

AVANT-PROPOS

Fondée sur la pratique du programme de mathématiques actuellement en vigueur en Terminale C en Côte d'Ivoire, la collection SPM propose un ouvrage clair et concis.

Elle est l'œuvre des conseils d'enseignement mathématique (C.E) et de l'association des professeurs de mathématiques de la Vallée du Bandama (APMVB).

Dans l'élaboration de ce manuel, notre souci a été de respecter strictement le programme défini par les instructions officielles et précisé dans le document Enseignement mathématique .

Les chapitres de ce manuel ont la même structure :

◆ des prérequis

Les exercices proposés visent à consolider les acquis des classes antérieures.

◆ le cours

Il est bref mais complet. Nous avons respecté strictement les limites du programme, évité tout débordement qui impacte négativement les progressions.

◆ des exercices d'applications

Ces exercices corrigés visent à l'acquisition des définitions et propriétés. Nous avons beaucoup mis l'accent sur la rédaction afin d'aider nos élèves à rédiger avec clarté et précision.

◆ des exercices et des problèmes

Nombreux et variés, ces exercices et problèmes permettent aux élèves de s'entraîner efficacement et aborder ainsi les devoirs dans les meilleures dispositions.

A la fin de cet ouvrage, on trouvera des sujets des BAC 2008, 2009, 2010, 2011, 2012 et les corrigés du bac 2011 et du bac 2012.

Nous espérons, par ce manuel, améliorer l'enseignement des Mathématiques en Côte d'Ivoire et lutter efficacement contre l'échec scolaire.

Pour la rédaction de ce manuel, nous remercions tous les C.E et U.P de la vallée du Bandama ainsi que les professeurs dont les noms suivent qui par leur contribution ont rendu possible la réalisation de cet ouvrage.

- SIAKA TRAORE Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- KONAN KOUAME GREGOIRE Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- KONAN STANISLAS YAO Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- SORO HOUAMEBA Professeur au Lycée moderne 2 de Bouaké
- YEO NGOLO Professeur au Lycée moderne Belleville de Bouaké
- KONE DAHIRI Professeur au Lycée moderne Nimbo de Bouaké
- BAKAYOKO LASSINE Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- SORO DONIKPOHO Professeur au Lycée Classique 1 de Bouaké
- ANSELME ADOHOUKE Professeur au collège catholique Saint Viateur de Bouaké
- KARAMOKO MAMADOU Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- YAO KOFFI BLAISE Professeur au Lycée municipal Djibo de Bouaké
- LAMIDI SALIMANOU Professeur au Lycée moderne Belleville de Bouaké
- DOUMBIA LOSSENI Professeur au Lycée classique1 de Bouaké
- KOUAKOU RODOLPHE Professeur au Lycée Martin Luther King de Bouaké
- KONE MOUSSA Professeur au Lycée classique 1 de Bouaké
- SEKONGO ZIE Professeur au collège la performance de Bouaké

Les Auteurs

SOMMAIRE

ANALYSE

1 LIMITE ET CONTINUITE.....	5
I) Limite d'une fonction composée	
II) Limite d'une fonction monotone sur un intervalle	
III) Branches paraboliques	
IV) Continuité sur un intervalle	
V) Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle	
VI) Fonction racine nième	
2 DERIVABILITE.....	25
I) Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite	
II) Dérivabilité sur un intervalle	
III) Dérivabilité d'une fonction composée	
IV) Dérivabilité de la bijection réciproque	
V) Dérivées successives	
VI) Inégalités des accroissements finis	
3 PRIMITIVES.....	43
I) Notion de primitive	
II) Définition	
III) Détermination d'une primitives	
4 FONCTION LOGARITHME	
NEPRIEN.....	49
I) Définition et propriétés	
II) Etude et représentation graphique	
III) Fonctions du type $\circ$, $\circ$	
IV) Logarithme décimal	
5 FONCTION EXPONENTIELLE	
NEPERIENNE.....	75
I) Définition et propriétés	
II) Etude et représentation graphique	
III) Fonctions du type $\circ$, $\circ$	
6 FONCTIONS PUISSANCES.....	95
I) Puissance d'un réel strictement positif	
II) Fonction exponentielle de base a	
III) Fonctions puissances d'exposant un réel non nul	
7 SUITES NUMERIQUES.....	105
I) Raisonnement par récurrence	
II) Sens de variation d'une suite numérique	
III) Suite majorée , suite minorée	
IV) Limite d'une suite numérique	
V) Suites arithmétiques, suites géométriques	
VI) Croissances comparées	
VII) Propriétés de comparaison	
VIII) Suites récurrentes	
6 CALCUL INTEGRAL.....	127
I) Intégrale d'une fonction continue	
II) Propriétés de l'intégrale	
III) Intégration par parties	
IV) Changement de variable affine	
V) Période, parité et intégration	
VI) Calcul d'aire	
8 EQUATIONS	
DIFFERENTIELLES.....	151

- I) Définition
- II) Equations différentielles du type $y' = my$
- III) Equations différentielles du type $y'' = my$

ALGEBRE ET GEOMETRIE

1 BARYCENTRE.....	161
I) Barycentre de n points pondérés	
II) Lignes et surfaces de niveau	
2 NOMBRES COMPLEXES.....	181
I) Définition et représentation géométrique	
II) Argument d'un nombre complexe non nul	
III) Notation exponentielle	
IV) Equation du second degré dans $\mathbb{C}$	
V) Racines nième d'un nombre complexe non nul	
VI) Utilisation en géométrie	
3 NOMBRES COMPLEXES ET	
TRANSFORMATIONS DU PLAN.....	213
I) Transformations du plan	
II) Ecritures complexes de quelques transformations du plan	
4 ISOMETRIES DU PLAN	219
I) Isométries	
II) Propriétés	
III) Composition d'isométries	
IV) Classification des isométries	
V) Déplacement – Antidéplacement	
VI) Détermination d'une isométrie	
5 SIMILITUDES DIRECTES PLANES.....	239
I) Définition	
II) Propriétés	
III) Détermination d'une similitude directe	
6 LES CONIQUES.....	253
I) Définition mono focale	
II) Equation réduite et éléments caractéristiques	
III) Définition bifocale	
IV) Définition analytique	
7 ARITHMETIQUE.....	267
I) Propriétés dans $\mathbb{IN}$	
II) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	
III) Raisonnement par récurrence	
IV) Division euclidienne	
V) Congruence modulo n	
VI) Numération décimale et binaire	
VII) Nombres premiers	
VIII) PGCD et PPCM	
IX) Théorèmes de Bézout et de Gauss	
8 PROBABILITES.....	295
I) Rappels de dénombrement	
II) Probabilités	
RUBRIQUES PROBLEMES	315
SUJETS DE BAC	327

ANALYSE

1. LIMITES ET CONTINUITÉ

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle x .

LIMITES (rappels)

Exercice 1 Complétez le tableau ci-dessous :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
	—					
—					Si $g < 0$	si $g > 0$
					si $g < 0$	si $g < 0$
	$-\infty$					
∞	∞					
∞	$-\infty$					
	∞					
∞	$-\infty$					
					si $g > 0$	si $g > 0$
					si $g < 0$	si $g < 0$
$-\infty$	$-\infty$					

Les formes indéterminées rencontrées en PREMIÈRE sont : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercice 2 Limite en un nombre réel

Calculer la limite de f en x_0

a) $f(x) = -x^3 + x^2$; $x_0 = -$; b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2 - x}$; $x_0 = -$;

c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$; $x_0 = -$;

Exercice 3 Limites des fonctions polynômes et rationnelles en l'infini.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = -x^3 + x^2$; $x = -$; b) $f(x) = \frac{5 + 2x}{x^2 + x + 1}$; c) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$;

d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{2 - x}$; e) $f(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 3x + 1)^5}$; f) $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 + x}$;

g) $f(x) = x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)$; h) $f(x) = x^4 - x^2$; i) $f(x) = \frac{-3x^2 - 2x - 1}{2 - x^2}$;

j) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$; k) $f(x) = x - \frac{x - 1}{x^2 + 1}$; l) $f(x) = x^5 - 3x^2$;

Exercice 4 Factorisation du terme prépondérant

Calculer la limite de f en $+\infty$.

a) $f(x) = x - \sqrt{x}$; b) $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{x - 1}$; c) $f(x) = x\sqrt{x} - x^2$;

Exercice 5 Utilisation de l'expression conjuguée

Calculer la limite en a de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$, $a = 81$; b) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x+5}-3}$, $a = -5$.

Exercice 6 Asymptotes

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3-x}{-x^2+x+2}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées à (C).

Exercice 7 Continuité en un nombre réel.

a) Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

b) Etudier la continuité en 1 de la fonction g définie sur $] -\infty ; 2]$ par :

$g(x) = \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}$ $x \neq 1$ $g(1) = -\frac{1}{2}$

Exercice 8

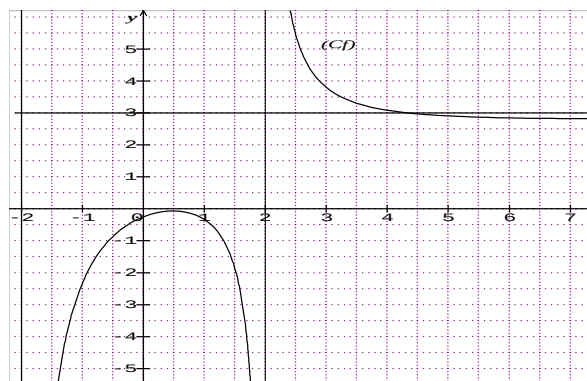
f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2-7x}{x-3}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (Cf).

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère (O,I,J), on considère la courbe ci-contre représentant une fonction f définie sur $] -2 ; 2] \cup] 2 ; +\infty [$. Les droites (D₁), (D₂) et (D₃) d'équations respectives $x = -2$, $x = 2$ et $y = 2$ sont des asymptotes à (C_f). Déterminer :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

**Exercice 10**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{4}{x-2}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. a. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 2. Interpréter graphiquement les résultats
- b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. A) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C).
- b) Etudier la position de (C) et (D).
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec l'axe des ordonnées
5. Démontrer que le point $\Omega(2 ; 1)$ est centre de symétrie de (C).
6. Tracer (C).

Exercice 11

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I; J).

- Justifier que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; \infty[$.
- Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$.
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
- Démontrer que la droite (Δ d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de (C).
- Tracer (C).

I. LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Théorème

Soit $g \circ f$ la composée de la fonction f suivie de la fonction g .

a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ soit $-\infty$.

On suppose que $g \circ f$ est définie sur un intervalle I et que a est un élément ou une borne de I .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$
(b et ℓ sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercice résolu 1

- Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}}$.
- Calculer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.
- Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; \infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x - \frac{1}{4}}$.

Solution

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2+1} \right) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} \right) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0$.

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

2) On pose: $X = x$ ou $\frac{x}{2}$, quand $x \rightarrow 0$, alors $X \rightarrow 0$.

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X}$.

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

3) Pour calculer la limite de f en $-\infty$, transformons $f(x)$ à l'aide de l'expression conjuguée.

$$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{x^2-x-2}]; f(x) = \frac{[\sqrt{x^2-x-2}+x-2][\sqrt{x^2-x-2}-x-2]}{\sqrt{x^2-x-2}-x-2} = \frac{(x^2-x-2)-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x-2}$$

$$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{x^2-x-2}]; f(x) = \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-x-2}-x-2} = \frac{x(3-\frac{6}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}-x-2}$$

$$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{x^2-x-2}]; f(x) = \frac{x(3-\frac{6}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-(x-2)} = \frac{x(3-\frac{6}{x})}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-(x-2)} \quad \text{car } x < 0$$

$$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{x^2-x-2}]; f(x) = \frac{x(3-\frac{6}{x})}{x(-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{2}{x})} = \frac{3-\frac{6}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}$$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - \frac{6}{x}) = 3$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{6}{x}) = 0$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2}{x^2}) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$ de plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{2}{x}) = 0$

On conclut $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$.

Exercice 1.1

La fonction f est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ et a pour tableau de variation le tableau ci – contre :

En utilisant ce tableau,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

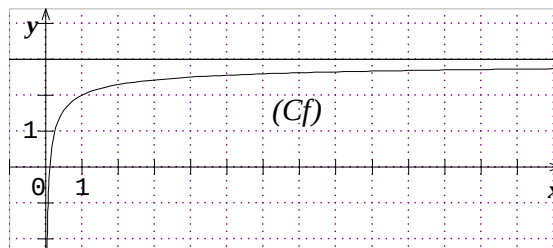
donner les limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

II. LIMITE D'UNE FONCTION MONOTONE SUR UN INTERVALLE OUVERT

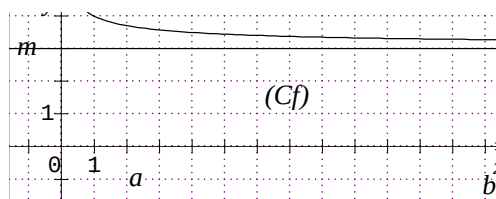
Théorème 1

et des nombres réels ou infinis.
Si f croissante et majorée sur $]a, b[$
alors f admet une limite finie ℓ b
Si f est majorée par M alors $\ell \leq M$.



Théorème 2

Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ b
Si f est minorée par m alors $\ell \geq m$.



Théorème 3

- Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ
- Si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie ℓ

Exercice résolu 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- a) Démontrer que : $\forall x \in [1; +\infty[$, on a : $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.
- b) En déduire que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et donner un encadrement de ℓ .

Solution

a) $\forall x \in \mathbb{R} f' x$ donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, donc :
si $x \geq 1$ alors $f(x) \geq f(1)$. (1)

Soit u la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $u(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{x} + 1 + f(1)\right)$.

$\forall x \in [1; +\infty[$, $u(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{x} + 1 + f(1)\right) = f(x) + \frac{1}{x} - 1 - f(1)$. $\forall x \in [1; +\infty[$, $u(x) < 0$, donc u est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Alors pour $x \geq 1$, on a : $u(x) \leq u(1)$ or $u(1) = f(1) - \left(-\frac{1}{1} + 1 + f(1)\right) = f(1) - 0 = f(1)$, donc : pour $x \geq 1$, on a : $u(x) \leq f(1)$.

Ainsi, $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$. (2)

D'après (1) et (2) : $\forall x \in [1; +\infty[$, on a : $f(1) \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} + 1 + f(1)$.

b) $\forall x \in [1; +\infty[$, $-\frac{1}{x} \leq 0$ donc $-\frac{1}{x} + 1 + f(1) \leq 1 + f(1)$.

La fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et majorée par f donc f admet une limite finie ℓ . Alors $f \leq \ell \leq f$.

III. BRANCHES PARABOLIQUES DE DIRECTION (OI) ET (OJ)

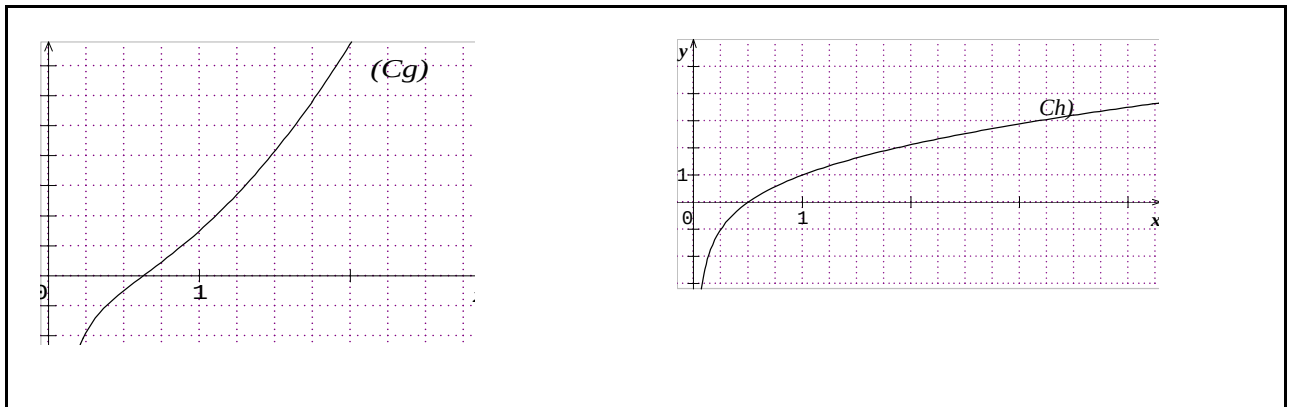
Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

b) En déduire que (C_f) admet en $+\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

Activité 2

Soit g et h les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \frac{1}{2x}$ et $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$, dont les courbes représentatives sont données :



Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$.

Interprétation graphique :

On dit que (C_g) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

On dit que (C_h) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI).

On retiendra que :

- si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$, on dit que (C_f) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (OI)**.
- si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$, on dit que (C_f) admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction (OJ)**.

NB : La définition se reconduit si l'on remplace $\rightarrow +\infty$ par $x \rightarrow -\infty$.

Exercice résolu 3

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{x-1} - \sqrt{x}$ et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé (O,I,J).

Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI).

Solution

f est définie sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$. Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$

Donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\forall x \in]1;+\infty[, \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{x+1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{2}{x^2-x} - \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}}$$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right)$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$

donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1}} = 0$.

On conclut: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI).

IV. CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

1. Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout nombre réel de I .

2. Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un nombre réel n'appartenant pas à D_f .

Si f admet une limite finie ℓ en a alors la fonction g définie sur $D_f \cup \{a\}$ par :

$g(a) = \ell$ et $\forall x \in D_f, g(x) = f(x)$ est continue en a et est appelée **le prolongement par continuité de f en a** .

Exemple

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = f(x)$ est le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice résolu 4

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$

Démontrez que f admet en 9 un prolongement par continuité et définissez le prolongement continu g .

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$
 f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Solution

1. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x-5 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-5}-2 \neq 0 \}$

$x-5 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x-5}-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ et } \sqrt{x-5} \neq 2 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ et } x-5 \neq 4 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ et } x \neq 9$.

Donc : $D_f = [5; 9[\cup]9; +\infty[$.

$$\forall x \in D_f, f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x-5}-2} \cdot \frac{\sqrt{x-5}+2}{\sqrt{x-5}+2} = \frac{x-9}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x-5}+2}{1} = \sqrt{x-5}+2$$

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x-5}+2)$

Ainsi, $9 \notin D_f$ et f admet une limite finie en 9 donc f est prolongeable par continuité en 9 .

Soit φ le prolongement par continuité de f en 9 . φ est définie sur $D_f \cup \{9\} = [5; +\infty[$ par :
 $\varphi(9) = 4$ et $\forall x \in D_f, \varphi(x) = f(x)$.

Remarque: φ est définie sur $[5; +\infty[$ par: $\varphi(x) = \sqrt{x-5}+2$.

2 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x}{x-1}$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ainsi f n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0 .

3. Opérations

Propriété 1

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, sinus, cosinus et tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

■ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , alors :

- $f+g$, $f-g$ et $|f|$ sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- Si f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Propriété 2

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

4. Image d'un intervalle

Propriété 1

Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle.

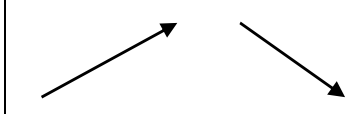
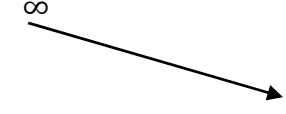
Propriété 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . a b des nombres réels .

Intervalle I	f est continue et strictement croissante sur I	f est continue et strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$f(a), b \quad f(a) \quad \underset{x \rightarrow b}{<} f(x)$	$f(a), b \quad \underset{x \rightarrow b}{<} f(x) \quad f(a)$
$]a, b[$	$f(a), b \quad \underset{x \rightarrow a}{>} f(x) \quad \underset{x \rightarrow b}{<} f(x)$	$f(a), b \quad \underset{x \rightarrow b}{<} f(x) \quad \underset{x \rightarrow a}{>} f(x)$
$[a, +\infty[$	$f(a), \infty \quad f(a) \quad \underset{x \rightarrow +\infty}{f(x)}$	$f(a), \infty \quad \underset{x \rightarrow +\infty}{f(x)} \quad f(a)$

Exemple

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et a pour tableau de variation:

x	$-\infty$	$-$		∞
$f'(x)$		$-$		$-$
$f(x)$	$-$			∞

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ donc : $f(]-\infty; -1]) =]-2; 5]$.

f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc : $f(]0; +\infty[) =]1; +\infty[$.

f est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; 0[$ donc : $f([-1 ; 0[) =]1 ; 5]$.
 $f(]-\infty ; 0]) = f(]-\infty ; -1]) \cup f([-1 ; 0]) =]-2 ; 5] \cup]1 ; 5] =]-2 ; 5]$.

V. FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR UN INTERVALLE

1. Bijection

Théorème 1

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- f est une bijection de I sur $f(I)$.
- la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone (de même sens de variation que f) sur $f(I)$.

Exercice résolu 5

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} . Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

Solution

1. $D_f = \mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ et $f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
 f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ par suite f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [0 ; 1[$.

2. Pour tout $y \in [0 ; 1[$ déterminons $x \in [0, +\infty[$ tel que : $f(x) = y$.
 $x \in [0, +\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\wedge \frac{x^2}{1+x^2} = y$
 $\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\wedge x^2 = y(1+x^2)$
 $\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\wedge x^2 = y - yx^2$
 $\Leftrightarrow x \in [0, +\infty[\wedge x^2(1+y) = y$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{1+y}}$.

f^{-1} est donc définie sur $[0 ; 1[$ par : $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

f^{-1} a le même sens de variation que f donc f^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1[$.

2. Equation

Théorème1

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout $m \in f(I)$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans I .

Exercice résolu 6

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $[-1 ; +\infty[$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	5	$-\infty$

- Justifier que l'équation $f(x) = -10$ admet une unique solution dans $[-1 ; +\infty[$.
- L'équation $f(x) = 13$ admet-elle une solution dans $[-1 ; +\infty[$?

Solution

- D'après le tableau de variation, f est continue et strictement décroissante sur $[-1 ; +\infty[$, $f(-1) = -\infty$ et $f(5) = -10$ donc l'équation $f(x) = -10$ a une solution unique dans $[-1 ; +\infty[$.
- $13 \notin]-\infty ; 5]$ donc l'équation $f(x) = 13$ n'a pas de solution dans $[-1 ; +\infty[$.

Corollaire

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a ; b[$.

Exercice résolu 7

Démontrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique solution α . Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Existence et unicité de α :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 1$. Par suite, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$. f est donc

continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;1]$, de plus on a $f(-) = -f()$ puisque $f(-x) = -f(x)$ et $f(1/x) = 1/f(x)$; Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

Valeur approchée de α à 10^{-1} près :

Pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-1} près, on effectue un balayage de $[0;1]$ avec un pas égal à 0,1 jusqu'à trouver les deux premiers nombres dont les images sont de signes contraires

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	-1	-0,7	-0,38	-0,05	0,3

On a : $f(0,3) < 0$ et $f(0,4) > 0$ donc $0,3 < \alpha < 0,4$. Une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 0,3.

VI. FONCTION RACINE N-IEME, PUISSANCE D'EXPOSANT RATIONNEL

1. Fonction racine n -ième

Définition

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

la fonction racine n -ième est la bijection réciproque de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^n$.

La racine n -ième d'un réel positif ou nul x est notée $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x}^n = x \quad x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x \quad \sqrt[n]{x^n} = x$$

Remarque: La touche $\sqrt[n]{}$ de la calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt[n]{x}$

Exemple $x \in \mathbb{R}^+ : x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} ; \sqrt[4]{16} = 2 ; \sqrt[5]{120} \approx 2,27$.

2. Puissance d'exposant rationnel d'un réel positif

Définition

Soit p un entier relatif non nul et q un entier $q \geq 2$.

pour tout réel a strictement positif, on pose : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Propriétés

Pour tous nombres rationnels r, r' non nuls et pour tous nombres réels strictement positifs a, b on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^r a^{r'} &= a^{r+r'} & \blacksquare \frac{1}{a^r} &= a^{-r} & \blacksquare \frac{a^{r'}}{a^r} &= a^{r'-r} & \blacksquare \frac{1}{a^{r-r'}} &= a^{r-r'} \\ \blacksquare a^{r-r'} &= a^{rr'} & \blacksquare a^r b^r &= (ab)^r & \blacksquare \frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r \end{aligned}$$

Exercice 6.1

a) Soit a un nombre réel strictement positif. Mettre sous la forme a^α le nombre

suivant : $\sqrt{\sqrt{a}} = \frac{a^3}{\sqrt{a^{10}}}$; $\sqrt[3]{a} = \sqrt[4]{a}$.

b) Justifier que : $\frac{4^{10}\sqrt{8}}{\sqrt[5]{256}} = 2\sqrt{\quad}$;

c) Justifier que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5b}} = \sqrt[3]{ab^5} = ab$

Exercice résolu 8

Soit la fonction $g : [1;3] \rightarrow [0;4]$

$$x \mapsto -x^2 - x$$

1. Démontrer que g est une bijection

2. déterminer la bijection réciproque g^{-1} .

Solution

1) g est dérivable sur $[1;3]$. $\forall x \in [1;3]$, $g'(x) = -2x - 1 < 0$.

x	$-\infty$		∞
$-x$			$-$

$$\forall x \in [1;3], g'(x) < 0$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1;3]$ et

$g([1;3]) = [g(3); g(1)] = [0;4]$ donc g est une bijection.

2) $\forall y \in [0;4]$, l'équation $g(x) = y$ admet une solution unique dans $[1;3]$ car g est une bijection.

Soit $y \in [0;4]$, pour tout $x \in [1;3]$, $g(x) = y \Leftrightarrow -x^2 - x = y$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4-y}}{2}$$

D'où la bijection g^{-1} est définie sur $[0;4]$ par $g^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{4-x}}{2}$.

Exercice résolu 9

Partie A. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation $x \in g(x)$ admet une solution unique α et que $1,6 < \alpha$
4. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[\quad g(x) < x$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g(x) > x$

Partie B. f est la fonction définie sur $] - \infty ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2.a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; +\infty[\quad f(x) = \frac{g(x)}{1+x^3}$
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- d) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3. Tracer (T) et (C).

Solution

Partie A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - x$.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$.
 $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[\quad g'(x) > 0$
 $\forall x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad g'(x) < 0$

On en déduit que :

g est strictement croissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $[\frac{1}{3}; +\infty [$,
 g est strictement décroissante sur $]-1; \frac{1}{3}]$

Tableau des variations de g .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

$g(x)$

The graph shows a function $g(x)$ with a local maximum at $x=0$ and a local minimum at $x=1$. The function approaches $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. The values of the function at the critical points are $g(0) = -1$ and $g(1) = -2$.

3. - La fonction g est continue et strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$, continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, et g' s'annule en 0, par suite $g(0)$ est le maximum de g sur $] -\infty ; 1]$.

D'où : $\forall x \in] -\infty ; 1], g(x) \leq g(0)$.

Ainsi, $\forall x \in] -\infty ; 1], g(x) \leq g(0)$.

- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$; $g([1 ; +\infty[) = [-2 ; +\infty[$,

Or $0 \in [-2 ; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$.

On conclut : l'équation $x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0$ admet une solution unique α

On a ; 1,6 et 1,7 appartiennent à $[1 ; +\infty[$; $g(1,6) \approx -0,49$ et $g(1,7) \approx$

0,16 ; $g(1,6) - g(1,7) < 0$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$.

4. -Il a été démontré à la question 3) que $\forall x \in] -\infty ; 1], g(x) \leq g(0)$.

- La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1 ; \alpha[$ et sur $] \alpha ; +\infty[$, d'où :

$g(\alpha) = 0$ et $g(x) < 0$ pour $x > \alpha$ donc :

$\forall x \in] -\infty ; \alpha], g(x) \leq 0$ et $\forall x \in] \alpha ; +\infty[, g(x) > 0$.

On conclut :

$\forall x \in] -\infty ; \alpha], g(x) \leq 0$

$\forall x \in] \alpha ; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B

1. Limite en -1 :

On a : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^3} - x$

pour $x > -1$ on a $x^3 > -1$ soit $x^3 + 1 > 0$ par suite $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^3 + 1} = +\infty$

et comme $\lim_{x \rightarrow -1} 1-x = 2$ alors $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

La droite (D) d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

* Limite en $+\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2}$

La droite (Δ d'équation $y = 0$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$

2. a) f est dérivable sur $] -\infty ; +\infty [$,

$\forall x \in] -\infty ; +\infty [, f'(x) = \frac{-(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) $\forall x \in] -\infty ; +\infty [, x^3 \neq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ déterminé à la fin de la partie A, par suite :

$\forall x \in] -\infty ; \alpha], f'(x) \leq 0$ $\forall x \in] \alpha ; +\infty[, f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $] -1 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

Tableau des variations de g ,

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

c) Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)x + f(0)$$

Ainsi une équation de la tangente (T) est $y = -x$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^3} = \frac{x(x-1)}{1+x^3}$

$\forall x \in]-\infty; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f(x) - (-x)$ est celui de $x(x-1)$.

$$f(x) - (-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\quad f(x) - (-x) < 0$$

$$\forall x \in]0; 1[\quad f(x) - (-x) > 0$$

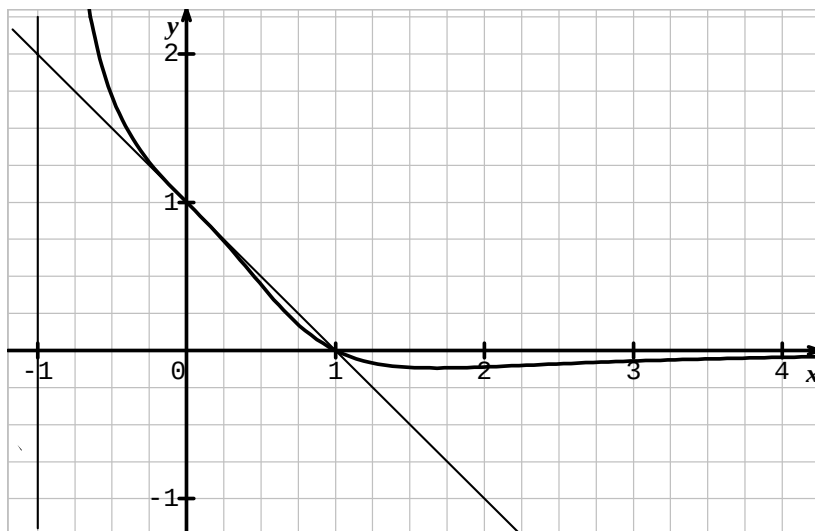
On en déduit que :

(C) est au dessus de (T) sur $] -1 ; 0[\cup] 1 ; +\infty [$,

(C) est au-dessous de (T) sur $]0 ; 1[$

(C) et (T) se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.

3. représentation graphique de (T) et (C).



EXERCICES

E1 Dans chacun des cas suivants déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x}$;
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$;
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$;
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x}$;
5. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;
6. $f(x) = x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$.
7. $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

E2 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x .$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.
3. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D).

E3 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2+\sqrt{x}} \text{ et } g(x) = \sqrt{x^2 - 3x^2} .$$

1. Démontrer que (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
2. Calculer les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$ interpréter graphiquement les résultats.

E4 Etudier la nature de la branche parabolique à (C_f) en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$
2. $f(x) = \frac{2}{x+1} - \sqrt{x}$

$$3. f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$$

E5 Etudier la limite de f en a dans chacun des cas suivants

1. $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$; $a = 0$.
2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$; $a = 0$.
3. $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$; $a = \frac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; $a = 0$.
5. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$; $a = 0$.

E6 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants Montrer que f admet en a un prolongement par continuité et définir ce prolongement .

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-5-2}$; $a = 4$.
2. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $a = 0$.
3. $f(x) = \frac{x^2-4}{|x+1|-1}$, $a \in \{-2; -1\}$.

E7 Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$P' x$		-	0	+	0	-	
$P x$	-5		-8		3		-4

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$. Justifier.
2. La courbe (C) de P présente-t-elle des asymptotes horizontales et verticales ?

E8 1. Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^2 = 1$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - x^2 = 1$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

E9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé:

- 1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 2.a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha < 0$
- b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Tracer (C_f) .

E10 Soit $f:]-\infty; -\frac{1}{2}[\rightarrow]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$$

1. Démontrer que f est une bijection et déterminer la bijection réciproque f^{-1} .
2. Tracer la représentation graphique de f , puis en déduire celle de f^{-1}

E11 Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - x - 1$$

- 1.a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$
- b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. Démontrer que :
 $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$
 $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur

$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité : 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) .
- b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 3.a) Démontrer que :
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
- b) Etudier les variations de f et dresser son

tableau de variation.

- c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Tracer (T) , (D) et (C) .

E12 On considère la fonction f définie

sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$, de courbe représentative (C_f) dans un repère $(O; i; j)$.

- 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = x^3 - x - 1$
 - a) Etudier le sens de variation de la fonction g et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α .
 - c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
 - d) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
 - 2) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
 - b) Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus

- c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{x^2 - 1}$$

- d) En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation.
- 3) a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$$

- b) En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x$.
- c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- d) Montrer que les abscisses des points B et B' où (C_f) admettant une tangente parallèle à (D) sont $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$
- 5) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2.
- 6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe $(O; i)$.
- 7) Tracer (C_f) et la tangente (T) .

2. DERIVABILITE

I. DERIVABILITE A GAUCHE-DERIVABILITE A DROITE

1. Théorème et définition

■ Une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à gauche en

$$x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et se note $f'_g(x_0)$.

La demi-droite passant par le point $M(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ est appelée **demi-tangente à gauche** au point $(x_0, f(x_0))$.

■ Une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à droite en

$$x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et se note $f'_d(x_0)$.

La demi-droite passant par le point $M(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ est appelée **demi-tangente à droite** au point $(x_0, f(x_0))$.

2. Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K tel que f soit dérivable à gauche et à droite en x_0 .

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exercice résolu 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x}$ et (C) sa courbe représentative donnée ci-dessous dans le repère orthonormé $(O; I, J)$.

- Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.
- Tracer les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

Solution :

a) Exprimons $f'(x)$ sans valeur absolue :

Si $1-x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $1-x = |1-x| = 1-x$

et si $1-x \leq 0$, c'est-à-dire $x \geq 1$ alors $1-x = -|1-x| = -(1-x) = x-1$. Ainsi,

$$\begin{cases} \forall x \in -\infty \cup \dots & f(x) = \frac{1-1+x}{x^2-2x} = \frac{1}{x-2} \\ \forall x \in \dots \cup \infty & f(x) = \frac{1+1-x}{x^2-2x} = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

f — .

Dérivabilité de f à gauche en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x-2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - (x-2)}{(x-2)(x-1)} = -$$

f est donc dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = -1$.

Dérivabilité de f à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{-1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1 - (x-1)}{(x-1)x} =$$

f est donc dérivable à droite et $f'_d(1) = 1$.

Conclusion : f n'est pas dérivable en 1 car $f'_d(1) \neq f'_g(1)$.

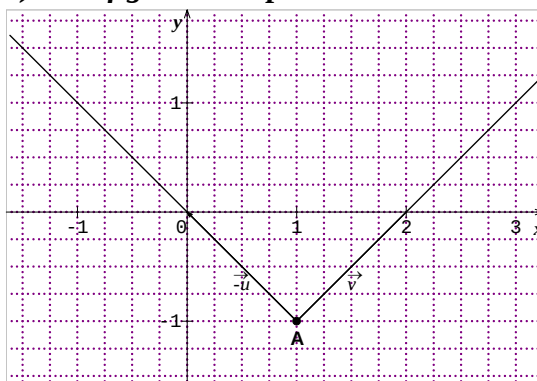
Interprétation graphique :

(C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur -1 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 1.

b) Un vecteur directeur de la demi-tangente à gauche est $\vec{u}(1; -1)$ et un vecteur directeur de la demi-tangente à droite est $\vec{v}(1; 1)$. On trace alors ces deux demi-tangentes.

Rappel : connaissant $f'_g(x_0)$ un vecteur directeur est $\vec{u}(1; f'_g(x_0))$

b) Voir figure ci – après



Demi - tangente verticale

Si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une infinie à gauche ou à droite en x_0 alors la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0 .

Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

- Etudier la continuité de f en 0
- Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Tracer (C) et les demi-tangentes obtenues dans la question a).

Solution

a) Continuité de f en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - x) = 0 \end{aligned}$$

f est continue en 0 car :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

b) Dérivabilité de f à gauche en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

Dérivabilité de f à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 = +\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est infinie

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique : (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 0 et une demi-tangente verticale.

c) Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

d) f est dérivable sur $-\infty; 0$ et sur $0; \infty$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \forall x \in]0; \infty[, f'(x) = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

▪ Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2}; 0[$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}; 0[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

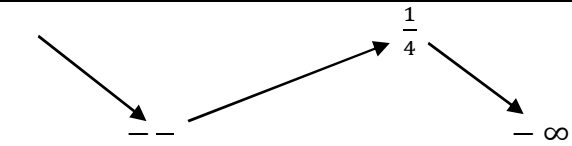
▪ Pour tout $x \in]0; \infty[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} > 0$

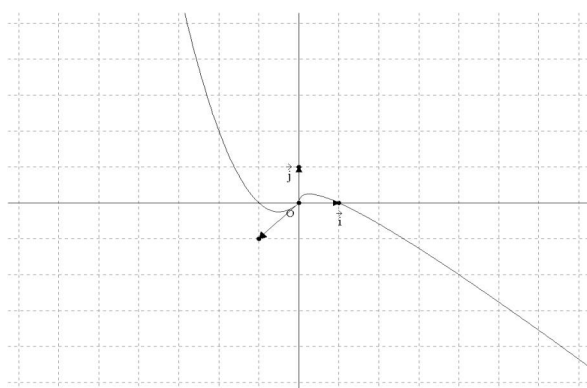
Pour tout $x \in]0; \infty[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Pour tout $x \in]0; \infty[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

Pour tout $x \in]0; \infty[$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Ainsi, f est strictement croissante sur $] \frac{1}{4}; \infty[$ et f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{4}[$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞
$f' x$	—		—	
$f x$				



II. DERIVABILITE SUR UN INTERVALLE

Définition

- Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle ouvert K si f est dérivable en tout nombre réel de K .
- Une fonction numérique f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

III. DERIVABILITE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Théorème

Soit K un intervalle ouvert ; f deux fonctions numériques telles que f est définie sur K ; $x_0 \in K$. Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en x_0 et :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Exercice résolu 3

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{3-x}{x-2} \quad g(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Démontrer que $f \circ g$ est dérivable en 3 et calculer $(f \circ g)'(3)$.

Solution

g est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$, donc g est dérivable en 3.

f est dérivable sur $] -\infty ; 2[$ et sur $] 2 ; +\infty[$; $g(3) = \frac{14}{3}$, comme $g(3) \neq 2$ donc f est dérivable en $g(3)$. On conclut que $f \circ g$ est dérivable en 3.

Pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Donc $g'(3) = \frac{10}{9}$.

Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$. Donc $f'(\frac{14}{3}) = -\frac{9}{64}$.

On conclut que : $(f \circ g)'(3) = f'(g(3)) \cdot g'(3) = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{9}{64}\right) = -\frac{5}{32}$.

Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle K

FONCTIONS	DERIVEES	CONDITION
$u^n \quad n \in \mathbb{Q}^*$	$nu'u^{n-1}$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u sur K
u	$-u' \quad u$	
u	$u' \quad u$	
u	$u' \quad \tan^2 u$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ pour tout $x \in K$

Exercice résolu 4

Dans chacun des cas suivants f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

a) $f(x) = x^2 - x^5$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = x$ e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solution

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 5x^4$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x \sin x^2$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x - \sin x$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1 \sqrt{x^2+1}}$.

Exercice résolu 5

Soit f est définie sur $\left[\frac{1}{4}, \infty\right[$ par $f(x) = x - \sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

a) Etudier la dérivabilité de f en $\frac{1}{4}$.

b) On admet que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$.

Solution

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{x - \sqrt{x - \frac{1}{4}}}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{x - \frac{1}{4}}}{x - \frac{1}{4}} \right)$$

donc f est dérivable en $\frac{1}{4}$ et $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

$$b) f \text{ est dérivable sur }]\frac{1}{4}; +\infty[\text{ et } \forall x \in]\frac{1}{4}; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{1}{4}}}$$

IV. DERIVABILITE D'UNE BIJECTION RECIPROQUE

Théorème

Soit K un intervalle ; une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur K ;

$$y_0 \in K \text{ et } y_0 \in \text{Im}(f) \text{ .}$$

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et

$$f^{-1}{}'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Point méthode

Pour calculer le nombre dérivé de f^{-1} en y_0 on procède comme suit :

- On détermine x_0 en résolvant l'équation $x \in K$ $f(x) = y_0$
- On calcule $f'(x_0)$ et on vérifie que $f'(x_0) \neq 0$
- On conclut alors que f^{-1} est dérivable en y_0
- On détermine enfin $f^{-1}{}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Exercice résolu 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty; \frac{1}{2}]$ sur $[-\frac{1}{4}; +\infty[$.

2. Soit g la restriction de f à $]-\infty; \frac{1}{2}]$.

Démontrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $g^{-1}{}'(2)$.

Solution

$$1. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{2}], f(x) \geq -\frac{1}{4}$$

Ainsi, f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ donc f réalise une bijection

de $]-\infty, \frac{1}{2}]$ sur $f\left(]-\infty, \frac{1}{2}]\right) = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right[$.

2. Dérivabilité de g^{-1} en 2

La résolution de l'équation $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$ $g(x) =$ donne $x = -$

On a $g' =$ $g' =$ $-$; comme $g' = \neq$ donc la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 2 et on a : $g^{-1} = \frac{1}{g' - 1} = -\frac{1}{3}$.

V. DERIVEES SUCCESSIVES

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K .

Si f' est dérivable sur K , on dit que f est deux fois dérivable sur K ; on appelle dérivée seconde de f et on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' .

Par itération, la dérivée n -ième de f se note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarque

Notation différentielle : en Physique f' est notée souvent $\frac{df}{dx}$ et $f^{(n)}$ est notée $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^2 - 4x$; $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2x - 4$; $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 2$;
 $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 0$.

VI. INEGALITES DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème 1

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction numérique dérivable sur $[a; b]$.

S'il existe 2 réels m et M tels que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors :
 $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Théorème 2

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I tel qu'il existe un réel M .

tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, alors pour tous réels a et b de I , on a :
 $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Exemple

Démontrons que : pour tous réels x et x' , on a : $|\cos x - \cos x'| \leq |x - x'|$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos t$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -\sin t$.
 $\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq 1$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour
tous réels x et x' , on a : $|f(x) - f(x')| \leq 1 \cdot |x - x'|$. comme $f(x) = \cos x$
et $f(x') = \cos x'$, donc : pour tous réels x et x' , on a : $|\cos x - \cos x'| \leq |x - x'|$.

ETUDE DE FONCTIONS

Exercices résolu 7

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On note (C) sa courbe
représentative dans un repère orthonormé (O ; I; J). L'unité graphique est 4 cm.

- Déterminer l'ensemble D_f de définition de f
- Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.
- Calculer la limite de f en -1 puis interpréter graphiquement le résultat.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Tracer la courbe (C).
- Démontrer que f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $] 0; +\infty[$.
- Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $f^{-1}{}'(1)$.
- Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} .

Solution

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } \frac{1-x}{1+x} \geq 0\}.$$

L'étude du signe de la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ permet d'obtenir l'ensemble D_f .

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$				0	$-$
$1+x$	$-$	0			
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$	$ $		0	$-$

D'après le tableau de signe, on a : $D_f =] -1; 1[$.

2. Dérivabilité de f en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ et } x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 0 \text{ pour } x \in] -1; 1[$$

Ainsi f n'est pas dérivable en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ n'est pas finie

Interprétation graphique

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3. Limite en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{x} = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} -x = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{x} = \infty$$

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$ donc par compos e on a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$

La droite (D) d'équation $x = -1$ est asymptote à (C).

4. Variations

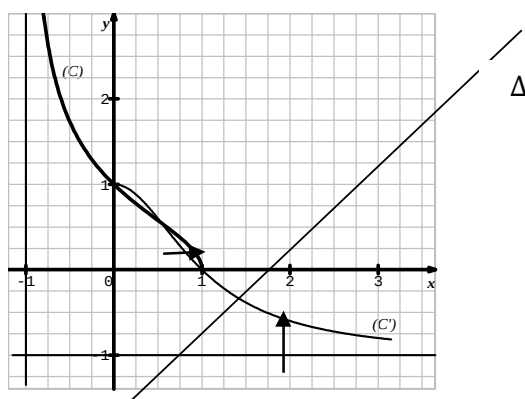
f est dérivable sur $] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{-x+1-1-x}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-1}{1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) < 0$ car $-1 < 0$ et $x > 0$ f est donc strictement décroissante sur $] -1, 1[$,

Tableau des variations de f :

x	-1	1
$f'(x)$		
$f(x)$	$+\infty$	0

5. Courbe représentative de f .



6. f est continue et strictement décroissante sur $] - \infty ; 1[$ donc f réalise une bijection de $] - \infty ; 1[$ sur $f(] - \infty ; 1[) =] - \infty ; 0[$.

7. On a $f(1) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 1$.

On a $f'(f^{-1}(0)) = f'(1) = -1$; comme $f'(0) \neq 0$ donc la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et on a : $f^{-1}'(0) = \frac{1}{f'(1)} = -1$.

8. Les courbes représentatives (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Voir figure.

Exercice résolu 8

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$ (l'unité graphique est 2 cm).

Partie A f et g sont les fonctions définies sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

On note (C) et (C') les courbes représentatives respectives de f et g .

1. Démontrer que (C) admet aux points d'abscisses respectives -1 et 1 une demi-tangente parallèle à (OJ) .

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.

3.a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .

4. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Tracer (C) et (C') .

Partie B Soit (Γ) la courbe d'équation : $y^2 = xy$.

1. Soit S la symétrie centrale de centre O , montrer que $S(C) = (C')$ et tracer (C') .

2. Démontrer que $(\Gamma) = (C) \cup (C')$.

3.a) Soit $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Démontrer que $(O; \vec{i}, \vec{u})$ est un repère du plan.

b) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{u})$.

c) Quelle est la nature de (Γ) ?

Solution

Partie A

1. Dérivabilité de f à gauche en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{(x + 1)(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{1} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } -1$$

Conséquence graphique :

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

Dérivabilité de f à droite en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 1$$

Conséquence graphique :

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

2. Asymptote en $-\infty$

$$\forall x < -1, f(x) - x = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - x - \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Interprétation graphique :

La droite (OI) d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

3.a) Limite de f en $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \infty$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

b Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\forall x > 1, f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - 2x = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2x}{1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0$$

Interprétation graphique :

La droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Position relative de (C) et (D)

Etudions le signe de $f(x) - x$

Pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x$

- Pour tout $x \in]-\infty; -1]$, $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ et $-x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2 - 1} - x \geq 0$

Donc : pour tout $x \in]-\infty; -1]$, $f(x) - x \geq 0$.

- Pour tout $x \in]1; +\infty[$ on a : $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

Ainsi, Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ et $x > 0$ donc $\sqrt{x^2 - 1} - x < 0$

Par suite, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) - x < 0$.

Interprétation graphique :

(C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; -1]$,

(C) est au-dessous de (D) sur $]1; +\infty[$.

4. Variations et tableau de variation de f

$$\forall x \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

* $\forall x \in]1; +\infty[$ $f'(x) < 0$ donc **f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.**

* $\forall x \in]-\infty; -1]$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. $\forall x \in]-\infty; -1]$, $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x^2 - 1} + x$.

$$\forall x \in]-\infty; -1], \sqrt{x^2 - 1} + x \geq \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$\forall x \in]-\infty; -1]$, $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ et $-x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2 - 1} - x \geq 0$, par suite,

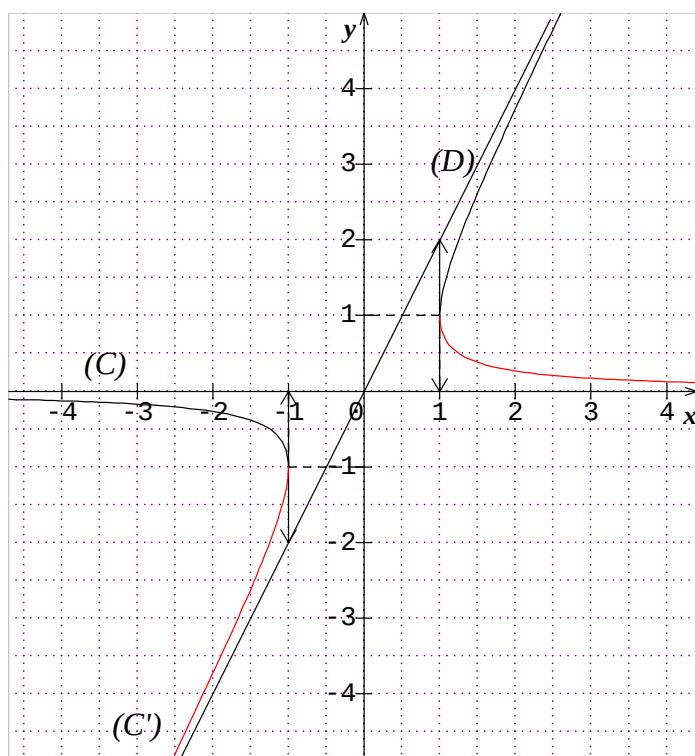
$$\forall x \in]-\infty; -1], \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} \leq 0 \quad \text{soit } f'(x) \geq 0.$$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -1]$

Tableau des variations de f ,

x	$-\infty$	$-$		∞
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

5. Représentations graphiques



Partie B

1. $D_g = D_f =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$. Pour tout $x \in D_g$, $-x \in D_f$ et on a :

$$g(-x) = -x - \sqrt{(-x)^2 - 1} = -x - \sqrt{x^2 - 1} = -f(x)$$

On conclut que (C') est l'image de (C) par la symétrie centrale de centre O. Pour la représentation graphique de (C') , voir figure : (C') est tracée en rouge.

$$2. M(x, y) \in (C) \cup (C') \Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } y = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } y - x = -\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow y - x = \pm \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 - xy = 0 \quad . \text{ Donc } \Gamma = (C) \cup (C').$$

3.a) On a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le triplet $(O; \vec{v}, \vec{u})$ est donc un repère du plan.

b) Soient x, y et X, Y les coordonnées respectives du point M dans les repères $(O; \vec{v}, \vec{u})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} = x\vec{v} + y\vec{u} \quad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} \quad \vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, donc :

$$x = X - Y \text{ et } y = X + Y$$

$$M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y^2 - xy = 0 \Leftrightarrow (X + Y)^2 - (X - Y)(X + Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y^2 - XY - Y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -XY = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{4X}.$$

D'où Γ est une hyperbole.

EXERCICES

E1 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, Calculer la dérivée de la sur l'intervalle I .

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= x^3 - x^2 - x; \quad I = \mathbb{R} \\ 2. f(x) &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x; \quad I = \mathbb{R} \\ 3. f(x) &= x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^5} - \frac{7}{x^3}; \end{aligned}$$

$$I =]-\infty; \infty[$$

$$\begin{aligned} 4. f(x) &= x^2\sqrt{x}; \quad I =]-\infty; \infty[\\ 5. f(x) &= \frac{2x-3}{x+1}; \quad I =]-\infty; -1[\\ 6. f(x) &= x^2 - x^5; \quad I = \mathbb{R} \\ 7. f(x) &= \sqrt{x-1}; \quad I =]1; \infty[\\ 8. f(x) &= \frac{2}{x-1} \cdot I =]-\infty; 1[\\ 9. f(x) &= \sqrt{x^2 - x}; \quad I = \mathbb{R} \\ 10. f(x) &= \frac{2}{\sqrt{3x+1}}; \quad I =]-\frac{1}{3}; \infty[\\ 11. f(x) &= x^x; \quad I = \mathbb{R} \\ 12. f(x) &= \frac{2}{1-2x^2}; \quad I =]-\infty; \frac{1}{2}[\\ 13. f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; \quad I = \mathbb{R} \\ 14. f(x) &= x^3 - x^2; \quad I = \mathbb{R} \\ 15. f(x) &= x^3x; \quad I = \mathbb{R} \\ 16. f(x) &= \frac{x}{2} - \frac{2}{x-1} \cdot I =]-\infty; 1[\end{aligned}$$

E2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 & x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = \frac{x}{x} & x \in]-1; \infty[\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -1.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1.

E3 f est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 1.

E4 Démontrer que :

$$1. \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \tan x \geq x.$$

$$2. \forall x \in]0; +\infty[, \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dans les exercices qui suivent, On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I; J).

E5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x|x-3|+2.$$

1. Etudier la continuité de f en 3.
2. Etudier la dérivabilité de f en 3. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C).

E6 f est la fonction définie sur $]-\infty; \infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - \sqrt{x}$$

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{f(x)}{x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C).

E7 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; I; J).

1. Préciser l'ensemble de définition de f
2. Etudier la continuité de f en 0.
3. Démontrer (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Etudier la parité de f et en donner une

interprétation graphique.

5. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

6. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f .

7. Tracer la courbe (C).

E8 f est la fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

1. Etudier la continuité de f en 2.

2. Etudier la dérivabilité de f en 2.

Interpréter graphiquement les résultats

3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5.a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_1) $-\infty$; $-\infty \cup]-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) $+\infty$.

6. Tracer (D_1) , (D_2) et (C).

E9 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Etudier la dérivabilité de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

3. Calculer les limites de f $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Démontrer que les droites (D_1) :

$y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

6. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

7. Donner une équation de la tangente (T) à

(C) au point d'abscisse 0.

8. Tracer la courbe (D_1) , (D_2) (T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à $[-1; +\infty[$.

1. Démontrer que g est une bijection de $[-1; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

2. Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{x}$ et calculer $g^{-1}(\sqrt{x})$.

E10 f est la fonction sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $f^{-1}(1)$.

3. Tracer (C) et (C') la courbe de f^{-1} .

E11 f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x - \sqrt{x} + 1$.

On prendra pour unité graphique Unité : 10 cm.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Démontrer que f est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$

3. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f \circ f(x) = x$. En déduire la bijection réciproque de f .

4. Construire (C).

E12 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

L'unité graphique est 2cm.

1. Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4. Tracer (T) et (C).

E13 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$
- 3.a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
- b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer la courbe (D) et (C).

E14 f est la fonction définie sur

$$]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ par : } f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Partie A

g est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3.a. Démontrer que l'équation

$x \in]1; +\infty[: g(x) = 2$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Justifier que :

$$\begin{cases} \forall x \in]1; +\infty[: g(x) < 2 \\ \forall x \in]-\infty; -1[: g(x) > 2 \end{cases}$$

Partie B

1. Etudier la parité de f

2.a. Calculer la limite de f en $+\infty$

b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c. Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]-\infty; -1[$.

3. Etudier la dérivabilité de f en 1 puis

interpréter graphiquement le résultat.

4.a. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; -1[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.

6. Tracer (C) et (D).

3. PRIMITIVES

I) Notion de primitive

Activité : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Vérifier que g est la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + 1$.

b) Trouver deux autres fonctions ayant g pour dérivée.

II) Définition

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I .

F est une primitive de f sur I si :

- F est dérivable sur I
- $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Exercice résolu 1

Soit $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

$f : x \mapsto x^2 - 2x$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

F est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2x = x^2 - 2x = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I .

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I .

- Toute primitive de f sur l'intervalle I est de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
- si x_0 est un réel de I et y_0 un réel quelconque, il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exercice résolu 2

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Déterminer la primitive F de f sur $] -\infty ; 0[$ qui s'annule en $-\frac{1}{2}$.

Solution

Les primitives de f sur $] -\infty ; 0[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x} + c$ où $c \in \mathbb{R}$

F étant la primitive de f sur $] -\infty ; 0[$ qui s'annule en $-\frac{1}{2}$, F est de la forme

$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$ avec $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, par suite $c = -\frac{1}{2}$ soit $c = -\frac{1}{2}$. D'où F est la fonction définie sur $] -\infty ; 0[$ par $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

III) . Détermination d'une primitive

1) Tableau des primitives usuelles

c est une constante réelle.

Fonction f	Primitives F de f sur I	Intervalle de définition de F
$x \mapsto a \quad a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{Q} - \{0, 1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n-1} x^{n-1} + c$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2} x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$	$x \mapsto \frac{1}{4} x^4 + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos x^2}$ ou $x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x \mapsto ax + b \quad a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a} (ax + b)^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b \quad a \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{a} (ax + b) + c$	$\mathbb{R}$

Exemple

Dans chacun des cas suivants, F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

- $x \mapsto 3x$, $F(x) \mapsto 3x^2$, sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto x$, $F(x) \mapsto \frac{1}{2}x^2$, sur $\mathbb{R}$
- $f(x) \mapsto x^2$, $F(x) \mapsto \frac{1}{3}x^3$, sur $\mathbb{R}$
- $f(x) \mapsto x$, $F(x) \mapsto \frac{1}{2}x^2$, sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$, $F(x) \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, sur $]0, +\infty[$
- $f(x) \mapsto \frac{1}{x^5}$, $F(x) \mapsto \frac{-1}{4x^4}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x) \mapsto x^2\sqrt{x}$, $F(x) \mapsto \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$, sur $]0, +\infty[$

2) Primitives et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur I de dérivées respectives u' et v' I
 $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions f	Une primitive de f sur I	Conditions
$\alpha u'$	αu	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Q} \setminus -1$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{Q} \setminus 0$	$-\frac{1}{n-1} u^{n-1}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + c$	$u > 0$ sur I
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$u' \tan^2 u$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$	$x \in I$ et $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice résolu 3

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les primitives sur l'intervalle I :

- $f(x) = -\sqrt{x}$, $I =]0; +\infty[$
- $g(x) = x^3 - x^2 - x$, $I = \mathbb{R}$;
- $h(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x^4}$, $I =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$;
- $k(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$;
- $l(x) = \sin(-x)$, $I = \mathbb{R}$.

Solution

- Les primitives de f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$, où c est une constante réelle.
- Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$, où c est une constante réelle.
- Les primitives de h sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2} \frac{1}{3x^3} + c$, où c est une constante réelle.
- Les primitives de k sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto 4\sqrt{x} + c$, où c est une constante réelle.
- Les primitives de l sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\frac{2}{5}\sin(-x) + c$, où c est une constante réelle.

Exercice résolu 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction donnée sur l'intervalle I.

- a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $I = \mathbb{R}$; b) $g(x) = x^{14}$, $I = \mathbb{R}$;
 c) $h(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x^3}$, $I = \pi$; d) $k(x) = x^2 \sin x^3$, $I = \mathbb{R}$.
 e) $l(x) = \frac{1}{2x-1^3}$, $I =]-\infty; \frac{1}{2}[$ f) $m(x) = x\sqrt{x}$.

Solution

a) Posons $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ on obtient : $f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Posons $u(x) = x^{15}$, $u'(x) = 15x^{14}$ on obtient $g(x) = \frac{1}{15} u'(x)$ donc la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{15} x^{15}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

c) Posons $u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$ on obtient $h(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^3}$, donc la fonction H définie sur π par $H(x) = \frac{1}{2(1+\cos x^2)}$ est une primitive de h sur π .

d) Posons $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$ on obtient : $k(x) = \frac{1}{3} u'(x) \sin u(x)$ donc la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = -\frac{1}{3} \cos x^3$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

e) En posant $u(x) = x - \frac{1}{2}$, $u'(x) = 1$ alors $l(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u^3(x)}$
 Alors la fonction L définie par : $L(x) = \frac{1}{2} \frac{-1}{2u^2(x)} = \frac{-1}{4(2x-1)^2}$ est une primitive de g sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

f) En posant $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ alors $m(x) = \frac{1}{2} u'(x) u^{1/2}(x)$.
 Alors la fonction M définie par $M(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{3/2}(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2}^3 = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{x^2}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice résolu 5

f est définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{2x^2-x^2}$.

- Déterminer les réels a, b tels que : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{2x-1^2}$.
- Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty; 1[$ qui s'annule en -1.

Solution

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x-1^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{bx^2}{x^2-x^2} = \frac{a+bx^2-x^2}{x^2-x^2}$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x-1^2} \Leftrightarrow \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^2-x^2} = \frac{a+bx^2-ax}{x^2-x^2}$$

D'où par identification : $a = b = -a$ et $a = b$ soit $a = b = -\frac{1}{2}$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x-1}$

2. En posant $u = x - \frac{1}{2}$, on a $u' = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2u}$

Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x} - \frac{k}{x-\frac{1}{2}}$ $k \in \mathbb{R}$

F étant la primitive de f qui s'annule en $-\frac{1}{2}$, on a :

$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{k}{x-\frac{1}{2}}$ et $F(-\frac{1}{2}) = 0$

De la condition $F(-\frac{1}{2}) = 0$ on tire $k = -\frac{5}{6}$

F est donc la fonction définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ par $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{5}{6}$

Exercice résolu 6

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = \cos^2 x$; 2) $f(x) = \cos^4 x$ 3) $f(x) = \cos^5 x$

Solution

POINT METHODE : si $f(x) = \sin^p x \cos^q x$ où p et q sont des entiers naturels, une primitive de f peut être obtenue en linéarisant $f(x)$. Mais si p est impair on peut alors transformer $\sin^p x$ en écrivant : $\sin^p x = \sin x \sin^{p-1} x$ et utiliser la relation $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Même remarque si q est impair.

1. La linéarisation de $f(x) = \cos^2 x$ donne : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

2. La linéarisation de $f(x) = \cos^4 x$ donne : $f(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}^4$

$$f(x) = \frac{1}{16} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^0 + (e^{ix})^3 (e^{-ix})^1 + (e^{ix})^2 (e^{-ix})^2 + (e^{ix})^1 (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4$$

$$f(x) = \frac{1}{16} [e^{i4x} + e^{-i4x} + e^{i2x} + e^{-i2x}]$$

$$\text{or } e^{i4x} + e^{-i4x} = 2 \cos 4x \text{ et } e^{i2x} + e^{-i2x} = 2 \cos 2x$$

$$\text{donc : } f(x) = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 2 \cos 2x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 2x$$

Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x$$

3. On peut écrire $f(x) = \sin x \sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x)^2 = \sin x (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x)$

En posant $u = \cos x$, on a $u' = -\sin x$ et $f(x) = -u' (1 - 2u^2 + u^4)$

Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$

EXERCICES

E1 Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur l'intervalle I .

$$1. f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad I =]0, +\infty[$$

$$3. f(x) = x - x^2; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^5} \quad I =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} \quad I =]0, +\infty[$$

$$6. f(x) = -x \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$7. f(x) = 2x \quad I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

E2 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I .

$$1. f(x) = x^2 - x; F(x) = x - \frac{x^2}{2}; I = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = x\sqrt{x}; F(x) = x^2(\sqrt{x}), I =]0, +\infty[$$

E3 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle considéré.

$$1. f(x) = x^2 - x^3 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{-x^2} \quad I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$3. f(x) = x^3 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \frac{x}{-x^2 - 4} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad I =]0, +\infty[$$

$$6. f(x) = x - x^2 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = x - \frac{1}{1 - x^3} \quad I =]-\infty, +\infty[$$

$$9. f(x) = x^2 - x \quad I = \mathbb{R}$$

$$10. f(x) = x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{6 - x^2}} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad I =]-\pi, \pi[$$

$$13. f(x) = x\sqrt{x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

$$14. f(x) = x - \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

E4 Dans chacun des cas suivants déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

$$1. f(x) = 2x$$

$$2. f(x) = 4x$$

$$3. f(x) = 5x$$

$$4. f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$5. f(x) = 4x^2 - 2x$$

$$6. f(x) = 2x^2 - 2x$$

E5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
 $f(x) = \sin x - 3x$

1. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = f(x) - x.$$

2. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

E6 Démontrer que la fonction

$x \mapsto x^2\sqrt{x-1}$ admet sur $]1, +\infty[$ une primitive de la forme $x \mapsto P(x)\sqrt{x-1}$ où P est un polynôme de degré 3 que l'on précisera.

4. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Un peu d'histoire

En 1614, l'Ecossais John Neper publie une table de logarithmes destinée à faciliter les longs calculs que doivent effectuer les astronomes, les navigateurs, les financiers. Le principe simple qui guide la réflexion de Neper est qu'il est plus facile d'effectuer une addition que d'effectuer une multiplication.

Pour vous en convaincre, il suffit par exemple d'effectuer $673+284$ et $673 \cdot 284$ et vous en jugerez vous-même.

Avec la table de logarithmes de Neper, on associe à tout nombre (strictement positif) un autre nombre appelé son logarithme, de telle sorte que pour calculer le produit de deux nombres il suffit d'additionner leurs logarithmes.

Activité 1 : Approche.

A) Pouvez vous utiliser le tableau de primitives du chapitre précédent pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$? Justifiez.

B) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$,
des primitives sur cet intervalle.

Notons F la primitive sur $\mathbb{R}^*$ de f qui s'annule en 1.

1. Compléter :

■ $F' = \dots$

■ $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F'(x) = \dots$

2. a. Préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}^*$.

b. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

3. Soit a un réel strictement positif. On note G la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $G(x) = F(ax) - F(x)$ (1).

a. $G'(x) = \dots$ On pourra utiliser la formule de la dérivée d'une fonction composée

Ainsi, G et F sont des primitives sur $\mathbb{R}^*$ de la même fonction f . Il existe donc une constante réelle c telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad G(x) = F(x) + c$ (2)

b. A l'aide des égalités (1) et (2) exprimer $G(a)$ de deux manières, puis justifier que $c = -F(a)$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F(ax) = F(a) + F(x)$.

C'est bien cette propriété fondamentale de « transformation d'un produit en une somme » que Neper avait établie dans sa table dite logarithmique. Ainsi, la fonction F est désormais appelée fonction logarithme népérien. Elle est notée $\ln$.

I. DEFINITION ET PROPRIETES

1. Définition et notation

On appelle fonction logarithme népérien , la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Elle est notée **ln**

2 . Propriétés

2.1 Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de ln est $\mathbb{R}_+^*$
- ln est $\mathbb{R}_+^*$ $x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$
ln est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x = e^{\ln x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \ln(e^x)$

2.2. Propriété fondamentale (logarithme népérien d'un produit)

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a, b , $\ln ab = \ln a + \ln b$

Remarque

Si a et b sont deux nombres réels non nuls tels que $ab = 1$, alors $\ln ab = \ln a + \ln b$

2.3 Conséquences de la propriété fondamentale

Activité 2

Soit a, b deux nombres réels strictement positifs.

- **Logarithme népérien de l'inverse.**

$$\begin{aligned} - & \quad \left(b, \frac{1}{b}\right) : \\ - & \quad \left(b, \frac{1}{b}\right) \\ & \quad b \cdot \frac{1}{b} = 1 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{b} = -\frac{1}{b}$$

• **Logarithme népérien d'un quotient.**

$$-\frac{1}{b} = -\frac{1}{b} \quad a = \frac{a}{b} \quad \frac{a}{b} = a$$

• **Logarithme népérien d'une puissance**

En utilisant la propriété fondamentale, exprimer en fonction de a , chacune des expressions suivantes: a^2 a^3 a^4 a^5 :

.....

Nous admettons que pour tout nombre rationnel r : $\ln a^r = r \ln a$

Propriétés :

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre rationnel r , on a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln a^r = r \ln a$$

Remarque : Pour tous nombres réels non nuls a et b tels que $\frac{a}{b} > 0$, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Exercice 1.1

1.a Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de :

$$-\frac{1}{b} ; \frac{25}{3} ; \sqrt{\quad}$$

1.b Démontrer que $(\sqrt{\quad})^2 = (2 - \sqrt{\quad})$

1.c Dans chacun des cas suivants, comparer sans calculatrice les nombres x et y

i) $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$

ii) $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$

iii) $x = \frac{1}{6}$ et $y = \frac{1}{7}$

1.d) Soit a et b les nombres réels définis par :

$$a = \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{27}} \quad b = \sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{27}}$$

Montrer que $a = -b$.

1.e) Compléter le tableau suivant en indiquant sans utiliser la calculatrice, le signe de a

a		$-$	$-\sqrt{\quad}$		$\frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}}$
a					

II. ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

1. Limites de références

Propriétés

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{x} = 1$

2. Etude et représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \ln x$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). Unité : 1 cm.

a. Ensemble de définition :

- Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\ln : D_{\ln} \dots\dots\dots$

b. Limites et Interprétations graphiques :

- Donner une interprétation graphique des limites i) et iii) de la propriété II.1):

.....

- Donner une interprétation graphique de la limite ii) de la propriété II.1):

.....

c. Sens de variation et tableau de variation:

- Préciser en le justifiant, le sens de variation de $\ln$.

.....

- Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln$.

- La calculatrice comporte la touche $\boxed{\ln}$ qui permet d'obtenir des valeurs approchées

du logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif. Compléter le tableau suivant par les arrondis d'ordre 1 :

x							2,8			
x										

d. Bijectivité de la fonction $\ln$; nombre réel e :

Justifier que la fonction $\ln$ est une bijection de $\dots\dots\dots$ sur un intervalle que l'on précisera

.....

Justifier que l'équation $x = e^x$ admet une unique solution dans $]-\infty, +\infty[$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[1, 2]$. Cette solution est notée e

.....

Le nombre réel e est l'unique nombre réel vérifiant $\ln e = 1$. $e \approx 2,71828$

NB : On démontre que le nombre réel e n'est pas rationnel. C'est-à-dire ne peut s'écrire sous forme d'une fraction rationnelle.

e. Tangentes particulières :

Soit (C) la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \ln x$

Déterminer une équation de chacune des tangentes suivantes :

- La tangente T à (C) au point d'abscisse 1 :

.....

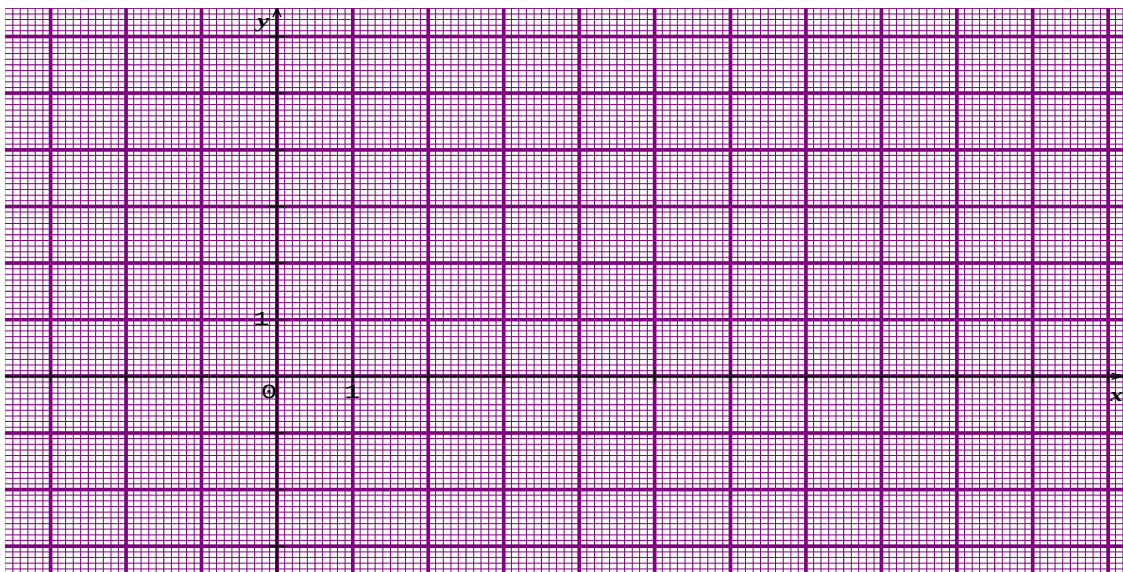
- La tangente (T') à (C) au point d'abscisse e

.....

f. Représentation graphique de $\ln$

Tracer dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm, les droites (T) , (T')

la courbe (C) et la droite $\Delta : y = x$



- Par lecture graphique , établir les inégalités en complétant par $<$ ou $\leq$:

$$\forall x \in]-\infty; -1[\quad x - \ln x > 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\quad x - \ln x > 0$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\quad x - \frac{1}{e}x > 0$$

3. Equations du type $\ln x = r$, inéquations du type $\ln x < r$ ou $\ln x > r$

Remarque : Pour tout nombre rationnel r on a : $r = \ln e^r$

Exercice résolu 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) \quad x - \ln x = \frac{3}{2}$$

$$2) : \quad x^2 - \ln x = 6$$

Solution

Résolution de (E_1) :

L'ensemble de validité D_1 de l'équation (E_1) est $D_1 =]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0; +\infty[\quad x - \ln x = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \ln x = x - \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln e^{x - \frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = e^{x - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Et comme $e^{\frac{3}{2}} \in]0; +\infty[$ alors l'ensemble des solutions de E_1 est $\left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}$

Résolution de (E_2) :

L'ensemble de validité D_2 de l'équation (E_2) est $D_2 =]0; +\infty[$

Vu la forme de l'équation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = \ln x$; On obtient alors

$X^2 - X - 6 = 0$, soit $X = -2$ ou $X = 3$. Par suite l'équation E_2 équivaut à :

$$\ln x = -2 \text{ ou } \ln x = 3, \text{ soit } x = e^{-2} \text{ ou } x = e^3$$

Et comme e^{-2} et e^3 appartiennent à $]0; +\infty[$, alors l'ensemble des solutions de E_2 est $\{e^{-2}, e^3\}$

Exercice résolu 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$$(I_1): x > 0; (I_2): 3 - \ln x - \ln x \leq 0; (I_3): x^2 - 2x + 1 = 0$$

Solution

Résolution de $(I_1): \ln x > 0$

L'ensemble de validité D_1 de (I_1) est $D_1 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$
 $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$
 L'ensemble des solutions de (I_1) est donc $S_1 =]1; +\infty[$

Résolution de $(I_2): 3 - \ln x - \ln x \leq 0$

L'ensemble de validité D_2 de (I_2) est $D_2 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0; +\infty[$

POINT METHODE 1: Si l'on n'effectue pas de changement de variable, Il faut éviter d'appliquer

directement la formule du signe d'un polynôme du second degré, puisqu'il ne s'agit pas là d'un polynôme de la variable réelle x .

Comme l'expression est déjà sous forme de produit de deux facteurs, il convient d'étudier séparément le signe de chaque facteur par la résolution d'une inéquation et de procéder ensuite par un tableau de signes :

$$3 - \ln x - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \text{ ou } \ln x = -2 \Leftrightarrow x \geq e^1 \text{ ou } x \leq e^{-2}$$

$$-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq \ln e^{-1} \Leftrightarrow \ln x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

Donc : pour tout $x \in]e^{-1}; +\infty[$, $-\ln x < 0$ et pour tout $x \in]e^1; +\infty[$, $3 - \ln x - \ln x < 0$
 $\Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1}$

Donc : pour tout $x \in]0; e^{-2}[$, $\ln x < -2$ et pour tout $x \in]e^{-2}; +\infty[$, $\ln x > -2$

D'où le tableau suivant :

x		e^{-2}		e^1	∞
$-\ln x$					—
$\ln x$	—				
$3 - \ln x - \ln x$	—				—

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) :

$$3 - \ln x - \ln x \leq 0 \text{ est }]0; e^{-2}[\cup]e^1; +\infty[$$

NB : Il est important de noter que dans cette méthode, l'omission de l'étude locale des signes des différents facteurs invalide le tableau de signe.

POINT METHODE 2 : Changement de variable

On pose $X = \ln x$, alors on obtient l'inéquation $X \in \mathbb{R}, 3 - X - X \leq 0$

Comme le polynôme du second degré $3 - X - X$ a pour racines -1 et -2 , alors :

$$3 - X - X \leq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[\text{ (règle du signe d'un polynôme du second degré)}$$

$$\text{Par suite, } 3 - \ln x - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq -2 \text{ ou } \ln x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-2} \text{ ou } x \geq e^{-1}$$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est : $S =]e^{-2} ; e^3[\cup]e^3 ; +\infty[$

Résolution de (I_3) : $\ln x^2 - 5\ln x - 6 \leq 0$:

L'ensemble de validité D_3 de (I_3) est $D_3 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0 ; +\infty[$

Vu la forme de l'inéquation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = \ln x$, alors on obtient l'inéquation

$$X \in \mathbb{R} \quad X^2 - X - 6 \leq 0$$

Le polynôme du second degré $X^2 - X - 6$ ayant pour racines -2 et 3 , il vient :

$$X^2 - X - 6 \leq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[\quad (\text{règle du signe d'un polynôme du second degré})$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite, } \ln x^2 - 5\ln x - 6 \leq 0 &\Leftrightarrow \ln x \in]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[\\ &\Leftrightarrow \ln x \leq -2 \quad \text{ou} \quad \ln x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq e^{-2} \quad \text{ou} \quad x \geq e^3 \end{aligned}$$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) : $\ln x^2 - 5\ln x - 6 \leq 0$ est :

$$S =]0 ; e^{-2}] \cup [e^3 ; +\infty[$$

Exercice résolu 3

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chacun des systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y = 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 12 \end{cases} & 3. \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln(xy) = -12 \end{cases} \end{array}$$

Solution

1. Résolution de
$$\begin{cases} 2\ln x - 2\ln y = -2 \\ 3\ln x + \ln y = 5 \end{cases}$$

Ensemble de validité Ev :

$$Ev = \{x, y \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y > 0\}$$

$$Ev =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$$

Par suite,

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y \end{cases} \begin{matrix} e \\ e^2 \end{matrix}$$

$e \in]0 ; +\infty[$ et $e^2 \in]0 ; +\infty[$ alors l'ensemble des solutions du système est $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e ; e^2)\}$.

2. Résolution de
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 12 \end{cases}$$

Ensemble de validité

$$Ev = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } y > 0\} =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln xy = \ln 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Si x et y existent alors ils sont les solutions de l'équation : $X \in]0 ; +\infty[$, $X^2 - 7X + 12 = 0$

$$X \in]0 ; +\infty[\quad X^2 - 7X + 12 = 0 \Leftrightarrow X = 4 \quad \text{ou} \quad X = 3$$

Les couples solutions du système sont donc $(4 ; 3)$ et $(3 ; 4)$. $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(4 ; 3) ; (3 ; 4)\}$.

3. Résolution de
$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln(xy) = -12 \end{cases}$$

Ensemble de validité

Ev $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+ \text{ et } y \text{ et } xy$
 $=]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln(xy) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = 11 \\ \ln x + \ln y = -12 \end{cases}$$

Si $\ln x$ et $\ln y$ existent alors ils sont les solutions de l'équation : $X \in \mathbb{R}, X^2 + 12X + 11 = 0$
 -1 et -11 sont les solutions de l'équation $X^2 + 12X + 11 = 0$

Le système équivaut à $\begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln y = -11 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \ln x = -11 \\ \ln y = -1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = e^{-1} \\ y = e^{-11} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = e^{-11} \\ y = e^{-1} \end{cases}$

Les couples solutions sont $(e^{-1}; e^{-11})$ et $(e^{-11}; e^{-1})$. $S_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{(e^{-1}; e^{-11}); (e^{-11}; e^{-1})\}$.

III. FONCTIONS DU TYPE $\ln \circ u$ ou $\ln \circ u$

Propriété 1 : Dérivées

i) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$ $u(x) > 0$, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$

ii) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$ $u(x) \neq 0$, alors la fonction $\ln |u|$ est dérivable sur I et on a : $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

NB : La formule de la dérivée est la même pour $\ln \circ u$ et $\ln |u|$, seul l'ensemble de définition est éventuellement différent de l'une des fonctions à l'autre.

Propriété 2 : Primitives

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$ $u(x) \neq 0$, et si u' est continue sur I alors

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

Exercice résolu 4

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Déterminer l'ensemble D_f de définition de f et calculer la dérivée f' de f :

a) $f(x) = 6 - x$ b) $f(x) = x - x$ c) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Solution

Il convient de noter que :

$D_{\ln \circ u} = \{x \in D_u / u(x) \neq 0\}$ et $D_{\ln \circ u} = \{x \in D_u / u(x) \neq 0\}$ où D_u est l'ensemble de définition de u

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 6 - x > 0\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \quad 6 - x > 0$

$$\Leftrightarrow x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < 6 \quad \text{d'où } D_f =]-\infty; 6[$$

Pour tout $x \in]-\infty; 6[\quad f'(x) = \frac{-2}{6-2x} \quad (\text{formule } \frac{u'(x)}{u(x)^2} \text{ avec } u(x) = 6 - x)$

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \quad f'(x) = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{3x+1}{3x+1} = \frac{6x-5}{(x-2)(3x+1)}$

(formule $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x) = x - \frac{1}{3}$)

c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } \frac{2x-1}{x+1} > 0\} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$

Pour tout $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[\quad f(x) = \ln |2x-1| - \ln |x+1|$

Pour tout $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(2x-1)(x+1)}$

Exercice résolu 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations proposées :

(E₁): $\ln x - 2 \ln x = 2 \ln x - 8$ (E₂): $x^2 - 4 \ln x = 8$

(I): $5 - x \geq \ln 3 - \ln x - 1$

Solution

■ Résolution de (E₁): $\ln x - 2 \ln x = 2 \ln x - 8$

L'ensemble de validité de (E₁) est $D_1 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ et $x > 0$

$$\ln x - 2 \ln x = 2 \ln x - 8 \Leftrightarrow \ln x - x = \ln x - 8$$

$$\Leftrightarrow x - x = x - 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 4$$

$-3 \notin]0; \infty[$ et $4 \in]0; \infty[$ donc l'ensemble des solutions de (E₁) est $\{4\}$

■ Résolution de (E₂): $\ln x^2 - 4 \ln x = 8$

L'ensemble de validité de (E₂) est $D_2 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\}$ et $x \neq 0$

$$x^2 - 4 \ln x = 8 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$$

$$x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; \infty[$$

$$D_2 =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[\cup]0; \infty[=]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$$

$$\ln x^2 - 4 \ln x = 8 \Leftrightarrow x^2 - x = 8 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 4$$

$-3 \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$ et $4 \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; \infty[$ donc l'ensemble des solutions de (E₂) est $\{-3, 4\}$

■ Résolution de (I): $\ln 5 - x \geq \ln 3 - \ln x - 1$

L'ensemble de validité de (I) est $D = \{x \in \mathbb{R} / 5 - x > 0 \text{ et } x > 0\}$

$$\ln 5 - x \geq \ln 3 - \ln x - 1 \Leftrightarrow \ln 5 - x \geq \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow -x \geq x - 6$$

$$\Leftrightarrow -x \geq -3$$

$\Leftrightarrow x \leq 15$
 L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $]-\infty, \frac{15}{4}]$

V. LOGARITHME DECIMAL

1. Définition

On appelle fonction logarithme décimal la fonction notée **log** définie sur $]-\infty, +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

NB . On a $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$

2. Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et pour tout nombre rationnel r , on a :

$$\begin{aligned} \blacksquare \log ab &= \log a + \log b & \blacksquare \log \frac{1}{b} &= -\log b \\ \blacksquare \log \left(\frac{a}{b}\right) &= \log a - \log b & \blacksquare \log a^r &= r \log a \\ \blacksquare \log a^r &= r \log a & \blacksquare a^r &= 10^{r \log a} \end{aligned}$$

Application en chimie !!!

Déterminer le pH d'une solution dont la concentration en ion hydronium est 10^{-3} mol/l

La formule chimique est : $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$
 On a : $\text{pH} = -\log_{10} 10^{-3} = 3$

Exercice résolu 6. (Etude globale de fonction)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{8x^2 - 1}{x}$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 4x - 2$. On désigne par (C)

sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité : 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
 b) Etudier la position relative de (C) et de (D).
3. a) Vérifier que $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 b) En déduire les variations de f , puis dresser son tableau de variation.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
 b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.
6. a) Démontrer que f détermine une bijection de l'intervalle $]0 ; +\infty [$ dans un intervalle K que l'on précisera.
 b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') sa courbe représentative.
 Déterminer le sens de variation de f^{-1} puis établir son tableau de variation.
7. Construire (C), (C'), et (D).

Solution

Partie A

1. limites de g aux bornes de $]0 ; +\infty [$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (4x^2 + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(4x - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

2. a) Dérivée de g

$$\forall x \in]0 ; +\infty [, g'(x) = 8x - \frac{1}{x} = \frac{8x^2 - 1}{x}.$$

$$b) \forall x \in]0 ; +\infty [, g'(x) = \frac{8x^2 - 1}{x} = \frac{(\sqrt{8}x + 1)(\sqrt{8}x - 1)}{x} = \frac{(\sqrt{8}x + 1)}{x}(\sqrt{8}x - 1).$$

$$\forall x \in]0 ; +\infty [, \frac{(\sqrt{8}x + 1)}{x} > 0, \text{ donc } g'(x) \text{ a le même signe que } (\sqrt{8}x - 1) \text{ sur }]0 ; +\infty [.$$

$$\text{Ainsi : } g'(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 0, \forall x \in]0 ; \frac{1}{\sqrt{8}} [, g'(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]\frac{1}{\sqrt{8}} ; +\infty [, g'(x) > 0.$$

3. Sens de variation de g

D'après le signe de g' étudié dans la question précédente,

$$g \text{ est strictement décroissante sur } \left] 0 ; \frac{1}{\sqrt{8}} \right].$$

$$g \text{ est strictement croissante sur } \left[\frac{1}{\sqrt{8}} ; +\infty \right[.$$

Tableau de variation de g

x	0	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\frac{1}{\sqrt{8}})$	$+\infty$

$$g(\frac{1}{\sqrt{8}}) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{8}} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 8$$

4. D'après l'étude de g , g admet sur $]\infty ; +\infty[$ un minimum atteint en $\frac{1}{\sqrt{8}}$

Ainsi : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{8}}) > 0$.

Donc $\forall x \in]0 ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. a) Ensemble de définition de f

$x \in Df \Leftrightarrow x > 0$. Donc $Df =]0 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} \times \ln x + 4x - 2) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4x - 2) = -2$

Interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ alors, la droite (OI) est une asymptote verticale à (C).

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 2) = +\infty$

2. a) Asymptote

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) - (4x - 2) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (4x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc la droite $D : y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Position relative de (C) et de (D).

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) - (4x - 2) = \frac{\ln x}{x}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - (4x - 2)$ a le même signe que $\ln x$. Ainsi :

$\forall x \in]0 ; 1[, f(x) - (4x - 2) < 0$ donc (C) est au-dessous de (D) sur $]0 ; 1[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[, f(x) - (4x - 2) > 0$ donc (C) est au-dessus de (D) sur $]1 ; +\infty[$.

(C) coupe (D) au point A(1 ; 2).

3. a Dérivée de f

$$\forall x \in]0 ; +\infty [, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} + 4 = \frac{1 - \ln x + 4x^2}{x^2} = \frac{4x^2 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Sens de variation de f

d'après la partie A, $\forall x \in]0 ; +\infty [$, $f'(x) > 0$ par suite,

$\forall x \in]0 ; +\infty [, f$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$.

Tableau de variation de f.

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

4. a) Existence et unicité de la solution de f(x)=0

- f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$
- $f(]0 ; +\infty [) = \mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{R}$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0 ; +\infty [$.

$f(\frac{1}{2}) = -2\ln 2 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$. Donc on a : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) Utilisons la méthode de balayage

x	0,5	0,6	0,7
Signe de f(x)	-	-	+

On a alors : $0,6 < \alpha < 0,7$

x	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66
Signe de f(x)	-	-	-	-	-	-	+

En définitive, on a : $0,65 < \alpha < 0,66$.

5. (T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1).

Avec $f'(1) = 5$ et $f(1) = 2$, on a :

$$(T) : y = 5(x - 1) + 2$$

$$(T) : y = 5x - 3.$$

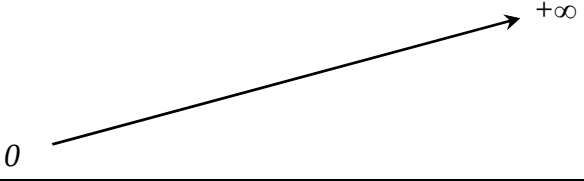
6. a) bijection

- f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$
- $f(]0 ; +\infty [) = \mathbb{R}$

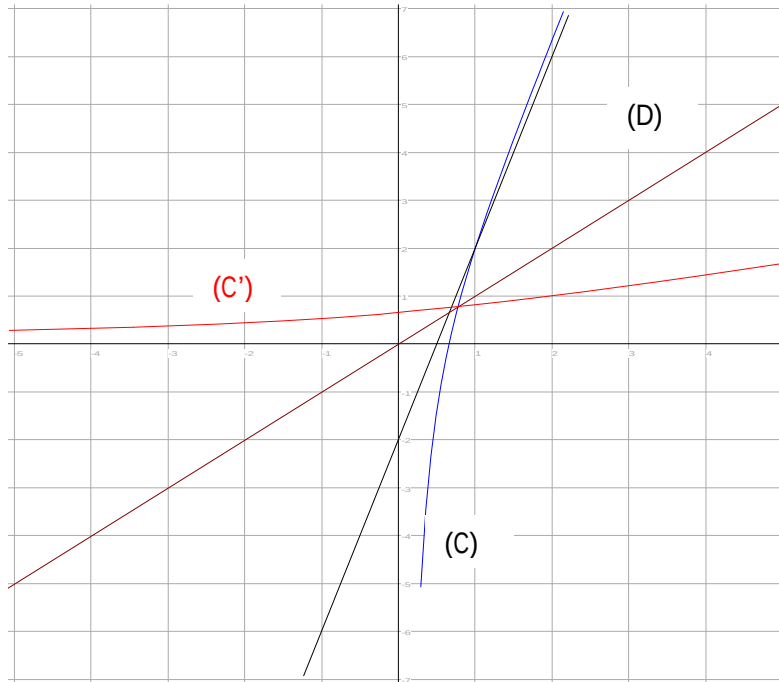
Donc f est une bijection de $]0 ; +\infty [$ vers $\mathbb{R}$

b) f^{-1} et f ont le même sens de variation. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	+	
$f^{-1}(x)$		

7. Constructions (voir graphique)



Exercice résolu 7 (Etude globale de fonction)

Partie A

On donne la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$.

- 1) Etudier la parité de g .
- 2) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (On ne calculera pas les limites)
- 3) a- Calculer $g(-1)$.
- b. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1 - \frac{\ln|x|}{x}$ et sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unité 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ) .

- 1) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^*$.
- 2) Sachant que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- 3) En déduire le signe de f' suivant les valeurs de x .
- 4) Donner le tableau de variation de f .

- 5) On désigne par (C) la courbe de représentative f dans le repère (O, I, J)
- Montrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote à (C) .
 - Montrer que (C) et (D) se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que : $x_B < 0 < x_A$, puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (D) .
 - Montrer que le point J est un centre de symétrie de (C) .
 - Donner les équations des tangentes (T) et (T') à (C) respectivement aux points A et B .
 - Tracer soigneusement (D) , (T) , (T') et (C) .

Solution

Partie A

1. Parité de g :

L'ensemble de définition D_g de g est : $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $-x \in \mathbb{R}^*$ (1).

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$g(-x) = -x^2 - \ln(-x) = -x^2 - \ln x - \ln(-1) = -x^2 - \ln x + 0 = g(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $g(-x) = g(x)$ (2)

De (1) et (2) on déduit que g est paire.

2) Variations de g

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \frac{-2x}{x} = -2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $g'(x) < 0$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de -2

Ainsi : $\forall x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) < 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) < 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-$		$+$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

3)

a. $g(-1) = -1^2 - \ln(-1) = -1 - 0 = -1$

b. $g(-1) = 0$ alors $g(1) = 0$ car g est une fonction paire.

D'après l'étude des variations de g , g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On a : $\forall x \in]-\infty; 0[$ $x < -1$

$\forall x \in]-\infty; -1[$:
 soit $x < -1$
 donc $g(x) > g(-1)$
 soit $g(x) > 0$

Par ailleurs g est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$ et $g(-1) = 0$:

On a : $\forall x \in]-1; +\infty[$
 soit $x > -1$
 donc $g(x) < g(-1)$
 soit $g(x) < 0$

En résumé on a : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, $g(x) \neq 0$ et $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

1) Calcul de limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln|x|}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 1 - \frac{\ln(-x)}{x} \right]$$

Posons $X = -x$ alors $x = -X$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $X \rightarrow +\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[-X + 1 + \frac{\ln X}{X} \right] = -\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x + 1 - \frac{1}{x} \ln|x| \right]$$

$$= -\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + 1 - \frac{1}{x} \ln|x| \right]$$

$$= +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln|x| = -\infty \end{array} \right.$$

Etudions le signe de $f(x) - (x+1)$.

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) - (x+1) = -\frac{\ln|x|}{x} = \frac{\ln|x|}{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $\ln x \leq 0 \iff x \leq 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $\ln x < 0 \iff x \neq 1$ et $x > 0$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $\ln x > 0$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-x$			0	$-$	
$\ln x $		0	$-$	$-$	0
$f(x) - (x+1)$		0	$-$	0	$-$

Ainsi pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $f(x) - (x+1) < 0$

$x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $f(x) - (x+1) > 0$

On en déduit que :

- (C) est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $] -\infty ; -1[$ et $] 0 ; 1[$
- (C) est au dessous de (D) sur chacun des intervalles $] -1 ; 0[$ et $] 1 ; +\infty[$
- C et D se coupent aux points d'abscisses -1 et 1 .

c) Montrons que $J(0; 1)$ est centre de symétrie de C

Rappel : Un point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de (C) si et seulement si :

Pour tout $x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$ et $f(x) + f(a - x) = 2b$

Pour le point $J(0; 1)$, on a : $a = 0$ et $b = 1$

$a - x = -x$.

$x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow x \neq 0$

$\Rightarrow -x \neq 0$

$\Rightarrow -x \in \mathbb{R}^* \quad (3)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $f(-x) + f(x) = 2$ $\iff -\frac{\ln|-x|}{-x} + \frac{\ln|x|}{x} = 2$ $\iff \frac{\ln|x|}{x} - \frac{\ln|x|}{x} = 2$ $\iff 0 = 2$ $\iff$ (4)

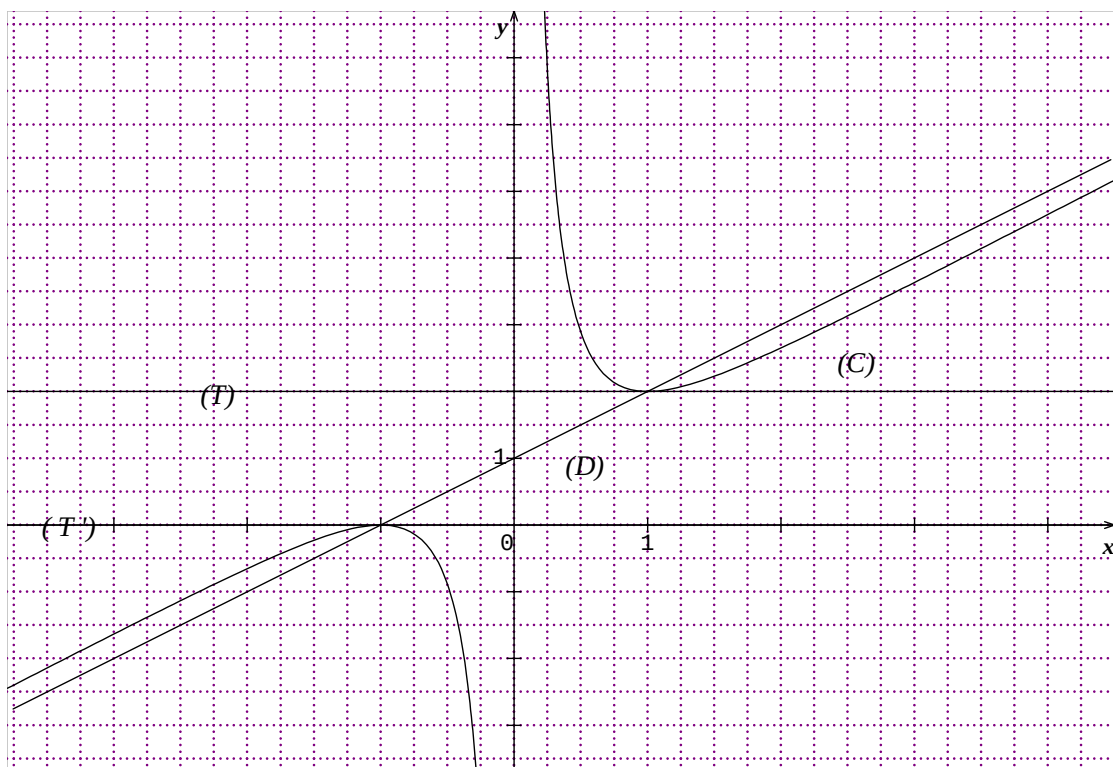
De (3) et (4) on déduit que J est centre de symétrie de (C).

d- Equations des tangentes (T) et (T')

$f'(1) = 0$ et $f(1) = 2$ alors on a: (T): $y = 2$

$f'(-1) = 0$ et $f(-1) = 0$ alors on a: (T'): $y = 0$

e) Représentation graphique de (C), (D), (T) et (T')



EXERCICES

ENSEMBLES DE DEFINITION

E₁ Dans chacun des cas suivants,

déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

- a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
- b) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
- c) $f(x) = \frac{x-1}{x-2} - x$
- d) $f(x) = \frac{x-1}{x-2} - x$
- e) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
- f) $f(x) = \left(\frac{1-2x}{x} \right)$
- g) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$
- h) $f(x) = \left| \frac{x+1}{x-3} \right|$

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = x - \frac{x}{x-1}$$

EQUATIONS ET INEQUATIONS AVEC «ln »

E₂

Résoudre dans $\mathbb{R}$ Chacune des équations suivantes :

a) $x = \frac{x}{x-1}$

c) $3 - x = \frac{x}{x-1}$

e) $x^2 - x = \frac{x}{x-1}$

$$f) -x^3 - x^2 - x -$$

$$g) 2 - x = -$$

$$h) 5 - x ; i) \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$j) x^2 -$$

$$k) x - x -$$

E₃

Résoudre dans $\mathbb{R}$ Chacune des inéquations suivantes :

$$a) x -$$

$$-x$$

$$c) x \leq$$

$$x^2 - x$$

$$e) 2 - x - x$$

$$f) -x^3 - x^2 - x -$$

$$g) x^2 - x - 4 \leq$$

$$h) -x - x \leq$$

$$i) x^2 - x - \leq$$

E₄

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées.

$$a) x -$$

$$-x - x^2 -$$

$$c) x - x^2 - x$$

$$d) x - x - x$$

E₅

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} x & y \\ x & y \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x & y = - \\ xy & - \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 & y^2 \\ x & y \end{cases}$$

E₆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations proposées :

$$a) x - \leq x -$$

$$b) -x \geq x^2 -$$

$$c) x \leq x^2 - x$$

$$d) x^2 -$$

$$e) \left(\frac{2}{x}\right) \geq x$$

$$f) x^2 - x \leq x$$

$$g) x - \leq$$

E₇

Dans chacun des cas suivants, résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'inéquation d'inconnue n proposée :

$$a) n \leq$$

$$b) \frac{1}{3}n \leq -2$$

$$c) \geq \frac{2}{5}n$$

$$d) \left(\frac{3}{100}\right)^n \geq$$

LIMITES AVEC $\ln$

E₈

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f en ∞

$$a) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = \frac{x - \ln x}{x} ;$$

$$f(x) = x - x$$

$$d) f(x) = x - \frac{x}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - x ;$$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$f(x) = x \left(\frac{1}{x} \right)$$

E₉

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad I =]0; +\infty[$$

$$f(x) = x - x \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right) \quad I =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0 \quad I =]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = x^2 - x \quad x \in I \quad I =]-\infty; +\infty[$$

CALCULS DE DERIVEES ET PRIMITIVES

E10

Dans chacun des cas suivants on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ; Calculer la fonction dérivée f' de f .

$$f(x) = x^2 \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \quad x \in I \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} \right) \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = x \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad I =]-\infty; +\infty[$$

E11

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \frac{x}{x^2} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad I =]-\infty; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x}{x} \quad I =]-\infty; +\infty[$$

ETUDE DE FONCTIONS COMPORTANT « ln »

E12

$$I =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

- 1) Calculer les limites de f en -1 et en 1 .
- 2) Démontrer que la fonction f est impaire.
- 3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
- 4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

E13

∞

$$f(x) = x - \frac{x}{x}$$

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle ∞ .
- 2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la représentation graphique (C_f) de f .
b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) .
c) Construire (C_f) et (D) dans un repère orthonormé.

E14

A) Etude d'une fonction auxiliaire

∞

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} - x^2$$

- 1) Démontrer que sur l'intervalle ∞ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha > 0$.

2) Préciser le signe de g sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

B) Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

- 1) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$
- 3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 + 1}$$

- b) En déduire les variations et dresser son tableau de variations.
- c) Tracer (C_f) et sa tangente au point d'abscisse 0.

E15

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ x - 1 & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

- 1) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 2) Etudier la limite de f en $+\infty$
- 3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x - 1$.
- b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

$$h(x) = f(x) - x$$

- a) Etudier les variations de la fonction dérivée h' de h sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites)
- b) en déduire le signe de h' sur $\mathbb{R}$, puis le sens de variation de h .
- c) Calculer h puis déduire de la question précédente le signe de $h(x)$ suivant les

valeurs de x .

d) En déduire la position relative de (T) et (C_f) .

6) Construire (T) et (C_f) dans un repère orthonormé.

E16

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unité : 2 cm sur (OI) et 1 cm sur (OJ) .

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(0) = -1 \\ g(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} - 1 \end{cases} \text{ Soit } (C_g) \text{ sa courbe.}$$

1) a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.

b. Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

d. Interpréter graphiquement les résultats des limites.

2) a. Démontrer que g est continue en 0.

b. Etudier la dérivabilité de g en 0.

Interpréter graphiquement le résultat.

3) On admet que g est dérivable sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

a. Démontrer que

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g'(x) = \frac{\ln x (\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

b. Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4) a. Démontrer que l'équation :

$x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

b. Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

c. En déduire que :

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

par : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}$ et (C) sa courbe .

1) a- Calculer les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

b- Interpréter graphiquement ces résultats.

2) On admet que f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, puis dresser le tableau de variation de f .

3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{\alpha}$.

En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

4) Construire (C) . On prendra $\alpha = 0,5$.

Partie C

Soit h la restriction de f à $]1;+\infty[$.

1) Démontrer que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on déterminera.

2) On note h^{-1} la bijection réciproque de h et (Γ) sa représentation graphique.

a- Dresser le tableau de variation de h^{-1} .

b- Calculer

$h(e)$; $h^{-1}\left(\frac{1-e}{e}\right)$ et $(h^{-1})'\left(\frac{1-e}{e}\right)$.

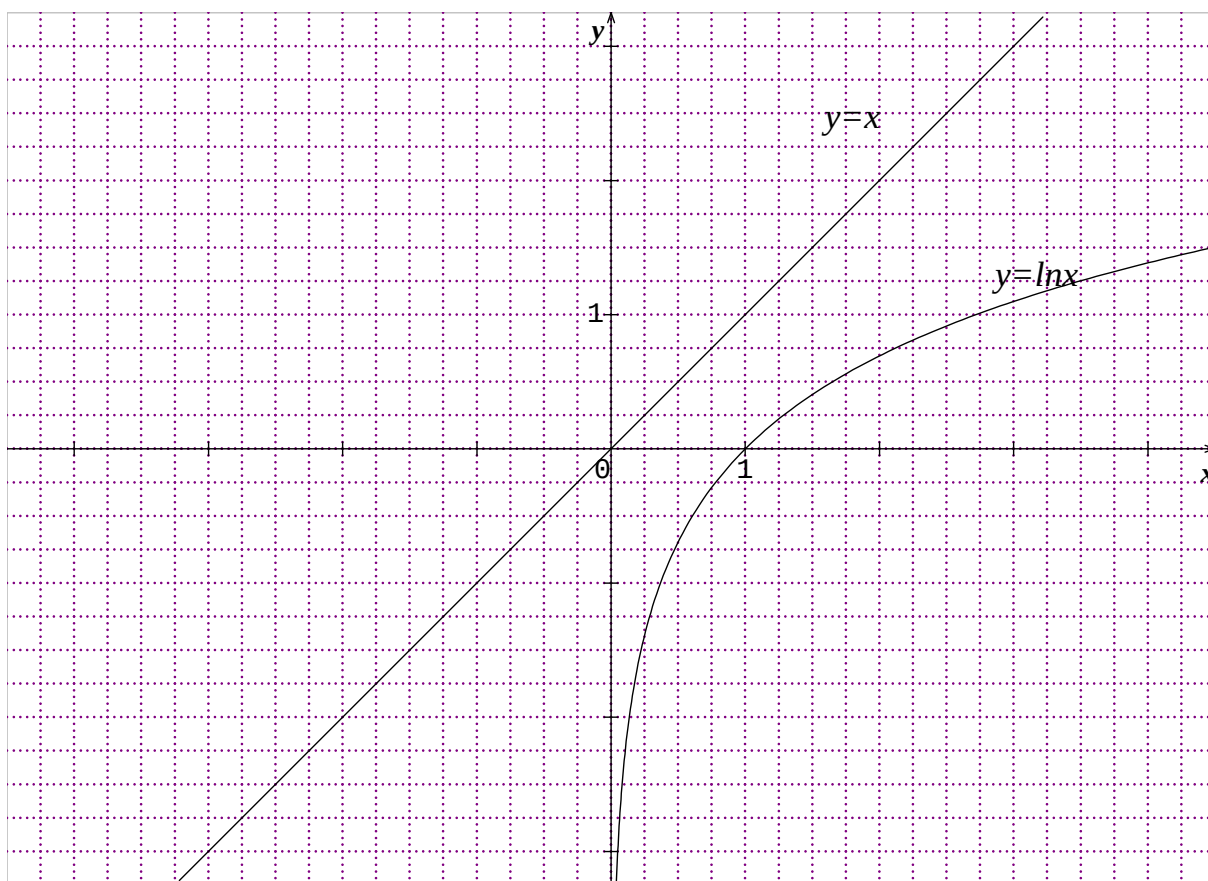
5. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Approche graphique :

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, la représentation graphique (C) de la fonction $\ln$ et la droite (D) d'équation $y = x$ sont données.

- Donner une méthode de construction de la représentation graphique de la bijection réciproque de $\ln$?
- Construire dans ce repère, à partir de (C) et (D) la représentation graphique de la bijection réciproque de $\ln$:



I. DEFINITION ET PROPRIETES

1. Définition et notations

On appelle fonction exponentielle népérienne, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note **exp**

L'image d'un nombre réel x par exp est notée **exp x** e^x et se lit « exponentielle de x »

2. Propriétés

2.1 Conséquences de la définition

- exp est **définie et dérivable** sur $\mathbb{R}$
- Pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel y , on a :
 - ♦ $e^{\ln x} = x$ et $\ln e^y = y$
 - ♦ $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
- $e^0 = 1$ $e^1 = e$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$
- exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Pour tous nombres réels x y , on a :
 - ♦ $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
 - ♦ $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

2.2 Propriété fondamentale

Propriété

Pour tous nombres réels a b on a : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Preuve :

Pour tous nombres réels a b on a :
 $e^a \cdot e^b = e^a \cdot e^b$
 $a + b$
 e^{a+b} d'où $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

2.3. Conséquences de la propriété fondamentale

Activité :

Soit a b deux nombres réels.

● **Exponentielle népérienne de l'opposé d'un nombre réel.**

- Donner la valeur réelle de e^{b-b} :

-En appliquant la propriété fondamentale, exprimer e^{b-b} en fonction de e^b e^{-b} :.....

-En déduire e^{-b} en fonction de

e^b :
....

● **Exponentielle népérienne de la différence de deux nombres réels**

-En appliquant la propriété fondamentale et le résultat précédent, exprimer e^{a-b} en fonction de e^a et e^b :

.....
.....

● **Exponentielle népérienne de ra où r est un nombre rationnel**

- En appliquant la propriété fondamentale, Exprimer les nombres e^{2a} e^{3a} e^{4a} e^{5a} en fonction de e^a :

.....
.....
.....

Propriétés

Pour tous nombres réels a b et tout nombre rationnel r , on a :

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{ra} = e^{a \cdot r}$$

Exercice résolu 1

x étant un nombre réel quelconque, simplifier les écritures suivantes :

$$e^{2x} \quad e^{-x} \quad \frac{e^{4x}}{e^{x-2}} \quad \frac{e^{3x+6}}{e^{3x-1}}$$

Solution :

Pour tout nombre réel x ,

a) $e^{2x} \quad e^{-x} \quad \frac{e^{4x}}{e^{x-2}} \quad \frac{e^{4x}}{e^{2x+1}} \quad e^{4x-2x-1} \quad e^{2x-3x} \quad e^{-x}$

b) $\frac{e^{4x}}{e^{x-2}} \quad \frac{e^{4x}}{e^{2x+1}} \quad \frac{e^{4x}}{e^{2x+1}} \quad e^{4x-2x-1} \quad e^{2x-1}$

c) $\frac{e^{3x+6}}{e^{3x-1}} \quad e^{3x+6-3x+1} \quad e^7$

Exercice résolu 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

(E₁) : $e^x - 2 = e^x$ (E₂) : $e^x = e^{2x}$; (E₃) : $e^{2x} = e^x - 1$

Solution

♦ **Résolution de (E₁) :**

L'ensemble de validité de l'équation (E₁) est $\mathbb{R}$.

$$e^x - 2 = e^x \Leftrightarrow e^x = e^x \quad e^{\ln 2} \Leftrightarrow x = \ln 2$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $\ln$
NB : on peut dire aussi : $\ln 2$ est la solution de (E_1)

♦Résolution de (E_2)

L'ensemble de validité de l'équation (E_2) est $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (car $e^x > 0$) donc l'équation $e^x = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

♦Résolution de (E_3)

L'ensemble de validité de l'équation (E_3) est $\mathbb{R}$.

Vu la forme de l'équation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = e^x$. Alors on obtient l'équation $X \in]0, \infty[$ $X^2 - X - 6 = 0$.

La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $X^2 - X - 6 = 0$ donne pour solutions -2 et 3 .

Par suite l'équation $X \in]0, \infty[$ $X^2 - X - 6 = 0$ a pour solution $X = 3$.

Ainsi, l'équation (E_3) équivaut à $x \in \mathbb{R}$ $e^x = 3$, soit $x = \ln 3$.

$\ln 3$ est la solution de (E_3)

Exercice résolu 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes

$$(I_1): e^x - e^{\ln 2} \leq 0; \quad (I_2): e^{-x} \leq 0; \quad (I_3): e^x \leq 0; \\ (I_4): e^x - e^x \geq 0; \quad (I_5): e^x - e^x \geq 0; \quad (I_6): e^{2x} - e^x \geq 0$$

Solution:

♦Résolution de $(I_1): e^x - e^{\ln 2} \leq 0$

L'ensemble de validité de l'inéquation (I_1) est $\mathbb{R}$.

$$e^x - e^{\ln 2} \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e^{\ln 2} \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est $]-\infty, \ln 2]$

♦Résolution de $(I_2): e^{-x} \leq 0$

Pour tout nombre réel x , le nombre réel e^{-x} est strictement positif. Par suite l'inéquation (I_2) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

♦Résolution de $(I_3): e^x \leq 0$

Pour tout nombre réel x , le nombre réel e^x est strictement positif.

Par suite, l'ensemble des solutions de (I_3) est $\emptyset$

♦Résolution de $(I_4): e^x - e^x \geq 0$

L'ensemble de validité de l'inéquation (I_4) est $\mathbb{R}$.

Ici, on gagne en simplicité en remarquant que l'un des facteurs du premier membre est strictement positif sur l'ensemble de validité. Ainsi, on peut adopter la rédaction suivante :

$$e^x - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 3 \geq 0 \text{ car pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ } e^x > 0 \\ \Leftrightarrow e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_4) est $S = [\ln 3, \infty[$

♦Résolution de $(I_5): e^x - e^x \geq 0$

L'ensemble de validité de l'inéquation (I_5) est $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : Etude séparée des signes des différents facteurs suivie d'un tableau de signe :

$$\bullet e^x - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x - e^x \geq 0$$

Ainsi, pour tout $x \in -\infty, e^x -$ et pour tout $x \in \infty, e^x -$

$$\bullet - e^x \Leftrightarrow - e^x < -3 \Leftrightarrow e^x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{3}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, \ln \frac{3}{2}[$, $- e^x$ et pour tout $x \in]\ln \frac{3}{2}, \infty[$, $- e^x$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$			$\ln -$	∞
$e^x -$	$-$				
$- e^x$					$-$
$e^x - - e^x$	$-$				$-$

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$(I_5) : e^x - - e^x \text{ est }] \ln \frac{3}{2}[$$

Méthode 2 : Changement de variable

On pose $X = e^x$, alors on obtient l'inéquation $X \in \infty, X - - X$

Comme le polynôme du second degré $X - - X$ a pour zéros $\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$, alors :

$$X \in \infty, X - - X \Leftrightarrow X \in] \frac{3}{2}[\text{ (règle du signe d'un polynôme du second degré)}$$

$$\text{Par suite, } e^x - - e^x \Leftrightarrow e^x \in] \frac{3}{2}[$$

$$\Leftrightarrow e^x < - \Leftrightarrow x < \ln -$$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) est : $] \ln \frac{3}{2}[$

♦Résolution de $(I_6) : e^{2x} - e^x \geq$

L'ensemble de validité de l'inéquation (I_6) est $\mathbb{R}$.

Vu la forme de l'inéquation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = e^x$, alors on obtient l'inéquation $X \in \infty, X^2 - X \geq$.

Le polynôme du second degré $X^2 - X$ ayant pour zéros $\frac{1}{2}$ et 0 , il vient :

$$X \in \infty, X^2 - X \leq 0 \Leftrightarrow X \in] \frac{1}{2}] \cup [0, \infty \text{ (règle du signe d'un polynôme du second degré)}$$

$$\text{Par suite, } e^{2x} - e^x \geq \Leftrightarrow e^x \in] \frac{1}{2}] \cup [0, \infty$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq - \text{ ou } e^x \geq$$

$$\Leftrightarrow x \leq \ln - \text{ ou } x \geq \ln$$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_6) est $-\infty; -\ln 2 \cup \ln 2, \infty$

II. ETUDE DE LA FONCTION $\exp$

1. Dérivée

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée. Autrement on a :
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp x)' = \exp x$

Preuve

Nous avons déjà noté que $\exp$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Il s'en suit que la composée $\ln \circ \exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(\ln \circ \exp)'(x) = 1$

Par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)'(x) = 1$;

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ \exp)'(x) = \frac{\exp' x}{\exp x}$, d'où

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\exp' x}{\exp x} = 1$, soit $\exp' x = \exp x$

Conséquence :

Comme $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. Limites de référence

Activité : Compléter les tableaux de variations suivants sachant que $\ln$ et $\exp$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre

Tableau de variation de $\ln$

x	$-\infty$
x'	
x	

Tableau de variation de $\exp$

x	$-\infty$	$+\infty$
x'		
x		

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Propriétés

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

On note (Γ) la courbe représentative de la fonction $\exp$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

- Interpréter graphiquement d'une part la limite i) et d'autre part les limites ii) et iii)

.....

.....

.....

.....

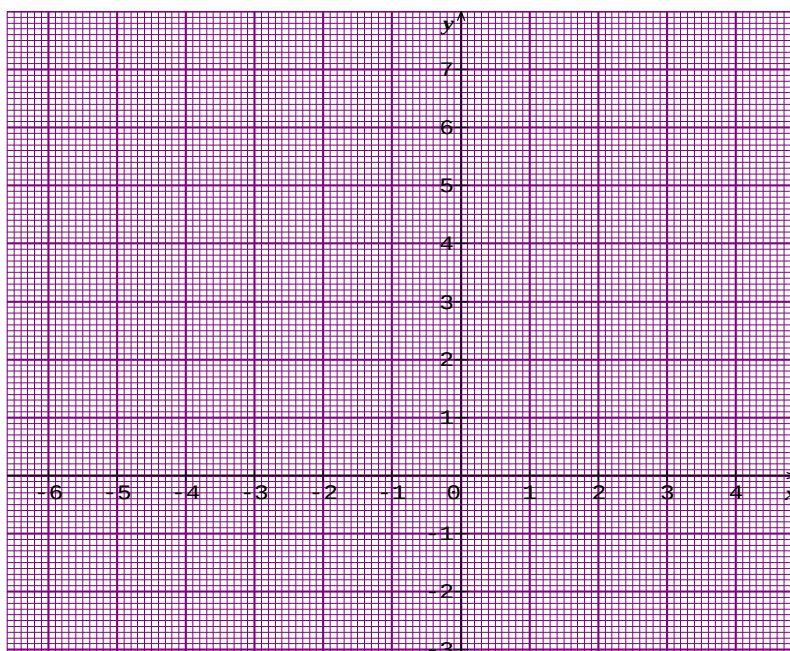
- La calculatrice comporte la touche $\boxed{e^x}$. Compléter le tableau suivant par des arrondis d'ordre 1 :

x	—	—	—	—					
e^x									

- Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0

.....

- Construire dans le repère orthonormé ci-dessous d'unité 1 cm, la courbe (Γ), la tangente (T) et la droite (D) d'équation $y = x$



- Par lecture graphique établir des inégalités en complétant par $\geq$:
- ♦ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq x$
- ♦ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x \leq x$

III. FONCTIONS DU TYPE : $x \mapsto e^{u(x)}$

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour dérivée la fonction $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$

Exercice résolu 4

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I. Calculer la dérivée de f :

$$a \quad f(x) \mapsto e^{-x^2+x} \qquad b \quad f(x) \mapsto e^{\frac{x}{x-2}} \qquad \infty \quad c \quad f(x) \mapsto xe^{2x}$$

Solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -xe^{-x^2+x}$ (formule $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2 + x$)

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{-2}{x-2} e^{\frac{x}{x-2}}$ (formule $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{x}{x-2}$)

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$

2. Primitives

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée u' soit continue sur I .
Une primitive sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Exercice résolu 5

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est continue sur l'intervalle I .
Déterminer une primitive de f sur I :

$$f(x) \mapsto xe^{\frac{1}{2}x^2-1}$$

$$f(x) \mapsto e^{-2x+1}$$

Solution

a) La fonction $f(x) \mapsto xe^{\frac{1}{2}x^2-1}$ est de la forme $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$, donc
une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $F(x) \mapsto e^{\frac{1}{2}x^2-1}$

b) La fonction $f(x) \mapsto e^{-2x+1}$ est de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = -2x + 1$, donc
une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $F(x) \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+1}$

Remarque

a, b étant deux nombres réels tels que $a \neq 0$,

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$

Exercice résolu 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$$1 : e^{\frac{2x+1}{x-2}} = 1$$

$$2 : e^{x^2-3x+1} = e$$

$$3 : e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$$

Solution

Résolution de E_1 : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = 1$

L'ensemble de validité D_1 de E_1 est $D_1 = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$e^{\frac{2x+1}{x-2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

et comme $-\frac{1}{2}$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors l'ensemble des solutions de E_1 est $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Résolution de E_2 : $e^{x^2-3x+1} = e$

L'ensemble de validité D_2 de E_2 est $D_2 = \mathbb{R}$

$$e^{x^2-3x+1} \leq e \Leftrightarrow e^{x^2-3x+1} \leq e^1 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \leq 0$$

Donc $S = [0, 3]$

Résolution de E_3 : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$

L'ensemble de validité D_3 de E_3 est $D_3 = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = x+4 \Leftrightarrow 2x+1 = (x+4)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+28}}{2} \text{ ou } x = 2$$

et comme $2 \notin D_3$ et $2 \notin \mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors l'ensemble des solutions de E_1 est $[-3, 3]$

Exercice résolu 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1 : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$

2 : $e^{x^2-3x+1} \leq e$

3 : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$

Solution

♦ **Résolution de I_1 :** $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$

L'ensemble de validité D_1 de I_1 est $D_1 = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = x+4$$

L'étude du signe de $\frac{x}{x-2}$ permet d'obtenir : $\frac{x}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

D'où l'ensemble des solutions de I_1 est $]-\frac{1}{2}, 2[\cap \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\frac{1}{2}, 2[$

♦ **Résolution de I_2 :** $e^{x^2-3x+1} \leq e$

L'ensemble de validité D_2 de E_2 est $D_2 = \mathbb{R}$

$$e^{x^2-3x+1} \leq e \Leftrightarrow e^{x^2-3x+1} \leq e^1 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 3]$$

E_2 étant $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de E_2 est $S = [0, 3]$

Résolution de I_3 : $e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4}$

L'ensemble de validité D_3 de I_3 est $D_3 = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad e^{\frac{2x+1}{x-2}} = e^{x+4} &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = x+4 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - x = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+1 - x(x-2)}{x-2} = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x + 3}{x-2} = 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x + 3}{x-2} = 4$$

Dressons le tableau de signe de $\frac{-x^2+9}{x-2}$:

x	$-\infty$	$-$	0	2	0	3	$+\infty$
$-x^2$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

$x -$	$-$		$-$				
$-x^2$			$-$				$-$
$x -$							

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de I_3 est $-\infty - \cup$

Exercice résolu 8

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie A

- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- b) Montrer que le point $A(0; 1)$ est centre de symétrie de la courbe (C).
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis interpréter graphiquement chacun des résultats obtenus.

3. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.

- b) En déduire le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.

- b) On considère la fonction h définie par $h(x) = f(x) - (x)$.

Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$. En déduire le sens de variation de h .

- c) Calculer $h(0)$, puis déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

- d) en déduire, la position de (C) par rapport à (T).

5. Tracer la droite (T), la courbe (C) et ses asymptotes.

Partie B

1. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$.

2. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Partie C

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. f^{-1} désigne la bijection réciproque de f .

Déterminer le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.

3. a) Calculer $f(\ln 3)$.

- b) Justifier que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $f^{-1}'(2)$.

4. (C') désigne la courbe de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C').

Solution

Partie A

1.a Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, par suite $D_f = \mathbb{R}$.

b. **Rappel** : Un point $A(a; b)$ est centre de symétrie de (C) si et seulement si :

pour tout $x \in D_f$, $a - x \in D_f$ et $f(a - x) + f(x) = 2b$

Pour le point $A(0; 1)$, on a : $a = 0$ et $b = 1$ et $a - x = -x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) - f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} - e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x e^x - 1}{e^x e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}$$

D'où le point A est le centre de symétrie de (C)

2. Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 - \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right) \quad \text{mise en facteur de } e^x \text{ et simplification}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
 D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right) = -1 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (C) en $-\infty$

3.a. Dérivée

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x e^x - e^x e^x}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - e^{2x}}{e^{2x}} = 0$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	0	0
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

4.a. f' = 0 et f = 0, par suite, une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est : y = 0

$$\text{b. Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = f'(x) - \frac{4e^x}{e^{x+1} - 2} = \frac{-e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{x+1} - 2} = -\left(\frac{e^x - 1}{e^{x+1} - 2}\right)^2$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h'(x) < 0$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c. Signe de h

h et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par suite on a :

Pour tout $x \in -\infty$ on a x
 donc $h(x) < h$
 soit $h(x)$

$x \in \infty$ on a x
 donc $h(x) > h$
 soit $h(x)$

Ainsi, pour tout $x \in -\infty$ $h(x)$ et pour tout $x \in \infty$, $h(x)$.

d. Position relative de (C) et (T)

La position relative de (C) et (T) relève du signe de $h(x) \mapsto f(x) - x$.

D'après c.), pour tout $x \in -\infty$ $h(x)$, donc (C) est au dessous de (T) sur $-\infty$
 pour tout $x \in \infty$, $h(x)$, donc (C) est au dessus de (T) sur ∞

5. Représentations graphiques (C) et (T) et les asymptotes (voir figure ci-après)

Partie B

1. Autre expression de $f(x)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{e^x -}{e^x}$

Par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\frac{e^x}{e^x} - \frac{e^x - e^x}{e^x} = \frac{e^x -}{e^x}$

d'où Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{e^x}{e^x} -$

2. Une primitive de f

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x}$ est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x$

Par suite une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) \mapsto \frac{e^x}{e^x} -$ est la fonction
 $F(x) \mapsto \ln e^x - x$.

Partie C

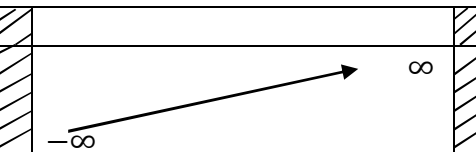
1. Bijection

D'après l'étude de son sens de variation, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = -$

2. Sens et tableau de variation de f^{-1}

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f^{-1} est strictement croissante sur $-$

Tableau de variation

x	$-$
$f^{-1}(x)$	

3.a. $f \ln \frac{3e^{\ln 3} - 1}{e^{\ln 3} + 1} = \frac{9-1}{3+1}$

b. D'après 3.a. on a $f^{-1} \ln$

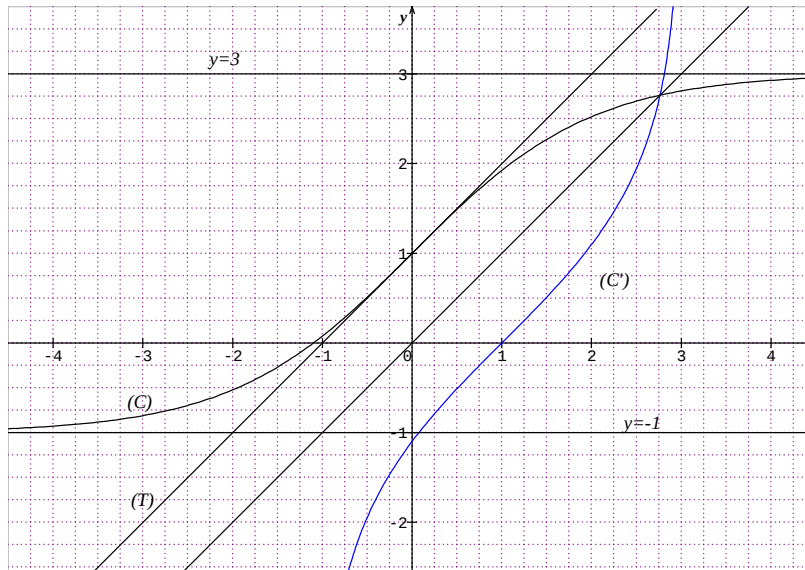
On a : $f' \ln = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} - 2} = \frac{3}{3-2} = 3$

Ainsi, $f' \ln \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 2 et on a : $f^{-1}'(2) = \frac{1}{f'(\ln 3)} = \frac{1}{3}$

4. Représentation graphique (C') de f^{-1} (voir figure ci – après)

Méthode de construction de (C') :

(C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Quelques applications de l'exponentielle dans d'autres sciences

En économie

En économie, pour suivre et décrire l'évolution de « population à croissance limitée », on utilise les fonctions logistiques f du type :

$$t \mapsto \frac{a}{1 + be^{-kt}} \quad a > 0, b > 0, k > 0$$

Elles servent par exemple à l'étude d'équipement d'un ménage en automobile, en récepteur TV etc. et ceci en fonction du temps.

1. Justifier que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative pour $a = 3, b = 1, k = 1$.

EXERCICES

APPLICATIONS DES PROPRIETES

E₁

Simplifier les expressions suivantes :

a) $e^{x-3} e^{2x}$

b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}}$

c) $\frac{e^{3x}}{e^{-x-2} e^x}$

d) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

E₂

Pour tout nombre réel x on pose

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité des fonctions g et h

2. Démontrer que $g(x)^2 - h(x)^2 = 1$

3. Démontrer que $g(x) = g(x^2) -$
et que $h(x) = g(x) - h(x)$.

E₃

Pour tout réel x on pose $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Etudier la parité de la fonction f .
2. Démontrer que pour tout réel x ,
$$f(x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

EQUATIONS ET INEQUATIONS

E₄

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées :

- a) e^{3-x}
- b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$
- c) $2 - e^x$
- d) e^x
- e) $e^x - e^{-x}$
- f) $e^{2x} - e^x -$
- g) $e^x - e^{-x} -$
- h) $e = e^x = e^{\frac{2}{x}}$

E₅

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a) $e^x - 3 \geq$
- b) $e^{-x} -$
- c) e^{1-x}
- d) $e^{2x} - e^x -$
- e) $(e^x - - e^x) \leq$
- f) $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} \geq$
- g) $e^x - e^{-2x}$

E₆

Les polynômes P et Q sont définies sur

$\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ et

$Q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

1. a- Factoriser $P(x)$.
- b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
 $e^{3x} + e^{2x} - 10e^x + 8 = 0$
2. a- Calculer $Q(1)$ et $Q(-1)$ et en déduire une factorisation de $Q(x)$.
- b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
 $6e^{-4x} - e^{-3x} - 7e^{-2x} + e^{-x} + 1 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $P(x) = Q(x)$

b. $e^{4x} - 8e^{2x} + 9e^x - 2 = 0$

E₇

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

- (1)
$$\begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$
- (2)
$$\begin{cases} -\ln(x+4) + \ln(y+1) = \ln 2 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$$
- (3)
$$\begin{cases} e^{x+\ln 2} + e^{y+\ln 5} = 16 \\ e^{x+\ln 3} + e^{y+\ln 3} = 15 \end{cases}$$

E₈

Etudier la limite de f à l'endroit indiqué :

- a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ en $0, +\infty, -\infty$
- b) $f(x) = e^{2x} - e^x$ $\infty, -\infty$
- c) $f(x) = xe^{-x}$ ∞
- d) $f(x) = x - e^{-x}$ $\infty, -\infty$
- e) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^{x+1}}$ en $+\infty, -\infty$
- f) $f(x) = \frac{1}{x} e^{2x} -$ ∞
- g) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ ∞
- h) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)}$ en 0 .

E₉

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la fonction dérivée de f .

- a) $f(x) = e^{-2x+1}$
- b) $f(x) = e^{x^2}$
- c) $f(x) = e^x - x$
- d) $f(x) = -x e^{1-x}$
- e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

E₁₀

1) Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$

- a) $f(x) = e^{-4x}$
- b) $f(x) = xe^{x^2}$
- c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
- d) $f(x) = x - e^{-2x+1}$

- 2) Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer une primitive de $f + g$ sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

ETUDE DE FONCTION COMPORTANT « ln » ET « Exp »

E12

Partie A

Soit la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x - e^{-x}$

- Déterminer les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = 1 + e^{-x}$.
 - En déduire les variations de h et dresser son tableau de variations.
 - Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, -\alpha[$ l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-\alpha < 0$.
 - En déduire que pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} h(x) < 0 & x \in]-\infty, -\alpha[\\ h(x) > 0 & x \in]-\alpha, +\infty[\end{cases}$$

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2 - x e^{-x}$.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Démontrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = h(x)$.
- En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- Etudier la position relative de (C_f) et Δ .
- Démontrer que (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
- Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm, tracer (C_f) , Δ et (T) .
On prendra $\alpha = -\frac{1}{2}$.

E13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $O I J$ (unité 2 cm)

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = x - e^x$.

- Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
- Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Etudier suivant les valeurs de x le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g .
En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^2 - x e^{-x}$.

- Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - Calculer les limites des expressions $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$.
 - Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -x^2 + x e^{-x}$.
 - Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . On ne cherchera pas à calculer $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
 - Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
 - Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - x^2 = x e^{-x} g(x)$.
 - Déduire de la **partie A** la position relative de (C_f) par rapport à (T) .
 - Tracer avec précision, dans le repère (O, I, J) , la tangente (T) et la courbe (C_f) .

On prendra $\sqrt{5} \approx 2,236$; $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1,3$
et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2,5$.

E14

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par : $g(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et calculer les limites à ses bornes.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 2$.
- 3) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 4) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1 - e^x}$.

- 1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- b- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) a- Justifier que

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[& f(x) < x \\ \forall x \in]0; +\infty[& f(x) > x \end{cases} \quad 1 - e^{-x}$$

b- Justifier que les droites D_1 et D_2 d'équations respectives : $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes obliques à (C_f) en $-\infty$ et $+\infty$.

c- Calculer les coordonnées du point d'intersection A de (C_f) et D_1 .

d- Étudier la position de (C_f) par rapport à D_2 sur $]-\infty; +\infty[$.

3) a- On admet que f est dérivable sur D_f . Vérifier que $\forall x \in D_f, f'(x) = g(x)$.

b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$.

a- Justifier que l'équation $h(x) = 1$ admet dans $]-\infty; 0[$ une solution unique α et que $\alpha < -1$.

b- Calculer les valeurs exactes de h et h^{-1} où h^{-1} est la bijection réciproque de h .

5) Prouver que la courbe (C_f) coupe l'axe (OI) en deux points P et Q dont on déterminera les coordonnées. On prendra $x_P < x_Q$.

6) Tracer avec soin dans le repère $O I J$:

a- La courbe (C_f) et toutes ses asymptotes. On marquera les points A , P et Q .

b- La courbe Γ de h^{-1} et ses asymptotes.

E15

Partie A

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par } g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$$

1). a. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

2). a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0; +\infty[$ une solution unique α .

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,1.

b. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On note h_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$

par $h_n(x) = x^2 - n + n \ln x$ où n est un entier naturel non nul.

1.a. Calculer les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier les variations de h_n et dresser son tableau de variation.

c. Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une solution unique β_n et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

Partie C

Soit f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}.$$

1).a. Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

b. Démontrer la courbe représentative (C_n) de f_n admet une asymptote oblique (Δ_n) dont on précisera une équation.

c. Étudier les positions relatives de (C_n) et (Δ_n) .

2).a. Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'_n(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}.$$

- b. En déduire les variations de f_n et dresser son tableau de variation ;
- 3).a. Démontrer que :
pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f_n(x) = x - ng(x)$
- b. En déduire que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A de coordonnées $(\alpha; \alpha)$
- c. Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1})
- 4) Construire dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm les courbes (C_1) et (C_2) .

E16

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\frac{e^{2x} - 9}{e^x - 5} \leq 0$.
2. Montrer que
 $e^{2x} - 10e^x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 9; +\infty[$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty; \ln 3[\cup]\ln 5; +\infty[$ par
$$f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 9}{e^x - 5} \right)$$
. On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm).

- 1) a- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Γ) . (On pourra poser $x = \ln e^x$). Préciser les autres asymptotes.

- 2) a- Montrer que :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{e^x (e^{2x} - 10e^x + 9)}{(e^x - 5)(e^{2x} - 9)}$$

- b- Déduire du A-2) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et donner le sens de variation de f .

- c- Dresser le tableau de variation de f .
- d- Donner les extrema relatifs de f en précisant les points où ils sont atteints.
- 3) a- Donner la position de la courbe relativement à son asymptote oblique (D) .
b- Déterminer le point A d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe (OI) des abscisses.
- 4) Construire dans le repère (O, I, J) la courbe (Γ) et ses asymptotes.
- 5) Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation :
 $x \in \mathbb{R}, f(x) = m$.

Partie C

On pose $g : \left[\ln \left(\frac{9}{5} \right); \ln 3 \right] \rightarrow K$

$$x \mapsto f(x)$$

On suppose que g est une bijection.

1. Montrer que K est un intervalle que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variation de g^{-1} , bijection réciproque de g .
3. Tracer dans le repère (O, I, J) , la courbe représentative de g^{-1} .

6. FONCTIONS PUISSANCES

I. Puissance d'un nombre réel strictement positif.

1. Définition

Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre réel b , On appelle puissance d'exposant b du nombre réel a , le nombre réel noté a^b et défini par $a^b = e^{b \ln a}$

Remarques :

* Ainsi, Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b , a^b

* Pour tout nombre réel strictement positif a et pour tout nombre réel b : $\ln a^b = b \ln a$

Exemple :

$$e^{-\sqrt{3}} = e^{-\sqrt{3} \ln 5} = 5^{-\sqrt{3}} \quad \pi = e^{\pi \ln 13} = 13^{\pi} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = e^{\frac{4}{5} \ln \frac{2}{3}}$$

N.B : la touche $\boxed{y^x}$ permet de d'obtenir des valeurs approchées de a^b

2. Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et a' et pour tous nombres réels b et b' , on a :

$$\begin{aligned} a^b a^{b'} &= a^{b+b'} & (a^b)^{a'} &= a^{b a'} \\ a^b a^{b'} &= a^{b+b'} & \frac{a^b}{a^{b'}} &= a^{b-b'} \\ \frac{a^b}{a^{b'}} &= a^{b-b'} & \frac{a^b}{a'^b} &= \left(\frac{a}{a'}\right)^b \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2} &= -2 + \sqrt{2} = -1 & \left(-\frac{0.3}{0.3}\right)^{0.3} &= 0.3 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} &= \frac{2}{3}^{1.5} = 1 & a^{\frac{\sqrt{2}}{a^{\sqrt{2}}}} &= \frac{\sqrt{2} a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 1.1

Simplifier les écritures suivantes

$$2^{-\sqrt{3}} = 2^{+\sqrt{3}} = (\sqrt{ })^{\pi} = (\sqrt{ })^{\pi} = -1.25^{\frac{4}{5}} = \frac{(\sqrt{ })^{5-a}}{(\sqrt{ })^{3-a}} \quad a \in \mathbb{R} \quad \frac{\pi^{3/2}}{\pi^{3/2}}$$

II. Fonction exponentielle de base a (ou fonction $x \mapsto a^x$), $a > 0$.

1. Définition

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1

On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction notée a^x et définie sur $\mathbb{R}$ par

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Remarques

La fonction exponentielle de base e est la fonction exponentielle népérienne :

$$\exp_e x = e^x$$

La fonction exponentielle de base e est la bijection réciproque de la fonction logarithme décimal : $\exp_{10} x = e^x$

2. Sens de variation

Pour tout nombre réel a strictement positif différent de 1, la fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \ln a = e^{x \ln a} \ln a = \ln a \cdot a^x$.

Ainsi,

si $a < 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, a^x est strictement décroissante.

Si $a > 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, a^x est strictement croissante.

Théorème

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1.

■ Si $a < 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

■ Si $a > 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

NB : Ce théorème trouve un intérêt certain dans la comparaison de deux puissances différentes d'un même nombre réel strictement positif différent de 1.

Ainsi,

✓ Si $a < 1$, pour tous réels α et β , $\alpha < \beta \Leftrightarrow a^\alpha > a^\beta$

✓ Si $a > 1$, pour tous réels α et β , $\alpha < \beta \Leftrightarrow a^\alpha < a^\beta$

Exemple :

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} < \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi} \quad x \mapsto \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$$

3. Limites

Théorème

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1.

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ si $a < 1$

Remarque

Pour l'étude de la fonction $x \mapsto a^x$ on peut se ramener à la forme $e^{x \ln a}$

Exercice résolu 1

$x \rightarrow +\infty$	x	$x \rightarrow +\infty$	π^x
-------------------------	-----	-------------------------	---------

Solution

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow +\infty \quad x \quad x \rightarrow +\infty \quad e^{x \ln 0.3} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \quad x \quad -\infty \\ x \rightarrow -\infty \quad e^x \end{array} \right. \\
 x \rightarrow +\infty \quad \pi^x \quad x \rightarrow +\infty \quad e^{x \ln \pi} \quad \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \quad x \quad \pi \quad \infty \\ x \rightarrow -\infty \quad e^x \quad \infty \end{array} \right. \quad \pi
 \end{array}$$

Exercice 3.1

Dans chacun des cas suivants :

- Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f .
- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

$$f(x) \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^x \quad f(x) \mapsto x^x \quad f(x) \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^x$$

Exercice résolu 2

Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = x^x$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

- Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - Calculer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de chacune des expressions $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- Tracer (C) et (T)

Solution

1.a. Limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x \ln x}$$

Posons $X = x \ln x$ soit $x = \frac{1}{\ln 2} X$ Quand $x \rightarrow -\infty$ $X \rightarrow -\infty$ par suite on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln 2} X e^X$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = \frac{1}{\ln 2} x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

b. Limites quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x \ln 2}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = \infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x \ln 2} = \infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = \infty$$

Interprétation graphique : (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

2. Variations et tableau de variations de f

- **Dérivée :**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x e^{x \ln 2}$. On a donc :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x \ln 2} x \ln 2$
soit $f'(x) = x \ln 2 e^{x \ln 2}$

- **Signe de la dérivée et variations**

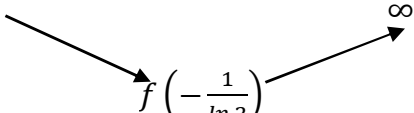
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x \ln 2} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x \ln 2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \ln 2 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\ln 2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{\ln 2}$$

d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\ln 2}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{1}{\ln 2}, +\infty[$.

- **Tableau de variation**

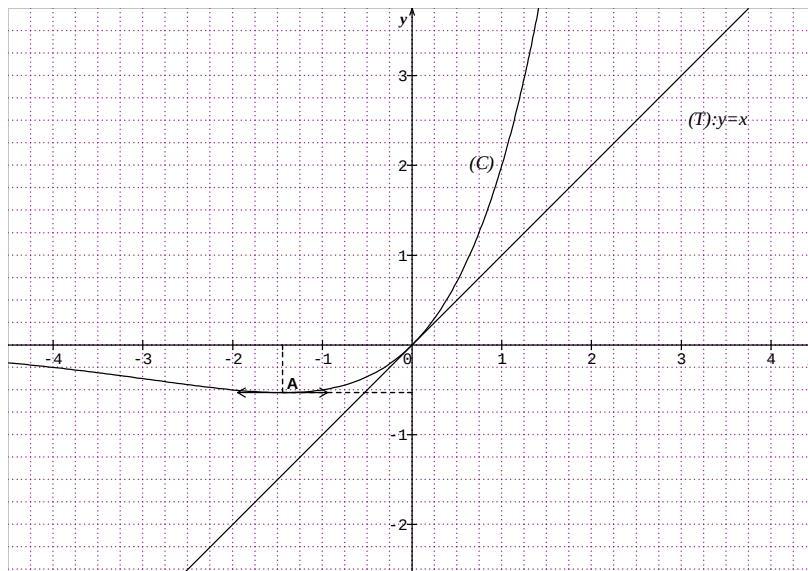
x	$-\infty$	$-\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$			

$$\text{Avec } f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{-1}{e \ln 2} \approx -$$

3. Tangente (T) au point d'abscisse 0

$f'(0) = 0$ par suite (T) a pour équation $y = 0$

4. Représentations graphiques



Exercice résolu 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x^{\ln 3} = e^{\ln 5}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln 0.05}$

c) L'équation (E_2) : $x^2 - x = x$

d) L'inéquation (I_2) : $x^2 - x \leq x$

Solution

a) **Résolution de l'équation** E_1 : $x^{\ln 3} = e^{\ln 5}$:

L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$.

$$x^{\ln 3} = e^{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $\left\{ \frac{\ln 5}{\ln 3} \right\}$

b) **Résolution de l'inéquation** I_1 : $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln 0.05}$

L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln 0.05} \Leftrightarrow e^{x \ln \left(\frac{1}{2}\right)} = e^{\ln 0.05}$

$$\Leftrightarrow x \ln \left(\frac{1}{2}\right) = \ln 0.05$$

$$\Leftrightarrow -x \ln 2 = \ln 0.05$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 = -\ln 0.05$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\ln 0.05}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est donc $\left] -\infty, \frac{-\ln 0.05}{\ln 2} \right]$

c) **Résolution de l'équation** (E_2) : $x^2 - x = x$

L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$.

Remarquons que $x^2 - x = x^2 - x^2 = x^2 - x^2$. Donc l'équation (E_2) équivaut à $x^2 - x^2 = x^2 - x^2$

Vu la forme de l'équation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = x^2$. Alors on

obtient l'équation $X \in \mathbb{R} \quad X^2 - X = 0$.
 La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $X^2 - X = 0$ donne pour solutions 0 et 1,
 donc l'équation $X \in \mathbb{R} \quad X^2 - X = 0$ a pour solutions 2 et 3.
 par suite l'équation (E_2) équivaut à $x \in \mathbb{R} \quad x = 2$ ou $x = 3$.

$$\begin{aligned} x &\Leftrightarrow e^{x \ln 2} = e^{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &\Leftrightarrow e^{x \ln 2} = e^{\ln 3} \\ &\Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $\left\{ \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$

d) Résolution de (I_2)

L'ensemble de validité de l'équation (I_2) est $\mathbb{R}$.

l'inéquation (I_2) équivaut à $x^2 - x \leq 0$

Vu la forme de l'inéquation, il convient d'effectuer le changement de variable $X = x$. Alors on obtient l'inéquation $X \in \mathbb{R} \quad X^2 - X \leq 0$.

La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $X^2 - X \leq 0$ donne pour ensemble de solutions

donc l'inéquation $X \in \mathbb{R} \quad X^2 - X \leq 0$ a pour ensemble de solutions $[0, 1]$.

Par suite, l'inéquation (I_2) équivaut à $x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x \leq 1$.

$$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow e^{\ln 2} \leq e^{x \ln 2} \leq e^{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 \leq x \ln 2 \leq \ln 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est donc $\left[\frac{\ln 3}{\ln 2}, 1 \right]$

III. Fonction puissance d'exposant réel non nul . Croissances comparées

1. Définition

Soit α un nombre réel non nul .

On appelle fonction puissance d'exposant α , la fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Les cas particuliers :

Si $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ $x \mapsto x^\alpha$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ $x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

Exemples :

La fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln x}$

La fonction $f : x \mapsto x^{-\pi}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^{-\pi} = e^{-\pi \ln x}$

2. Sens de variation

Propriétés

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Exercice 3.1

Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^+$:

- a) $f : x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ b) $g : x \mapsto x^{-\pi}$

3. Limites

Théorème

Soit α un nombre réel strictement positif différent de 1.

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

Remarque :

Pour étudier la fonction $x \mapsto x^\alpha$ on peut se ramener à la forme $e^{\alpha \ln x}$

Exercice 3.2

Dans chacun des cas suivants :

- Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f .
- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

$f : x \mapsto x^{0.31}$ $f : x \mapsto x^{-\pi}$

4. Croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha > 0$

Approche :

Soit α un nombre réel **strictement positif**

Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^\alpha$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, pour les grandes valeurs de x , x , e^x , x^α sont de plus en plus grands. Le but de ce paragraphe est de **comparer leurs ordres de grandeur pour les grandes valeurs de x** .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^\alpha} = 0 \quad x \mapsto \frac{x}{x^\alpha} \quad x \mapsto \frac{e^x}{x^\alpha} \quad x \mapsto \frac{x}{e^x}$$

Propriété

Pour tout nombre réel **strictement positif** α on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

Interprétation :

α étant un nombre réel **strictement positif**,

• Pour les grandes valeurs de x , x^α est négligeable devant e^x .

• Pour les grandes valeurs de x , $\ln x$ est négligeable devant x^α

On exprime ces interprétations en disant :

« A l'infini (positif), e^x l'emporte sur toute puissance de x et toute puissance d'exposant positif de x l'emporte sur $\ln x$. »

Conséquences

Pour tout nombre réel strictement positif α et tout entier naturel non nul n on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

5. Fonction u^α où u est une fonction et α un nombre réel non nul

Théorème 1

Soit α un nombre réel non nul.

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction u^α est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction $\alpha u' u^{\alpha-1}$

Théorème 2

Soit α un nombre réel non nul et différent de -1

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I tel que u' soit continue sur I , alors une primitive sur I de la fonction $u' u^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$

EXERCICES

[E1] Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de f en $+\infty$:

$$\begin{array}{lll} a \ f(x) \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}} & b \ f(x) \mapsto \frac{x^3}{e^x} & c \ f(x) \mapsto e^x - x \\ d \ f(x) \mapsto x^2 - e^{-x} \end{array}$$

[E2] Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de f en $+\infty$:

$$a \ f(x) \mapsto \sqrt{x} - x \quad b \ f(x) \mapsto x^3 - x^2$$

[E3] Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I :

$$\begin{array}{ll} a \ f(x) \mapsto x \sqrt{x^2 - x} & I =]0, 1[\\ b \ f(x) \mapsto x x^2 \sqrt{x} & I =]0, +\infty[\\ c \ f(x) \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 3}} & I =]3, +\infty[\\ d \ f(x) \mapsto \frac{x^\pi}{x} & I =]0, +\infty[\end{array}$$

7. SUITES NUMERIQUES

RAPPELS

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre premiers termes de la suite donnée.

$$\begin{aligned}
 & : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 - n - 3 \\
 & : \forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{1}{n} \\
 & 3 \quad : \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = w_n - 1 \end{cases} \\
 & \quad t_n \quad n \in \mathbb{N} \quad : \quad t_0 = 1 \quad t_1 = 2 \quad \text{et} \\
 & \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+2} = t_{n+1} - t_n
 \end{aligned}$$

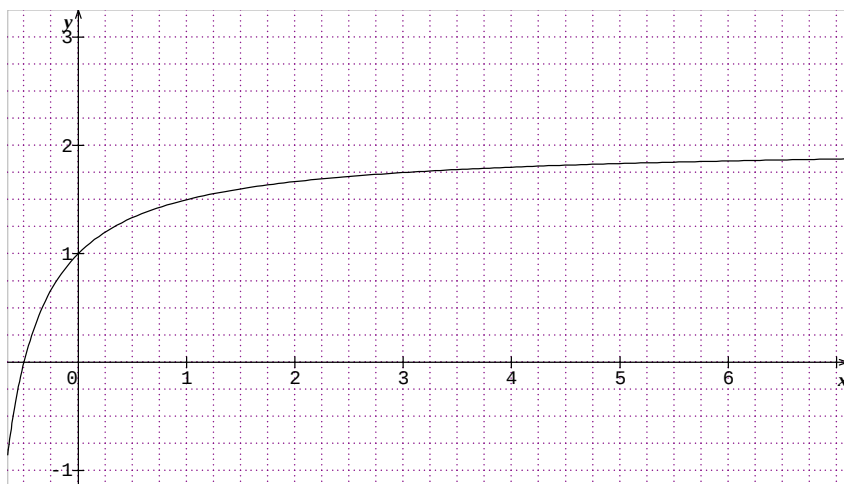
Exercice 21 Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité graphique 1 cm

2. On donne la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n} \end{cases}$

Construire les cinq premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses.

Exercice 3: On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

La représentation graphique de f est donnée dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ comme suit.



On considère les suites U et V définies par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \geq 0, V_{n+1} = \frac{2V_n + 1}{V_n + 1} \end{cases}$

Construire sur l'axe des abscisses, à l'aide de (C) et de la droite d'équation $y = x$ les trois premiers termes de chacune des suites ci-dessus.

I. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Le raisonnement par récurrence permet de justifier qu'une proposition $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné. Elle se résume en deux étapes :

1. Initialisation : Vérifier que $P(n_0)$ est vraie.

2. hérédité : Etablir que pour un entier k donné, $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Une fois que les deux étapes précédentes sont établies, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

Exercice résolu 1

On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n = 3 - 2^n$.

Solution

Notons $P(n)$ la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ »

- vérifions $P(0)$ est vraie : u_0 et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$ alors $u_0 = 3 - 2^0$.

Donc $P(0)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel, supposons que $P(k)$ est vraie c'est à dire $u_k = 3 - 2^k$ et démontrons

que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$

Par définition de la suite u on a : $u_{k+1} = u_k -$

Par hypothèse de récurrence, $u_k = 3 - 2^k$

Ainsi, $u_{k+1} = 2 [3 - 2^k] - 3 = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$ et $P(k+1)$ est vérifiée.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 1.1

Démontrer par récurrence que :

pour tout entier naturel $n \geq 1$, $2^n \leq n!$

Exercice 1.2

Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel, $u_n = \frac{1}{n+1}$

II) SENS DE VARIATIONS D'UNE SUITE NUMERIQUE

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur une partie E de $\mathbb{N}$

- ♦ (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n de E
- ♦ (u_n) est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n de E
- ♦ (u_n) est constante si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n de E

Remarque :

- une suite (u_n) définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante
- une suite constante est une suite monotone .

Point méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique (u_n) , ou pourra

- ♦ *étudier le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$*
- ♦ *si la suite est à termes strictement positive , comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1*
- ♦ *étudier le sens de variation de la fonction f si u_n est définie par $u_n = f(n)$*
- ♦ *faire un raisonnement par récurrence .*

Exercice résolu 2 :

Démontrer que la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ est croissante

Solution

Pour tout entier naturel n , $u_n = n^2$ et $u_{n+1} = (n+1)^2$
 $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.
 Pour tout entier naturel n , $2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
 Ainsi pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} > u_n$. La suite u est croissante.

Exercice résolu 3

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{2^{3n+1}}$
 Démontrer que (u_n) est décroissante.

Solution

Pour tout entier naturel n

$$\text{Et on a } u_{n+1} = \frac{1}{2^{3(n+1)+1}} = \frac{1}{2^{3n+4}} = \frac{1}{2^{3n+1} \cdot 2^3} = \frac{1}{2^{3n+1}} \cdot \frac{1}{8} = u_n \cdot \frac{1}{8}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{8}$ et comme $\frac{1}{8} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n$

La suite v_n est donc décroissante

Exercice résolu 4

Soit la suite v définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Justifier que la suite v est décroissante.

Solution

Considérons la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x} + 1}$. Pour tout entier

$$n \geq 1, \quad v_n = f(n)$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{\frac{2}{x} + 1}}$$

$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$, la suite v est strictement décroissante.

Exercice résolu 5

Démontrer par récurrence que la suite V définie par
$$\begin{cases} V_0 = 5 \\ \forall n \geq 0, V_{n+1} = \sqrt{V_n + 12} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq 0$.
2. Démontrer par récurrence que la suite V est décroissante.

Solution

1. Notons $P(n)$ la proposition « $V_n \geq 0$ »

- vérifions que $P(0)$ est vraie :

$V_0 = 5 \geq 0$ donc $V_0 \geq 0$ et donc $P(0)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel, supposons que $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $V_k \geq 0$ et démontrons que

$P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $V_{k+1} \geq 0$

Par définition de la suite V on a : $V_{k+1} = \sqrt{V_k + 12}$.

Par hypothèse de récurrence, $V_k \geq 0$ par suite $V_k + 12 \geq 12 > 0$, donc $\sqrt{V_k + 12} \geq 0$

Ainsi, $V_{k+1} \geq 0$ et $P(k+1)$ est vraie

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq 0$.

2. Notons $q(n)$ la proposition « $V_{n+1} \leq V_n$ »

- vérifions que $q(0)$ est vraie :

$V_0 = 5$ et $V_1 = \sqrt{5 + 12} = \sqrt{17} \approx 4,123$ donc $V_1 \leq V_0$ et $q(0)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel, supposons que $q(k)$ est vraie c'est-à-dire « $V_{k+1} \leq V_k$ » et

démontrons que $q(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $V_{k+2} \leq V_{k+1}$

Par définition de la suite V on a : $V_{k+1} = \sqrt{V_k}$ et $V_{k+2} = \sqrt{V_{k+1}}$.

Par hypothèse de récurrence, $V_{k+1} \leq V_k$ par suite $V_{k+1} \leq V_k$, donc $\sqrt{V_{k+1}} \leq \sqrt{V_k}$ soit $V_{k+2} \leq V_{k+1}$, d'où $P(k)$ est vraie

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} \leq V_n$ et la suite est décroissante.

Exercice 2.1

On considère la suite V définie par
$$\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \geq 0, V_{n+1} = V_n - V_n^2 \end{cases}$$
 et la fonction f définie par

$$f(x) = x - x^2$$

1. Justifier que $f\left(\left[\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}\right]$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $V_n \in \left[\frac{1}{2}\right]$

3. Justifier que la suite V est décroissante

III) SUITES MAJOREES , SUITES MINOREES

Définition :

Soit (u_n) une suite définie sur une partie E de $\mathbb{N}$

- ♦ u_n est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n de E
- ♦ u_n est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout n de E
- ♦ u_n est bornée si u_n est majorée et minorée.

Remarque

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$.

Si f est majorée (resp minorée) sur un intervalle contenant l'ensemble de définition de la suite u alors u est majorée (resp minorée).

Exercice résolu 6

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{3n^2 + n}{n^2 + 1}$

Démontrer que u est minorée par 2

Solution

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n - 2 = \frac{3n^2 + n}{n^2 + 1} - 2 = \frac{n^2 + n - 2}{n^2 + 1} = \frac{(n+2)(n-1)}{n^2 + 1}.$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{(n+2)(n-1)}{n^2 + 1} \geq 0$, donc $u_n - 2 \geq 0$ et la suite u est minorée par 2

Exercice résolu 7

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n = \sqrt{5 - \frac{1}{n^2 + 1}}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$

Solution :

Pour tout entier naturel n , on a : $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{n^2 + 1} \leq \\ -1 &\leq -\frac{1}{n^2 + 1} \leq \\ 4 &\leq 5 - \frac{1}{n^2 + 1} \leq \\ 2 &\leq \sqrt{5 - \frac{1}{n^2 + 1}} \leq \sqrt{5} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n $2 \leq u_n \leq \sqrt{5}$.

Exercice résolu 8

Soit la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_0 = 5 \\ \forall n \geq 0, V_{n+1} = \sqrt{V_n + 12} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n \geq 4$

Solution

Notons $p(n)$ la proposition « $V_n \geq 4$ »

- vérifions que $p(0)$ est vraie :

$V_0 = 5$ donc $V_0 \geq 4$ et $p(0)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel, supposons que $p(k)$ est vraie c'est-à-dire $V_k \geq 4$ et démontrons que

$p(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $V_{k+1} \geq 4$

Par définition de la suite V on a : $V_{k+1} = \sqrt{V_k + 12}$.

Par hypothèse de récurrence, $V_k \geq 4$ par suite $V_k + 12 \geq 16$, donc $\sqrt{V_k + 12} \geq 4$ soit $V_{k+1} \geq 4$, d'où $p(k+1)$ est vraie

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n \geq 4$

Exercice résolu 9 :

En utilisant le sens de variation d'une fonction f , montrer que la suite (u_n) définie pour tout

entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{2n-3}{5n-1}$ est bornée.

Solution

Considérons la fonction f définie pour $x \in]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$.

$$u_n = f(n)$$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{13}{(5x-1)^2}$

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
 f étant continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ on a

$$f(1) < f(x) < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \left[-\frac{1}{4} < f(x) < \frac{2}{5} \right]$$

Ainsi, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $-\frac{1}{4} < f(x) < \frac{2}{5}$ par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{4} < u_n < \frac{2}{5}$.

IV . LIMITE D'UNE SUITE NUMERIQUE

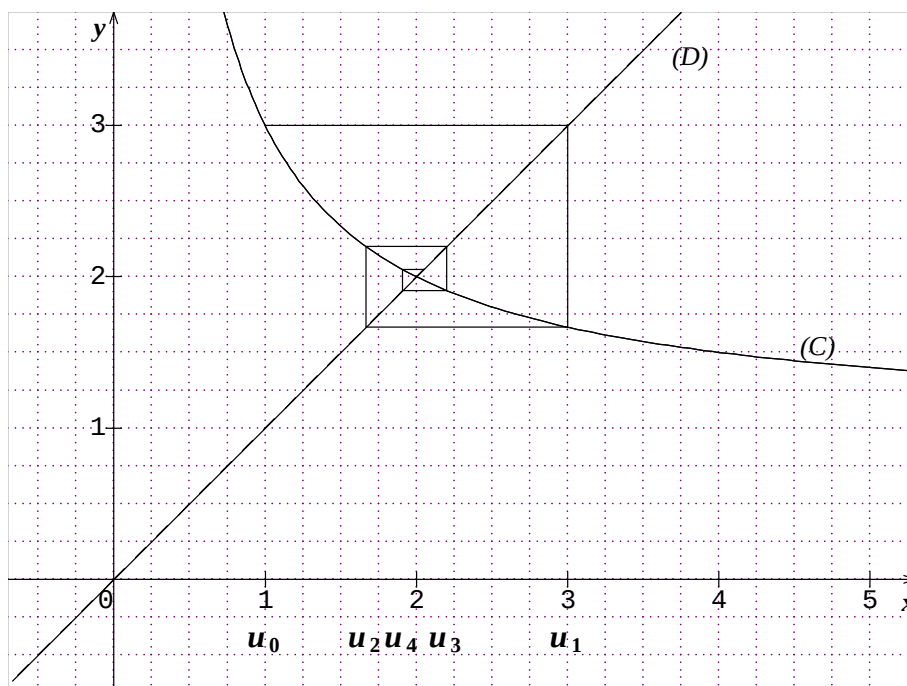
1. Notion de limite d'une suite

Activité : Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{u_n} \end{cases}$

La représentation graphique de la suite de la fonction f définie sur

$]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$ et la droite $(D) : y = x$ sont données.

Sur l'axe des abscisses, on a représenté les 5 premiers termes de la suite (u_n) .



Vers quelle valeur les termes de la suite u se rapprochent-ils pour les indices n de plus en plus grands ?

Notion de limite

♦ Pour certaines suites numériques u_n tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi proches que l'on veut d'un nombre réel ℓ . Dans ce cas on dit que la suite u_n a pour limite ℓ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \qquad \lim u_n = \ell$$

♦ Pour certaines suites numériques u_n tous les termes à partir d'un certain rang sont aussi grand que l'on veut. Dans ce cas on dit que la suite u_n a pour limite $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \qquad \lim u_n = +\infty$$

♦ On dit que la suite u_n a pour limite $-\infty$ lorsque la suite $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \qquad \lim u_n = -\infty$$

2. Définition

- ♦ Une suite numérique (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie.
- ♦ Une suite non convergente est dite **divergente**.

3. Propriétés

- Si une suite numérique admet une limite alors cette limite est unique.
- Soit (u_n) la suite numérique de terme général u_n , ou f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \qquad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Exercice résolu 10

Etudier la convergence de chacune des suites u_n , (u_n) , (u_n) .

- a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 - \frac{1}{n}$; b) $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $u_n = \frac{3n^2 - n}{1 - n^2}$; c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$.

Solution

a) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \frac{1}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Donc la suite (u_n) est divergente.

b) Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x^2 - x}{1 - x^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, v_n = g(n).$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1$$

donc $\lim(v_n) = -1$. La suite (v_n) converge vers -1.

c) Si n est pair alors $t_n = 3$ et si n est impair alors $t_n = -3$. Donc la suite (t_n) est divergente.

Exercice 4.1

Etudier la convergence des suites $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n)$.

$$u_n = 2 - 4\sqrt{n} + 1; \quad v_n = 4 + (-1)^n; \quad w_n = \frac{ne^{-n}}{n+1}; \quad z_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

4. Convergence d'une suite monotone

Propriété

- ♦ Une suite croissante et majorée est convergente.
- ♦ Une suite décroissante et minorée est convergente.

5. Propriété

Si (u_n) une suite numérique convergeant vers un réel a et f est une fonction continue en a alors la suite v définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Remarque : Une suite numérique étant une fonction les opérations sur les limites de fonctions restent également valables sur les suites numériques.

V. SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

1. Rappels

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \cdot q$
Relation entre u_n et u_p ($p \leq n$)	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ (u_n est une fonction affine)	$u_n = u_0 \cdot q^n$ (u_n est une fonction exponentielle)
Somme de termes consécutifs $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_N$ ($p \leq n$) $N - p + 1$ termes	$S = \frac{(N - p + 1)(u_p + u_N)}{2}$	$S = \frac{u_p(1 - q^{N - p + 1})}{1 - q}$ si $q \neq 1$ $S = (N - p + 1)u_p$ si $q = 1$

Exercices 5.1

1° Dans tout ce qui suit, (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_0 .

a) $u_0 = -$. Calculer u_5 u_{10} et la somme des 11 premiers termes. Exprimer u_n en fonction de n .

b) $u_2 = -$ $u_5 = -$. Calculer u_0 u_{12} et la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

c) $u_3 =$ $u_{12} =$. Calculer u_n en fonction de n et la somme $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_0$.

2° Dans tout ce qui suit, (v_n) est une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme v_0 .

a) $v_0 =$. Calculer v_5 v_{10} et la somme des 11 premiers termes. Exprimer v_n en fonction de n .

b) $v_2 =$ $v_5 = \frac{1}{64}$. Calculer q et v_0 et la somme $v_n + v_{n-1} + \dots + v_0$.

c) n entier naturel n , calculer la somme :

$$v_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n}.$$

2. Convergence des suites arithmétiques

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . u_n est de la forme : $u_n = u_0 + nr$.

♦ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est convergente.

♦ Si $r \neq 0$, alors la suite (u_n) est divergente.

3. Convergence des suites géométriques

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

v_n est de la forme : $v_n = v_0 q^n$.

♦ Si $q = 1$, alors la suite (v_n) converge vers son premier terme.

♦ Si $q \in]-1; 1[$, alors la suite (v_n) converge vers 0.

♦ Dans tous les autres cas, la suite (v_n) est divergente.

VI. SUITES n^α , b^n , $(\ln(n))$. CROISSANCE COMPAREE

Théorème

Suite	Hypothèse	Conclusion
b^n (suite exponentielle)	Si $b \in]-1; 1[$	Alors $\lim(b^n) = 0$
	Si $b = 1$	Alors $\lim(b^n) = 1$
	Si $b > 1$	Alors $\lim(b^n) = \infty$
	Si $b \leq -1$	Alors b^n n'admet pas de limite
n^α avec $\alpha > 0$ (suite puissance)	Alors $\lim n^\alpha = +\infty$	

$(\ln(n))$	Alors $\lim = +\infty$	
$(\frac{b^n}{n^\alpha})$ avec $\alpha > 0$	Si $b > 1$	Alors $\lim(\frac{b^n}{n^\alpha}) = +\infty$
	Si $0 < b < 1$	Alors $\lim(\frac{b^n}{n^\alpha}) = 0$
$(\frac{\ln n}{n^\alpha})$ avec $\alpha > 0$	Alors $\lim \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$	

Exercice résolu 11

Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) :

$$u_n = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{3^n}, \quad v_n = \frac{n \cdot 2^n}{3^n}.$$

Solution

• Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot n$. Comme $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}^+$ donc $\lim(u_n)$

• Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{n \cdot 2^n}{3^n} = n \cdot \frac{2^n}{3^n} = n \cdot \frac{1}{(\frac{3}{2})^n}$.

Comme $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\frac{3}{2})^n} = 0$ par suite $\lim v_n$

VII. PROPRIETES DE COMPARAISON

Hypothèse vraie à partir d'un certain rang	Hypothèse	Conclusion	Identité du théorème
$u_n \leq v_n$	Si $\lim(u_n) = -\infty$	Alors $\lim(v_n) = -\infty$	Théorèmes de comparaison
$u_n \geq v_n$	Si $\lim(v_n) = \infty$	Alors $\lim(u_n) = \infty$	
$ u_n - \ell \leq v_n$	Si $\lim(v_n) = 0$	Alors $\lim(u_n) = \ell$	
$w_n \leq u_n \leq v_n$	Si $\lim(u_n) = \lim(v_n) = \ell$	Alors $\lim(w_n) = \ell$	Théorème des gendarmes
$u_n \leq v_n$	Si (u_n) et (v_n) convergent vers resp. ℓ et ℓ'	Alors $\ell \leq \ell'$	Théorème du passage à la limite

Exercice résolu 12

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2 - (-1)^n}{n\sqrt{n} + 1}$.

Solution

Pour tout entier naturel n , on a : $|u_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{par suite} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

VIII. SUITE RECURRENTE

Théorème

Soit une suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I .
Si la suite (u_n) est convergente et que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ alors la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $x \in I$, $f(x) = x$.

Exercice résolu 13

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\ln x + x.$$

1) Démontrer que : $\forall x \in [1; 2], f(x) \in [1; 2]$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\ln(u_n) + u_n.$$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Démontrer que suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1) f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$.

Donc : $\forall x \in [1; 2], f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$.

Ainsi, $f([1; 2]) = [f(1); f(2)]$. Or $f(1) = 1$ et $f(1) \in [1; 2]$; $f(2) \approx 1,306$ donc $f(2) \in [1; 2]$.

D'où : $\forall x \in [1; 2], f(x) \in [1; 2]$.

2.a) Soit $P_n : 1 \leq u_n \leq 2$.

Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2$ donc P_0 est vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k soit vraie c-à-d que : $1 \leq u_k \leq 2$ et démontrons que P_{k+1} est vraie c-à-d que : $1 \leq u_{k+1} \leq 2$.

On a : $u_k \in [1; 2]$, donc $f(u_k) \in [1; 2]$ d'après la question précédente. Comme $u_{k+1} = f(u_k)$, on en déduit que : si $u_k \in [1; 2]$ alors $u_{k+1} \in [1; 2]$. Donc P_{k+1} est vraie.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = -\ln w_n$. Comme $1 \leq w_n \leq 2$ donc $\ln w_n \geq 0$, par suite $-\ln w_n \leq 0$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n \leq 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante.

c) La suite (w_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

f est continue sur $[1; 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq w_n \leq 2$ donc la limite de la suite (w_n) est solution de l'équation $x \in [1; 2], f(x) = x$.

$x \in [1; 2], f(x) = x \Leftrightarrow x \in [1; 2], -\ln x + x = x \Leftrightarrow x \in [1; 2], \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc la suite (w_n) converge vers 1.

Exercice résolu 14

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 5| \leq 0,2 |u_n - 5|$.

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 5| \leq 5 \cdot 0,2^n$.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Soit $P_n : u_n \geq 0$.

Pour $n = 0, u_0 = 0$ et $0 \geq 0$ donc $u_0 \geq 0$. Ainsi, P_0 est vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 0, P_k$ soit vraie c-à-d que : $u_k \geq 0$ et démontrons que P_{k+1} est vraie c-à-d que : $u_{k+1} \geq 0$.

On a : $u_k \geq 0$ donc $u_k \geq 0$, par suite $\sqrt{u_k} \geq 0$ donc :

$u_{k+1} \geq 0$ c-à-d P_{k+1} est vraie.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

2) Utilisons l'inégalité des accroissements finis pour prouver la propriété :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+20}}$. $\forall x \in [0; +\infty[$

$\sqrt{x} \geq \sqrt{0}$, donc $\frac{1}{2\sqrt{x+20}} \leq \frac{1}{2\sqrt{20}}$, or $\frac{1}{2\sqrt{20}} \approx 0,11 < 0,2$.

D'où : $\forall x \in [0; +\infty[, |f'(x)| \leq 0,2$. On a : $u_n \in [0; +\infty[$, et $5 \in [0; +\infty[$,

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u_n) - f(5)| \leq 0,2 |u_n - 5|$.

comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(5) = 5$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 5| \leq 0,2 |u_n - 5|$.

3) $|u_{n+1} - 5| \leq 0,2 |u_n - 5|$

Pour $k = 0, |u_1 - 5| \leq 0,2 |u_0 - 5|$

Pour $k = 1, |u_2 - 5| \leq 0,2 |u_1 - 5|$

Pour $k = 2, |u_3 - 5| \leq 0,2 |u_2 - 5|$

.....
 Pour $k = n-1$, $|u_n - 5| \leq 0,2 |u_{n-1} - 5|$

On fait le produit membre à membre et on simplifie, on aura :

$$|u_n - 5| \leq \frac{1}{2} |u_0 - 5|, \text{ or } |u_0 - 5| = 5.$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 5| \leq 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

5) Comme $\frac{1}{2} \in]0, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
 donc la suite u_n converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

Exercice résolu 15

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$

1) Démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2) Etudier la convergence de la suite (v_n)

Solution

1)

$$\text{Soit } P_n : v_n = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{Pour } n = 0, v_0 = 8 \text{ et } -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4 \text{ donc } v_1 = 8 - 4 = 4 = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^1. \text{ Ainsi, } P_0 \text{ est vraie.}$$

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k soit vraie c-à-d que : $v_k = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et démontrons

$$\text{que } P_{k+1} \text{ est vraie c-à-d que : } v_{k+1} = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

$$\text{On a : } v_{k+1} = -\frac{1}{2}v_k \text{ or } v_k = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ donc :}$$

$$v_{k+1} = -\frac{1}{2}v_k = -\frac{1}{2}\left(8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = -4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^k = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Donc P_{k+1} est vraie.

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{On a } \frac{1}{2} \in]0, 1[\text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ par conséquent}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(8 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 8.$$

Exercice résolu

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, I; J)$, la courbe (C) ci-dessous représente la fonction f définie sur $] -\infty, 6[$ par : $f(x) = \frac{9}{6 - x}$.

a) Représenter les 4 premiers de la suite (u_n) sur l'axe (OI) à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

2° Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$.

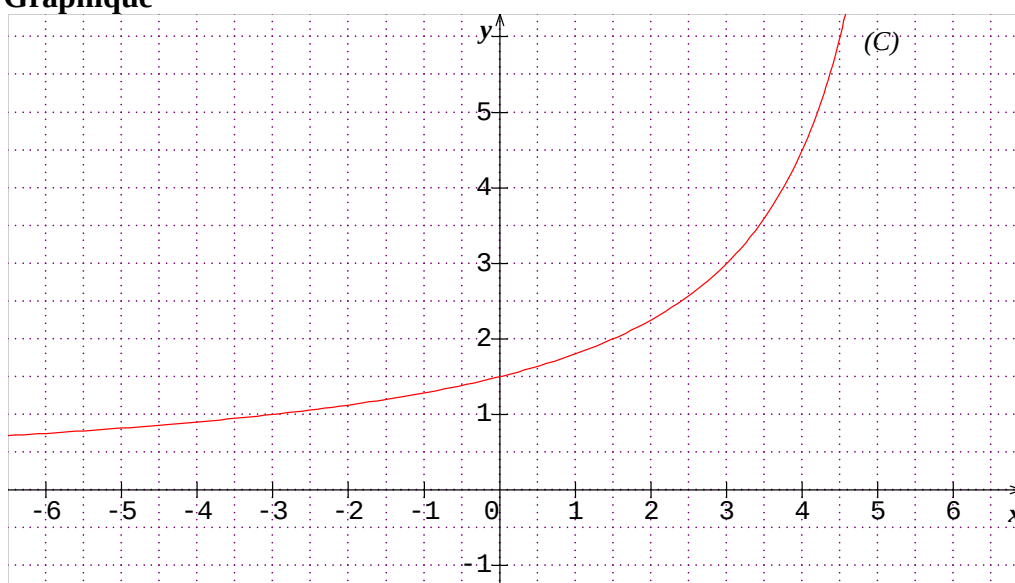
3° On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

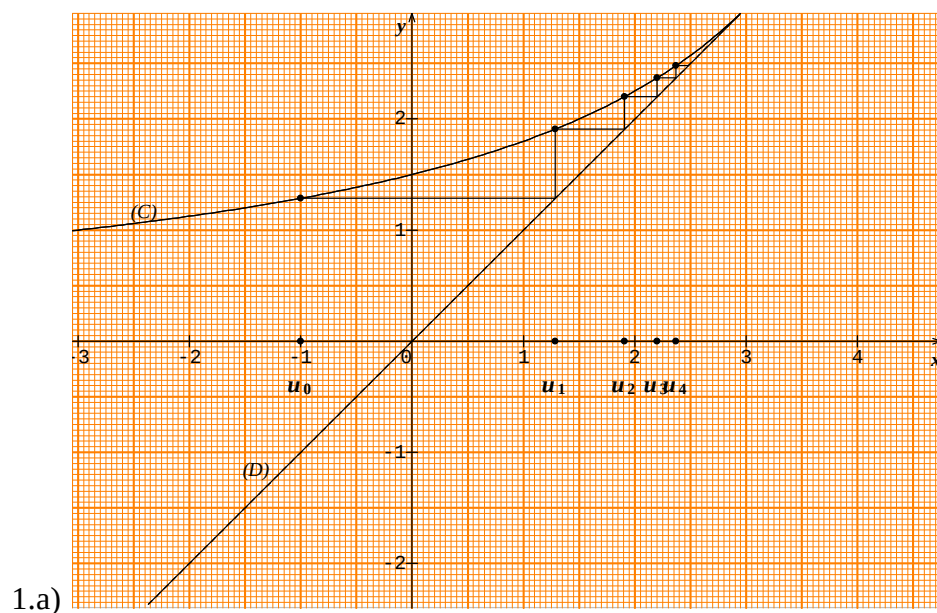
b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

Graphique



Solution



1.a)

b) Conjecture : La suite (u_n) semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de (C) et de (D).

2. Soit $P_n : u_n \leq 3$.

Pour $n = 0$, $u_0 = -1$ et $-1 < 3$ donc P_0 est vraie.

Supposons que pour un entier $k \geq 0$, P_k soit vraie c-à-d que : $u_k \leq 3$ et démontrons que P_{k+1}

est vraie c-à-d que : $u_{k+1} \leq 3$.

Pour cela, étudions le signe de $u_{k+1} - 3$:

$$\text{On a : } u_{k+1} - 3 = \frac{9}{6 - u_k} - \frac{-9 + 3u_k}{6 - u_k}.$$

$$\text{On a : } u_k \leq 3, \text{ donc : } -u_k \geq -3 \text{ donc : } 6 - u_k \geq 3. (1)$$

$$\text{On a : } u_k \leq 3, \text{ donc : } u_k \leq 3, \text{ donc : } -9 + 3u_k \leq 0. (1)$$

De (1) et (2), on déduit que : $\frac{-9 + 3u_k}{6 - u_k} < 0$, donc $u_{k+1} - 3 \leq 0$. Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

$$3^\circ \text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{-9 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{3 - u_n}{-9 + 3u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}.$$

Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{4}.$$

b) Comme (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme v_0 , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n.$$

$$\text{On a : } v_n = \frac{1}{u_n - 3} \text{ donc } u_n - 3 = \frac{1}{v_n}, \text{ soit : } u_n = \frac{1}{v_n} + 3.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n} + 3.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n \right] = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right) = 0.$$

$$\text{Par suite, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{v_n} + 3 \right] = 3.$$

EXERCICES

E1 Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, n \leq n$.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, \dots, n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

E2 Etudier le sens de variation de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

- 1) $U_n = -2n^2 + 3n + 5$
- 2) $U_n = n^3 + 2n + 1$
- 3) $U_n = \frac{n}{n^2+1}$
- 4) $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n$
- 5) $U_n = \frac{2^n}{n^2}$
- 6) $U_n = e^{-n} + n$
- 7) $U_n = 3 \cdot \frac{7}{8}^n$.

E3 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3 + u_n^2 + 1}{1 + u_n^2}$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

E4 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt[n]{n}$$

- 1) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
- 2) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

E5

- 1) Soit f la fonction définie sur

$$] - \infty, \infty[\text{ par : } f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

- 1° Démontrer que :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1].$$

2° Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1.$$

- 3° Démontrer que suite (u_n) est croissante.

- 3° Démontrer que la suite (u_n) et calculer sa limite.

E6 Etudier la convergence de la suite

$$(u_n) \quad 1) u_n = \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + 3}$$

$$2) u_n = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n}$$

$$3) u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$4) u_n = \frac{4}{3 - 2^n}$$

$$5) u_n = \ln(2^n) - \ln(3^n)$$

$$6) u_n = \frac{\ln n}{n^{0.3}}$$

$$7) U_n = \frac{4n + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + 2}$$

$$8) U_n = \frac{1 - \frac{3}{4}^n}{5}$$

E7 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1° Représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, I; J)$ les 4 premiers de la suite (u_n) sur l'axe (OI) .

- 2° Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{1}{3}$.

- 3° En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4° On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n . Calculer la limite de la suite (u_n) .

5° a) Calculer la somme

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

b) Calculer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

E8 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - 3.$$

1° Déterminer le réel a pour que (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.

2° Exprimer alors v_n en fonction de n

3° Calculer les limites des suites

4° Déterminer un entier naturel p tel que : $\forall n \geq p, |u_n| \leq 10^{-9}$.

5° Pour tout entier naturel n , calculer les sommes

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ et}$$

$$T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

E9 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2+x}{x}$.

a) Étudier f et représenter sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) .

b) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x.$$

c) Représenter les 4 premiers de la suite (u_n) sur l'axe (OI) à l'aide de (C) .

d) Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

2° Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

3° On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Démontrer que : $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c) En déduire u_n en fonction de n .

d) Calculer la limite de la suite (u_n) .

E10 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 1, v_0 = 9$

$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ pour tout entier naturel n .

1° Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2° a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \cdot \frac{v_n - u_n}{u_n + v_n}$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{5}{2^n}.$$

3° a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

c) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite l .

4° a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$v_{n+1} u_{n+1} = v_n u_n.$$

b) En déduire la valeur exacte de l .

E11 Soit a un réel différent de 0 et de 1.

La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+2} = a u_{n+1} - a - u_n \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}$$

1° Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose $a \neq 1$.

2° On pose que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme..

b) Calculer v_n en fonction de n et de a .

3° a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}.$$

b) Calculer u_n en fonction de n et de a .
 c) Pour quelle valeurs de a la suite u est-elle convergente ?
 Préciser alors la limite de la suite u en fonction de a .

E12 (D'après BAC D session normale juin 1998)

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 0$ $b_0 = 8$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

1° Calculer a_1 b_1 .
 2° Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

a) Démontrer que la suite (d_n) est suite géométrique .

b) Calculer d_n en fonction de n puis démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \geq 0$.

c) Calculer la limite de la suite (d_n) .

3° a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3} \text{ et } b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$$

b) En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n) .

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$$

d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4° a) Déduire de la question 3) a) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3} (a_1 - a_0) + \dots + \frac{1}{3} (a_n - a_{n-1})$$

b) En déduire la limite de la suite (a_n) et (b_n) .

E13 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,$
 $(u_{n+1})^2 = 4u_n$

1° Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 et donner les résultats sous la forme a^b .

2° On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est suite géométrique .

b) Calculer v_n et u_n en fonction de n .
 Préciser alors la limite de la suite u .

3. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 3,99$.

E14 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 2}$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

2. Déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite

E15 1. Soit n un entier naturel non nul.

On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit φ et ψ les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x \text{ et}$$

$$\psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

a) Etudier les variations de φ et ψ .

b) En déduire que

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

3. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Utiliser ce qui précède pour déterminer la limite de la suite (u_n) .

E16 Pour tout $n \geq 1$ $U_n = \frac{2^n}{n}$

1. Démontrer que : $\forall n \geq 1, u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$

2. En déduire que $\forall n \geq 1$

$$u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

E17 $u_n = \frac{\ln 1}{1^2} + \frac{\ln 2}{2^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$ pour $n \geq 1$

$$1. \text{ Démontrer que : } \forall k \geq 1, \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

$$2. \text{ Etablir que : } \forall k \geq 1, \frac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$3. \text{ En déduire que : } \forall n \geq 1, u_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

4. Déduire que la suite (u_n) est convergente.

E18

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $] -1 ; +\infty$ et définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. Calculer la limite de f en -1

2. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Partie B

1. Démontrer que l'équation $x \in]0,5;1]$, $f(x) = x$ admet une unique solution α

2. Démontrer que :

$$\forall x \in]0,5;1], f(x) \in]0,5;1].$$

3.a) Etudier le sens variation de f' sur $]0,5;1]$.

b) En déduire que : $\forall x \in]0,5;1], f(x) \leq \frac{1}{4}$

4. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,5;1].$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$$

d) En déduire que la suite (u_n) converge

vers α .

e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} .

E19

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

et de prouver l'irrationalité de e .

Partie A Soit n un entier naturel fixé ($n \geq 1$), on considère la fonction f dérivable sur $]0;1]$ et définie par :

$$f(x) = e^{-x} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} \right).$$

1. Démontrer que : $\forall x \in]0;1], f(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n}.$

$$f(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n}.$$

2. En déduire que : $\forall x \in]0;1],$ on a :

$$f(x) \leq \frac{1}{n}.$$

3. a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{N},$ on a :

$$\left| \frac{1}{e} u_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

b) Quelle est la limite de la suite (u_n)

Partie B

Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e.$

2.a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < e < v_n.$$

3. On suppose que e est irrationnel : $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels.

E20

1.a) Démontrer que l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{R}, e^x = \frac{1}{x} \text{ admet une solution}$$

unique α .

b) Justifier que $\alpha \in [0 ; 1]$.

2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha : e^x - x \geq \alpha$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = x$.

b) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

4. Soit la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence la suite (u_n) est croissante et majorée par α .

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

E21 Une entreprise propose à Mr SORO deux contrats de travail à partir du 1^{er} Janvier 2011.

Contrat A

La première année, il perçoit 100000F. Chaque 1^{er} Janvier son employeur décide de l'augmenter de 10000F.

On désigne par a_0 le salaire mensuel au 1^{er} Janvier 2011. Pour tout entier naturel n , on désigne par a_n le salaire mensuel au 1^{er} Janvier $(2011 + n)$.

Contrat B

La première année, il perçoit 100000F.

Chaque 1^{er} Janvier son employeur décide de l'augmenter de 8%.

On désigne par b_0 le salaire mensuel au 1^{er} Janvier 2011. Pour tout entier naturel n , on désigne par b_n le salaire mensuel au 1^{er} Janvier $(2011 + n)$.

1° Calculer pour chaque contrat, le salaire mensuel durant les 3 premières années de travail.

2° Calculer a_n et b_n en fonction de n .

3° Quel sera le salaire mensuel de Mr SORO à la 7^e année de travail pour chaque contrat ?

4° On pose :

$$S = 12(a_0 + a_1 + \dots + a_{21}) \text{ et}$$

$$S' = 12(b_0 + b_1 + \dots + b_{21}).$$

a) Que représente S et S' ?

b) Calculer S et S' . Quel est le contrat le plus avantageux pour Mr SORO ?

E22 Le salaire mensuel d'un technicien s'élevait au 1^{er} Janvier 2011 à 150000F. Chaque 1^{er} Janvier son employeur décide de l'augmenter de 2% et de lui allouer en plus 5000F.

On désigne par S_0 le salaire mensuel au 1^{er} Janvier 2011. Pour tout entier naturel n , on désigne par S_n le salaire mensuel au 1^{er} Janvier $(2011 + n)$.

1° Calculer S_2 .

2° On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = S_n + 250000$.

a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

b) Calculer u_n en fonction de n .

3. A partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé ?

8. CALCUL INTEGRAL

I) INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$

1. Déterminer deux primitives F et G sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .
2. Calculer $F(2) - F(1)$ et $G(2) - G(1)$.

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant deux nombres réels a et b , F une primitive quelconque de f sur I .

Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de a à b de f .

Notation

$F(b) - F(a)$ se note $\int_a^b f(t)dt$

Remarques

■ $\int_a^b f(t)dt$ se lit aussi intégrale (ou somme) de a à b de $f(t)dt$

■ a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.

■ le réel $F(b) - F(a)$ se note aussi $F \Big|_a^b$ et se lit $F(t)$ pris entre a et b

■ On peut remplacer la variable t par toute autre lettre alphabétique sauf par les lettres désignant les bornes : On dit que t est une variable muette.

ainsi $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx \dots$

Exercice résolu 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3$.

Calculer l'intégrale de 0 à 1 de f

Solution

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 3) dx = \left[x^3 + 3x \right]_0^1 = (1^3 + 3 \times 1) - (0^3 + 3 \times 0) = 4$$

Exercice résolu 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{-x}{(x^2 + 2)^2}$. Calculer, $\int_{-1}^1 f(x) dx$ et $\int_4^2 f(x) dx$

Solution

Soit $u = x^2 + 2$ on a $u' = 2x$ et pour tout réel x $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{u'}{u^2}$. La fonction F

définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2(x^2 + 2)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2(x^2 + 2)} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2(1+2)} - \frac{1}{2(1+2)} = 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2(x^2 + 2)} \right]_4^2 = \frac{1}{2(4+2)} - \frac{1}{2(16+2)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{34} = \frac{17-6}{204} = \frac{11}{204}$$

Exercice 1.1

1. Justifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$, par $h(x) = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x}$ est une primitive de la

fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x^2 \sqrt{x}$

2. Calculer $\int_4^1 g(x) dx$

Exercice 1.2

calculer l'intégrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2- Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive**Propriété**

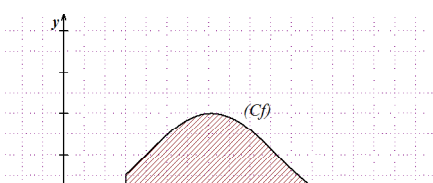
(O, I, J) est un repère orthogonal du plan.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$

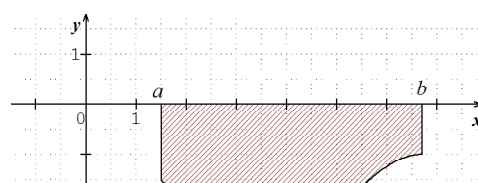
(C) la courbe représentative de f , Δ la partie du plan limitée par (C) l'axe (OI), les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors l'aire de Δ en unité d'aire (U.A) est $\int_a^b f(x) dx$



ématique



Page 119

Si $f \leq 0$ sur $[a, b]$ alors l'aire de Δ en unité d'aire (U.A) est $\int_a^b -f(x) dx$

Remarque :

- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, la partie du plan limitée par (C) l'axe (OI), les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est l'ensemble des points M du plans dont les coordonnées (x, y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$
- Si f est continue et négative sur $[a, b]$, la partie du plan limitée par (C) l'axe (OI), les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est l'ensemble des points M du plans dont les coordonnées (x, y) vérifient : $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$

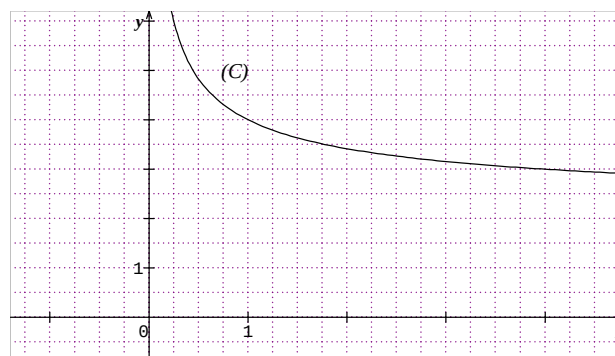
Exercice résolu 3

On considère le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; I ; J)$ tel que $OI = 1\text{cm}$ et $OJ = 2\text{cm}$. Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2$ et (C) sa courbe représentative donnée ci-dessous.

On considère Δ la partie du plan limité par la représentation graphique (C) , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

1-Hachurer Δ

2-Calculer l'aire A de Δ en U.A et en cm^2



Solution

1. Voir figure

2. f est une fonction continue et positive sur $[1; 4]$ alors l'aire en unité d'aire de Δ

$$\text{est } A = \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx = \left[4\sqrt{x} + 2x \right]_1^4 = 10 \text{ UA}$$

En cm^2 , on a $A = 10 \text{ cm}^2$ **Exercice 1.3**

Dans plan rapporté au repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 1 \text{ cm}$ et $OJ = 2 \text{ cm}$, calculer en UA puis en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par :

1. la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, la droite (OI) , les droites d'équation

$$x = -1 \text{ et } x = 1$$

2. la courbe de la fonction $f : x \mapsto -x^2(x^3+1)$, la droite (OI) , les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$

II – PROPRIETES DE L'INTEGRALE**1. Propriétés algébriques**

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a , b et c , k un réel quelconque.

Propriété 1

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Propriété 2

Si $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a

Remarque : Pour tout $x \in I$, $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$

Propriété 3**Relation de Chasles**

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Linéarité

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx \quad (\text{additivité})$$

$$k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b kf(x)dx \quad (\text{homogénéité})$$

2. Intégrales et inégalités

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle fermé a, b :

Propriété 1 : positivité

$$\text{Si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Remarque

$$\text{Si } f \leq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

Propriété 2 : comparaison d'intégrales

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 3 : Intégrale et valeur absolue

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Propriété 4 : Inégalité de la moyenne

Si m et M sont deux réels tels que , pour tout x de $[a, b]$ on ait $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Conséquence

Si M est un réel tel que , pour tout x de $[a, b]$ on ait $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a|.$$

3. Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Si $b > a$ lae nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

Exercice résolu 4

On considère la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x$; si $x < 0$ et $f(x) = x^2$; si $x \geq 0$

Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Solution

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1; 1]$, et d'après la relation de CHASLES

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x^2 dx = x^2 \Big|_{-1}^0 + x^3 \Big|_0^1$$

Exercice résolu 4 : Calculer $\int_{-4}^4 |x+3| dx$

Solution

pour $x \in]-\infty; -3[$, $|x+3| = -x-3$ et pour $x \in]-3; +\infty[$, $|x+3| = x+3$

Ainsi d'après la relation de CHASLES

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 |x+3| dx &= \int_{-4}^{-3} (-x-3) dx + \int_{-3}^4 (x+3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^4 \end{aligned}$$

Exercice résolu 5

1. Calculer les intégrales $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^9 \frac{1}{x^2} dx$

2. En déduire $\int_1^9 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2} \right) dx$

Solution

$$1. \text{ On a } \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^9 = 4 \text{ et } \int_1^9 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^9 = \frac{8}{9}$$

$$2. \text{ On a } \int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2}\right) dx = 3 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{8}{9}\right) \quad \frac{112}{9}$$

Exercice résolu 6

1. Etablir que pour tout réel $x \geq 0$, on a $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq 2x$

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 \sqrt{x^2+1} dx$

Solution

1. Pour tout $x \geq 0$ on a $x^2 \leq x^2 + 1$ par suite $x \leq \sqrt{x^2+1}$

Pour tout $x \geq 0$ on a $x^2 - x^2 = -x^2$

Pour tout $x \geq 0$ on a $-x^2 \leq -x^2$ soit $-x^2 \leq -x^2$ donc $-x^2 \leq -x^2$

Par suite, pour tout $x \geq 0$ $x^2 \leq x^2 + 1$ d'où $\sqrt{x^2+1} \leq x + 1$

Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, on a $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq 2x$

2. On a pour tout réel $x \geq 0$, $x \leq \sqrt{x^2+1} \leq 2x$ donc

$$\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 \sqrt{x^2+1} dx \leq \int_1^2 2x dx \text{ soit } \frac{3}{2} \leq \int_1^2 \sqrt{x^2+1} dx \leq 3$$

Exercice résolu 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, $f(x) = x - x^2$

Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1; 2]$.

Solution

La valeur moyenne de f sur $[-1; 2]$ est le réel $\mu = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{1}{3} [2x^2 - x^3]_{-1}^2 = 1$.

III - INTEGRATION PAR PARTIES**Théorème**

Soit U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle I contenant les réels a et b , tels

que U et V soient continues sur I , alors $\int_a^b U(t)V'(t)dt = [U(t)V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)V(t)dt$

$$\int_a^b U'(t)V(t)dt$$

Exercice résolu 8

Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale

$$1. \int_0^\pi (x+1)\cos x dx$$

$$2. \int_1^e t^2 \ln t dt$$

Solution

1. Posons $u = x$ alors $u' = 1$

Posons $v' = \cos x$ et choisissons $v = \sin x$

$$\text{Alors } \int_0^{\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \\ = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -$$

□ Posons $u = \ln t$ alors $u' = \frac{1}{t}$

Posons $v' = t^2$ et choisissons $v = \frac{1}{3}t^3$

$$\text{Alors } \int_1^e t^2 \ln t dt = \left[-t^3 \ln t \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} (-t^3) dt \\ = \frac{e^3}{3} - \int_1^e -t^2 dt = - \\ = \frac{e^3}{3} - \left[-\frac{t^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

NB :

L'intérêt de l'intégration par parties est de calculer une intégrale par l'obtention d'une intégrale plus simple à calculer.

Exercice 3.1 A l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad J = \int_0^{\pi} t e^{-t} dt$$

IV. CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE**Exemple 1**

$$\text{Soit } I = \int_{-2}^{-1} x^2 \sqrt{x+4} dx$$

Utilisons le changement de variable affine suivant : $t = 2x+4$.

$$\text{Alors : } x = \frac{1}{2}t - 2 \quad \text{et } dt = 2dx.$$

De plus, si $x = -2$, alors : $t = 0$

si $x = -1$, alors : $t = 2$.

$$\text{D'où : } I = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t - 2 \right)^2 \sqrt{\frac{1}{2}t} \frac{1}{2} dt = \int_0^2 \left(\frac{t^5}{2} - t^{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2} \right) dt = 4\sqrt{2}.$$

V. PERIODICITE, PARITE ET INTEGRATION**Propriété****◆ Périodicité**

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T -périodique.

Alors : $\int_a^{a+T} f(x) dx$ est indépendant de a .

◆ Parité

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$, alors :

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

Exemples :

- 1) $\int_{-2}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est paire.
- 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x^2 dx = 0$ car la fonction $x \mapsto \sin x \cos x^2$ est impaire .

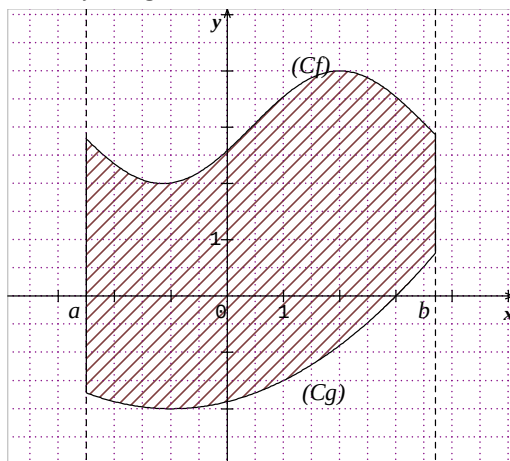
VI. CALCUL D'AIRE

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) .

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle fermé $[a, b]$ telles que $f \geq g$ sur $[a, b]$.

C_f et C_g sont les courbes respectives de f et g . L'aire en u.a de la partie du plan limitée par C_f , C_g , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

**Remarque**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, I, J) .

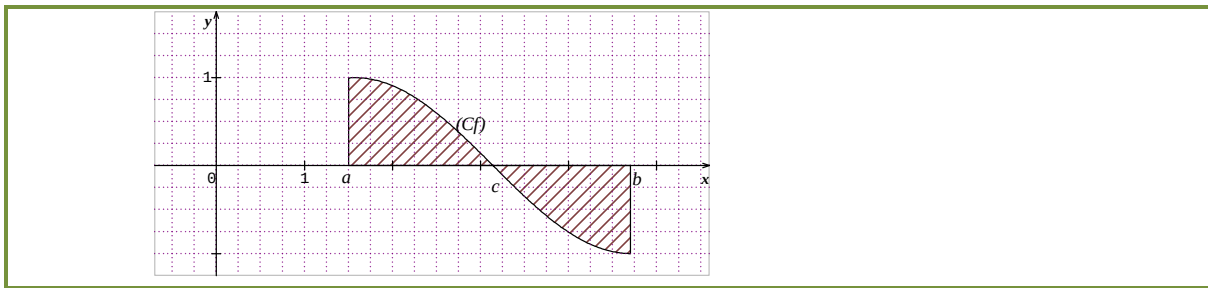
C_f la courbe respective de f

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et c un réel de $[a, b]$ tel que :

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c] \quad \text{et} \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [c, b]$$

L'aire en u.a de la partie du plan limitée par C_f , la droite (OI) et les droites d'équations

$$x = a \quad \text{et} \quad x = b \quad \text{est} \quad \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$



Exercice résolu 9

On considère les fonctions F et f dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \text{ et } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Calculer l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$
3. On pose $I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. Démontrer que $K + J = I$
4. A l'aide d'une intégration par parties justifier que $J = \sqrt{2} - I$
5. En déduire I et J

Solution

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel x ,

$$F'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x), \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

2. Calcul de K

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = F(x) \Big|_0^1 = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

3. Egalité $K + J = I$

$$K + J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx = I$$

4. Egalité $J = \sqrt{2} - I$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u = x & x \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ \text{Choisissons } v = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$$\text{Alors } J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = [x \sqrt{x^2+1}]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - I. \text{ Ainsi, } J = \sqrt{2} - I$$

5. valeurs de I et J

$$\text{Le système } \begin{cases} K + J = I \\ \sqrt{2} - I = J \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} I - J = K \\ I + J = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Soit } I = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)}{2} \quad \text{et} \quad J = \frac{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)}{2}$$

Exercice résolu 10

Soit la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - \frac{1}{2}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique : 2 cm

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

2. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats

3. Pour tout nombre réel x , calculer $f'(x)$

4. Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation

5. Étudier la position de (C) par rapport à (D).

6. Construire (C) et (D).

7. Soit un nombre réel t tel que

On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite d'équation

$y = \frac{1}{2}$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$

a) Calculer $A(t)$ à l'aide d'une intégration par parties

b Calculer $\lim_{t \rightarrow -\infty} A t$

Solution

démontrons la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -X e^X \text{ avec le changement de variable } X = -2x$$

$$D'où \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Ainsi, la droite (D) : $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

2. Limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{finalement } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) e^{2x} = +\infty$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation graphique

(C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ)

3. Calcul de $f'(x)$

$$\text{Pour tout nombre réel } x, f'(x) = e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} = x e^{2x}.$$

4-Etude des variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de x . D'où :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f'(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.

tableau de variations de f

x	$-\infty$	∞
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	∞

5. Position relative de (C) et (D)

Pour tout nombre réel x on a $f'(x) = -(x - \frac{1}{2})e^{2x}$

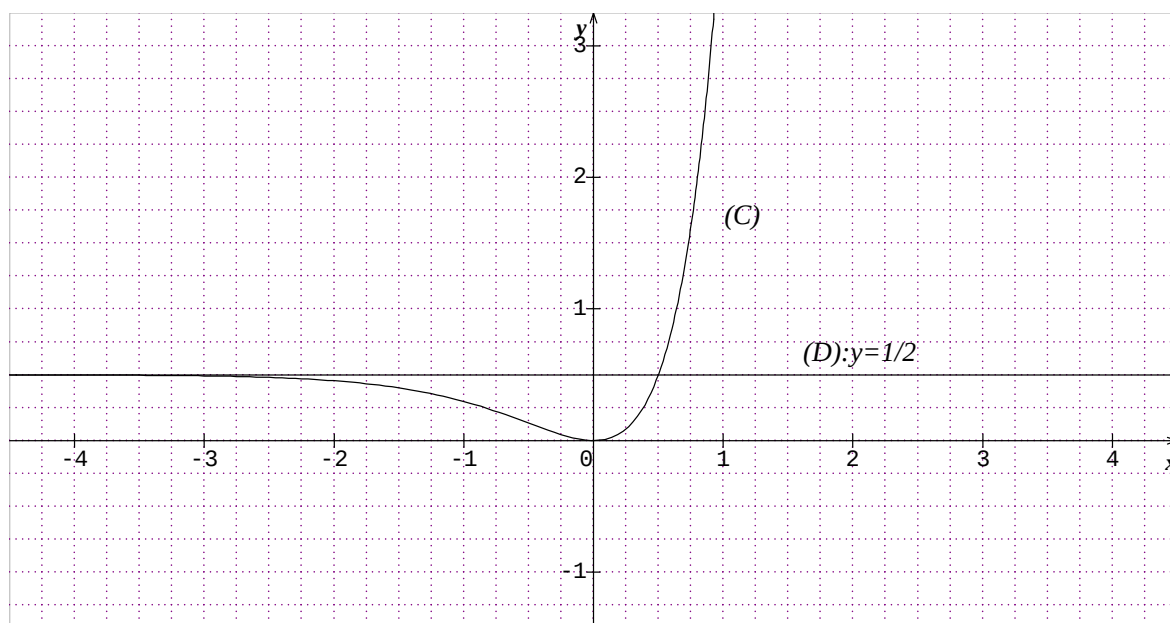
Pour tout nombre réel x , $e^{2x} > 0$ donc $f'(x) < 0$ si $x > \frac{1}{2}$ et $f'(x) > 0$ si $x < \frac{1}{2}$.

Ainsi, Pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]\frac{1}{2}, \infty[$ $f'(x) < 0$

Par ailleurs, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{1}{2}$. Il s'en suit :

(C) est au dessous de (D) sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et (C) est au dessus de (D) sur $]\frac{1}{2}, \infty[$

(C) et (D) se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

6-Construction de (C) **7.a) Calcul de $A(t)$ à l'aide d'une intégration par parties**

Pour tout t de $-\infty$ on a $A(t) = \int_t^0 \left(-f(x) \right) dx = \int_t^0 \left[-\left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x} \right] dx$

Posons $u = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$ alors $u' = -1$

Posons $v = e^{2x}$ et choisissons $v' = 2e^{2x}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_t^0 \left[-\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] e^{2x} dx &= \left[-\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} \right]_t^0 - \int_t^0 \left(-\frac{1}{2} e^{2x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} \right]_t^0 + \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_t^0 \\ &= -\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{2t} + \frac{1}{4} (e^{2 \cdot 0} - e^{2t}) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \int_t^0 \left[-\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$\text{D'où } A(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \right)$$

$$\text{On a : } \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{2t} = \lim_{T \rightarrow -\infty} T e^T \text{ par le changement de variable } T = 2t$$

$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow -\infty} A(t) = -\frac{1}{4} e^{2t} = -\frac{1}{4}$$

Exercice résolu 11

Soit F la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) Unité graphique : 2 cm

1. Etudier la parité de F . On pourra utiliser le changement de variable suivant : $u = -t$.
2. Etudier le sens de variation de F .
3. Démontrer que : $\forall t \geq 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$.
4. En déduire que : $\forall x > 0$, on a : $F(x) \leq F(1) + 1 - \frac{1}{x} \leq F(1) + 1$
5. En déduire que F admet en $+\infty$ une limite ℓ dont on donnera un encadrement.
6. Dresser le tableau de variation de F .
7. Tracer (C).

SOLUTION

1. Posons : $u = -t$, alors : $du = -dt$. Si $t = 0$, alors $u = 0$ et si $t = -x$, alors $u = x$. On obtient : pour tout x de $\mathbb{R}$

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^4}} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} du = -F(x).$$

D'où F est impaire.

2. Comme F est impaire, on peut étudier F sur $[0; +\infty[$.

F est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ qui s'annule en 0. Donc :

$$\forall x \in [0; +\infty[, F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$\forall x \in [0; +\infty[, F'(x) > 0$, donc F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. $\forall t \geq 1$, on a : $t^4 \geq t^2$, donc : $\sqrt{t^4} \geq t^2$. Par suite,

$$\forall t \geq 1, \text{ on a : } \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}.$$

$$4. \forall x > 0, \text{ on a : } F(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = F(1) + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

$$\forall t \geq 1, \text{ on a : } \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq \frac{1}{t^2} \text{ donc } \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt.$$

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_1^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{x}. \text{ Alors : } \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \leq 1 - \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0, \text{ on a : } F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

$$\text{Donc : } \forall x > 0, \text{ on a : } F(x) \leq F(1) + 1 - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Comme } \forall x > 0, -\frac{1}{x} < 0 \text{ donc } -\frac{1}{x} < F(x) - F(1).$$

$$\text{Par suite, } \forall x > 0, \text{ on a : } F(x) \leq F(1) + 1 - \frac{1}{x} < F(1) + 1.$$

5. F est croissante et majorée par $F(1) + 1$ donc F admet une limite finie ℓ .

La droite (D) d'équation $y = \ell$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

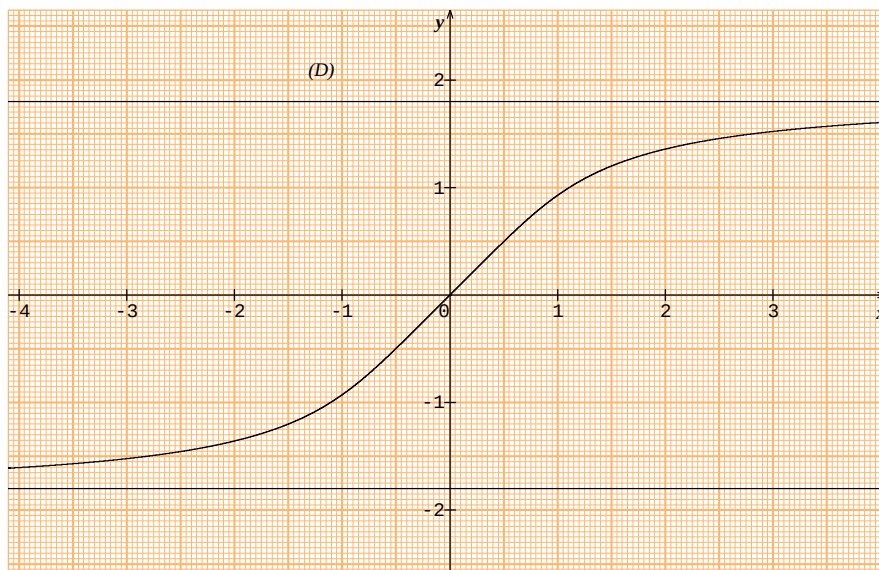
$$\forall t > 0, \text{ on a : } \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} > 0 \text{ donc } F(x) \geq 0.$$

$$\text{Alors } \forall x > 0, \text{ on a : } 0 \leq F(x) < F(1) + 1. \text{ Donc : } 0 \leq \ell \leq F(1) + 1.$$

6. Tableau de variation de F

x	0	
F'(x)	1	+
F(x)	0	

7.



EXERCICES

E1 vérifier les calculs suivants

$$a) \int_1^4 \frac{1}{t^2} dt = \frac{3}{4} ; b) \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 1 ;$$

$$c) \int_{-1}^0 e^t dt = \frac{e-1}{e} ; d) \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1 ;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t) dt = -1$$

E2 calculer les intégrales suivantes

$$a) \int_2^1 \left(\frac{1}{t^2} - 3\right) dt ; b) \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt ;$$

$$c) \int_0^1 (\sqrt{t} - 3t) dt ; d) \int_0^{\pi} \cos(3t) dt$$

E3 forme $u'v$ ou uv' ou $\frac{u'v - v'u}{v^2}$

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{\pi} (\sin t + t \cos t) dt ;$$

$$b) \int_1^e (2x \ln x + x) dx ;$$

$$c) \int_0^1 (2xe^x + x^2e^x) dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t + t \sin t}{\cos^2 t} dt ;$$

$$e) \int_1^e \left(\frac{-\ln x + 1}{x^2}\right) dx \quad f) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{\sin^2 t}\right) dt ;$$

$$g) \int_0^1 \left(\frac{1-2x}{e^{2x}} \right) dx$$

E4 Calculer les intégrales suivantes

$$a) \int_2^1 \frac{2}{\sqrt{2t-1}} dt ; b) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-3t}} dt ;$$

$$c) \int_1^2 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^3+3t}} dt ; d) \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{9-t^2}} dt$$

$$e) \int_0^1 3x^2(x^3+1) dx \quad f) \int_{-2}^1 x^3(x^4+1) dx$$

$$g) \int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^3 dx$$

$$h) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx ; i) \int_1^e \frac{\ln x^2}{x} dx ;$$

$$j) \int_0^{\ln 2} e^x (e^x + 3)^4 dx ; k) \int_0^1 \frac{-4}{3+4x} dx$$

$$l) \int_{-2}^{-1} \frac{2}{1-5x} dx ; m) \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+4} dx$$

$$n) \int_2^3 \frac{x}{1-x^2} dx ; o) \int_{-1}^0 \frac{e^t}{1+e^t} dx$$

$$p) \int_{-2}^0 \frac{-3}{(3-3x)^2} dx ; q) \int_0^1 \frac{1}{(3+4x)^3} dx$$

$$r) \int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^3} dx ;$$

$$t) \int_0^1 \frac{x+3}{(x^2+6x+7)^5} dx$$

$$u) \int_0^1 3\sqrt{3x+1} dx ; v) \int_0^1 \sqrt{x+1} dx$$

$$w) \int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx ; z) \int_{-1}^1 x\sqrt{x^2-1} dx$$

E5 En utilisant la propriété de Chasles, calculer les intégrales

$$\int_{-1}^1 (3x^2 - |x|) dx \quad \int_0^4 2 - |x-3| dx$$

$$\int_{-3}^3 \sqrt{x^2+4x+4} dx \quad \int_{\frac{1}{2}}^2 |\ln x| dx$$

E6 On pose pour tout $x > 0$

$$f(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x \ln x}$$

1- justifier que $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

2. En déduire l'intégrale $\int_e^{e^2} f(x) dx$

E7 Soit la fonction f définie pour tout

$$x > 1 \quad f(x) = \frac{3x+1}{3x-1}$$

1. Vérifier que pour $x > 1$

$$f'(x) = \frac{2}{3x-1}$$

2. Calculer $\int_1^4 f(x) dx$

E8 Soit h la fonction définie sur

$$\left] -\frac{2}{3}, \infty \right[\quad \text{par} \quad h(x) = \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}$$

Déterminer les nombres réels a, b, c tels pour tout $x > -\frac{2}{3}$,

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{3x+2}$$

Calculer $\int_0^2 h(x) dx$

E9 1. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{4}{4x^2+4x+1} dx$$

2.a) Déterminer les nombres réels a, b

tels pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on ait

$$\frac{2x+5}{4x^2+4x+1} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$

b) Calculer $\int_0^1 \frac{2x+5}{4x^2+4x+1} dx$

E10 On pose pour tout réel

$$x, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

montrer que pour tout

$$x \in [1; 2] \quad , \quad \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$$

En déduire un encadrement de

$$\int_1^2 f(x) dx$$

E11 On pose pour tout réel $x \geq$

$$g(x) = e^{-x} \ln x$$

1. démontrer que pour tout

$$x \in \quad \leq g(x) \leq e^{-x}$$

2. En déduire un encadrement de

$$\int_1^4 g(x) dx$$

E12

1- linéariser $\cos^4(x)$ et $\sin^3(2x)$

2- calculer les intégrales

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x dx$$

E13 On considère la fonction f définie

$$\text{sur} \quad \infty \quad \text{par} \quad f(x) = x - 2 + \frac{4}{(x-1)^2}.$$

(C) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J) d'unité 1cm

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x -$ est asymptote à (C)

4. tracer (C) et (D)

5. soit un nombre réel tel que $\ell > 2$.

Exprimer en fonction de ℓ , l'aire $A(\ell)$ de la partie du plan limitée par (C), (D), les droites d'équations $x =$ et $x = \ell$

$$\ell \rightarrow +\infty \quad A(\ell)$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

AFFINE

E14

Calculer à l'aide d'un changement de variable affine, les intégrales suivantes

$$a) \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx \quad ; \quad b) \int_0^1 (t+1) \sqrt{3t+1} dt ;$$

$$c) \int_4^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad \int_2^3 \frac{x^2}{3x-4} dx$$

E15 Soit f la fonction définie sur

$$\begin{array}{l} -\infty \quad \text{par} \\ \left\{ \begin{array}{ll} x & -x \quad \text{si } x \\ f & \end{array} \right. \end{array}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2 cm.

1. Etudier la continuité de f en 0.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3. calculer les limites quand x tend vers $-\infty$ de x et $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

6. Tracer (C).

7. Soit $t \in -e$.

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'aire $A(t)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -e$ et $x = t$.

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} A(t)$$

E16 On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $F(x) = e^{-x}$

et $F(x) = ax^2 + bx + c + e^{-x}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

1-Déterminer a, b, c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2- Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_0^x (t+1)^2 e^{-t} dt$$

Déterminer $G'(x)$

INTEGRATION PAR PARTIES

E17 Calculer à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes

$$a) \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx \quad ; \quad b) \int_0^1 (t+1)\sqrt{3t+1} dt \quad ;$$

$$c) \int_4^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad d) \int_0^\pi x \cos 2x dx$$

$$f) \int_1^e \ln x dx \quad ; \quad g) \int_1^e \ln(x+1) dx \quad ;$$

$$h) \int_1^e x^3 \ln x dx \quad ;$$

$$i) \int_0^1 (3x^2 + 2x) \ln(x+1) dx \quad ; \quad j) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$k) \int_1^0 (x+1)e^x dx \quad ; \quad l) \int_0^1 (x+1)e^{-2x} dx$$

$$m) \int_{-1}^0 (3x+1)e^{(3x+1)} dx$$

E18 Calculer à l'aide de deux intégrations par parties les intégrales suivantes

$$a) \int_4^0 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad b) \int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx$$

$$c) \int_0^\pi x^2 \cos(2x) dx \quad ; \quad d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \sin x dx$$

$$f) \int_1^e x(\ln x)^2 dx \quad ; \quad g) \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx$$

$$h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin(3x) dx$$

E19 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

(C) sa courbe représentative orthonormée (O ; I ; J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer (C).

4. On pose $K = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

a) Donner une interprétation graphique de K .

b) Justifier que :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

c) Vérifier que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

d) En déduire que :

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx.$$

e) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-x} dx$.

f) Déduire des questions précédentes que :

$$\frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leq K \leq 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$$

Donner une valeur approchée de K à 0,01 près.

E20 Calculer une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ par la méthode des rectangles en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 5 segments de même longueur.

E21 Le plan est muni du repère orthonormé (O ; I, J). (Unité graphique 2 cm). Les courbes (C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g

définies sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = x^2 e^{-x}$.

Calculer à l'aide d'une double intégration par parties l'aire de la partie du plan comprise entre (C_1) , (C_2) , la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 1$.

E22 f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$
 et (C) sa courbe représentative orthonormée ($O; I; J$). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C) .
4. Soit λ un réel strictement positif.

On pose $A_\lambda = \int_0^\lambda f(x) dx$.

- a) Interpréter géométriquement A_λ
- b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^\lambda xe^{-x} dx$

c) Justifier que : $\forall u \geq \frac{1}{1+\square} \leq$

d) En déduire que :

$$\forall u \geq u) \leq u$$

e) Démontrer que :

$$A_\lambda \leq -\lambda e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

E23 On pose: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dt$$

1.a) Calculer I_1 et $I_0 + I_1$ puis en déduire I_0 .

b) Calculer $I_{n+1} + I_n$.

2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^n - 1}{n + e} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}$$

4. Calculer la limite de la suite (I_n) et celle de la suite $(\frac{I_n}{e^n})$ lorsque n tend vers $+\infty$

E24 On pose: $I_0 = \int_1^e x dx$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e x \ln x^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

b) Calculer I_2 .

3. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

5. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

6. Calculer la limite de la suite (I_n) et celle de la suite (nI_n) lorsque n tend vers $+\infty$

7. Calculer la limite de suite (I_n) et celle de la suite $(\frac{I_n}{e^n})$ lorsque n tend vers $+\infty$

E25 On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

1. Calculer I_1 .

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour $n \geq$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = e - \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{1} + \dots - \frac{1}{n} \right)$$

4a) Démontrer que :

$$\forall x \in \quad \leq e^{1-x} \leq e$$

b) Calculer la limite de la suite (I_n) .

c) En déduire

$$n \rightarrow +\infty \quad \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{1} + \dots - \frac{1}{n} \right)$$

E26 $\forall \square \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx$

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Démontrer que :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} e^{-n} - e^{-2n}$$

3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

E27 Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt$.

2. Démontrer que : $\forall x \geq 0$ on a :

$$\sqrt{x} \leq x + \frac{1}{4}$$

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale

$$\int_0^x t e^{-t} dt \text{ pour } x \geq 0$$

4. En déduire F admet une limite finie L en $+\infty$

5. Donner l'allure de la courbe représentative (Γ) de F dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

I et J .

E28 1. Justifier que : $\forall x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

$$\text{on a : } \frac{\sin x}{1 + \pi^2} \leq \frac{\sin x}{1 + x^2} \leq \frac{\sin x}{1 + \frac{\pi^2}{2}}$$

2. En déduire un encadrement de

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + x^2} dx$$

E29 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^n x}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\text{pour } x \in \left] 0; \frac{\pi}{3} \right[\quad \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

En déduire la valeur de I_1 .

2. Calculer I_2 .

3. Pour $n \geq 2$, établir la relation entre I_n et I_{n-2}

4. En déduire les valeurs de I_4 et I_5 .

E30 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $I_n = \int_0^1 -x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

$$I_0 = \int_1^e x dx \text{ et } J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx.$$

1. En utilisant des considérations d'aires, justifier que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.

2.a) Calculer J_1 .

b) En déduire la valeur de I_1 .

3.a) Étudier le sens de variation de la suite (I_n) .

b) En déduire que les suites (J_n) et (I_n) convergent.

4.a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

b) En déduire les limites des suites (I_n) .

E31 L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1.a) Soit f la fonction dérivable sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Calculer la dérivée de f . En déduire u_0 .

b) Calculer u_1 .

2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

4. Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx.$$

a) Vérifier que $\forall n \geq 2$ on a :

$$u_n + u_{n-2} = I_n.$$

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur I_n , justifier que pour tout

entier $n \geq$ on a : $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{\quad}$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq$ on a : $(2n-1)u_n \leq \sqrt{\quad}$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

E32 On considère les intégrales (I_n) et (J_n) définies par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* :$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x^n}{\cos x} dx \quad \text{et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x^n \cos x dx.$$

1. a) Calculer J_n .

b) En déduire que :

$$I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2} n+1.$$

2.a) Calculer I_1 .

b) En déduire I_3 .

3.a) Démontrer que la fonction F définie sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ par $F(x) = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

b) Calculer I_0 puis I_2 et I_4 .

E33 La Formule de Wallis

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x^n dx$$

1. En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

2. Calculer I_0 et I_1 et démontrer par récurrence que :

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{2n-1}{2n} \frac{\pi}{2}, \text{ pour } n \geq 1 ;$$

$$I_{2n+1} = \frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \frac{2n}{2n+1} \frac{1}{2n+1},$$

pour $n \geq 0$.

3. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

4. Démontrer que : $\frac{n-1}{n} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ si $n \geq 1$.

5. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{2}$

6. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n - \frac{\pi}{2}} \right)^2$$

(Formule **de WALLIS**).

E34

Partie A

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2. Soit u la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par : $u(x) = F(\tan x)$.

a) Calculer $u'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $u(x) = x$.

c) En déduire que : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

On se propose de démontrer que la suite (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$ (Formule de LEIBNIZ).

1. Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(1 - t^2 + \dots - t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

2. En déduire à l'aide d'une intégration, que :

$$u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

3. a) Démontrer que : $\forall t \in [0; 1]$ on a :

$$\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}.$$

b) En déduire que :

$$\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

4. Conclure.

9. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

ACTIVITE

Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = e^{-2x}$

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2f(x)$

2. On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = e^{-2x}$.

Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2g(x)$

On dit que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$

I. DEFINITION

On appelle équation différentielle, une équation où l'inconnue est une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et dans laquelle apparaît au moins une des dérivées successives de f .

Exemple

$y' + 2y = x^2$ est une équation différentielle du premier ordre.

$y'' - 4y' + 7y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

Remarque : résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $y' - my = 0$ ($m \in \mathbb{R}$)

Résolution de l'équation l'équation différentielle (E) $y' - my = 0$ ($m \in \mathbb{R}$).

- La fonction nulle est solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On a : $y \neq 0$, $y' - my = 0 \Leftrightarrow y' = my \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = m \Leftrightarrow \ln = mx + c$; $c \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow = mx + c; c \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow y = e^{mx+c} \text{ ou } y = -e^{mx+c}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{c} e^{mx} \text{ ou } y = -e^{c} e^{mx}$$

$$\Leftrightarrow y = K e^{mx} \text{ avec } K \in \mathbb{R}^*.$$

Propriété

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = 0$ sont les fonctions $x \mapsto K e^{mx}$ avec $K \in \mathbb{R}$
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 sont des réels donnés).

Exercice résolu 1

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = 0$

b) $y' + 3y = 0$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

a) (E) : $y' - 4y = 0$ et $f(0) = 3$

b) (E) : $y' + \sqrt{y} = 0$; la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1

Solution

1) a. Résolution de $(E_1) : y' - 2y = 0$

$m = 2$; donc les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto k e^{2x}$; avec $k \in \mathbb{R}$.

b. Soit $(E_2) : y' + 3y = 0$

$m = -3$; donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto k e^{-3x}$; avec $k \in \mathbb{R}$.

2.a. Soit $(E) : y' - 4y = 0$.

$m = 4$, donc les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto y(x) = k e^{4x}$, $k \in \mathbb{R}$

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow k = 3.$$

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{4x}$.

b. Soit $(E) : y' + \sqrt{2}y = 0$.

$m = -\sqrt{2}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto y(x) = k e^{-x\sqrt{2}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$y'(x) = -\sqrt{2} k e^{-x\sqrt{2}}$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est f' ,
Par suite la condition donnée dans l'exercice se ramène à f' .

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-x\sqrt{2}}$

Exercice 2.1

1. Résoudre l'équation différentielle ' .

2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

$$(E) : y' - y$$

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE $y'' - my = 0$ ($m \in \mathbb{R}$)

Considérons l'équation différentielle $(E') : y'' - my = 0$

1^{er} cas : $m = 0$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y' = a ; a \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = ax + b ; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} .$$

Propriété 1

Les solutions de l'équation différentielle y'' sont les fonctions $x \mapsto ax + b$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

2ⁱ me cas : m

Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{ax}$, ($a \in \mathbb{R}$)

1. Démontrer que u est solution de (E') $\Leftrightarrow a = \sqrt{m}$ ou $a = -\sqrt{m}$

Posons $m = \omega^2$; on a : $a = \omega$ ou $a = -\omega$

Les fonctions $x \mapsto e^{\omega x}$ et $x \mapsto e^{-\omega x}$ sont donc solutions de (E') .

2. On pose $v(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A, B \in \mathbb{R}$). Vérifier que v est solution de (E')

Nous admettons :

Propriété 2

Les solutions de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions :
 $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

3^{ème} cas : $m = -\omega^2$

Posons $m = -\omega^2$, l'équation devient : $y'' + \omega^2 y = 0$.

On pose $v(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ ($A, B \in \mathbb{R}$). Vérifier que v est solution de (E') .

Propriété 3

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}^*$) sont les fonctions :
 $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exercice résolu 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y = 0$

2) $y'' + 9y = 0$

Solution

1) Résolution de (E_1) : $y'' - 4y = 0$.

Cette équation est de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$, donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{2x} + Be^{-2x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

2) Résolution de (E_2) : $y'' + 9y = 0$.

Cette équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3$, donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x)$; avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Propriété 4

Il existe une unique fonction solution de l'équation différentielle $y'' - my = 0$ ($m \neq 0$) satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$, où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres réels donnés.

Exercice résolu 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

a) $25y'' - 16y = 0$ et $f'(0) = f(0) = 1$.

b) " la courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par le point $A(\frac{\pi}{2})$ admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Solution

a) L'équation différentielle (E) : $25y'' - 16y = 0$ équivaut à $y'' - \frac{16}{25}y = 0$

et cette équation est de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \frac{4}{5}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-\frac{4}{5}x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Déterminons la solution f vérifiant les conditions $f'(0) = f(0) = 1$:

f étant de la forme $x \mapsto Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-\frac{4}{5}x}$ on a : $f = A + B \Leftrightarrow A + B = 1$

par ailleurs, $f'(x) = \frac{4}{5}Ae^{\frac{4}{5}x} - \frac{4}{5}Be^{-\frac{4}{5}x}$ et on a : $f' = \frac{4}{5}A - \frac{4}{5}B \Leftrightarrow A - B = \frac{5}{4}$

La résolution du système $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \frac{5}{4} \end{cases}$ donne $A = \frac{9}{8}$ et $B = -\frac{1}{8}$

Ainsi, la solution f vérifiant les conditions $f'(0) = f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{8}e^{\frac{4}{5}x} - \frac{1}{8}e^{-\frac{4}{5}x}$$

b) Résolution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$

cette équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 1$, donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto A \cos x + B \sin x$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Déterminons la solution f vérifiant les conditions données dans cette question :

La courbe de f passe par $A(\frac{\pi}{2})$ si et seulement si $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

La courbe de f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

f étant de la forme $x \mapsto A \cos x + B \sin x$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow B = 1$

Par ailleurs, $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow -A = 0$ soit $A = 0$

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$

TABLEAU RECAPITULATIF

Equation différentielle	Solutions
-------------------------	-----------

$y'' - my' \quad (m \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ke^{-mx} \quad k \in \mathbb{R}$
y''	$x \mapsto ax + b \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y$	$x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \quad A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y$	$x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$

Exercice résolu 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{-x}$

- 1) Déterminer le nombre réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ae^{-x}$ soit solution de (E).
- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$
- 3) Montrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E').
- 4) En déduire les solutions de (E).

Solution

1) Pour tout nombre réel x , $g(x) = ae^{-x}$ $g'(x) = -ae^{-x}$

$$\begin{aligned}
 g \text{ est solution de } E &\Leftrightarrow g'(x) - g(x) = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow -ae^{-x} - ae^{-x} = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow -2ae^{-x} = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$

2) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 3) \text{ la fonction } f - g \text{ est une solution de (E')} &\Leftrightarrow (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x) \\
 &\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x) \\
 &\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x) \\
 &\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^{-x} \text{ car } g'(x) - g(x) = e^{-x}
 \end{aligned}$$

$$g'(x) - g(x) = e^{-x}$$

Ainsi, la fonction $f - g$ est une solution de (E') $\Leftrightarrow f$ est solution de E

4) D'après la question précédente f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E').

Or les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x) - g(x) = ke^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

D'où $f(x) = g(x) = ke^{-3x}$ $k \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ ke^{-3x} $k \in \mathbb{R}$

Exercice résolu 5

Au début de la croissance de certaines espèces végétales (telles que le coton, le maïs), on estime que le poids de la plante varie proportionnellement à lui-même. Pour une espèce donnée de coton, le poids P (en g par jour) varie en fonction du temps t (en jours) selon l'équation $P'(t) = 0,18P(t)$.

Sachant que le poids de la plante après un jour est de 2g, quel est son poids après 30 jours.

Solution

$$P'(t) = 0,18P(t) \Leftrightarrow P'(t) - 0,18P(t) = 0 \Leftrightarrow P'(t) = 0,18P(t) \quad k e^{0,18t} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$P(t) = k e^{0,18t} \Leftrightarrow k = \frac{P(t)}{e^{0,18t}} \Leftrightarrow k = \frac{P(0)}{e^{0,18 \cdot 0}} = P(0)$$

$$\text{Donc } P(t) = P(0) e^{0,18t}$$

$$P(1) = 2 = P(0) e^{0,18 \cdot 1} \Leftrightarrow P(0) = \frac{2}{e^{0,18}} \approx 1,84$$

Donc au bout de 30 jours la plante pèsera 370g.

EXERCICES

E1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$1) y' = y \quad 2) y' = -\frac{1}{2}y$$

$$3) y' = \sqrt{y}$$

$$4) y' = y \quad 5) y' = y$$

$$6) y' = y$$

E2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

$$1) y' = y \quad y(0) = 1$$

$$2) y' = y \quad y(1) = e^7$$

$$3) y' = y \quad y(0) = 1$$

$$4) y' = \pi y \quad y(0) = \pi$$

$$5) y' = y \quad y(0) = e$$

$$6) y' = \sqrt{y} \quad y(0) = 1$$

E3 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = y$.

2) Démontrer que l'équation différentielle (E') $y'' - y' - x - 2 = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une seule solution qui soit une fonction polynôme P de degré 2.

3) a) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E).

b) En déduire les solutions de (E'), puis celle qui vérifie $f(0) = 1$.

E4

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' = e^{-2x}$$

1) Vérifier que la fonction $g : x \mapsto x e^{-2x}$ est solution de (E).

2) Démontrer qu'une fonction $f = g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' = 0$$

3) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

E5

Dans une culture de microbes qui se développent, la vitesse d'accroissement à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant.

Sachant qu'il y a 5×10^5 microbes au bout de 2 heures et 5×10^6 microbes au bout de 6 heures, combien y avait-il initialement de microbes dans cette culture ?

E7 Déterminer une équation de la courbe (C) passant par le point A(1 ; 1) et telle qu'en chacun des points M de (C) la tangente ait un coefficient directeur double du carré de l'ordonnée de M.

E8 Le mouvement d'un mobile est défini par l'équation différentielle suivante : $\frac{dv}{dt} = -kv$ où k est une constante, t le temps exprimé en seconde et v la vitesse du mobile exprimée en m/s.

A l'instant $t = 0$, $v = 20$, pour $k = 0,2$

1. Déterminer v en fonction de t .

2. Calculer la valeur de t pour $v = 10$.

3. Calculer la distance entre les deux positions du mobile correspondant aux vitesses 20 et 10.

E9

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) :

$$f'(x) - f(x) = x e^x.$$

1. Démontrer que la fonction u définie par : $u(x) = -x e^x$ est solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E') :

$$f'(x) - f(x) = 0.$$

3. Démontrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = k e^{2x} - x e^x \text{ avec } k \text{ un réel quelconque.}$$

5. En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

PARTIE B

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = -x - e^x$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3.a) Calculer g' .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -\infty; -1[$.

c) Justifier que $-1,6 < \alpha < -1,5$.

4. Justifier que :

$$\forall x \in] -\infty; \alpha[\cup] \alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0.$$

PARTIE C

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = e^{2x} - x e^x$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

(Unité : 2 cm).

1. Calculer la limite de f en $-\infty$

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Calculer les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

3a) Démontrer que : $f(x) = e^x g(x)$.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4.a) Démontrer que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

5. Tracer (C).

6. Soit un réel t tel que $t > 0$.

a) Calculer à l'aide d'une intégration l'aire $A(t)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

ALGEBRE ET GEOMETRIE

1. BARYCENTRE

SAVOIR L'ESSENTIEL

RAPPELS

Lignes de niveau

Soit A et B deux points distincts du plan k un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur .

■ L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

■ L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$ est :

- $\emptyset$ si $\vec{u} = \vec{0}$ et $k \neq 0$

- le plan si $\vec{u} = \vec{0}$ et $k = 0$
- une droite de vecteur normal $\vec{u}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

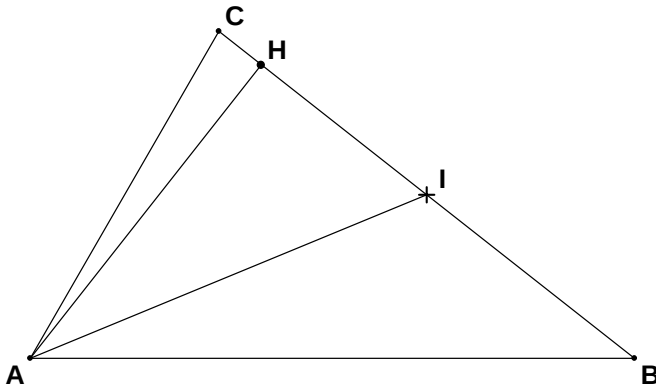
■ L'ensemble des points M du plan tels que : $AM = k$ ($k > 0$) est le cercle de centre A et de rayon k.

■ L'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$ ($k > 0$) est :

- ◊ la médiatrice de [AB] si $k = 1$.
- ◊ le cercle de diamètre [IJ] où I est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,k), J le barycentre de (A,1) et (B,-k) si $k \neq 1$.

Relations dans le triangle

Soit ABC un triangle. On pose : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).



On a :

◊ $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ (R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC).

◊ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$ (Théorème d'Al-Kashi).

◊ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C}$ (théorème de la médiane).

◊ $AB^2 - AC^2 = BC \cdot 2 \cdot CH$.

◊ $\frac{AB^2 - AC^2}{BC} = 2 \cdot CH$

Exercice 1

Soit ABC un triangle ; On note A', B' et C' les milieux respectifs des segments

$[BC], [AC]$ et $[AB]$.

L est le milieu de $[B'C]$ et M est le symétrique de C' par rapport à B.

1. Faire une figure.

2.a) Ecrire M comme barycentre de A et B.

b) Ecrire L comme barycentre de A et C.

3. Démontrer que A', M et L sont alignés.

Exercice 2

ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$.

Construire le point H barycentre des points pondérés (A, -1), (B, 2) et (C, 3).

Exercice 3

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

1. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -8$.

3. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$.

4. $MA = 3MB$.

5. $MA^2 - MB^2 = 12$.

6. $-5MA^2 + 3MB^2 = -8$.

1 BARYCENTRE DE n POINTS PONDERES ($n \geq 2$)

1. Théorème et définition

$$A_i \quad \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$

Il existe un point G unique tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre du système $A_i \quad \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$.

2. Propriétés

♦ Homogénéité du barycentre

Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul.

♦ Isobarycentre

$$A_i \quad \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq$$

Lorsque $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n$, le barycentre du système $A_i \quad \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$ est appelé isobarycentre des points $A_i \quad 1 \leq i \leq n$

♦ Barycentres partiels

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme **non nulle** des coefficients correspondants.

3 Réduction de $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Propriétés

■ Le cas $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq$

Soit G le barycentre du système $A_i \quad \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$. Alors, pour tout point M , on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MG}$$

■ Le cas $\sum_{i=1}^n \alpha_i$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M : c est un vecteur constant

Exercice résolu 1

Soit ABC est un triangle tel que $AB = AC = 8$ cm et $BC = 4$ cm.

Placer le point M tel que : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

Solution

La somme des coefficients est non nulle, donc on peut réduire le vecteur $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en utilisant le point $G = \text{bar} \{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$.

On a : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$. Donc :

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

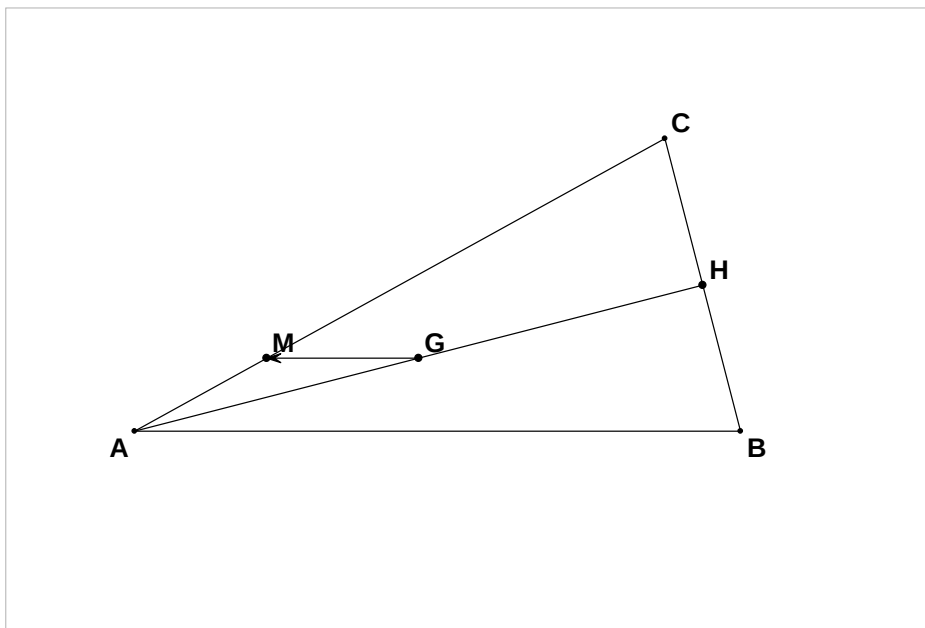
Figure

Pour construire le point G, utilisons le barycentre partiel H tel que :

$H = \text{bar}\{(B;1), (C;1)\}$. H est le milieu de [BC].

Alors :

$G = \text{bar}\{(H;2), (A;2)\}$. G est le milieu de [AH].



Exercice résolu 2

ABC est un triangle équilatéral de centre O.

1. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 6.$$

2. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

Solution :

1. O est l'isobarycentre des points A, B et C et par suite

$$M \in (E) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 6 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO}\| = 6 \Leftrightarrow OM = 2.$$

(E) est le cercle de centre O et de rayon 2.

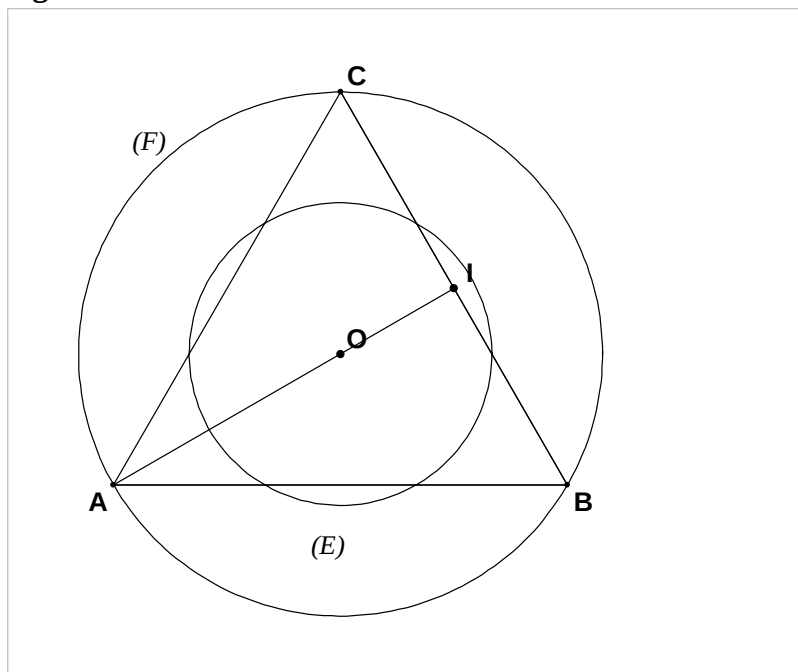
2. On remarque que le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est constant car la somme des coefficients est nulle. Donc pour réduire le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$, on peut remplacer M par A. Alors pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AI}, \text{ où } I \text{ est le milieu de } [BC].$$

$$M \in (F) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO}\| = \|\overrightarrow{AI}\| \Leftrightarrow OM = \frac{2}{3}AI = AO.$$

(F) est le cercle de centre O et de rayon AO.

Figure



4. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère n points A_i x_i y_i $1 \leq i \leq n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Le barycentre G des n points pondérés $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$ a pour coordonnées : x_G y_G $\left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)$

Exercice 1.1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A , B – et C –

Déterminer les coordonnées de K barycentre de (A, 3) , (B, -2) et (C, $\frac{3}{4}$) et du centre de gravité G du triangle ABC.

2 LIGNES ET SURFACES DE NIVEAU

1. Définitions

■ Soit k un nombre réel et f une application du plan dans $\mathbb{R}$.

la ligne de niveau k de f est l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$

■ Soit k un nombre réel et f une application de l'espace dans $\mathbb{R}$.

la surface de niveau k de f est l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$

2. Lignes et surfaces de niveau de $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Théorème

Soit A et B deux points distincts et k un réel strictement positif. Soit (E) l'ensemble des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = k$.

Dans le plan

■ Si $k = 1$, (E) est la médiatrice de [AB].

■ Si $k \neq 1$, (E) est le cercle de diamètre [IJ]

où I est le barycentre du système $\{(A, 1); (B, k)\}$ et J le barycentre de $\{(A, 1); (B, -k)\}$

Dans l'espace :

- si $k = 1$, (E) est le plan médiateur de [AB]
- si $k \neq 1$, (E) est la sphère de diamètre [IJ].

3. Lignes et surfaces de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2$

Théorème

Soit $A_i \alpha_i \ 1 \leq i \leq n$ un système de n points pondérés et k un réel. pour tout point M , on pose :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2$$

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = k$.

■ **Le cas $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$**

Soit G le barycentre du système $A_i \alpha_i \ 1 \leq i \leq n$.

- Alors, pour tout point M , on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i M G^2 = f(M) - \sum_{i=1}^n \alpha_i G A_i^2$$

Dans le plan : (E) est $\emptyset$ ou $\{G\}$ ou un cercle de centre G .

Dans l'espace : (E) est $\emptyset$ ou $\{G\}$ ou une sphère de centre G .

■ **Le cas $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$**

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} \text{ est indépendant du point } M$$

Soit K un point quelconque.

- Alors, pour tout point M , on a : $f(M) = -2\vec{U} \cdot \overrightarrow{KM} + f(K)$.

Dans le plan (E) est :

- $\emptyset$ ou le plan si $\vec{U} = \vec{0}$
- une droite de vecteur normal à $\vec{U}$ si $\vec{U} \neq \vec{0}$.

Dans l'espace : (E) est $\emptyset$ ou le plan de vecteur normal à $\vec{U}$ ou l'espace.

Exercice résolu 3 :

ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Soit A' le milieu du segment [BC].

1. Construire le point G barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1)

2. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 36.$$

a) Vérifier que A appartient à (E).

b) Déterminer et construire l'ensemble (E)

3. Soit l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 36$.

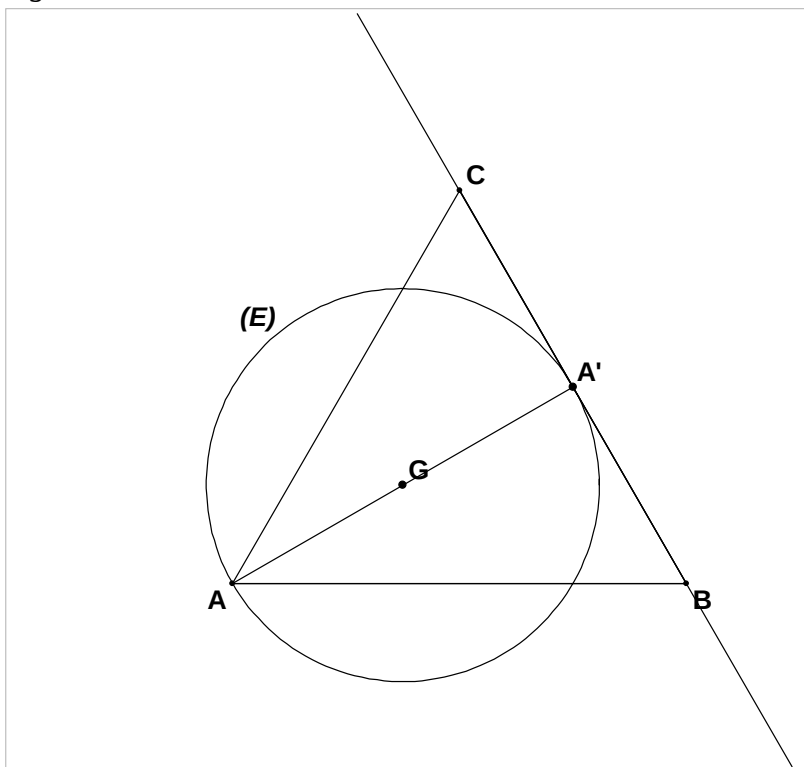
a) Vérifier que A' appartient à (Δ).

b) Déterminer et construire (Δ)

Solution :

1. $G = \text{bar} \{(A;2), (B;1), (C;1)\}$ or $A' = \text{bar}\{(B;1), (C;1)\}$ donc $G = \text{bar} \{(A;2), (A';2)\}$. G est le milieu de [AA'].

Figure



2.a) Posons pour tout point M du plan, $f(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$.

On a : $f(A) = 2AA^2 + AB^2 + AC^2 = 2 \cdot 3^2 + 6^2 + 6^2 = 36$ donc A appartient à (E).

b) $M \in (E) \Leftrightarrow 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 36$.

Calculons GA, GB et GC

D'après le théorème de la médiane $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc $AA' = 3\sqrt{3}$ et $GA = \frac{1}{2}AA'$ donc $GA = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dans le triangle GBA' , la propriété de Pythagore nous donne $GB^2 = BA'^2 + GA'^2$

Par suite $GB = \frac{3\sqrt{7}}{2}$. Comme G appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ donc

$$GC = GB = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

$$D'où : M \in (E) \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}^2 = \frac{3\sqrt{7}}{2}^2 = 72 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow MG = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Comme $A \in (E)$ donc (E) est le cercle de centre G et de rayon GA .

2) Posons pour tout point M du plan, $g(M) = 2MA^2 - MB^2 - MC^2$.

a) On a : $g(A') = 2A'A^2 - A'B^2 - A'C^2 = 2(\sqrt{3}^2 - 9 - 9) = 36$ donc A' appartient à (Δ) .

b) La somme des coefficients est nulle, donc :

$$g(M) = 2 \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'A}^2 - \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'B}^2 - \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'C}^2.$$

$$g(M) = 2(MA'^2 - \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'A} - A'A^2) - (MA'^2 - \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'B} - A'B^2) - (MA'^2 - \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'C} - A'C^2).$$

$$g(M) = \overrightarrow{MA'} \cdot (\overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'C}) + g(A') = 4\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'A} + 36.$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'A} + 36 = 36 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{A'A} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{A'A} \neq \vec{0}$ donc (Δ) est la droite passant par A' et perpendiculaire à la droite $(A'A)$ donc $(\Delta) = (BC)$.

4. Lignes de niveau de $M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$

a) Points cocycliques

Théorème

Quatre points distincts A, B, C, D non alignés sont cocycliques si et seulement si $\text{mes}(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \text{mes}(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}) + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

b) Lignes de niveau de $M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$

Théorème

Soit A et B deux points distincts du plan et θ un réel tel que $\theta \in]-\pi; \pi[$.

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \theta$.

■ Cas $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

– Si $\theta = 0$ alors (E) est la droite (AB) privée de $[AB]$.

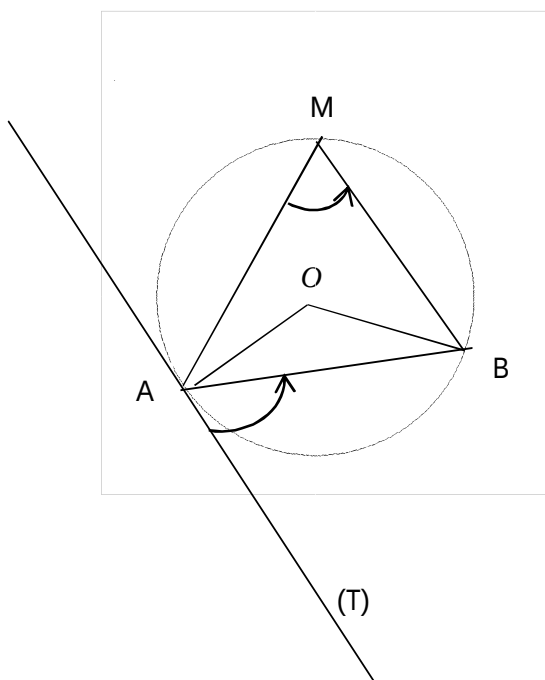
– Si $\theta = \pi$ alors (E) est le segment $[AB]$ privé de A et B .

Remarque : l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ est la droite (AB) privé de A et B.

■ **Cas $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$.**

L'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \theta$ est l'un des deux arcs de cercle d'extrémités A et B, privé de A et B.

Méthode de construction de l'ensemble (E)



Notons Γ le cercle de centre O passant par A et B tel que : $\text{mes}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.
Ce point O appartient à la médiatrice de [AB] et à la perpendiculaire en A à la demi-tangente [AT) telle que : $\text{Mes}(\overrightarrow{AT}; \overrightarrow{AB}) = \theta$.

Cas particuliers :

- l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ (ou $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$) est l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB] privé de A et B.

Exercice résolu 4:

A et B sont deux points distincts du plan tels que $AB = 5$.

- 1) Quel est l'ensemble (E_1) des points M du plan tel que $Mes(\vec{MA}, \vec{MB}) = 0$
- 2) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que $Mes(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{3}$

Solution

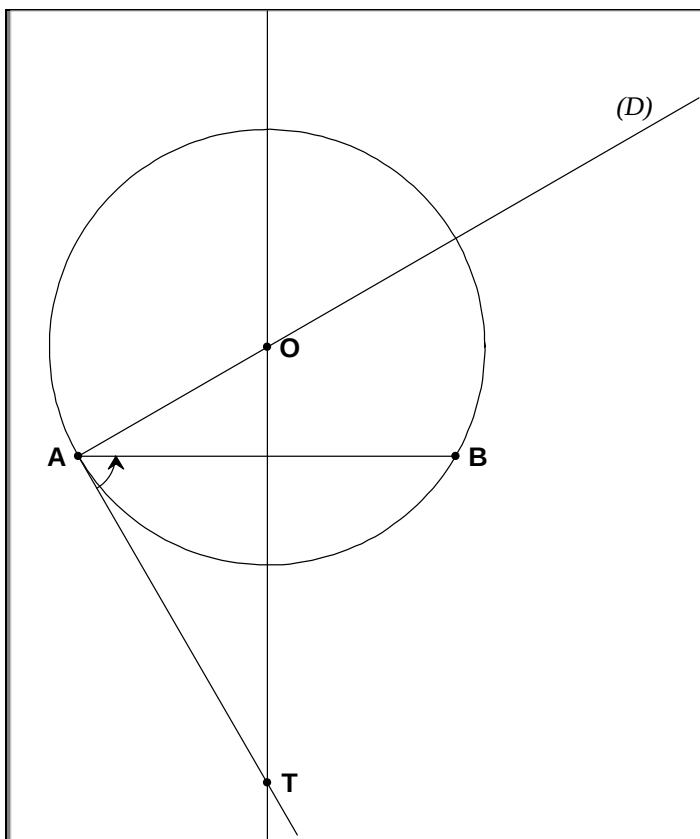
1. (E_1) est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.
2. (E_2) est l'arc $\widehat{AB}$ privé des points A et B.

Construction de (E_2) :

- On trace la demi-droite $[AT)$ tel que $Mes \widehat{ATB} = \frac{\pi}{3}$ et la perpendiculaire (D) à (AT) en A.

- Le centre O du cercle cherché est l'intersection de (D) et de la médiatrice de $[AB]$.

Figure



Exercice résolu 5

a est un nombre réel strictement positif et ABC est un triangle équilatéral de coté a .

- 1) Construire le point D barycentre du système $\{(A; 2), (B; -2), (C; -1)\}$

Par suite les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles (Droite des milieux dans un triangle).

• Montrons que le triangle BCD est rectangle en B.

A est le milieu [HC] et $AB = AC$ donc le cercle de diamètre [HC] passe en B et le triangle HBC est rectangle en B.

Or les points H, B et D sont alignés donc le triangle BCD est rectangle en B.

3)a) Vérifions que C appartient à (F)

$$\text{On a : } 2CA^2 - 2CB^2 - CC^2 = 2CA^2 - 2CB^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

Donc $C \in (F)$

b) Déterminons (F)

$2-2-1=-1$; La somme des coefficients est non nulle donc (F) est $\{D\}$ ou $\emptyset$ ou un cercle de centre D. Comme $C \in (F)$ alors (F) est non vide et $(F) \neq \{D\}$.

Finalement, (F) est le cercle de centre D et de rayon DC.

Voir figure ci-dessous.

Remarque : On aurait pu utiliser la méthode de la réduction de la somme

$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ pour résoudre cette question.

4) a) Vérifions que $C \in (G)$

$$\text{On a : } 2CA^2 - CB^2 - CC^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$$

Donc $C \in (G)$

b) Déterminons (G)

$2-1-1=0$; La somme des coefficients est non nulle donc le vecteur

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M. On a donc $\vec{u} = 2\vec{EA} - \vec{EB} - \vec{EC} = -2\vec{AE}$ où E est le milieu de [BC]. Ainsi, $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc (F) une droite de vecteur normal le vecteur $\vec{u} = -2\vec{AE}$.

Comme $C \in (G)$ alors (G) est la droite passant par C et de vecteur normal $\vec{u}$.

Voir figure ci-dessous.

Exercice résolu 6

ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB) . On désigne par I, J et O les milieux respectifs de (AD) , (BC) et (AC) .

1. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \quad \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MC}\|.$$

2. Les médiatrices des cotés et se coupent en G. Démontrer que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

3. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points M du plan tels que :

a) Justifier que $\mathcal{E}_2$ est non vide.

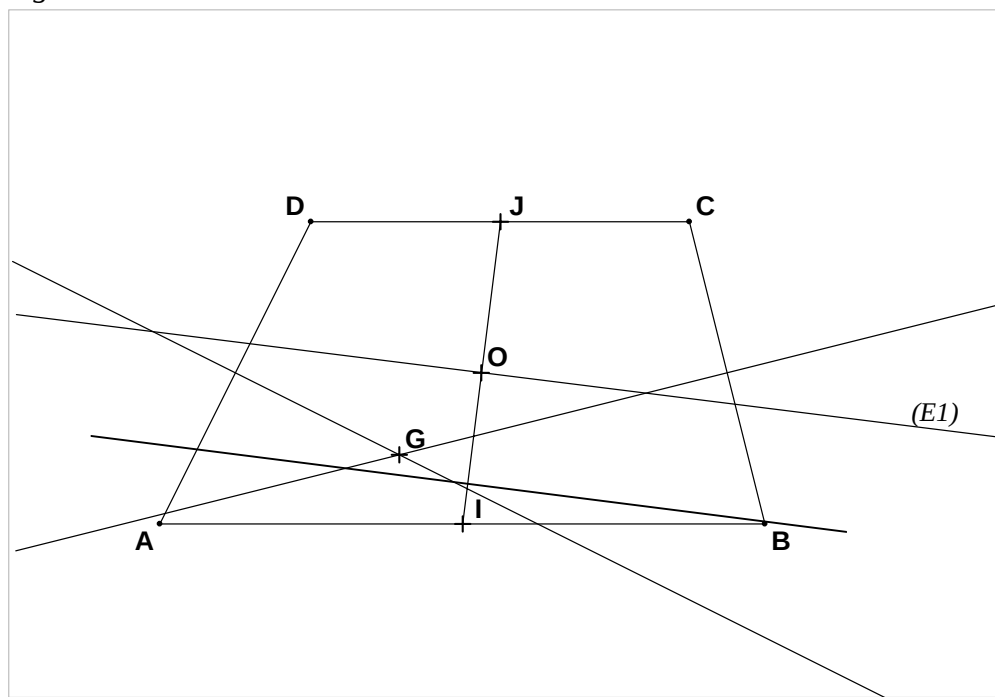
b) Démontrer que : $M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ (k est une constante réelle).

c) En déduire que : $M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \vec{MI} = \vec{MJ}$.

d) Déterminer et construire $\mathcal{E}_2$.

Solution :

Figure



$$1) M \in (E_1) \Leftrightarrow \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MC} + \vec{MD}\|$$

$$M \in (E_1) \Leftrightarrow \|2\vec{MI}\| = \|2\vec{MJ}\|$$

$$M \in (E_1) \Leftrightarrow MI = MJ. \text{ Donc } (E_1) \text{ est la médiatrice de } [IJ]$$

2) Démontrons que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$

G appartient à la médiatrice de $[AD]$ et à la médiatrice de $[BC]$ donc $GA=GD$ et $GB = GC$
 D' où $GA^2 = GD^2$ et $GB^2 = GC^2$

La somme membre à membre des deux égalités précédentes nous donne

$$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$$

3) a) Justifions que (E_2) est non vide.

D'après la question 2) On a $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$

Donc le point G appartient à (E_2) par suite (E_2) est non vide

b) Démontrons $M \in (E_2) \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{OM} = k$

On a : $M \in (E_2) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 0$.

La somme des coefficients est nulle donc la réduction de

$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2$ donne pour tout point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = OA^2 + OB^2 - OC^2 - OD^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{OM}$$

$$\text{avec } \vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OD} = 2\vec{OI} - \vec{OJ} = -\vec{IJ}.$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 - OC^2 - OD^2 + 4\vec{IJ} \cdot \vec{OM} = 0$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{OM} = \frac{-OA^2 - OB^2 + OC^2 + OD^2}{4}$$

$$\text{Posons } k = \frac{-OA^2 - OB^2 + OC^2 + OD^2}{4}$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{OM} = k$$

c) Démontrons $M \in (E_2) \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{GM} = 0$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow GA^2 + GB^2 - GC^2 - GD^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{GM} = 0$$

$$\text{De plus } GA^2 + GB^2 - GC^2 - GD^2 = 0 \quad \text{et } \vec{u} = 2\vec{JI}$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{GM} = 0$$

d) (E_2) est la droite passant par G et perpendiculaire à (IJ)

EXERCICES

E1 Soit ABC un triangle.

1. Construire les points Q, R et G définis par :

Q est le barycentre de A et C

R est le barycentre de A et B

G est le barycentre de $\{(A,3),(B,1),(C,1)\}$

2. Démontrer que les droites BQ et CR passent par G

3. Démontrer que les points A, B, G sont alignés.

E2 ABCD est un parallélogramme. On définit les points P et Q par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB}$$

Q est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A .

1. Faire une figure.

2. Démontrer que C est le barycentre des points pondérés $(A,1);(B,-1);(D,-1)$

3. En déduire que les P, Q et C sont alignés.

E3 Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle rectangle en A tel que $AB=AC=3a$, ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

1. Construire le barycentre G du système $\{(A,4), (B,-3), (C,2)\}$.

2. Calculer GA, GB, GC

3. Soit (E_1) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -36a^2$$

Soit D le symétrique de B par rapport à A.

a) Démontrer que D appartient à (E_1) .

b) Déterminer et construire (E_1) .

4. Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = -AB^2$$

a) Démontrer que

$$M \in E_2 \Leftrightarrow \vec{MA} = -\vec{MB} + \vec{MC}$$

b) Déterminer et construire (E_2) .

E4

ABC est un triangle équilatéral de côté a, ($a > 0$) et de centre de gravité I . Soit D un point du plan.

1.a) Démontrer que ABDC est un losange si et seulement si D est barycentre du système de points pondérés $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$

b) Justifier que $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 13a^2$
Déterminer et construire (Γ)

4. Soit (L) l'ensemble des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$

a) Démontrer que

$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2$$

b) Vérifier que $D \in (L)$

c) Déterminer et construire (L)

5. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MB} \right\|$

Déterminer et construire (Δ)

E5 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=a$ et $AC=2a$.

I désigne le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A; 3), (B; -2), (C; 1)\}$

1.a) Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG ;

b) Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.

2. A tout point M du plan, on associe le nombre réel

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$$

a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$

3. A tout point M du plan, on associe le nombre réel

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$$

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que

$$h(M) = \vec{MB} \cdot \vec{u} - 2a^2$$

b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que

$$h(M) = -2a^2$$

* Vérifier que les points J et B appartiennent à (Δ) .

* Préciser la nature de cet ensemble et le construire

4. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F.

Démontrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

E6 L'unité de longueur est le cm

On considère dans le plan le triangle ABC tel que $AB=7$; $BC=4$ et $AC=5$.

I est le milieu de $[BC]$

1. Démontrer que $AI = \sqrt{3}$

2. Soit M un point du plan. Pour quel valeur du nombre réel m le vecteur

$m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant de M.

a) Déterminer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$

b) Déterminer et construire l'ensemble (L) des points M du plan tels que

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$$

3. Soit D le barycentre du système $\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$

a) Démontrer que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

b) Déterminer et construire l'ensemble (L) des points M du plan tels que
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$

E7

ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 2 et BC = 1

1. Calculer OA

2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10$

3. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\text{Mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = -\frac{\pi}{4}$$

E8

ABC est un triangle équilatéral de côté a .

1. Construire le barycentre G du système $\{(A,2);(B,-2);(C,-1)\}$

2. Déterminer $\vec{AG}$ en fonction de a

3. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B

4. On désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que

$$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$$

a) Vérifier que $C \in (F)$

b) Déterminer et construire (F)

5. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$$

a) Montrer que $C \in (\Gamma)$

b) Déterminer et construire (Γ)

6. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (Γ)

Montrer que le triangle CDI est équilatéral

E9

L'unité de longueur est le cm.

DEF est un triangle rectangle et isocèle en E tel que la distance DE est égale à 4.

K est le milieu du segment $[EF]$ et G le

point défini par $\vec{GD} = \frac{1}{2}\vec{FE}$

1. Faire une figure

2.a) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $\{(D,2);(E,-1);(F,2)\}$

b) Démontrer que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme ;

c) En déduire que $GF = 2\sqrt{5}$

d) Démontrer que le triangle GEF est isocèle en G.

3. On note (C) l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$2MD^2 - ME^2 + MF^2 = 48$$

a) Vérifier que E et F sont des éléments de (C).

b) Déterminer et construire l'ensemble (C).

E10 Dans le plan complexe rapporté au repère $O I J$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $-i$, i et $8 - i$.

1. Placer A, B et C.

2 Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

3. Soit G le barycentre des points pondérés A, - B et C, - . Démontrer que le quadrilatère AGBC est un losange.

4. On considère l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -.$$

a) Démontrer que A et C appartiennent à E_1 .

b) Déterminer et construire E_1 .

5. On considère l'ensemble E_2 des points du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

E11 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 et de centre de gravité G. B' est le milieu de AC et D est le point tel que : $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{BB'}$

1. Ecrire D comme barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on précisera.

2. Calculer DA, DB et DC

3. Soit E l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2$$

a) Vérifier que E passe par G.

b) Déterminer et construire E .

E12 Soient 3 points du plan A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $]-1, 1[$.

On note G le barycentre du système $(A, 2), (B, -k), (C, 1-k)$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de AC et construire les points M_1 et M_2 .

2.a) Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $]-1, 1[$, on a l'égalité : $\frac{-k}{k^2+1} \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

c) En déduire l'ensemble des points M_k quand k décrit l'intervalle $]-1, 1[$.

3. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

4. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

E14 DEF est un triangle rectangle isocèle en E tel que DE = 4 cm. K désigne le milieu du segment [EF] et G le point défini par : $\vec{GD} = \frac{1}{2}\vec{FE}$.

1.a) Faire une figure.

b) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés D, E, et F.

c) Démontrer que le quadrilatère GFKD est un parallélogramme.

d) En déduire que GF = $2\sqrt{2}$.

e) Démontrer que le triangle GEF est isocèle en G.

2. Soit C l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MD^2 - ME^2 - MF^2 = 2$$

a) Vérifier que les points E et F appartiennent à C .

b) Déterminer et construire C .

E 15 Dans l'espace, on considère trois points non alignés A, B, C et le point I défini par $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

1. Exprimer I comme barycentre de A, B et C.

On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A et que AB = 2 et AC = 1.

2. Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace tel que $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3$

Démontrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

E16 Soit ABC un triangle équilatéral.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

1. $Mes(\vec{MA} \vec{MB}) = \frac{\pi}{3}$.

2. $Mes(\vec{MA} \vec{MB}) = -\frac{\pi}{2}$.

3. $Mes(\vec{MA} \vec{MB}) = \frac{\pi}{6}$.

2. LES NOMBRES COMPLEXES

Historique

XVI^e siècle : Première utilisation des nombres complexes par des mathématiciens italiens (Bombeli , Cardan , Tartaglia) dans la résolution de certaines équations du second degré avec la manipulation de $\sqrt{-}$

1722 : Autre utilisation par Moivre dont la formule porte son nom (en trigonométrie)

1707 : Euler adopte les notations $a + ib = re^{i\theta}$

XIX^e siècle : Gauss et Cauchy donnent un statut indiscutable aux nombres complexes.

1 DEFINITION- REPRESENTATION GEOMETRIQUE

1. Définition et propriétés

Définition

On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :

- il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que : $i^2 = -1$
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels.

■ $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Exemples

i , $-i$, $\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$ sont des nombres complexes.

Forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels.

■ l'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z :

a est appelée **partie réelle** de z et b **partie imaginaire** de z et on note $a = \operatorname{Re} z$ et $b = \operatorname{Im} z$

■ si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel.

■ si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemples

— Soit les nombres complexes suivants: $z = -1 + 2i$, $u = 3i$, $v = 1$. Alors:
 $\operatorname{Re}(z) = -1$ et $\operatorname{Im}(z) = 2$; $\operatorname{Re}(u) = 0$ et $\operatorname{Im}(u) = 3$; $\operatorname{Re}(v) = 1$ et $\operatorname{Im}(v) = 0$; $\operatorname{Re}(0) = \operatorname{Im}(0) = 0$.

Les nombres complexes i , $-\frac{2}{5}i$ sont des imaginaires purs.

Exercice 1.1

Soit $u = 2 + i$ et $v = -1 + 3i$. Calculez sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $u + v$, $u - v$, uv , u^2 , u^3 .

Propriétés

■ L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels est unique.

■ Pour tous réels a, b, a', b' on a:

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

Exercice 1.2

Déterminer les réels x et y pour que l'on ait $x + iy = (1 + i)^2$.

Propriétés

- Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ où a et b sont des réels admet un inverse qui est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ tel que : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$
- Soit z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$, alors : $\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de retenir la formule, pour calculer $\frac{1}{a+ib}$ on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a-ib$ et on utilise l'égalité : $(a+ib)(a-ib) = a^2 - b^2$

Exercice 1.3

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{1}{1+2i}$, $\frac{-1+3i}{3-i}$, $\frac{1}{2i}$, $\frac{3i}{1-i}$, $\frac{5-3i}{i-3}$.

2. Représentation géométrique

Définition

Le plan $\mathbb{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{x}, \vec{y})$ appelé plan complexe.

■ Au complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels) on associe le point $M(a, b)$.

On réalise ainsi une bijection de $\mathbb{C}$ dans le plan $\mathbb{P}$.

On dit que M est le **point image de z** et que z est l'abscisse de M ou du vecteur $\vec{OM}$.

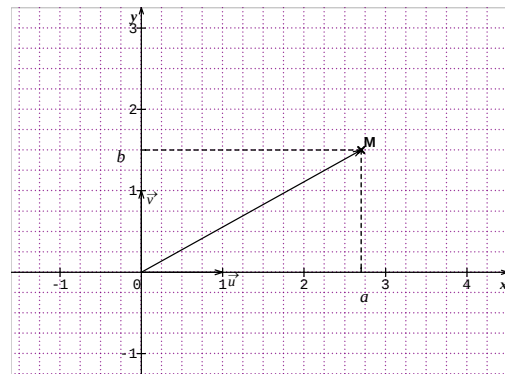
On note souvent $M(z)$ ou $\vec{OM}$ et z est souvent noté z_M .

■ Au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) , on associe le nombre complexe $a + ib$.

On dit que $a + ib$ est l'abscisse de $\vec{u}$ et que $\vec{u}$ est le **vecteur image** de $a + ib$.

■ Si M et M' ont pour abscisses respectives z et z' alors : $\vec{MM'}$ a pour abscisse $z' - z$.

Si I est le milieu de $[MM']$ alors : $I = \frac{z_M + z_{M'}}{2}$



Si G est le barycentre des points pondérés (A ; a) (B ; b) et (C ; c) avec $a + b + c \neq 0$ alors

$$Z_G = \frac{aZ_A + bZ_B + cZ_C}{a+b+c}$$

Exercice résolu 1

1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, R, S, T, U d'affixes respectives

$$A = -i \quad B = \sqrt{3} - i \quad C = i \quad R = i - 1 \quad S = -1 - i \quad T = i$$

2) Démontrer que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

3) Déterminer l'affixe de K milieu du segment [RT].

4) Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle RST.

Solution

1) Voir figure.

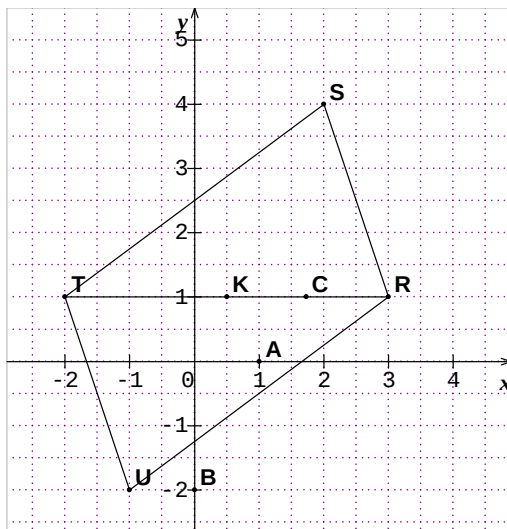
2) Le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour affixe $z_S - z_R = i - 3 - i = -3$

Le vecteur $\overrightarrow{UT}$ a pour affixe $z_T - z_U = -i - i = -2i$

Nous avons : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ donc le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

3) Le point K a pour affixe : $z_K = \frac{z_R + z_T}{2} = \frac{3+i-2+i}{2} = \frac{1+2i}{2} = \frac{1}{2} + i$

4) $Z_G = \frac{z_R + z_S + z_T}{3} = \frac{3+i-1-i+i}{3} = \frac{2+i}{3}$



Exercice résolu 2

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$. On considère l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de $4i$ associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{z+1+i}{z-4i}$$

1) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Ecrire f(z) sous forme algébrique.

2) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que f(z) soit un réel.

3) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

Solution

1) En posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$f(z) = \frac{x+iy+1+i}{x+iy-4i} = \frac{x+1+y+1i}{x+iy-4} \cdot \frac{x-iy-4}{x-iy-4} = \frac{x^2+x+y^2-3y-4}{x^2+y-4} + i \frac{5x-y+4}{x^2+y-4}$$

$$2) f(z) \text{ est réel} \Leftrightarrow \frac{5x-y+4}{x^2+y-4} = 0 \Leftrightarrow x-y = -4 \text{ et } x^2+y-4 \neq 0.$$

L'ensemble E_1 est la droite d'équation $x-y = -4$ privée du point $A(0;4)$.

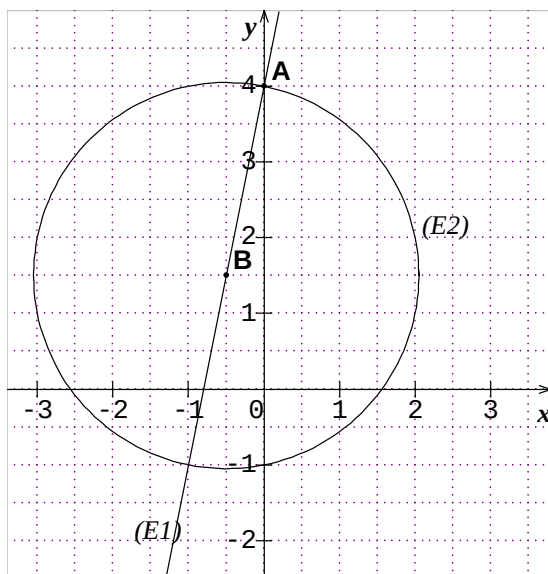
$$3) f(z) \text{ est un imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+y^2-3y-4}{x^2+y-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 3y - 4 = 0 \text{ et } x^2+y-4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} + y^2 - \frac{3}{2} = \frac{26}{4} \text{ et } x^2+y-4 \neq 0.$$

(On a utilisé la forme canonique : $x^2 + \alpha x = x^2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4}$)

L'ensemble E_2 est le cercle de centre $B(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$ privé du point $A(0;4)$.



3. Nombres complexes conjugués

Définition

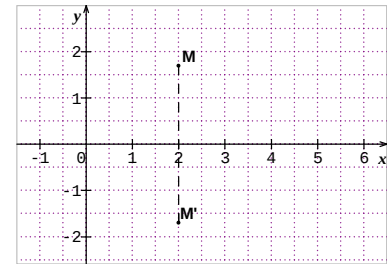
Soit $z = a + ib$ (avec a et b réels).

On appelle conjugué de z le nombre complexe

noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique :

Soit les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$. Alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple

$$\overline{3 - 2i} = 3 + 2i \quad \overline{-5i} = 5i \quad \overline{i} = -i$$

Exercice 1.4

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = i \quad z_2 = -1 - i \quad z_3 = i\sqrt{2}$$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier relatif n non nul :

$$\overline{\overline{z}} = z; \quad \overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}; \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}; \quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n;$$

$$\text{si } z' \neq 0, \text{ on a : } \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \text{ et } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}};$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z};$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z.$$

Remarque :

$$\text{Si } z \neq 0 \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

Exercice 1.5

Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i \quad z_2 = \frac{i\sqrt{2}}{2 - i} \quad z_3 = i^3$$

Exercice résolu 3

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z différent de 0 et de i associe le point M' d'affixe Z

tel que : $Z = \frac{2}{iz^2+z}$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

a) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$: $M(z) \in (E) \Leftrightarrow (z + \bar{z} - i z - \bar{z})$

(On utilisera : $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$)

b) En déduire la nature de l'ensemble (E).

2. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel. Démontrer que (F) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$x^2 - y^2 + y = 0 \text{ avec } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

Solution

1. a. $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M(z) \in (E) \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{-i\bar{z}^2+\bar{z}} = -\frac{2}{iz^2+z}$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z}^2 - \bar{z} = iz^2 - z$$

$$\Leftrightarrow i z^2 - \bar{z}^2 = z - \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow i z^2 - \bar{z}^2 = z - \bar{z} + (z + \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + \bar{z} - i z - \bar{z})$$

b) En posant $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on obtient : $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$ et $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$;

$$\text{Ainsi } z + \bar{z} - i z - \bar{z} = 2x - i(2iy) = 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

D'où, $(E) = \{0\} \cup D \setminus \{0\}$ où (D) est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

2. $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M(z) \in (F) \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{-i\bar{z}^2+\bar{z}} = \frac{2}{iz^2+z}$$

$$\Leftrightarrow -i\bar{z}^2 - \bar{z} = iz^2 + z$$

$$\Leftrightarrow i z^2 - \bar{z}^2 = z + \bar{z}$$

En posant $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$

On a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$

donc $z^2 - \bar{z}^2 = 4xyi$ et $z + \bar{z} = 2x$;

$$\text{Ainsi, } \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, i z^2 - \bar{z}^2 = z + \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 & x \neq 0 \\ i(x^2 - y^2) - 2xyi = 2x & 2xy = 2x \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 - y = 0 & \text{avec } x \neq 0 \end{cases}$$

et $y \neq 0$

Finalement, (F) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient

$$x^2 - y^2 + y = 0 \text{ avec } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

4. Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ (avec a et b réels).

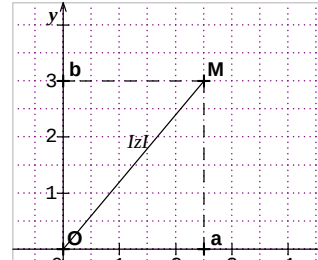
On appelle module de z le réel positif noté

$|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Interprétation géométrique

Si M a pour affixe z alors : $|z| = OM$



Exemple

Calculer le module des nombres complexes suivants : $3+4i$; i ; $-2i$; $1-4i$; -5 ; $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

$$|3+4i| = \sqrt{\quad} \quad |i| = \sqrt{\quad} \quad ; |1-4i| = \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad ; |-5| = \sqrt{\quad} \quad ;$$

$$\left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \quad .$$

Exercice 1.6

Calculer le module des nombres complexes suivants : $i - i\sqrt{1-i}$; $1 - i - i$; $2 - i$.

Propriété

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors : $AB = |z_B - z_A|$

Exercice résolu 4

Soit A , B et C les points d'affixes respectives : $-1-i$; $1-i$; i .

Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

Solution

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } AB &= |3 - i| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\
 AC &= |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\
 BC &= |i - 3| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\
 \text{On a } AB &= AC \text{ et } AB^2 = AC^2 + BC^2,
 \end{aligned}$$

donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

Exercice résolu 5

Soit A et B les points d'affixes respectives : $-i$ et 3 .

a) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que :

$$|z - i| = 4$$

b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que :

$$|z - i| = |z - 3|$$

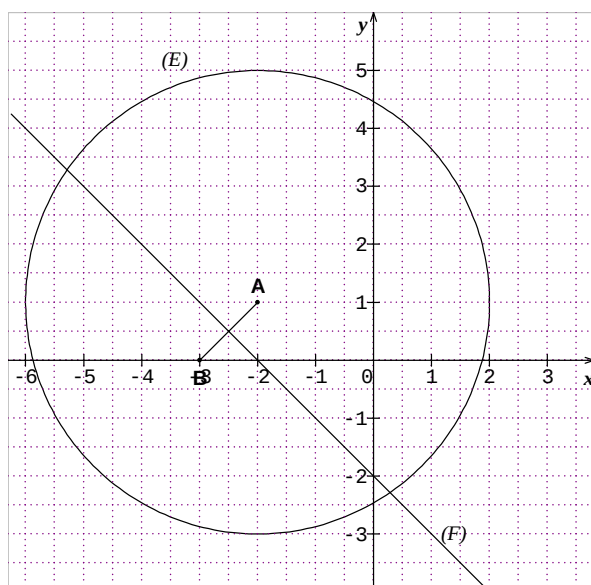
Solution

$$\begin{aligned}
 \text{a) On a : } M \in (E) &\Leftrightarrow |z - i| = 4 \\
 &\Leftrightarrow |z - (-i)| = 4 \\
 &\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 4 \\
 &\Leftrightarrow MA = 4.
 \end{aligned}$$

Donc (E) est le cercle de centre A et de rayon 4.

$$\begin{aligned}
 \text{b) On a : } M \in (F) &\Leftrightarrow |z - i| = |z - 3| \\
 &\Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - 3| \\
 &\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \\
 &\Leftrightarrow MA = MB
 \end{aligned}$$

Donc (F) est la médiatrice du segment [AB].



Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n non nul:

$$|z^{-n}| = |z|^{-n};$$

$$|z|^{-n} = \frac{1}{|z|^n} \Leftrightarrow$$

$$|zz'| = |z||z'|; |z^n| = |z|^n;$$

$$\text{si } z' \neq 0, \text{ on a : } \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|};$$

$$|z+z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)}.$$

Exercice résolu 6

Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $\bar{z} = i$

Solution

$$\bar{z} = i \Leftrightarrow \overline{\overline{\bar{z}}} = \overline{i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\bar{z}} = \overline{i}$$

$$\Leftrightarrow z = -i$$

$$\Leftrightarrow AM = 5 \text{ où } A \text{ est le point d'affixe } -i$$

D'où (C) est le cercle de centre A et de rayon 5

Remarque :

La question peut être résolue en posant $z = x + iy$ $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dans ce cas l'ensemble (C) est caractérisé par une équation.

Exercice 1.7

On donne $z_1 = 1 + i$ $z_2 = -\sqrt{3} + i$

Calculer le module de chacun des nombres complexes : $|z_1|$ $|z_2|$ $|z_1 + z_2|$ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ $|z_2|^5$

2 ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1. Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M le point image de z dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

■ On appelle **argument de z** et on note **$\arg(z)$**

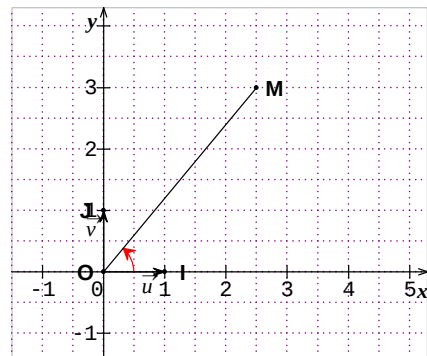
toute mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{OM})}$

Si θ est une mesure de $\widehat{(\vec{u}, \vec{OM})}$, on écrit :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

■ On appelle **argument principal de z** et on note **$\text{Arg}(z)$** la mesure principale de l'angle

orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{OM})}$



NB : Le nombre complexe nul n'admet pas d'argument.

Exemples

Le point image du nombre complexe i est J donc : $\text{Arg } i = \text{Mes } \widehat{(\vec{u}, \vec{OJ})} = \frac{\pi}{2}$

De même, on détermine l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants en considérant leur point image et en appliquant la définition :

$$\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}; \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}; \text{Arg}(1) = 0; \text{Arg}(-1) = \pi; \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}; \text{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}; \text{Arg}(-5) = \pi.$$

Argument d'un nombre réel non nul, argument d'un nombre imaginaire pur non nul

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = 0$;
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \pi$;
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$;
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$;
- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

2. Égalité de deux nombres complexes non nuls

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$z \quad z' \Leftrightarrow \quad z' \quad ' \quad \pi \quad \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2.1

Déterminer l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

$$10 \quad -\pi \quad 3i \quad -2 \quad 5i \quad -2011 \quad 3\pi$$

3. Forme trigonométrique

Propriété et définition

■ Tout nombre complexe non nul z peut être écrit sous la forme : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

On dit que $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique de z .

■ Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Exemples

On a : $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ donc : $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

On a : $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ donc : $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.2

Soit u le nombre complexe tel que $|u| = 2$ et $\arg u = \frac{3\pi}{4}$

Ecrire u sous forme algébrique

Propriété

Quels que soient les réels a et b avec $(a, b) \neq (0, 0)$ $\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad \theta \in \mathbb{R}$:

$$a + ib = r \left(\cos \theta + i \sin \theta \right) \Leftrightarrow \begin{cases} r \cos \theta = a \\ r \sin \theta = b \end{cases}$$

Exercice résolu 7

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $u = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$v = -\sqrt{2} - i ; w = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Solution

On a : $|u| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$;

soit $\theta = \text{Arg}(u)$, on a :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc : $u = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$.

• On a : $|v| = \sqrt{4} = 2$;

soit $\alpha = \text{Arg}(v)$, on a :
$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

Donc : $v = 2 \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

• On a : $|w| = \sqrt{4} = 2$;

soit $\beta = \text{Arg}(w)$, on a :
$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Donc : $w = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

NB : La forme trigonométrique peut s'écrire avec un argument quelconque

Exercice 2.3

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad -3 - i \quad \sqrt{2} - i ; \frac{2i-2}{1+i}.$

4. Arguments et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et pour tout entier relatif n :

■ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi ; \quad k \in \mathbb{Z}$

■ $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi ; \quad k \in \mathbb{Z}$

■ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi ; \quad k \in \mathbb{Z}$

■ $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z') + 2k\pi$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi ; \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

$\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi . \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice résolu 8

Soit $u = -1 + i$ et $v = 1 + i\sqrt{3}$.

- a) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : uv ; $\frac{1}{v}$; $\frac{u}{v}$.
 b) Ecrire v^5 sous forme algébrique.

Solution

a) On a : $|u| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$$\text{soit } \theta = \text{Arg}(u), \text{ on a : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Donc : } u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

On a : $|v| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$;

$$\text{soit } \alpha = \text{Arg}(v), \text{ on a : } \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Donc : } v = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{On a : } \left| \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{2} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{v}\right) = -\arg(v) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left(\cos -\frac{\pi}{3} + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

$$\text{On a : } \left| \frac{u}{v} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \arg\left(\frac{u}{v}\right) = \arg(u) - \arg(v) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{Donc : } \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

$$\text{b) On a : } |v^5| = 2^5 = 32 \text{ et } \arg(v^5) = 5\arg(v) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{Arg}(v^5) = \frac{5\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc : } v^5 = 32 \left[\cos -\frac{\pi}{3} + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]. \text{ On a } \cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{donc } v^5 = 32 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16 - 16i\sqrt{3}.$$

Exercice 2.4

Ecrire sous forme trigonométrique :

$$- \left(\frac{9\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 2.5

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$

1. Déterminer le module et l'argument principale de

2. Ecrire sous forme algébrique.

3. En déduire les valeurs exactes de $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$

3 NOTATION EXPONENTIELLE

1. Définition

- Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Tout nombre complexe non nul z s'écrit : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta + 2k\pi$

Remarques :

- ◆ Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$: $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- ◆ Le module de $e^{i\theta}$ est 1 : $|e^{i\theta}| = 1$.
- ◆ Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$.

Exemples

$$e^{i0} = 1 ; e^{i\pi} = -1 ; e^{i\pi} = -1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} = i ; 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}.$$

2. Propriétés

Quels que soient les réels θ et θ' :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} ; \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} ; \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} ; (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Exemple

Soit $Z = \frac{1+i\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}$, calculer Z^{2011} .

◆ On a : $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;

soit $\theta = \arg(1+i)$, on a : $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

♦ On a : $|\sqrt{-1} - i| = \sqrt{1+1} = 2$;

soit $\alpha = \text{Arg}(\sqrt{-1} - i)$, on a : $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \frac{-1}{2}$ donc $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Donc :

$$\sqrt{-1} - i = 2 e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

♦ On a : $|\sqrt{-1} - \sqrt{-1}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

soit $\beta = \text{Arg}(\sqrt{-1} - \sqrt{-1})$, on a : $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Donc : } \sqrt{-1} - i = 2\sqrt{-1} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Alors : } Z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}} = e^{i(-\frac{\pi}{4})}, \text{ donc } 2011 e^{i(-\frac{2011\pi}{4})} \text{ et}$$

$$- \frac{2011\pi}{4} = - \frac{3\pi}{4} \pi,$$

$$\text{donc : } 2011 e^{i(-\frac{3\pi}{4})} = \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 3.1

$$-\sqrt{-1} - \sqrt{-1} \sqrt{-1} \quad 5$$

Ecrire sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes ,

3. Formules de Moivre et d'Euler

Propriétés

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n :

$$\cos n\theta = \cos^n \theta \quad \sin n\theta = \sin^n \theta \quad (\text{Formule de Moivre}).$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{Formule d'Euler}).$$

Remarque

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n :

$$e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos n\theta \quad e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin n\theta$$

Exemples

Linéariser $f(x) = \sin^3 x$, $g(x) = \cos^4 x$ et $h(x) = \cos^4 x \sin^2 x$.

♦ $f(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}^3$ On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton.

$$f(x) = \frac{1}{2i}^3 (e^{ix})^3 (-e^{-ix})^0 + (e^{ix})^2 (-e^{-ix})^1 + (e^{ix})^1 (-e^{-ix})^2 + (e^{ix})^0 (-e^{-ix})^3$$

$$f(x) = \frac{1}{-8i} (e^{i3x}) - (e^{i2x}) (e^{-ix}) + (e^{ix}) (e^{-i2x}) - (e^{-i3x})$$

$$f(x) = \frac{1}{-8i} (e^{i3x} - e^{-i3x}) - (e^{ix} - e^{-ix})$$

or $e^{i3x} - e^{-i3x} = 2i \sin x$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$
 donc : $f(x) = \frac{1}{-8i} (2i \sin x) - (2i \sin x) = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{3}{4} \sin x$.

$$\diamond g(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{16} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^0 + (e^{ix})^3 (e^{-ix})^1 + (e^{ix})^2 (e^{-ix})^2 + (e^{ix})^1 (e^{-ix})^3 + (e^{ix})^0 (e^{-ix})^4$$

$$g(x) = \frac{1}{16} (e^{i4x} + e^{i2x} + e^{-i2x} + e^{-i4x})$$

$$g(x) = \frac{1}{16} [e^{i4x} + e^{-i4x} + (e^{i2x} + e^{-i2x})]$$

$$\text{or } e^{i4x} + e^{-i4x} = 2 \cos 4x \text{ et } e^{i2x} + e^{-i2x} = 2 \cos 2x$$

$$\text{donc : } g(x) = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 2 \cos 2x) = \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\diamond h(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{32} (e^{i3x} - e^{-i3x}) + \frac{1}{32} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$h(x) = -\frac{1}{32} (e^{i3x} - e^{-i3x}) + \frac{1}{32} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$h(x) = -\frac{1}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos x - \frac{1}{8} \sin 3x + \frac{1}{8} \sin x$$

Exercice 3.2

Linéariser $f(x) = \cos^3 x + \cos^2 x$.

4 EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. Racines carrées d'un nombre complexe

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations : a) $z^2 = -1$ b) $z^2 = -4$ c) $z^2 = -5$ d) $z^2 = 2$

a) On sait que $i^2 = -1$ donc $z^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z+i) = 0$
 $\Leftrightarrow z-i = 0$ ou $z+i = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\{i; -i\}$. i et $-i$ sont appelées les **racines carrées** de -1 .

b) $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2^2 = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\{2i; -2i\}$. Les **racines carrées** de -4 sont $2i$ et $-2i$.

c) $z^2 = -5 \Leftrightarrow z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 + (\sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{5}i$ ou $z = -\sqrt{5}i$.

Donc l'ensemble des solutions est : $\{\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i\}$.

d) $z^2 = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$.
 Donc l'ensemble des solutions est : $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

Définition

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z_0 , toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = z_0$

Propriété

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Exercice 4.1

Vérifier que i est une racine carrée de -1 . Quelle est l'autre racine carrée de -1 ?

POINT METHODE Détermination sous forme algébrique des racines carrées

On pose : $z = x + iy$ avec x et y réels. $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $-1 = -1 + 0i$

$$z^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

Exercice résolu 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E), $z^2 = -20 - 48i$.

Solution

Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

$$z^2 = -20 - 48i, \text{ on a : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -20 \\ 2xy = -48 \end{cases}$$

$$(1)+(3) \Rightarrow 2x^2 = -48 \Rightarrow x^2 = -24 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 4 ;$$

$$\text{si } x = -4 \text{ alors } (2) \Rightarrow -8y = -48 \Rightarrow y = 6 \text{ alors } z = -4 + 6i ;$$

$$\text{si } x = 4 \text{ alors } (2) \Rightarrow 8y = -48 \Rightarrow y = -6 \text{ alors } z = 4 - 6i.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{-4 + 6i ; 4 - 6i\}$

Exercice résolu 10

Calculer sous forme algébrique les nombres complexes $1 + i^2$ et $1 - i^2$.

En déduire les racines carrées de $18i$ et $-5i$

Solution

On a : $1 + i^2 = 0$ et $1 - i^2 = 2$. D'où les racines carrées de $18i$ sont $3i$ et $-3i$.

$1 - i^2 = 2$ D'où les racines carrées de $-5i$ sont $\sqrt{\frac{5}{2}}(1 - i)$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}(1 - i)$.

$$\sqrt{\frac{5}{2}}(1 - i) \text{ et } -\sqrt{\frac{5}{2}}(1 - i)$$

2. Equations $az^2 + bz + c = 0, a, b, c \text{ complexes } (a \neq 0)$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$ alors Δ admet 2 racines carrées δ et $-\delta$: l'équation admet 2 solutions :
 $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Exercice résolu 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^2 - 2z - 5 = 0$;

b) $z^2 - 1 - 3iz - 6 - 9i = 0$.

Solutions

a) $\Delta = 4 - 40 = -36 = (-6i)^2$; une racine carrée de Δ est $6i$. Les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{-2-6i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; $z_2 = \frac{-2+6i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i ; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right\}$.

b) $\Delta = 1 - 4(-6+9i) = 16-30i$; déterminons une racine carrée δ de Δ .

Posons $\delta = x + iy$ avec x et y réels.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \end{cases} \quad |x - iy| = 34, \text{ on a : } \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

(1)+(3) $\Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5$;

si $x = 5$ alors (2) $\Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ alors $\delta = 5 - 3i$.

Les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{1+3i-5+3i}{2} = -2 + 3i$; $z_2 = \frac{1+3i+5-3i}{2} = 3 - i$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{-2 + 3i ; 3 - i\}$.

Exercice 4.2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $-(4+2i)z^2 - 7 - iz = 0$

Exercice résolu 12

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 - 11 - 2iz^2 - 217 - 7iz - 42 = 0$.

Sachant que (E) admet une solution réelle, la résoudre.

Posons $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - iz^2 - iz - 7$.

Posons $z = x$, avec x réel.

x est solution de (E) $\Leftrightarrow P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - ix^2 - ix - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - ix^2 - x - ix - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - i - x^2 - x$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x - i = 0 \\ -x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

0 n'est pas solution de (1). On a : $3^3 - 3^2 - 3 - i = 27 - 9 - 3 - i = 14 - i \neq 0$. Donc 3 n'est pas solution du système. Donc 7 est solution de (E).

$P(z)$ se factorise par $z-7$: $P(z) = (z-7)(az^2 + bz + c)$.

Développons $(z-7)(az^2 + bz + c) : (z-7)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 7az^2 - 7bz - 7c = az^3 + (b-7a)z^2 + (c-7b)z - 7c$

Une identification donne :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 7a = -i \\ c - 7b = -7 \end{cases}, \text{ on trouve : } a = 1 ; b = -4-2i ; c = 6$$

Donc : $P(z) = (z-7)(z^2 - 4 - iz)$. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 7$ ou $z^2 - 4 - iz = 0$

Soit (E') : $z^2 - 4 - iz = 0$ le discriminant de (E') est :

$\Delta' = (-i)^2 - 4 \cdot (-4) = -1 + 16 = 15$. Trouvons une racine carrée de Δ' . Posons $\delta = x + iy$ avec x et

$$y \text{ réels. } \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 15 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{15}$$

$$(1)+(3) \Rightarrow 2x^2 = 15 \Rightarrow x^2 = \frac{15}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

si $x = \sqrt{\frac{15}{2}}$ alors $y = 0 \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{15}{2}}$

Les solutions de l'équation (E') sont : $z_1 = \frac{4+2i-2-4i}{2} = 1-i$; $z_2 = \frac{4+2i+2+4i}{2} = 3+3i$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7 ; 1-i ; 3+3i\}$.

Exercice 4.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + (1 - 6i)z^2 + (-7 + i)z + 20 - 4i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

5 RACINE N-IEMES D'UN NOMBRE

COMPLEXE NON NUL

Théorème et définition

Soit z_0 un nombre complexe non nul et n un entier tel que $n \geq 2$. L'équation $z^n = z_0$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions qui sont appelées **les racines n-ièmes de z_0** .

■ Si $r = |z_0|$ et $\theta = \arg(z_0) + 2k\pi$, alors les racines n-ièmes de z_0 sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

■ Si $n \geq 3$, les points M_k d'affixe z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrits dans le cercle (C) de centre $O(0;0)$ et de rayon $\sqrt[n]{n}$.

Remarque

Pour $n \geq 2$, la somme des n racines n -ième de l'unité est égale à 0

CAS PARTICULIERS

■ Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont : $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Elles sont appelées **les racines n -ièmes de l'unité**.

■ Si on connaît une solution u de l'équation (E) : $z^n = 1$, z_0 ,

alors $(E) \Leftrightarrow z^n = u^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{u}\right)^n = 1$ donc $\frac{z}{u}$ est une racine n -ième de l'unité ; d'où $\frac{z}{u} = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$

ou encore $z = u e^{i \frac{2k\pi}{n}}$.

Ainsi, toutes les solutions de (E) s'obtiennent en multipliant une solution particulière de (E) par les racines n -ièmes de l'unité.

Exercice résolu 13

Soit l'équation (E) : $z^3 = 1$.

Résoudre (E) et représenter les points images des solutions.

Solution

On a : $|1| = 1$ et $\text{Arg}(1) = 0$; posons $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z) + 2k\pi$.

$$\text{Alors } z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ \alpha = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{1} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(E) admet 3 solutions qui sont z_0, z_1, z_2 :

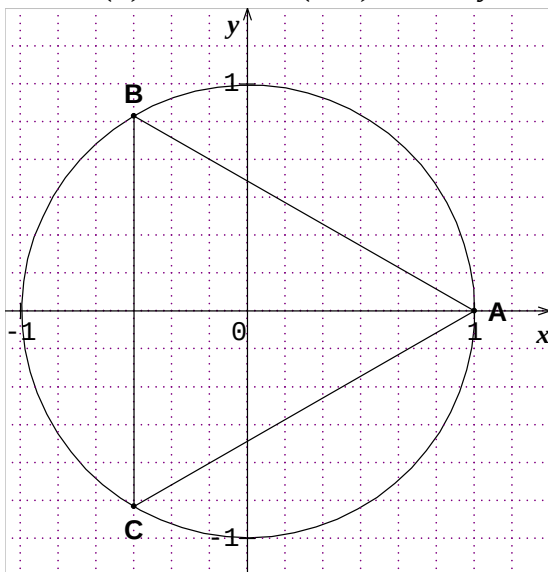
$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Le nombre}$$

complexe $-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ est noté souvent j , ainsi : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{1; j; \bar{j}\}.$$

Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 , les points A, B et C appartiennent au

cercle $(\mathcal{C})$ de centre $O(0;0)$ et de rayon 2 . Le triangle ABC est équilatéral.



b) Déterminer les racines quatrièmes de $-8 - 8\sqrt{3}i$ et représenter les images de ces racines quatrièmes.

On a : $|-8 - 8\sqrt{3}i| = 16$.

$$\text{Soit } \theta = \text{Arg}(-8 - 8\sqrt{3}i) : \begin{cases} \cos\theta & \frac{-8}{16} & \frac{-1}{2} \\ \sin\theta & \frac{-8\sqrt{3}}{16} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

posons $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z) + 2k\pi$.

$$\text{Alors } z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 & \frac{2\pi}{3} & k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \alpha & \frac{2\pi}{3} & k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r & \sqrt[4]{16} \\ \alpha & \frac{\pi}{6} & \frac{k\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

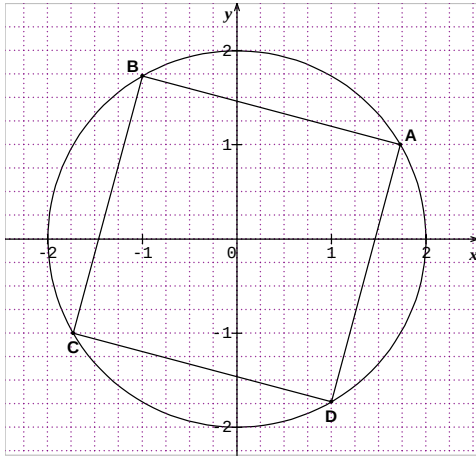
(E) admet 4 solutions qui sont z_0, z_1, z_2, z_3 :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \sqrt{2} - i, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -i\sqrt{2}, \quad z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{2} - i, \\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt{2} - i, \quad e^{i\frac{-\pi}{3}} = -i\sqrt{2}.$$

l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{\sqrt{2} - i; -i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i; \sqrt{2} - i\}.$$

Soit A, B, C, D les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3 les points A, B, C et D appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre $O(0;0)$ et de rayon 2 . Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.



Exercice résolu 14

Soit l'équation (E) $z^3 - 2 = 0$

Sachant que 2 est une solution de (E) déterminer toutes les solutions de (E).

Solution

On a $2^3 = 8$ donc 2 est solution de (E).

Les racines cubiques de l'unité sont j et $\bar{j}$. On en déduit que les solutions de (E) sont :
 $2j$ et $2\bar{j}$

6 UTILISATION EN GEOMETRIE

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Propriété 1

Soit deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B :

■ $\arg(\vec{z_B - z_A}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

■ $\arg(\vec{z_A - z_B}) = \arg(z_A - z_B) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Exemple

a) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

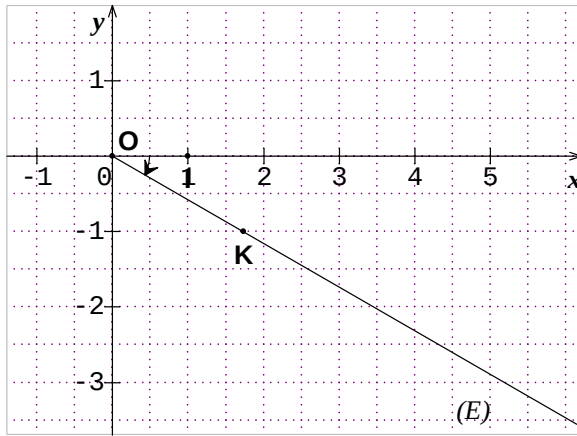
$\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que :

$\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$.

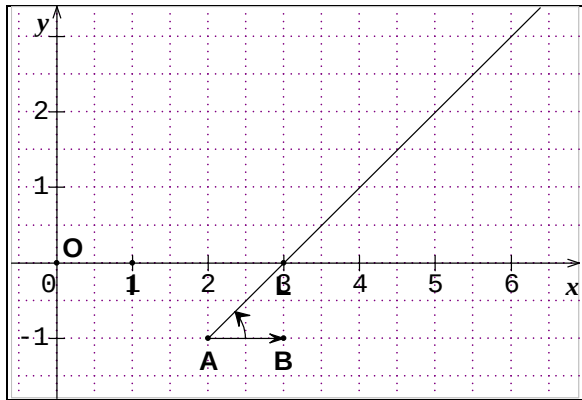
Solution

1) Soit M le point d'affixe z : $M \in (E) \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arg(\vec{z - 0}) = -\frac{\pi}{6}$



Soit K un point tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OK}) = -\frac{\pi}{6}$, (E) est la demi-droite $[OK)$ privée de K .

2) Soit M le point d'affixe z et $A(2-i)$: $M \in (F) \Leftrightarrow \text{Arg}(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$



Soit L un point tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{AL}) = \frac{\pi}{4}$, (F) est la demi-droite $[AL)$ privée de A .

Propriété 2

Soient C, D 4 points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ d'affixes respectives A, B, C, D :

$$\blacksquare \mid \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}$$

$$\blacksquare \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Exercice résolu 15

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

a) Justifier que : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Solution

$$\text{On a : } \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = \frac{BC}{BA} \quad \text{et} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \text{Mes } \widehat{BA \vec{BC}}.$$

$$\text{On a : } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})} = \frac{9+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On a : } \left| \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{BC}{AB} = 1, \quad \text{donc} \quad BC = BA \quad (1).$$

$$\text{Soit } \theta = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ alors : } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ donc :}$$

$$\text{Mes } \widehat{BA \vec{BC}} = \frac{\pi}{3} \quad (2).$$

De (1) et (2) on déduit que le triangle ABC est équilatéral.

Propriété 3

Soient A, B, C, D 4 points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$:

$$\blacksquare (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \text{ est un imaginaire pur non nul}$$

$$\blacksquare (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \text{ est un réel non nul}$$

$$\blacksquare A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un réel non nul}$$

Propriété 4

■ Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \text{ est un imaginaire pur non nul}$$

■ Le triangle ABC est rectangle en A et isocèle si et seulement si

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -1$$

■ Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exemple

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $u = 1$, $v = -1+2i$ et $w = -1-2i$.

Calculer : $\frac{w-u}{v-u}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

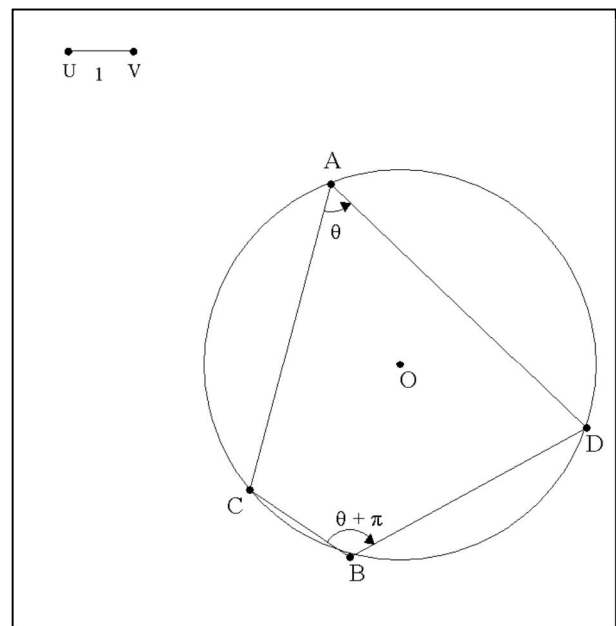
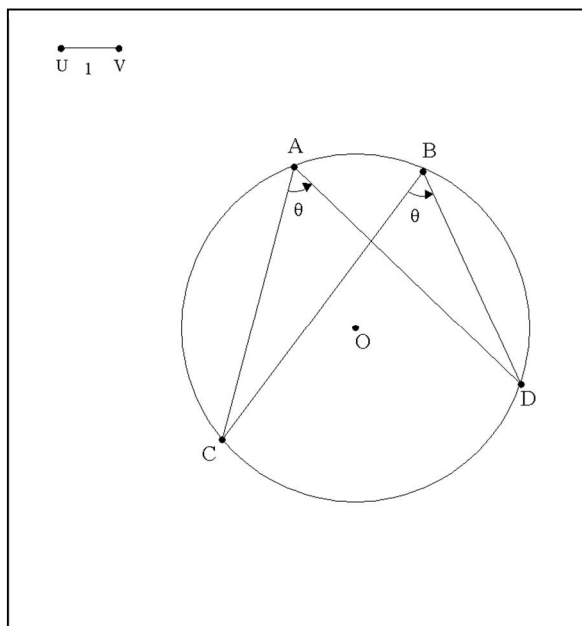
On a : $\frac{w-u}{v-u} = \frac{-1-2i-1}{-1+2i-1} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{(-1-i)(-1-i)}{2}$ ainsi, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ donc le triangle ABC est isocèle rectangle en A .

Propriété 5

Soient C, D 4 points distincts tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D :

■ A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

■ $\Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right)$



Exercice résolu 16

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $-2i, -i, i, i$.

Calculer a^4 et ia^4 .

2. En déduire les solutions de E .

Solution

1. Écrivons a sous forme trigonométrique : On a : $|a| = \sqrt{\frac{3}{2}} = 2$;

$$\text{soit } \alpha = \text{Arg}(a), \text{ on a : } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$a = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \text{ donc}$$

$$a^4 = 16 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 16 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

$$\text{On a : } (ia)^4 = (i^4)(a^4) = (a^4) \text{ car } (i)^4 = (i)^2 \times (i)^2 = 1. \text{ Donc } (ia)^4 = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

2. D'après la question précédente, a et ia sont des solutions de (E) . On remarque d'autre part que si z_0 est solution de (E) alors $-z_0$ est aussi solution de (E) du fait que : $(-z)^4 = z^4$. Alors on en déduit les deux autres solutions de (E) qui sont : $-ia$; $-a$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \{a ; ia ; -a ; -ia\}$.

Exercice résolu 18

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation E , $z^3 - (6 - i\sqrt{3})z^2 - (11 - 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1a) Démontrer que 1 et 3 sont des solutions de l'équation (E) .

b) Résoudre (E) .

2. Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O I J$.

a) Placer les points A, B, C, E et G d'affixes respectives 3 ; $2+i\sqrt{3}$; -1 ; 7 ; $11+4i\sqrt{3}$.

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

c) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

Solution

$$1a) \text{ Posons pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (6 - i\sqrt{3})z^2 - (11 - 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$$

$$\text{On a : } P(1) = 1 - 6 - i\sqrt{3} + 11 + 4i\sqrt{3} - 6 - 3i\sqrt{3} = 12 - 12 - 4i\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} = 0.$$

$$\text{On a : } P(3) = 27 - 54 - 9i\sqrt{3} + 33 + 12i\sqrt{3} - 6 - 3i\sqrt{3} = 60 - 60 - 12i\sqrt{3} + 12i\sqrt{3} = 0. \text{ D'où 1 et 3 sont solution de } (E).$$

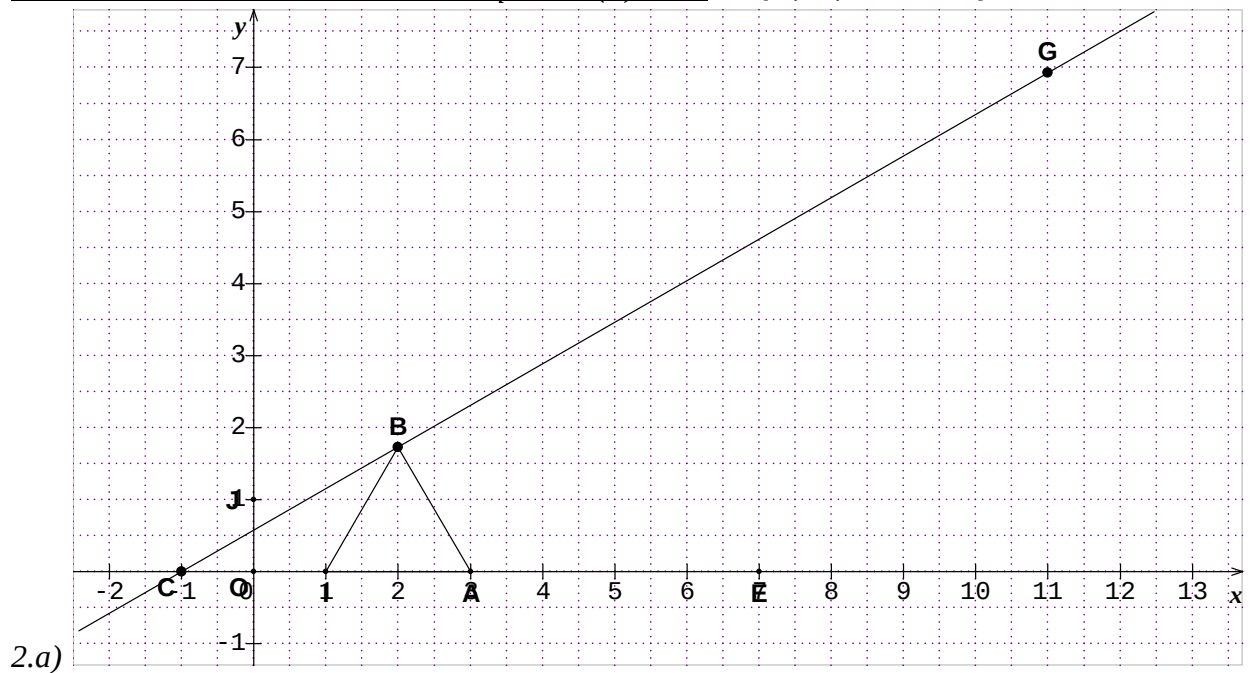
b) Factorisons $P(z)$ par $(z-1)(z-3) = z^2 - 4z + 3$. Déterminons les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2 - 4z + 3)(az + b)$.

$$(z^2 - 4z + 3)(az + b) = az^3 + bz^2 - 4az^2 - 4bz + 3az + 3b = az^3 + (b - 4a)z^2 + (3a - 4b)z + 3b. \text{ Une identification donne :}$$

$$\begin{cases} a = a \\ b - 4a = -6 - i\sqrt{3} \\ a - 4b = 12 + 4i\sqrt{3} \\ b = -6 - i\sqrt{3} \end{cases} \text{ , on trouve : } a = 1 ; b = -2 - i\sqrt{3}$$

Donc : $P(z) = (z-1)(z-3)(z-2-i\sqrt{3})$. D'où : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = 3$ ou $z = 2-i\sqrt{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{1; 3; 2-i\sqrt{3}\}$.



b) On a : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_G} = \frac{2+i\sqrt{3}-1}{2+i\sqrt{3}-11-4i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-9-3i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-9-3i\sqrt{3}} \cdot \frac{-9+3i\sqrt{3}}{-9+3i\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$; $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_G}$ est un réel non nul donc les points B, C et G sont alignés.

c) on a : $IA = |3-1| = 2$; $IB = |2-i\sqrt{3}-1| = |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$; $AB = |3-(2-i\sqrt{3})| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. Ainsi, $IA = IB = AB$ donc le triangle IAB est équilatéral.

EXERCICES

E1 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$
1.a) Représenter les points R, S, T, U d'affixes respectives $i, i, -i, -1 - i$.

b) Déterminer la nature du quadrilatère RSTU.

2. Soit I, J, K, L les points d'affixes respectives $-i, i, -i, -$.

a) Placer les points I, J, K et L.

b) Démontrer que le quadrilatère IJKL est un losange

E2 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$

1.a) Soit $\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2 .

b) Soit A, B, C les points images respectifs des complexes 1, j et j^2

Placer les points A, B et C. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Placer G et déterminer l'affixe de G.

E3 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$
 Soit les points D, P, E, I d'affixes respectives $i, (1 - \sqrt{2})i, 2 - \sqrt{2}, i$.

1) Placer les points D, P et E.

2) Déterminer que les points D, P et E appartiennent à un même cercle de centre I.

E4 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$
 $A = i$ et $B = -i$.

z est un nombre complexe différent de i .
 On note M le point du plan complexe d'affixe z . On pose : $Z = \frac{z+4i}{z-4i}$

1. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.

2. Déterminer et construire l'ensemble E_2

des points M d'affixe z tels que z soit un imaginaire pur.

3. Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que Z .

E5 Soit $z_1 = -\sqrt{2}i$ et $z_2 = i$.

Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres

complexes : $z_1, z_2, \bar{z}_1, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_1 z_2, \frac{z_1^2}{z_2}$.

E6 On pose $u = \sqrt{2}i$. Calculer u^7 .

E7 Soit $u = 1 - i$; $v = 1 - \sqrt{2}i$ et $w = \frac{u^5}{v^4}$.

1. Calculer le module et l'argument principal de u , v et w .

2. Ecrire u^5, v^4 et w sous forme algébrique.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

E8 Ecrire les nombres complexes suivant sous forme trigonométrique :

$-i, i, \frac{3-i}{2+i}$

E9 On pose : $a = \sqrt{2} + \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - \sqrt{2})$

1. Calculer a^2 .

2. En déduire le module et l'argument principal de a^2 puis en déduire le module et l'argument principal de a .

3. Déterminer les entiers naturels n tels que a^n soit un imaginaire pur.

E 10 Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

a) $(z + 1 - 2i)(\bar{z} + 1 + 2i) = 4$.

b) $z - i$

c) $z - \bar{z} = i$

d) $|(\sqrt{2} - i)z - i\sqrt{2}|$

E 11 Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

a) $\text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$ **b)** $\text{Arg } \bar{z} = \frac{\pi}{3}$

c) $\text{Arg } z - i = \frac{\pi}{2}$.

E12

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$.

On considère les points $A B C$ d'affixes respectives $a = -\sqrt{3} - i$, $b = -\sqrt{3} - i$, $c = \sqrt{3} - i$.

1 a) Déterminer le module et l'argument principal des complexes a b et c .

b) Utiliser ces résultats pour placer les points $A B$ et C .

2a) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$

b) En déduire la nature du triangle ABC .

E13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -$

2. $z^3 = i$

3. $z^4 =$

E14

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 =$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de

l'équation : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 =$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $O \vec{u} \vec{v}$. L'unité graphique est 5 cm.

a) Placer les points $A B$ et C d'affixes respectives : $a = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ et $c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

b) Démontrer que les points $O A B$ et C sont cocycliques.

E15

Déterminer les racines carrées des nombres complexes $-7 - i$; $\sqrt{3} - i$; -25 ; $-i$; $3+4i$;

E16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1) $z^2 = i$ $z = i$

2) $z^2 = i$ $z = 5 - i$

E 17

Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - (6 + 9i)z^2 + (45i - 9)z + 54 - 54i$$

1. Calculer P

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) =$

E 18

Pour tout complexe z , on pose:

$$P(z) = z^3 - (\sqrt{3} - i)^2 (z - i).$$

Vérifier que $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

E19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation après avoir montré qu'elle admet une solution imaginaire pure.

1) $z^3 - 4z^2 - 8z - i = 0$

2) $z^3 - 2z^2 - i = 0$

3) $z^3 - i - 2z - i = 0$

E20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation après avoir montré qu'elle admet une solution réelle.

1) $z^3 - 2z^2 - 3z - i = 0$

2) $z^3 - 2z^2 - i = 0$

3) $z^3 - (6+9i)z^2 + (-9+45i)z + 54 - 54i = 0$

E 21. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - z^3 - z^2 - z - i.$$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

E22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1) $z^6 - i - z^3 - 1 - i = 0$;

2) $z^4 - z^2 =$

3) $z^4 - 3 - i z^2 - i = 0$

E 23

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $u^3 = i^{\frac{2\pi}{3}}$
On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2. Justifier que pour tout réel α , on a :

$$1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0.$$

a) Justifier que si le nombre complexe z est solution de (E) alors $\bar{z}$ est aussi solution de (E).

b) Résoudre (E)

(On pourra poser $v = (z-1)^3$).

c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

E 24

1.a) Déterminer les racines carrées de $-28 - 96i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$Z^2 - iZ - i = 0.$$

2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}i.$$

b) Calculer $(1-3i)^2$ puis Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$l'équation : z + \frac{1}{z} = \frac{3-i}{2}.$$

3. Soit $P(z)$ le polynôme :

$$P(z) = 4z^4 - (6+4i)z^3 + (11+9i)z^2 - (6+4i)z + 4$$

a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

E 25

On considère l'équation : (E):

$$z \in \mathbb{C}, z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 = 0.$$

1. Justifier que $1+i$ est une solution de (E).

2.a) Démontrer que si z_0 est solution de (E)

alors $\bar{z}_0$ est aussi solution de (E).

b) En déduire une autre solution de (E).

3. Démontrer que si z_0 est solution de (E)

alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E).

4. Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E).

E 26 Linéariser le polynôme trigonométrique

$f(x)$

$$1. f(x) = \cos^3 x$$

$$2. f(x) = \sin^3 x \cos(2x)$$

$$3. f(x) = \sin^4 x$$

$$4. f(x) = \sin^6 x + \cos^4 x \sin^2 x.$$

E 27 On considère la suite de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 0, z_1 = i \text{ et } z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \text{ pour } n \geq 2.$$

1. Exprimer $z_n - z_{n-1}$ en fonction de i et de n

2. Démontrer que : $z_n = \frac{1-i}{2} (i^n - 1)$ pour tout $n \geq 0$.

E 28 On considère le plan complexe muni

d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$

On considère la suite de points M_n d'affixes respectives z_n définies par :

$z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

1. Démontrer que : $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n$ et que

$$\arg z_{n+1} - \arg z_n = \frac{\pi}{3}$$

2. a) Calculer $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.

b) En déduire $\arg z_{n+1} - \arg z_n = \frac{\pi}{3}$.

c) En déduire que $|z_{n+1}| = \frac{1}{2} |z_n|$.

3. Utiliser les résultats précédents pour

placer les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

4. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels z_n est un réel.

E 29

On considère le plan complexe muni d'un

repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$. Unité : 2 cm.

A et B sont les points d'affixes respectives $2+2i$ et $2-2i$.

On considère l'application f qui à tout point M distinct de O et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{z}$.

1. Calculer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par f .

Placer les points A, B, A' et B' sur la figure.

2. Démontrer que pour tout point M distinct

de O, les points O, M et M' sont alignés et que $OM' = OM = 1$.

3. a) Démontrer que pour tout complexe z non nul, on a : $|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1-2\bar{z}'}{z} \right| = 2$.

b) En déduire que :

$$|z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - z' \right| = |z'|.$$

c) Soit (C) le cercle de centre I d'affixe 2 et de rayon 2.

Soit M un point de (C) distinct de O.

Démontrer que le point M' appartient à une droite (D) dont on donnera une équation.

Tracer (C) et (D).

E 30 On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $O \vec{u} \vec{v}$. On prendra 2 cm pour unité graphique. A, B et D sont les points d'affixes respectives i , $-2i$; 1.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$), associe le point M'

d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}z$.

1) Soit E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Démontrer que E a pour affixe

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

2) Ecrire sous forme algébrique l'affixe du point D' image de D par f .

3.a) Démontrer que pour tout nombre complexe z ($z \neq i$), on a :

$$(z' + 2i)(z - i) = 1.$$

b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$), on a :

$$BM' \times AM = 1 \text{ et}$$

$$\arg(z' - i) = -\arg(z - i) + 2k\pi,$$

($k \in \mathbb{Z}$)

4.a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question

3.b), placer le point E' image de E par f .

5) Quelle est la nature du triangle BD'E' ?

3. NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)

I. TRANSFORMATIONS DU PLAN

Définition 1

On appelle transformation du plan une bijection du plan dans lui-même.

Exemples : La symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la rotation, la translation, l'homothétie.

Définition 2 :

Soit f une transformation du plan, M un point du plan d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par f . L'application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui à z associe z' est appelée écriture complexe de f .

Remarque :

Donner l'écriture complexe d'une transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' c'est exprimer z' en fonction de z .

II. ECRITURE COMPLEXE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS DU PLAN

Considérons les points M d'affixe z et M' d'affixe z' .

a) La translation

Soit b un nombre complexe et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b .

Considérons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z' - z = b$$

$$\Leftrightarrow z' = z + b.$$

l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est $z' = z + b$

Propriété

Une transformation du plan est une translation si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z' = z + b$ $b \in \mathbb{C}$.

Exemple : l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe i est $z' = z + i$

b) La symétrie centrale

Soit A le point d'affixe z_A et S_A la symétrie centrale de centre A.

$$\begin{aligned} S_A(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AM'} \\ &\Leftrightarrow z - z_A = -(z' - z_A) \\ &\Leftrightarrow z - z_A = -z' + z_A \\ &\Leftrightarrow z = -z' + 2z_A \end{aligned}$$

L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A est: $z' = -z + 2z_A$;

Propriété

Une transformation du plan est une symétrie centrale si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z' = -z + b$ $b \in \mathbb{C}$

Exercice résolu 1

- 1) Soit A le point d'affixe $1 - 3i$. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A .
- 2) Déterminer la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = -z + i$.

Solution

- 1) L'écriture complexe de S_A est de la forme $z' = -z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_A(A) = A &\Leftrightarrow z_A = -z_A + b \\ &\Leftrightarrow b = 2z_A \\ &\Leftrightarrow b = 2 - 6i \end{aligned}$$

Donc l'écriture complexe de S_A est $z' = -z + 2 - 6i$.

- 2) $z' = -z + i$ est l'écriture complexe d'une symétrie centrale .

Déterminons son centre $\Omega(\omega)$

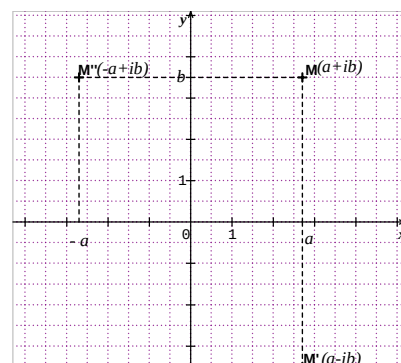
$$\begin{aligned} \text{On a } S_{\Omega}(\Omega) = \Omega &\Leftrightarrow \omega = -\omega + 2 - 6i \\ &\Leftrightarrow 2\omega = 2 - 6i \\ &\Leftrightarrow \omega = 1 - 3i \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = -z + i$ est la symétrie centrale de centre $\Omega(1 - 3i)$.

c) Symétries orthogonales par rapport aux axes du repère .

La symétrie orthogonale par rapport à l'axe (OI) des abscisses a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$

La symétrie orthogonale par rapport à l'axe (OJ) des ordonnées a pour écriture complexe $z' = -\bar{z}$



d) Homothétie de rapport $k \in \mathbb{R} \setminus 0$

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k .

M est le point d'affixe z et $M'(z')$ est l'image de M par h .

$$\begin{aligned} h(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \\ &\Leftrightarrow z = kz + \omega - k\omega \\ &\Leftrightarrow z = kz + \omega(1 - k) \end{aligned}$$

Posons $b = \omega(1 - k)$, on a alors $z = kz + b$.

Propriété

Une transformation du plan est une homothétie de rapport k si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z = kz + b$ $b \in \mathbb{C}$.

Remarque : Si le centre de h est O alors l'écriture complexe de h est de la forme $z = kz$.

Exercice résolu 2

- 1) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(i)$ et de rapport 2.
- 2) Déterminer la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = -z + i$.

Solution

1) L'écriture complexe de h est de la forme $z' = 2z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} h(\Omega) = \Omega &\Leftrightarrow i = 2i + b \\ &\Leftrightarrow 1 - i = i + b \\ &\Leftrightarrow b = -i \end{aligned}$$

Donc l'écriture complexe de h est $z' = 2z - i$.

2) $z' = -z + i$ est l'écriture complexe d'une homothétie de rapport -3.

Déterminons son centre $\Omega(\omega)$.

$$\begin{aligned} h(\Omega) = \Omega &\Leftrightarrow \omega = -\omega + i \\ &\Leftrightarrow 4\omega = 1 + 5i \\ &\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation du plan ayant pour écriture complexe $z' = -z + i$ est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i)$ et de rapport -3.

e) Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Soit R la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ .

$$\begin{aligned} \text{Si } M \neq M', R(M) = M' &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega M' \text{ et } \text{Mes}(\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \theta \\ &\Leftrightarrow z' - \omega = z - \omega \text{ et } \text{Arg}\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg}\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \\
&\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \\
&\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} z + \omega - e^{i\theta} \omega \\
&\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} z + b \quad \text{avec} \quad b = \omega - e^{i\theta} \omega
\end{aligned}$$

Théorème

L'écriture complexe d'une rotation d'angle θ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.
 Une transformation du plan est une rotation **d'angle non nul** si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z \mapsto az + b$ avec $a = 1$, $a \neq 1$ et $b \in \mathbb{C}$.

Remarque

L'angle de la rotation est $\arg(a)$ et son centre Ω a pour affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.
 Si le centre de la rotation est O alors l'écriture complexe est de la forme $z' = az$.

Exercice résolu 3

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre $A(1-i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
- 2) Déterminer la transformation du plan dont l'écriture est $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$.

Solution

1) L'écriture complexe de r est de la forme $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$,
 soit $z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + b$

Déterminons b .

$$\begin{aligned}
r(A) = A &\Leftrightarrow 1 - i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) + b \\
&\Leftrightarrow b = 1 - i - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) \\
&\Leftrightarrow b = \frac{2 - 2i - 1 + i\sqrt{3} - 1 - i}{2} \\
&\Leftrightarrow b = \frac{2 - 2i - 1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow b = \frac{2 - 2i - 1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow b = \frac{1 - \sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})}{2}
\end{aligned}$$

Donc l'écriture complexe de r est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1 - \sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})}{2}$.

2) L'écriture complexe $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$ équivaut à $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 1$, et la transformation correspondante est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Déterminons son centre $\Omega(\omega)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \omega &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\omega \Leftrightarrow \omega - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\omega = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega\left(1 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega = \frac{2}{3-i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation du plan ayant pour écriture complexe $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z + 1$ est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{6}\right)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

TABLEAU RECAPITULATIF

Transformations du plan	Caractérisations géométriques	Ecritures complexes
Symétrie orthogonale d'axe (OI)	*Si $M \in (OI)$, $M' = M$ *Si $M \notin (OI)$ alors (OI) est médiatrice de $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)	*Si $M \in (OJ)$, $M' = M$ *Si $M \notin (OJ)$ alors (OJ) est médiatrice de $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre O		$z' = -z$
Symétrie centrale de centre Ω		$z' = -z + b \quad b \in \mathbb{C}$
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$		$z' = z + b \quad b \in \mathbb{C}$
Homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$)		$z' = kz + b \quad b \in \mathbb{C}$
Rotation de centre Ω et d'angle θ	*Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$ *Si $M \neq \Omega$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'})} = \theta \end{cases}$	$e^{i\theta}z + b \quad b \in \mathbb{C}$

EXERCICES

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J)

E₁

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont l'écriture complexe est donnée.

$$\begin{array}{l} z \mapsto z + i \\ z \mapsto -z + i \\ z \mapsto z + i \\ z \mapsto -iz \\ z \mapsto iz + z \end{array}$$

E₂

Déterminer l'écriture complexe de chacune des

transformations suivantes :

- 1) L'homothétie de centre $A(i)$ et de rapport 3.
- 2) La rotation de centre $B(-i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

4. ISOMETRIES PLANES

ACTIVITE

Les translations, rotations, symétries orthogonales, symétries centrales, homothéties sont des applications du plan dans lui-même rencontrées dans les classes antérieures.

Parmi ces applications quelles sont celles qui conservent la distance ?

I) ISOMETRIES

Définition

Une isométrie plane est une application du plan dans le plan qui conserve la distance.

Exemples :

- Les translations, les symétries orthogonales, les rotations sont des isométries planes.
- Une homothétie de rapport k tel que $k \neq 1$ n'est pas une isométrie plane.

Propriété

Toute isométrie plane est une bijection du plan dans lui-même.
On dit que les isométries sont des transformations du plan.

II) PROPRIETES

1 Conservation du produit scalaire

Propriété

Soit f une isométrie. A, B, C et D quatre points du plan.

Si $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$ et $f(D) = D'$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

On dit que les isométries conservent le produit scalaire.

Preuve

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= -\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} + \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2} \\
 &= -\frac{A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2}{2} + \frac{A'B'^2 + A'D'^2 - B'D'^2}{2} \quad (\text{conservation de la distance}) \\
 &= -\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} \\
 \text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}
 \end{aligned}$$

2 Conservation du barycentre

Propriété

Soit f une isométrie, $A_i \alpha_i \ 1 \leq i \leq n$ n points pondérés tels que la somme des coefficients α_i soit non nulle, $A'_i (1 \leq i \leq n)$ l'image de A_i par f , G un point et G' son image par f .
 G est le barycentre des points pondérés $A_i \alpha_i \ 1 \leq i \leq n$ si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés $A'_i \alpha_i \ 1 \leq i \leq n$.
 On dit que les isométries conservent le barycentre.

Exercice résolu 1

Soit f une isométrie plane, (O, I, J) un repère orthonormé et O', I', J' les images respectives de O, I, J par f .

Démontrer que (O', I', J') est un repère orthonormé.

On considère un point M de coordonnées $(x ; y)$ dans (O, I, J) et un point M' de coordonnées $(x ; y)$ dans (O', I', J') .

a Justifier que $M = \text{bar} \{(O ; 1-x-y), (I ; x), (J ; y)\}$.

b Démontrer que $f(M) = M'$.

Solution

1) (O, I, J) est un repère orthonormé $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ et $OI = OJ$. Or f est une isométrie donc

$\overrightarrow{O'I'} \perp \overrightarrow{O'J'}$ $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ conservation du produit scalaire et $O'I' = OI = O'J'$ (conservation de la distance). Par suite (O', I', J') est un repère orthonormé.

2) a) on a $M(x ; y)$ dans (O, I, J) alors $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OI} + y \overrightarrow{OJ}$
 ainsi $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OM} + (1-x-y) \overrightarrow{MO}$ $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OI} + y \overrightarrow{OJ}$

Par conséquent $(1-x-y) \overrightarrow{MO} = x \overrightarrow{OI} + y \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM}$, et comme $1-x-y \neq 0$ alors $M = \text{bar} \{(O ; 1-x-y), (I ; x), (J ; y)\}$.

b) M' de coordonnées $(x ; y)$ dans (O', I', J') alors $M' = \text{bar} \{(O' ; 1-x-y), (I' ; x), (J' ; y)\}$ d'après la question précédente. Posons $M_1 = f(M)$ alors $M_1 = \text{bar} \{(O' ; 1-x-y), (I' ; x), (J' ; y)\}$ (conservation du barycentre). Ainsi M_1 et M' sont barycentres des mêmes points pondérés d'où $M_1 = M'$ car le barycentre de points pondérés donnés est unique. Par suite $f(M) = M'$.

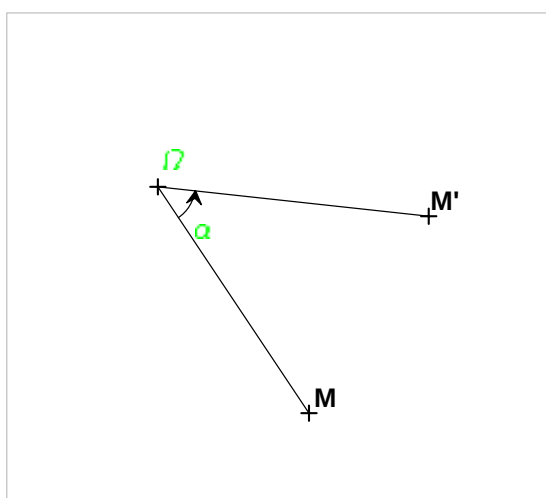
III COMPOSITION D'ISOMETRIES

1 Rotation (rappel)

Etant donné un point Ω du plan et un nombre réel α , on appelle rotation de centre Ω et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

■ Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$

■ Si $M \neq \Omega$ alors $\Omega M = \Omega M'$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



2. Composée de deux symétries orthogonales (rappels)

2 1 Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Propriété

Soit (D_1) et (D_2) deux droites parallèles, O_1 un point de (D_1) et O_2 son projeté orthogonal sur (D_2) . La composée $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1 O_2}$.

2 2 Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété

Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point O , de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La composée $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ est la rotation de centre O d'angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

2 3 Décomposition de translation

Propriété

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Pour toute droite (D_1) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (D_2) et une seule telle que : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{\vec{u}}$

Preuve

Existence

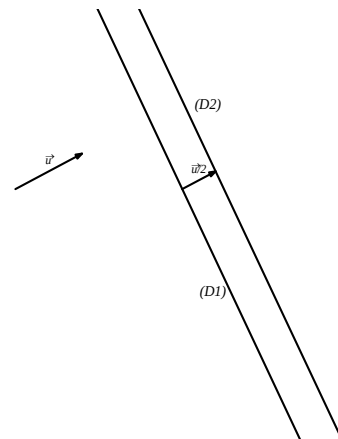
Soit (D_2) l'image de (D_1) par $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$. En utilisant la propriété de la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles on a $S_{D_2} \circ S_{D_1} = t_{\vec{u}}$. (D_2) est donc définie.

Unicité

Supposons qu'il existe une droite (D_3) telle que $S_{D_3} \circ S_{D_1} = t_{\vec{u}}$. Mais alors (D_3) est l'image de (D_1) par $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ qui est une bijection donc (D_1) et (D_3) sont confondues.

D'où l'unicité (D_2) .

Remarque : Il existe aussi une unique droite (Δ) telle que $S_{D_1} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}}$. Dans ce cas (Δ) est l'image de (D_1) par $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$.



A retenir :

La translation de vecteur non nul $\vec{u}$ est donnée. On a $t_{\vec{u}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ telle que :

- Si D_1 est donnée de vecteur normal $\vec{u}$, alors $D_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D_1)$
- Si D_2 est donnée de vecteur normal $\vec{u}$, alors $D_1 = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D_2)$

2 4 Décomposition de rotation

Propriété

Soit r une rotation de centre O et d'angle α . Pour toute droite (D_1) passant par O , il existe une droite (D_2) et une seule telle que : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = r$

Preuve

Existence

Soit (D_2) l'image de (D_1) par $r \circ \frac{\alpha}{2}$. En utilisant la propriété de la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécantes on a : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = r \circ \frac{\alpha}{2}$. (D_2) est donc définie.

Unicité

Supposons qu'il existe une droite (D_3) telle que $S_{D_3} \circ S_{D_1} = r \circ \frac{\alpha}{2}$

On a : $S_{D_2} \circ S_{D_1} = S_{D_3} \circ S_{D_1}$

Ainsi $S_{D_2} \circ S_{D_1} \circ S_{D_1} = S_{D_3} \circ S_{D_1} \circ S_{D_1}$

$S_{D_2} \circ S_{D_1} \circ S_{D_1} = S_{D_3} \circ S_{D_1} \circ S_{D_1}$
 Donc $S_{D_2} = S_{D_3}$. Les droites (D_2) et (D_3) sont confondues.

Remarque : Il existe aussi une unique droite (Δ) telle que $S_{D_1} \circ S_{\Delta} = r(O, \alpha)$. Dans ce cas (Δ) est l'image de (D_1) par $r(O, -\frac{1}{2}\alpha)$.

A retenir

La rotation de centre O et d'angle α est donnée. On a $r(O, \alpha) = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ telle que :

- Si D_1 est une droite donnée passant par O, alors $D_2 = r(O, \frac{1}{2}\alpha)(D_1)$
- Si D_2 est une droite donnée passant par O, alors $D_1 = r(O, -\frac{1}{2}\alpha)(D_2)$

Exercice résolu 2

ABCD est un rectangle de sens direct. I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC].

$\alpha = \text{mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$.

Compléter les décompositions suivantes :

a) $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{IJ} \circ \dots \dots \dots \circ S_{AC}$

b) $t_{\overrightarrow{AD}} \circ \dots \dots \dots \circ S_{IJ}$ d) $r(O, \alpha) = S_{DB} \circ$

Construire les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) , et (D_4) telles que

a) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{AD} \circ S_{D_1}$ c) $r(D, \frac{\pi}{2}) \circ S_{DC} \circ S_{D_3}$

b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{D_2} \circ S_{AD}$ d) $r(D, \frac{\pi}{2}) \circ S_{D_4} \circ S_{DC}$

Solution

1 a Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal à la droite (IJ) et $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} \circ IJ = AB$ donc $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{IJ} \circ S_{AB}$

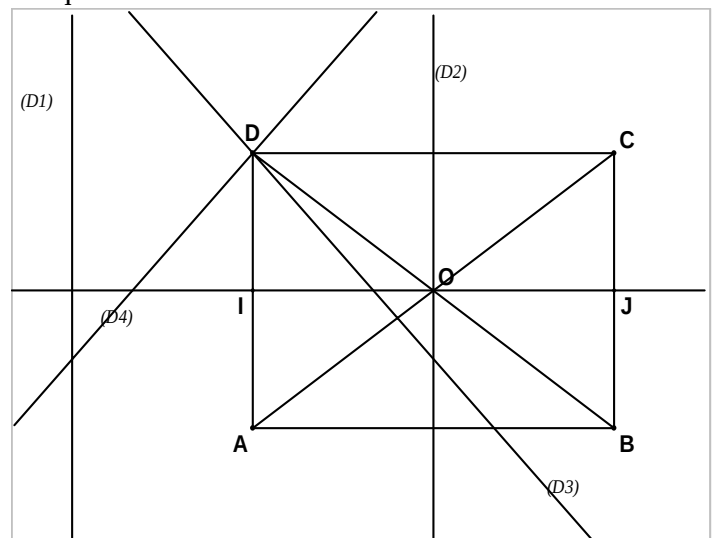
b Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal à la droite (IJ) et $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} \circ IJ = DC$ donc $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{DC} \circ S_{IJ}$

c La droite (AC) passe par O et $r(O, \frac{\alpha}{2}) \circ AC = IJ$ donc $r(O, \alpha) = S_{IJ} \circ S_{AC}$

d La droite (AC) passe par O et $r(O, -\frac{\alpha}{2}) \circ DB = IJ$ donc $r(O, \alpha) = S_{DB} \circ S_{IJ}$.

on a $D_1 = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \circ AD$ $D_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} \circ AD$

$r(D, -\frac{\pi}{4}) \circ DC = D_3$ et $r(D, \frac{\pi}{4}) \circ DC = D_4$



3 Composition de rotations (rappels)

3 1 Composée de rotation de même centre

Propriété

Si r et r' sont deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' alors $r' \circ r$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

Remarque : Si r et r' sont deux rotations de même centre alors $r' \circ r = r \circ r'$

3 2 Composée de rotation de centres distincts

Propriété

Soit r_1 et r_2 deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs α_1 et α_2

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.
- Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

Preuve

Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des rotations r_1 et r_2

Décomposons r_1 et r_2 avec la droite (O_1O_2) . on a $r_1 = S_{O_1O_2} \circ S_{D_1}$ où D_1

$r_{O_1 - \frac{1}{2}\alpha_1} \quad O_1O_2$ et $r_2 = S_{D_2} \circ S_{O_1O_2}$ où $D_2 = r_{O_2 \frac{1}{2}\alpha_2} \quad O_1O_2$. Ainsi

$$r_2 \circ r_1 = [S_{D_2} \circ S_{O_1O_2}] \circ [S_{O_1O_2} \circ S_{D_1}]$$

$$= S_{D_2} \circ S_{O_1O_2} \circ S_{O_1O_2} \circ S_{D_1}$$

$$= S_{D_2} \circ S_{D_1}$$

Soit $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de D_1 tel que $\widehat{(\vec{u}_1, \overrightarrow{O_1O_2})} = \frac{\alpha_1}{2} = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de D_2 tel que $\widehat{(\overrightarrow{O_1O_2}, \vec{u}_2)} = \frac{\alpha_2}{2} = q\pi$ $q \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} = \widehat{(\vec{u}_1, \overrightarrow{O_1O_2})} + \widehat{(\overrightarrow{O_1O_2}, \vec{u}_2)} \text{ alors}$$

$$\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = k'\pi \text{ avec } k' = k + q$$

Mais, $D_1 \parallel D_2$ si et seulement si l'angle $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$ est nul ou plat.

$$D_1 \parallel D_2 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = k''\pi \quad k'' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = k''\pi$$

Ainsi, si $\alpha_1 + \alpha_2 = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alors $D_1 \parallel D_2$ et $r_2 \circ r_1$ est une translation

Et si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors D_1 et D_2 sont sécantes en un point O et $r_2 \circ r_1$ est une rotation de centre O et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

Remarque : En général $r_2 \circ r_1 \neq r_1 \circ r_2$.

4. Composée d'une rotation et d'une translation

Propriété

Si r est une rotation d'angle α non nul et t une translation alors $t \circ r$ est une rotation d'angle α

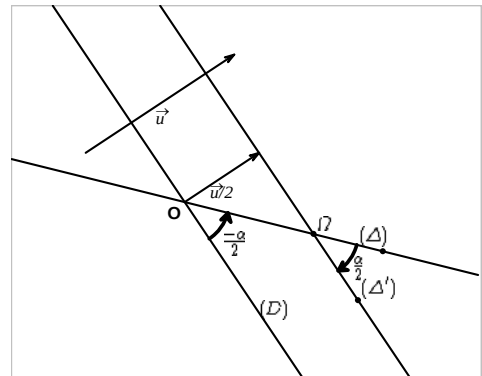
Preuve

Soit O le centre de la rotation r et $\vec{u}$ le vecteur de la translation t .

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t \circ r = r$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ considérons la droite (D) passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$ et les droites (Δ) et (Δ') telles que :

$$t = S_{\Delta'} \circ S_D \text{ avec } \Delta \perp \frac{1}{2}\vec{u} \text{ et } r = S_D \circ S_{\Delta} \text{ avec } (\Delta) \perp r_{O-\frac{1}{2}\alpha}[(D)]$$

On a $t \circ r = S_{\Delta'} \circ S_D \circ S_D \circ S_{\Delta} = S_{(\Delta')} \circ [S_D \circ S_D] \circ S_{\Delta}$
 $t \circ r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ Or (Δ) et (D) sont sécantes en O et $(D) \parallel (\Delta')$ donc (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point Ω . Par suite $t \circ r = r(\Omega, \alpha)$.



Remarque

- On démontre de la même manière que $r \circ t$ est une rotation d'angle α
- En général $r \circ t \neq t \circ r$

Point méthode

Détermination du centre d'une rotation

- Si A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une rotation r et que les médiatrices des segments AA' et BB' sont sécantes en un point Ω , alors Ω est le centre de la rotation r .
- Si A est un point non invariant d'image A' par une rotation r d'angle θ non nul, alors le centre Ω de la rotation r est l'unique point vérifiant :
 $\Omega A = \Omega A'$ et $\widehat{(\Omega A, \Omega A')} = \theta \quad k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- Si la rotation r d'angle non nul est décomposée en deux symétries orthogonales d'axes (D) et (D') alors le centre de r est le point d'intersection de (D) et (D') .

Exercice résolu 2

$ABCD$ est un carré de sens indirect et de centre O . On note r_A, r_C, r_D et r_O les rotations de centres

respectifs A, C, D et O et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_A \circ r_C, r_A \circ r_O, r_A \circ r_D$ et $t_{\overline{BA}} \circ r_C$

Solution

♦ Nature et élément caractéristique de $r_A \circ r_C$

La somme des angles de r_A et r_C est

$$t \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

donc $r_A \circ r_C$ est une translation.

De plus $r_A \circ r_C = S_{AB} \circ S_{AC} \circ S_{AC} \circ S_{DC}$

Donc $r_A \circ r_C = S_{AB} \circ S_{DC} = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

♦ Nature et élément caractéristique de $r_A \circ r_O$

On a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

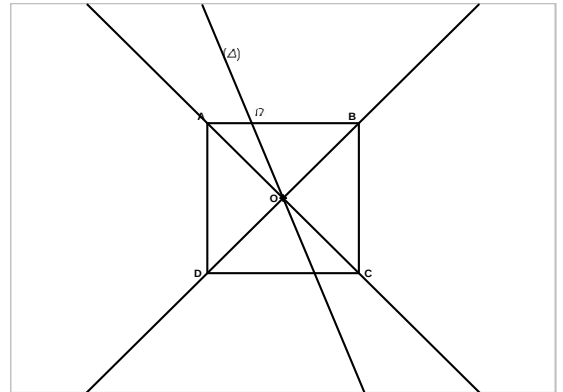
donc $r_A \circ r_O$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

De plus $r_A \circ r_O = S_{AB} \circ S_{AO} \circ S_{AO} \circ S_{\Delta}$

où $\Delta = r_{\left(O - \frac{\pi}{8}\right)} AO$. Ainsi $r_A \circ r_O = S_{AB} \circ S_{\Delta}$

$r_A \circ r_O$ est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre Ω

où $\{\Omega\} = AB \cap \Delta$.



Nature et élément caractéristique de $r_A \circ r_D$

On a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $r_A \circ r_D$ est une symétrie centrale

De plus $r_A \circ r_D = D \rightarrow B$ par suite $r_A \circ r_D = S_O$ car O est le milieu de BD .

Nature et élément caractéristique de $t_{\overrightarrow{BA}} \circ r_C$

$t_{\overrightarrow{BA}} \circ r_C$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

De plus $D = t_{\overrightarrow{BA}} \circ r_C C$ et $A = t_{\overrightarrow{BA}} \circ r_C D$ donc

Le centre de $t_{\overrightarrow{BA}} \circ r_C$ est l'intersection des médiatrices des segments CD et AD donc le point O .

5. Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Activité 1

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$, M' l'image de M_1 par S_{Δ} et M_2 l'image de M par S_{Δ} .

a Démontrer que $(M_1 M) \parallel (\Delta)$

b Prouver que $M' = t_{\vec{u}}(M_2)$

c En déduire que $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

d Démontrer que $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant (utiliser un raisonnement par l'absurde)

Soit (D) une droite dont $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur, A un point de (D) , $A_1 = t_{\vec{u}}(A)$, $A' = S_D(A_1)$

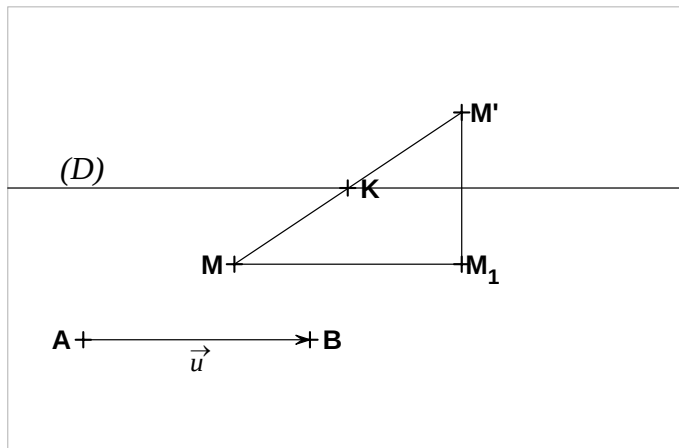
- a Peut-on avoir $A' = A_1$? Justifier.
 b En déduire que $t_{\vec{u}} \circ S_D \neq S_D \circ t_{\vec{u}}$.

Théorème et définition

Si Δ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ alors $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ et la composée $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est appelée **symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$** .

Point méthode

Détermination de l'axe (D) et du vecteur $\vec{u}$ d'une symétrie glissée



■ Si M et N sont deux points distincts donnés d'images respectives M' et N' par la symétrie glissée f alors **l'axe (D) de f est droite KL** où K et L sont les milieux respectifs des segments MM' et NN'

■ Soit f une symétrie glissée et $\vec{u}$ son vecteur.

Si $f \circ f$ alors $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}$

Propriété 1

Une symétrie glissée n'admet pas de point invariant.

Activité 2

Soit (Δ) une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

Déterminer et construire la droite (D) telle que $t_{\vec{u}} = S_D \circ S_{\Delta}$.

Démontrer que la composée $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale. Préciser l'axe de symétrie.

Activité 3

Soit (Δ) une droite et un vecteur non nul $\vec{u}$ qui n'est pas normal à (Δ) .

Supposons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) , quelle est la nature de $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$?

Supposons que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (Δ)

Soit $\vec{v}$ un vecteur normal à (Δ) et $\vec{w}$ un vecteur directeur de (Δ) tel que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$,

a Déterminer et construire la droite (D) telle que $t_{\vec{v}} = S_D \circ S_{\Delta}$

b Démontrer $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée dont on précisera l'axe et le vecteur.

Propriétés 2

Soit (Δ) une droite et un vecteur non nul $\vec{u}$.

- Si $\vec{u}$ est normal à (Δ) , alors $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale.
- Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ) , alors $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée.

Remarque :

- On établit de la même manière que $S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée.
- si $\vec{u}$ est vecteur non nul et n'est pas un vecteur directeur de (Δ) alors $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \neq S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

6) Composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation

Activité 4

Soit (Δ) une droite, O un point de (Δ) et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1. Déterminer et construire la droite (D) telle que $r \circ \frac{\pi}{3} = S_D \circ S_{\Delta}$.
2. Démontrer que la composée $r \circ S_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale. Préciser son axe.

Activité 5

Soit (Δ) une droite, O un point n'appartenant pas à (Δ) et r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Tracer la droite (D) parallèle (Δ) passant par O et construire le point H projeté orthogonal de O sur (Δ) .
2. Déterminer et construire la droite (D') telle que $r \circ -\frac{\pi}{2} = S_{D'} \circ S_D$.
3. Démontrer $r \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée dont on précisera l'axe et le vecteur
4. Soit $O' = S_{\Delta}(O)$. Démontrer que $r \circ S_{\Delta} \neq S_{\Delta} \circ r$.

Propriétés

Soit (Δ) une droite et r une rotation de centre O .

- Si $O \in (\Delta)$, alors $r \circ S_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale.
- Si $O \notin (\Delta)$, alors $r \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée

Remarque :

- On établit de la même manière que $S_{\Delta} \circ r$ est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée.
- En général $r \circ S_{\Delta} \neq S_{\Delta} \circ r$.

Exercice résolu 3

Soit ABCD un losange de sens direct, de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) = \frac{\pi}{3}$ E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ et F le projeté orthogonal de I sur (BC)

Soit s la symétrie glissée d'axe (BD) et de vecteur $\overrightarrow{BF}$.

- a Déterminer les images des points A, B et I par s .
- b Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s^{-1} .

a Démontrer que $f = S_{(\text{BC})} \circ t_{\overline{\text{BI}}}$. Quelle est la nature de f ?
 b Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

[illegible]

$b \text{ s}^{-1}$ est la symétrie glissée d'axe (BD) et de vecteur $\vec{b}$

$f \quad S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{IB}}$ or le vecteur $\overrightarrow{\quad}$ n'est pas normal à (BC) donc f

$$b \text{ on } t_{\overleftarrow{IB}} = t_{\overleftarrow{IF}} \circ t_{\overleftarrow{FB}} \text{ et } S_{(BC)} \circ t_{\overleftarrow{IF}} = S_{(\Delta)} \circ t_{-\frac{1}{2}\overleftarrow{IF}} \text{ donc } f = S_{(\Delta)} \circ t_{\overleftarrow{FB}}.$$

Ainsi f est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$

1 Isométries admettant trois points invariants non alignés

Soit f une isométrie admettant trois points invariants non alignés A, B et C ; M un point du plan et $M' = f(M)$.

En déduire la nature de f ?

Une isométrie du plan qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identique.

2 Isométries distinctes de l'identité admettant deux points invariants

Activité 7

Soit f une isométrie distincte de l'identité admettant deux points invariants distincts A et B .

Soit C un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB) et $C' = f(C)$.

- Justifier que $C \neq C'$.
- Démontrer que (AB) est la médiatrice de $[CC']$.
Soit s la symétrie orthogonale d'axe (AB) . Posons $g = s \circ f$.
- Déterminer les images des points A , B et C par g .
- Quelle est la nature de g ?
- En déduire la nature de f et caractériser f .

Propriété

Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identique, est la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

3 Isométries admettant un point invariant unique

Activité 8

Soit f une isométrie admettant un unique point invariant A .

Soit B un point du plan distinct de A et $B' = f(B)$.

- Justifier que $B \neq B'$.
- Démontrer que $A \in (d)$ médiatrice de $[BB']$.
) Soit s la symétrie orthogonale d'axe (d) et $g = s \circ f$.
- Déterminer les images des points A et B par g .
- Justifier que g ne peut être l'application identique et déduire sa nature.
- Quelle est la nature de f ?

Propriété

Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A est une rotation de centre A .

4 Isométries sans point invariant

Activité

Soit f une isométrie n'admettant aucun point invariant ; A un point du plan et $A' = f(A)$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et $g = t \circ f$.

Démontrer que g admet au moins un point invariant.

Démontrer que g n'est pas une rotation d'angle non nul.

En déduire la nature de f .

Propriété

Une isométrie du plan qui ne laisse aucun point invariant est soit une translation, soit une symétrie glissée.

Exercice résolu 3

Soit Γ un polygone régulier et O son centre de gravité.

Démontrer que, si f est une isométrie laissant globalement invariant Γ , alors O est invariant par f

En déduire que toute isométrie laissant globalement invariant Γ est une rotation ou une symétrie orthogonale.

Solution

1. O est centre de gravité de Γ . Comme f est une isométrie laissant invariant Γ et que les isométries conservent les barycentres, alors O est invariant par f .
2. Toute isométrie laissant globalement invariant Γ admet au moins O comme point invariant. Donc elle est soit une rotation (l'application identique est une rotation d'angle nul), soit une symétrie orthogonale.

V DEPLACEMENT, ANTIDÉPLACEMENT

1 Définition

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé

2 Propriétés

- Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement
- Tout déplacement est une translation ou une rotation
- Tout antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.
- La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement
- La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement

3 Composition de déplacement et d'antidéplacement

- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

TABLEAU DE CLASSIFICATION DES ISOMETRIES

Condition sur l'isométrie f	Points invariants	Déplacement	Antidéplacement
	Trois non alignés	L'application identique du plan : $I_d P$	
f est distincte de l'application identique	Deux points distincts A et B		La symétrie orthogonale d'axe (AB) .
	Un seul point Ω	Une rotation de centre Ω	
	Aucun point	Une translation de vecteur non nul	Une symétrie glissée.

VI DETERMINATION D'UNE ISOMETRIE

Activité 9

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $AB \neq A'B'$ et $A \neq B$.

Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Déterminer une isométrie f transformant A en A' et B en B' .

Supposons que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. soit r la rotation de centre A' et d'angle $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'B'})}$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{A'E}$ et $E = t(B)$.

a Posons $f = r \circ t$. Déterminer f .

b Démontrer que $\widehat{(\overrightarrow{A'E}, \overrightarrow{A'B'})} = \alpha$ et $A'E = A'B'$

c En déduire f est une rotation transformant A en A' et B en B' .

Soit g un déplacement transformant A en A' et B en B'

a Déterminer $f^{-1} \circ g$ et $f^{-1} \circ g$.

b En déduire la nature de $f^{-1} \circ g$ puis que $f = g$.

NB : Ainsi A, B, A' et B' étant quatre points du plan tels que $AB \neq A'B'$ et $A \neq B$, il existe un unique déplacement f transformant A en A' et B en B' .

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors f est une translation

Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ alors f est une rotation.

Soit s la symétrie orthogonale d'axe (AB)

a Quelle est la nature de $f \circ s$?

b Déterminer $f \circ s(A)$ et $f \circ s(B)$

c En utilisant le raisonnement de la question 3) démontrer $f \circ s$ est l'unique antidéplacement transformant A en A' et B en B' .

Propriétés

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $AB \neq A'B'$ et $A \neq B$.

- Il existe un unique déplacement transformant A en A' et B en B'.
- Il existe un unique antidéplacement transformant A en A' et B en B'.

Exercice résolu

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. on désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Déterminer deux isométries f et g transformant A en B et B' en C'.

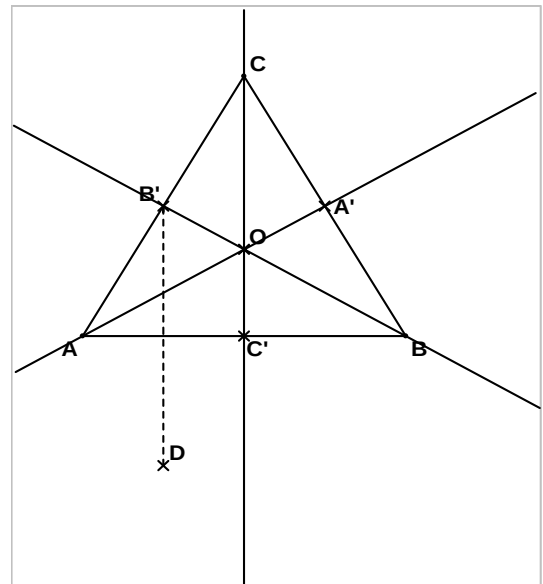
Préciser les images des points C et A' par chacune de ces isométries.

Solution

ABC est un triangle équilatéral alors [AB'] et [B'C] sont des hauteurs et ont la même longueur de plus $A \neq B'$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{B'C}$ donc il existe une unique rotation f transformant A en B et B' en C' et un unique antidéplacement g $f \circ S_{(AB')}$ $S_{(BC')} \circ f$.

Ainsi f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On a $f(A) = B$ et $f(B') = C'$. Aussi $g(C) = f \circ S_{(AB')}(C) = f(C')$ et $g(A') = S_{(BC')} \circ f(A') = S_{(BC')}(C)$ D



Exercice résolu 4

Dans le plan orienté, on considère le triangle isocèle ABC tel que:

$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4}$. Soit I le point tel que le triangle CAI est rectangle en C et $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra

On appelle r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$

- a Déterminer les images respectives des points A et B par f .
- b Démontrer que f est une rotation et préciser son angle.

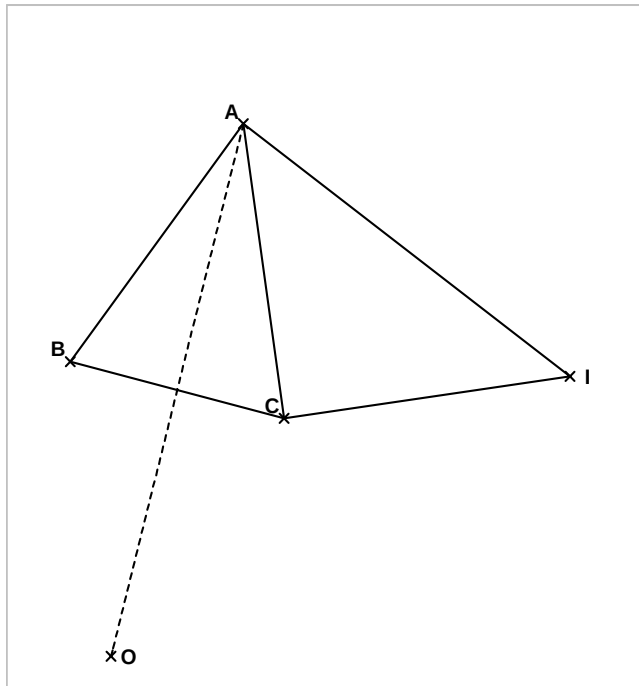
Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

On appelle O le symétrique de A par rapport à (BC).

- a Démontrer que le quadrilatère ABOC est un losange.
- b Démontrer que O appartient à la médiatrice de
- c En déduire que O est le centre de la rotation f

Solution

1.



2. On a $f = r_C \circ r_A$

a On a $r_A : A \rightarrow A$ et $r_C : A \rightarrow I$ alors $f : A \rightarrow I$; $r_A : B \rightarrow C$ et $r_C : C \rightarrow C$ donc $f : B \rightarrow C$.

b f est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles est $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \neq \pi$ donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. On a $(\widehat{AB \ AI}) = (\widehat{AB \ AC}) - (\widehat{AC \ AI})$
donc $\text{mes}(\widehat{AB \ AI}) = \text{mes}(\widehat{AB \ AC}) - \text{mes}(\widehat{AC \ AI}) = k\pi (k \in \mathbb{Z})$
 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$
 $\text{mes}(\widehat{AB \ AI}) = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ Ainsi $\text{Mes}(\widehat{AB \ AI}) = \frac{\pi}{2}$.

a O est le symétrique de A par rapport à (BC) alors $BA = BO$ et $CA = CO$ or $BA = CA$ (le triangle ABC est isocèle en A) donc $BA = BO = CA = CO$ d'où ABOC est un losange.

b ABOC est un losange alors $AB \parallel CO$ or $AB \perp AI$ d'après la question 3) donc $CO \perp AI$ ainsi CO est une hauteur du triangle CAI. De plus le triangle CAI est isocèle en C par conséquent (CO) est la médiatrice de [AI].

c Comme ABOC est un losange alors $BO = CO$ donc O appartient à la médiatrice de [BC]. Mais O appartient aussi à la médiatrice de [AI] (d'après la question 4b) donc O est le point d'intersection des médiatrices des segments [BC] et [AI]. De plus $f : A \rightarrow I$ et $f : B \rightarrow C$

Par suite O est le centre de f .

EXERCICES

E1. On considère un carré ABCD de sens direct. I , J , K et L les milieux respectifs des cotés AB , BC , CD , DA et O le centre du carré.

Déterminer la nature de chaque transformation et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

1. $f : t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$
2. $f : S_{AC} \circ S_{BD}$
3. $f : S_{AC} \circ S_{AB}$
4. $f : S_{AC} \circ S_{IJ}$
5. $f : r_{O, \frac{\pi}{2}} \circ r_{(A, -\pi/2)}$
6. $f : r_{(D, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$
7. $f : r_{(C, \frac{\pi}{2})} \circ S_D \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$

E2

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I , tel que $\widehat{Mes \overrightarrow{AD}} = \frac{\pi}{2}$.
Etant donné un point M du segment $[BD]$ distinct de B et de D , on appelle N , P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB) , (AD) et (DC) .

- On considère les isométries suivantes :
- r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$;
 - r' la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et
 - t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
- a Déterminer $r' \circ t$ et $r' \circ t$
 - b Préciser la nature de $r' \circ t$
 - c En déduire que $r' \circ t = r$.
 - a Déterminer $t(N)$
 - b Démontrer que $r(N) = P$.
 - c En déduire que $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$.
 - d Démontrer que : $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD}$.
 - e En déduire que $(MC) \perp (NP)$.
- Soit M' le symétrique par rapport à la droite (NP) .

- a Démontrer que les points N , P et M' appartiennent au cercle de diamètre $[AM]$.
- b Prouver que les points M , C et M' sont alignés.
- c En déduire que le point M' appartient au cercle circonscrit au carré ABCD.

E3

Soit OAB un triangle isocèle en O , P un point variable du segment $[AB]$, $P \neq A$ et $P \neq B$. La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B' .

Démontrer que A', B', P sont alignés.

- a En déduire qu'il existe une rotation r transformant O en B et A' en B' .
- b Démontrer que r est une rotation et déterminer le centre Ω de cette rotation.

Démontrer que les points O , A' , B' et Ω sont cocycliques.

E4

Soit (D) une droite, A et B deux points extérieurs à cette droite. A tout point M de (D) , on associe le point M' , second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle de centre B et de rayon BM . Déterminer et construire le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit (D) .

E5

Soit ABC un triangle et I un point du segment $[AB]$. Construire un triangle équilatéral IJK tel que $J \in AC$ et $K \in BC$.

E6

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB , rectangle isocèle en O . On note

- r_A , r_B les rotations de centre respectifs A et B , d'angle $\frac{\pi}{2}$, S_O la symétrie centre O .

Placer un point C non situé sur la droite (AB) et construire les carré BEDC et ACFG.

a Déterminer $S_{AO} \circ S_{AB}$.

b Démontrer que $r_A \circ r_B = S_O$.

a Déterminer l'image de E par $r_A \circ r_B$

b En déduire que O est le milieu de [EF].

On note $r_F = r_D$ les rotations de centres respectifs F et D, et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

a Trouver l'image de C par $r_F \circ S_O \circ r_D$.

b Déterminer la transformation $r_F \circ S_O \circ r_D$.

Placer H le symétrique de D par rapport à O.

a Justifier que $r_F = r_D$.

b Prouver que le triangle FOD est rectangle isocèle en O.

E7

Dans un plan orienté on considère un losange ABCD tel que

$$\text{et } \widehat{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}.$$

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].

On note Δ la médiatrice de [AB] et Δ' celle de [CD].

Soit f l'isométrie du plan définie par

$$f(A) = I, f(B) = J \text{ et } f(C) = K.$$

a Prouver que f est un antidéplacement.

b Démontrer que f est une symétrie glissée.

Soit S_{Δ} la symétrie d'axe Δ et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a Démontrer que $f = r \circ S_{\Delta}$

b A-t-on $f = S_{\Delta} \circ r$?

Soit S_{BC} la symétrie d'axe BC .

a Déterminer l'axe de la symétrie s telle que $r = S_{BC} \circ s$

b En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = S_{BC} \circ t_1$ où t_1 est une translation dont on précisera le vecteur.

Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, on pose $g = t_2^{-1} \circ f$

a Déterminer $g = g \circ g$.

Déterminer g .

b En déduire l'axe et le vecteur de f .

E8

Soit le repère orthonormal direct $O \vec{u} \vec{v}$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définies par leurs affixes respectives : $Z_A = 3 - i\sqrt{3}$, $Z_B = i\sqrt{3}$, $Z_C = \sqrt{3} + i$

Faire la figure en choisissant pour unité 2cm.

Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct.

Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'abbixe de G.

Démontrer qu'il existe une rotation transformant O en G et A en C.

Déterminer l'angle de la rotation et son centre.

a) Démontrer que $(OA) \perp (GC)$.

b) En déduire que les point G, B et C sont alignés.

Soit a et b deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'abbixe z associe le point M' d'abbixe z' tel que $z' = \frac{az + b}{az + b}$.

a Déterminer a et b pour que

$$b f = f \circ b.$$

c Démontrer que f est une isométrie.

d Soit I le milieu du segment [OG].

Déterminer le point $f(I)$.

Justifier que f est un antidéplacement.

e f est-elle une symétrie orthogonale ?

f Sans faire de calcul construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f puis celle de G par f .

E9

ABC et AB'C' sont deux triangles rectangles isocèles en A et directs. Démontrer que

E10

ABC est un triangle équilatéral direct de centre O. Déterminer $h \circ g \circ f$ et construire h si

$$f: r_1 \left(\frac{\pi}{3} \right), g: r_2 \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

3. $f: r \left(\frac{2\pi}{3} \right), g: S_{AO}$

E11

ABC est un triangle direct.

Construire les triangles AIB et ACJ équilatéraux directs

Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en K, en utilisant une rotation et une translation. En déduire que le triangle BCK est équilatéral.

Démontrer que

E12

OABC est un parallélogramme. On considère les triangles isocèles AIB et CJB tels que

$\text{mes}(\overrightarrow{AOI}) \equiv \text{mes}(\overrightarrow{CJO}) \equiv \beta$, r est la rotation de centre O et d'angle β , t la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$

Démontrer que $t \circ r \circ t'$ est une rotation d'angle β qui transforme I en J et A en K.

Justifier que $r = t \circ r \circ t'$

E13

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $O \vec{u} \vec{v}$

on considère la transformation t de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \sqrt{x} \end{cases}$$

a Exprimer z' l'affixe de M' en fonction de l'affixe z de M .

b Quelle est la nature de t ?

Soit la transformation f , qui au point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \left(-z - \frac{i\sqrt{z}}{2} \right)$$

Reconnaître la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Soit la transformation $f \circ t$, qui au point $M(x; y)$ d'affixe z associe le point $M_2(x_2; y_2)$ d'affixe z_2 .

a Exprimer z_2 en fonction de z , puis x_2 et y_2 en fonction de x et y .

b Quelle est l'image par $f \circ t$ du point

$C(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3})$?

c Soit (D) la droite dont une équation est $\sqrt{y} = x$.

Montrer que $C \in (D)$.

d On note (D') l'image (D) par $f \circ t$, quel est le point d'intersection de (D) et (D') ?

E14

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre I et de sens direct. On note $\mathcal{C}$ le cercle passant par A, B, C et D. faire une figure. (on prendra $\frac{\pi}{4}$).

On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$;

r_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$;

r_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On désire caractériser les transformations

$$f = t \circ r_D, g_1 = r_1 \circ f, g_2 = r_2 \circ f$$

Démontrer que f, g_1 et g_2 sont des rotations dont on précisera l'angle.

Déterminer f et f^{-1} . quel est le centre de f ? Déterminer g_1 et g_2 .

Soit A'_1 g_1 et A'_2 g_2

a Démontrer, en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$ que A est le milieu du segment $[A'_1 A'_2]$.

b Démontrer, en calculant $\text{mes}(\overrightarrow{A'_1 A'_2})$, que A'_1 est sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2 .

a Prouver que J et K appartiennent à $\mathcal{C}$ et qu'ils sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure.

b Démontrer que A'_1 est sur la droite (JB). Placer A'_1 et A'_2 sur la figure.

E15

A et B sont deux points du plan orienté, tels que

On note

r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_1 et r_2

Placer un point M sur la figure et construire M_1 et M_2

Le but de cette question est de démontrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe I.

On pose $f = r_1 \circ r_2^{-1}$

a Déterminer f .

b Montrer que f est une symétrie centrale.

c En déduire que le milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe I que l'on précisera sur la figure.

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $O \vec{u} \vec{v}$ tel que A et B aient pour affixes respectives -3 et 3.

On note z_1 et z_2 les affixes respectives de M_1 et M_2 .

M est un point du plan, distinct de A et de B, d'affixe z .

a Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z .

b Montrer que $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{\frac{z-3}{z+3}}$.

c En déduire que :

$\arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right) = \arg\left(i\sqrt{\frac{z-3}{z+3}}\right)$

$\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

et $\frac{MM_2}{MM_1} = \sqrt{\frac{MB}{MA}}$.

d Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés.

5. SIMILITUDES DIRECTES

ACTIVITE 1 : A la découverte d'une similitude directe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité 1 cm.

Partie A

Soit h l'homothétie de centre O , de rapport $-\frac{1}{2}$ et r la rotation de centre P d'affixe $-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r \circ h$.

1. Soit M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f .

- a. Démontrer que $M'N' = 2MN$.
- b. Justifier que f conserve les angles orientés.
- c. f est-elle une isométrie ? Justifier.

2. Justifier que l'écriture complexe :

- de r est $z' = iz - 4 - i$
- de h est $z' = -\frac{1}{2}z$

3. Déterminer les images M' et N' du point O respectivement par f et $h \circ r$.

4. A-t-on $r \circ h = h \circ r$? Justifier.

5. a. Démontrer que l'écriture complexe de f est $z' = -\frac{1}{2}iz - 4 - i$.

b. f est-elle une homothétie ? Justifier.

NB : Ainsi, l'application f n'est ni une isométrie ni une homothétie. Elle conserve les angles orientés et multiplie les distances par 2. On dit que f est une similitude directe de rapport 2.

Partie B

1. Démontrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe.

2. Soit h' l'homothétie de centre Ω et de rapport 2 et r' la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

- a. Déterminer les écritures complexes de h' et r' .
- b. En déduire les écritures complexes de $r' \circ h'$ et $h' \circ r'$.
- c. Vérifier que $f = r' \circ h' = h' \circ r'$.

NB : La décomposition $f = r' \circ h' = h' \circ r'$ est appelée décomposition canonique de la similitude directe f . On dit que f est la similitude directe de centre Ω , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

I) DEFINITION

Définition

Soit k un nombre réel strictement positif donné.

On appelle similitude directe de rapport k la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement.

Exemples

- Les déplacements (translations et rotations) sont des similitudes directes de rapport 1.
- Toute homothétie de rapport k' est une similitude directe de rapport k'
- La composée d'une homothétie de rapport k' et d'un déplacement est une similitude directe de rapport $|k'|$

NB Le qualificatif « directe » attribué à la similitude est du fait de la conservation des angles orientés. Il existe des applications du plan dans lui-même qui multiplient les distances par k et transforment les angles orientés en leurs opposés ; On les appelle **similitudes indirectes**. Elles ne sont pas au programme.

ACTIVITE 2 : Ecriture complexe d'une similitude directe

Partie A : Ecriture complexe d'une similitude directe

Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ .

Par définition il existe une homothétie h de rapport k et un déplacement g tel que $f = h \circ g$

On rappelle que l'écriture complexe de h est de la forme $z' = kz + c$ où $c \in \mathbb{C}$ et celle du déplacement g est de la forme $z' = mz + l$ où $|m| = 1$ et $l \in \mathbb{C}$.

Déterminer l'écriture complexe de f .

Partie B : Applications du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$

Soit f une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1 Si $a = 1$, quelle est la nature de f ?

2 On suppose $a \neq 1$

a Démontrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe en fonction de a et b .

b On pose $k = |a|$ et $\theta = \arg(a)$ ($k \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

On note : R la rotation de centre Ω et d'angle orienté de mesure θ

H l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Soit M un point du plan d'affixe z . On pose $M_1 = R(M)$ et $M' = H(M_1)$, z_1 et z' sont les affixes respectives des points M_1 et M' .

- ♦ Exprimer $z_1 - z_\Omega$ en fonction de $z - z_\Omega$, puis $z' - z_\Omega$ en fonction de $z_1 - z_\Omega$.
- ♦ En déduire que l'écriture complexe de $H \circ R$ est $z' = az + b$
- c Démontrer de même que l'écriture complexe de $R \circ H$ est $z' = az + b$

Ainsi, $f = H \circ R = R \circ H$

On dit que f est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ .

II) PROPRIETES

Propriété 1 et définitions

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

■ Si $a = 1$ alors f est une translation.

■ Si $a \neq 1$ alors f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Dans ce cas, f est la similitude directe :

– de centre Ω

– de rapport $k = |a|$

– d'angle $\theta \equiv \arg(a)[2\pi]$

On note $f = s_{(\Omega, k, \theta)}$

Ainsi, $S_{\Omega, k, \theta} = H_{\Omega, k} \circ R_{\Omega, \theta} = R_{\Omega, \theta} \circ H_{\Omega, k}$

Exercice résolu1 : Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application S du plan dans lui-même qui a pour écriture complexe $z' = (\sqrt{3} - i)z + (1 + i)(1 - \sqrt{3} + i)$.

Solution

■ Nature

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \sqrt{3} - i$ nombre complexe non nul et $b = (1 + i)(1 - \sqrt{3} + i)$ donc S est une similitude directe.

■ Éléments caractéristiques

♦ Le centre

Comme $a \neq 1$, la similitude directe S admet un centre qui est l'unique point invariant Ω dont

l'affixe est : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{(1+i)(1-\sqrt{3}+i)}{1-\sqrt{3}+i} = 1-i$.

♦ **Le rapport**

Le rapport de la similitude directe S est $k = |\sqrt{3}-i|$

♦ **L'angle**

Soit θ la mesure principale de l'angle de S . On a $\theta = \text{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$

Ainsi, $S = S_{\left(\Omega \begin{smallmatrix} 2 \\ -\frac{\pi}{6} \end{smallmatrix}\right)}$ avec $\Omega = 1-i$

Propriété 2

f est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle orienté de mesure θ , si et seulement si pour tout point z du plan d'image z' par f on a : $z'-z_{\Omega} = ke^{i\theta}(z-z_{\Omega})$

Exercice résolu 2 : Soit le point A d'affixe $-2i$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Solution

L'écriture complexe de S s'obtient par la formule $z' - z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_A)$

On trouve $z' = 1-i$ et $z = 2$

Propriété 3

- Toute similitude directe du plan est une transformation du plan.
- Si S est la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ alors sa transformation réciproque S^{-1} est la similitude directe de centre Ω , de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$

Propriété 4

La composée de deux similitudes directes de rapports k et k' et d'angles θ et θ' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

Propriété 5 (propriété caractéristique)

Une application S du plan dans lui – même est une similitude directe de rapport k et d'angle θ si et seulement si pour tous points distincts M et N d'images respectives M' et N' par S on a :

$$\frac{M'N'}{MN} = k \quad \left(\widehat{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{M'N'} \right) = \theta \quad k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Preuve :

Si S est une translation, alors la propriété est évidente

Supposons que S est une similitude directe de rapport k et d'angle θ non réduite à une translation.

Alors il existe une homothétie h de rapport k et une rotation r d'angle θ telles que $S = r \circ h$.

Posons $M_1 = h(M)$ et $N_1 = h(N)$ alors $M_1N_1 = kMN$

On a : $M' = r \circ h(M) = r(M_1)$ et $N' = r \circ h(N) = r(N_1)$ donc $M_1N_1 = M'N'$ par suite $M'N' = kMN$

Par ailleurs, comme $M' = r(M_1)$ et $N' = r(N_1)$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{M_1N_1}} \overrightarrow{M'N'} \right) = \hat{\theta}$

Or $M_1 = h(M)$ et $N_1 = h(N)$ implique $\overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{M'N'} \right) = \hat{\theta}$ car k

Réciproquement.

Soit f une application du plan dans lui – même telle que pour tous points distincts M et N d'images respectives M' et N' par f on ait :

$\frac{M'N'}{MN} = k \quad \left(\widehat{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{M'N'} \right) = \theta \quad \lambda\pi (\lambda \in \mathbb{Z})$ où k est un réel strictement positif donné et θ un nombre réel donné.

Considérons une similitude directe S de rapport k et d'angle θ .

Posons $M_2 = S^{-1} \circ f(M) = S^{-1}(M')$ et $N_2 = S^{-1} \circ f(N) = S^{-1}(N')$

Et comme S^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$ alors, il vient :

$M_2N_2 = \frac{1}{k} M'N'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}} \overrightarrow{M_2N_2} \right) = -\hat{\theta}$ par suite $M_2N_2 = \frac{1}{k} kMN = MN$ (1)

et $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{M_2N_2} \right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{M'N'} \right) = \theta - \hat{\theta} = \hat{0}$ (2)

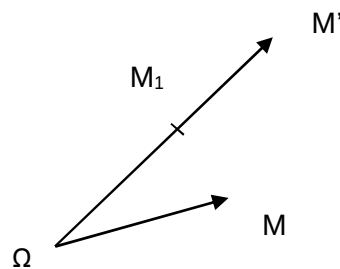
De (1) et (2) il ressort que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_2N_2}$ d'où $S^{-1} \circ f$ est une translation t .

L'égalité $S^{-1} \circ f = t$ d'où $f = S \circ t$ d'où f est une similitude directe.

Propriété 6

Soit s la similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ .

Pour tous points M et M' distincts de Ω , $s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta + 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$



Exercice résolu 3 :

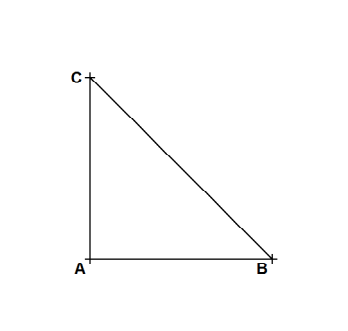
Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC isocèle et rectangle en A de sens direct.

Démontrer qu'il existe une similitude directe s de centre C qui transforme A en B . Préciser son rapport et son angle.

Solution

On a : $\text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$ et $CB = \sqrt{2} CA$

Donc la similitude directe de centre C , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en B



Activité 3: Etude des applications du plan dans lui-même qui multiplient les distances par k et conservent les angles orientés.

Soit k un nombre réel strictement positif donné et f une application du plan dans lui-même qui multiplie les distances par k et conserve les angles orientés.

Si $k = 1$, quelle est la nature de f ?

On suppose k quelconque dans $]0; +\infty[$. A et B sont deux points donnés d'images A' et B' par f .

Le but de cette question est de démontrer que pour tout point M distinct de A d'image M' par f , l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'})$ est constant et d'en déduire l'écriture complexe de f .

Soit M un point distinct de A , d'image M' par f . On note z et z' les affixes respectives de M et M' .

a En utilisant l'égalité $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ et la conservation des angles orientés par f , démontrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

b On pose $\theta = \text{Mes } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$

Compléter :
$$\begin{cases} \text{Mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \dots \\ \frac{A'M'}{AM} = \dots \end{cases}$$

En déduire que $z' - z_{A'} = ke^{i\theta}(z - z_A)$.

Ainsi, l'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$, et d'après l'activité 3, f est une similitude directe.

Propriété 7

Soit k un nombre réel strictement positif donné.

Une application f du plan dans lui-même est une **similitude directe de rapport k** , si et seulement si f multiplie les distances par k et conserve les angles orientés.

Propriétés 8

■ Toute similitude directe S de rapport k transforme :

- une droite en une droite.
- une demi-droite en une demi-droite
- un segment en un segment
- un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre $A' = S(A)$ et de rayon $r' = kr$

■ Toute similitude directe du plan conserve :

- l’alignement des points
- le parallélisme des droites
- l’orthogonalité des droites
- le barycentre
- les angles orientés
- le contact

- Toute similitude directe de rapport k multiplie:
 - les distances par k
 - les aires par k^2

III) DETERMINATION D’UNE SIMILITUDE DIRECTE PAR DEUX POINTS ET LEURS IMAGES .

ACTIVITE 5

Soit A, B, A', B' quatre points du plan.

Déterminer les conditions suffisantes sur les points A, B, A' et B' pour que le système

$$\begin{cases} az_A + b = z_{A'} \\ az_B + b = z_{B'} \end{cases} \text{ d'inconnue } (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ admette une solution unique } (a, b) \text{ telle que } a \neq 0$$

Ainsi, sous les conditions déterminées, l’unique similitude directe d’écriture complexe $z' = az + b$ transforme A en A' et B en B' .

Propriété

Soit A, B, A', B' quatre points du plan.

Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$ alors il existe une unique similitude directe s telle que $\begin{cases} s(A) = A' \\ s(B) = B' \end{cases}$.

- L’angle de s est $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.
- Le rapport de s est $k = \frac{A'B'}{AB}$

Exercice résolu 4 :

Soit A, B et C les points d’affixes respectives $-2 + i$, i et $(1 + 2\sqrt{3})i$.

1. Démontrer qu'il existe une similitude directe s de centre A qui transforme B en C .
2. Déterminer son rapport et son angle.

Solution

De par leurs affixes, on a $A \neq B$ et $A \neq C$ donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme B en C :

♦ Son angle est $\text{Mes}(\widehat{AB \ AC})$ avec $\text{Mes}(\widehat{AB \ AC}) = \text{Arg}\left(\frac{(1+2\sqrt{3})i - (-2+i)}{i - (-2+i)}\right)$
 $\text{Arg}\left(\frac{(\sqrt{i})}{\sqrt{i}}\right)$
 $\text{Arg} \sqrt{i}$
 $\frac{\pi}{4}$

♦ Son rapport k $\frac{AC}{AB} \left| \frac{(1+2\sqrt{3})i - 2 + i}{i - 2 + i} \right| = \sqrt{2}$

Ainsi, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\left(A \ 2 \ \frac{\pi}{3}\right)}$

EXERCICES

E1

Soit d un réel strictement positif.

Dans le plan orienté, on considère un carré $OABC$ direct et de centre I tel que : $OA = d$.
 J est le milieu de $[OI]$.

1) Faire une figure.

Soit la similitude directe plane f telle que

$$f(O) = I \quad \text{et} \quad f(A) = J.$$

2) Déterminer l'angle et le rapport de f .

3) Construire le point $C' = f(C)$ et

déterminer $f(B)$

4) Soit Ω le centre de la similitude directe f . Démontrer que les points (Ω, O, I, C)

d'une part et (Ω, O, A, J) d'autre part sont cocycliques.

En déduire une construction de Ω .

5) Démontrer que les droites $(O\Omega)$ et (ΩC) sont orthogonales.

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ tel que A ait pour affixe d .

Déterminer l'écriture complexe de f .

E2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1 cm).

1) Déterminer les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ du nombre complexe 216 et les écrire sous forme exponentielle.

On appelle A , B et C les points images de ces racines, A étant le point dont l'affixe est

réel et B le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive. Placer ces points dans le repère.

2) Soit les points D , E et F d'affixes respectives $3 + i\sqrt{3}$, $-3 + i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.

a) Montrer que D appartient à la droite (AB) . Placer D .

b) Sur quelle droite se trouve E ? Placer E .

c) Montrer que F appartient à la droite (AC) . Placer F .

3) Montrer qu'il existe une similitude directe S unique transformant A en D et B en E et déterminer son expression complexe.

Déterminer les éléments caractéristiques de S .

Vérifier que S transforme C en F .

E3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que

$$|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$$

2) Soit A , B et B' les points d'affixes respectives i , $\sqrt{3}$ et $-4i$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme A en O et B en B' .

Préciser le centre, le rapport et l'angle de S .

3) En utilisant les résultats établis au 2) retrouver l'ensemble (Γ) défini au 1).

E4

Soit O, A et B trois points distincts du plan. On note θ une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. On suppose que

$$\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[.$$

On considère les rectangles $OPQA$ et $OBRS$

tels que $Mes(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OP}) \equiv -\frac{\pi}{2}$, $OP = 2OA$

et $Mes(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS}) \equiv \frac{\pi}{2}$, $OS = \frac{OB}{2}$.

Le but de l'exercice est de montrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I et que I appartient au cercle circonscrit au rectangle $OBRS$

1) Faire une figure avec les éléments cités ci-dessus.

2) Soit f la similitude directe de centre O , d'angle orienté de mesure $\theta + \frac{\pi}{2}$ et de

rapport

$$k = \frac{OB}{2OA}.$$

a) Déterminer les images par f des points O, P, A et en déduire celle du point Q .

b) Grâce à ce qui précède, comparer les angles $(\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OR})$, ainsi que les rapports

$$\frac{OQ}{OP} \text{ et } \frac{OR}{OB}$$

3) On muni le plan d'un repère orthonormé direct dont l'origine est le point O . On note z_P, z_Q, z_B, z_R les affixes respectives des points P, Q, B, R .

a) Montrer que $\frac{z_Q}{z_P} = \frac{z_R}{z_B}$

b) Démontrer que l'égalité $\frac{z_R}{z_B} = \frac{z_R - z_Q}{z_B - z_P}$

équivalait à celle démontrée à la question précédente.

c) En déduire l'existence du point I et la cocyclicité des points O, I, B, R .

E5

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle en B tel que

$$Mes(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}.$$

I, E, J sont les milieux respectifs des segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$.

1) Montrer qu'il existe une rotation r transformant A en E et B en C .

Préciser son angle ; Construire son centre O en justifiant la construction.

Dans la suite de l'exercice, k désigne un nombre réel, M et M' sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.

2) a) Préciser la position de M et M' pour

$$k = 0, \quad k = \frac{1}{2} \text{ et } k = 2.$$

Le réel k est désormais quelconque.

b) Démontrer que M est le barycentre du

E8

On donne, dans le plan orienté, un triangle isocèle $OA O'$ avec $Mes(\widehat{AO AO'}) = \frac{\pi}{2}$

Les cercles Γ et Γ' passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B. on note I le centre du carré AOBO'.

Faire une figure que l'on complètera progressivement.

D et D'étant les points diamétralement opposés à A sur le cercle Γ et Γ' respectivement, démontrer que à l'aide d'une homothétie de centre A, que les points D, B et D' sont alignés.

Soit M un point du cercle Γ ($M \neq A$, $M \neq B$) et M' l'intersection de la droite (MB) avec Γ' .

a Vérifier que M'est distinct de A.

b Démontrer que $(\widehat{AO AO'}) = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

c En déduire que la rotation r de centre A qui transforme O en O' transforme la droite (AM) en (AM').

d Prouver que r .

Soit N le point d'intersection de la droite (M'A) avec le cercle Γ et N' celui de la droite (MA) avec le cercle Γ' . Démontrer que r .

On suppose que M est distinct de D.

a Prouver que N est distinct de A et construire le carré NAN'F.

c Démontrer que les points B et F sont les images respectives des points O et N par la similitude directe s dont on précisera le centre, le rapport et le l'angle.

d Construire l'image du cercle Γ par s .

E9

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

Faire une figure.

Soit s la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. on désigne par E l'image du point B.

a Démontrer que :

$(\widehat{AO AO'}) = (\widehat{AO AO'}) \quad k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

b Prouver que $E \in$ puis placer le point E sur la figure. On admettra que $E \in$

c Démontrer que

Démontrer que $(\widehat{AO AO'}) = (\widehat{AO AO'}) \quad k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

puis que $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

Soit s' la similitude de centre A qui transforme B en C.

a Démontrer que s' .

b Prouver que

c En déduire que :

(théorème de Ptolémée).

E10

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $O \vec{e}_1 \vec{e}_2$.

On considère les points A, B, C, D, E d'affixes respectives i , i ; i ; $-i$; $-i$.

Faire une figure.

Déterminer la nature du triangle ABC.

Soit S la similitude directe qui transforme A en D et B en A.

a Déterminer les éléments caractéristiques de S . On notera Ω le centre de S .

b Déterminer l'image du triangle ABC par S .

c En déduire la nature du triangle DAE.

E11

On considère le triangle $OO'A$ rectangle en A, isocèle et de sens direct. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par A et de centres respectifs

O et O' se recoupent en B.

A tout M de $\mathcal{C}$, on associe le point M' de

$$\mathcal{C}' \text{ tel que } Mes(\overrightarrow{OM} \overrightarrow{O'M'}) = \frac{-\pi}{2}.$$

Démontrer qu'il existe une solution r transformant O en O' et M en M'.

Déterminer l'angle et le centre de r .

M étant distinct de B, les droites BM et BM' recoupent respectivement $\mathcal{C}'$ en N' et $\mathcal{C}$ en N.

Démontrer que $r(N) = N'$.

On construit les carrés MBM'P et NBN'Q.

Soit S la similitude directe de centre B qui transforme M en P.

a Déterminer l'angle et le rapport de S.

b Déterminer l'image de N par

c Déterminer l'ensemble Γ décrit par les points P et Q lorsque M décrit $\mathcal{C} - B$.

Représenter Γ .

E12 BAC C 2007

On considère le triangle ABC rectangle en tel que $AB = cm$ et $Mes(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit E le milieu du segment AC .

a. Construire le triangle ABC.

b Démontrer qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

c Déterminer l'angle de la rotation r .

d Construire son centre O.

Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.

Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a Déterminer l'angle et le rapport de S.

b Démontrer que $S(A) = J$.

Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.

a Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$.

b Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $k - 1$ et $-k$.

c Démontrer que $r(M) = M'$ et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

d Démontrer que les O, A, M et M' sont cocycliques.

Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

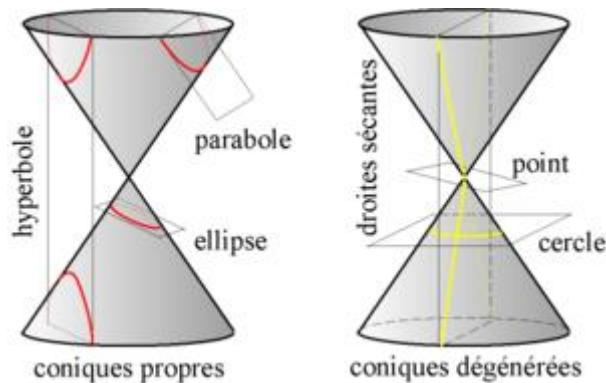
a Démontrer que $S(M) = N$.

b Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite AB .

6. CONIQUES

INTRODUCTION

Les **coniques** forment une famille de courbes planes résultant de l'intersection d'un plan avec un cône de révolution.



Intersection d'un plan et d'un cône de révolution

Selon les positions relatives d'un plan et d'un cône, on obtient différents types de coniques :

Si l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône est :

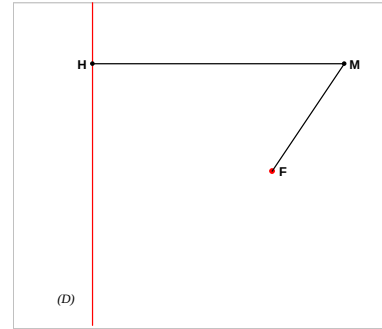
- ▶ supérieur à l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une ellipse;
- ▶ inférieur à l'angle d'ouverture du cône, c'est une hyperbole;
- ▶ égal à l'angle d'ouverture du cône, c'est une parabole.
- ▶ un cercle quand le plan est perpendiculaire à l'axe du cône;
- ▶ une hyperbole équilatère quand l'angle d'inclinaison du plan est inférieur de 45° à l'angle d'ouverture du cône;

I.DÉFINITION MONOFOCALE

1. Définition

Dans un plan, on considère une droite (D) et un point F non situé sur (D) . Soit e un réel strictement positif.

On appelle conique (Γ) de **foyer F**, de **directrice (D)** et d'**excentricité e** l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .



En fonction des valeurs de e on obtient 3 types de courbes :

- ♦ Si $e < 1$, la conique (Γ) est une **ellipse**.
- ♦ Si $e = 1$, la conique (Γ) est une **parabole**.
- ♦ Si $e > 1$, la conique (Γ) est une **hyperbole**.

La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à (D) est appelée **axe focal** de la conique.

2. Construction d'une parabole et mise en équation

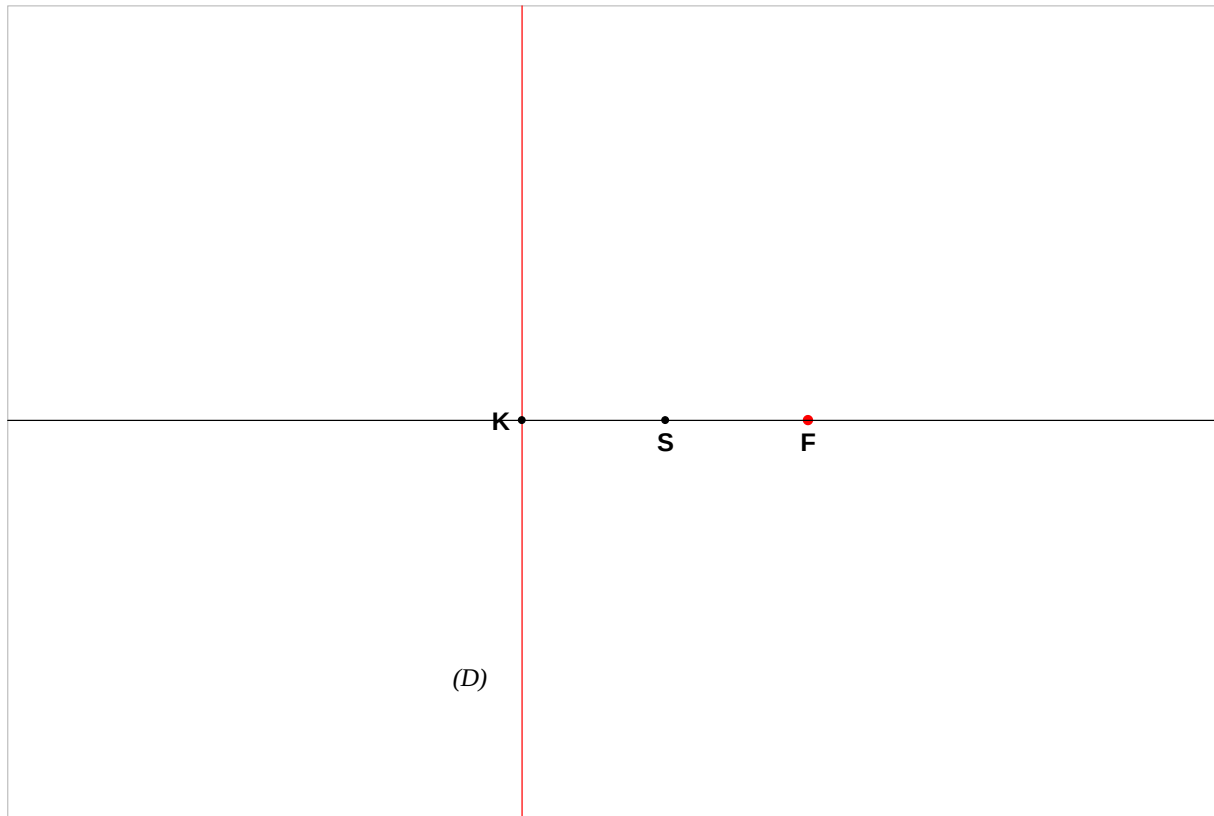
Soit F un point et (D) une droite du plan telle que $d(F, (D)) = 4 \text{ cm}$.

Soit (Γ) la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité $e = 1$.

On note K le projeté orthogonal de F sur (D) et (Δ) la droite (FK) .

On pose $p = d(F ; (D))$: p est appelé paramètre de la parabole.

a) Construction



- Vérifier que le milieu S de [FK] appartient à (Γ).

Soit (d1) une droite strictement parallèle à (Δ) et M_1 le point d'intersection de (d1) et de (D).

Soit M_1' le point d'intersection de (d1) et de la médiatrice de $[FM_1]$ et M_1' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ).

- Vérifier que les points M_1 et M_1' appartiennent à (Γ).

- En déduire la construction de 10 points de (Γ) et donner l'allure de la parabole (Γ).

b) Mise en équation

Dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{KF} \overrightarrow{KF}$, donner une équation de la parabole (Γ).

3. Construction d'une ellipse et mise en équation

Soit F un point et (D) une droite du plan telle que $d(F, (D)) = 4 \text{ cm}$.

Soit (Γ) la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $e = \frac{1}{3}$.

On note K le projeté orthogonal de F sur (D) et (Δ) la droite (FK).

a) Construction point par point de $\left(\Gamma_{\frac{1}{3}}\right) = \left\{M \in P / \frac{MF}{MH} = \frac{1}{3}\right\}$ où H est le projeté orthogonal

de M sur (D).

Soit $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$.

Placer A et A'.

- Vérifier que les points A et A' appartiennent à (Γ).

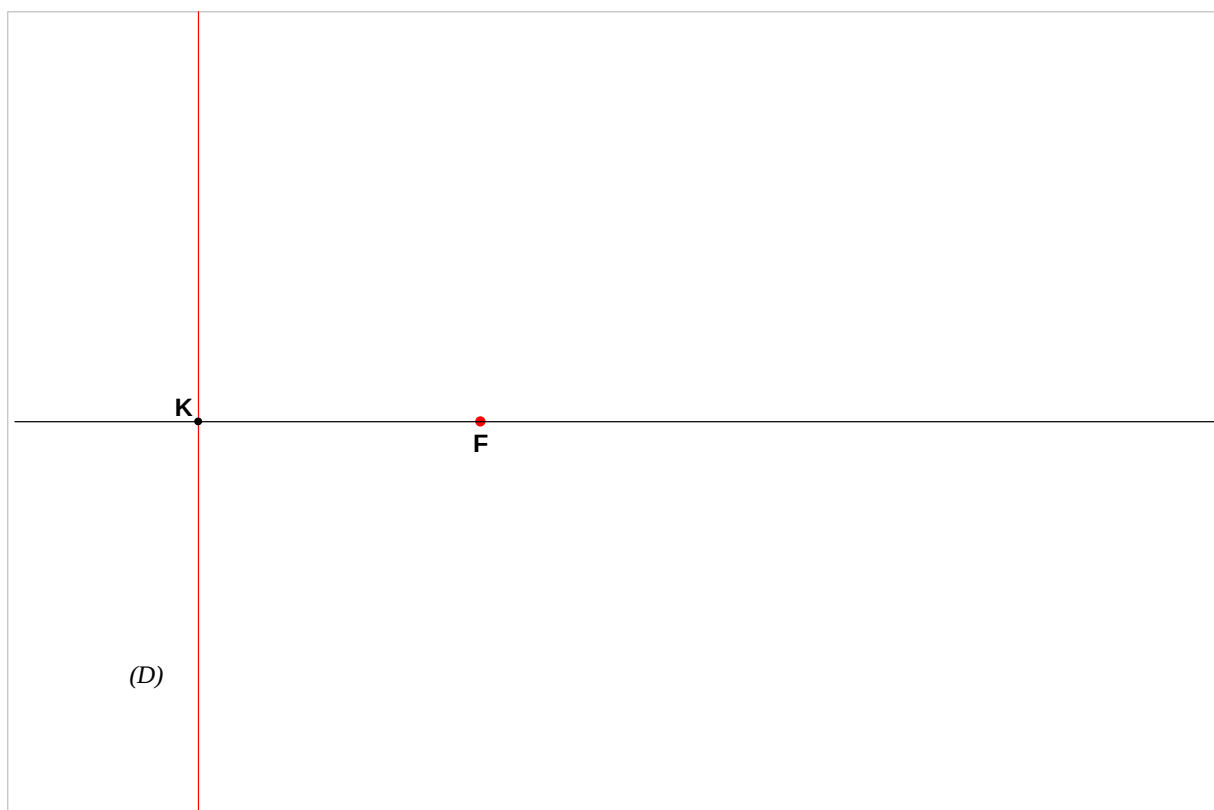
A et A' sont appelés les sommets de l'ellipse situés sur l'axe focal.

Propriété (admise)

Lorsque $0 < e < 1$, (Γ_e) est situé dans la bande délimitée par les droites (T) et (T') parallèles à (D) passant respectivement par les sommets A et A'

On muni le plan du repère orthonormé $(K, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm tel que $F(4; 0)$.

- Tracer la droite (δ) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ (dans le cas général $y = ex$).
- Choisir un point P du segment $[AA']$ et tracer la droite (Δ_P) parallèle à (D) en P ; Elle coupe (δ) en L .
- Construire le cercle (C_P) de centre F et de rayon $r = PL$.
- Justifier que le point M d'intersection de (C_P) et (Δ_P) est un point de $\left(\Gamma_{\frac{1}{3}}\right)$.
- En faisant varier le point P sur le segment $[AA']$ Construire point par point l'ensemble $\left(\Gamma_{\frac{1}{3}}\right)$.

**b) Mise en équation**

Soit O le milieu de $[AA']$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$, donner une équation de l'ellipse (Γ) .

4. Construction d'une hyperbole et mise en équation.

Soit F un point et (D) une droite du plan telle que $d(F, (D)) = 3 \text{ cm}$.

Soit (Γ) la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité $e = 2$.

On note K le projeté orthogonal de F sur (D) et (Δ) l'axe focal.

Soit $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$.

- Placer A et A' .

- Vérifier que les A et A' appartiennent à (Γ) .

A et A' sont appelés sommets de l'hyperbole.

Propriété (admise).

Soit A et A' les sommets de (Γ_e) situés sur l'axe focal, O le milieu du segment $[AA']$, (T) et (T') les droites parallèles à (D) passant respectivement par A et A' .

Lorsque $e > 1$, (Γ_e) est situé dans la réunion des demi plans de frontières (T) et (T') ne contenant pas O

Construction point par point de (Γ_2) $= \left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = 2 \right\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .

- Sur un papier millimétré, on choisira le centimètre comme unité et $d(F; (D)) = 3$
- Tracer l'axe focal (Δ) et placer les sommets A et A' .
- On muni le plan du repère orthonormé $(K, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm tel que $F(3; 0)$.
- Tracer la droite (δ) d'équation $y = 2x$ (dans le cas général $y = ex$).
- Choisir un point P de $(\Delta) \setminus [AA']$, tracer la droite (Δ_P) parallèle à (D) en P ; Elle coupe (δ) en L .
- Construire le cercle (C_P) de centre F et de rayon $r = PL$.
- Justifier que le point M d'intersection de (C_P) et (Δ_P) est un point de (Γ_2) .
- En faisant varier le point P sur $(\Delta) \setminus [AA']$ Construire point par point l'ensemble (Γ_2) .

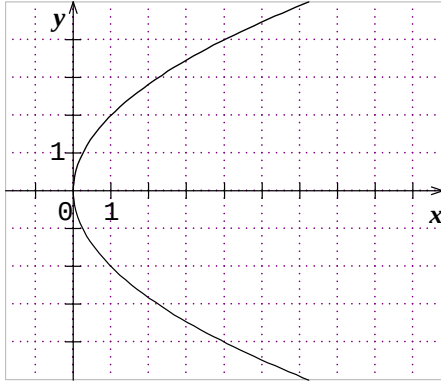
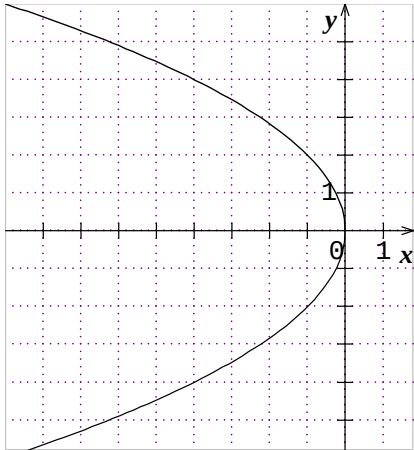
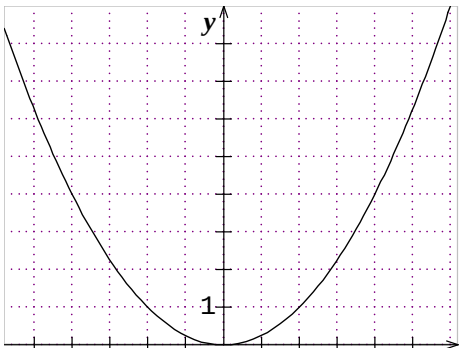
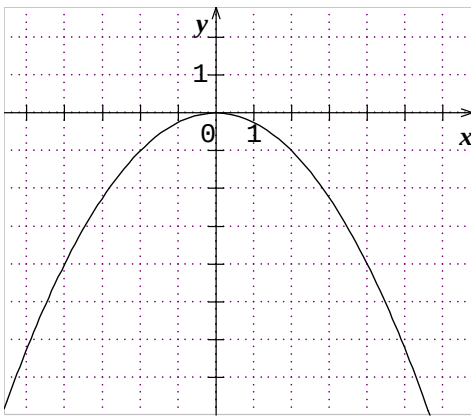
b) Mise en équation

Soit O le milieu de $[AA']$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$, donner une équation de l'ellipse (Γ) .

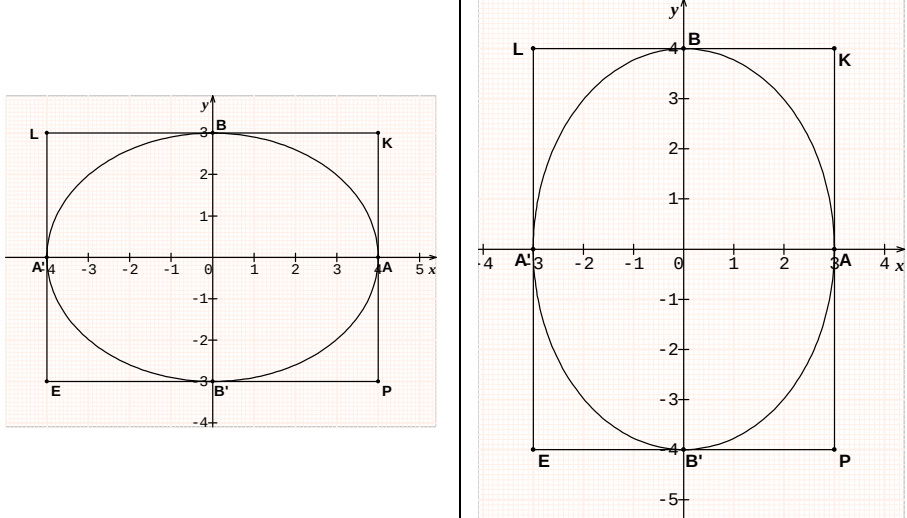
II. EQUATION REDUITE ET ELEMENTS CARACTERISTIQUES

1. Parabole

Equation réduite	$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
Paramètre	$ a $	$ a $
Sommet	$S(0;0)$	
Axe focal	L'axe des abscisses	L'axe des ordonnées
Foyer	$F(\frac{a}{2}; 0)$	$F(0; \frac{a}{2})$
Directrice	$(D) : x = -\frac{a}{2}$	$(D) : y = -\frac{a}{2}$
Courbe	$a > 0$	
	$a < 0$	
Courbe	$a > 0$	
	$a < 0$	

2. Ellipse

	$a > b$	$0 < a < b$
Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Centre O	O	
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	A(a ;0), A'(-a ;0), B(0 ;b), B'(0 ;-b)	
Axe focal	(AA')	(BB')
Foyers	F(c; 0) ; F'(-c ;0)	F(0 ;c) ; F(0 ;-c)
Directrices	(D) : $x = \frac{a^2}{c}$ et (D') : $x = -\frac{a^2}{c}$	(D) : $y = \frac{b^2}{c}$ et (D') : $y = -\frac{b^2}{c}$
Courbe		

Remarques :

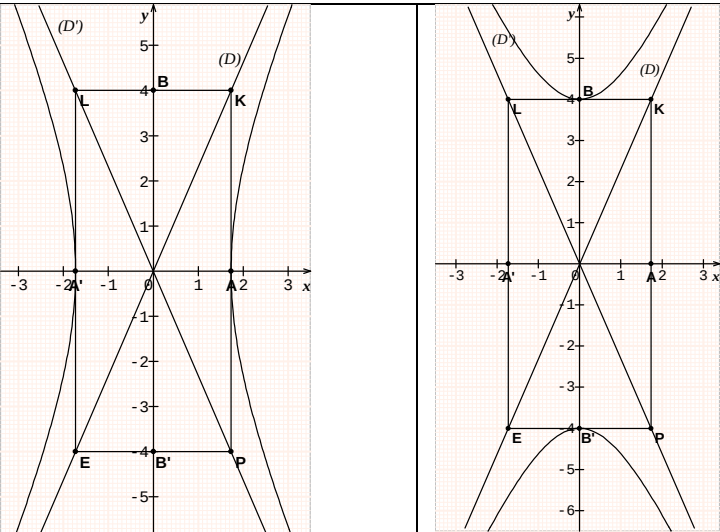
Un cercle est une ellipse obtenu lorsque $a = b$

Remarques :

- pour tracer l'ellipse, on commence par placer ces 4 sommets A, A', B et B'.
- L'ellipse est à l'intérieur du rectangle engendré par les 4 sommets A, A', B et B' et est tangente en A, A', B et B' aux côtés de ce rectangle.

2. Hyperbole

Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Centre O	O	

Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A(a ; 0), A'(-a ; 0),$	$B(0 ; b), B'(0 ; -b)$
Axe focal	(AA')	(BB')
Foyers	$F(c ; 0) ; F'(-c ; 0)$	$F(0 ; c) ; F(0 ; -c)$
Directrices	$(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	
Courbe		

Remarques :

Lorsque $a = b$ l'hyperbole est une hyperbole équilatère.

Remarques :

- Pour tracer l'hyperbole, on commence par placer les points $A(a ; 0)$, $A'(-a ; 0)$, $B(0 ; b)$ et $B'(0 ; -b)$ puis on construit le rectangle engendré par ces 4 points.
- Tracer les diagonales du rectangle qui sont les asymptotes de l'hyperbole.
- L'hyperbole est à l'extérieur du rectangle et tangente au rectangle en A et A'.

Exercice 2.1

Le plan est muni du repère orthonormé $O I J$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique (Γ dont une équation est donnée et tracer (Γ).

1) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4}$ 2) $x^2 - \frac{y^2}{4}$ 3) $y^2 = x$.

III. DEFINITION BIFOCAL

1. Définition bifocale de l'ellipse

Propriété

Soit F et F' deux points distincts et a un réel strictement positif tel que : $FF' < 2a$.
 L'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$
 est une ellipse de foyers F et F' , de demi-distance focale $c = \frac{1}{2}FF'$.

Exercice

Soit F et F' deux points tels que $FF' = 2\sqrt{3}$ cm.
 Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 6$.
 1. Quelle est la nature de (E) ?
 2. Donner l'équation réduite de (E) et tracer (E) .

2. Définition bifocale de l' hyperbole**Propriété**

Soit F et F' deux points distincts et a un réel strictement positif tel que : $FF' > 2a$.
 L'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2a$
 est une hyperbole de foyers F et F' , de demi-distance focale $c = \frac{1}{2}FF'$.

Exercice

Soit F et F' deux points tels que $FF' = 2\sqrt{3}$ cm.
 Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 6$.
 1. Quelle est la nature de (E) ?
 2. Donner l'équation réduite de (E) et tracer (E) .

Remarque : La parabole n'a pas de définition bifocale.

IV. DEFINITION ANALYTIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Les coniques sont les courbes planes dont les équations cartésiennes de la forme :

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Ex + Fy + G = 0$ avec l'un au moins des trois coefficients A , B ou C non nul .

Suivant le repère utilisé, l'expression de l'équation sera plus ou moins simple.

Il est intéressant de chercher le repère dans lequel l'expression de l'équation sera la forme réduite.

Exercice résolu (BAC remplacement 1994)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $O \vec{u} \vec{v}$.

L'unité graphique est 4 cm.

1. Soit H l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x y vérifient :

$$x^2 - y^2 = x.$$

a) Déterminer la nature de H et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Représenter H .

2. A tout point M d'affixe z différent de 0 et de -1, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{2}{z^2 + z}$.

Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixes z tels que z' soit imaginaire pur.

Solution

$$1. M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - y^2 = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Soit } \Omega\left(-\frac{1}{2}\right). \text{ Dans le repère } (\Omega; \vec{u}, \vec{v}) \text{ l'équation de } (H) \text{ est : } \frac{X^2}{\frac{1}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Donc (H) est une hyperbole de centre Ω . $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

- la demi-distance focale est : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- l'excentricité : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Donnons les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices et des asymptotes de (H) dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$:

- les sommets $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $B'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

- l'axe focal est la droite (AA') .

- les foyers $F\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

- les directrices $(D) : X = \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(D') : X = -\frac{a^2}{c} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- les asymptotes $(\Delta) : Y = \frac{b}{a}X = X$ et $(\Delta') : Y = -\frac{b}{a}X = -X$.

On peut donner les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices et des asymptotes de (H) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$: On a : $X = x - \frac{1}{2}$ et $Y = y$ donc $\therefore$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

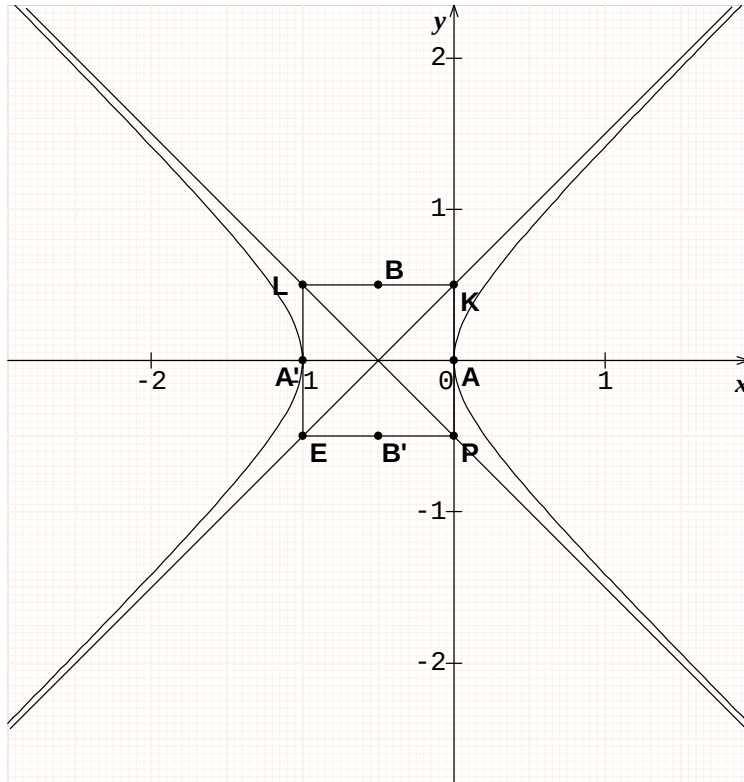
- les sommets $A(0; 0)$, $A'(-1; 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

- les foyers $F\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right)$.

- les directrices $(D) : x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ et $(D') : x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

- les asymptotes $(\Delta) : y = x + \frac{1}{2}$ et $(\Delta') : y = -x - \frac{1}{2}$.

b) Représentation graphique



2.

Posons $z = x + iy$ avec $(x; y) \neq (0; 0)$ et $(x; y) \neq (-1; 0)$. Ecrivons z' sous forme algébrique.

$$\text{On a : } z' = \frac{2}{z^2 + z} = \frac{2}{(x + iy)^2 + x + iy} = \frac{2(x^2 - y^2 + x) - i(2xy + y)}{x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)}$$

$$z' = \frac{2(x^2 - y^2 + x) - i(2xy + y)}{x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)} = \frac{2(x^2 - y^2 + x)}{x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)} - i \frac{2xy + y}{x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)}$$

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - y^2 + x)}{x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x$$

D'où $(E) = (H) - \{O, A'(-1; 0)\}$.

EXERCICES

CONIQUES

E1

(Γ) est une conique de foyer F , de directrice associée (D) et d'excentricité e . l est la distance de F à (D) .

Choisir un repère et donner une équation de (Γ) dans les cas suivants :

- a) $l = 4$ et $e = 1$
- b) $l = 1$ et $e = 2$
- c) $l = 9$ et $e = \frac{4}{5}$
- d) $l = 1$ et $e = \frac{1}{2}$.

E2

Dans chacun des cas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Déterminer une équation cartésienne de la conique (Γ) et la représenter :

- 1) (Γ) est une parabole :
 - a) De foyer $F(3; 2)$ et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.
 - b) De foyer $F(1; 4)$ et de directrice la droite (D) d'équation $y = 2$
- 2) (Γ) est une conique à centre de foyer F de directrice associée (D) et d'excentricité e :
 - a) $F(1; 0)$; $(D) : x = 10$; $e = \frac{4}{5}$.
 - b) $F(5; 0)$ $(D) : x = 0$; $e = \frac{5}{4}$.
 - c) $F(0; 4)$ $(D) : y = 6$; $e = \frac{1}{2}$
 - d) $F(0; 6)$ $(D) : y = 3$; $e = 2$.

E3

Dans chacun des cas , on donne une équation de la conique (Γ) dans le repère

orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer la nature de (Γ) et préciser dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ses éléments géométriques : sommets, foyers, directrices, asymptotes. Construire (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) $y + 2 = 2(x - 3)^2$
- 2) $x - 1 = -3(y - 2)^2$
- 3) $25(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 - 100 = 0$
- 4) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$
- 5) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

E4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit (Γ) la conique d'équation $3(x + 1)^2 + 4y^2 = 12$.

- 1) a) Déterminer la nature de cette conique et la construire.
- b) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ) .
- 2) A chaque point M de (Γ) de coordonnées $(x; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$. En déduire

$$\text{que } |z| = \frac{3}{2 + \cos \theta},$$

θ étant un argument de z .

- 3) Soit M' et M'' les point de (Γ) ayant pour affixes respectives z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.

a) Calculer $\| \overrightarrow{M'M''} \|$ en fonction de θ

b) Déterminer θ pour que $\| \overrightarrow{M'M''} \|$ soit maximum, puis minimum.

CONIQUES

E5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8; 0)$.

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

On désigne par (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos \theta}$, où H est

le projeté orthogonal de M sur (D) .

- 1) Préciser la nature de (Γ_θ) selon les valeurs de θ .
- 2) Construire la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.
- 3) a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie de cette courbe).

- c) Construire $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$.

E6 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'unité est 2 cm.

1. On considère la transformation S du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} z$.

- a) Quelle est la nature de S ?
- b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .
- c) Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ et M' le point de coordonnées $(x'; y')$ image par S de M . Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

2. Soit (E) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation : $15x^2 - 2y^2 - \sqrt{3}y = 0$.

On note (E') l'image de (E) par S .

- a) Démontrer qu'une équation de (E') est : $x'^2 - y'^2 = 1$.
- b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E') .
- c) Tracer (E') .
- d) Démontrer que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que : $MF_1 + MF_2 = 16$ où F_1 et F_2 sont des points que l'on précisera.
- e) En déduire la nature de (E) .
- f) Tracer (E) .

E7

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $O \vec{u} \vec{v}$. On donne l'application :

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \rightarrow M'(z') \end{aligned}$$

$$\text{avec } z' = \frac{z^2}{z - \bar{z}}.$$

1.a) Démontrer que f n'a aucun point invariant.

b) Démontrer que pour tout point $M \in \mathcal{P} \setminus O \vec{u}$, la droite (MM') a une direction fixe.

2.a) Démontrer que si $z \notin \mathbb{R}$, alors

$$|z' - z| = |z'|.$$

b) En déduire que M' est le point d'intersection de la médiatrice de $[OM]$ avec la droite (Δ) passant par M est parallèle à l'axe $O \vec{v}$.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = 2$.

Démontrer que si M décrit (D) , alors M' décrit une parabole (P) dont on précisera le foyer et la directrice.

Tracer (P) .

E8

Soit z un nombre complexe et $Z = i z^2$, avec $z = x + iy$, x et y réels.

1. Donner la forme algébrique de Z en fonction de x et y .

CONIQUES

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on note (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un réel.

- Donner une équation cartésienne de (Γ) .
- Déterminer la nature de (Γ) et déterminer ses éléments géométriques.
- Tracer (Γ) .

E9

Soit m un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note (Γ_m) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant :

$$\frac{(\ln(m))^2}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 0$$

- Reconnaître (Γ_e)
- On suppose dans la suite que $m \in \mathbb{R}_+^*$
 - Discuter suivant m , la nature de (Γ_m)
 - Déterminer m_0 pour que (Γ_m) soit une hyperbole équilatère. Préciser son centre, ses sommets, ses foyers et ses asymptotes. Tracer (Γ_{m_0}) .

E10

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note (Γ) l'ensemble

des points $M(x, y)$ vérifiant :

$$|x| (x+2) - 4y^2 = 0$$

- Démontrer que (Γ) est la réunion d'une ellipse (E) et d'une branche d'une hyperbole (H) .
- Donner les éléments caractéristiques de (E) et (H) et tracer (Γ) .

E11

Soit EFG un triangle équilatéral de côté 6, K est le milieu de EG .

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = 2$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite EG .

- Faire une figure. On tracera la droite EG verticale
- Justifier que (Γ) est une hyperbole.
- Déterminer les sommets A et A' de (Γ) situés sur l'axe focal.
- Construire le centre O de (Γ) , le second foyer F' et la seconde directrice D' .
- Tracer les asymptotes de (Γ) .
- Tracer (Γ) .

7. ARITHMETIQUE

INTRODUCTION A L'ARITHMETIQUE

Qu'est-ce que l'arithmétique ? Il s'agit de la théorie des nombres entiers, un des plus vieux domaines abordés par les mathématiques. Euclide (III^e siècle av. JC) fut le premier à donner des fondements à cette science, mais elle ne pourra prendre réellement son essor qu'avec l'arrivée du système de numérotation arabe.

Considérée dès l'origine comme une excellente formation pour l'esprit humain, elle trouve aujourd'hui, en plus de cet extraordinaire entraînement à la réflexion pour ceux qui s'y intéressent, des applications en informatique, en cryptographie etc.

Les notions de PGCD, PPCM, multiples, diviseurs, nombres premiers ont été abordées au premier cycle, Elles seront poursuivies cette année avec l'étude approfondie de leurs propriétés.

I. PROPRIETES DANS IN

On utilisera dans IN les 3 axiomes suivants :

- ♦ Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément.
- ♦ Toute partie non vide et majorée de IN admet un plus grand élément.
- ♦ Toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est finie.

II. DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

Activité

- 1 Déterminer la liste des diviseurs des entiers : 1 ; 2 ; 3 ; 36 ; 45.
- 2 Parmi les nombres suivants, citer ceux qui sont des multiples de 13 : -56 ; 26 ; 0 ; 13 ; 26143.
- 3 Les cotés d'un terrain rectangulaire ont pour mesure des nombres entiers ; son aire est 495 m^2 .

Quelles peuvent être ses dimensions sachant que le périmètre du terrain est divisible par 3 ?

1. Définition

Soit a et b des entiers relatifs.

On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$.

On dit aussi que a est **divisible** par b ou que b **divise** a .

Notation

- L'ensemble des multiples d'un entier relatif a est noté $a\mathbb{Z}$.

EXEMPLES :

- Les multiples de 5 sont des nombres s'écrivant sous la forme $5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
-30 ; -25 ; -20 ; -15 ; -10 ; 0 ; 5 ; 10 ; 15 sont des multiples de 5.
L'ensemble des multiples de 5 est noté $5\mathbb{Z}$.
- 25 divise 1050.

Remarques

- Tout entier relatif divise 0.
- **0 ne divise que lui-même**
- 0 est multiple de tout entier relatif.
- 1 divise tout entier relatif.
- Un entier relatif a non nul admet au moins 4 diviseurs : 1 ; -1 ; $-a$; a .

2. Propriété

Tout entier relatif non nul a admet un nombre fini de diviseurs.

L'ensemble des diviseurs de a est noté $D(a)$.

Démonstration

Soit a un entier relatif non nul et d un entier relatif qui divise a . Alors il existe un entier relatif k tel que : $a = kd$.

On a : $|k| \geq 1 \Rightarrow |kd| \geq |d|$

$$\Rightarrow |a| \geq |d|$$

$$\Rightarrow -|a| \leq d \leq |a|.$$

Donc a admet au plus $2|a|$ diviseurs.

EXEMPLE : $D(6) = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$; $D(1) = \{-1 ; 1\}$;

$D(13) = \{-13 ; -1 ; 1 ; 13\}$.

3. Propriétés

Soit a , b et c des entiers relatifs non nuls.

- P1** a divise a
- P2** Si a divise b et b divise c alors a divise c .
- P3** Si a divise b et c alors a divise $mb + nc$, pour tous entiers relatifs m et n . (on dit que a divise toute combinaison linéaire de b et c .)
- P4** Si a divise b alors $|a| \leq |b|$.
- P5** Si a divise b et b divise a alors $b = a$ ou $b = -a$.
- P6** Si a divise b alors ac divise bc pour tout entier relatif c .

Démonstration

- P1** Si a divise b et b divise c alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $b = ka$ et $c = k'b$
 Alors $c = k'b = k'ka$ et $k'k \in \mathbb{Z}$ donc a divise c .
- P2** Si a divise b et c alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $b = ka$ et $c = k'a$
 Alors $mb + nc = mka + nk'a = (mk + nk')a$ et $mk + nk' \in \mathbb{Z}$ donc a divise $mb + nc$.
- P3** Si a divise b et que $b \neq 0$ alors il existe un entier relatif k tel que : $b = ka$.
 Comme $b \neq 0$ alors $|k| \geq 1$ donc $|ka| \geq |a|$ donc $|a| \leq |b|$.
- P4** Si a divise b et b divise a alors $|a| \leq |b|$ et $|b| \leq |a|$ donc $|a| = |b|$.
- P5** Si a divise b alors il existe un entier relatif k tel que : $b = ka$.
 Alors : $bc = kca$ ca divise bc pour tout entier relatif c .

Exercice résolu 1

Soit la fraction $\frac{2n-3}{n+1}$, où n est un entier relatif différent de -1 .

Pour quelles valeurs de n cette fraction est-elle un entier relatif ?

Solution

On a : $\forall n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$, $2n-3 = 2(n+1)-5$. Alors $\frac{2n-3}{n+1}$ est une fraction si $n+1$ est un diviseur de -5 .

Or les diviseurs de -5 sont : -5 ; -1 ; 1 ; 5 donc $n+1 = -5$ ou $n+1 = -1$ ou $n+1 = 1$ ou $n+1 = 5$.

Ainsi, $n = -6$ ou $n = -2$ ou $n = 0$ ou $n = 4$.

Conclusion : Les valeurs de n pour lesquelles $\frac{2n-3}{n+1}$ est un entier relatif sont : -6 ; -2 ; 0 ; 4 .

Exercice 2. 1

Déterminer les entiers relatifs n tels que $3n^2 + 15n + 19$ soit divisible par $n + 1$.

III. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Approche

Soit la propriété $P(n) \ll 3 \text{ divise } n^3 \gg n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $P(n)$ est vraie pour $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$.

2. Soit k un entier naturel quelconque,

- vérifier que : $7^{k+1} = 7(7^k - 102)$.
- En déduire que si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est aussi vraie.

Le principe

Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

Il y a 2 étapes :

i) Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

ii) Propriété héréditaire :

On démontre que pour tout entier $k \geq n_0$, $P(k)$ est vraie $\Rightarrow P(k+1)$ est vraie.

Lorsque les 2 étapes sont vérifiées, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice résolu 2

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $7^{2n+1} - 7^{n+2}$ est divisible par 7.

Solution

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = 7^{2n+1} - 7^{n+2}$.

- On a : A_0 donc A_0 est divisible par 7.

- Soit k un entier naturel quelconque, supposons que A_k est divisible par 7 et démontrons que A_{k+1} est divisible par 7.

Cherchons une relation entre A_{k+1} et A_k : $A_k = 7^{2k+1} - 7^{k+2}$

donc $A_{k+1} = 7^{2(k+1)+1} - 7^{(k+1)+2} = 7^{2k+3} - 7^{k+3} = 9 \times 7^{2k+1} - 7^{k+3} = 9(7^{2k+1} - 7^{k+2}) + 7^{k+3}$

$A_{k+1} = 9A_k - 7 \times 7^{k+2}$. On a 7 qui divise $7 \times 7^{k+2}$ et 7 divise A_k d'après l'hypothèse donc 7 divise la combinaison linéaire $9A_k - 7 \times 7^{k+2}$, soit encore A_{k+1} est divisible par 7.

Les 2 étapes étant vérifiées, nous pouvons conclure que pour tout entier naturel n , $7^{2n+1} - 7^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 3.1

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2^{2n} - 2^n$ est divisible par 11.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , 6 divise 3^{2n} .

IV. DIVISION EUCLIDIENNE

1. Nous admettons les propriétés suivantes :

Pour tout $a \in \mathbb{N}$ et pour tout $b \in \mathbb{N}^*$

■ **Propriété d'Archimède** Il existe un entier naturel n , tel que : $nb \geq a$.

■ **Conséquence** Il existe un entier naturel q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$.

2. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Théorème et définition:

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe un unique couple $(q; r)$ d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

a est appelé le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient**, r le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est déterminer le couple $(q; r)$.

Démonstration

1. Existence de q et r :

D'après la conséquence de la propriété d'Archimède, il existe un entier naturel q tel que :

$$bq \leq a < b(q+1) \text{ soit } 0 \leq a - bq < b. \text{ On pose } r = a - bq \text{ donc } a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

2. Unicité :

Supposons qu'il existe 2 couples $(q_1; r_1)$ et $(q_2; r_2)$ d'entiers naturels tels que :

$$a = bq_1 + r_1 \text{ avec } 0 \leq r_1 < b \text{ et}$$

$$a = bq_2 + r_2 \text{ avec } 0 \leq r_2 < b.$$

$$\text{Il vient } bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \text{ donc : } b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

$$\text{On a : } -b < -r_1 \leq 0 \text{ et } 0 \leq r_2 < b \text{ donc : } -b < r_2 - r_1 < b, \text{ soit encore } -b < b(q_1 - q_2) < b.$$

Alors $-1 < q_1 - q_2 < 1$. Donc $q_1 - q_2$ est un entier relatif strictement compris entre -1 et 1 donc

$$q_1 - q_2 = 0, \text{ soit } q_1 = q_2 \text{ et } r_2 - r_1 = 0 \text{ donc encore } r_2 = r_1.$$

3. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Alors il existe un unique couple $(q; r)$ d'entiers avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < |b|.$$

Exercice résolu 3 :

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chaque cas :

1) $a = 457$ et $b = 23$; 2) $a = -456$ et $b = 23$.

Solution

1) $457 = 23 \times 19 + 20$ donc $q = 19$ et $r = 20$ (on a bien $0 \leq r < 23$) La bonne vieille division !

2) Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de -456 par 23 :

$$-456 = 23q + r \text{ donc } r = -456 - 23q. 0 \leq r < 23 \text{ donne : } -20,82 < q \leq -19,82. \text{ D'où } q = -20, \text{ par suite } r = -456 - 23(-20) = 4.$$

Exercice 4.1

Effectuer dans $\mathbb{Z}$ la division euclidienne de a par b dans chaque cas :

1) $a = -501$ et $b = 12$; 2) $a = -10$ et $b = 90$.

Exercice 4.2

$n \in \mathbb{N}^*$, Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne : a) de 2

par n ;

b) de 2 par n (distinguer les cas $n=2$ et $n \neq 2$)

V. CONGRUENCES MODULO n

1. Définition et notation

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

On dit que a est **congru à b modulo n** si $a-b$ est divisible par n .

Si a est congru à b modulo n , on note : $a \equiv b [n]$.

Remarques :

- Si $a \equiv b [n]$ alors $b \equiv a [n]$, on dit aussi que a et b sont congrus modulo n .
- $a \equiv b [n] \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif k tel que : $a = b + kn$.
- Si r est le reste de la division euclidienne de a par n alors : $a \equiv r [n]$.

Exemples

- $20 \equiv 4 [8]$; $8 \equiv 0 [8]$; $12 \equiv -2 [7]$; $-246 \equiv -4 [22]$; $320 \not\equiv 10 [15]$.

2. Théorème

a et b sont congrus modulo n si et seulement si, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

Démonstration

Supposons que $a \equiv b [n]$ alors il existe un entier relatif k tel que $a-b = kn$.

Effectuons la division euclidienne de a et b par n :

$a = qn + r$, avec $0 \leq r < n$;

$b = q'n + r'$, avec $0 \leq r' < n$.

Il vient : $a-b = (q-q')n + r-r' = kn$. Soit $r-r' = (k-q+q')n$.

De $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$ on tire : $-n < r-r' < n$, ou encore $-n < (k-q+q')n < n$.

Donc $-1 < k-q+q' < 1$, on en déduit que $k-q+q' = 0$. Alors : $r-r' = (k-q+q')n = 0$ donc $r = r'$.

3. Propriétés des congruences

Soient a, b, c, a' et b' des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

P1 $a \equiv a [n]$;

P2 Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$ alors $a \equiv c [n]$.

P3 Si $a \equiv b [n]$ et $a' \equiv b' [n]$ alors :

$$a + a' \equiv b + b' [n] ;$$

$$a - a' \equiv b - b' [n] ;$$

$$a a' \equiv b b' [n] ;$$

P4 Si $a \equiv b [n]$ alors pour tout entier naturel p : $a^p \equiv b^p [n]$.

Exercice 5.1

Sachant que le premier Janvier 2009 était un Jeudi, à quel jour de la semaine correspondra le premier Janvier 2020 ?

Exercice résolu 4

1. a) Vérifier que : $12 \equiv \quad$.
- b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011 par 13.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne par 13 de 58 .
3. Dédurre des questions précédentes le reste de la division euclidienne par 13 de $58 + 23 \times 2011$.

Solution

1.a) $12 = 4096$ et $12 - \quad = 4095 = 315 \times 13$ donc $12 - 1 \equiv \quad$, par suite $12 \equiv \quad$.

b) Effectuons la division euclidienne de 2011 par 12 : $2011 = 167 \times 12 + 7$.

On a : $2011 \equiv 167 \times 12 + 7 \equiv 12 \times 167 + 7$.

Or $12 \equiv \quad$ donc : $12 \times 167 \equiv \quad$

De plus, $7 \equiv \quad$ et $128 = 9 \times 13 + 11$ donc $7 \equiv \quad$.

On conclut que : $2011 \equiv \quad$.

Alors le reste de la division euclidienne de 2011 par 13 est 11.

2. On a :

$0 \equiv \quad$; $1 \equiv \quad$ $2 \equiv \quad$ $3 \equiv \quad$; $4 \equiv \quad$ La période est 4 :

effectuons la division euclidienne de 58 par 4. On obtient $58 = 14 \times 4 + 2$ donc : $58 \equiv 2$

par suite $58 \equiv \quad$. Alors le reste de la division euclidienne de 58 par 13 est 12.

3. D'après les résultats précédents : $58 + 23 \times 2011 \equiv \quad$ donc

$58 + 23 \times 2011 \equiv \quad$ or $\equiv \quad$ d'où : $58 + 23 \times 2011 \equiv \quad$.

Alors le reste de la division euclidienne de $58 + 23 \times 2011$ par 13 est 5.

Exercice résolu 5

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de n par 7.

3. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour que le nombre $4^n - 5^n$ soit divisible par 7.

Solution

1. Etudions les restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances de 4 : $4^0, 4^1, 4^2, \dots, 4^p$ et arrêtons nous lorsqu'on trouve un entier $p > 0$ tel que $4^p \equiv 1 \pmod{7}$.

$4^0 \equiv 1$, $4^1 \equiv 4$, $4^2 \equiv 2$, $4^3 \equiv 1$. Donc $p = 3$.

Alors on obtient le tableau de congruence suivant :

Le reste de la division euclidienne de n par 3	0	1	2
Le reste de la division euclidienne de 4^n par 7	1	4	2

Etudions les restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances de 5 : $5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^p$ et arrêtons nous lorsqu'on trouve un entier $p > 0$ tel que $5^p \equiv 1 \pmod{7}$.

$5^0 \equiv 1$, $5^1 \equiv 5$, $5^2 \equiv 4$, $5^3 \equiv 6$, $5^4 \equiv 2$, $5^5 \equiv 3$, $5^6 \equiv 1$.

Donc $p = 6$ et on obtient le tableau de congruence suivant :

3.

Le reste de la division euclidienne de n par 6	0	1	2	3	4	5
Le reste de la division euclidienne de 5^n par 7	1	5	4	6	2	3

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de n par 6.

Si $n = 6k$ alors $4^n \equiv 1 \pmod{7}$, $5^n \equiv 1 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv 0 \pmod{7}$.

Si $n = 6k+1$ alors $4^n \equiv 4 \pmod{7}$, $5^n \equiv 5 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv -1 \pmod{7}$.

Si $n = 6k+2$ alors $4^n \equiv 2 \pmod{7}$, $5^n \equiv 4 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv -2 \pmod{7}$.

Si $n = 6k+3$ alors $4^n \equiv 1 \pmod{7}$, $5^n \equiv 6 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv -5 \pmod{7}$.

Si $n = 6k+4$ alors $4^n \equiv 4 \pmod{7}$, $5^n \equiv 2 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv 2 \pmod{7}$.

Si $n = 6k+5$ alors $4^n \equiv 2 \pmod{7}$, $5^n \equiv 3 \pmod{7}$ alors $4^n - 5^n \equiv -1 \pmod{7}$.

Alors on obtient le tableau de congruence suivant :

Le reste de la division euclidienne de n par 6	0	1	2	3	4	5
Le reste de la division euclidienne de 5^n par 7	1	5	4	6	2	3
Le reste de la division euclidienne de 4^n par 7	1	4	2	1	4	2
Le reste de la division euclidienne de $5^n - 4^n$ par 7	2	3	4	0	0	3

Conclusion :

$4^n - 5^n$ est divisible par 7 si, et seulement si $n \in \{3+6k; 4+6k \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice résolu 6

Pour tout entier relatif n , on pose $N = 2n(n^2 + 1)$.

Démontrer à l'aide des congruences, que 4 divise N quel que soit l'entier relatif n .

Solution

Soit $n \in \mathbb{Z}$, les restes possibles de la division euclidienne de n par 4 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3.

Alors on obtient le tableau de congruence suivant :

Le reste de la division euclidienne de n par 4	0	1	2	3
--	---	---	---	---

Le reste de la division euclidienne de $2n$ par 4	0	2	0	2
Le reste de la division euclidienne de n^2 par 4	0	1	0	1
Le reste de la division euclidienne de n^2 par 4	1	2	1	2
Le reste de la division euclidienne de $2n(n^2)$ par 4	0	0	0	0

Conclusion : Quel que soit l'entier relatif n , le reste de la division euclidienne de N par 4 est 0 donc N est divisible par 4 quel que soit l'entier relatif n .

Exercices 5.2

- Déterminer les entiers naturels n pour que 7 divise $n^3 - 3n^2 - 2$
- Démontrer que 3 divise $5 \times 4^n - 2$ quel que soit l'entier naturel n .
- Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{2012} + 2012^{2011}$ par 13.
- Démontrer à l'aide des congruences que pour tout entier naturel n , $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
- Déterminer tous les entiers naturels n tels que $7 \times 3^n + 3$ est un multiple de 11.

VI. NUMERATION DECIMALE ET BINAIRE

Introduction

► Pour représenter et nommer tous les entiers, nous utilisons les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 : tout nombre peut s'écrire en une somme de puissance de dix. Cette représentation des entiers est appelée la **numération en base dix** ou **décimale**.

Par exemple, **deux cents quarante trois** sera noté : $243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

► Lorsqu'on écrit un nombre en une somme de puissance de deux, on parle de numération en **base deux** ou **binaire**. Par exemple :

$$243 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

243 sera représenté par : 11110011 en base deux.

La numération binaire n'utilise que les chiffres 0 et 1.

La numération binaire est adaptée aux ordinateurs qui peuvent interpréter électroniquement ces deux symboles par le passage et ou la rupture d'un courant.

1. Théorème - définition.

Soit b un entier naturel tel que $b > 1$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$, et une suite finie d'entiers naturels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que :

$$0 \leq a_i < b \text{ pour tout } i \in [0; n],$$

$$a_n \neq 0,$$

$$m = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0.$$

On note $m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^b$, et on dit que m est écrit en base b .

Remarque : Dans l'écriture d'un nombre en base dix, lorsqu'il n'y a aucune confusion possible le nombre $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{10}$ sera noté $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.

Dans le programme de TC les bases dix et deux sont les seules au programme, c'est pour cette raison que tous les exercices proposés ne concernent que ces deux cas.

Exemple Pour écrire 145 en base deux, on utilise la disposition pratique :
On effectue les divisions successives par 2 et on s'arrête lorsque le quotient q est égal à 0.

a	145	72	36	18	9	4	2	1
la base b	2	2	2	2	2	2	2	2
q	72	36	18	9	4	2	1	0
t	1	0	0	0	1	0	0	1

On lit les restes de la gauche vers la droite et on a : $145 = \text{-----}^2$.

Exercices 6.1

- 1 Ecrire en base deux les entiers suivants : 2 ; 4 ; 16 ; 10 ; 25 ; 100 ; 2012.
- 2 On donne en base deux : $a = \text{-----}^2$. Ecrire a en base dix.
- 3 Effectuer en base deux la somme : $\text{---}^2 + \text{---}^2 + \text{---}^2$.
- 4 Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
Déterminer tous les entiers naturels ---^{10} qui sont divisibles par 7.

2. Critère de divisibilité

Exercice 6.2

critère de divisibilité par 4 et 11.

Soit x un entier naturel dont l'écriture en base 10 est : $x = \text{---}_n \text{---}_{n-1} \text{---}_1 \text{---}_0^{10}$.

- 1.a) Justifier que : $x \equiv \text{---}_1 \text{---}_0^{10} [4]$.
- b) En déduire un critère de divisibilité par 4 d'un nombre écrit en base 10.
- c) Vérifier si le nombre 25061388740636 est divisible par 4.
- 2.a) Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $10^n \equiv (-1)^{n+1} [11]$.
- b) En déduire que : $x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) [11]$.
- c) En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 10.
- c) Utiliser ce critère pour vérifier si les nombres 908118200 ; 560894 ; 9086 sont divisibles par 11.

VII. NOMBRES PREMIERS

1. Définition

Un entier naturel p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs dans IN : 1 et p lui-même.

Exemples et contre-exemples :

- 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur dans IN : 1 lui-même.
- 2 est le premier nombre premier. C'est le seul nombre entier naturel premier qui soit pair.
- 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 47 sont les nombres premiers compris

entre 1 et 50.

2. Propriété des nombres premiers

Théorème 1 Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

- ◆ a admet au moins un diviseur premier.
- ◆ Si a n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{a}$.

Démonstration

- Si a est premier, il est divisible par lui-même.
- Si a n'est pas premier, il admet d'autres diviseurs positifs que 1 et a . Soit p le plus petit d'entre eux. Nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde pour prouver que p est premier. Supposons que p n'est pas premier, alors il admet un diviseur d tel que $1 < d < p$. Comme d divise p et que p divise a alors d divise a et d serait plus petit que p . Ce qui est absurde. Donc p est premier.
On a : Il existe un entier naturel k non nul tel que : $a = kp$. k étant un diviseur de a donc $p \leq k$. Alors, en multipliant l'inégalité par p , on obtient : $p^2 \leq a$ donc $p \leq \sqrt{a}$.

Théorème 2

Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration

Utilisons le raisonnement par l'absurde.
Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers et soit p le plus grand d'entre eux : $2 ; 3 ; 5 ; \dots ; p$. Soit $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$ le produit de tous ces nombres premiers et soit $N = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1$.
 $N \geq 2$ donc N admet un diviseur premier q dans la liste $2 ; 3 ; 5 ; \dots ; p$. Il existe un entier naturel non nul k tel que $N = kp = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1$. Alors q divise kp et $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1$ donc q divise la différence $kp - (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1) = 1$. Ce qui est absurde, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est fausse.

3. Test de primalité et Crible d'Eratosthène

Propriété

Si un entier naturel N n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$, alors N est premier.

EXEMPLE : Justifions que 2011 est premier et que 391 n'est pas premier.

On a : $\sqrt{2011} \simeq 44,84$. Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2011}$ sont : $2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 47$. Aucun de ces nombres premiers ne divise 2011 donc 2011 est

premier.

On a : $\sqrt{\quad} \simeq 19,77$. Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{\quad}$ sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19. 17 divise 391 donc 391 est premier.

Crible d'Eratosthène

Le test de primalité permet de concevoir le crible d'Eratosthène qui donne la liste de tous les nombres premiers compris entre deux nombres entiers donnés :

ACTIVITE

Déterminer les nombres premiers inférieurs à 100 en suivant le processus ;

Eliminer successivement :

- ◆ 1 qui n'est pas premier ;
- ◆ les multiples de 2 à partir de 2^2 ;
- ◆ les multiples de 3 à partir de 3^2 ;
- ◆ les multiples de 5 à partir de 5^2 ;
- ◆ les multiples de 7 à partir de 7^2 ;

Le nombre suivant est 11 et $11^2 = 121$ et $121 > 100$ donc on s'arrête.

Tous les nombres non éliminés sont premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 7.1

Deux nombres premiers sont dits jumeaux si leur différence est égale à 2.

Vérifier que 3539 et 3541 sont deux nombres premiers jumeaux.

Exercice 7.2

Nombres de FERMAT

Pierre de FERMAT pensait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier.

- 1) Vérifier ce résultat pour $n = 0, 1, 2$ et 3 .
- 2) Vérifier que F_5 est divisible par 641.

4. Décomposition en facteurs premiers

Théorème

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit de nombres premiers et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

♦ Si n est premier, il se décompose en un seul facteur premier : lui-même.

♦ Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier p_1 et $n = n_1 p_1$, avec $2 \leq p_1 < n$ et $2 \leq n_1 < n$.

Si n_1 est premier la décomposition est terminée : $n = n_1 p_1$.

Si n_1 n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier p_2 et $n_1 = n_2 p_2$, avec $2 \leq p_2 < n_1$ et $2 \leq n_2 < n_1$.

On itère ce raisonnement jusqu'à ce que le dernier quotient n_i soit égal à 1.

Alors, $n = p_1 p_2 \dots p_n$.

EXEMPLE Décomposons 504 en facteurs premiers. Utilisons la disposition pratique suivante :

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

On obtient : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

Exercice 7.3

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers des entiers suivants : 8 ; 250 ; 2012 ; 1665.
2. A l'aide de la décomposition en facteurs premiers, mettre les fractions suivantes sous forme irréductible : $\frac{495}{315}$; $\frac{18525}{895375}$.

Application à la recherche des diviseurs

Théorème

Soit N un entier naturel tel que $N \geq 2$ admettant la décomposition en facteurs premiers suivante : $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec $p_1, p_2, \dots, p_n$ des nombres premiers tels que : $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des entiers naturels non nuls.

♦ Les diviseurs positifs de N sont les entiers de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, pour tout $i \in [1 ; n]$.

♦ Le nombre de diviseurs positifs de N est : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$.

EXEMPLE

- Quel est le nombre de diviseurs positifs de 720 ?

- Déterminer tous les diviseurs positifs de 720.

SOLUTION

On a : la disposition pratique suivante donne la décomposition en facteurs premiers et d'obtenir tous les diviseurs positifs :

720	2	1 ; 2
360	2	4
180	2	8
90	2	16
45	3	3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48
15	3	9 ; 18 ; 36 ; 72 ; 144
5	5	5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 15 ; 30 ; 60 ; 120 ; 240 ; 45 ; 90 ; 180 ; 360 ; 720.
1		

On a : $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ donc le nombre de diviseurs positifs de 720 est $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$.

Les diviseurs positifs de 720 sont :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 30 ; 36 ; 40 ; 45 ; 48 ; 60 ; 72 ; 80 ; 90 ; 120 ; 144 ; 180 ; 240 ; 360 ; 720.

VIII. PGCD et PPCM

Activité

1. Déterminer la liste des diviseurs positifs de 30 et 45. En déduire le PGCD de 30 et 45.
2. Déterminer la liste des 5 premiers multiples strictement positifs de 30 et 45. En déduire le PPCM de 30 et 45.
3. Comparer $\text{PGCD}(30 ; 45) \times \text{PPCM}(30 ; 45)$ et 30×45 .

1. Théorème et définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

- ♦ L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément que l'on note **PGCD** (PGCD= Plus grand commun diviseur).
- ♦ L'ensemble des multiples communs strictement positifs de a et b admet un plus petit élément que l'on note **PPCM** (PPCM = Plus petit commun multiple).

Exercice 8.1

Dans chaque cas, déterminer $\text{PGCD}(a ; b)$ et $\text{PPCM}(a ; b)$ à l'aide de la liste des diviseurs et des multiples de a et b .

- a) $a = 15$ et $b = 84$;
- b) $a = -39$ et $b = 12$;
- c) $a = 35$ et $b = 99$.

2. Nombres premiers entre eux

Définition

On dit que 2 entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$.

Exemples

13 et 49 sont premiers entre eux.

Remarque :

Ne pas confondre « **nombre premier** » et « **nombre premier entre eux** ».

Propriété

Si p est un nombre premier et a un entier relatif non nul, alors p divise a ou p et a sont premiers entre eux.

Propriété

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et D leur PGCD.

Alors $\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont premiers entre eux.

3. Algorithme d'Euclide

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \geq b$.

- ♦ Si b divise a , alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.
- ♦ Si b ne divise pas a , alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Remarque: Lorsque b ne divise pas a , le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'Algorithme d'Euclide.

Démonstration

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \geq b$.

- ♦ Si b divise a , alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$. C'est évident.
- ♦ Si b ne divise pas a , démontrons alors que $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b : $D(a ; b) = D(b ; r)$.

Effectuons la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

- Soit d un entier qui divise a et b alors d divise la combinaison linéaire $a - bq = r$ donc $d \in D(b ; r)$.

- Réciproquement, soit m un entier qui divise b et r alors m divise $bq + r$.

Alors : $D(a ; b) = D(b ; r)$ donc $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

EXEMPLE : Déterminons PGCD(11475 ; 9750).

a (Dividende)	11475	9750	1725	1125	600	525
b (Diviseur)	9750	1725	1125	600	525	75
r (Reste)	1725	1125	600	525	75	0

Donc : PGCD(11475 ; 9750)= 75 .

Exercice 8.2

Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des entiers a et b dans chaque cas.

- a) $a = 264$ et $b = 168$;
- b) $a = 16$ et $b = 19$;
- c) $a = 5000$ et $b = 265$;
- d) $a = 899$ et $b = 31$.

IX. LES THEOREMES DE BEZOUT ET DE GAUSS

1. Le théorème de Bézout

Théorème

Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Démonstration

Soit a et b deux entiers naturels non nuls .

$\Rightarrow$ Supposons que a et b sont premiers entre eux.

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme : $au + bv$ tels que u et v sont des entiers relatifs.

a (obtenu pour $u=1$ et $v=0$) ou $-a$ (obtenu pour $u=-1$ et $v=0$) appartient à E donc (E) n'est pas vide.

Donc (E) admet un plus petit élément d . Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels :

$$d = au + bv.$$

Prouvons que $d = 1$.

Effectuons la division euclidienne de a par d : $a = dq + r$ avec $0 \leq r < d$.

Alors : $r = a - dq = a - (au+bv)q = (1-uq)a - (vq)b$ et comme $r \in \mathbb{N}$ donc $r = 0$ sinon r serait élément de (E) et $r < d$. C'est absurde car d est le plus petit élément de (E) .

$r = 0 \Rightarrow a = dq$ donc d divise a . On démontre de façon analogue que d divise b . Comme a et b sont premiers entre eux donc $d = 1$.

Obtient la relation : $au + bv = 1$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$. Soit $D = \text{PGCD}(a ; b)$, alors D divise la combinaison linéaire $au + bv = 1$ donc $D = 1$, ainsi a et b sont premiers entre eux.

EXEMPLE

Justifions que pour tout entier relatif n , les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
On a pour tout entier relatif n , $5(14n+3) - 14(5n+1) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

Exercices 9.1

1. Démontrer que pour tout entier relatif non nul n , n et $n+1$ sont premiers entre eux.
2. Démontrer que pour tout entier relatif, $n+2$ et $(n+1)^2$ sont premiers entre eux.

Corollaire

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls et $D = \text{PGCD}(a ; b)$.

L'équation (E): $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$, $ax + by = c$ admet au moins une solution si, et seulement si D divise c .

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs non nuls solution de (E).

D divise x et y donc D divise la combinaison linéaire $ax+by= c$.

$\Leftarrow$ Supposons que D divise c alors il existe un entier relatif k tel que $c = kD$.

$\frac{a}{D}$ et $\frac{b}{D}$ sont premiers entre eux donc il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs

$$\frac{a}{D}u + \frac{b}{D}v = 1. \text{ (Théorème de Bézout)}$$

En multipliant l'égalité précédente par kD , on obtient : $aku + bkv = c$. Donc le couple $(ku ; kv)$ est une solution de (E).

2. Le théorème de Gauss

Théorème

Soient a , b , c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c .

Exercice : A l'aide du théorème de Bézout, prouver le théorème de Gauss.

Corollaire

Soit a , b , c des entiers relatifs non nuls.

P1 Si a et b divisent c et si $\text{PGCD}(a,b) = 1$ alors ab divise c .

P2 Si un nombre premier p divise un produit ab , alors p divise a ou p divise b .

Exercice : Démontrer les propriétés **P1** et **P2**.

3. Propriétés du PGCD et du PPCM

Soient a , b des entiers naturels non nuls, $D = \text{PGCD}(a,b)$ et $M = \text{PPCM}(a,b)$.

P1 $\text{PGCD}(ka ; kb) = k \times \text{PGCD}(a ; b)$ et $\text{PPCM}(ka ; kb) = k \times \text{PPCM}(a ; b)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

P2 il existe 2 entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que : $a = Da'$ et $b = Db'$.

P3 Si a et b sont premiers entre eux alors $\text{PPCM}(a ; b) = ab$.

P4 $\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = ab$.

P5 Si $a = \frac{\alpha_1}{1} \frac{\alpha_2}{2} \dots \frac{\alpha_n}{n}$ et $b = \frac{\beta_1}{1} \frac{\beta_2}{2} \dots \frac{\beta_n}{n}$

avec $1, 2, \dots, n$ des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des entiers naturels .

Alors :

♦ $\text{PGCD}(a ; b) = \frac{\mu_1}{1} \frac{\mu_2}{2} \dots \frac{\mu_n}{n}$ où $\mu_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $i \in [1 ; n]$.

♦ $\text{PPCM}(a ; b) = \frac{\delta_1}{1} \frac{\delta_2}{2} \dots \frac{\delta_n}{n}$ où $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ pour tout $i \in [1 ; n]$.

P6 L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de D .

P7 L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de M .

P8 soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls et n un entier naturel non nul tel que c et n soient premiers entre eux. On a : $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{c} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{cn}$

EXERCICES RESOLUS

R1

Soit $a = 600$ et $b = 302500$.

a) Déterminer le PGCD et le PPCM à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

b) Retrouver ces résultats à l'aide de l'Algorithme d'Euclide.

SOLUTION

a) On a : $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ et $2268 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$. Alors :

$\text{PGCD}(600 ; 302500) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$;

$\text{PPCM}(600 ; 302500) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1815000$.

On pouvait obtenir le PPCM connaissant le PGCD grâce à la formule :

$\text{PPCM}(a ; b) \times \text{PGCD}(a ; b) = ab$.

R2 Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels dont le PGCD est 42 et le PPCM 1680.

SOLUTION

$\text{PGCD}(a ; b) = 42$ donc il existe 2 entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que : $a = 42a'$ et $b = 42b'$.

$\text{PPCM}(a ; b) = 1680 \Leftrightarrow \text{PPCM}(42a' ; 42b') = 1680 \Leftrightarrow 42\text{PPCM}(a' ; b') = 1680$

$\Leftrightarrow \text{PPCM}(a' ; b') = 40 \Leftrightarrow a'b' = 3$.

Comme a' et b' sont premiers entre eux, alors tous les couples $(a' ; b')$ sont : $(1 ; 40) ; (8 ; 5) ; (5 ; 8) ; (40 ; 1)$.

Or $a = 42a'$ et $b = 42b'$ donc tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels dont le PGCD est 42 et le PPCM 1680 sont : $(42 ; 1680) ; (336 ; 210) ; (210 ; 336) ; (1680 ; 42)$.

R3 On admet que si 2 entiers naturels sont premiers entre eux, il en est de même de leur somme et de leur produit.

Déterminer tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} a & b \\ \text{PPCM} & a & b \end{cases}$

SOLUTION

Posons $\text{PGCD}(a ; b) = D$, alors il existe 2 entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que : $a = Da'$ et $b = Db'$.

$$\begin{cases} a & b \\ \text{PPCM} & a & b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D & a' & b' \\ \text{PPCM} & Da' & Db' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D & a' & b' \\ Da'b' & & \end{cases} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Comme a' et b' sont premiers entre eux, alors il en est de même de leur somme et de leur produit. Par ailleurs D est un diviseur de 3^2 et de 2^2 . On en déduit que : $D = 2^2$ et donc $a' + b' = 8$ et $a'b' = 15 = 3 \times 5$.

Tous les couples $(a' ; b')$ cherchés sont : $(3 ; 5) ; (5 ; 3)$.

Or $a = 12a'$ et $b = 12b'$ donc tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $a+b = 96$ et $\text{PPCM}(a ; b) = 180$ sont : $(36 ; 60) ; (60 ; 36)$.

R4 On considère l'équation (E) : $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$, $16x - 55y = 0$.

Résoudre (E).

SOLUTION

On a : $16 = 2^4$ et $55 = 5 \times 11$ donc $\text{PGCD}(16 ; 55) = 1$, soit 16 et 55 sont premiers entre eux.

$$(E) \Leftrightarrow 16x = 55y \quad (1)$$

Ici, 16 divise 55y, or 16 et 55 sont premiers entre eux donc 16 divise y (Théorème de Gauss).

On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que : $y = 16k$.

En remplaçant dans l'égalité (1), y par $16k$, on obtient :

$$16x = 55(16k). \text{ Soit encore : } x = 55k.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est : $\{ (55k ; 16k), k \in \mathbb{Z} \}$.

R5 On considère l'équation (E) : $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$, $98x + 29y = 1$.

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution de (E).

2. Résoudre (E).

SOLUTION

1. Utilisons l'algorithme d'Euclide :

q	3	2	1	1	1	3
a	98	29	11	7	4	3
b	29	11	7	4	3	1
r	11	7	4	3	1	0

Donc $\text{PGCD}(98 ; 29) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de Bézout l'équation (E) admet au moins une solution.

$$98 = 29 \times 3 + 11 \qquad 7 = 4 \times 1 + 3$$

$$29 = 11 \times 2 + 7 \qquad 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$11 = 7 \times 1 + 4$$

On remonte dans l'algorithme :

$$1 = 4 - 3 \times 1$$

$$1 = 4 - (7 - 4 \times 1) \times 1 = 4 \times 2 - 7$$

$$1 = (11 - 7 \times 1) \times 2 - 7 = 7 \times (-3) + 11 \times 2$$

$$1 = (29 - 11 \times 2) \times (-3) + 11 \times 2 = 11 \times (8) + 29 \times (-3)$$

$$1 = (98 - 29 \times 3) \times (8) + 29 \times (-3) = 98 \times (8) + 29 \times (-27)$$

On obtient au final : $98 \times (8) + 29 \times (-27) = 1$ donc le couple (x_0, y_0) est une solution particulière de (E).

2. Recherche de la solution générale

$$(E) \Leftrightarrow 98x + 29y = 98x_0 + 29y_0$$

$$(E) \Leftrightarrow 98(x - x_0) = 29(y_0 - y) \quad (1).$$

Ici, 29 divise $98(x - x_0)$, or 29 et 98 sont premiers entre eux donc 29 divise $x - x_0$ (Théorème de Gauss).

On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que : $x - x_0 = 29k$, donc $x = x_0 + 29k$.

En remplaçant dans l'égalité (1), $x - x_0$ par $29k$, on obtient :

$$98 \times 29k = 29(y_0 - y). \text{ Soit encore : } y_0 - y = 98k. \text{ Donc : } y = y_0 - 98k.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est : $\{(29k + 8; -27 - 98k), k \in \mathbb{Z}\}$.

R6 On considère l'équation (E) : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $2012x - 81y = 7$.

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution de (E).

2. Résoudre (E).

SOLUTION

1. Considérons l'équation (E') : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, $2012x - 81y = 1$.

En procédant comme dans l'exercice précédent :

On obtient au final : $2012 \times (-25) - 81 \times (-621) = 1$ donc le couple $(-25, -621)$ est une solution particulière de (E').

En multipliant l'égalité $2012 \times (-25) - 81 \times (-621) = 1$ par 7, on obtient :

$2012 \times (-175) - 81 \times (-4347) = 7$, donc le couple $(x_0, y_0) = (-175, -4347)$ est une solution particulière de (E).

2. Recherche de la solution générale

$$(E) \Leftrightarrow 2012x - 81y = 2012x_0 - 81y_0$$

$$(E) \Leftrightarrow 2012(x - x_0) = 81(y - y_0) \quad (1).$$

Ici, 81 divise $2012(x - x_0)$, or 2012 et 81 sont premiers entre eux donc 81 divise $x - x_0$ (Théorème de Gauss).

On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que : $x - x_0 = 81k$, donc $x = x_0 + 81k$.

En remplaçant dans l'égalité (1), $x - x_0$ par $81k$, on obtient :

$$2012 \times 81k = 81(y - y_0). \text{ Soit encore : } y - y_0 = 2012k. \text{ Donc : } y = y_0 + 2012k.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est : $\{(81k - 175; 2012k - 4347), k \in \mathbb{Z}\}$.

R7 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système

$$(S) \begin{cases} x \equiv 15 \pmod{41} \\ x \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$$

SOLUTION

(S) $\Leftrightarrow$ il existe $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$, tel que $x = 15 + 41u = 5 + 12v$.

$$15 + 41u = 5 + 12v \Leftrightarrow 41u - 12v = -10.$$

Réolvons l'équation (E): $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$, $41u - 12v = -10$.

- Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de (E):

q	3	2	2	2
a	41	12	5	2
b	12	5	2	1
r	5	2	1	0

Donc $\text{PGCD}(41;12) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de Bézout l'équation (E) admet au moins une solution.

$$41 = 12 \times 3 + 5$$

$$12 = 5 \times 2 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

On remonte dans l'algorithme :

$$1 = 5 - 2 \times 2$$

$$1 = 5 - (12 - 5 \times 2) \times 2 = 12 \times (-2) + 5 \times (5)$$

$$1 = (41 - 12 \times 3) \times (5) + 12 \times (-2) = 41 \times (5) + 12 \times (-17)$$

On obtient au final : $41 \times (5) - 12 \times (17) = 1$, par suite : $41 \times (-50) - 12 \times (-170) = -10$.

donc le couple (u_0, v_0) est une solution particulière de (E).

- Recherche de la solution générale de (E) :

$$(E) \Leftrightarrow 41u - 12v = 41u_0 - 12v_0$$

$$(E) \Leftrightarrow 41(u - u_0) = 12(v - v_0) \quad (1).$$

Ici, 12 divise $41(u - u_0)$ or 12 et 41 sont premiers entre eux donc 12 divise $u - u_0$ (Théorème de Gauss).

On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que : $u - u_0 = 12k$, donc $u = u_0 + 12k$.

En remplaçant dans l'égalité (1), $u - u_0$ par $12k$, on obtient :

$$41 \times 12k = 12(v - v_0), \text{ soit encore : } v - v_0 = 41k. \text{ Donc : } v = v_0 + 41k.$$

Conclusion : Comme $x = 15 + 41u = 5 + 12v$, alors :

$$x = 15 + 41(-50 + 12k) = 5 + 12(-170 + 41k).$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\{ -2035 + 492k / k \in \mathbb{Z} \}$.

R8 BAC 2006

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose : $A = n^2 - n$;

$$B = n^2 + n \quad \text{et} \quad d = \text{pgcd}(A, B).$$

1.a) Démontrer que tout diviseur commun à A et n divise 2.

b) Démontrer que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.

2. On suppose que n est impair.

a) Démontrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b) Démontrer que d divise n . En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

3. On suppose que n est pair.

a) Démontrer que 4 ne divise pas A .

b) Démontrer que $d = 2p$, où p un nombre entier impair.

c) Démontrer que p divise n . En déduire que $d = 2$.

4. Déduire de ce qui précède que 197 et 257 sont premiers entre eux.

SOLUTION

1.a) Trouvons une combinaison linéaire de A et n qui donne 2 :

$$\text{on a : } A = n^2 - n \quad \text{donc : } A - n^2 + n = 2, \text{ soit encore : } A + n(-n + 2) = 2.$$

Si un entier D divise A et n alors D divise la combinaison linéaire $A + n(-n + 2) = 2$.

b) Trouvons une combinaison linéaire de A et B qui donne $4n$:

on a : $B - A = 4n$.

Si un entier D divise A et B alors D divise la combinaison linéaire $B - A = 4n$.

2. Supposons que n est impair : alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Alors : $A = k^2 - k = 4k^2 = 2k^2$, donc A est impair.

Et $B = k^2 + k = 4k^2 + k = 2k^2 + k$, donc B est impair.

3. Supposons que n est pair : alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.

Alors : $A = k^2 - k = 2k^2 - k$, et

$B = k^2 + k = 2k^2 + k$.

Donc A et B sont pairs.

a) Utilisons le raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe un nombre entier naturel k' tel que : $A = 4k'$.

Alors, $4k' = 2k^2 - k$ donc $2k' = k^2 - k$. Ce qui est absurde car $2k'$ est pair et $k^2 - k$ est impair. Donc l'hypothèse que 4 divise A est fausse.

b) A et B sont pairs donc 2 divise A et B , alors 2 divise d . Donc il existe un entier naturel p tel que : $d = 2p$.

Si p est pair alors 4 doit diviser d , or d divise A donc 4 doit diviser A . Ce qui est faux d'après la question précédente.

c) p divise 2 et d divise A et B donc p divise A et B , alors p divise $4n$, d'après la question 1.b)

Comme p est impair, alors p et 4 sont premiers entre eux, donc (Théorème de Gauss) p divise n .

p divise n et A donc p divise 2 (d'après 1.a). Donc $p = 1$ ou $p = 2$, mais p est impair donc $p = 1$. Par suite, $d = 2p = 2$.

4. Lorsque $n = 15$, alors $A = 197$ et $B = 257$. n étant impair, donc $\text{PGCD}(A, B) = 1$, d'après la question 2.b).

EXERCICES

E1 Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de a par b .

1) $a = 4950$; $b = 12$

2) $a = -4950$; $b = 12$

3) $a = -2010$; $b = -25$

4) $a = 18$; $b = 60$

E2 Déterminer le reste dans la division euclidienne par 5 des nombres suivants :
 $a = 4017$; $b = 2009$; $c = a+b$; $d = a^3b$

E3 Déterminer les cas suivants, les valeurs de l'entier naturel n pour que p soit irréductible.

E4 Ecrire en base deux les entiers suivants par écrits en base dix : 8 ; 16 ; 53 ; 2012 ;
 $9 + 8 + 5 + 1$

E5 Donner l'écriture en base dix des nombres : $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^2$; $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^2$

E6 Soit x un entier dont l'écriture en base dix est : $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{10}$

1) Démontrer que : $x \equiv \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{10} [8]$

2) En déduire pour chacun des entiers suivants, le reste de la division euclidienne par 8 :

1 470 589 ; 7 354 702 553 120 .

E7

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 11475 et 9750.

En déduire PGCD (11475 ; 9750) et PPCM (11475 ; 9750).

E8 Les nombres de MERSENNE

On appelle nombre de MERSENNE, tout entier de la forme $2^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

1) Vérifier que 2, 3, 5, 7 sont premiers.

2) Démontrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

3) Vérifier que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

E9 Les nombres parfaits

Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autres que lui-même).

1) Vérifier que 6 ; 28 ; 496 sont des nombres parfaits.

2) Démontrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

E10 Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2012} par 13.

E11 1° a) Vérifier les congruences :

$$12 \equiv \quad \text{et} \quad 6 \equiv$$

b) En déduire que $2^{70} - 2^{70}$ est divisible par 13.

2° Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $2^n - 2^n$ est divisible par 13 .

E12 1° Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{32} par 641

2° En déduire que le nombre $F_5 = 2^{25} - 2$ est divisible par 641

E13

1° Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 17.

2° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n - 1$ est divisible par 17.

E14 1° Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 2^n par 7.

2° Pour quelles valeurs de n , $15 \times 2^n - 3$ est divisible par 7 ?

E15 1° Déterminer suivant les valeurs de l'entier les restes de la division euclidienne de 2^n et 2^n par 19.

2° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 2^n + 3$ est divisible par 19.

E16 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

E17 En utilisant les congruences, démontrer que pour tout entier naturel n ,

1) $2^{2n+1} + 2^{2n+2}$ est divisible par 7

2) $2^n - 2^n$ est divisible par 6.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \times 2^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

4) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n^3} - 2^n$ est divisible par 6.

E18 Déterminer tous les entiers naturels n tels que la division euclidienne par 32 admette un reste égal au carré du quotient.

E19 A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer dans chaque cas le PGCD de a et b .

1) $a = 120$; $b = 15$

2) $a = 105$; $b = 35$

E20 Démontrer en utilisant l'égalité de Bézout que pour tout entier relatif n , les entiers $2n+1$ et $3n+1$ sont premiers entre eux.

E21 Déterminer dans chaque cas tous les couples (a, b) d'entiers naturels :

1) le PGCD est 16 et le PPCM est 1536.

2) $ab = 100$ et PGCD $a, b = 10$

3) $a + b = 10$ et PGCD $a, b = 1$ avec $a < b$.

4) $a + b = 10$ et PPCM $a, b = 10$.

5) $\text{PPCM}(a, b) + 11\text{PGCD}(a, b) = 203$.

6) $\text{PPCM}(a, b) = 210 \times \text{PGCD}(a, b)$ et $b - a = \text{PGCD}(a, b)$.

7) $a^2 - b^2 = 1$.

E22 Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation proposée :

1) $x + y = 10$

2) $x - y = 10$

3) $-x + y = 10$

4) $x - y = 10$

E23 Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x - y = 10$

E24 Résoudre le système (S) :

$$x \in \mathbb{Z} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

E25 On considère l'équation (E) :

$$x + y \in \mathbb{Z}^2, \quad x - y \in \mathbb{Z}$$

1° Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $x = u + v$

2° a) Vérifier que le couple $(1, 1)$ est une solution de (E)

b) Résoudre (E)

3° x, y étant une solution de (E), on pose $d = \text{PGCD}(x, y)$

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux.

E26 Un commerçant a deux cartons contenant le même nombre de bonbons. Avec ceux du premier carton, il fait le plus possible de sachets de 23 bonbons. Avec ceux du deuxième carton plus le reste du premier, il fait des sachets de 37 bonbons.

Sachant qu'il a confectionné au total 72 sachets et qu'il ne reste plus de bonbons, combien en avait-il au départ.

E27 Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = -i$ et $z_B = \frac{7}{2}i$

1° On considère la droite (D) d'équation :

$$x + y = 10$$

Démontrer que l'ensemble des points de (2) dont les coordonnées sont des entiers est l'ensemble des points

M_k $k = 0, 1, \dots, 10$ lorsque k décrit $\mathbb{Z}$.

2° Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S de centre A qui transforme B en M_{-1} .

3° On pose $B_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$B_{n+1} = S(B_n)$$

On note z_n l'affixe de B_n .

a) Placer $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ géométriquement.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n - z_A = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{2}} (z_0 - z_A)$$

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels A, B_0 et B_n sont alignés.

E28 1° a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $3^n - 1$ est un multiple de 7.
b) En déduire que $3^n - 1$, $3^{n+1} - 1$, $3^{n+2} - 1$ est un multiple de 7.
2° Déterminer les restes de la division par 7 de 3^n pour tout entier naturel n .
3° $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 3^n - 1$.
a) Etudier suivant les valeurs de n , le reste de la division de A par 7.
b) En déduire la valeur de n pour lesquelles A_n est divisible par 7.
4° On pose : $a = \frac{3^n - 1}{2}$;
 $b = \frac{3^n - 1}{2}$
a) Vérifier que a et b sont des nombres de la forme A_n .

E29 Un astronome a observé au jour t_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle t_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de jours qui s'écouleront entre t_0 et

t_1 .

1° a) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement A et B entre t_0 et

t_1 .

Démontrer que le couple (u, v) est solution de l'équation : $105u - 81v = 6$

b) Résoudre (E)

2° Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

E30 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 3^n - 1$ et $B_n = 3^{n+1} - 1$.

1° Démontrer que :

A_n et B_n sont premiers entre eux.

2° Quelles sont les valeurs possibles de n ?

3° Déterminer les entiers n tels que :

a) A_n divise B_n .

b) B_n divise A_n .

E31 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5. On pose : $A = 3^n - 2^n - 1$; $B = 2^n - 1$ et $d = \text{pgcd}(A, B)$.

1. Démontrer que A et B sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2. On pose : $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$ et $d = \text{PGCD}(\alpha ; \beta)$.

a. Démontrer que d divise 5

b. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $n-2$ est multiples de 5.

3. Démontrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de A et B .

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

E32

Soit (E) : $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

1)a) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 35 et 27.

b) En déduire une solution de (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x^2 + y^2 = 1$.

2)a) Vérifier que $(-x, -y)$ est une solution de (E).

b) Démontrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant :

$x = \cos(k\pi/2)$ et $y = \sin(k\pi/2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) Les habitants d'un village adorent deux génies protecteurs N'GOUAN et MOAYE. Le génie N'GOUAN est adoré tous les jours 140 jours et le génie MOAYE tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme des jours de grâce appelés jour de génies.

Un matin, le village a adoré le génie MOAYE.

Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du prochain « jour des génies » sachant que le village avait adoré le génie N'GOUAN 8 jours auparavant.

E33 On considère l'équation (E) :

$$x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}^2, \quad x \leq y$$

1° a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre (E) .

2° A l'occasion de la fête de Noël, un

fermier a vendu des poulets et des pintades.
Chaque pintade a été vendue à 6200F et
chaque poulet à 4700F.

La vente de toutes ses volailles lui a
rapporté 522500F.

Combien de volaille de chaque espèce a-t-il
pu vendre ?

8. PROBABILITES

I) DENOMBREMENT (RAPPELS)

1 .Dénombrement des tirages de p éléments dans un ensemble à n éléments (p < n)

Conditions		Le nombre de tirages possibles est le nombre de :	Exemple usuel (mots clés)
$p \geq 1$	Les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés .	p-liste d'éléments non tous distincts ; soit n^p	Tirages successifs avec remise de p objets pris parmi n.
$p < n$	Les p éléments sont tous distincts (différents) et sont ordonnés	arrangements de p éléments pris parmi n ; soit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Tirages successifs sans remise de p objets pris parmi n.
$p = n$	Les p éléments sont tous distincts (différents) et sont ordonnés	Permutations de n éléments de E ; Soit $P_n = n !$	-Tirages successifs sans remise des n objets d'un ensemble contenant n - anagrammes d'un mot de lettres toutes distinctes .
$p \leq n$	Les p éléments sont tous distincts (différents) et sont non ordonnés	Combinaisons de p éléments pris parmi les n de E ; Soit $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$	Tirages simultanés de p objets pris parmi n

2. Comment dénombrer ?

POINT METHODE

1 lire l'énoncé plusieurs fois

2 donner ou trouver un exemple de résultat de l'expérience

(au cas où c'est possible donner tous les résultats puis les compter)

3 se poser les deux questions suivantes

• **y a-t-il ordre ou non ❶** (au niveau des éléments constituant les résultats)

• **y a-t-il répétition ou non ❷** (au niveau des éléments constituant les résultats)

Remarque : Pour savoir s'il y a ordre il suffit de permuter deux éléments composants l'exemple proposé et constater que l'on a un résultat différent du précédent.

Réponse à ces deux questions

1 2	répétition	Non répétition ou pas de répétition
Ordre	p-listes d'éléments (non tous distincts deux à deux) de E le nombre de tels résultats est $(\text{card } E)^p$ soit n^p	Arrangements ($p < n$) ou Permutations ($n = p$) Le nombre de tels résultats est A_n^p ou $P_n = n!$ respectivement.
Pas d'ordre		Combinaisons ($p \leq n$) Le nombre de tels résultats est C_n^p

Remarque :

Dans certains exercices ; il faut combiner les différentes formules. (cas des exercices où les éléments à dénombrer sont en ordre et doivent occuper des places)

Et même quelques fois il faut dénombrer directement sans aucune de ces formules.

Exercice résolu 1

Une urne contient 12 jetons différents : 5 jetons noirs numérotés de 1 à 5, 3 jetons blancs numérotés de 1 à 3 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1. On tire **simultanément 5 jetons** de l'urne.

a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien y a-t-il de tirages comportant 2 noirs et 3 blancs ?

c. Combien y a-t-il de tirages comportant 2 rouges, 1 noir et 2 blancs ?

d. Combien y a-t-il de tirages comportant au moins 3 jetons noirs.

2. Les 5 jetons sont tirés **successivement sans remise**

Mêmes questions

3. Les 5 jetons sont tirés **successivement avec remise**

Mêmes questions

solutions

1. a. Les 5 jetons sont tirés simultanément. (On ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les jetons sont tirés).

Exemple de résultats. {R1 ; R4 ; N2 ; B2 ; N3}

Un tirage est une combinaison de 5 jetons pris parmi 12 donc le nombre de tirages possibles est le nombre de combinaisons de 5 jetons pris parmi 12 ; soit $C_{12}^5 = 792$.

Le nombre de tirages possibles est 792.

b. Exemple de résultats {B2 ; B3 ; N2 ; B1 ; N3}

Un tel tirage est composé de 2 jetons noirs pris parmi 5, soit C_5^2 choix possibles et de 3 jetons blancs pris parmi 3, soit C_3^3 choix possible.

Le nombre de tirages comportant 2 noirs et 3 blancs est $C_5^2 \times C_3^3 = 10$.

c. Exemple de résultats {R1 ; R3 ; N2 ; B1 ; B3}

On montre de même que le nombre de tirages comportant 2 rouges, 1 noir et 2 blancs est

$$C_4^2 \times C_5^1 \times C_3^2 = 90.$$

d. La notion « d'**au moins 3...** » se traduit par « exactement 3 ou exactement 4 ou exactement 5 ».

Ainsi il y a

☞ $C_5^3 \times C_7^2$ tirages comportant exactement **3 jetons noirs** (pris parmi 5) et 2 jetons quelconques pris 7 (3 blancs et 4 rouges)

☞ $C_5^4 \times C_7^1$ tirages comportant exactement **4 jetons noirs** (pris parmi 5) et 1 jeton quelconque pris 7 (3 blancs et 4 rouges)

☞ $C_5^5 \times C_7^0$ tirages comportant exactement **5 jetons noirs** (pris parmi 5) et aucun jeton pris 7 (3 blancs et 4 rouges).

On dénombre donc $C_5^3 \times C_7^2 + C_5^4 \times C_7^1 + C_5^5 \times C_7^0 = 246$.

Le nombre de tirages comportant au moins 3 jetons noirs est 246.

2. a. Cette fois –ci les 5 jetons sont tirés **successivement et sans remise**. (On tient compte de l'ordre dans lequel les jetons sont tirés).

Exemple de résultats. (R1 ; R4 ; N2 ; B2 ; N3). Un tirage est un arrangement de 5 jetons pris parmi 12 donc le nombre de tirages possibles **est le nombre d'arrangements de 5 jetons pris parmi 12** ; soit $A_{12}^5 = 95040$.

b. Exemples de résultats (B1 ; B3 ; B2 ; N1 ; N3) ; (B1 ; B3 ; N1 ; B2 ; N3)

Un tel tirage est composé de 2 jetons noirs pris parmi 5 soit A_5^2 choix possibles et de 3 jetons blancs pris parmi 3 soit A_3^3 choix possibles.

Ici l'on tient compte **des positions des 2 jetons rouges** sur les 5 places composant un résultat (observer les exemples ci-dessus) Il y a donc C_5^2 façons de répartir ces 2 jetons (on aurait pu s'intéresser aux C_5^3 façons de ranger les jetons blancs).

Le nombre de tirages comportant 2 jetons noirs et 3 jetons blancs est $C_5^2 \times A_5^2 \times A_3^3 = 1200$

c. Exemples de résultats (R1 ; R3 ; N2 ; B1 ; B3) ; (B3 ; R1 ; N2 ; B1 ; R3)

Ici si l'on tient compte **des positions des 2 jetons rouges** sur les 5 places composant un résultat ; de la position du jeton noir sur les 3 places restantes et enfin de l'unique position des 2 jetons blancs sur les 2 places restantes (observer les exemples ci-dessus) Il y a donc C_5^2 façons de répartir les 2 jetons rouges, C_3^1 façons de positionner le jeton noir et C_2^2 façon de ranger les 2 jetons blancs

Le nombre de tirages comportant 2 jetons rouges, 1 noir et 2 blancs est

$$C_5^2 \times C_3^1 \times C_2^2 \times A_4^2 \times A_5^1 \times A_3^2 = 10800.$$

d. La notion « d'**au moins 3...** » se traduit par « exactement 3 ou exactement 4 ou exactement 5 » Ainsi il y a (**en tenant compte des positions des jetons**)

☞ $C_5^3 \times A_5^3 \times A_7^2$ tirages comportant exactement **3 jetons noirs** (pris parmi 5) et 2 jetons quelconques pris 7 (3 blancs et 4 rouges)

☞ $C_5^4 \times A_5^4 \times A_7^1$ tirages comportant exactement **4 jetons noirs** (pris parmi 5) et 1 jeton quelconque pris parmi 7 (3 blancs et 4 rouges)

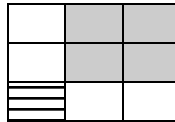
☞ $A_5^5 \times A_7^0$ tirages comportant exactement **5 jetons noirs** (pris parmi 5) et aucun jeton pris parmi 7 (3 blancs et 4 rouges).

On dénombre donc $(C_5^3 \times A_5^3 \times A_7^2) + (C_5^4 \times A_5^4 \times A_7^1) + (A_5^5 \times A_7^0) = 29520$.

Le nombre de tirages comportant au moins 3 jetons noirs est 29520.

3. a-. Cette fois –ci les 5 jetons sont tirés **successivement** avec **remise**. (On tient compte de l'ordre dans lequel les jetons sont tirés et certains éléments peuvent être répétés)).
Exemple de résultat. (R1 ; R4 ; N2 ; R1 ; N2)
 Un tirage est donc une 5-liste d'éléments non tous nécessairement distincts pris parmi 12 ainsi le nombre de tirages possibles est le nombre de telles 5-listes soit $12^5 = 248832$.
Remarque : La rédaction des autres questions est semblable à celle des questions du 2°)
Il suffit de remplacer tous les A_n^p par n^p

Exercice résolu 2 : Dénombrer le nombre de carrés possibles sur cette figure



Solution

*Il suffit de considérer les carrés simples (en rayures) et leurs associations (en gris) qui donnent des carrés.
 On dénombre ainsi 14 Carrés.*

Exercice 1.1

Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes, deux sports (Tennis et Golf) sont proposés aux vacanciers. On sait que 24 personnes font du tennis et que 15 font du Golf. En outre 6 personnes pratiquent et le tennis et le Golf.
 Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

Exercice 1.2

On considère les sept lettres du mot VOITURE.

- 1) Combien de mots de 7 lettres distinctes peut-on former ?
- 2) Combien de mots de 5 lettres distinctes peut-on former ?
- 3) Combien de mots de 7 lettres distinctes ou non peut-on former ?

N.B : On appelle « mot » un groupe de lettres n'ayant pas nécessairement une signification.

Exercice 1.3

A l'oral d'un examen un candidat doit obligatoirement répondre à 5 questions sur les 8 questions numérotées de 1 à 8.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix possibles si les questions 1, 2, 3 sont imposées ?
3. Combien y a-t-il de choix possibles s'il doit répondre à au moins 4 des cinq premières questions ?

Exercice 1.4

On dispose d'un damier carré de 4 lignes et de 4 colonnes ainsi que de 4 jetons.
 Le jeu consiste à répartir les 4 jetons sur 4 cases différentes.
 A/. les quatre jetons sont indiscernables.

- 1) Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
- 2) Dénombrer les dispositions dans lesquelles :
 - a. Aucun jeton n'est placé sur une diagonale.
 - b. Trois jetons exactement sont placés sur une même diagonale.
 - c. Il y a exactement un jeton par ligne et un jeton par colonne.

B/. Les quatre jetons sont identifiables par les lettres M, A, T et H
Même questions.

II) PROBABILITES

1. Vocabulaires

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est imprévisible.

Chaque résultat possible est une éventualité.

L'ensemble des éventualités constitue l'**univers** noté souvent Ω .

Toute partie de l'univers est un **événement**.

Un événement comprenant une seule éventualité est un **événement élémentaire**.

L'ensemble vide est appelé **événement impossible**.

L'univers est appelé **événement certain**.

L'**événement contraire** de A, noté $\bar{A}$, est constitué des éventualités ne réalisant pas A.

L'événement A ou B (ou encore $A \cup B$) est la **réunion des deux événements**.

L'événement A et B (ou encore $A \cap B$) est l'**intersection des deux événements**.

Deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$

2. Probabilité d'un événement

Dans toute la suite, on considère une expérience aléatoire conduisant à un nombre fini n d'éventualités et on note Ω l'univers associé

a) Equiprobabilité

Définition

Lorsque les événements élémentaires ont tous la même chance d'être réalisée, on dit que les événements élémentaires sont équiprobables.

Dans ce cas, on dit que l'expérience aléatoire se réalise sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

Remarque

on supposera les événements élémentaires équiprobables chaque fois qu'une expression telle que : **dé non pipé ...**, **éléments indiscernables au toucher ...**, **non truqués....etc**, sera utilisées.

Dans toute la suite, les expériences aléatoires sont considérées sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

b) Probabilité d'un événement

Définition

On appelle probabilité d'un événement A le nombre réel noté $P(A)$ tel que

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables A}}{\text{Nombre de cas possible}}$$

Propriétés

- La probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{\text{Card}\Omega}$
- La somme des probabilités des événements élémentaires est 1.
- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $\bar{A}$ et A étant deux événements contraires, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Exercice résolu 3

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On tire 2 boules de l'urne en considérant les hypothèses suivantes :

- 1) On tire les 2 boules simultanément
 - 2) On tire les 2 boules successivement et sans remise
 - 3) On tire les 2 boules successivement et avec remise
- Déterminer dans chacun des cas la probabilité de tirer 2 boules rouges.

Solution

1) L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 2 boules prises parmi 8. D'où $\text{card } \Omega = C_8^2 = 28$.

Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges », $\text{card } A = C_5^2 = 10$

D'où $P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

2) L'univers Ω est l'ensemble des arrangements de 2 boules prises parmi 8. D'où $\text{card } \Omega = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$.

Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges », $\text{card } A = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

D'où $P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

3) L'univers Ω est l'ensemble des 2-listes de 2 boules prises parmi 8. D'où $\text{card } \Omega = 8^2 = 64$. Soit A l'événement « tirer 2 boules rouges », $\text{card } A = 5^2 = 25$

D'où $P(A) = \frac{25}{64}$

Exercice résolu 4

Un libraire propose 30 titres différents d'un même auteur : 5 de ces livres sont couverts de cuir et coûtent 9000 francs l'un ; 12 ont une couverture toilée et coûtent 6000 francs l'un ; les autres sont cartonnés et coûtent 3000 francs l'un.

Un client vient acheter 3 livres de cet auteur sans préciser de livre particulier. Le libraire prend au hasard 3 livres de sa collection.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A « Le libraire choisit 3 livres couverts de cuir »
- B « Le libraire choisit au moins un livre couvert de cuir »
- C « Le libraire choisit 3 livres ayant la même couverture »
- D « Le libraire choisit 3 livres pour un montant exact de 15000 francs »
- E « Le libraire choisit 3 livres dont le coût n'excède pas 12 000 francs »

Solution

• L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 livres prises parmi 30. D'où

$$\text{card } \Omega = C_{30}^5 = 4060$$

Parmi les livres, 5 sont couverts de cuir, l'événement A consiste à choisir simultanément 3 livres

parmi ces 5 donc $\text{Card } A = C_5^3$ et $P(A) = \frac{10}{4060} = \frac{1}{406}$

• L'événement contraire $\bar{B}$ de B consiste à choisir 3 livres parmi les 25 non couverts de cuir. On

a donc $\text{Card } \bar{B} = C_{25}^3$ et $P(\bar{B}) = \frac{2300}{4060} = \frac{115}{203}$ par suite $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{88}{203}$

• L'événement C consiste à choisir soit 3 livres couverts de cuir, soit 3 livres de couvertures toilées, soit 3 livres de couvertures cartonnées, donc $\text{Card } C = C_5^3 + C_{12}^3 + C_{13}^3$

et $P(C) = \frac{516}{4060} = \frac{129}{1015}$.

• Il ya deux situations possibles pour la réalisation de l'événement D :

Première situation : le libraire choisit 1 livre de 3000 et 2 livres de 6000.

Deuxième situation : le libraire choisit 2 livres de 3000 et 1 livre de 9000.

Donc $\text{Card } D = C_{13}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_5^1$ et $P(D) = \frac{1248}{4060} = \frac{312}{1015}$

• Il ya deux situations possibles pour la réalisation de l'événement E :

Première situation : le libraire choisit 3 livres de 3000

Deuxième situation : le libraire choisit 2 livres de 3000 et un livre de 9000.

Donc $\text{Card } E = C_{13}^3 + C_{12}^2 + C_{12}^1$ et $P(E) = \frac{1222}{4060} = \frac{611}{2030}$

3. Evènements indépendants

a Définition

Soit A et B deux événements

A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Interprétation

Les événements A et B sont indépendants **lorsque** la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre

Propriétés

■ Deux événements A et B sont indépendants **lorsque** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

■ Si A et B sont deux événements indépendants alors :

$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

$\bar{A}$ et B sont indépendants

A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Remarque :

Ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.

Deux événements incompatibles ne peuvent pas être indépendants.

Exercice résolu 5

On lance deux fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le chiffre apparu sur la face supérieure.

1. Les événements A : « le 5 sort en premier » et B : « la somme des chiffres apparus est 7 », sont-ils indépendants ?
2. Même question avec C : « le 6 sort en premier » et D : « la somme des chiffres apparus est 12 ».

Solution

L'univers Ω est l'ensemble de tous les couples de deux chiffres pris entre 1 et 6.

$$\text{Card } \Omega = 6^2 = 36$$

$$A = \{(5 ; 1) ; (5 ; 2) ; (5 ; 3) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6)\},$$

$$\text{D'où } p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$B = \{(6 ; 1) ; (1 ; 6) ; (5 ; 2) ; (2 ; 5) ; (4 ; 3) ; (3 ; 4)\},$$

$$\text{D'où } p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$A \cap B = \{(5 ; 2)\}, \text{ alors } p(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

$$\text{On a } p(A \cap B) = \frac{1}{36} \text{ et } p(A) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$\text{Soit } p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Les événements A et B sont indépendants.

$$C = \{(6 ; 1) ; (6 ; 2) ; (6 ; 3) ; (6 ; 4) ; (6 ; 5) ; (6 ; 6)\}, \text{ alors } p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$D = \{(6 ; 6)\}, \text{ d'où } p(D) = \frac{1}{36}$$

$$C \cap D = \{(6 ; 6)\}, \text{ en conséquence } p(C \cap D) = \frac{1}{36}$$

Ici $p(C \cap D) \neq p(C) \times p(D)$, donc **les événements C et D ne sont pas indépendants.**

Exercice

Un joueur jette une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3.

On admet qu'à chaque lancer, il atteint une case et une seule case et que les lancers sont indépendants.

Les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre : $1/12$; $1/3$; $7/12$.

NB : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Le joueur lance la fléchette trois fois.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans cet ordre ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 ?

4. Schéma de Bernoulli

Définitions

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités : L'une est appelée succès notée S et l'autre échec notée $\bar{S}$.
- Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de suite ($n \geq 1$) une même épreuve de Bernoulli.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques de Bernoulli et p la probabilité du succès. La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Avec $0 \leq k \leq n$

Exercice résolu 6

On lance 5 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le 6.

Solution

Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et à s'intéresser au 6. Le succès S « Obtenir 6 » a pour probabilité $P(S) = \frac{1}{6}$.

L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli. L'événement A « Obtenir exactement 4 fois le 6 au cours des 5 lancers » a pour probabilité :

$$P(A) = C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}.$$

Exercice résolu 7

Un jeu consiste à faire tourner une roue autour de son axe, roue sur laquelle on a marqué un secteur angulaire de 50° .

On déclare qu'il y a succès si la roue s'arrête de telle sorte que la flèche (fixe) soit en face du secteur angulaire de 50° , sinon il y a échec.

On lance la roue 7 fois.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A « Obtenir exactement trois succès »

B « Obtenir au moins un succès »

(On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats)

Solution

Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à faire tourner la roue et à observer le secteur indiqué par la flèche. Le succès S « La flèche indique le secteur de 50° » a pour probabilité $P(S) = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$.

L'épreuve étant répétée 10 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli. L'événement A « Obtenir exactement 3 succès » a pour probabilité :

$$P(A) = C_7^3 \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^4 \approx$$

Pour calculer $P(B)$ considérons l'événement $\bar{B}$ « Obtenir aucun succès au cours des 7 épreuves »

$$P(\bar{B}) = C_7^0 \left(\frac{5}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^7 = \left(\frac{31}{36}\right)^7 \text{ donc } P(B) = 1 - \left(\frac{31}{36}\right)^7 \approx$$

Exercice

On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

1. Calculer probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie.
2. Calculer probabilité pour qu'au moins un appareil soit en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie.
2. Calculer probabilité pour qu'au moins 8 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie.

5. Variables aléatoires

Définition

- Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- X étant une variable aléatoire, considérons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X . $X(\Omega)$ est appelé l'univers image de Ω par X .
- La loi de probabilité de X est l'application de $X(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à chaque valeur x_i de $X(\Omega)$ associe la probabilité que X prenne la valeur x_i , notée $P(X = x_i)$.

NB : Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

x_i	x_1	x_2		x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_n

Dans ce tableau il est préférable de ranger les valeurs prises par X dans l'ordre croissant.

Remarque : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Espérance mathématique, variance et écart type.

Définitions

Soit une variable aléatoire X prenant n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

- On appelle espérance mathématique de X le nombre réel noté $E(X)$ tel que :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

- On appelle variance de X le nombre réel positif noté $V(X)$ tel que :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

$$\text{ou } V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

- On appelle écart type de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation de l'espérance mathématique en terme de jeu :

Soit $E(X)$ l'espérance mathématique d'une variable aléatoire mesurant le gain algébrique (différence entre la somme perçue et la mise).

- ♦ Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **avantageux pour le joueur**.
- ♦ Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est **désavantageux pour le joueur**.
- ♦ Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exercice résolu 8

Un joueur lance successivement trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 600 francs s'il obtient 3 fois « FACE », gagne 300 francs s'il obtient 2 fois « FACE » exactement, gagne 100 francs s'il obtient une fois « FACE » exactement, mais perd 1000 francs s'il n'obtient que des « PILE ».

On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).

- 1) Etablir la loi de probabilité de la variable X .
- 2) Déterminer la probabilité de gagner strictement moins de 300 francs.
- 3) Calculer l'espérance mathématique de la variable X . Que représente ce résultat pour le joueur ?
- 4) Un jeu est équitable si l'espérance de X est nulle.
Le jeu précédent est-il équitable ? favorable ou défavorable au joueur ?
5. Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

Solution

1. Les résultats possibles sont : (F;F;F) ; (F;F;P) ; (F;P;F) ; (P;F;F) ; (P;P;F) ; (P;F;P) ; (F;P;P) ; (P;P;P).

Les différents résultats possibles donnent les gains suivants : -1000 ; 100 ; 300 ; 600.

$$P(X = -1000) = \frac{1}{8} ; P(X = 100) = \frac{3}{8} ; P(X = 300) = \frac{3}{8} ; P(X = 600) = \frac{1}{8}$$

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	—	—	—	—

2. Soit A l'événement « Gagner moins de 300F ». Donc $P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$.

$$3. E(X) = (-1000)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = 250.$$

Le gain moyen du joueur est 250F.

4. $E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur.

5. Soit S le montant que le joueur devrait perdre s'il n'obtenait que des PILES pour que le jeu soit équitable.

$$E(X) = (-S)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3000-S}{8}.$$

Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$.

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{3000-S}{8} = 0 \Leftrightarrow S = 3000.$$

Le joueur doit perdre 3000F lorsqu'il n'obtient que des PILES pour que le jeu soit équitable.

Exercice

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

1.Établir la loi de probabilité de X .

2.Calculer l'espérance mathématique de X .

Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques de Bernoulli, p la probabilité du succès et X la variable aléatoire désignant le nombre k de succès au cours des n épreuves ($0 \leq k \leq n$).

■La loi de probabilité de X est définie par : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres n et p

■Dans ce cas on démontre que l'espérance mathématique $E(X) = np$
 la variance $V(X) = np(1-p)$.

Exercice résolu 9

Sur une route, deux carrefours sont munis de feux tricolores A et B. On supposera que ces feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur donnée est un pur hasard. On admet que la probabilité pour que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

Les feux A et B fonctionnent de manière indépendante.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.

a. Calculer la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.

b. Calculer la probabilité pour qu'il rencontre au moins un feu vert.

2. Un autre automobiliste passe 5 fois au carrefour muni du feu A.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert

a. Calculer la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.

b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X .

Donner l'arrondi d'ordre zéro de l'espérance mathématique de X et l'interpréter.

Solution

1. a. Soit l'événement A « le feu A est vert » et l'événement B « Le feu B est vert ».

Les événements A et B sont indépendants.

On a donc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

b. Soit l'événement C « l'automobiliste rencontre au moins un feu vert » et $\bar{C}$ l'événement contraire de C .

On a $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$, et comme $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants alors :

$P(\bar{C}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

D'où $P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

2.

a. Lorsque l'automobiliste se présente au carrefour A, on s'intéresse à deux résultats : S « il rencontre le feu vert » et $\bar{S}$ « il ne rencontre pas le feu vert ». Cette expérience est un épreuve de

Bernoulli. On a $P(S = \frac{3}{4})$

L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{4}$.

La probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert est :

$$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} \approx$$

b. Ici, il est préférable d'utiliser les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ puisque X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

$$\text{Ainsi, } E(X) = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{4} \text{ et } V(X) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{64}$$
$$E(X) \approx$$

L'automobiliste rencontre en moyenne 4 feux verts.

L'événement A « Obtenir exactement 3 succès » a pour probabilité : $P(A)$

$$C_7^3 \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^4 \approx$$

Pour calculer $P(B)$ considérons l'événement $\bar{B}$ « Obtenir aucun succès au cours des 7 épreuves »

$$P(\bar{B}) = C_7^0 \left(\frac{5}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{36}\right)^7 = \left(\frac{31}{36}\right)^7 \text{ donc } P(B) = 1 - \left(\frac{31}{36}\right)^7 \approx$$

Exercice

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A.

Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a. Déterminer la loi de X .

b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . Quel est le sens de ce nombre ?

3. a. Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %.

Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

Fonction de répartition

Définition

La fonction de répartition de X est l'application de IR dans $[0, 1]$ qui à tout nombre réel x associe la probabilité **que X prenne une valeur inférieure ou égale à x** , notée $P(X \leq x)$

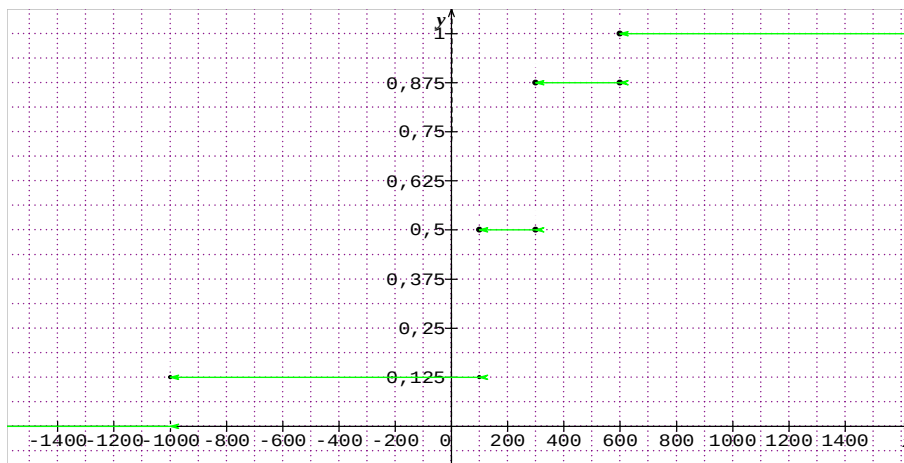
Exemple

Considérons la loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exercice résolu 8 :

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

La fonction F de répartition de X est définie sur IR par :

Pour tout $x \in]-\infty, -1000[$: $F(x) = 0$
 Pour tout $x \in [-1000, 100[$: $F(x) = \frac{1}{8}$
 Pour tout $x \in [100, 300[$: $F(x) = \frac{4}{8}$
 Pour tout $x \in [300, 600[$: $F(x) = \frac{6}{8}$
 Pour tout $x \in [600, +\infty[$: $F(x) = 1$



Remarque

La fonction de répartition est une fonction définie par intervalles.

La fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante.

EXERCICE

Une urne contient quinze boules indiscernables au toucher dont une noire, cinq blanches et neuf rouges.

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

X est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage,

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X,
3. Tracer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

EXERCICES

E1

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher : 8 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 3 boules de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles)

E2

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

E3

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux

faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, deux faces exactement soient noires.

2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces exactement soient de la même couleur ».

Calculer la probabilité de l'évènement C..

3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les trois faces obtenues soient de couleurs différentes.

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance les dés A et B simultanément.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule face verte à l'issue du jeu.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux faces vertes à l'issue du jeu.

E4

Sur un disque on a enregistré dix morceaux différents. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau :

Code du morceau enregistré	A	B	C	D
Temps d'écoute en secondes	280	200	240	280

E	F	G	H	I	J
260	240	280	200	240	280

Un appareil de lecture sélectionne au hasard un des dix morceaux et un seul. Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionné.

1. Quelle est la probabilité, pour chacun des morceaux, d'être sélectionné à cette lecture ?

- 2.a) Calculer la probabilité de l'évènement E_1 :

« Le morceau sélectionné à une durée d'écoute de 240 secondes ».

b) Calculer la probabilité de l'événement E_2 :

« Le morceau sélectionné à une durée d'écoute supérieure à 220 secondes ».

3. On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart-type.

E5

Deux dés cubiques équilibrés A et B ont leurs faces marquées de la façon suivante :
le dé A : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

le dé B : 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 5.

On lance les deux dés et l'on note S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de S et calculer son espérance mathématique.

E6

Une urne contient 6 boules :

- 2 sont bleues et numérotées 0 et 1.
- 3 sont rouges et numérotées 0,1 et 2.
- 1 est verte et numérotée 1.

Un jeu consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne et on appelle X la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les 2 boules tirées.

Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

On répète le jeu précédent 5 fois de suite en prenant soin après chaque tirage de remettre les 2 boules tirées dans l'urne.

Lors d'un tirage on désigne par succès le fait d'avoir $X = 3$.

Quelle est la probabilité d'avoir au plus un succès lors des 5 tirages ?

E7

Une urne contient 9 boules vertes et une boule rouge.

Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément 3 boules de l'urne, quelle est la probabilité p_1 d'obtenir exactement une boule rouge ?

L'expérience précédente cinq fois de suite, avec à chaque fois, remise dans l'urne des 3 boules que l'on a tirées. Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours de cinq tirages. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Calculer l'écart-type de X .

On extrait une première boule de l'urne et on ne l'y remet que si elle est rouge. On extrait ensuite une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité p_2 pour que cette boule soit rouge ?

E8

A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun 1 billet dont :

- ♦ 7 pour la gare B (prix du billet 5000 F)
- ♦ 5 pour la gare C (prix du billet 6000F)
- ♦ 4 pour la gare D (prix du billet 7500 F)

On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet en franc.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique de X .

c Calculer l'écart type de X .

d Définir la fonction de répartition F de X puis la représenter dans un repère orthogonal

On choisit maintenant, au hasard, trois de ces voyageurs.

Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.

Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.

E9

Un joueur lance simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées. Il gagne 60 francs s'il obtient 3 faces, gagne 30 francs s'il obtient 2 faces exactement, gagne 10 francs s'il obtient une face exactement, mais perd 100 francs s'il n'obtient que des piles.

On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).

Etablir la loi de probabilité de la variable X

Déterminer :

- La probabilité de gagner strictement moins de 30 francs.
- La probabilité de gagner strictement plus de 10 francs.

Calculer l'espérance mathématique de la variable X . Que représente ce résultat pour le joueur ?

Un jeu est équitable si l'espérance de X est nulle.

Le jeu précédent est-il équitable ? favorable ou défavorable au joueur ?

Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

E10

On dispose de neuf jetons indiscernables au toucher et portant respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On place ces neuf jetons au hasard sur la grille ci-dessous, en plaçant un jeton par case.

De combien de façons peut-on placer les neuf jetons sur la grille ?

Quelle est la probabilité de lire « 421 » sur la deuxième ligne ?

Quelle est la probabilité de lire « 421 » sur la deuxième ligne et « 345 » sur la première colonne ?

Maintenant, pour remplir les cases de la première ligne, on tire un jeton parmi les neuf, on écrit le chiffre dans la première case, on remet le jeton et on recommence l'expérience pour chacune des deux autres cases.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins un « 4 » sur la première ligne.

E11

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n , la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n -ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 , p_3 et p_4 .

2. On considère les événements suivants : B_n : «On tire une boule blanche lors du n -ième tirage », U_n : «On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n .

b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n .

c. En déduire l'expression de p_n

E3

Dans un sac, il y a des grosses boules et des petites ; ces boules sont blanches ou noires. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites parmi lesquelles 6 sont blanches et 3 sont noires.

1. Sachant qu'il y a 3 boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules « petites et noires », « grosses et noires », « petites et blanches ». (On pourra utiliser un tableau à double entrée)

2. On tire une boule au hasard, chaque ayant la même probabilité d'être tirée, quelles sont les probabilités pour qu'elle soit :

a. Blanche et petite ?

E11

Un couple de futurs parents décide d'avoir 3 enfants. On fait l'hypothèse qu'à chaque naissance il n'y a qu'un seul enfant et qu'à chaque fois il y a autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille.

On considère les événements suivants :

A: "ils auront 3 filles"

B: "ils auront 3 enfants du même sexe"

C: "ils auront au plus une fille"

D: "les 3 enfants ne seront pas de même sexe".

Calculer p_A , p_B , p_C et p_D .

E12

Le carré ABCD représente une cible sur laquelle on lance des fléchettes.

Les longueurs des côtés des 4 carrés sont respectivement de 8 cm, 6 cm, 4 cm et 2 cm.

On suppose que :

- on ne rate jamais la cible
- la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire.

Calculer les probabilités P_1 , P_2 , P_3 et P_4 d'atteindre les zones C1, C2, C3 et C4 (la zone C2 est en gris)

Doumbia lance une fléchette. S'il atteint :

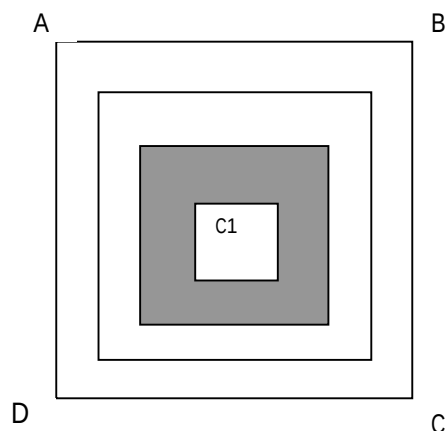
- C1 il gagne 100 F
- C2 il gagne 50 F
- C3 il perd 20 F
- C4 il perd 30 F

On désigne par X le gain algébrique de Doumbia

Donner l'univers image de X

Donner la loi de probabilité de X

On suppose que Pol lance 16 fléchettes, les unes après les autres, dans les mêmes conditions. Raisonnablement peut-il espérer gagner de l'argent ? le jeu est-il équitable ?



E13

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme. Une porte est munie d'un dispositif portant les touches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D.

La porte s'ouvre lorsque l'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne ouvre la porte au premier essai dans chacun des cas suivants :

- a) elle ignore le code ;
- b) elle se souvient seulement que les trois chiffres du code sont pairs ;
- c) elle se souvient de plus que les deux lettres du code sont identiques.

2. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'un des trois chiffres frappés ne figure pas sur la liste des chiffres du code.

Un enfant ignorant le code tente de déclencher l'alarme.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il provoque le déclenchement de la sirène à l'issue d'un seul essai ?

Il effectue 8 essais successifs et indépendants.

b) Calculer la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme exactement deux fois au cours des 8 essais.

c) Calculer la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme au moins 7 fois au cours des 8 essais.

E14

Un loueur de bateau possède 5 bateaux qu'il loue à la journée.

Chaque jour il les vérifie et les réparent éventuellement.

Chaque bateau a une chance sur dix d'être immobilisé.

Calculer la probabilité qu'un jour donné, il y ait exactement 2 bateaux immobilisés.

E15

On considère 2 avions : un biréacteur B et un quadriréacteur Q. On suppose que tous les réacteurs de ces avions ont la même probabilité p , de tomber en panne et qu'ils sont indépendants les uns des autres.

Soit X et Y les variables aléatoires suivantes :

X est le nombre des réacteurs de B tombant en panne ;

Y est le nombre des réacteurs de Q, tombant en panne.

1. Déterminer les lois de probabilités de X et Y .

2. On estime qu'un avion ne peut achever son vol que si la moitié au moins de ces réacteurs fonctionnent normalement.

Soit p_B et p_Q les probabilités d'un vol réussi respectivement par B et par Q.

a) Calculer p_B et p_Q en fonction de p .

b) Indiquer selon les valeurs de p celui des 2 avions B et Q qui offre la meilleure sécurité.

E16

Dans le but de contrôler l'état d'ébriété des conducteurs automobiles, la police procède à un alcootest.

On admet que 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété.

La police contrôle n personnes. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de personnes en état d'ébriété au cours de ce contrôle.

1. Déterminer la probabilité p_n qu'au cours de ce contrôle, il y ait au moins une personne en état d'ébriété.

2. Déterminer le nombre minimal n de personnes à contrôler par la police pour que

$$p_n \geq \dots$$
E17

Avant un appel téléphonique, un abonné s'aperçoit qu'il a oublié les quatre derniers chiffres du numéro à former, mais il sait qu'ils sont distincts et il se rappelle le

nombre formé par les autres chiffres.

1. Il compose un de ces numéros au hasard. Qu'elle est la probabilité pour que parmi les quatre derniers chiffres composés :

a) 0 ne figure pas ?

b) 0 figure exactement deux fois ?

c) 0 figure au moins une fois ?

2. L'abonné se souvient maintenant que les quatre derniers chiffres sont 1,3,8,5 mais sans retrouver leur ordre.

Il compose un de ces numéros au hasard, tous les choix étant équiprobables.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres qui ne figurent pas à leur place.

a) Donner la loi de probabilité de X .

b) Déterminer l'espérance mathématique de X .

E18

Un parking pour voitures comporte 10 places numérotées de 1 à 10 délimitées pour le stationnement des véhicules.

La probabilité d'occupation d'une place quelconque est égale à 70%. On admet de plus que chaque place a la même probabilité d'être occupée.

Un conducteur veut garer au hasard son véhicule sur ce parking.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 places libres quand il se présente à l'entrée du parking ?

2. Quelle est la probabilité pour que les places numérotées 3, 6 et 9 soient libres quand le conducteur se présente à l'entrée du parking ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places libres dont le numéro est un multiple de 3.

a) Donner la loi de probabilité de X .

b) Déterminer l'espérance mathématique de X .

c) Représenter la fonction de répartition de X .

E19

On propose le jeu suivant :

Pour une mise de 600 F, un joueur lance un dé cubique bien équilibré possédant : une face numérotée 1 ; deux faces numérotées 2 ; une face numérotée 4 ; une

face numérotée 5 ; une face numérotée 6 .

- Si le dé amène un 6, le joueur reçoit 1800 F.
- Si le dé amène un 5, le joueur reçoit 600 F.
- Si le dé amène un 4, le joueur reçoit 300 F.
- Dans les autres cas, le joueur ne reçoit rien.

1. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Un joueur se présente : il n'a que 1000F. Quelle est la probabilité qu'il puisse jouer une deuxième partie ?

E20 Dans un tiroir, il y a quatre chaussettes noires, six rouges et deux blanches, toutes indiscernables au toucher.

Lors d'une panne d'électricité, le savant COSINUS choisit deux chaussettes au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il aille faire ses cours avec deux chaussettes de couleurs différentes ?

E21

Un jeu consiste à lancer trois billes numérotées 1, 2, 3 en direction de trois trous notés t_1, t_2, t_3 ; chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir jusqu'à trois billes.

1. Calculer la probabilité pour que :

- a) chaque trou reçoive une bille ;
- b) le trou t_1 reçoive deux billes exactement.
- c) chaque trou reçoive au maximum deux billes.

2. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de billes tombées dans le trou t_1 .

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance mathématique de X .

3. La partie est gagnée si les trois billes entrent dans des trous différents.

Quelle est la probabilité pour qu'en jouant

sept parties, successivement, on gagne exactement trois parties ?

E22

Une urne contient 2 jetons blancs et n jetons noirs, indiscernables au toucher, ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$).

1. Une partie d'un jeu consiste à tirer 2 jetons de l'urne, simultanément. Pour chaque jeton blanc tiré, le joueur gagne 2 points et pour chaque jeton noir tiré, il perd 1 point.

Mr KONAN participe à une partie.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique des points obtenus par Mr KONAN à l'issue d'un tirage.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Démontrer que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est telle que :

$$\frac{2}{n+2} - \frac{n^2+3n+4}{n+1}.$$

- c) Déterminer la valeur de n pour laquelle le jeu est équitable.

2. Pour la suite, on prendra $n = 4$.

Mr KONAN joue 8 parties successives, avec remise dans l'urne des jetons tirés avant chaque nouvelle partie.

On considère que Mr KONAN est gagnant à l'issue de chaque partie, lorsque le gain algébrique des points obtenus est strictement positif et qu'il est perdant dans le cas contraire.

- a) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne exactement trois parties à l'issue des 8 parties.
- b) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne exactement sept parties à l'issue des 8 parties.
- c) Calculer la probabilité pour que Mr KONAN gagne au moins une parties à l'issue des 8 parties.

RUBRIQUE PROBLEMES

Problème 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1).$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I; J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C).

Partie B

On note A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2 - 1$.

1a) Vérifier que : $\forall x \quad \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1}.$

b) Calculer $\int_1^{e^2-1} \frac{x}{x+1} dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer A

Problème 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty$ par :

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x} - \ln x.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I; J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

1. Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$

2. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

5. Démontrer que l'équation $x \in \quad \infty$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 4,9 et 5

6. Démontrer que :

$$\forall x \in \quad \alpha, f(x) < 0$$

$$\forall x \in \quad \cup \quad \alpha + \infty, f(x) > 0.$$

$$\forall x \in \{0; \alpha\} \quad f(x) = 0.$$

7. Exprimer $\ln \alpha$ en fonction de α

8. Tracer (T) et (C).

Partie B

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^\alpha \ln x dx$.

2. Calculer en fonction de α ; l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Partie C

Soit g la restriction de f à $]0; 2]$.

1. Démontrer que g réalise une bijection de $]0; 2]$ sur $]-\infty; -1]$.

2. Démontrer la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

3. Tracer la courbe (Γ) de g^{-1} .

Problème 3

Partie A

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = -e^{2x} + 5e^x - 4.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$.

2. Justifier que :

$$\forall x \in]-\infty ; -\ln 2[\cup]\ln 2 ; +\infty[, g(x)$$

$$\forall x \in]-\ln 2 ; \ln 2[, g(x) < 0 .$$

Partie B

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

3. Calculer les limites de f à gauche et à droite en $\ln 2$. Interpréter graphiquement les résultats

4a) Démontrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2 - e^{x-2}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5.a) Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty ; \ln 2[$.

6.a) Démontrer que la droite (D_2) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D_2) sur $]\ln 2 ; +\infty[$.

7. Démontrer que le point

$A(\ln 2 ; -\frac{1}{4} - \ln 2)$ est centre de symétrie de (C).

8. Tracer (C).

Partie C

Pour tout réel t , on note $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (D_2) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 0$.

a) Calculer $A(t)$

b) Calculer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$

Problème 4

Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x) .$$

1. Calculer $g(-1)$.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (On ne calculera les limites)

3. Justifier que :

$$\forall x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[, g(x)$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{2} ; 0[, g(x) < 0 .$$

Partie B

f est la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{\ln -x}{x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I; J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calculer la limite de f en 0

2. Calculer la limite de f en $-\infty$

3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4.a) Démontrer que : $\forall x \in]-\infty ; 0[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} .$$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Soit h la restriction de f à $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

a) Démontrer que g réalise une bijection de $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Démontrer que l'équation $x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1, α_2 $-2,37 < \alpha_1 < -2,36$ et $-0,49 < \alpha_2 < -0,48$.

c) Vérifier que : $\ln(\alpha_1^2) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1$.

6. On désigne par (C') la représentation graphique de la bijection réciproque h^{-1}

dans le repère orthonormé (O ;I;J).
Construire (C) et (C').

Partie C

Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (D), (OJ) et la droite d'équation $x = \alpha_1$.

1. Calculer A et exprimer le résultat sans le symbole ln.

2. Donner une valeur approchée de A à 10^{-1} près.

Problème 5

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = 2x + 1 - x e^{x-1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = 2e^{1-x} - x - 1$.

1. Calculer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. Calculer g(1) et justifier que :

$$\forall x \in]-\infty, 1], g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, g(x) \geq 0.$$

Partie B

1 Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2.a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C)

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3.a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x-1} g(x).$$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que l'équation $x \in [1, 9; 2]$ $g(x) = 0$ admet une solution unique α

5. Tracer (C).

Partie C

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

2. Démontrer que : $A = 4(\alpha - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha})$.

Partie D

On considère la fonction h définie sur $[1, 9; 2]$ par : $h(x) = 1 + \ln(2 + \frac{1}{x})$.

1. Démontrer que : $\forall x \in [1, 9; 2], f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x$.

2. Démontrer que :

$$\forall x \in [1, 9; 2], h(x) \in [1, 9; 2].$$

3. $\forall x \in [1, 9; 2], |h'(x)| \leq \frac{1}{9}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = h(u_n).$$

a) Démontrer que :

$$\forall x \in [1, 9; 2], h(x) \in [1, 9; 2].$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$$

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9^n} \times \frac{1}{10}$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

e) A partir de quelle valeur de n u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Problème 6

Soit la fonction f dérivable sur $]-\infty, +\infty[$ et définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x \ln x, \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = -1.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;I;J). L'unité graphique est 5 cm.

Partie A

1.a) Montrer que f est continue en 0.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+1}{x}$

Interpréter graphiquement le résultat.

2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique s comprise entre 1,7 et 1,8.

Pour la suite on prendra 1,8 comme valeur approchée de s .

b) Justifier que :

$$\forall x \in]s, \infty[, f(x) > 0$$

$$\forall x \in]-\infty, s[, f(x) < 0$$

4.a) Démontrer que (C) admet $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

b) Tracer (C).

c) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I = \int_1^s f(x) dx$.

d) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire A en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = s$.

Problème 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} e^{-1/x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O ; I ; J). On prendra 2cm sur (OI) et 4cm sur (OJ).

1. Calculer la limite de f à gauche en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

2. Démontrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$. (On pourra faire le changement de variable $u = \frac{1}{x}$).

3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Tracer (C).

6. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$

a) Calculer l'aire A_α en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_\alpha$.

Problème 8

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + x e^x$$

1) Etudier les variations de g .

2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$:

$$F(n) = e^x + \ln|x|$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer (C).

4. On note A l'aire de domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Calculer A à l'aide d'une intégration par parties.

Problème 9

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (Cf) et (Cg) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé (O I J). Unité graphique : 2cm.

Partie A

1. Etudier la parité de f et g.
2. Etudier la continuité de f et g en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f et g en 0.
Interpréter graphiquement les résultats.
4. Calculer les limites de f et g en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f et g.
6. Etudier la position de (Cf) et (Cg)
7. Tracer (Cf) et (Cg).

Partie B

Soit t un réel tel que $0 < t < e$.

On note A(t) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (Cf), (Cg) et droites d'équations $x = t$ et $x = e$.

1. A l'aire d'une intégration par parties, calculer A(t)
2. Calculer la limite de A(t) lorsque t tend vers 0.

Problème 10

f est la fonction dérivable sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphique est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $] -1; +\infty[$ et définie par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$$

1. Calculer les limites de g en -1 et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Calculer g(0).
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on notera α .
c) Justifier que α appartient à $] -0,8; -0,7[$.

4. Justifier que :

$$\forall x \in] -0,8; -0,7[\quad g(x) > 0 ;$$
$$\forall x \in] -0,7; 0[\quad g(x) < 0 ;$$

Partie B

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Démontrer que :

$$\forall x \in] 0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C)

Partie C

Soit t un réel tel que $t > 1$ et on note de A(t) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

1.a) Vérifier que : $\forall x > 1$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

b) Calculer $\int_1^t \frac{dx}{x(1+x)}$

2.a) Calculer A(t) à l'aide d'une intégration par parties.

b) Calculer la limite de A(t) lorsque t tend vers $+\infty$.

Problème 11

f est la fonction définie sur $] 0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

Partie A

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
Donner les équations des tangentes à (C) en ces points.
4. Tracer (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à $[\sqrt{-1} ; +\infty[$

1. Démontrer que g est une bijection de $[\sqrt{-1} ; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{4} ; \infty[$
2. Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.
3. Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable.
4. Tracer la courbe (Γ) de g^{-1} .

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale $I = \int_1^e \ln x \, dx$ puis l'intégrale $J = \int_1^e \ln x^2 \, dx$
2. Calculer en c^{-2} l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

Problème 12

Partie A

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphique est $2c$.

- 1.a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer (C) .
4. a) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$
b) Calculer en c^{-2} l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.

Partie B

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

$$\text{par : } g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

On note (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Etudier la parité de g .
2. Calculer la limite de g en 1.
3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
4. Donner une équation de la tangente (T) à (C') au point d'abscisse 0.
5. Soit h la fonction définie sur $[0 ; 1[$ par : $h(x) = g(x)$.
a) Etudier les variations de h .
b) En déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in [0, 1[$.
c) En déduire la position de (C') par rapport à (T) sur $[0 ; 1[$.
6. Tracer (C') .
7. a) Démontrer que g est une bijection.
b) Déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .
c) Construire la courbe (Γ) de g^{-1} .
8. A l'aide d'une intégration par parties calculer en c^{-2} l'aire de la partie du plan limitée par (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Problème 13

f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

$$\text{par : } f(x) = \frac{2}{3} + 1 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) l'unité graphique est $2c$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{2}{3}$ est asymptote à (C) .

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que le point A(0 ;1) est centre de symétrie de (C).

5. Tracer (C).

Partie B Soit λ un réel tel que $\lambda > 4$.
On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = \lambda$.

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $A(\lambda)$.

2. Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsqu'a tend vers $+\infty$.

Problème 14

Partie A

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. On note (F) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) l'unité graphique est 2c.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer (F).

4. Justifier que : $\forall x \neq 1, f(x) = -1 + \frac{2}{1-x}$

5. Calculer l'aire de la partie limitée par (F), la droite d'équation $y = -1$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Partie B

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = f(e^x).$$

On note (G) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Démontrer que g est impaire.

2. Calculer la limite de g à droite en 0 et en $+\infty$.

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (G).

5. Vérifier que : $\forall x \neq 1, g(x) = -1 + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}$

6. Soit t un réel tel que ; $t > 1$.

a) Calculer l'aire $A(t)$ e la partie de plan limitée par (G), la droite d'équation $y = -1$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ lors que t en vers $+\infty$.

Partie C

Soit h la fonction définie sur

$[0 ; e[\cup]e ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = f(\ln x), & \text{si} \\ h(0) = -1. \end{cases}$$

On note (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Etudier la continuité de h en 0.

2. Etudier la dérivabilité de h en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

3. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

4. Tracer (H).

Problème 15

Partie A

Soit g la fonction dérivable sur $[0 ; +\infty$ et définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2).$$

1. Calculer la limite de g en $+\infty$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation $x \in]0 ; +\infty$
 $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Justifier que $1,9 < \alpha < 2$.

c) Justifier que :

$$\forall x \in]0 ; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0$$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (L'unité graphique est 2cm).

1. Etudier la parité de f.

2. Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser f' .

3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en donner une interprétation graphique.

4.a) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en O.

6. Soit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$u(x) = \ln(1+x^2) - x^2.$$

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$.

b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* f(x) - x = \frac{u(x)}{x}.$$

c) En déduire les positions relatives de (T) et (C).

7. Tracer (T) et (C).

Problème 16

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(x) = e^{-2x} \ln(e^{-x} - 1).$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques 2cm en abscisse et 5cm en ordonnée.

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = \frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1).$$

1. Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation $x \in]1 ; +\infty$
 $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b) Justifier que $\sqrt{e} + 1 < \alpha < e + 1$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près

c) Justifier que :

$$\forall x \in]0 ; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0$$

5. Soit φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$g(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^2}.$$

a) Calculer les limites de φ en 1 et en $+\infty$

b) Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de g(x).

Partie B

1. Vérifier que $f(x) = 2\varphi(x)$.

2. En déduire :

a) les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) le sens de variation et le tableau de variation de f.

3. Justifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha}$.

4. Tracer (C).

Partie C

1. Justifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$2y' + y = 2\left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x - 1} - 1\right).$$

2. On pose $h(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$

Déterminer une primitive H de h sur ∞

3. Soit λ un réel tel que : $\lambda > \ln 2$.

On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \lambda$.

a) calculer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 17

Partie A

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

Partie B

g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $g(x) = \ln(f(x))$

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .

b) Calculer les limites de g aux bornes de

D_g puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative (C_g) de g dans un repère orthonormé.

4. On pose $A = \int_{\frac{3}{2}}^3$.

a) Donner une interprétation graphique de A .

b) Calculer A .

Partie C

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{f(x)} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 0.$$

1.a) Démontrer que h est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0.

c) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$, interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

3.a) Calculer l'abscisse du point H , point d'intersection de (C_h) avec la droite d'équation $y = 1$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_h) en H .

4. Tracer la courbe représentative (C_h) de h dans un repère orthonormé.

5. a) Justifier que la restriction φ de h à $[0; 2]$ est une bijection de $[0; 2]$ sur $h([0; 2])$. Préciser $h([0; 2])$.

b) Justifier que φ^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(\varphi^{-1})'(1)$.

c) Tracer la courbe représentative (Γ) de φ^{-1} dans un repère orthonormé.

Problème 18

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f(x) = e^x.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
(unité 2 cm)

Partie A

1.a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

b) Etudier la position de (D) par rapport à (C).

3. Tracer (C).

Partie B

Soit la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} \ln 2 - \frac{1}{8}.$$

1.a) Etudier les variations de g .

b) En déduire le signe de g .

c) Etudier les variations de g .

2. Démontrer que : $\forall x \in [0 ; 1] : 0 \leq g(x) \leq 5 \cdot 10^{-3}$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C₁), (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = 1$.

a) A l'aide de résultats précédents donner un encadrement de $\mathcal{A}$

b) Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 0,03 près.

Problème 19

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x -$

1) Etudier les variations de g .

2) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

f est la fonction définie sur $]-1; +\infty[$:

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x)$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). unité : 4 cm.

1. Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

2.a) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour tout x de $]-1; +\infty[$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Tracer (C).

Partie C

Soit $I = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$

1. Interpréter graphiquement I .

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties I .

(On pourra remarquer que : $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1}$.)

3. Démontrer que :

$$I = \alpha - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha}.$$

Problème 20 BAC 2001

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et si $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x.$$

L'objet de ce problème est l'étude de f et le tracé de sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$.

1. Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.

2. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

a) Déterminer g' et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3. Vérifier que : $g(1) = 0$.

4. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]3; 4[$ et $g(\alpha) = 0$.

Partie B : Détermination d'une valeur approchée de α

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 2\ln x + 1$.

1. Démontrer que $\forall x \in [3; 4], h(x) \in [3; 4]$.

2. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3,5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4].$$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1 .

c) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

On admettra que (U_n) converge vers la valeur α précédente et on prendra $\alpha \approx 3,5$.

Partie C : Etude de la fonction f

1. Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0 .

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.

3. En donner une interprétation graphique.

4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

5. Calculer la limite de quand x tend vers puis interpréter graphiquement ce résultat.

6. La fonction f est dérivable sur et on note f' sa dérivée.

a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f' .

c) Dresser le tableau de variation de f .

7. Tracer la courbe (C) .

8. Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

b) Calculer la limite de $A(t)$ quand t tend vers 0 .

Problème 21

(Les parties I et II sont indépendantes)

Partie I

On se propose de chercher les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$.

1. Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = x - 1$ est solution de (E).

2. Soit (E') l'équation différentielle : $f'(x) + 2f(x) = 0$.

a) Résoudre (E').

b) Soit k un nombre réel. Démontrer que les fonctions, f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1 \text{ sont solutions de (E).}$$

3. a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est solution de E alors $f - g$ est solution de (E').

b) En déduire les solutions de (E).

Partie II

On donne la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} + x - 1$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le

repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Étudier la position de (C) par rapport à (D).

3. a) Pour tout nombre réel x , calculer $f'(x)$

b) Étudier le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

4. a) Démontrer que l'équation :

$x \in \left[\frac{\ln 2}{2} ; +\infty \right[$, $f'(x) = 0$ admet une solution

unique α .

b) Démontrer que α appartient à l'intervalle $]0,79 ; 0,8[$.

c) Construire (D) et (C).

5. Soit t un nombre réel supérieur à α .

a) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = \alpha$.

b) Exprimer $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ en fonction de α .

Problème 22

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, définies sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). On prendra 2 cm pour unité graphique.

PARTIE A. Étude des variations de f_n , ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit, pour tout entier naturel n non nul, la fonction g_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

a) Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier le sens de variation de g_n .

c) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n et que cette solution

appartient à l'intervalle $[1 ; 3]$.

d) Étudier le signe de $g_n(x)$ selon les valeurs de x .

2. a) Étudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}.$$

c) En déduire le sens de variation de f_n et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la droite (D_n) d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe (C_n) .

b) Étudier la position de (C_n) par rapport à (D_n) .

PARTIE B Étude des cas particuliers $n=1$ et $n=2$.

1. α_n étant le nombre défini e dans A. 1) montrer que : $\alpha_1 = 1$ et que $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2. a) En déduire que l'on a $f_2(\alpha_2) > -1,24$.

b) En utilisant le sens de variation de f_2 montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.

3. Représenter (D_1) , (D_2) , (C_1) et (C_2) dans le même repère (O, I, J).

4. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations $x=1$, $x=e$, $y=0$.

PARTIE C. Étude des positions relatives des courbes (C_n) .

1. a) Pour tout entier naturel non nul et pour tout x de $]0 ; +\infty[$, calculer $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.

b) Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit d la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$$

a. Étudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b. Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à $[0 ; 1]$.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $f_n(\beta) = \beta$.

3. A l'aide des résultats obtenus dans la question 1 et 2 de cette partie, démontrer que les courbes (C_n) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ préciser les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

Problème 23

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $I = [-1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

1.a. Démontrer que pour tout t de I on a :

$$g'(t) = -\frac{t^3}{1+t}$$

b. En déduire que pour tout t de I on a :

$$|g'(t)| \leq 2|t|^3.$$

c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déduire de ce qui précède que $\forall x \in I$, on a : $|g(x)| \leq 2x^4$ (on pourra distinguer deux cas suivant le signe de x).

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . (on prendra 2 cm pour unité).

1. En utilisant les encadrements obtenus au A., démontrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser une équation cartésienne de la tangente (T) au point d'abscisse 0 à la courbe (C) .

2. Soit h la fonction numérique définie sur $]-1; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x}$ x

a. Étudier le sens de variation de h (on ne demande pas de calculer les limites aux bornes).

b. Préciser $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-1; +\infty[$.

3. Étudier les limites de f en -1 et $+\infty$.

4.a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ et l'exprimer à l'aide de $h(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5. Construire avec soin la courbe (C) en précisant ses asymptotes.

Partie C

1.a. Démontrer que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a : $-t^2 \leq h'(t) \leq 0$.

b. Pour tout nombre réel x positif ou nul, en déduire par intégration, un encadrement de $h(x)$ et démontrer que : $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

2. Soit ϕ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\phi(x) = f(x) - x$.

De l'étude des variations de ϕ , déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution réelle strictement positive notée a .

Vérifier que $a < 1$.

Partie D

1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Montrer par récurrence que cette suite est bien définie et que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2.a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3} |u_n - a|.$$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{3^n}$.

c) Prouver que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

d) En déduire, en justifiant, une valeur de n pour laquelle (u_n) constitue une valeur approchée de a à 10^{-3} près. Préciser cette valeur approchée.

Problème 24

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , (unité 5 cm).

A. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x$.

1. Étudier les variations de g .

2. a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.

3. Tracer la courbe représentative (C_g) de g dans le repère (O, I, J) .

B. On considère maintenant la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(0) = 0$ et $f(x) = |x \ln(x)|$ si $x \neq 0$.

1. a) Étudier la dérivabilité de f en 0.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Tracer sa courbe représentative (C_f) dans le même repère (O, I, J) .

4. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, en cm^2 , l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f) , la première bissectrice et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

5. a) Démontrer qu'il existe un nombre réel unique α appartenant à $]1; e[$ tel que $f(\alpha) = \frac{1}{e}$. Placer le point correspondant sur la courbe (C_f) .

b) Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

PARTIE C. On définit la suite numérique (u_n) par son premier terme u_0 , (u_0 étant un nombre réel strictement positif et différent de 1), et pour tout n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire?

2. On choisit $u_0 \in]0; \frac{1}{e}[$.

Démontrer que

a) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{e}$

b) La suite (u_n) est strictement croissante.

c) La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$.

3. On choisit maintenant $u_0 \in \frac{1}{e}$

a) Montrer que $u_1 \in]0; \frac{1}{e}[$.

b) La suite (u_n) est-elle convergente?

4. On choisit maintenant $u_0 > e$.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a : $f'(x) \geq 2$.

c) En déduire que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$.

d) Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 2^n(u_1 - u_0)$.

e) Montrer que $u_{n+1} \geq u_0 + (u_1 - u_0)(2^{n+1} - 1)$.

f) En déduire la limite de la suite (u_n) .

5. Que dire de la suite (u_n) si on choisit $u_0 = \alpha$.

Problème 25

PARTIE A. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = e^{1-x},$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{x^n}{n} e^{1-x}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. a) Déterminer les limites de f_0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f_0 et dresser son tableau de variation.

c) Tracer (C_0) et les tangentes à (C_0) aux points d'abscisses 0 et 1.

2. On se propose d'étudier f_n pour tout entier naturel n non nul.

a) Déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$ (On distinguera les cas n pair et n impair).

b) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (On distinguera les cas n pair et n impair).

3.a. Étudier les positions relatives de (C_1) et (C_2) . Tracer (C_1) et (C_2) dans un même repère.

b) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_2'(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

PARTIE B. Soit n appartenant à $\mathbb{N}$ et a un réel strictement positif fixé.

On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^a f_n(t) dt.$$

1.a) Calculer I_0 .

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n} e^{-a}$.

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\frac{a^n}{n} e^{-a}} =$$

En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2.a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{a^{n+1}}{n+1} e^{1-a}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = e^{-a} \left(\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \dots - \frac{a^n}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} \right)$$

Problème 26

À tout entier naturel $n > 1$, on associe la fonction numérique f_n définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (O, I, J) . (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur $x'Ox$ et 10 cm sur $y'Oy$.)

PARTIE A. Étude de f_1

1. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f_1 et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la tangente à (C_1) au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe (C_1) .

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de I :

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t) dt$$

PARTIE B. Comportement des fonctions f_n pour $n > 1$

1. Démontrer que (OJ) est asymptote à (C_n) en $+\infty$.

2.a. Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{\frac{n}{2}}) = 0$.

b) Dresser le tableau de variations de f_n .

c) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est : $y_n = \frac{1}{n} \frac{n}{2e}$.

3.a) Soit $x \in I$.

Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

b) Déterminer la tangente à (C_2) au point d'abscisse 1.

c) Préciser les positions relatives de (C_1) et (C_2) .

4. On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n \geq 1}$. Soit n un entier strictement positif.

a) Calculer, pour $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ et

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n.$$

c) En déduire que : $y_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n}$.

d) Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$?

PARTIE C. Étude de primitives de f_n sur I

À tout entier $n \geq 1$ et à tout nombre réel x de I , on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t) dt$

1. a) Soit un entier $k \geq 1$.

Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{k+1} \frac{\ln x^{k+1}}{x}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x^2}{2x} - \frac{\ln x^{n-1}}{(n-1)x} - \frac{\ln x^n}{nx}$$

2. Soit $a \geq 1$ un nombre réel fixé.

a) Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq (a-1)y_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a)$$

3. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose :

$$W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1} - \frac{\ln x^2}{2} + \dots - \frac{\ln x^n}{n}$$

a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n(a)$$

c) En déduire la limite γ de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{n}.$$

d) En s'aidant de la calculatrice donner une valeur décimale approchée de U_6 à 10^{-4} près. Comparer cette valeur à γ .

Problème 27

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) .

On donne des nombres réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de

module r , d'argument α .

1. On construit les points A_n de P répondant aux conditions : $A_0 = O$; $A_1 = J$;
pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} , de rapport r , dont une mesure de l'angle est α .

On note z_n l'affixe du point A_n .

a) Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n , z_{n-1} et z_{n-2} .

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.

c) Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et u .

2. a) Montrer qu'il existe une similitude directe S , et une seule, telle que : $A_1 = S(A_0)$ et $A_2 = S(A_1)$.

Préciser les éléments caractéristiques de S .

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note S^0 l'application identique de P , et pour tout entier naturel n , on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^{n+p} = S^n(A_p)$.

c) Montrer que S^4 est une homothétie.

d) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose maintenant $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On appelle Ω le centre de la similitude S .

a) Démontrer que pour tout entier naturel n , les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Représenter géométriquement les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9$ dans le repère orthonormé (O, I, J) .
(unité : 4 cm).

c) Calculer $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$ en fonction de n et de $\|\overrightarrow{\Omega A_0}\|$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$$

d) Pour tout entier naturel n , calculer

$$\ell_n = \|\overrightarrow{A_0 A_1}\| + \|\overrightarrow{A_1 A_2}\| + \dots + \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\|$$

e) Étudier la limite de la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 28

On se propose l'étude pour n entier naturel non nul, des fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = 0 \\ x e^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. a) Prouver que la fonction f_n est continue en 0.
- b) Étudier la dérivabilité de f_n en 0.

c) Calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. a) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b) Donner le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $g(u) = e^{-u} - (1-u)$.

En déduire que pour tout nombre réel $u \geq 0$, on a : $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$ (1).

c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, on a : $0 \leq e^{-t} - 1 + t \leq \frac{t^2}{2}$ (2).

d) En déduire que pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $0 \leq f_n(x) - x \leq \frac{1}{2n^2x}$

e) En déduire que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) .

f) Préciser la position relative de (C_n) et (D_n) .

3. a) Donner le tableau de variations de f_n .
- b) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote en précisant la tangente en 0.
- c) Démontrer que, pour tout $n > 0$, (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.
- d) Construire (C_2) sur le même graphique que (C_1) .

Problème 29

PARTIE A

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction numérique f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = k^2 x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x.$$

On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité de longueur est 5 cm.

1. a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
- b) Étudier les variations de f_k et dresser son tableau de variations.
2. Soit M_k le point de (C_k) correspondant au minimum de f_k .
 Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Λ) des points M_k quand k décrit $]0; +\infty[$.
3. Tracer sur une même figure les courbes (Λ) et (C_1) après avoir précisé leur position relative.

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$

1. Tracer sur une nouvelle feuille, la courbe représentative (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé où l'unité de longueur est 5cm. (On pourra utiliser la PARTIE A. 1.)
2. Soit (r) le cercle de centre O de rayon 1 et A le point de coordonnées (0; 1).
 À tout point M de (C) d'abscisse a , on associe le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. La droite (AH) recoupe (r) en K.
- a) Déterminer les coordonnées de K en fonction de a .
- b) Démontrer que la droite (OK) est parallèle à la tangente en M à (C) .
- c) En déduire un procédé géométrique pour construire la tangente à la courbe (C) en un point M donné de cette courbe.

PARTIE C

Dans cette partie, f désigne toujours la fonction définie au B.

1. On note λ un réel strictement positif.

a) À l'aide d'une intégration par parties

calculer $\int_{\lambda}^1 \ln x \, dx$.

b) En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) \, dx$.

c) Déterminer la limite I de $I(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs supérieures.

2. Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur $]0; 1]$, démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) \, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

b) En déduire que :

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$$

$$\text{puis que : } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Problème 30

PARTIE A

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; 1]$ par : $f(t) = t \ln t + e^t - 1$.

1. Déterminer la limite de f' en 0.

2. Étudier le sens de variation de f' .

3. Démontrer que l'équation $x \in]0; 1]$, $f'(x) = 0$ admet une unique solution t_0 .

4. En déduire le signe de f' et le sens de variation de f sur $]0; 1]$.

5. En déduire que f ne s'annule qu'une seule fois sur $]0; 1]$ pour une valeur t_1 (on ne calculera pas t_1).

6. Déterminer le signe de $f(t)$ selon les valeurs de t .

PARTIE B

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} \ln t & \text{si } t \leq 1 \\ g & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

1. a) Prouver que la fonction g est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Démontrer pour tout réel t de $]0; 1]$:

$$g'(t) = \frac{e^{-t}}{t} f(t)$$

3. Dresser le tableau de variation de g .

4. Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité = 6 cm). On tracera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. On admettra que $t_1 \approx 0,3$.

PARTIE C.

Soit n un entier naturel. On définit sur $[0; 1]$ la fonction numérique φ_n par : $\varphi_0(t) = 1$;

$$\varphi_1(t) = 1 - t ; \quad \varphi_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

et pour tout $n > 2$,

$$\varphi_n(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel t de $[0; 1]$:

$$\varphi'_n(t) = -\varphi_{n-1}(t).$$

2. On se propose de démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t de $[0; 1]$:

$$\varphi_{2n+1}(t) \leq e^{-t} \leq \varphi_{2n}(t).$$

a) Soit Φ et Ψ deux fonctions numériques définies sur $[0; 1]$, dérivables sur $[0; 1]$ telles que : $\Phi(0) = \Psi(0)$.

Démontrer que si pour tout réel t de $[0; 1]$: $\Phi'(t) \leq \Psi'(t)$ alors pour tout réel t de $[0; 1]$, $\Phi(t) \leq \Psi(t)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[0; 1]$:

$$\varphi_{2n+1}(t) \leq e^{-t} \leq \varphi_{2n}(t).$$

3. Pour tout entier naturel n , déduire de la question précédente un encadrement de la fonction g sur $]0; 1]$ faisant intervenir les fonctions φ_{2n} et φ_{2n+1} .

PARTIE C.

On considère l'ensemble Δ des points M du plan de coordonnées $(t ; y)$ dans le repère orthonormé (O, I, J) vérifiant $0 \leq t \leq 1$ et $g(t) \leq y \leq 0$.

On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de Δ .

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.

On pose $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 t^n \ln t \, dt$.

a) Calculer $I_n(\alpha)$ en utilisant une intégration par parties.

b) Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.

2.a) En utilisant le B. 3., donner un encadrement de $\int_{\alpha}^1 g(t) \, dt$ au moyen des intégrales du type $I_n(\alpha)$.

b) En déduire un encadrement de $\int_0^1 g(t) \, dt$

3. Donner en cm^2 une valeur approchée par excès de l'aire Δ à 10^{-2} près.

Problème 31

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines fonctions du type $x \mapsto x^{\alpha} e^{-x}$, α étant un réel strictement positif.

PARTIE A

On désigne par g_1 et g_2 les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = x e^{-x} \text{ et } g_2(x) = x^2 e^{-x}.$$

On désigne par (C_1) et (C_2) les courbes représentatives de g_1 et g_2 dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2 cm)

1. a) Déterminer les limites de g_1 et g_2 en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Étudier les variations de g_1 et g_2 et dresser leur tableau de variation.

c) Étudier les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) .

2. Dessiner courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère orthonormé (O, I, J) .

3. a) Déterminer une équation de la tangente à (C_1) au point M_0 d'abscisse x_0 .

b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées (OJ) en un point T_0 .

Déterminer, en fonction de x_0 , l'ordonnée de T_0 .

4. Soit t un nombre réel donné, et T le point de (OJ) tel que $OT = t$.

a) Utiliser la courbe (C_2) pour étudier, suivant la valeur de t , le nombre de tangentes à (C_1) passant par T .

b) En déduire une construction géométrique de la tangente en M_0 à (C_1) .

PARTIE B

n étant un entier naturel non nul, f_n est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$. Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On désigne par S_n l'aire de la partie de plan délimitée par (C_n) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x=1$.

1. En remarquant que, pour x positif, on a : $e^{-x} \leq 1$, montrer que $S_n < \frac{1}{n}$.

En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Établir une relation entre S_{n+1} et S_n .

En déduire que $\frac{e^{-1}}{n+1}$ est une valeur approchée de S_n à $\frac{1}{(n+1)^2}$ près.

PARTIE C

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\frac{1}{3}} e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On appelle u la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

On admet qu'il existe un nombre réel m strictement positif tel que $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$,

$$|f'(x)| < m < 1$$

- 1.a) Montrer que $f\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$
 b. On pose $h(x) = f(x) - x$.
 Montrer que h s'annule en un nombre réel λ unique de $\frac{1}{3}$.

2.a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \in \frac{1}{3}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n :
 $|u_{n+1} - \lambda| \leq m |u_n - \lambda|$;

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Problème 32

PARTIE A

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction numérique f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

1. a) Déterminer les limites de f_n aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.

2. Construire la courbe représentative (C_1) de la fonction f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . Préciser ses asymptotes.

3. Pour tout réel X supérieur ou égal à 2 on pose : $I_n(X) = \int_2^X f_n(t) dt$

a) Calculer $I_1(X)$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_n(X)$ en fonction de n et de X , pour n supérieur ou égal à 2.

c) Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale : $\int_2^X f_2(t) dt$

d) Soit n un entier naturel non nul fixé.

Calculer la limite de $I_n(X)$ quand X tend vers $+\infty$. (On distinguera deux cas $n=1$ et $n>2$).

e) Calculer la limite quand X tend vers $+\infty$ de $\int_2^X f_2(t) dt$.

PARTIE B

1. Montrer que pour tout entier naturel k , $k \geq 2$: $f_2(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_2(t) dt \leq f_2(k)$.

(On peut utiliser le sens de variation de f_2)

2. On considère la suite (S_n) définie par son terme général $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} \dots + \frac{\ln n}{n^2}$.

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2.a. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) En utilisant B 1., montrer que : $S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leq$

$$\int_2^p f_2(t) dt \leq S_p - \frac{\ln n}{n^2}$$

et en déduire un encadrement de S_n .

c) En utilisant la valeur de $\int_2^n f_2(t) dt$ trouvée en A, montrer que la suite (S_n) est majorée.

d) Montrer que la suite (S_n) est convergente et que sa limite L vérifie : $\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + \frac{3 \ln 2}{4}$.

Problème 33

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{n}y = 0$ (1)

2. On considère l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n}$ (2)

Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

3.a) Montrer qu'une fonction h est solution de (2), si et seulement si $h-g$ est solution de (1).

b) En déduire toutes les solutions de (2).

c) Déterminer celle de ces solutions, f , vérifiant $f(0)=0$.

Partie B

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$$

1. Étudier le signe de f'
2. En déduire le tableau de variations de f_n .
On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
3. a) Montrer que la courbe (C_n) représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation.
b) Tracer (C_2) .
4. Démontrer que sur $]-\infty; 0[$ l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique que l'on notera x_n .

Partie C

On se propose dans cette partie de montrer que la suite x_n $n \geq 2$ admet une limite ℓ et de calculer ℓ .

1. On considère la fonction φ définie sur $]1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{2}{x} - \frac{x-1}{x+1}$
a) Déterminer le signe de φ' . En déduire le signe de φ .
b) Montrer que $\varphi(n) < 0$ puis que $f_n(-2) < 0$.
c) En déduire que : $x_n > -2$.

2.a) Établir l'égalité

$$f_n(2n - \frac{n}{n+1}) = \frac{2n}{n+1} \left[\frac{2n+1}{2n - \frac{n}{n+1}} - \frac{n}{n+1} \right]$$

- b) On considère la fonction ψ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\psi(x) = \frac{2x+1}{2x - \frac{x}{x+1}} - \frac{x}{x+1}$

Étudier le signe de ψ' . En déduire le signe de ψ , puis celui de $f_n(2n - \frac{n}{n+1})$.

- c) Montrer que $x_n < 2n - \frac{n}{n+1}$

3 a) D terminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)$

On pourra poser $u = \frac{1}{n}$

- b) En déduire l'existence et la valeur de ℓ .

Problème 34

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{\ln x + x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = \ln x + x - 1$
a) Étudier les variations de u .
b) En déduire l'ensemble de définition de f .
 - 2.a) Montrer que f est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
 - c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - d) Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 1.
- On note g le prolongement obtenu et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

On admet que g est dérivable en 1 et que

$$g'(1) = -\frac{1}{8}$$

3. Soit h la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - x \ln x$.
a) Étudier les variations de h .
b) En déduire le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x .

4. On admet que g est dérivable sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

- a) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et montrer que $g'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.
- b) Donner le tableau de variation de la fonction g .
- c) Tracer (C) et la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

Partie B

Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{par : } G(x) = \int_1^x g(t) dt$$

- 1.a) Montrer que pour tout $t > 1$: $1 < \ln t + t < 2t$.

b) Montrer que pour tout $t \geq 1 : g(t) \geq \frac{\ln t}{2t}$

c) En déduire que pour tout $x \geq 1 :$

$$G(x) \geq \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

d) En déduire la limite de G en $+\infty$.

2.a) Montrer que pour tout $t \geq e :$

$$\frac{\ln t}{\ln t + t - 1} \leq \frac{\ln t}{t}$$

b) En déduire que pour tout $x \geq e :$

$$G(x) \leq \int_1^e g(t) dt + \int_e^x \frac{\ln t}{t} dt$$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. Etudier les variations de G et dresser le tableau de variations de G .

4.a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2} g\left(\frac{k+1}{2}\right) \leq \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} g(x) dx \leq \frac{1}{2} g\left(\frac{k}{2}\right).$$

b) En déduire un encadrement de $G(0)$.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative (Γ) de G dans un repère orthonormé.

Problème 35

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité : 1 cm.

PARTIE A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (i\sqrt{3})z^2 - (i\sqrt{3})z - i\sqrt{3} = 0$$

1. Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.

2. On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes respectives $3 ; 2 - i\sqrt{3} ; -1 ; 7$ et $i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

c) Placer les points A, B, C, E et G .

3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des

abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

PARTIE B

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB .

1. On veut déterminer l'homothétie h qui transforme le triangle IAB en le triangle EFG .

a) Démontrer que l'image par h de $[IA]$ est $[EF]$.

b) Justifier que : $h(I) = E, h(A) = F$ et $h(B) = G$.

c) Déterminer le centre et le rapport de h .

2. Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = \text{hor.}$

a) Donner le rapport et l'angle de f .

b) Démontrer que f transforme le triangle IAB en le triangle EFG .

3. Soit g une similitude directe qui transforme le triangle IAB en le triangle EFG .

a) Démontrer que g^{-1} est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant.

b) Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB .

c) En déduire que les similitudes directes qui le triangle IAB en le triangle EFG sont h, f et une troisième f' que l'on déterminera à l'aide de h et r .

d) Déterminera le rapport et l'angle de f' .

4. Soit Ω le centre de la similitude directe f . On désigne par K le milieu de $[IA]$.

a) Déterminer l'image K' de K par f .

b) Démontrer que Ω, A, G et F sont cocycliques.

c) Démontrer que Ω, F, K et K' sont cocycliques.

d) Construire Ω .

5. Déterminer l'application complexe associée à f' .

6. Calculer l'affixe du centre Ω' de f' .

Problème 36

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel

n non nul, par $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n}$, d'autre part de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.

Pour tout entier $n > 0$, on note f_n la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n}.$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On prendra : $OI = 2$ cm et $OJ = 10$ cm.

Partie A

1. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n+1}) et vérifier que le point A_n de coordonnées $(n; f_n(n))$ appartient à (C_{n-1}) .

3. Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) ; on tracera les tangentes en O à ces trois courbes.

Partie B

1.a) En utilisant les résultats du A, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

2.a) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$.

En utilisant les variations de g , démontrer que

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; 1] \text{ on a : } \ln(1+t) \leq -\frac{t^2}{4}$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $\left(\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3.a) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{n-1}}.$$

4. soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$.

a) Démontrer que : $\forall t \in [k; k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire que : $\ln n \leq \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$$

d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.

Partie C

Pour tout entier $n > 0$ et pour tout nombre réel a positif ou nul, fixé, on pose : $I_n(a) =$

$$\int_0^a f_n(t) dt.$$

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, $I_1(a)$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$ et tout nombre réel t positif ou nul,

$$\text{on a : } 0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n}$$

3.a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$,

$$\text{on a : } \frac{1}{n} \leq \frac{e}{n}.$$

(On pourra utiliser la PARTIE B 1. a))

b) Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

4.a) Établir pour tout entier $n \geq 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$I_n(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n} \right).$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n=1$?

5

$$e^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n} \right)$$

Problème 37

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et définie par :

$f(x) = \frac{1}{1-xe^{-x}}$ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale $K = \int_0^1 f(x) dx$.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - e^{x-1}$.

a) Étudier les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g).

b) Calculer $g(1)$ et montrer que, pour tout x réel, $g(x) \leq 0$.

c) En déduire que pour tout nombre réel x , on a : $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$, puis que $1 - xe^{-x} > 0$.

2. a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

d) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

e) Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 3 cm).

Tracer (T), puis (C) (on admettra que (C) est au-dessus de (T) pour $x < 0$, et au-dessous pour $x > 0$).

3. Démontrer que : $\forall x \geq 0$, on a :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}.$$

Partie B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $K = \int_0^1 f(x) dx$.

2. Soit n un entier naturel non nul, et soit

$$J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

a) À l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) On se propose de calculer J_2 sans utiliser

des intégrations par parties.

Déterminer les coefficients a , b et c tels que la fonction $H(x)$ définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2 e^{-2x}$.

En déduire que : $J_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{e^2}$.

3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$.

a) Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - xe^{-x} e^{n+1}}{1 - xe^{-x}}.$$

b) En déduire que :

$$K - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-n+1} x f(x) dx.$$

c) En utilisant A 1. b., montrer que pour tout x positif ou nul :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-n+1} x f(x) \leq \frac{1}{e^n e-1}.$$

d) En déduire un encadrement de $K - u_n$;

e) Étudier alors la convergence de la suite de terme général u_n .

4. a) Montrer que : $u_2 \leq K \leq u_2 + \frac{1}{e^2 e-1}$.

b) Sachant que $u_2 = 1 + J_1 + J_2$, trouver deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$ et

Exercice 1

$$a = \sqrt[6]{\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}} \quad b = \sqrt[6]{\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}} \quad c = \sqrt[6]{\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}}$$

Partie A

- 1) Exprimer a^6 , b^6 , c^6 sous forme algébrique.
- 2) En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C} \quad z^6 = -i$

$$z = i \sqrt[6]{\frac{\pi}{2}}$$

- a) Vérifier que $z^3 = -i$
- b) Démontrer que b et $z^2 b$ sont aussi des solutions de (E).
- c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

- 2) Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel
- b^n est un nombre imaginaire pur.

Exercice 2

OAB est un triangle rectangle isocèle en O tel que $(\widehat{OAB}) \equiv \frac{\pi}{2} - \pi$

On désigne par I le milieu du segment AB , par (C) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre AB . Le point D est l'intersection du cercle (C) et de la demi droite IO . On note J le point d'intersection de la demi droite DB et du cercle (Γ) .

- 1-a) Faire une figure.

$$b) \text{ Justifier que } (\widehat{DAB}) \equiv \frac{\pi}{4} - \pi$$

- c) Démontrer que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.

Démontrer que la droite OJ est la médiatrice du segment AD

- 2) Soit S la similitude directe de centre A telle que $S(I) = O$

- a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S .
- b) Soit H le milieu du segment JA et K le point d'intersection de la droite OJ avec la droite AD . Démontrer que $S(H) = K$.

- c) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{KJH})$.

- 3) Déterminer l'image du cercle (Γ) par S .

PROBLEME

$$f(x) = -x - \frac{x}{x^2}$$

(C) est la représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et définie par :

$$u(x) = x^2 - x.$$

- 1) Etudier les variations de u .
- 2) Justifier que : $\forall x \in]-\infty, +\infty[\quad u'(x) = 2x - 1$.

Partie B

- 1) Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- 2-a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

$$y = -x - \frac{1}{x^2} \quad (C)$$

$$3 - \forall x \in]-\infty, +\infty[\quad f'(x) = \frac{u'(x)}{x^2}$$

- b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 4-a) Démontrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique α tel que $\alpha < e$.
- b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α .
- 5-a) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).
- b) Donner les coordonnées du point A.
- 6-a) Etudier la position relative de (D) par rapport à (C).
- b) Construire (T), (D) et (C).

Partie C

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{\ln t}{t} dt \quad n \geq 1 \text{ par } a_n$$

- 1-a) Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à a_1 .
- b) Interpréter graphiquement le nombre a_n .
- c) Calculer a_n puis étudier la convergence de la suite a_n .

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2$$

Exercice 1

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1

2. Calculer la probabilité d'obtenir trois chiffres dont la somme est égale à 6.

3. Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$

4. Le droit de participer au jeu est de 3000 francs.

- Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;

- S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;

- S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie.

On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :

a) Déterminer les valeurs prises par X

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 2

On se propose d'étudier la suite U_n des nombres réels, définie par :

$$U_1 = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \left(\frac{1}{e^{n+1}} \right) U_n$$

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$$t - \frac{t^2}{2} < t < t + \frac{t^2}{2}$$

Soit f la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = e^{-x}$

1. En utilisant l'inégalité $t - \frac{t^2}{2} < t < t + \frac{t^2}{2}$, justifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-2x}$

2. Démontrer que la suite U_n est strictement croissante.

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = f + f + \dots + f \quad n$

$$4 \quad : a_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \dots - \frac{1}{e^n} \text{ et } b_n = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4} + \dots - \frac{1}{e^{2n}}$$

a) A l'aide des questions 1 et 3, démontrer que :

$$b_n < a_n < \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$$

c) Démontrer que la suite U_n est majorée.

En déduire que la suite U_n est convergente.

d) On note l la limite de la suite U_n .

$$\frac{e}{e^2 - 1} \leq l \leq \frac{e}{e - 1}$$

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par :

$$f(x) = -\left(-x - \sqrt{x^2}\right) \text{ et } g(x) = -\left(-x - \sqrt{x^2}\right)$$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g .

1.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$b \quad \Delta' \quad y = -x \quad C \quad \infty$$

c) Justifier que la courbe (C) est au-dessus de la droite Δ .

Dans la suite du problème, on admettra que la droite Δ' d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au-dessus de la droite Δ' .

2.a) Calculer $f'(x)$ pour tout x .

b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.

3. Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (OI) et (OJ) .

4.a) Construire Δ , Δ' et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

b) Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O .

c) Construire la courbe (C') dans le même repère que (C) .

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F' , de sommets S et S' par une similitude directe s , est une hyperbole (H') de foyers $s(F)$ et $s(F')$, de sommets $s(S)$ et $s(S')$.

On note (H) la courbe d'équation : $x^2 - y^2 = xy - 1$.

1. Démontrer que $(H) \cup (C')$.

$$2 \quad s \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\pi}{4}$$

x, x', y, y' des nombres réels. Pour tout point M du plan d'affixe $z = x + iy$ on note $z' = x' + iy'$ l'affixe de $s(M)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de s .

$$x' = x - y \text{ et } y' = -x - y$$

c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe Γ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

3. a) Justifier que Γ est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.

b) Déterminer l'excentricité de Γ .

c) Construire Γ et ses asymptotes dans le même repère que (H) . (On utilisera deux couleurs différentes pour (H) et Γ).

4. Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.

Sujet 3 et corrigé du BAC 2011

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point M d'affixe z , on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - z$.

Calculer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M .

a) Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un imaginaire pur est une hyperbole.

b) Préciser dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les coordonnées du centre Ω , celles des sommets et les équations des asymptotes de (H) .

c) Construire (H) .

Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - i$.

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère $OMM'P$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 20 heures précises.

La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un à l'autre.

Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
- S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- La probabilité d'être vert à l'arrivée est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité d'être orange à l'arrivée est $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

a Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est

b Justifier que $P(X = \frac{5}{16})$

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique de X . Interpréter ce résultat.

3. Le livreur part à 19h49min de la boulangerie.

a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

4. Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.

a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2cm.

Soit k un nombre réel non nul.

On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_k(x) = k e^{-\frac{x}{2k}} - x$.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k .

Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k , de construire la courbe C_1 et de donner un programme de construction de la courbe C_k pour k différent de 1.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x e^{\frac{x}{2}}$.

Etudier le sens de variation de h .

Calculer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.

a Démontrer que l'équation $h(x) = \alpha$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

b En déduire que : $\forall x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[, h(x) < \alpha$; $\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, h(x) > \alpha$

Partie B : Etude de la fonction f_1

Pour tout nombre réel x $f_1(x) = x e^{-\frac{x}{2}} - x$.

a Démontrer que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

b En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

a Pour tout réel x , calculer $f_1'(x)$ et démontrer que $f_1'(x) = -h(x) e^{-\frac{x}{2}}$.

b En déduire les variations de f_1 .

a Calculer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$ puis la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

b Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

c Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à C_1 en $+\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de f_1 .

b Construire la droite (D) et la courbe C_1 dans le plan muni du repère (O,I,J).

a A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :

$$I(x) = \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

b En déduire en cm^2 l'aire A_k de la partie du plan limitée par la courbe C_1 ; la droite (D) ; la droite (OJ) et la droite d'équation $x = k$.

Partie C: Etude de la fonction f_k

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f_k'(x) = -h\left(\frac{1}{k}x\right) e^{-\frac{x}{2k}}$.

b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k .

c) Vérifier que $f_k(k\alpha) = k f_1(\alpha)$.

d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k . (On ne demande pas de calculer les limites de f_k)

2a) Démontrer que C_k est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k .

b) En déduire la construction de $C_{\frac{-1}{2}}$ dans le même repère que C_1 .

3. On note A_k l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_k ; la droite (D) ; la droite (OJ) et la droite d'équation $x = k$.

Déterminer en cm^2 A_k en fonction de k .

CORRECTION

EXERCICE1

1. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Donc $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$$z' = z^2 - z \Leftrightarrow x' + iy' = x^2 - y^2 - x + i(xy - y) \Leftrightarrow x' = x^2 - y^2 - x \text{ et } y' = xy - y.$$

a) Pour tout point M d'affixe $z = x + iy$;

$$M \in H \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}.$$

Posons $X = x - \frac{1}{2}$ et $Y = y$. Soit Ω dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Dans le repère orthonormé $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, H a pour équation réduite $\frac{X^2}{\frac{1}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

H est donc une hyperbole de centre Ω

b) Dans le repère orthonormé $(I; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

- les sommets de H sont $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$;

- les asymptotes de H sont les droites D et D' .

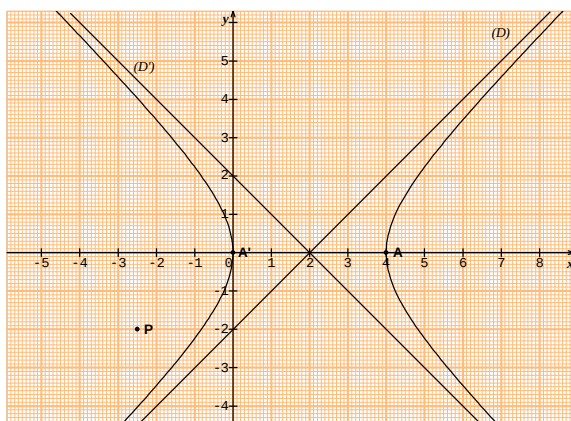
$$X = x - \frac{1}{2} \text{ et } Y = y \Rightarrow x = X + \frac{1}{2} \text{ et } y = Y.$$

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

- les sommets de H sont $A(4; 0)$ et $A'(0; 0)$;

- les asymptotes de H sont les droites $D: y = x - 1$ et $D': y = -x$

c)



3. Le quadrilatère OMM'P est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PM'} \Leftrightarrow z = z' - z_p \Leftrightarrow z = z^2 - z - \frac{5}{2}i \Leftrightarrow z^2 - z - \frac{5}{2}i = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4} - i. \text{ Soit } \delta = x + iy \text{ une racine carrée de } \Delta. \text{ On a : } \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} + y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} - x^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{x}.$$

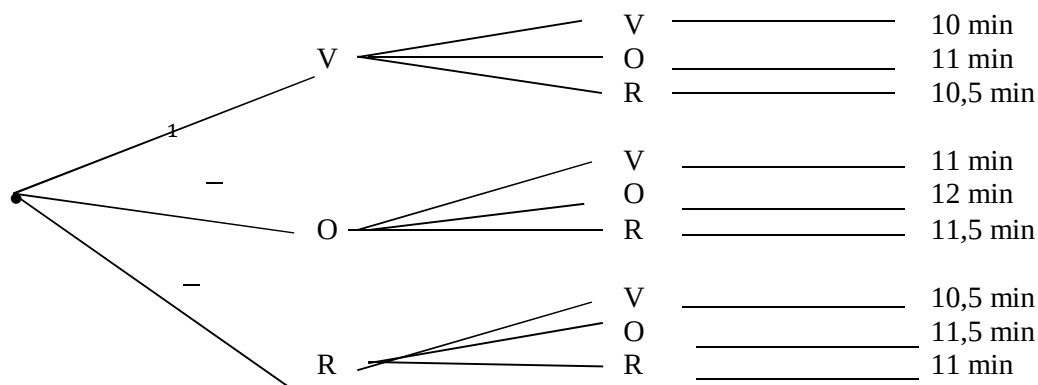
$$\Rightarrow xy = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Donc } \delta = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} - i \text{ ou } \delta = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + i. \text{ Alors } z_1 = \frac{5-4+i}{2} = \frac{1+i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{5+4-i}{2} = \frac{9-i}{2}.$$

Les points M du plan d'affixe z tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme sont les points d'affixes $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

EXERCICE 2

1. a) Soit les événements : V : « le feu est vert » ; O : « le feu est orange » ; R : « le feu est rouge »



L'ensemble des valeurs prises par X est donc

b) Soit les événements :

A : « Le premier feu rencontré est vert et le deuxième feu est orange »

B : « Le premier feu rencontré est orange et le deuxième feu est vert »

C : « Le premier feu rencontré est rouge et le deuxième feu est rouge »

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ et } P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

$$P(X) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{16}.$$

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

x_i	10	10,5	11	11,5	12
$P(X) \cdot x_i$	—	—	—	—	—

$$E(X) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{5}{16} \right) \left(\frac{1}{8} \right) \frac{1}{16} = \frac{172}{16} = 10,75$$

Interprétation :

Le livreur de pain met en moyenne 10,75 min pour arriver chez le client.

3.a) le livreur met exactement 11 minutes pour arriver au domicile du client. Donc la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client est $P(X) = \frac{5}{16}$.

b) Pour que le livreur arrive en retard chez le client il faut qu'il mette plus de 11 minutes sur le trajet. Donc la probabilité qu'il arrive en retard chez le client est $P(X > \frac{3}{16})$.

4.a) Lorsque le livreur part servir le client ; soit il arrive à 20 heures précises chez le client, soit il n'arrive pas à 20 heures précises.

Cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli. Soit S le succès. On a $P(S) = \frac{5}{16}$.

L'expérience se répétant 7 fois de suite de façon indépendante, il s'agit alors d'un schéma de Bernoulli.

Soit l'événement H : « le livreur livre le pain exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine »

$$P(H) = C_7^3 \left(\frac{5}{16}\right)^3 \left(\frac{11}{16}\right)^4 \approx$$

b) Soit l'événement T : « le livreur livre le pain au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine »

$\bar{T}$: « le livreur ne livre pas le pain à 20 heures précises au cours d'une semaine »

$$P(\bar{T}) = \left(\frac{11}{16}\right)^7.$$

$$P(T) = 1 - P(\bar{T}) = 1 - \left(\frac{11}{16}\right)^7 \approx$$

PROBLEME

Partie A

$$1. \forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}.$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) > 0$.

Alors h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0.$$

On conclut que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty.$$

On conclut que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

3. a) h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .

On a : $h(-\infty) = -\infty$ et $h(+\infty) = +\infty$ et h est continue.

Donc $-\infty < \alpha < +\infty$.

b) h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(\alpha) = 0$.

$h(-\infty) = -\infty$ et $h(+\infty) = +\infty$.

Donc $\forall x \in (-\infty, \alpha)$, $h(x) < 0$ et $\forall x \in (\alpha, +\infty)$, $h(x) > 0$.

Partie B

$$1. a) \forall x \in \mathbb{R} f_1(x) = x e^{-\frac{x}{2}} - x.$$

$$\text{On a : } f_1(\alpha) = \alpha e^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha.$$

$$h(\alpha) = \alpha e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = -\alpha \Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Donc } f_1(\alpha) = \alpha \left(-\frac{1}{\alpha} \right) - \alpha = -2 - \frac{4}{\alpha} - \alpha = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}.$$

$$b) - \alpha < -2 - \alpha \Rightarrow -\alpha < -2 - \alpha < -2 - \alpha < -2 - \alpha < -2 - \alpha \Rightarrow$$

$$- \alpha < -2 - \alpha \Rightarrow \frac{-\alpha}{\alpha} < \frac{-2 - \alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{0.71} < -\frac{4}{\alpha} - \frac{4}{0.70} \quad (2)$$

(1) + (2) donne :

$$-2 - \alpha - \frac{4}{\alpha} < -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha} . \text{ Donc } f_1(\alpha) < f_1(x) .$$

2. a) Pour tout réel x , calculons $f_1'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} f_1'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - x e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -x e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = -x e^{-\frac{x}{2}} - 2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} f_1'(x) = -x e^{-\frac{x}{2}} - 2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

D montrons que $\forall x \in \mathbb{R} f_1'(x) = -h(x) e^{-\frac{x}{2}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, -h(x) e^{-\frac{x}{2}} = -\left(x e^{\frac{x}{2}}\right) e^{-\frac{x}{2}} = -x e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = -x e^{-\frac{x}{2}} - 1.$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} f_1'(x) = -h(x) e^{-\frac{x}{2}}$.

$$b) \forall x \in \mathbb{R} f_1'(x) = -h(x) e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} e^{-\frac{x}{2}} > 0. \text{ Donc :}$$

$$f_1'(x) < 0 \Leftrightarrow -h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \alpha[.$$

Donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[f_1'(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha, \infty[f_1'(x) > 0$.

Par conséquent f_1 est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, \infty[$.

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{x}{2}} - 1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \infty \text{ car } \begin{cases} x \rightarrow -\infty & -\frac{x}{2} \rightarrow \infty \\ X & \infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} e^{-\frac{x}{2}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{x}{2}} - 1 \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{x}{2}} - 1 = \infty$$

Interprétation graphique

La courbe C_1 admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

b) Posons $X = -\frac{x}{2}$. Alors $x = -2X$ et quand $x \rightarrow +\infty$ $X \rightarrow -\infty$.

$$f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-X e^X - X e^X \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} (-2X e^X)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} X e^X \rightarrow 0 \\ X \rightarrow -\infty \end{cases}$$

c) Posons $X = -\frac{x}{2}$. Alors $x = -2X$ et quand $x \rightarrow +\infty$ $X \rightarrow -\infty$.

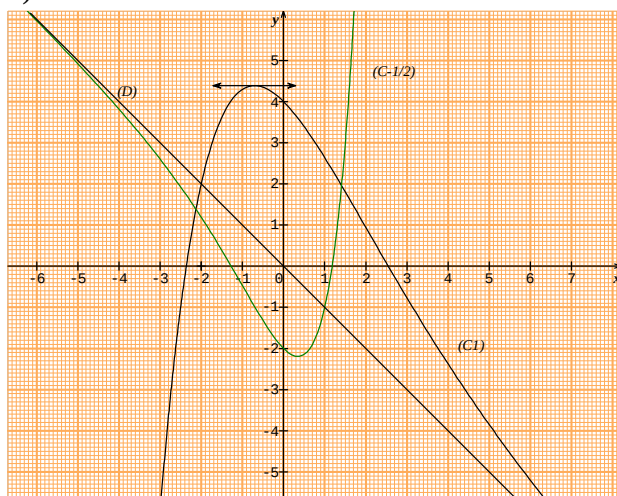
$$f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-X e^X - X e^X \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} (-2X e^X)$$

Donc la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à C_1 en $+\infty$

3. a)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	$f_1(\alpha)$	$-\infty$

b)



3. a) $I(x) = \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} dt$

Posons $t = x - t$ et $v' = e^{-\frac{t}{2}}$.

$u' = t$ et prnons $v = -e^{-\frac{t}{2}}$.

$$\text{Donc } \int_0^x t e^{-\frac{t}{2}} dt = \left[-t e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^x - \int_0^x -e^{-\frac{t}{2}} dt = \left[-t e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^x - \left[e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^x$$

$$\left[(-t - e^{-\frac{t}{2}}) \right]_0^x = x - e^{-\frac{x}{2}}$$

b) $A_1 = I \quad cm = e^{-1} \quad cm$

Partie C

1. a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = x - k e^{-\frac{x}{2k}} - x$.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_k(x) = e^{-\frac{x}{2k}} - \frac{1}{2k} e^{-\frac{x}{2k}} - x - k = \left(2 - \frac{x}{k} - \right) e^{-\frac{x}{2k}} - \frac{x}{k} e^{-\frac{x}{2k}} -$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, -h\left(\frac{1}{k}x\right) e^{-\frac{x}{2k}} = -\left(\frac{1}{k}x - e^{\frac{x}{2k}}\right) e^{-\frac{x}{2k}} = -\frac{x}{k} e^{-\frac{x}{2k}} - e^{\frac{x}{2k}} e^{-\frac{x}{2k}} = -\frac{x}{k} e^{-\frac{x}{2k}} -$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_k(x) = -h \frac{x}{k} e^{-\frac{x}{2k}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_k(x) = -h \frac{x}{k} e^{-\frac{x}{2k}}$

Signe de $f'_k(x)$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-\frac{x}{2k}} > 0$.

Donc $f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow -h \frac{1}{k} x < 0 \Leftrightarrow h \frac{1}{k} x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} x \in]-\infty, \alpha[\Leftrightarrow \frac{1}{k} x < \alpha$

* Si $k > 0$ alors :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow x < k\alpha \Leftrightarrow x \in]-\infty, k\alpha[$.

Donc, si $k > 0$ alors $\forall x \in]-\infty, k\alpha[\quad f'_k(x) < 0$ et $\forall x \in k\alpha, \infty[\quad f'_k(x) > 0$.

* Si $k < 0$ alors :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow x < k\alpha \Leftrightarrow x \in k\alpha, \infty[$.

Donc, si $k < 0$ alors $\forall x \in]-\infty, k\alpha[\quad f'_k(x) > 0$ et $\forall x \in k\alpha, \infty[\quad f'_k(x) < 0$.

Sens de variation de f_k

* Si $k > 0$ alors f_k est strictement croissante sur $]-\infty, k\alpha[$ et strictement décroissante sur $k\alpha, \infty[$.

* Si $k < 0$ alors f_k est strictement décroissante sur $]-\infty, k\alpha[$ et strictement croissante sur $k\alpha, \infty[$.

c) On a : $f_1(\alpha) = \alpha - k e^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha$

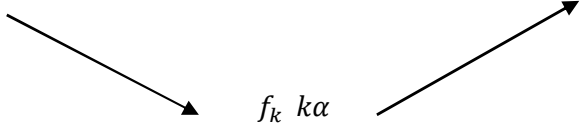
$f_k(k\alpha) = k\alpha - k e^{-\frac{-k\alpha}{2k}} - k\alpha = k \left(\alpha - k e^{-\frac{-\alpha}{2}} - \alpha \right) = k f_1(\alpha)$.

d) Si $k > 0$ on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$k\alpha$	∞
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	$f_k(k\alpha)$		

--	--

Si k on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$k\alpha$	∞
$f_k' x$	-	0	+
$f_k x$			

1. a) Pour tous points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ du plan ; $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ky \\ y' = ky \end{cases}$

- Pour tous points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ du plan tels que $M' = h(M)$;

$$M \in C_1 \Leftrightarrow y = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{y'}{k} = f_1\left(\frac{x'}{k}\right) \Leftrightarrow y' = kf_1\left(\frac{x'}{k}\right) = k\left[\left(\frac{x'}{k}\right)e^{-\frac{x'}{2k}} - \frac{x'}{k}\right]$$

$$\Leftrightarrow y' = x' e^{-\frac{x'}{2k}} - x' \Leftrightarrow y' = f_k(x') \Leftrightarrow M' \in C_k .$$

On en déduit que $h(C_1) = C_k$.

b) $C_{\frac{1}{2}}$ est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$. (voir figure , question 4 b) partie A).

2. C_k est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k . Donc $A_k = k^2 A_1$
 $A_k = k^2 - e^{-1} \text{ cm} .$

Sujet 4 et corrigé du BAC 2012

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900F CFA pour les hommes et 700F CFA pour les femmes.

Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20000F CFA. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

- On considère l'équation (E) : $x + y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad x > y$
a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).

- Démontrer que $x \equiv$
- b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x \equiv$
- c) en déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $k; -5 - k \quad k \in \mathbb{Z}$.
2. Résoudre l'équation (E') : $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad x - y$
3. En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \text{ cm}$
 Soit le point $K(-1; 0)$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées x, y vérifiant : $x^2 + y^2 = x - y$

1. Justifier que (Γ) est une ellipse.
2. On note :
 - F' et F les foyers de (Γ)
 - A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal. L'abscisse de A' est négative. B' et B sont les deux sommets de l'ellipse.
- a) Justifier que les coordonnées respectives de F et F' dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont $(0; 0)$ et $(-2; 0)$.
- b) Déterminer les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
3. Soit M un point quelconque de (Γ) .
 - a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N .
 - b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe s de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.
 - c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature. Déterminer et construire l'ensemble (C) des points P lorsque M décrit (Γ) .
4. a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe s est $z' = (1 - i)z - i$.
 z étant l'affixe d'un point M quelconque du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par s .
- b) On note G' et G les images respectives par s des foyers F' et F de (Γ) .
 Déterminer les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- c) démontrer qu'une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :
 $x^2 + y^2 + xy = x - y$

PROBLÈME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$.

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $u_n \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique : 2 cm.

1.a) Démontrer que la droite (OJ) est asymptote à la courbe (C).

$$x \rightarrow +\infty \quad f(x) \quad \text{puis} \quad x \rightarrow +\infty \quad \frac{f(x)}{x}$$

2.a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

3. Construire (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln t \, dt$.

2. On pose : $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) \, dt$.

a) Interpréter graphiquement A_n

b) Vérifier que : $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln n}{n}$.

3.a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$.

Démontrer que : $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq A_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

4. On pose $S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

a) Démontrer que : $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$

Partie C

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,

$$1^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

2.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\frac{n-1}{n}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$S_n = \frac{1}{12n^4} - \frac{1}{n} + \frac{n}{n^n} - \frac{1}{3}.$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$

3.a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n} - \frac{n}{n^n}.$$

b) En déduire la limite de la suite u_n $n \in \mathbb{N}^*$.

CORRIGÉ DU BACCALAURET 2012

Exercice 1

1.a) Soit x, y un couple d'entiers relatifs solution de (E).

On a : $9x + 7y = 1$ donc $2x + 7x = 1 - 7y$

$$\text{donc } 2x = 1 - 7(x+y) \Rightarrow x \equiv$$

b) Pour résoudre l'équation $x \in \mathbb{Z} \quad x \equiv$, utilisons un tableau de congruence :

Le reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Le reste de la division euclidienne de $2x$ par 7	0	2	4	6	1	3	5

Donc : $x \equiv \quad \Leftrightarrow x = 4 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $S_{\mathbb{Z}} = \quad k \quad k \in \mathbb{Z}$.

c) Soit x, y un couple d'entiers relatifs solution de (E). Alors $x = 4 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Par suite, $9(4+7k) + 7y = 1$.

Donc : $36 + 63k + 7y = 1$

$$7y = -35 - 63k, \text{ soit } y = -5 - 9k.$$

Donc : $S_E = \quad k; -5 - k \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. Soit l'équation (E') : $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad x \quad y$

Déterminons une solution particulière de (E').

Considérons l'équation (E), en prenant $k = 0$ on trouve une solution particulière (4 ; -5) de (E).

D'où : $9 \quad -$.

En multipliant cette égalité par 200, on obtient : $9(800) + 7(-1000) = 200$.

Donc une solution particulière de (E') est (800 ; -1000).

Déterminons toutes les solutions de (E').

Posons $(x_0, y_0) = (800 ; -1000)$.

$$(E') \Leftrightarrow x \quad y \quad x_0 \quad y_0 \Leftrightarrow x - x_0 \quad y_0 - y.$$

7 divise $x - x_0$ or 7 et 9 sont premiers entre eux, donc 7 divise $x - x_0$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 7k$

L'égalité $x - x_0 \quad y_0 - y$ donne $9(7k) = y_0 - y$. Par suite, $y_0 - y = k$

Soit $y = y_0 - 9k$.

Conclusion : $S_{E'} = \quad k; - \quad - k \quad k \in \mathbb{Z}$.

3. Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes de cette association.

On a : $900x + 700y = 20000$ donc : $9x + 7y = 20$.

D'où : $x = 7k + 800$ et $y = -9k - 1000$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Comme $x > 0$, $y > 0$ et $x > y$ donc $k = -$

Conclusion : Cette association est composée de 16 hommes et 8 femmes.

Exercice 2

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées x, y vérifiant : $x^2 \quad y^2 \quad x -$

$$1. M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 \quad y^2 \quad x - \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} \quad \frac{y^2}{3}.$$

Donc (Γ) est une ellipse de centre $K(-1; 0)$.

$$2.a) \text{ Dans le repère } (K, \vec{e}_1, \vec{e}_2), \text{ une équation de } (\Gamma) \text{ est : } \frac{x^2}{4} \quad \frac{y^2}{3}.$$

On a : les égalités $x = x + 1$ et $Y = y$. On a : $a = 2$; $b = \sqrt{\quad}$ ($a > b$) et $c = 1$.

Donc dans le repère $(K, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a : $F(1; 0)$ et $F'(-1; 0)$.

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a : $F(0;0)$ et $F'(-2;0)$.

b) Dans le repère $(K, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a : $A(2;0)$; $A'(-2;0)$; $B(0;\sqrt{2})$ et $B'(0;-\sqrt{2})$.

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a : $A(1;0)$; $A'(-3;0)$; $B(-1;\sqrt{2})$ et $B'(-1;-\sqrt{2})$.

c) Construction de (Γ) . (Voir figure ci-dessous).

3.a) Voir figure.

b) Le triangle KMP est rectangle en M, isocèle et de sens indirect donc :

$$\begin{cases} \widehat{MKP} = -\frac{\pi}{4} \\ KP = \sqrt{2} KM \end{cases}$$

donc P est l'image de M par la similitude directe s de centre K, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

c) (C) est une ellipse de sommets $s(A)$, $s(A')$, $s(B)$, $s(B')$; de foyers $s(F)$, $s(F')$.

Pour construire (C), il suffit de construire les points $s(A)$, $s(A')$, $s(B)$ et $s(B')$. Posons $A_1 = s(A)$, $A'_1 = s(A')$, $B_1 = s(B)$, $B'_1 = s(B')$.

En utilisant le fait que le triangle $KA A_1$ est rectangle en A, isocèle et de sens indirect, on construit A_1 .

On procède de façon analogue, pour placer les autres sommets de (C).

Voir figure.

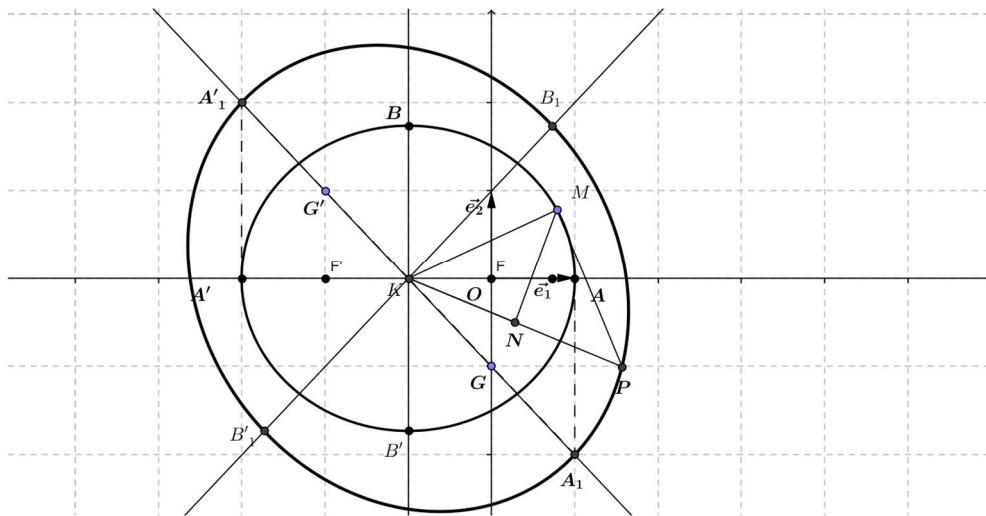
4.a) L'écriture complexe de s est : $z' + 1 = \sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})} (z + 1)$

$$\Rightarrow z' + 1 = \sqrt{2} \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) (z + 1)$$

$$\Rightarrow z' = (1 - i)z - i.$$

b) On a : $z_G = (1 - i)z_F - i = (1 - i)(0) - i = -i$ donc $G(0; -1)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On a : $z_{G'} = (1 - i)z_{F'} - i = (1 - i)(-2) - i = -2 + i$ donc $G'(-2; 1)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.



c) Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan et $M'(x'; y')$ l'image de M par s .

On a : $z' = (1 - i)z - i$ donc : $x' + iy' = (1 - i)(x + iy) - i = x + y + i(y - x - 1)$.

$$\text{Donc : } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - x - 1 \end{cases}$$

$$\text{on en déduit que : } \begin{cases} x = \frac{x' - y' - 1}{2} \\ y' = \frac{x' + y' + 1}{2} \end{cases}$$

$$\text{On a : } 3x^2 + y^2 = x - \frac{1}{2} \quad \text{donc : } 3 \left(\frac{x' - y' - 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{x' + y' + 1}{2} \right)^2 = \frac{x' - y' - 1}{2} - \frac{1}{2}$$

Après développement et simplification de cette égalité, on obtient :

$$7x'^2 - y'^2 - x'y' - x' - y' = 0.$$

Ainsi une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :

$$7x^2 - y^2 - xy - x - y = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (OJ) est asymptote à la courbe (C).

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) = x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x} \right)$

* On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3x} \right) = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x^2 - \frac{1}{3x} \right) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$* \quad \frac{f(x)}{x} = -x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x}$$

On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

* Interprétation graphique

2.a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = x^2 - \frac{1}{x} - \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $x^3 - 1$.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 - 1 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 - 1 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

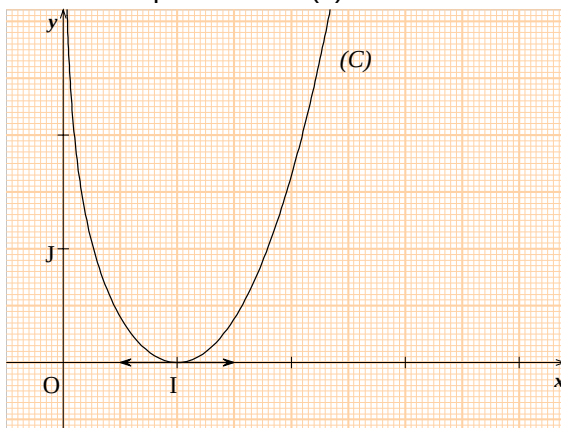
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

On en déduit que : f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1[$.

c) On déduit de la question précédente le tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

3. Courbe représentative (C) :



Partie B

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\text{Posons } \begin{cases} u = t \\ v' = \frac{1}{t} \end{cases} \quad \text{Int} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln t \end{cases}$$

Toutes ces fonctions sont continues sur $]-\infty, +\infty[$ on peut donc intégrer par parties :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln t \, dt = t \ln t - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t} \, dt = t \ln t - \left[\ln t \right]_{\frac{1}{n}}^1 = t \ln t - \ln t + \ln \frac{1}{n}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln t \, dt = - \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

2. On pose : $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) \, dt$.

a) Interpréter graphiquement A_n

A_n est l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

b) On a : $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) \, dt = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(-t - \ln t \right) dt = \int_{\frac{1}{n}}^1 (-t) \, dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln t \, dt$

$$A_n = \left[-\frac{1}{2}t^2 \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \left(-\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

$$A_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{\ln n}{n}$$

c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4}$

3.a) Pour $1 \leq k \leq n$ on a $k < n$ donc $\frac{k}{n} < 1$ et $k+1 \leq n$ donc $\frac{k+1}{n} \leq 1$. D'où $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset]0, 1]$.

$\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$ d'où : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$ car f est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

En intégrant cette inégalité, on obtient : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \, dt$.

$$\text{Or } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \, dt = f\left(\frac{k+1}{n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \text{ et } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \, dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{On obtient enfin, } \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) De l'inégalité précédente, on obtient la suite des inégalités suivantes :

$$\frac{1}{n} f \frac{2}{n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f \frac{1}{n} \quad ; k=1$$

$$\frac{1}{n} f \frac{3}{n} \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f \frac{2}{n} \quad ; k=2$$

$$\frac{1}{n} f \frac{4}{n} \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f \frac{3}{n} \quad ; k=3$$

.....

$$\frac{1}{n} f \frac{n-1}{n} \leq \int_{\frac{n-2}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f \frac{n-2}{n} \quad ; k=n-2$$

$$\frac{1}{n} f \frac{n}{n} \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f \frac{n-1}{n} \quad ; k=n-1.$$

D'où par somme membres à membres :

$$\frac{1}{n} f \left(\frac{2}{n} \right) + \frac{1}{n} f \left(\frac{3}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right) \leq A_n \leq \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} f \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} f \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$4. a) \text{ On a : } S_n = \frac{1}{n} \left[f \left(\frac{1}{n} \right) + f \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + f \left(\frac{n}{n} \right) \right] = \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} f \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{n} f \left(\frac{2}{n} \right) + \frac{1}{n} f \left(\frac{3}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right) = S_n - \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\text{et } \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} f \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} f \left(\frac{n-1}{n} \right) = S_n - \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right)$$

D'où on déduit du résultat établi dans la question 3.b) que

$$S_n - \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) \leq A_n \leq S_n - \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right)$$

$$d'où \quad S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{et} \quad S_n \geq A_n + \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right) \quad \text{or} \quad \frac{1}{n} f \left(\frac{n}{n} \right) = \frac{1}{n} f$$

$$\text{finalement, on obtient : } A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right).$$

$$b) \text{ On a } A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^4 - x - x \ln x \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \text{Par suite} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n + \frac{1}{n} f \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \text{donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$$

Partie C

1. Démonstration par récurrence :

– Initialisation :

$$3 \leq \frac{1}{2} \frac{1+1}{2} \leq 2 \quad \text{donc} \quad 3 \leq \frac{1}{2} \frac{1+1}{2} \leq 2. \text{ La propriété est vraie pour } n=1.$$

