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$.

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit les points $A(-2; 3; -1)$, $B(1; 4; -3)$
Calculer AB.

4. Traduction analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs

Propriété

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' + zz' = 0$.

Exercice 1

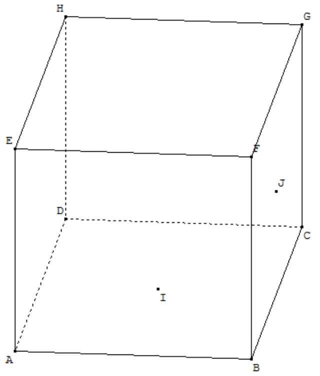
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$. On considère les vecteurs $\vec{u}(1; -2; 3)$ et $\vec{v}(5; 4; 1)$.
Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 2

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(-1 ; 1 ; 4), C(5 ; -1 ; 3) et D(3 ; 10 ; -2).
Démontrer que la droite (OF) est orthogonale au plan (ABC).

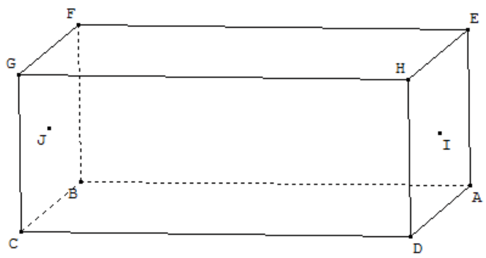
EXERCICES

1 Dans le cube ABCDEFGH, le point I est le centre de la face ABCD et le point J celui de la face BCGF.



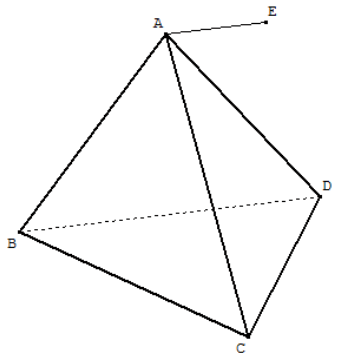
Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

2 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I est le centre de la face EHDA et J celui de la face FBCG.



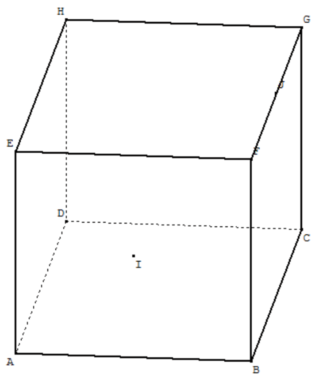
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.

3 ABCD est un tétraèdre. E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.



Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

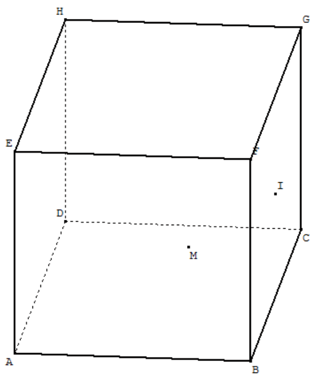
4 ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs de [EB] et [FG].



Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires.

5 ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face BCGF.

Le point M est tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{O}$.

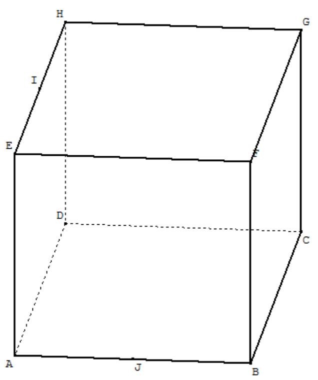


Démontrer que les points B, M et H sont alignés.

6 Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$.
On considère les vecteurs $\vec{u}(-2; 1; 0)$, $\vec{v}(2; 0; -1)$ et $\vec{w}(0; 1; -2)$.
Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

7 Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points A(5 ;0 ;0), B(2 ;-1 ;1), C(10 ;1 ;-2) et D(3 ;2 ;1).
1. Placer ces points.
2. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

8 ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs de [EH] et [AB].



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ dans la base $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires.

9 Soit A$\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1. Placer les points A, B et C sur une figure.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

10 Soit A$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-2\\0\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1. Placer les points A, B et C sur une figure.
2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

11 Dans une orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(2; -1; 1)$, $\vec{v}(3; 3; -3)$
1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$.
2. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Calculer $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$.

12 Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points A(-1 ;1 ;3), B(2 ;1 ;-1), C(-1 ;6 ;3) .
1. Placer ces points.
2. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

13 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, puis calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$.
2. En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

15

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

COMMENTAIRES

Les deux résultats fondamentaux de ce chapitre (équations cartésiennes d'un plan (P) défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, représentation paramétrique d'une droite (D) définie par un point et un vecteur directeur) sont établis à partir de deux propriétés fondamentales :

M ∈ (P) ⇔ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$;

M ∈ (D) ⇔ $\overrightarrow{AM} = k\vec{n}$.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES

1. vecteur normal à un plan. Définition Propriétés 2. Equations cartésiennes d'un plan 3.Représentation paramétrique d'une droite de l'espace. 4. Expression de la distance d'un point à un plan. Propriété	☞Déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal. ☞ Démontrer qu'une droite est orthogonale à plan défini par une équation cartésienne. ☞ Démontrer qu'une droite est parallèle à plan défini par une équation cartésienne. ☞ Démontrer que deux plans définis par une équation cartésienne sont parallèles ou perpendiculaires. ☞ Calculer la distance d'un point à un plan dont une équation cartésienne est donnée. ☞ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur. ☞ Déterminer la position relative d'une droite et d'un plan, de deux droites, de deux plans : les droites étant définies par une représentation paramétrique et les plans par une équation cartésienne.

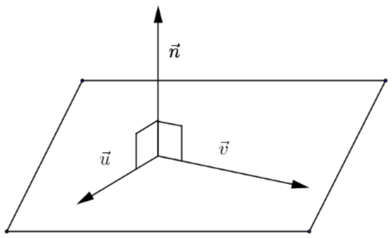
COURS

Dans tout ce chapitre, l'espace est muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

I. VECTEUR NORMAL À UN PLAN

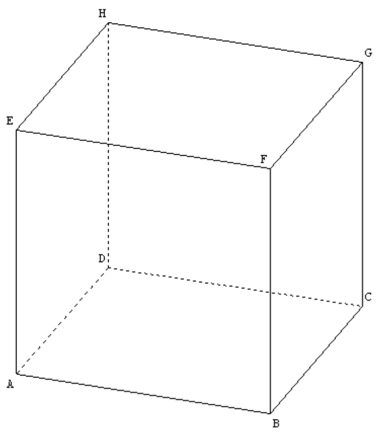
Définition

Soit $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace, $(\vec{u},\vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$.
On appelle vecteur normal à $(\mathscr{P})$, tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Exemple

ABCDEFGH est le cube ci-dessous.



Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABC).

2. **Caractérisation d'un plan**

Propriétés

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
● Il existe un unique plan de l'espace passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
● Soit A un point de l'espace ; $\vec{n}$ un vecteur non nul et $(\mathscr{P})$ le plan de l'espace passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Pour tout point M de l'espace, $M \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

II. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Propriétés

Soit a, b et c des nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$.
● Une équation cartésienne du plan défini par un point A(x_0, y_0, z_0) et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ est : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
● Toute équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d ∈IR, est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice

Soit les points A$(1; 2; -3)$ et le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan ($\mathscr{P}$) passant par A et de vecteur normal $\vec{w}$.

III. DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

Propriété

Soit ($\mathscr{P}$) un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et le point A(x_0, y_0, z_0).
La distance de A à ($\mathscr{P}$) est le nombre réel noté d(A, ($\mathscr{P}$)) tel que : d(A, ($\mathscr{P}$)) = $\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice

Soit le point A$(-4; -5; 3)$ et le plan ($\mathscr{P}$) d'équation $2x + y - 5z - 3 = 0$.
Calculer la distance du point A au plan ($\mathscr{P}$).

IV. REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Définition

Soit le point A(x_0, y_0, z_0) , le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et la droite ($\mathscr{D}$) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le système $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une **représentation paramétrique** de ($\mathscr{D}$).

Exercice
Déterminer une représentation paramétrique de la droite ($\mathscr{D}$) passant par le point $\mathrm{H}(1; 2; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{\mathrm{v}}\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$.

V. POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

1. Positions relatives de deux droites

Soit ($\mathscr{D}$) la droite de repère (A, $\vec{u}$) et ($\mathscr{D}$') la droite de repère (B, $\vec{v}$).

Propriété

● Si $\vec{\mathrm{u}}$ et $\vec{\mathrm{v}}$ sont colinéaires alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont confondues ou strictement parallèles.
● Si $\vec{\mathrm{u}}$ et $\vec{\mathrm{v}}$ ne sont pas colinéaires alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont sécantes ou non coplanaires :
- si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont sécantes ;
- si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont non coplanaires.

Exercice
Soit ($\mathscr{D}_1$), ($\mathscr{D}_2$) et ($\mathscr{D}_3$) les droites de l'espace , de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 3\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -1 + 2\beta \\ y = -4\beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que ($\mathscr{D}_1$) et ($\mathscr{D}_2$) sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.
2. Démontrer que ($\mathscr{D}_1$) et ($\mathscr{D}_3$) sont strictement parallèles.
3. Démontrer que ($\mathscr{D}_3$) et ($\mathscr{D}_2$) sont non coplanaires.

2. Positions relatives de deux plans

Propriété

Soit ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
· Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') sont confondus ou strictement parallèles.
· Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') sont sécants.

Exercice
Soit les plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') d'équations cartésiennes respectives
$-x + 2y - 3z + 1 = 0 \; et \; x - 2y + z - 3 = 0.$
Démontrer que ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur intersection.

3. Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

Propriété

Soit ($\mathscr{D}$) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et ($\mathscr{P}$) un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
· Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors ($\mathscr{D}$) est incluse dans ($\mathscr{P}$) ou ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont strictement parallèles.
· Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont sécants.

Exercice

Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') les droites de l'espace, de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 4 - 3m \\ y = 1 + 5m \\ z = -3 - 2m \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$; et $\begin{cases} x = -2 + 6p \\ y = -1 - p \\ z = 2 - 4p \end{cases}$ avec $p \in \mathbb{R}$.

Soit le plan ($\mathscr{P}$) d'équation cartésienne $x + y + z + 2 = 0$.

1. Démontrer que ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{P}$) sont strictement parallèles.
2. Démontrer que ($\mathscr{D}$') et ($\mathscr{P}$) sont sécants et déterminer leur point d'intersection.

EXERCICES

1 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A(2 ;-1 ;1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$.

2 On donne la droite

($\mathscr{D}$) : $\begin{cases} x = 2 + a \\ y = -1 + 3a \,; avec\ a \in IR; \\ z = 2 \end{cases}$ et le plan

($\mathscr{P}$) : -2x-6y + 5 = 0.

Démontrer que ($\mathscr{D}$) est orthogonale au plan ($\mathscr{P}$).

3 Démontrer que la droite ($\mathscr{D}$) passant par le point B$\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est orthogonale au plan ($\mathscr{P}$) d'équation :

-4x +2y -6z +3= 0.

4 On donne la droite

($\mathscr{D}$) : $\begin{cases} x = 2 + 3a \\ y = -1 - a \,; avec\ a \in IR; \\ z = 2 + a \end{cases}$

et le plan ($\mathscr{P}$) : 5x + 2y – 13z + 1 = 0.

Démontrer que ($\mathscr{D}$) est parallèle au plan ($\mathscr{P}$).

5 Soit ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$) les plans d'équations respectives : x + y – z = 0 et 2x – y+z -3 = 0.

Démontrer que ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$) sont sécants.

6 Soit ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$) les plans d'équations respectives : 3x + y – z + 8 = 0 et

6x + 2y -2z -1 = 0.

Démontrer que ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$) sont parallèles.

7 Calculer les distances :

a) du point O(0 ;0 ;0) au plan ($\mathscr{P}$) d'équation x + y = 0.

b) du point A(-2;0 ;-5) au plan ($\mathscr{P}$) d'équation -x + 2y + 2z + 4 =0.

8 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A(-5 ;2 ;1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

9 Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') les droites de représentations paramétriques respectives

$\begin{cases} x = 2 + 3a \\ y = -1 - a \,; avec\ a \in IR, \\ z = 2 + a \end{cases}$

$\begin{cases} x = -15b \\ y = 6 + 5b \,; avec\ b \in IR. \\ z = 1 - 5b \end{cases}$

Démontrer que ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont strictement parallèles.

10 Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$')les droites de représentations paramétriques respectives

$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 1 \,; avec\ t \in IR, \\ z = 3t + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{2}k \quad , avec\ k \in IR. \\ z = \frac{9}{7}k - 8 \end{cases}$

Démontrer que ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

11 Soit ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') les droites de représentations paramétriques respectives

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \,; avec\ t \in IR, \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \quad , avec\ t \in IR. \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

Démontrer que ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}$') ne sont pas coplanaires.

12 Soit ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') les plans d'équations respectives x = 0 et 2x – 2y –z+ 3=0.

Démontrer que ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{P}$') sont sécants.