Annales de Mathématiques

Epreuves et corrigés de T^{le} D

Sujets du BAC

Kilimb Nganga
Chérif Laouan

Editions Afrique lecture SA

2014 - 2015

MATHEMATIQUES

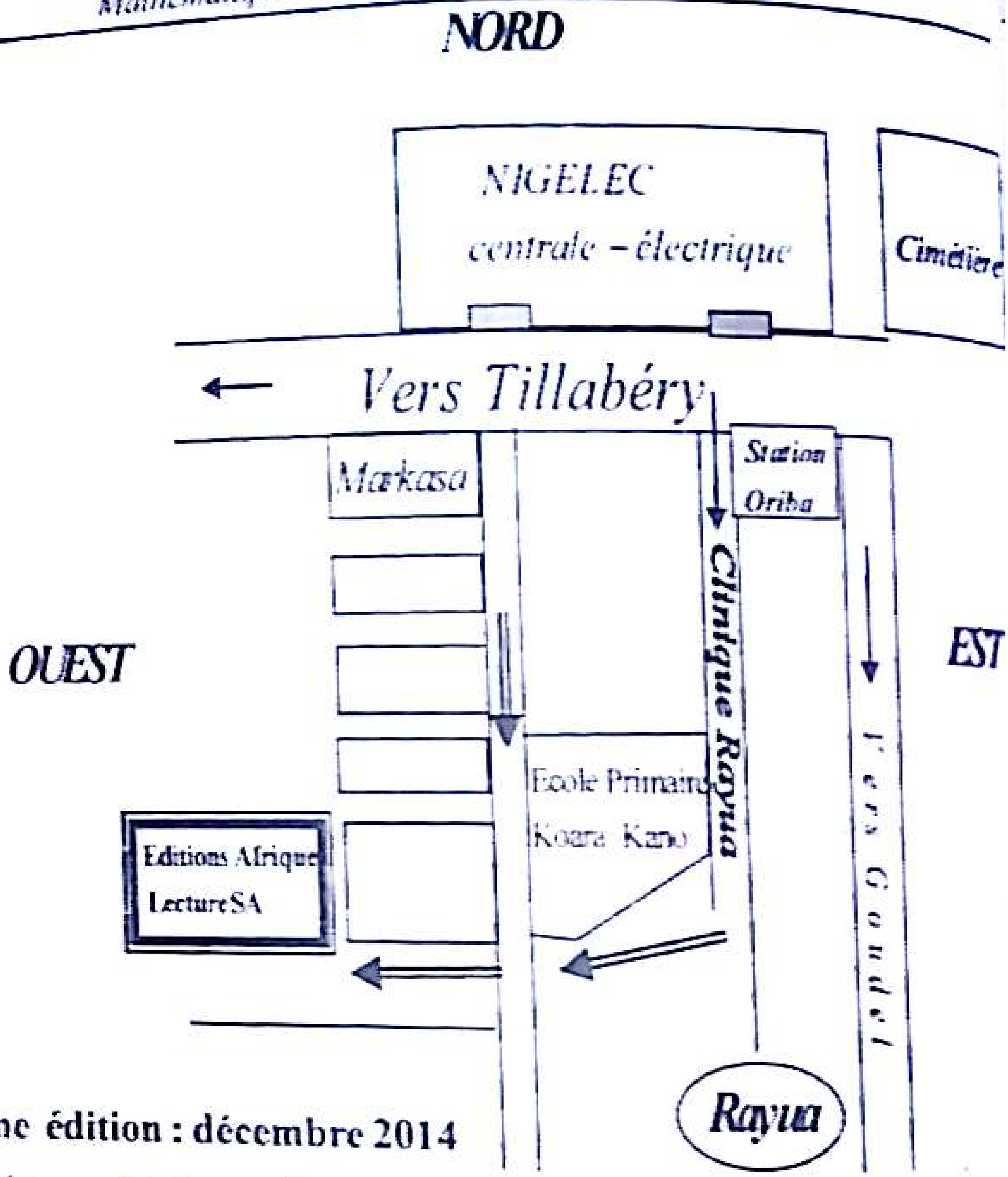
TD

Epreuves et corrigés des sujets au BAC

1[er] et second groupes

Sessions 2007 à 2014

KILIMB Nganga & CHERIF Laouan



Troisième édition : décembre 2014

BP : 11 968 Tel : (00227) 21 66 86 22

Niamey - Niger

E_mail : editionsscientifiques@yahoo.fr

Site web : www.afriquelecture.com

ISBN: 978-2-35229-054-4

Niamey décembre 2014

Table des matières

Mots à l'intention du lecteur

La société Editions Afrique Lecture SA, à travers la collection « Je m'exerce pour le **BAC** », veut apporter sa contribution dans la lutte pour le rayonnement de l'école africaine que mènent les acteurs professionnels de l'éducation, particulièrement, les enseignants et les cadres d'encadrement pédagogique.

La contribution apportée par la société Editions Afrique Lecture SA est traduite par une série de publications principalement axée sur les annales qui proposent des corrigés détaillés des épreuves du 1er et second groupes du BAC des sessions 2007 à 2014 au Niger.

La rédaction des corrigés tient compte du programme.

L'Editeur

Epreuves

Sujet N° 1

Session 2007 2e groupe

Exercice N°1

Soient les équations du second degré dans le corps des complexes :

(1) $z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i = 0$

(2) $z^2 - 4(1-2i)z - 19 - 40i = 0$

1) Résoudre ces équations.

2) A, B, A', B' sont les points d'affixes respectives

$z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 6 - i$, $z_4 = -2 - 7i$. Déterminer la similitude plane directe S qui transforme A en A' et B en B'. On précisera ses éléments caractéristiques.

Exercice N°2

Soit l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 30\cos x$ (E)

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

2) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 0$

a) Montrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation (E').

b) Résoudre l'équation différentielle (E').

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

d) Donner la solution générale de (E) vérifiant $y(0) = 6$ et $y'(0) = 0$

Sujet N° 2

Session 2008 2e groupe

Exercice N°1

On considère la série statistique double suivante :

x_i	4	5	5	7	10	11	13	15	15	17	17
y_i	5	9	14	7	9	11	12	12	14	5	17

1) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal bien choisi.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3) Donner une équation de la droite de régression de y et x ; puis tracer cette droite.

Exercice N°2

On considère la fonction f par $\mathbb{R}$: $f(x)=(x+1)e^{-2x}+x+1$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : $1cm$)

I- Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x}-2x-1$.

1) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

2) Calculer $g(0)$. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq 0$

II- Etude de la fonction f.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) a) Montrer que (C) admet en $+\infty$ une asymptote oblique (D) d'équation $y=x+1$

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x}g(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

4) Soit I le point de (C) d'abscisse nulle. Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point I. Vérifier que I est un point d'inflexion de (C).

5) Tracer (T) et (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Sujet N° 3

Session 2009 2e groupe

Exercice N°1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)$ pour tout $n \geq 1$

1) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

2) Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

3) On suppose $u_0 \neq 1$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)^2 \text{ et } u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2u_n}(u_n + 1)^2$$

En déduire que : $\forall n \geq 1$, $u_n - 1 \geq 0$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice N°2

Soit f et g deux fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x)=x+1+2\sqrt{x}$ et $g(x)=x+1-2\sqrt{x}$

1) Etudier les variations des fonctions f et g.

2) Dessiner les courbes (C_f) et (C_g) représentatives de f et de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : $2cm$)

3) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et (C_g), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=4$

Sujet N °4

Session 2010 2e groupe

Exercice N°1

Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z :

$2z^3-(4+2i)z^2+(3+2i)z-1-i=0$

1) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet deux solutions de la forme $\lambda(1+i)$, avec λ réel.

2) Le plan p étant rapporté à un orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_1 d'affixe $z_1=\frac{1}{2}(1+i)$ et M_2 d'affixe $z_2=\frac{1}{2}(1-i)$.

a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle.n considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0>0$ et $u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{1}{u_{n-1}}\right)$ pour tout $n\geq1$

1) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

2) Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n\in N}$ est-elle constante ?

3) On suppose $u_0 \neq 1$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)^2 \text{ et } u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2u_n}(u_n + 1)^2$$

En déduire que : $\forall n \geq 1$, $u_n - 1 \geq 0$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. En déduire

Exercice N°2

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par :

$f(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(unité Graphique : $1\,cm$)

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que g soit une primitive de f.

b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

Sujet N°5

Session 2011 2e groupe

Exercice N°1

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = e^{2x} - 2x$ et (C) sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{\dots} f(x)$ et $\lim\limits_{\dots} f(x)$

2) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C)

4) Tracer (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice N°2

Soit z un élément de l'ensemble orthonormé $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considère le polynôme en z.

$P(z) = z^3 - 4(1+i)z^2 + 15iz + 9(1-i)$

1) Calculer $P(3)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

3) Construire dans le plan complexe les images A, B, C des solutions de l'équation : $P(z) = 0$

4) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

Sujet N °6

Session 2012 2^e groupe

Exercice N°1

On considère la (u_n) définie par $u_n = -n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme u_0 et la raison.

2) On pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrie dont on

déterminera le premier terme v_0 et la raison.

3) a) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

2) a) Calculer la dérivée de f et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe (C).

4) Montrer que la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

5) calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = e$.

Sujet N °7

Session 2013 2e groupe

Exercice N°1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n on a :

$u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$.

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$ où α est un nombre réel.

1) Trouver le nombre α pour lequel la suite (v_n) est une suite géométrique.

2) On admet que $\alpha = \frac{1}{3}$. La suite (v_n) est-elle convergente ?

3) Exprimer v_n en fonction de n et calculer la somme

$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

4) Exprimer u_n en fonction de n et calculer $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -(-x-1)e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique du résultat

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) a) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit α un réel strictement inférieur à -1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} f(x)\,dx$

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Sujet N °8

Session 2014 2^e^ groupe

Exercice N°1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \sqrt{1+2u_n^2}$. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$v_n = 1 + u_n^2$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n en fonction de n. Calculer la somme $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

3) Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2 e^x$. Soit

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique $2\,cm$).

1)a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique des résultats.

c) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (x^2-1)e^x$

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Sujet N °9

Session 2007 1er groupe

Exercice N°1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1}$ pour tout n entier naturel.

1) Montrer, par récurrence, que $U_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On pose $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ et $W_n = \ln V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (W_n) est géométrique.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n, V_n puis U_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice N°2

Une urne contient 5 jetons portant respectivement les chiffres 1, 1, 1, 2 et 2. Les jetons portant des chiffres identiques sont indiscernables. On effectue trois tirages successifs d'un jeton en ne remettant pas à chaque fois le jeton tiré dans l'urne. Ces chiffres, dans l'ordre où ils tirés, sont appelés x, y, z.

1) Donner les éléments de Ω l'univers des éventualités.

2) On définit la probabilité d'un événement élémentaire $\{(x, y, z)\}$ par

$P\{(x, y, z)\} = a(x + y + z) + b$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b en sachant que p est une probabilité et que les événements :

$A = \{(x, y, z) \in \Omega, x = 1\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \Omega, y = z\}$ satisfont la propriété $P(A) - P(B) = \dfrac{4}{35}$.

3) On suppose que $a = \frac{1}{10}$ et $b = -\frac{2}{7}$. On désigne par x la variable aléatoire qui prend la valeur 3 si les trois chiffres sont impairs. la valeur 1 si un chiffre est impair et les deux autres pairs. et prend la valeur -2 s'il y a un chiffre pair et deux chiffres impairs.

Déteminer la loi de probabilité de x. Calculer son espérance mathématique et son écart type.

Problème

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1, & si\ x < 1 \\ (x-1)\ln x + 1, & si\ x \geq 1 \end{cases}$$ (où ln désigne le logarithme népérien)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (Δ) la première bissectrice.

1) Montrer que f est continue et dérivation en 1.

2) a) Montrer que pour $x < 1$ on a : $f'(x) > 0$

b) Montrer que pour $x > 1$ on a : $f'(x) > 0$

c) Dresser le tableau de variations de f. $x \to +\infty$ 3)a)Calculer $\lim \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x < 1$ on a :

$$f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1$$

Montrer que la courbe (C) admet la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ comme asymptote quand x tend vers $-\infty$.

c) En admettant les inégalités $\frac{x-1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}}-1\right] \leq 1$ pour tout

$x<1$, en déduire la position de (C) par rapport à (D) pour tout $x<1$.

d) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution α

appartenant à $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$.

4) Construire (C). On précisera les points d'intersection de (C) avec (Δ).

5) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du

plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

6) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une

réciproque f^{-1} (on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$)

b) Construire la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C).

c) Calculer l'aire de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations

$x=1$ et $x=e$.

Sujet N °10

Session 2008 1er groupe

Exercice N°1

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de son

premier terme U_1 et la relation de récurrence $u_{n+1}=2+\frac{4}{u_n+1}$ pour tout

n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. On suppose désormais que la suite n'est pas constante et que $u_1 > -1$.

2) Démontrer par récurrence que $u_n > -1$ pour tout n appartiennent à $\mathbb{N}^*$.

3) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$ pour tout n appartiennent à $\mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n et calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

4) Exprimer u_n en fonction de v_n. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°2

Soit $P(z) = 3z^3 + \left(-5\sqrt{3} + 10i\right)z^2 + \left(5 - 15\sqrt{3}i\right)z + 24i$

1) a) Calculer $P(-3i)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points $A(0,-3)$, $B\left(\sqrt{3},-1\right)$, $C\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Déterminer les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

Problème

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A) Soit la fonction numérique g_n définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

Dresser le tableau de variation de g_n et en déduire que $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty, 0]$.

B) Soit la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} xe^x - nx & si\ x \leq 0 \\ x^n(1 - \ln x) & si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $4cm$)

1) a) Etudier la continuité de f_n en $x = 0$.

b) Etudier la dérivation de f_n en $x = 0$.

2) a) Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) a) Calculer $f_n'(x)$ sur $]-\infty, 0[$.

b) Déduire de la partie a) le signe de $f_n'(x)$ sur $]-\infty, 0[$

4) Dresser le tableau de variation de f_n.

5) Cas $n = 1$ ou $n = 2$

a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression $f_2(x) - f_1(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et montrer que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées.

6) a) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. interpréter graphiquement ces résultats.

7) Construire (C_1) et (C_2) sur un même graphique.

8) Calculer, en intégrant par parties, l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Sujet N°11

Session 2009 1^er^ groupe

Exercice N°1

A) En notant $P(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrer que :

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$$

$\left[\text{indication : écrire } A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right]$

B) Lors d'une récente campagne d'abattage des chines errants, on a pu établir les statistiques suivantes :

- 30% des chiens errants étaient enragés
- Parmi les chiens abattus, 40% étaient enragés.

1) En désignant par b $(b \neq 1)$ la probabilité pour qu'un chien errant soit abattu lors de la campagne d'abattage, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé.

2) Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieure ou égale à 0.1 ?

3) A l'issue de la campagne d'abattage, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $1/3$.

Une campagne d'abattage est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la campagne d'abattage.

Quelle est dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminer au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage ?

Exercice N°2

1) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble D des points M, du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que : $|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

Le plan sera rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Caractériser géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par

$f : z \mapsto z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 5i\sqrt{3}$.

3) Quel est l'ensemble D', image par φ de l'ensemble D déterminé au 1) ? Représenter graphiquement D'.

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 1 - x$. (1)

1) Déterminer un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1)

2) a) Déterminer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

d) Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $h(0)=0$ et $h'(0)=0$

3) a) Soit h la fonction numérique de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=e^x-x-1$. Etudier ses variations et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout réel x.

B) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x+1} & \text{si } x<0 \\ \ln(x+1)+e^{-x}-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$ (ln désigne le logarithme népérien)

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x<0$ et dresser le tableau de variation de f

sur $]-\infty, 0[$

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{e^x(1+x)}$. En déduire le sens

de variation de f sur $[0,+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère

orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité :2 cm)

4) Montrer que la restriction de f à $]-\infty,-1[$ admet une bijection de

$]-\infty,-1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f,

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

Sujet N °12

Session 2010 1er groupe

Exercice N°1

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$z^3 - 3\sqrt{3}iz^2 - \left(9 - 3\sqrt{3}i\right)z + 8 = 0 \quad (E)$.

1) Montrer que (E) possède une solution réelle z_1 que l'on déterminera.

2) Résoudre (E)

3) Ecrire les trois solutions z_1, z_2, z_3 sous forme trigonométrique.

(avec $|z_2| < |z_3|$)

4) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les trois points : M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3. Soit S la similitude plane directe transformant M_1 en M_2 et M_2 en M_3. Préciser les éléments caractéristiques de S.

Exercice N°2

On considère l'équation différentielle : $y'' + 4y = 3\sin(x)$. $\quad (1)$

1) Déterminer le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha\sin(x)$ soit une solution de (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$. $\quad (2)$

b) Résoudre l'équation différentielle (2)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et

$f'(\pi)=0$.

Problème

A) On considère la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=|x+1|+\frac{1}{x-1}$$

1) Donner le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue :

2) Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f.

3) Etudier la dérivabilité de f en -1.

4) Etudier la variation de f et dresser son tableau de variation.

5) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.

6) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

7) Montrer que la restriction de f à $[0,1[$ est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

8) a) Calculer les intégrales : $s_1=\int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx$ et $s_2=\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

b) En déduire l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\sqrt{2}$ et $x=0$.

B) a) A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de nombres réels strictement supérieur à 1, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

Sachant que (v_n) est une suite arithmétique, de raison $r\,(r \neq 0)$ et de premier terme $v_1 = 0$, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r.

b) Comment choisir le réel r pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente ? Dans ce cas donner la limite.

c) Calculer, en fonction de u_n, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 2$ et $x = u_n$

Sujet N °13

Session 2011 1er groupe

Exercice N°1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{6+u_n}{2+u_n}$

.

1) Montrer par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

Exercice N°2

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On prélève simultanément trois boules de l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1) Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore c'est-à-dire composé d'une seule couleur.

2) Calculer la probabilité d'un prélèvement tricolore c'est-à-dire composé de trois couleurs.

3) Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement bicolore c'est-à-dire composé de deux couleurs.

4) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y''-2y'+y=x-1$. (1)

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax+b$ soit solution de l'équation différentielle (1)

2) a) Démontrer qu'une fonction h, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$ (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant des conditions : $h(0)=0$ et $h'(0)=0$.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité : $1cm$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1-e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2) Montrer que la droite $(D): y = x+1$ est asymptote oblique à (C).

3) Tracer (D) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4) a) Soit α un réel strictement négatif. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) et (D) et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

c) Soit m un réel et la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = m(x+1) - e^x$. On note Γ_m la courbe représentative de f_m.

1) Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.

2) Soit le point M_m d'ordonnée maximale de Γ_m. Donner une équation de l'ensemble des points M_m

Sujet N °14

Session 2012 1er groupe

Exercice N°1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation ponctuelle F, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$z' = m^3 z + m(m+1), \quad m \in \mathbb{C}^*$

1) Donner la nature de la transformation F.

2) On suppose $m = 1+i$. Donner dans ce cas les éléments géométriques de F.

3) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.

4) Déterminer l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

Exercice N°2

1) Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$

2) Chercher une primitive de $f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$

Problème

A) On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = -3e^x \quad (1)$

1) Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^x$ soit solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0 \ (2)$

b) Résoudre l'équation différentielle (2)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité : 1cm)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) Etudier les variation de f et dresser son tableau de variation.

2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = -1$

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4) a) Soit α un réel supérieur à 1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $]-\infty, 0]$ est une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

6) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y = m$.

Sujet N °15

Session 2013 1er groupe

Exercice N°1

1) a) Trouver les racines carrées du nombre complexe $5 - 12i$

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$(z + 2i)\left(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i\right) = 0$

2) Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes

respectives : $2i$, $2-i$ et $-1-3i$

Soit S la similitude plane directe laissant le point B invariant et transformant A en C.

a) Trouver la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image M' par S.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Exercice N°2

On considère la suite numérique définie par son premier terme $u_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 3}$.

1) Calculer u_1 et u_2

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = ln\left(\dfrac{u_n}{u_n + 2}\right)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer (v_n) puis u_n en fonction de n.

Problème

A) On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = -x + 3$ (1)

1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. (2)

b) Résoudre l'équation différentielle (2)

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h=(0)=0$ et $h'(0)=-1$

B) On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x)=xe^{x}-1$.

1) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α.

b) Vérifier que $0.5<\alpha<0.6$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

C) Le plan est un muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité : $2\,cm$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)(e^{x}-1)$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x,

$f'(x)=u(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Préciser les positions relatives de (C) et (D).

3) Tracer la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra $\alpha=0.55$)

4) Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe

(C), la droite (D) et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

5) a) Montrer que la restriction de f à $]-\infty, 0]$ est une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C).

Sujet N °16

Session 2014 1er groupe

Exercice N°1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-4i)z - 25 + 10i$

1) a) Vérifier que : $P(5-2i) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3-2i$ et qui transforme le point d'affixe $z_A = 1+2i$ en B d'affixe $z_B = 5-2i$.

a) Déterminer f, l'application complexe associée à S.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Exercice N°2

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$

On considère la suite réelle (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n + 1)$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - y' = e^x \quad (1)$.

1) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

2) a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0 \quad (2)$.

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0) = -4$ et $h'(0) = 1$.

B) On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x - 4$.

1) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

C) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1 cm).

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - 4\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\alpha = 1,25$)

3) Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$.

a) Calculer l'air $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.

b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2, +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle $[2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

Corrigés

Sujet N °1

Session 2007 2e groupe

Exercice N°1

Soient les équations du second degré dans le corps des complexes :

(1) $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$

(2) $z^2-4(1-2i)z-19-40i=0$

1) Résolvons ces équations

(1) $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$

Posons $\Delta=(1-2i)^2-4(1+5i)=1-4i-4-4-20i$

$\Delta=-7-24i$ avec $|\Delta|=\sqrt{(-7)^2+(24)^2}=\sqrt{625}=25$

Soit $\delta=x+iy$ tel que $\delta^2=\Delta$.

$$\delta^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=\Re e(\Delta) \\ x\cdot y\cdot \Im m(\Delta)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2-y^2=-7 \\ -24xy>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2x^2=18 \\ -24xy>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 = 9 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = \pm 3 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Pour $x = 3 > 0$ on a :

$$\begin{cases} 9 + y^2 = 25 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Donc $\delta = 3 - 4i$.

Pour $x = -3 < 0$ on a :

$$\begin{cases} 9 + y^2 = 25 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Donc $\delta = -3 + 4i$.

Ainsi $\delta = \pm(3 - 4i)$.

Les solutions z_1 et z_2 de l'équation (1) sont :

$$z_1 = \frac{-(1-2i)+(3-4i)}{2} = \frac{-1+2i+3-4i}{2}$$

$$= \frac{-2-2i}{2}$$

$$z_1 = -1-i$$

$$z_2 = \frac{-(1-2i)+(-3+4i)}{2} = \frac{-1+2i-3+4i}{2}$$

$$= \frac{-4+6i}{2}$$

$$z_2 = -2+3i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{1-i\,;-2+3i\}$.

(2) $z^2-4(1-2i)z-19-40i=0$

Posons $\Delta = \left[-4(1-2i)\right]^2 - 4(-19-40i)$

$\Delta = 16(1-2i)^2 - 4(-19-40i)$

$\Delta = 16(1-4i-4)+76+160i$

$\Delta = 16-64i-64+76+160i$

$\Delta = 28+96i$

$\Delta = 4(7+24i)$ avec $|\Delta| = 4\sqrt{(-7)^2+(24)^2} = 4\sqrt{625} = 100$

Soit $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| \\ x^2-y^2 = \Re e(\Delta) \\ x\cdot y\cdot \Im m(\Delta) > 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x^2-y^2=28 \\ 96xy>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 2x^2=128 \\ xy>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x^2=64 \\ xy>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x^2=64 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x=\pm 8 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases}$$

Pour $x=8>0$ on a :

$$\begin{cases} 64+y^2=100 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=36 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases}$$

Donc $\delta = 8+6i$.

Pour $x=-8<0$ on a :

Pour $x=-8<0$ on a :

$$\begin{cases} 64+y^2=100 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=36 \\ x \text{ et y de même signe} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$$

Donc $\delta = -8 - 6i$.

Ainsi $\delta = \pm(8 + 6i)$.

Les solutions z_3 et z_4 de l'équation (1) sont :

$$z_3 = \frac{4(1-2i)+(8+6i)}{2} = \frac{4-8i+8+6i}{2}$$

$$= \frac{12-2i}{2}$$

$$z_3 = 6 - i$$

$$z_4 = \frac{4(1-2i)+(-8-6i)}{2} = \frac{4-8i-8-6i}{2}$$

$$= \frac{-4-14i}{2}$$

$$z_4 = -2-7i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{6-i\,;-2-7i\}$.

2) A, B, A', B' sont les points d'affixes respectives

$z_1 = 1-i,\ z_2 = -2+3i,\ z_3 = 6-i,\ z_4 = -2-7i$.

Déterminons la similitude plane directe S qui transforme A en A' et B en B'.

Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de S

On a : $\begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_A = az_A + b \\ z'_B = az_B + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ -2-7i = a(-2+3i)+b \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ 8+6i = a(3-4i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ 8+6i = 3a-4ai \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ 3a = 8+6i+4ai \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a(3-4i) = 8+6i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a = \dfrac{8+6i}{3-4i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a = \dfrac{(8+6i)\times(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a = \dfrac{24+32i+18i-24}{9+16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a = \dfrac{50i}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-i = a(1-i)+b \\ a = 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 6 - i - 2i \times (1 - i) \\ a = 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 6 - i - 2i - 2 \\ a = 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 - 3i \\ a = 2i \end{cases}$$

Dons $S : z' = 2iz + 4 - 3i$.

Précisons les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S

Rapport de la similitude S : $|a| = |2i| = 2$

Centre Ω de la similitude S est d'affixe z_Ω : $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{4-3i}{1-2i}$

$$z_\Omega = \frac{(4-3i)(1+2i)}{1+4} = \frac{4+8i-3i+6}{5}$$

$$= \frac{10+5i}{5} = 2 + i$$

$\Omega\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Argument de S : $\mathrm{Arg}(a) = \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

S est la similitude de centre $\Omega\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice N°2

1) Déterminons les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

Soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble de solutions de (E)

$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $g''(x) = -a\cos x - b\sin x$

$g(x) \in \mathcal{S}_1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 30\cos x$ avec

$g(x) = a\cos x + b\sin x$

$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $g''(x) = -a\cos x - b\sin x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 30\cos x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (-a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) +$$

$+5(a\cos x + b\sin s) = 30\cos x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos x - b\sin x - 2a\sin x + 2b\cos x +$

$$+5a\cos x + 5b\sin s = 30\cos x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (-a + 2b + 5a)\cos x + (-b - 2a + 5b)\sin x = 30\cos x$

Ainsi pour tout x , en particulier $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient

$$\begin{cases} -a + 2b + 5a = 30 \\ -b - 2a + 5b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 15 \\ 5b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 15 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3 = 15 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Donc $g(x) = 6\cos x + 3\sin x$

2) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 5y = 0$

a) Montrons que f solution de $(E) \Rightarrow f - g \in \mathscr{S}_{E'}$

$f(x) \in \mathscr{S}_1 \Rightarrow f''(x) + 2f'(x) + 6f(x) = 30\cos x$ et puis nous avons aussi $g(x) \in \mathscr{S}_E \Rightarrow g''(x) + 2g'(x) + 6g(x) = 30\cos x$ donc

$f''(x) - g(x)'' + 2f'(x) - 2g'(x) + 5f(x) - 5g(x) = 0$ ou

$(f(x) - g(x))'' + 2(f(x) - g(x))' + 5(f(x) - g(x)) = 0$

$\Rightarrow f - g \in \mathscr{S}_{E'}$

Montrons que $f - g$ solution de $(E') \Rightarrow f \in \mathscr{S}_E$

$f - g$ solution de $(E') \Rightarrow$

$(f(x) - g(x))'' + 2(f(x) - g(x))' + 5(f(x) - g(x)) = 0$

$\Rightarrow f''(x) - g(x)'' + 2f'(x) - 2g'(x) + 5f(x) - 5g(x) = 0$

$\Rightarrow f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = g(x)'' + 2g'(x) + 5g(x)$ or

$g''(x) + 2g'(x) + 6g(x) = 30\cos x$ donc

$\Rightarrow f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 30\cos x \Rightarrow f$ solution de (E).

Ainsi f solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation (E').

b) Résolvons l'équation différentielle (E').

$y''+2y'+5y=0$

Equation caractéristique : $r^2+2r+5=0$

Posons $\Delta = 4-20 = -16 = 16i^2$ ce qui veut dire que $\sqrt{\Delta} = 4i$

Ainsi $r_1 = \dfrac{-2-4i}{2} = -1-2i$ et $r_2 = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$.

L'ensemble des solutions de E' est

$\{f : x \to e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x),\ A \text{ et } B \in \mathbb{R}\}$.

c) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de forme :

$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 6\cos x + 3\sin x$.

d) Donnons la solution générale de (E) vérifiant $y(0)=6$ et $y'(0)=0$.

On a $y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 6\cos x + 3\sin x$

$y(0) = A+6 = 6 \Rightarrow A = 0$

$$y'(x) = -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - \\ -6\sin x + 3\cos x$$

$y'(0) = -A+2B+3 = 0$ et comme $A=0$, alors $B = \dfrac{-3}{2}$.

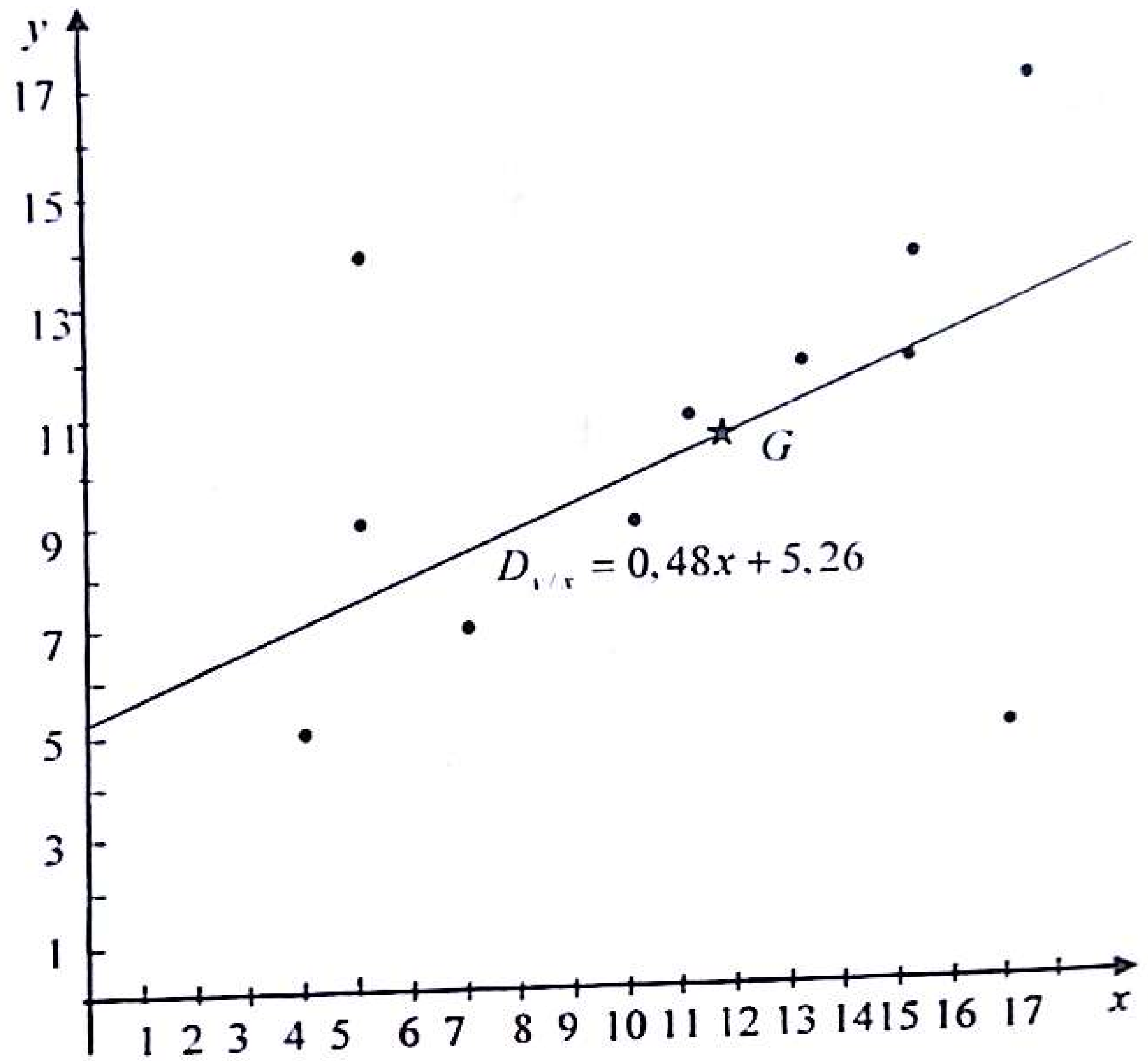
$y(x) = \dfrac{-3}{2}e^{-x}\sin 2x + 6\cos x + 3\sin x$.

Sujet N °2

Session 2008 2e groupe

Exercice N°1

1) Tracé du nuage de points



2) Calcul des coordonnées du point moyen G

$$G\begin{pmatrix} \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{11} = \dfrac{119}{11} \\ \bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{11} y_i}{11} = \dfrac{115}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow G\begin{pmatrix} 10.82 \\ 10.45 \end{pmatrix}$$

3) Equation de la droite de régression de y en x : $D_{y/x}$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
4	5	20	16	25
5	9	45	25	81
5	14	70	25	196
7	7	49	49	49
10	9	90	100	81
11	11	121	121	121
13	12	156	169	144
15	12	180	225	144
15	14	210	225	196
17	5	85	289	25
17	17	289	289	289
119	115	1315	1533	1351

$$D_{y/x} : y - \bar{y} = a\left(x - \bar{x}\right), \quad a = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{v(x)}$$

$$G\begin{pmatrix} \bar{x} = 10.82 \\ \bar{y} = 10.45 \end{pmatrix}$$

$$v(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{1533}{11} - \left(\frac{119}{11}\right)^2 = 22.33$$

$$\text{cov}(x, y) = \overline{x \times y} - \overline{x} \times \overline{y} = \frac{1315}{11} - \frac{119}{11} \times \frac{115}{11}$$

$$\text{cov}(x, y) = 6.45$$

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{v(x)} = \frac{6.45}{12.52} = 0.48$$

Comme $D_{y,x} : y - \overline{y} = a\left(x - \overline{x}\right)$

Donc $y = 0.48x + 10.45 - (0.48 \times 10.82)$

$D_{y,x} : y = 0.48x + 5.26$

Tracé de la droite – Voir figure

Exercice N°2

I- 1) Etude du sens de variations de g

Domaine de définition

$g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right) = 2\left(e^{x} - 1\right)\left(e^{x} + 1\right)$

Comme $g'(x) = 2\left(e^{x} - 1\right)\left(e^{x} + 1\right)$, alors le signe de $g'(x)$ est celui de

$e^{x} - 1$

Etude du signe de $e^{x} - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x} - 1$		$-$	0	$+$	

Sens de variations de g

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $g'(x) \leq 0 \Rightarrow g$ décroissante su $]-\infty, 0]$

$\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ croissante sur $[0, +\infty[$

Tableau de variations

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g_n'		$-$	0	$+$	
g_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Calcul de $g(0) = 0$ et déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

$g(0) = 0$.

Nous avons $g(0) = 0$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ donc $g(x) \geq 0$.

II- 1) Calcul de limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[(x+1)e^{-2x} + x + 1\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[e^{-2x} + xe^{-2x} + x + 1\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (x+1)\left(e^{-2x} + 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[(x+1)e^{-2x} + x + 1\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{(x+1)}{e^{2x}} + x + 1\right] = +\infty$$

2) a) Montrons que (C) admet en $+\infty$ une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+1)e^{-2x} + x + 1 - x - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-2x} + e^{-2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}} + e^{-2x} \right) = 0^{+}$$

D'où $D : y = x + 1$ est asymptote à (C) à $+\infty$.

b) Etudions la position de (C) par (D).

Pour cela étudions le signe de $\left[f(x) - y \right]$

D'après la question 2) a) la courbe (C) est au dessus de D à $+\infty$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x} g(x)$ et dressons le tableau de variations de f

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \left((x+1)e^{-2x} + x + 1 \right)' = e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1) + 1$$

$$= e^{-2x}(-1 - 2x) + 1$$

$$= e^{-2x}\left[-1 - 2x + \frac{1}{e^{-2x}} \right]$$

$$f'(x) = e^{-2x}\left(e^{2x} - 2x - 1 \right) = e^{-2x} \times g(x)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$. (Question I-2)) et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$

Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4) Donnons une équation de la tangente (T) à (C) au point I.

Nous avons $I\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

Tangente en $x=0$ $T_I : y = 2 + f'(0)\times(x-0)$

Or $f(0)=(0+1)e^0+0+1=2$; $f'(0)=e^0(e^0-0-1)=0$

Donc $T_I : y = 2$.

Vérifions que I est un point d'inflexion de (C).

Pour cela montrons que $f''(x)$ s'annule avec changement de signe en x_I

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-2x}(-1-2x)+1$

$$\Rightarrow f''(x) = -2e^{-2x}(-1-2x)-2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^{-2x}\left[(2+4x)-2\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = 4xe^{-2x}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0 \Rightarrow f''(x)$ a le même signe que x.

Pour $x \le 0$, $f''(x) \le 0$ et pour $x \ge 0$, $f''(x) \ge 0$, donc f'' s'annule en

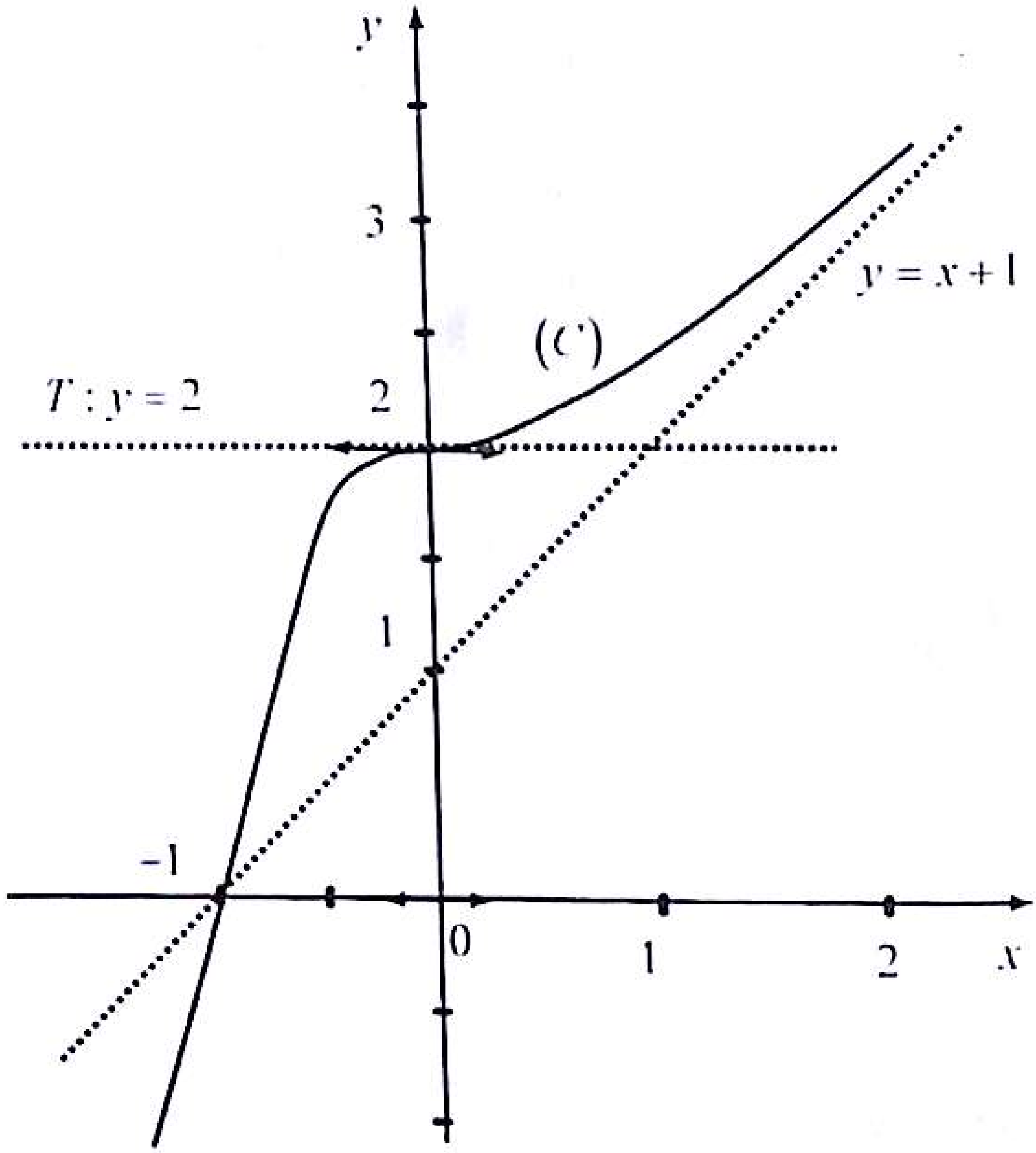
I avec changement de signe, d'où $I\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ est un point d'inflexion.

5) Traçons (T) et (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Branche infinie

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^{-2x}+x+1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}+\frac{e^{-2x}}{x}+1+\frac{1}{x}=+\infty$$, donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction oy à $-\infty$.



Sujet N °3

Session 2009 2e groupe

Exercice N°1

1) Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

On a : $u_0 > 0$ et $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $p(n) : u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right) > 0$

Vérifions si $p(1)$ est vraie

$p(1) : u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{u_0}\right) > 0$, donc $p(1)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie .

De $P(n)$ vraie peut on avoir $P(n+1)$ vraie c'est à dire

$P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie ?

$P(n)$ vraie $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) > 0$

$\Rightarrow p(n+1)$ vraie

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

2) Trouvons la valeur de u_0 pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante.

(u_n) constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} , (u_{n+1} = u_n) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{u_0}\right) = u_0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(u_0 + \frac{1}{u_0} = 2u_0 \right)$$

(u_n) constante $\Leftrightarrow \left(\dfrac{u_0^2 + 1 - 2u_0^2}{u_0} = 0 \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1-u_0)(1+u_0)}{u_0} = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow (1 - u_0 = 0) \text{ car } u_0 > 0 \ \Leftrightarrow (u_0 = 1)$$

On prendra $u_0 = 1$.

3) On suppose que $u_0 \neq 1$

a) Demontrons que, pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - 1)^2$ et $u_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2u_n}(u_n + 1)^2$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) - 1$$

$$= \frac{1}{2u_n}(u_n^2 + 1) - 1 \quad = \frac{1}{2u_n}\left((u_n^2 + 1) - 2u_n \right)$$

$$= \frac{1}{2u_n}(u_n^2 + 1 - 2u_n) \quad = \frac{1}{2u_n}(u_n^2 - 2u_n + 1)$$

Donc $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - 1)^2$

$$u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) + 1$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2+1\right)+1 \quad = \frac{1}{2u_n}\left(\left(u_n^2+1\right)+2u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(u_{nn}^2+1+2u\right) \quad = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2+2u_n+1\right)$$

Donc $u_{n+1}+1 = \frac{1}{2u_n}\left(u_n+1\right)^2$

Déduisons que : $\forall n \geq 1,\ \ u_n - 1 \geq 0$

$$u_n - 1 = \frac{1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{1}{u_{n-1}}\right)-1 = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1}^2+1-2u_{n-1}}{u_{n-1}}\right)$$

$u_{n+1}-1 = \frac{1}{2u_n}\left(u_n-1\right)^2 \Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{2u_{n-1}}\left(u_{n-1}-1\right)^2 \geq 0$

D'où $u_n - 1 \geq 0$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)-u_n = \frac{1}{2}\left[u_n+\frac{1}{u_n}-2u_n\right]$$

$$= \frac{1}{2u_n}\left(1-u_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-u_n\right)\left(1+u_n\right)$$

Comme $1+u_n > 0$ alors $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $1-u_n$ qui est négatif car $u_n - 1 \geq 0$.

$u_{n+1}-u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

Deduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Nous savons que $u_n > 0$ c'est-à-dire $0 < u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et comme en plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on dit qu'elle est convergente. (Th. : Toute suite décroissante et minorée est convergente)

Exercice N°2

1) Etudions les variations des fonctions f et g.

$f(x) = x + 1 + 2\sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$. $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$

$\Rightarrow f$ croissante sur $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + 2\sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + 2\sqrt{x} = +\infty$ donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$.

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	1 $\nearrow$	$+\infty$

$g(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$; $D_g = \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\forall x \in]0, 1]$, $g'(x) \le 0 \Rightarrow g$ décroissante sur $]0, 1]$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $g'(x) \ge 0 \Rightarrow g$ croissante sur $[1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 - 2\sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - 2\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

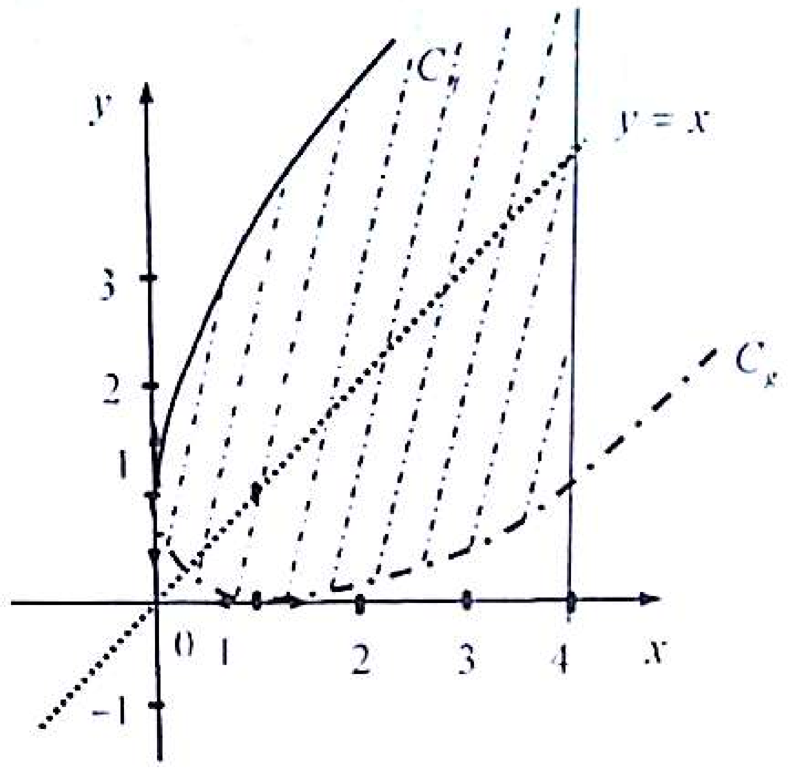
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$$

$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim_{x \to +\infty} 1 - 2\sqrt{x} = -\infty$ donc la courbe g admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Dessinons les courbes (C_f) et (C_g) représentatives de f et de g dans un repère orthonorme (O, i, j).



3) Calcul d'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et (C_g), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 4$

$$Aire = \int_0^4 (f-g)(x)\,dx \times 4\,cm^2 = \int_0^4 4\sqrt{x}\,dx \times 4cm^2$$

$$= 16\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx \times cm^2 = 16\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 cm^2$$

$$= \frac{32}{3}cm^2 \times 2^3 = \frac{2^8}{3}cm^2 = \frac{256}{3}cm^2 \simeq 85.33\,cm^2.$$

Sujet N °4

Session 2010 2e groupe

Exercice N°1

1) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation

$E: 2z^3-(4+2i)z^2+(3+2i)z-1-i=0$

Résolvons l'équation (E) sachant qu'elle admet deux solutions de la forme $\lambda(1+i)$, avec λ réel.

Si $\lambda(1+i)$ vérifie l'équation (E), alors

$$2(\lambda(1+i))^3-(4+2i)(\lambda(1+i))^2+(3+2i)(\lambda(1+i))-1-i=0$$

$$2(\lambda^3(1+3i-3-i))-(4+2i)(\lambda^2+2\lambda^2 i-\lambda^2)+$$
$$+\lambda(3+5i-2)-1-i=0$$

L'équation devient

$$-4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda-1+i(4\lambda^3-8\lambda^2+5\lambda-1)=0$$

$$\begin{cases}-4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda-1=0\\ 4\lambda^2-8\lambda^2+5\lambda-1=0\end{cases}$$

Constatons que $\lambda=1$ est une solution évidente des deux équations, alors par factorisation on obtient :

$$\begin{cases}(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \left(\lambda=1;\lambda=\frac{1}{2};\lambda\frac{-1}{2}\right)\\ (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Rightarrow \left(\lambda=1;\lambda=\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

On retient les valeurs de λ qui satisfont les deux équations : $\lambda\in\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$.

Ainsi les deux solutions de l'équation (E) sont solutions $1+i$ et $\frac{1}{2}(1+i)$.

Déterminons la 3ᵉ racine.

Soit $z = a + ib$ la troisième racine de l'équation, alors

$$2(z-(1+i))\left(z-\frac{1}{2}(1+i)\right)(z-(a+ib))=0$$

$$\Rightarrow 2\left(z^2-\frac{1}{2}(1+i)z-(1+i)z+\frac{1}{2}(1+i)^2\right)(z-(a+ib))=0$$

$$\Rightarrow 2\left(z^2-\frac{3}{2}(1+i)z+\frac{1}{2}(1+2i-1)^2\right)(z-(a+ib))=0$$

$$\Rightarrow 2\left(z^2-\frac{3}{2}(1+i)z+i\right)(z-a-ib)=0$$

$$\Rightarrow 2\left(z^2-\frac{3}{2}(1+i)z+i\right)(z-a-ib)=0$$

$$\Rightarrow 2z^3-2(a+ib)z^2-3(1+i)z^2+3(1+i)az+3(-b+ib)z+$$
$$2iz-2ai+2b=0$$

Or nous avions l'équation $2z^3-(4+2i)z^2+(3+2i)z-1-i=0$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} 2=2 \\ 2a+3+2ib+3i=4+2i \\ 3a-3b+3ia+3ib+2i=3+2i \\ 2ai+2b=-1-i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

L'équation devient $(z-(1+i))\left(z-\frac{1}{2}(1+i)\right)\left(z-\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\right)=0$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{1+i, \frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}(1-i)\right\}$$

2) a) Montrons que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle.

$M_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad M_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Dans le triangle OM_1M_2 $\begin{cases} OM_1 = OM_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2} = 0 \end{cases}$; le triangle

(OM_1M_2) est rectangle isocèle.

b) Déterminons l'affixe du point M_3 du plan pour que $OM_1M_3M_2$ soit un carre.

Comme deja le triangle (OM_1M_2) est rectangle isocele, pour que

$OM_1M_3M_2$ soit un carre il faut que

$\left(\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}\right)$

soit $M_3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{M_1M_3}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\ y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OM_2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\ y-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, donc $M_3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ est le point cherché.

Exercice N°2

$f : x \mapsto \left(x^2 + x - 1\right)e^{-x}$

1) Etudions les variations de la fonction f.

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x + 1\right)e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(\left(x^2 + x - 1\right)e^{-x}\right)' = (2x+1)e^{-x} - \left(x^2 + x - 1\right)e^{-x}$

$= e^{-x}\left(-x^2 + x + 2\right).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0, f'(x)$ a le même signe que $-x^2 + x + 2$

Le signe de la dérivée est celui de $\left(-x^2 + x + 2\right)$.

$-x^2 + x - 1 = 0$; $\Delta = 9$; $x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$.

x	-1		2	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$

Tableau de variation

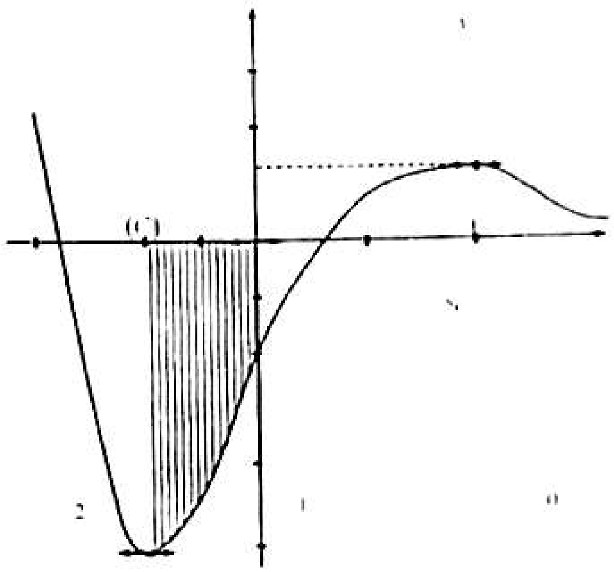
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$5e^{-2}$	$\searrow$	0

2) Traçons la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

<u>Les branches infinies</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2+x+1)e^{-x}}{x} = +\infty$. la courbe (C) de f admet à $-\infty$ une branche parabolique de direction Oy

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+x+1)e^{-x}}{x} = 0$. la droite $y=0$ est, à $+\infty$, une asymptote horizontale pour la courbe de .



3)

a) Déterminons les réels a, b et c tels que g soit une primitive de f

(g primitive de f sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow g' = f$

$g' = f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left(\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}\right)' = \left(x^2+x-1\right)e^{-x}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \left(\left(2ax+b\right)e^{-x} - e^{-x}\left(ax^2+bx+c\right)\right) = \left(x^2+x-1\right)e^{-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}. \left(e^{-x}\left[-ax^2+\left(2a-b\right)x+b-c\right] = \left(x^2+x-1\right)e^{-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 2a-b=1 \\ b-c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=-2 \end{cases}$$

b) Calcul de l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$

La fonction g telle que $\forall x \in \mathbb{R}.\quad g(x) = \left(-x^2-3x-2\right)e^{-x}$ est une primitive de f vers $\mathbb{R}$

$$Aire = -\int_{-1}^{0}\left(x^2+x-1\right)e^{-x}dx = -\left[\left(-x^2-3x-2\right)e^{-x}\right]_{-1}^{0} cm^2$$

$$= -\left(-2+1-3+2\right)cm^2 = 2cm^2.$$

Sujet N °5

Session 2011 2e groupe

Exercice N°1

1) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} - 2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - 2x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 2x$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = +\infty$$

2) Calculons la dérivée de f et dressons le tableau de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right) = 2\left(e^{x} + 1\right)\left(e^{x} - 1\right)$

Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $e^{x} - 1$.

Etudions le signe de $e^{x} - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x} - 1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) Montrons que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C)

Calculons $\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - (-2x)\right]$

$\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - (-2x)\right] = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0^{+}$, alors la droite d'équation

$y = -2x$ est asymptote à (C) à $-\infty$ et que la courbe est au dessus de l'asymptote.

4) Traçons (C) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

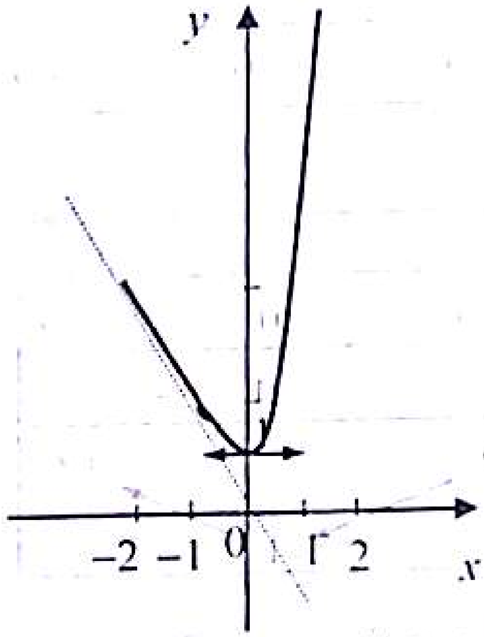
Branches infinies

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 2x}{x} = -2$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0^{+}$

donc à $-\infty$ la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation

$y=-2x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-2x}{x}=+\infty$ donc à $+\infty$ la courbe (C) admet une branche parabolique de direction Oy.



Exercice N°2

1) Soit $P(z)=z^3-4(1+i)z^2+15iz+9(1-i)$

Calculons $P(3)$.

$P(3)=3^3-4(1+i)3^3+15i3+9(1-i)=0$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$.

$P(z)=0\Rightarrow z^3-4(1+i)z^2+15iz+9(1-i)=0$

Comme $P(3)=0$, alors $\exists Q(z)\,/\,P(z)=(z-3)Q(z)$

Où $Q(z)$ est le quotient dans la division euclidienne de $P(z)$ par

$(z-3)$

Ainsi on obtient que $Q(z) = z^2 - (1+4i)z - 3 + 3i$

Donc $P(z) = (z-3)\left(z^2 - (1+4i)z - 3 + 3i\right)$

Résolvons ensuite $Q(z) = 0 \Rightarrow z^2 - (1+4i)z - 3 + 3i = 0$

Cherchons les zéro de $Q(z)$: $\Delta = \left[-(1+4i)\right]^2 - 4(-3+3i)$

$$= 1 + 8i - 16 + 12 - 12i$$
$$= -3 - 4i$$

$|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \Re e(\Delta) \\ x \cdot y \cdot \Im m(\Delta) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ -4xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \cdot 2x^2 = 2 \\ -4xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2=1 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x=\pm 1 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Pour $x=1>0$ on a :

$$\begin{cases} 1+y^2=5 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Donc $\delta = 1-2i$.

Pour $x=-1<0$ on a :

$$\begin{cases} 1+y^2=5 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x \text{ et y de signe contraire} \end{cases}$$

Donc $\delta = -1+2i$.

Ainsi $\delta = \pm(1-2i)$.

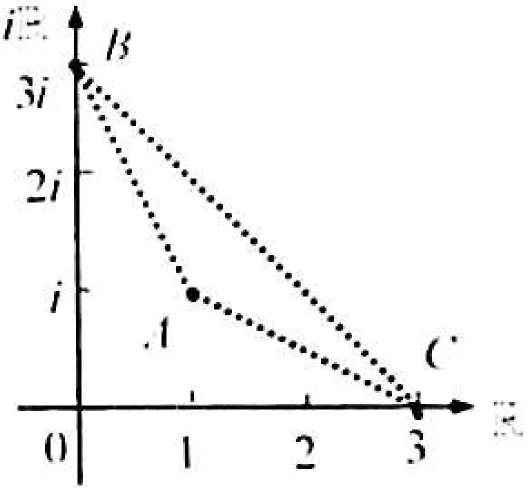
D'où $z_2 = \dfrac{1+4i+(1-2i)}{2} = 1+i$ et $z_3 = \dfrac{1+4i-(1-2i)}{2} = 3i$

Ainsi $P(z)=0 \Leftrightarrow z-3=0$ ou $Q(z)=0$

$S_C = \{3\,.\,3i\,.\,1+i\}$

3) Construisons dans le plan complexe les images $A.\,B.\,C$ des solutions

de l'équation : $P(z) = 0$



4) Montrons que le triangle ABC est isocèle.

On a : $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}0-1\\3-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, donc $AB = \sqrt{5}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}3-1\\0-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, donc $AC = \sqrt{5}$

On constate que dans le triangle (ABC) : $AB = AC = \sqrt{5}$ ce qui veut dire que le triangle ABC est un triangle isocèle.

Sujet N °6

Session 2012 2e groupe

Exercice N°1

1) Montrons que (u_n) est une suite arithmétique et déterminons le premier terme u_0 et la raison de cette suite

La suite (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si on a :

$u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. nous savons que $u_n = -n+2$. donc

$u_{n+1} - u_n = -(n+1)+2-(-n+2)$

$u_{n+1} - u_n = -1 \in \mathbb{R}$ d'où la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$. de raison $r_0 = -1$.

2) Montrons que (v_n) est une suite géométrie et déterminons le premier terme v_0 et la raison de cette suite.

$v_n = e^{u_n} = e^{-n+2} = e^{-n} \times e^2$

Ainsi $v_n = e^2\left(e^{-1}\right)^n$ qui est de la forme d'une suite géométrique

$v_n = v_0(q)^n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme

$v_0 = e^2$ et de raison $q = \dfrac{1}{e}$.

3) a) Calcul de la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

$$S_n = v_0\frac{1-q^n}{1-q} = e^2\frac{1-\left(e^{-1}\right)^n}{1-e^{-1}} = e^2 \times \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^2 \times \dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = \dfrac{e^2}{1-e^{-1}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{e^2}{1-e^{-1}}$.

Exercice N°2

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

1) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0^+$, donc la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe à $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$, donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f.

2) a) Calculons la dérivée de f et étudions son signe.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x - (1+\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}.$$

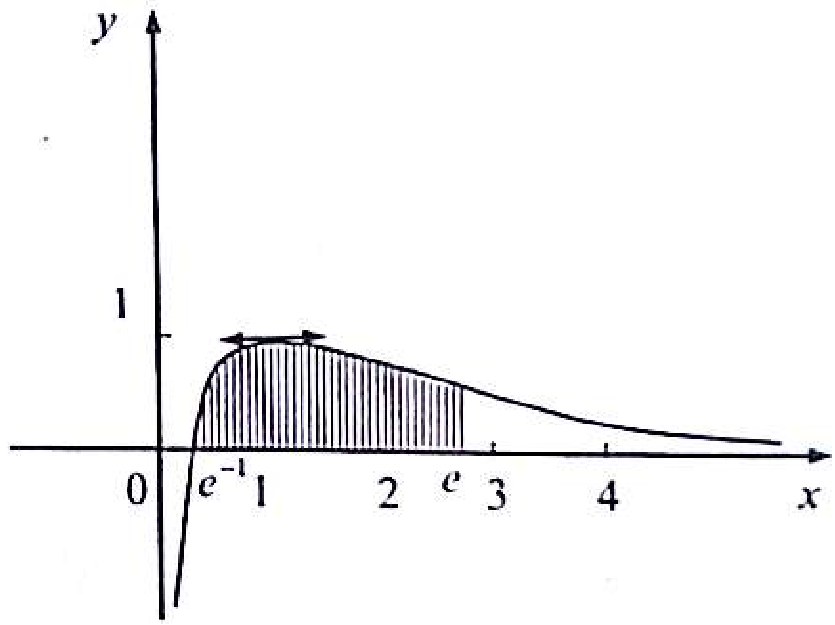
Etude du signe de $f'(x)$

D_f	0	1	$+\infty$
x	$+$	0	$+$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$\dfrac{-\ln x}{x^2}$	$+$		$-$

b) Dressons le tableau de variation de f.

D_f	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			1		
	$+\infty$	↗		↘	0^+

3) Traçons la courbe (C).



4) Montrons que la fonction F définie par : $F(x)=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x)=\frac{1}{2}\left[(1+\ln x)^2\right]'$

$$=\frac{1}{2}\times 2(1+\ln x)\times\left(\frac{1}{x}\right)$$

$F'(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} = f(x)$. d'où f et une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Calcul de l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe (C).

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = e$.

$$A = \int_{e^{-1}}^{e} f(x)\,dx \,.1cm^2 = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx \,.1cm^2 = \frac{1}{2}\Big[(1+\ln x)^2\Big]_{e^{-1}}^{e} .1cm^2$$

$= 2cm^2$.

Sujet N °7

Session 2013 2e groupe

Exercice N°1

1. Trouvons le nombre α pour lequel la suite (v_n) est une suite géométrique.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On sait que la suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_n - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

(v_n) suite géométrique $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = q\, v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$

$$= 2u_n - \frac{1}{3} - \alpha$$

$$= 2(v_n + \alpha) - \frac{1}{3} - \alpha$$

$$= 2v_n + 2\alpha - \alpha - \frac{1}{3}$$

$$v_{n+1} = 2v_n + \alpha - \frac{1}{3} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}. qv_n = 2v_n + \alpha - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}. (q-2)v_n - \alpha + \frac{1}{3} = 0$$

Par identification on a : $\begin{cases} q - 2 = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$

2. On admet que $\alpha = \frac{1}{3}$.

Vérifions si la suite (v_n) est convergente

Nous savons que $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ et (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$, de prémier terme $v_0 = \frac{5}{3}$, mais comme $|q| = 2 > 1$ alors la suite est non convergente.

3) Exprimons v_n en fonction de n et calculons la somme

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2}$$

On a $s_n = v_0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = \frac{5}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$

4) Exprimons u_n en fonction de n et calculons $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Nous savons que $v_n = u_n - \frac{1}{3}$, donc $u_n = v_n + \frac{1}{3}$

$u_n = v_n + \frac{1}{3}$, or $v_n = v_0 q^n = \frac{5}{2} \cdot 2^n$

$\Rightarrow u_n = \frac{5}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{3}$

Comme $v_n = u_n - \frac{1}{3}$, alors $\sum v_n = \sum u_n - \sum \frac{1}{3} \Rightarrow$

$S_n = s_n + (n+1)\frac{1}{3}$

$= \frac{5}{3}\left(2^{n+1} - 1\right) + \frac{n+1}{3}$

$= \frac{1}{3}\left[5\left(2^{n+1} - 1\right) + n + 1\right]$

Exercice N°2

$f(x) = (-x-1)e^x$

1) a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x-1)e^x = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x-1) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et donnons une interprétation graphique du résultat

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x-1)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^x) - \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ car

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-xe^{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$

c) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

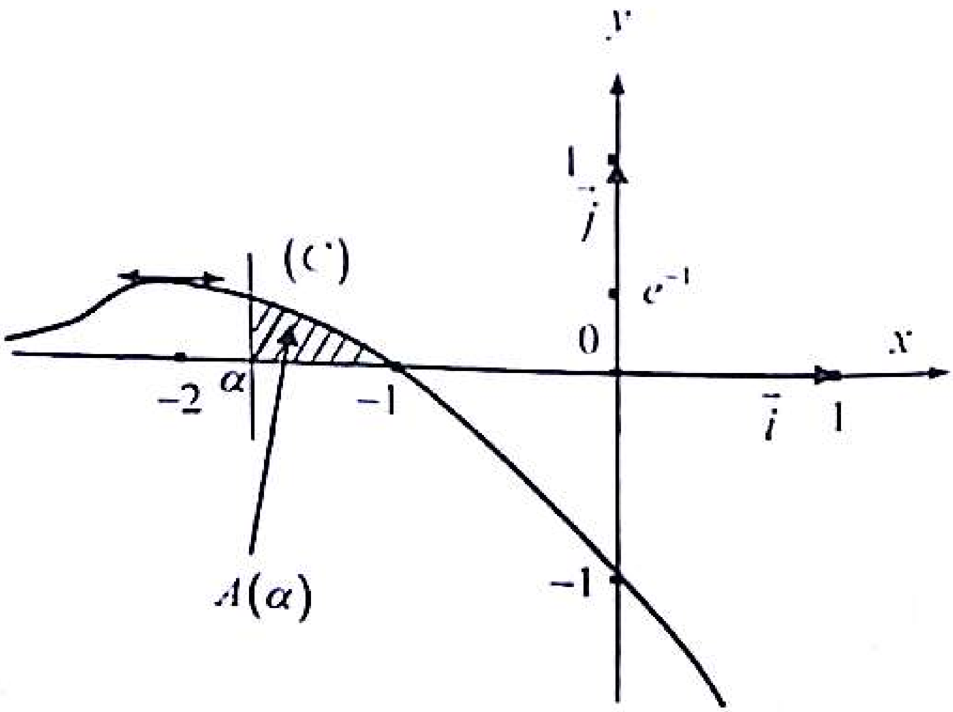
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{x} + (-x-1)e^{x}$

$$= -e^{x} - xe^{x} - e^{x}$$

$f'(x) = (-x-2)e^{x}$. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x} > 0 \Rightarrow f'(x)$ a le même signe que $-x-2$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-x-2$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	0 ↗	e^{-2}	↘ $-\infty$

2) a) Traçons la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



b) Soit α un réel strictement inférieur à -1. A l'aide d'une intégration par parties, calculons $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx \cdot 2cm \times 2cm$

$$A(\alpha) = 4\,cm^2 \times \int_{\alpha}^{1} (-x-1)e^x\,dx$$

Posons $\begin{cases} u(x) = -x-1 \Rightarrow du = -dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v(x) = e^x \end{cases}$

Ainsi

$$A(\alpha) = 4\,cm^2 \times \int_{\alpha}^{1} (-x-1)e^x\,dx = 4\,cm^2 \times \left(e^x(-x-1) + \left[e^x\right]_{\alpha}^{1}\right)$$

$$= 4\,cm^2 \times \left[e^x(-x)\right]_{\alpha}^{1} = 4\,cm^2 \times \left[xe^x\right]_{1}^{\alpha} = 4\,cm^2 \times \left(\alpha e^{\alpha} + e^{-1}\right)$$

c) Calculons $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$. Interprétons géométriquement ce résultat.

$$\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha) = 4\,cm^2 \times \left(\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha} + e^{-1}\right) = 4e^{-1}cm^2$$

Interprétation géométrique

$A(\alpha)$ est la limite de l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses la droite d'équation $x = \alpha$.

Lorsque $\alpha \to -\infty$, l'aireest égale à .

Sujet N °8

Session 2014 2e groupe

Exercice N°1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n^2}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 1 + u_n^2$.

1) Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique dont nous préciserons la raison et le premier terme.

Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, il suffit de montrer que $v_n + 1 = q\, v_n$, où q est la raison de cette suite.

$v_n = 1 + u_n^2 \Rightarrow v_{n+1} = 1 + u_{n+1}^2$

Or $u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n^2}$, donc $v_{n+1} = 1 + \left[\sqrt{1 + 2u_n^2}\right]^2$

$v_{n+1} = 1 + \left(1 + 2u_n^2\right)$

$v_{n+1} = 2 + 2u_n^2 = 2\left(1 + u_n^2\right) = 2v_n$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

Comme $u_0 = 0$ et $v_n = 1 + u_n^2$, alors $v_0 = 1 + u_0^2 = 1$

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases} \Rightarrow (v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$

2) Exprimons v_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 2^n$

Calculons la somme $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

3) Exprimons u_n en fonction de n.

Comme $v_n = 1 + u_n^2$, alors

$u_n^2 = v_n - 1$ et $u_n \geq 0 \Rightarrow u_n = \sqrt{v_n - 1}$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt{2^n - 1}$$

Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2 e^x$. Soit

$(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Calculons et interprétons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 e^x$. Posons $X = x - 1$

$$= \lim_{X \to -\infty} X^2 e^{X+1} = \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X . e = 0 \text{ car } \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $-\infty$.

b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donnons une interprétation graphique des résultats.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 e^x = +\infty$, donc à $+\infty$ la courbe de f admet une branche infinie $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x} e^x = +\infty$, donc la courbe $(\mathscr{C})$ de f à $(+\infty)$ est une branche parabolique de direction $0y$

c) Montrons que pour tout réel x : $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x$

$$= \left[2x - 2 + x^2 - 2x + 1\right] e^x$$

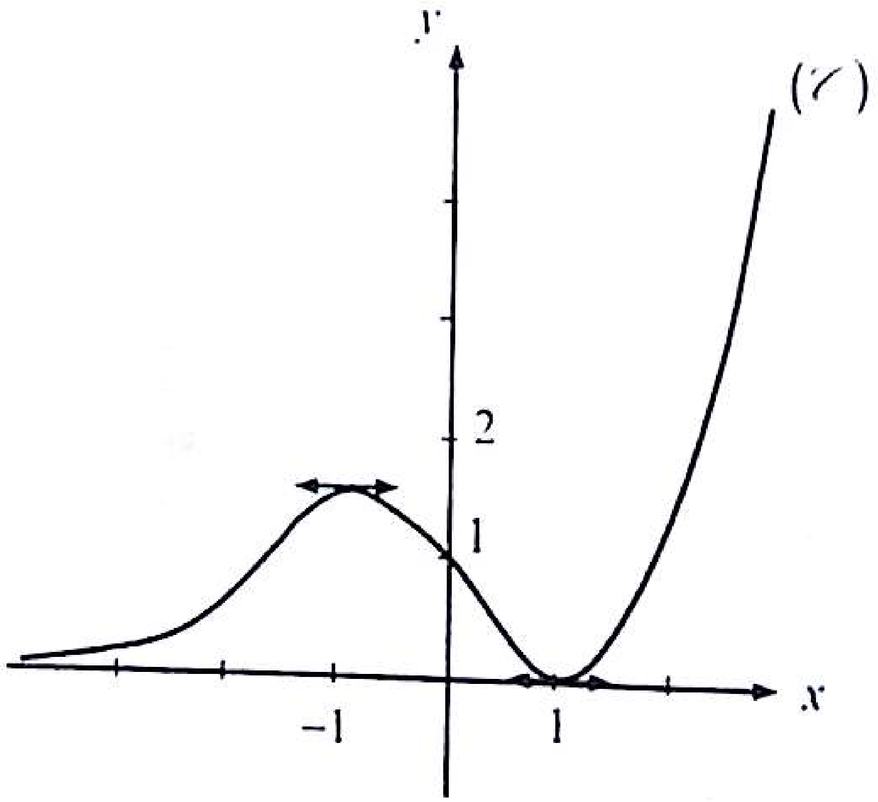
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (x^2 - 1)e^x$

d) Dressons le tableau de variation de f.

f' a le même signe que $x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

2) Traçons la courbe $(\mathcal{C})$



Sujet N °9

Session 2007 1er groupe

Exercice N°1

$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrons par récurrence que $U_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nous savons que $U_0 = 2$ donc $U_0 > 1$.

Supposons que $U_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et montrons que $U_{n+1} > 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n^2}{2U_n - 1} - 1 = \frac{U_n^2 - 2U_n + 1}{2U_n - 1} = \frac{(U_n - 1)^2}{2U_n - 1} > 0$$

Ce qui veut dire que $U_{n+1} > 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2) a) Montrons que la suite (W_n) est géométrique

$$W_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \times \frac{2U_n - 1}{U_n^2}\right) = \ln\left[\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)^2\right]$$

$$= 2\ln v_n = 2W_n$$

Comme $W_{n+1} = 2W_n$, alors (W_n) est suite géométrique de raison 2.

b) Exprimons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n, v_n et U_n en fonction de n

Expression de W_n

$W_0 = \ln v_0 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

$W_n = (-\ln 2) \times 2^n$

Expression de v_n $v_n = e^{W_n} = e^{\left(\ln\frac{1}{2}\right)\cdot 2^n} = \left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = \frac{1}{2^{2^n}}$

Expression de U_n

Comme $v_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$; alors $U_n = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

Exercice N°2

1) Donnons les éléments de Ω l'univers des éventualités

$\Omega = \{(1.1.1) ; (1.1.2) ; (1.2.1) ; (2.1.1) (1.2.2) ; (2.1.2) ; (2.2.1)\}$

2) Détermination de a et b

Nous savons que $P(x.y.z) = a(x + y + z) + b$

$P(1.1.1) = 3a + b$; $P(1.1.2) = 4a + b$; $P(1.2.1) = 4a + b$;

$P(2.1.1) = 4a + b$;

$P(1.2.2) = 5a + b$; $P(2.1.2) = 5a + b$

$P(2.2.1) = 5a + b$

$A = \{(1.1.1) ; (1.1.2) ; (1.2.1) ; (1.2.2)\}$

$P(A) = P(1.1.1) + P(1.1.2) + P(1.2.1) + P(1.2.2)$

$P(A) = 16a + 4b$

$B = \{(1,1,1);(2,1,1);(1,2,2)\}$

$P(B) = P(1,1,1) + P(2,1,1) + P(1,2,2)$

$P(B) = 12a + 3b$

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \\ P(A) - P(B) = \dfrac{4}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30a + 7b = 1 \\ 4a + b = \dfrac{4}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{10} \\ b = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

3) Détermination de la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{-2;1;3\}$

$$P(X = -2) = P(1,1,2) + P(1,2,1) + P(2,1,1) = \frac{12}{35} = \frac{24}{70}$$

$$P(X = 1) = P(1,2,2) + P(2,1,2) + P(2,2,1) = \frac{9}{14} = \frac{45}{70}$$

$$P(X = 3) = P(1,1,1) = \frac{1}{70}$$

Calculons l'espérance mathématique et la variance

$$E(X) = \frac{-2 \times 24 + 1 \times 45 + 3 \times 1}{70} = \frac{-48 + 45 + 3}{70} = 0$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2)} = \sqrt{\frac{(-2)^2 \times 24 + (1)^2 \times 45 + (3)^2 \times 1}{70}}$$

$$= \sqrt{\frac{96 + 45 + 9}{70}} = \sqrt{\frac{15}{7}}$$

Problème

1) Continuité en 1

$f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$, donc f est continue en 1

Dérivabilité en 1

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \ln x = 0$$

Comme $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en 1

2) a) Montrons que $\forall x < 1$, $f'(x) > 0$

$$\forall x < 1, f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\forall x < 1, f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} - \frac{1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\forall x < 1, f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}}\left[1 - \frac{1}{x-1}\right]$$

$\forall x < 1$, $f'(x) > 0$ car

$$\forall x < 1,\ e^{\frac{1}{x-1}} > 0 \text{ et } x-1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{x-1} > 0$$

b) Montrons que $\forall x > 1$, $f'(x) > 0$

$$\forall x > 1, f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$$

Donc $\forall x > 1$, $f'(x) > 0$ car

$$\forall x > 1,\ \ln x > 0 \text{ et } x-1 > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0$$

c) Tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x + \frac{1}{x} = +\infty$. car

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) Pour $x < 1$. $f(x) - (x+1) = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1$

$$f(x) - (x+1) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - (x+1)$$

$$= (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 - x - 1$$

$$= (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - (x-1) - 1 = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1 .$$

Montrons que la droite $(D): y = x + 1$ est asymptote lorsque $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} = (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right] - 1$

Posons $X = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{X}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1}{X}\left[e^{X} - 1\right] - 1$

$$= \lim_{X \to 0} \left[\frac{e^X - 1}{X} \right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1) \right] = 0$

La droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C)

c) Position de (C) par rapport à (D)

Nous admettons que $x < 1$, $\dfrac{x-1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] \leq 1$

C'est-à-dire $\dfrac{x-1}{x-2} - 1 \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1 \leq 0$

Soit $\dfrac{1}{x-2} \leq (x-1)\left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1 \leq 0$, ce qui donne

$\dfrac{1}{x-2} \leq f(x) - (x+1) \leq 0$ ou bien $f(x) - (x+1) \leq 0$

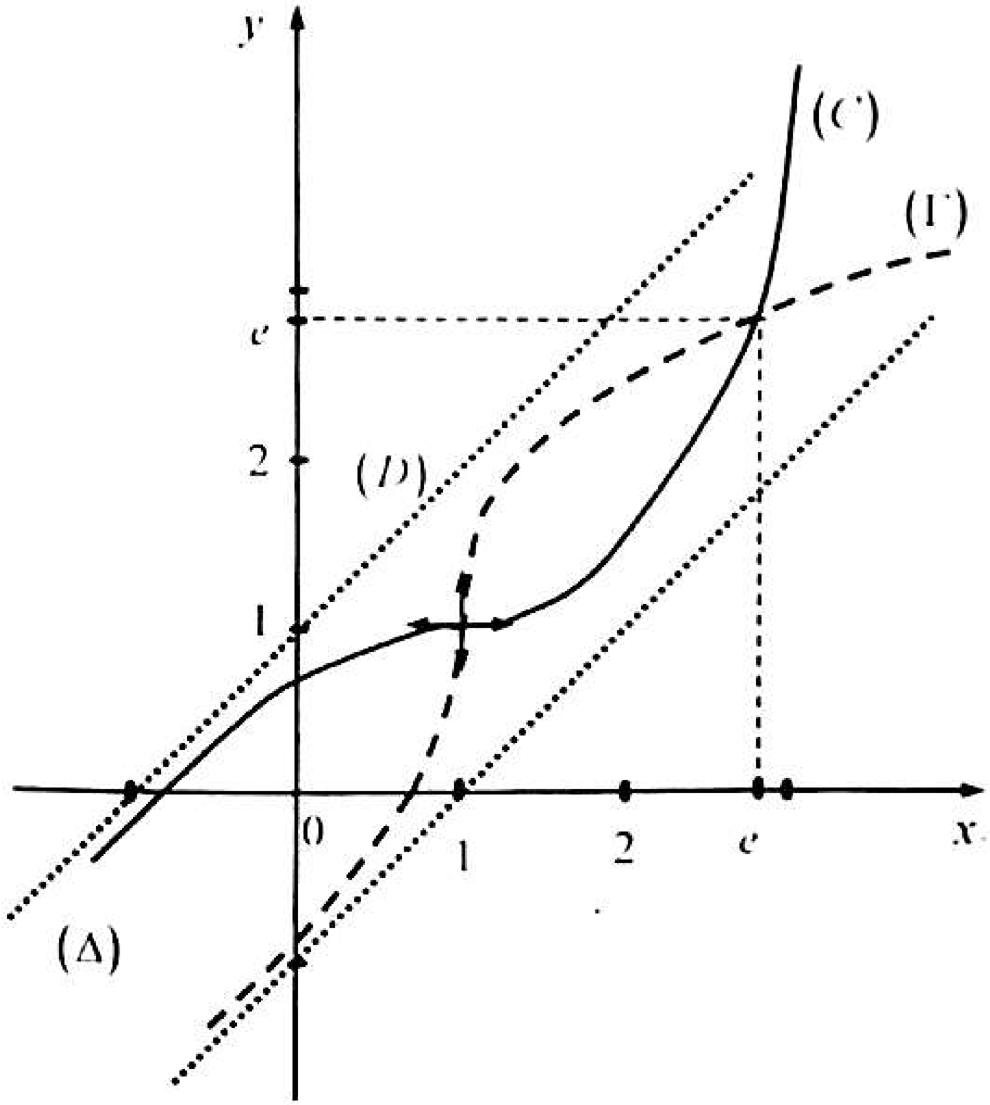
Ainsi la courbe (C) est en dessous de (D) .

d) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha \in \left] -1 , -\dfrac{1}{2} \right[$

Nous savons que f est continue et strictement croissante sur $\left[-1 , -\dfrac{1}{2} \right]$ et de plus $f(-1) \times f\left(-\dfrac{1}{2} \right) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$

4) Construction de (C)

$f(x) = x \Rightarrow x = 1$ ou $x = e$ $\quad (C)\cap(D) = \left\{ A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; B\begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix} \right\}$



5) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^e (x-(x-1)\ln x - 1)\,dx\right) \times Ua = A \times Ua$$

avec $A = \int_1^e (x-1)(1-\ln x)\,dx$ et Ua veut dire unité d'aire

$$A = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)(1-\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-1\right) - \int_1^e \left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx = \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^2 + e - \left(-\frac{1}{4}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4}$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4}\right)Ua.$$

6) Montrons que f est une bijection et qu'elle admet une bijection réciproque.

a) f est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ bijective et admet une réciproque f^{-1}.

b) La courbe (Γ) de f^{-1} est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ à la courbe (C) de f. Voir figure.

c) Calcul de l'aire $\mathcal{A}_{boucle}$ de la courbe par (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$\mathcal{A}_{boucle} = 2 \times \mathcal{A} = \left(\frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{5}{2}\right) Ua .$$

Sujet N °10

Session 2008 1er groupe

Exercice N°1

1) Démontrons qu'il existe deux valeurs de u_1 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante

$$(u_n) : \begin{cases} u_n \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{4}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(u_n) constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n$

$$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{4}{u_n + 1} = u_n\right), u_n \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n^2 - u_n - 6 = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left((u_n + 2)(u_n - 3) = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow u_n \in \{-2 ; 3\}$$

u_n constante $\Leftrightarrow u_1 \in \{-2 ; 3\} \Rightarrow u_1 = -2$ ou $u_1 = 3$.

2) Démontrons par récurrence que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > -1$.

Soit $P(n) : u_n > -1$

$P(1)$ est vraie car $u_1 > -1$ (donné)

Supposons $P(n)$ vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad P(n) \text{ vraie} \Leftrightarrow u_n > -1 \Leftrightarrow u_n + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{u_n + 1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{4}{u_n + 1} > 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > -1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > -1 \;\Rightarrow\; u_{n+1} > -1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > -1$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la suite (v_n) est géométrique.

$$\left.\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2} \\ \text{or}\quad u_{n+1} &= 2 + \frac{4}{u_{n+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{2 + \dfrac{4}{u_n + 1} - 3}{2 + \dfrac{4}{u_n + 1} + 2}$$

$$= \frac{-(u_n - 3)}{4(u_n + 2)} = -\frac{1}{4} v_n$$

$\left(v_{n+1} = -\dfrac{1}{4} v_n\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad (v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimons v_n en fonction de n et calculons la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \text{ avec } v_1 = \frac{u_1 - 3}{u_1 + 2}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $|q| < 1$ et que (v_n) est une suite géométrique.

4) Exprimons u_n en fonction de v_n. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculons sa limite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - 2v_n}{v_n - 1}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$, alors (u_n) converge vers 3 qui est sa limite.

Exercice N°2

1) a) Calcul de $P(-3i)$

$$P(z) = 3z^3 + \left(-5\sqrt{3} + 10i\right)z^2 + \left(5 - 15\sqrt{3}i\right)z + 24i$$

$$P(-3i) = 3(-3i)^3 + \left(-5\sqrt{3} + 10i\right)(-3i)^2 + \left(5 - 15\sqrt{3}i\right)(-3i) + 24i$$

Comme $(-3i)^2 = -9$; $(-3i)^3 = -9(-3i) = 27i$ alors

$$P(-3i) = 3 \times 27i - 9 \times \left(-5\sqrt{3} + 10i\right) - 3i \times \left(5 - 15\sqrt{2}i\right) + 24i$$

$$= 81i + 45\sqrt{3} - 90i - 15i - 45\sqrt{3} + 24i = 0$$

Ainsi $P(-3i) = 0$.

b) Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

$$P(-3i) = 0 \Rightarrow P(z) = (z + 3i) \times Q(z)$$

$P(-3i) = 0 \Rightarrow P(z) = (z + 3i) \times Q(z)$ avec degré $degréQ \quad degréP - 1$

Déterminons $Q(z)$

Soit $Q(z) = (az^2 + bz + c)$

$$P(z) = (z + 3i)Q(z) = (z + 3i)(az^2 + bz + c)$$

$$= (az^3 + bz^2 + cz) + (3aiz^2 + 3biz + 3ic)$$

$$= az^3 + (b + 3ai)z^2 + (c + 3bi)z + 3ic$$

Or $P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15\sqrt{3}i)z + 24i$. donc par identification on a :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 3ai = -5\sqrt{3} + 10i \\ c + 3bi = 5 - 15\sqrt{3}i \\ 3ic = 24i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b + 3ai = -5\sqrt{3} + 10i \\ c + 3bi = 5 - 15\sqrt{3}i \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b + 9i = -5\sqrt{3} + 10i \\ 8 + 3bi = 5 - 15\sqrt{3}i \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5\sqrt{3} + i \\ 3bi = -3 - 15\sqrt{3}i \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5\sqrt{3} + i \\ c = 8 \end{cases}.$$

$Q(z) = 3z^2 + \left(-5\sqrt{3} + i\right)z + 8$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 3i)\left(3z^2 + \left(-5\sqrt{3} + i\right)z + 8\right) = 0$

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow 3z^2 + \left(-5\sqrt{3} + i\right)z + 8 = 0$$

$\Delta = \left(-5\sqrt{3} + i\right)^2 - 4 \times 3 \times 8 = 75 - 10\sqrt{3}i - 1 - 96 = -22 - 10\sqrt{3}i$ et

$|\Delta| = 28$

Déterminons δ les racines carrées de Δ sous forme algébrique :

$\delta = xi + y$ telle que $\delta^2 = (xi + y)^2 = -x^2 + 2xyi + y^2$ et

$-x^2 + 2xyi + y^2 = -22 - 10\sqrt{3}i$

On a : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -22 \\ x^2 + y^2 = 28 \\ xy \cdot \mathrm{Im}(\Delta) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -22 \\ x^2 + y^2 = 28 \\ -10\sqrt{3}xy > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -22 \\ 2x^2 = 6 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -22 \\ x^2 = 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -22 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ xy < 0 \end{cases}$$

Pour $x = \sqrt{3}$. $\begin{cases} 3 - y^2 = -22 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 25 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow y = -5$

Pour $x = -\sqrt{3}$. $\begin{cases} 3 - y^2 = -22 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 25 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = 5$

Donc $\delta = -\sqrt{3} + 5i$ ou $\delta = \sqrt{3} - 5i$ c'est-à-dire $\delta = \pm\left(\sqrt{3} - 5i\right)$.

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{5\sqrt{3} - i \pm \left(\sqrt{3} - 5i\right)}{6} \right\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ \sqrt{3} - i : \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + i\right) \right\}$$

$$P(z) = 0 \Rightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{ -3i : \sqrt{3} - i : \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + i\right) \right\} .$$

2) Déterminons les éléments géométriques de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

On a : $A(0, -3)$. $B\left(\sqrt{3}, -1\right)$. $C\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ donc

$z_A = -3i$: $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$.

Détermination de similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

$$S:\begin{cases} S(A)=B \\ S(B)=C \end{cases} \Leftrightarrow z_B - z_C = a(z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{3} - i - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}i}{-3i - \sqrt{3} + i} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3} - 5i}{-\sqrt{3} - 2i}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\left(\sqrt{3} - 5i\right)\left(-\sqrt{3} + 2i\right)}{7} = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{3}i\right)$$

Donc $a = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{3}i\right)$.

$b = z_B - az_A = \sqrt{3} - i + i\left(1 + \sqrt{3}i\right) = 0$

Forme complexe de S

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z' = \frac{1}{3}\left(1\sqrt{3}i\right)z$$

Caractérisation géométrique de S :

Centre : $z_\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rapport : $\left|\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{3}i\right)\right| = \frac{2}{3}$

Angle θ : $arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}$

Problème

A) $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $g_n(x) = (1+x)e^x - n$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

Dressons le tableau de variation de g_n et en déduisons que $g_n(x)$ est négatif ou nul pour x appartenant à $]-\infty, 0]$.

$g_n'(x) = e^x(x+2)$; $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = 1-n$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x) = -n$

x	$-\infty$		-2		0
$g_n'(x)$			0		
g_n	$-n$	↘	$-n-e^{-2}$	↗	$1-n$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, alors $-n < 0$; $1-n \leq 0$ et $-n-e^{-2} < 0$, donc d'après ce tableau de variations $\forall x \in \mathbb{R}^-$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_n(\mathbb{R}^-) \in \mathbb{R}^*_-$ donc $g_n(x) \leq 0$.

B) $f_n(x) = \begin{cases} x \mapsto xe^x - nx, & x \leq 0 \\ x \mapsto x^n(1-\ln x), & x > 0 \end{cases}$

1) a) Etudions la continuité de f_n en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$

d'où f_n est continue en 0.

b) Etudions la dérivation de f_n en $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(e^x - n)}{x} = 1-n \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^n(1-\ln x)}{x} = 0 \end{cases}$$

Pour $n=1$, f est dérivable en $x_0=0$

Pour $n \neq 1$, f_n n'est pas dérivable en $x_0=0$.

2) a) Calculons $f'_n(x)$ sur $]0;+\infty[$

b) Etude du signe de $f'_n(x)$ sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+, x^{n-1} > 0 \Rightarrow f'(x)$ a le même signe que $n(1-\ln x)-1$ sur $]0;+\infty[$

$$[n(1-\ln x)-1]=0$$

$$\Rightarrow (1-\ln x) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \ln x = 1 - \frac{1}{n}$$

x	0		$e^{1-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
f'_n		$+$	0	$-$	

3) a) Calcul de $f'_n(x)$ sur $]-\infty;0[$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-, f'_n(x) = e^x(1+x)-n = g_n(x)$.

b) Déduction du signe de $f'_n(x)$ sur $]-\infty;0[$

$f'_n(x) = e^x(1+x)-n = g_n(x) \leq 0$ d'après A) donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-, f'_n(x) \leq 0$.

4) Tableau de variations de f_n

x	$-\infty$		0		$e^{1-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
f'_n		$1-n$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e^{1-\frac{1}{n}}$	$\searrow$	$-\infty$

5) $n \in \{1.2\}$

a) Etudions suivant les valeurs de x le signe de l'expression $f_2(x) - f_1(x)$.

Expression de $f_2(x) - f_1(x)$ par intervalle

$$f_2(x) - f_1(x) = x^2(1-\ln x) - x(1-\ln x)$$

$$= (1-\ln x)(x^2 - x)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2(x) - f(x)_1$	$-x$		$x(x-1)(1-\ln x)$

Signe de $f_2(x) - f_1(x)$

x	$-\infty$		0		1		e		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Déduisons la position relative des courbes (C_1) et (C_2) et montrons que (C_1) et (C_2) se coupent en trois points dont on précisera les coordonnées.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]1, e[$, (C_2) au-dessous de (C_1)

$\forall x \in]0,1[\cup]e, +\infty[$, en dessous de (C_1)

Dans le tableau du signe de $f_2(x) - f_1(x)$ on déduit que

$$(C_1) \cap (C_2) = \left\{ P_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; P_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; P_3\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

6) a) Montrons que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_1) en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - (-x)\right] = \lim_{x \to -\infty}\left(xe^x - x + x\right)$$

$= \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^- \Rightarrow D : y = -x$ est asymptote à (C_1) à $-\infty$

b) Montrons que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty}\left[f(x) - (-x)\right] = \lim_{x \to -\infty}\left(xe^x - 2x + 2x\right)$$

$= \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \Rightarrow D' : y = -2x$ est asymptote à (C_2) en $-\infty$.

c) Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}(1 - \ln x) = -\infty$$

Interprétation

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = -\infty$, alors, la courbe (C_1) admet une branche parabolique de direction ox lorsque $x \to -\infty$ pour

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = -\infty$, alors la courbe (C_2) admet une branche parabolique de direction oy

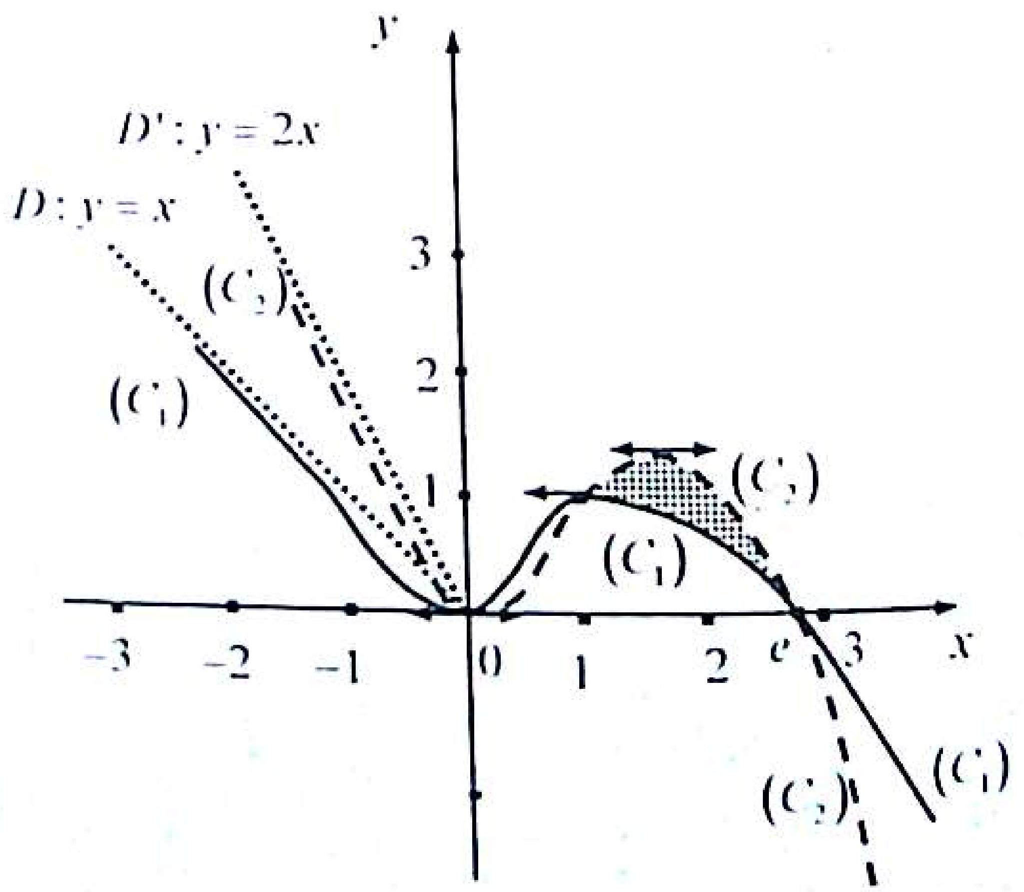
f_1

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'_1		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

f_2

x	$-\infty$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'_2		$-$		-1	$\Vert\, 0$	$-$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	$-\infty$

7) Construction de (C_1) et (C_2).



8) Calcul de l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$A = \int_1^e (f_2 - f_1)(x)\,dx \times 4cm \times 4cm = \int_1^e (x^2 - x)(1 - \ln x)\,dx \times 16cm^2$$

Posons $\begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = -\dfrac{dx}{x} \\ dv = (x^2 - x)\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$A = 16\left[\left[(1 - \ln x)\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\right]_1^e + \int_1^e \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx\right]cm^2$$

$$= 16\left[\left[(1 - \ln x)\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\right]_1^e + \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e\right]cm^2$$

$$= 16\left[(1 - \ln x)\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right)\right]_1^e cm^2$$

Comme $\begin{cases} F(e) = \dfrac{1}{9}e^3 - \dfrac{1}{4}e^2 \\ F(1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-11}{36} \end{cases}$, alors

$$A = 16\left[F(e) - F(1)\right]cm^2 = 16\left[\frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{11}{36}\right]cm^2$$

$$= \frac{4}{9}\left(4e^3 - 9e^2 + 11\right)cm^2$$

Sujet N °11

Session 2009 1^er groupe

Exercice N°1

A. Démontrer que : $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$$

D'où $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A) - P(A/B) \times P(B)}{1 - P(B)}$.

B. 1) Calculons en fonction de h la probabilité p pour qu'un chien errant survivant soit enragé

Soit A l'évènement " Le chien errant soit abattu ". donc $\overline{A}$ est l'évènement " Le chien errant est survivant "

Soit E l'évènement " Le chien errant est enragé ".

Donc $p = P(\text{chien enragé}/\text{chien survivant}) = P(E/\overline{A})$.

$$P(E/\overline{A}) = \frac{P(E) - P(E/A) \times P(A)}{1 - P(A)}$$

On a : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ or comme $p(A) = h$ alors $P(\overline{A}) = 1 - h$.

$P(E/A) = \dfrac{40}{100}$. $P(E) = \dfrac{30}{100}$.

$$P\left(E/\overline{A}\right)=\frac{\frac{30}{100}-\frac{40}{100}\times b}{1-b}=\frac{0.3-0.4b}{1-b}$$

Donc $P\left(E/\overline{A}\right)=\dfrac{0,3-0,4b}{1-b}$.

2) Calculons la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieure ou égale à 0.1

$$P\left(E/\overline{A}\right)<0.1\Rightarrow\frac{0,3-0,4b}{1-b}<0.1$$

$$\Rightarrow 0,3-0,4b<0,1-0,1b$$

$$\Rightarrow 0,3-0,1<0,4b-0,1b$$

$$\Rightarrow 0,2<0,3b\quad\Rightarrow\frac{0,2}{0,3}<b$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}<b\Rightarrow b>\frac{2}{3}.$$

Donc $b>\dfrac{2}{3}$.

Ainsi la plus petite valeur de b est $\dfrac{2}{3}$.

3) Calculons la probabilité d'avoir décontaminer au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la campagne d'abattage.

$$P(x\geq 8)=P(x=8)+P(x=9)+P(x=10)$$

$$=C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+C_{10}^{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$=C_{10}^{8}\frac{1}{3^{8}}\,\frac{4}{3^{2}}+C_{10}^{1}\frac{1}{3^{9}}\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{10}}$$

$= \frac{1}{3^{10}}(45 \times 4 + 10 \times 2 + 1) = \frac{201}{3.3^{9}} = \frac{67}{3^{9}}$

$P(x \geq 8) = \frac{67}{3^{9}} = 0.0034$.

Exercice N°2

1) Déterminons et représentons graphiquement l'ensemble D des points M, du plan complexe, d'affixe $z = x + iy$, tels que :

$|z - 3 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

Posons dans cette partie : $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $|z - (3 + 2i)| = |z - (7 - 2i)| \Leftrightarrow MA = MB$ ce qui veut dire que l'ensemble des points M est la médiatrice de $[A ; B]$.

$M \in$ médiatrice de $[A, B] \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (3 - x)^2 + (2 - y)^2 = (7 - x)^2 + (-2 - y)^2$

$\Leftrightarrow (5 - x + y = 0)$

Equation cherchée $D : y = x - 5$ est une droite. Voir figure tracée.

Remarque : On peut aussi placer les points A, B et construire la médiatrice de $[A ; B]$.

2) Caractérisons géométriquement la transformation ponctuelle φ du plan complexe associée à l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par

$f : z \mapsto z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

f est une similitude directe plane caractérisée par :

- Rapport : $\left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$
- Centre : $z_\Omega = \dfrac{-5i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = 5 \quad \Leftrightarrow \Omega\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$
- Angle : $\arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

3) Déterminons l'ensemble D', image par φ de l'ensemble D déterminé au 1) et représentons graphiquement D'.

Choisissons deux points de D : $E\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

$$z_{E'} = f(E) \Leftrightarrow z_{E'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)(-5i) - 5i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow E'\begin{pmatrix}5\sqrt{3}\\-5\left(1+\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}$$

$$z_{F'} = f(F) \Leftrightarrow z_{F'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)(5) - 5i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow F'\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

$$M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in D'(E'F') = \varphi(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{E'M'} \text{ et } \overrightarrow{E'F'} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow dét_{(\overrightarrow{E'M'},\overrightarrow{E'F'})} = 0$$

$$dét_{(\overrightarrow{E'M'},\overrightarrow{E'F'})} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x'-5\sqrt{3} & 5\left(1-\sqrt{3}\right) \\ y'+5\left(1+\sqrt{3}\right) & 5\left(1+\sqrt{3}\right)\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x'-5\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ y'+5\left(1+\sqrt{3}\right) & 1+\sqrt{3}\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x'-5\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)-\left[\left(y'+5\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x'\left(1+\sqrt{3}\right)-y'\left(1-\sqrt{3}\right)-5\left(1+\sqrt{3}\right)=0$$

Equation de $D' : x'\left(1+\sqrt{3}\right)-y'\left(1-\sqrt{3}\right)-5\left(1+\sqrt{3}\right)$

Voir figure pour le tracée de D'

Remarque

On peut aussi facilement répondre à la question 3) par :

D médiatrice de $[A ; B] \Rightarrow \varphi(D)$ médiatrice de $[A' ; B']$ avec

$A'=\varphi(A)$ et $B'=\varphi(B)$

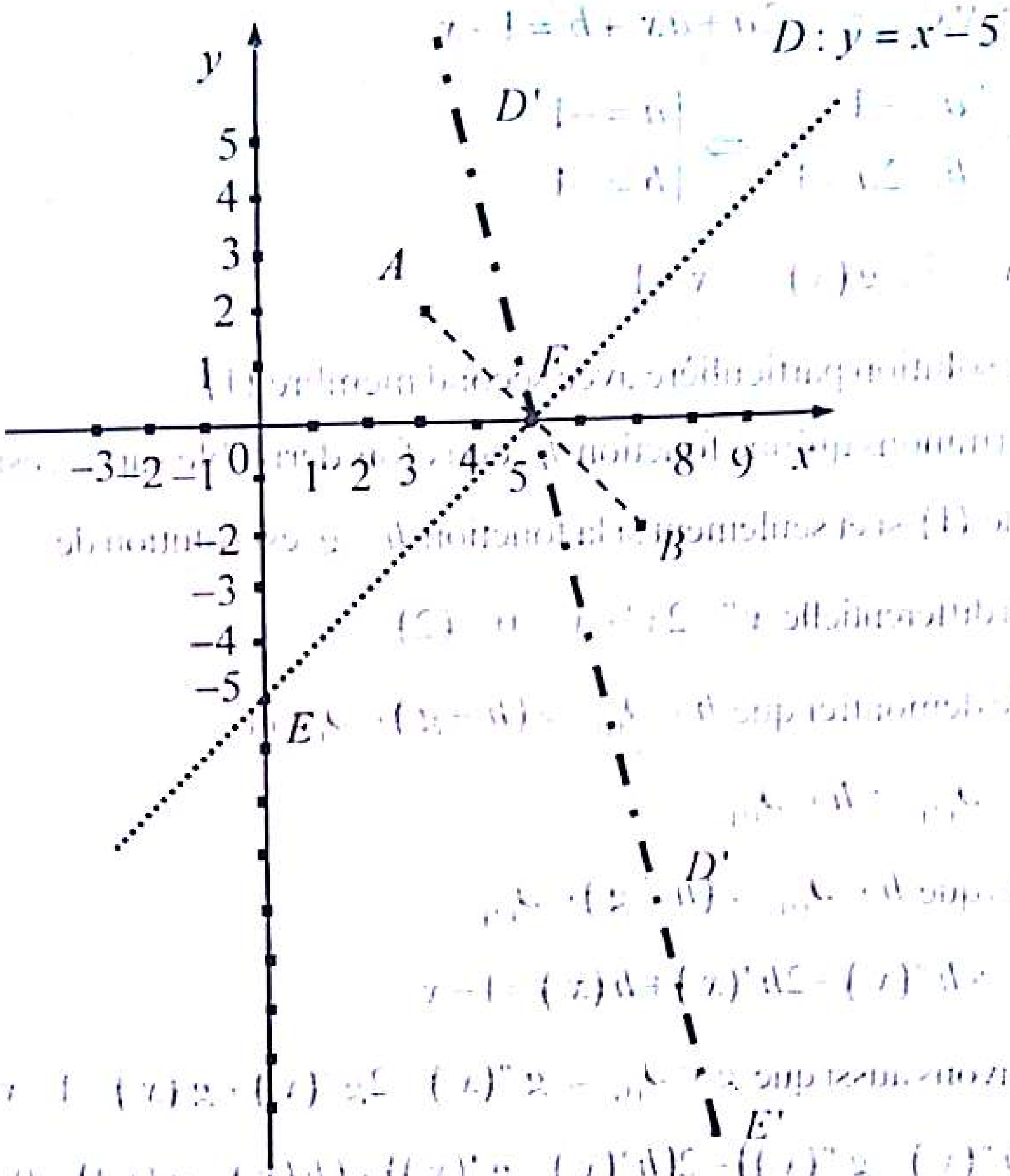
$$\begin{cases} A'=\varphi(A) \\ B'=\varphi(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{A'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)(3+2i)-5i\sqrt{3} \Rightarrow A'\begin{pmatrix} 3-2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ z_{B'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)(7-2i)-5i\sqrt{3} \Rightarrow B'\begin{pmatrix} 7+2\sqrt{3} \\ -2+2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit I milieu de $[AB] \Rightarrow I\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \varphi(D) \Rightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}=0$$

$$\Rightarrow \left(4+4\sqrt{3}\right)(x-5)+\left(-4+4\sqrt{3}\right)y=0$$

$$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)x+\left(-1+\sqrt{3}\right)y-5\left(1+\sqrt{3}\right)=0$$



Problème

A $(1): y'' - 2y' + y = 1 - x$

$(2): y'' - 2y' + y = 0$

1) Déterminons un polynôme g du premier degré solution de l'équation (1)

Soit $g : x \mapsto ax + b \quad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$g \in \mathcal{S}_{(1)} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (ax+b)''-2(ax+b)'+ax+b=1-x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2a+ax+b=1-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b-2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x)=-x-1.$

g est une solution particulière avec second membre (1)

2) a) Déterminons qu'une fonction h, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$ (2)

Il suffit de démontrer que $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$ et

$(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

Montrons que $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$

$h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow h''(x)-2h'(x)+h(x)=1-x$

Et nous avons aussi que $g \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow g''(x)-2g'(x)+g(x)=1-x$

Donc $(h''(x)-g''(x))-2(h'(x)-g'(x))+(h(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (h(x)-g(x))''-2(h(x)-g(x))'+(h(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}.$

Montrons aussi que $(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

$(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow$

$(h(x)-g(x))''-2(h(x)-g(x))'+(h(x)-g(x))=0 \Rightarrow$

$(h''(x)-g''(x))-2(h'(x)-g'(x))+(h(x)-g(x))=0$

Or $g''(x)-2g'(x)+g(x)=1-x$, donc

$h''(x)-2h'(x)+h(x)=1-x \Rightarrow h\in \mathcal{J}_{(1)}$

Ainsi $h\in \mathcal{J}_{(1)} \Leftrightarrow (h-g)\in \mathcal{J}_{(2)}$

b) Résolvons l'équation différentielle (2)

Équation caractéristique : $r^2-2r+1=0$

$\Leftrightarrow (r-1)^2=0 \quad \Rightarrow r_1=r_2=1$

$\mathcal{J}_{(2)}=\left\{f : x\mapsto (Ax+B)e^x \text{ avec } A,B\in\mathbb{R}\right\}$.

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

$\mathcal{J}_{(1)}=\left\{f : x\mapsto e^x(Ax+B)-x-1,\ A,B\in\mathbb{R}\right\}$.

d) Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $h(0)=0$ et $h'(0)=0$

$h(x)=e^x(Ax+B)-x-1$; $h(0)=e^0(A\times 0+B)-0-1=B-1$

$h'(x)=Ae^x+e^x(Ax+B)-1$;

$h'(0)=Ae^0+e^0(A\times 0+B)-1=A+B-1$

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ h'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B-1=0 \\ A+B-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \end{cases}$$

Donc $h(x)=e^x-x-1$.

3) a) Etudions les variations de h et dresser son tableau de variation.

$D_h=\mathbb{R}$ avec $h(x)=e^x-x-1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^x - 1$; $h'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$

$$\Rightarrow e^x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

$\forall x \in \mathbb{R}_-$. $h(x) < 0 \Rightarrow h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$. $h(x) > 0 \Rightarrow h$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

b) Déduisons le signe de $h(x)$ pour tout réel x.

Comme h est continue sur $\mathbb{R}$ et $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, on a : $h(x) \geq 0$ Voir tableau de variations.

B) 1) a) Etudions la continuité de f en 0.

Nous avons $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x e^x . e^1 = 0$ et ensuite

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\ln(x+1) + e^{-x} - 1\right] = 0$, donc

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ d'où f continue en $x_0 = 0$.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0.

D'une part nous avons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x e^x e^1}{x} = e$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1) + e^{-x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1 - e^{-x}}{x} = 0$$

Nous remarquons que $\left(f'_g(0)=e\right) \neq \left(f'_d(0)=0\right)$. donc f n'est pas dérivable en 0.

2) a) Calculons $f'(x)$ pour $x<0$ et dressons le tableau de variation de f sur $]-\infty, 0[$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \left(xe^{x+1}\right)' = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1+x)e^{x+1}$

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{e^x(1+x)}$ et déduisons le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^{-x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{e^x - x - 1}{e^x(x+1)} = \frac{h(x)}{e^x(x+1)}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

c) Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

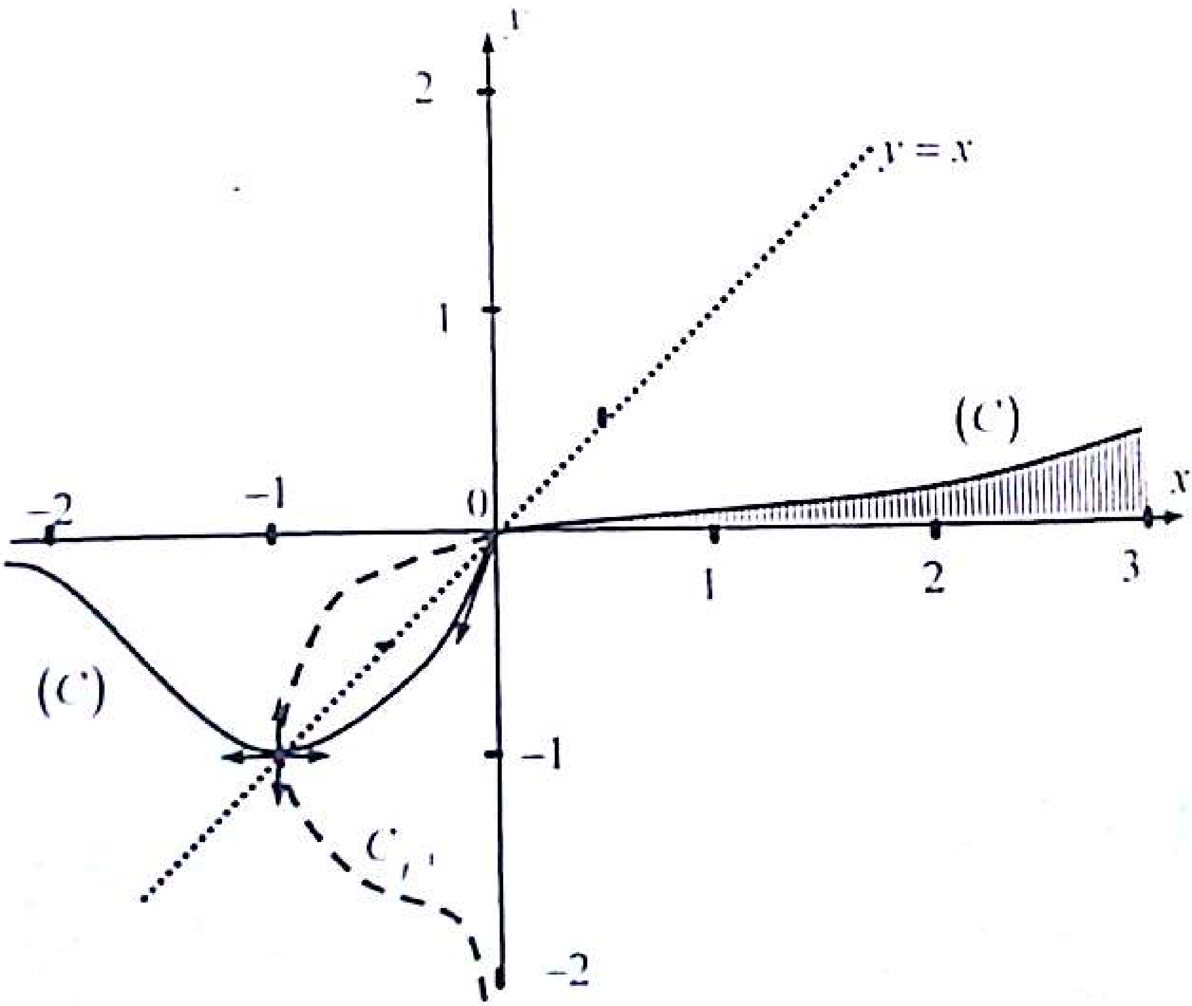
$\forall x \in]-\infty;-1]$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty;-1]$

$\forall x \in [-1;0[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante $[-1;0[$

c) Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$e \| 0$	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Construisons la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $2\,cm$)



4) Montrons que la restriction de f à $]-\infty,-1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

D'après le tableau de variation, la fonction f est continue et strictement décroissante dans $]-\infty,-1[$, donc f est une bijection de $]-\infty,-1[$ sur $f(]-\infty,-1[)=]-1;0[=J$.

5) Calculons l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

$$Aire=\int_0^3\left(\ln(x-1)+e^{-x}-1\right)dx\times 4cm^2$$

$$=\left(\int_0^3\ln(x+1)dx+\int_0^3\left(e^{-x}-1\right)dx\right)\times 4cm^2$$

Posons $I_1=\int_0^3\ln(x+1)dx$ et $I_2=\int_0^3\left(e^{-x}-1\right)dx$

Pour $I_1=\int_0^3\ln(x+1)dx$

$$\begin{cases} u=\ln(x+1)\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x+1}\\ dv=dx\Rightarrow v(x)=x\end{cases}$$

Donc, à l'aide de l'intégration par parties, on obtient que

$$I_1=\left[x\ln(x+1)\right]_0^3-\int_0^3\frac{x}{x+1}dx$$

Or $\forall x\in[0,3]$, $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$

Ainsi $\int_0^3\dfrac{x}{x+1}dx=\int_0^3\left[1-\dfrac{1}{x+1}\right]dx=\left[x-\ln(x+1)\right]_0^3$

On trouve que $I_1=\left[x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\right]_0^3=8\ln 2-3$

$$I_1 = 3\ln(3+1) - 3 + \ln(3+1) - \left(0\ln(0+1) - 0 + \ln(0+1)\right)$$

$$I_1 = 3\ln 4 - 3 + 2\ln 2 - \ln 1$$
$$= 6\ln 2 - 3 + 2\ln 2$$
$$= 8\ln 2 - 3.$$

Calculons ensuite I_2

$$I_2 = \int_0^3 \left(e^{-x} - 1\right)dx = \left[-e^{-x} - x\right]_0^3 = -e^{-3} - 2$$
$$= \left(-e^{-3} - 3\right) - \left(-e^{0} - 0\right)$$
$$= -e^{-3} - 2$$

Ainsi. Aire $= (I_1 + I_2)(4cm^2) = \left(8\ln 2 - e^{-3} - 5\right)\times 4cm^2 \simeq 1.98cm^2$

Sujet N °12

Session 2010 1er groupe

Exercice N°1

1) Montrons que (E) possède une solution réelle z_1 que l'on déterminera.

$$(E): z^3 - 3i\sqrt{3}\,z^2 - \left(9 - 3i\sqrt{3}\right)z + 8 = 0$$

Soit z_1 cette solution réelle

$$z_1 \in \mathcal{J}_C \Leftrightarrow \left(z_1^3 - 3i\sqrt{3}\,z_1^2 - \left(9 - 3i\sqrt{3}\right)z_1 + 8 = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1^3 - 9z_1 + 8 + 3i\left(1 - z_1^2\right)\sqrt{3} = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1^3 - 9z_1 + 8 = 0 \\ 1 - z_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (z_1 = 1)$$

$z_1 = 1$ est une solution réelle.

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ de (E)

Soit $P(x)$ le polynôme associe à (E)

$P(z_1)=0 \Rightarrow \exists Q(z) \in \mathcal{P} / P(z)=(z-z_1)\times Q(z)$

Déterminons $Q(z)$

$P(1)=0 \Rightarrow P(z)=(z-1)\times Q(z)$ avec degré $degréQ \quad degréP-1$

Soit $Q(z)=(az^2+bz+c)$

$$P(z)=(z-1)Q(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$$

$$=(az^3+bz^2+cz)+(-z^2-bz-c)$$

$$=az^3+(b-1)z^2+(c-b)z-c$$

Or $P(z)=z^3-3i\sqrt{3}z^2-(9-3i\sqrt{3})z+8$, donc par identification on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-1=-3i\sqrt{3} \\ c-b=-9+3i\sqrt{3} \\ -c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1-3i\sqrt{3} \\ c=1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3} \\ -c=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1-3i\sqrt{3} \\ -c=8 \end{cases}$$

$Q(z)=z^2+(1-3i\sqrt{3})z-8$

Déterminons les racines de $Q(z)$

Scanned by CamScanner

Posons $Q(z) = z^2 + \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)z - 8 = 0$

$\Delta = \left(1 - 3i\sqrt{3}\right)^2 + 32 = 6 - 6i\sqrt{3}$

Résolvons par suite $\delta^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$ avec $\delta = x + yi, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons δ racine carrée de Δ sous forme algébrique : $\delta = x + yi$

telle que $\delta^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$ et

$x^2 + 2xyi - y^2 = 6 - 6\sqrt{3}i$

- On a : $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 12 \\ xy \cdot \mathrm{Im}(\Delta) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ 2x^2 = 18 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Pour $x = 3$, $\begin{cases} 9 - y^2 = 6 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

Donc $\delta = -3+\sqrt{3}i$ ou $\delta = 3-\sqrt{3}i$ c'est-à-dire $\delta = \pm\left(3-i\sqrt{3}\right)$.

$$Q(z)=0 \Leftrightarrow z = \frac{3i\sqrt{3}-1\pm\left(3-i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{3+i\sqrt{3}\,;2\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right\}$$

Donc $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)\times Q(z)=0$

$$J_C = \left\{1:3+i\sqrt{3}\,;2\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right\}$$

3) Ecrivons les trois solutions z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

$$z_1 = 1 \qquad \Leftrightarrow z_1 = \cos 0 + i\sin 0 \qquad \leftrightarrow M_1$$

$$z_2 = 1+i\sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad \leftrightarrow M_2$$

$$z_3 = 2\left(-1+i\sqrt{3}\right) \qquad \Leftrightarrow z_3 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \leftrightarrow M_3$$

4) Déterminons l'application complexe F associée à S

$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto z' = az+b.\quad (a,b)\in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

$$S:\begin{cases} P \to P \\ M_1 \mapsto M_2 \\ M_2 \mapsto M_3 \end{cases} \Leftrightarrow F:\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z_{M_1} \mapsto z_{M_2} \\ z_{M_2} \mapsto z_{M_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{M_2} = az_{M_1}+b \\ z_{M_3} = az_{M_2}+b \end{cases}$$

$$z_{M_2}-z_{M_3} = a\left(z_{M_1}-z_{M_2}\right) \qquad \Rightarrow a = \frac{z_{M_2}-z_{M_3}}{z_{M_1}-z_{M_2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1+i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} a = 1 + i\sqrt{3} \\ b = z_{M_2} - (1 + i\sqrt{3}) z_{M_1} = 1 + i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

Alors $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto z' = (1 + i\sqrt{3}) z$$

Précisons les éléments caractéristiques de S.

F est caractérisée par $\left\{ \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; 2 ; \frac{\pi}{3} [2\pi] \right\}$ respectivement centre, rapport et angle.

Exercice N°2

1) Déterminons le réel α pour que la fonction g définie par $g(x) = \alpha \sin(x)$ soit une solution de (1).

On considère les équations différentielles :

$(1) : y'' + 4y = 3\sin x$

$(2) : y'' + 4y = 0$

On pose $g(x) = \alpha \sin x$

$g(x) \in J_1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((\alpha \sin x)'' + 4\alpha \sin x = 3\sin x)$

Déterminons $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que ceci soit réalisé.

$$g(x) \in J_1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-\alpha \sin x + 4\alpha \sin x = 3\sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (3\alpha \sin x = 3\sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 1).$$

Donc $\alpha = 1$. Ainsi $g(x) = \sin x$

2) a) Démontrons qu'une fonction f est solution de (1) si et seulement si

la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle $y''+4y=0$.

(2)

$f \in \mathcal{J}_1 \Leftrightarrow f-g \in \mathcal{J}_2$

Il suffit de démontrer que $f \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow (f-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$ et

$(f-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow f \in \mathcal{J}_{(1)}$

Montrons que $f \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow (f-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$

$f \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow f''(x)+4f(x)=3\sin x$

Et nous avons aussi que $g \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow g''(x)+4g(x)=3\sin x$

Donc $(f''(x)-g''(x))+4(f(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (f(x)-g(x))''+4(f(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (f-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$.

Montrons aussi que $(f-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow f \in \mathcal{J}_{(1)}$

$(f-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow (f(x)-g(x))''+4(f(x)-g(x))=0 \Rightarrow$

$(f''(x)-g''(x))+4(f(x)-g(x))=0$

Or $g''(x)+4g(x)=3\sin x$, donc

$f''(x)+4f(x)=3\sin x \Rightarrow f \in \mathcal{J}_{(1)}$

Ainsi $f \in \mathcal{J}_{(1)} \Leftrightarrow (f-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$

b) Résolution de $y''+4y=0$

L'équation caractéristique est $r^2+4=0$

c) Déduisons l'ensemble de solutions de (1)

$f-g\in \mathcal{J}_2 \quad \Leftrightarrow f(x)=g(x)+\mathcal{J}_2$

$\Leftrightarrow \mathcal{J}_1=\{f : x\mapsto A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x : A, B\in\mathbb{R}\}$

d) Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions : $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et

$f'(\pi)=0$.

On a $f(x)=A\cos 2x+B\sin 2x+\sin x$

$f(\pi/2)=-A+1$; $f'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x+\cos x$ etb comme

$f'(\pi)=2B-1$. alors $\begin{cases} f(\pi/2)=0\\ f'(\pi)=0\end{cases}$

$$\begin{cases} f(\pi/2)=0\\ f'(\pi)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-A+1=0\\ 2B-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\ B=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

La solution de $\mathcal{J}_1$ vérifiant les 2 conditions initiales est

$f : x\mapsto \cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

Problème

A) $f(x)=|x+1|+\dfrac{1}{x-1}$

1) Donnons le domaine de définition de f et écrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty,-1\right],\ f(x) = -x-1+\dfrac{1}{x-1} \quad ou \quad f(x)=\dfrac{2-x^2}{x-1} \\ \forall x \in \left[-1,+\infty\right[,\ f(x) = x+1+\dfrac{1}{x+1} \quad ou\ f(x)=\dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}$$

2) Etudions les limites aux bornes du domaine de définition de f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$f(-1) = \dfrac{-1}{2}$ 3) Etudions la dérivabilité de f en -1.

Dérivabilité de f en $x_0 = -1$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{\dfrac{2-x^2}{x-1}+\dfrac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^-} \frac{-2x^2+x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-1^-} \frac{-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}{(x-1)} = \frac{-\left(\dfrac{-5}{2}\right)}{-2} = \frac{-5}{4}$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2+x-1}{2(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)} = \frac{\frac{-3}{2}}{-2} = \frac{3}{4}$$

$\left(f'_g(-1) = -\frac{5}{4}\right) \neq \left(f'_d(-1) = \frac{3}{4}\right) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

4) Etudions la variation de f et dressons son tableau de variation.

$\forall x \in]-\infty, -1[$. $f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$. donc f est décroissante ur

$]-\infty, -1[$

$\forall x \in]-1, +\infty[$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

Etudions le signe de $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 2	2 $+\infty$
x		$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$		$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$		$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$		$+$	$-$	$-$	$+$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1			0		1		2		$+\infty$
f'		$-$	$-\frac{5}{4}$ ‖ $\frac{3}{4}$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-1/2$	↗		0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

5) Montrons que la courbe représentative (C) de f admet trois asymptotes dont on donnera les équations.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$ La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote

une asymptote verticale à la courbe (C)

Par ailleurs, on a aussi :

$\forall x \in]-\infty, -1]$: $f(x) = -x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0^-$, donc la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative (C) à $-\infty$.

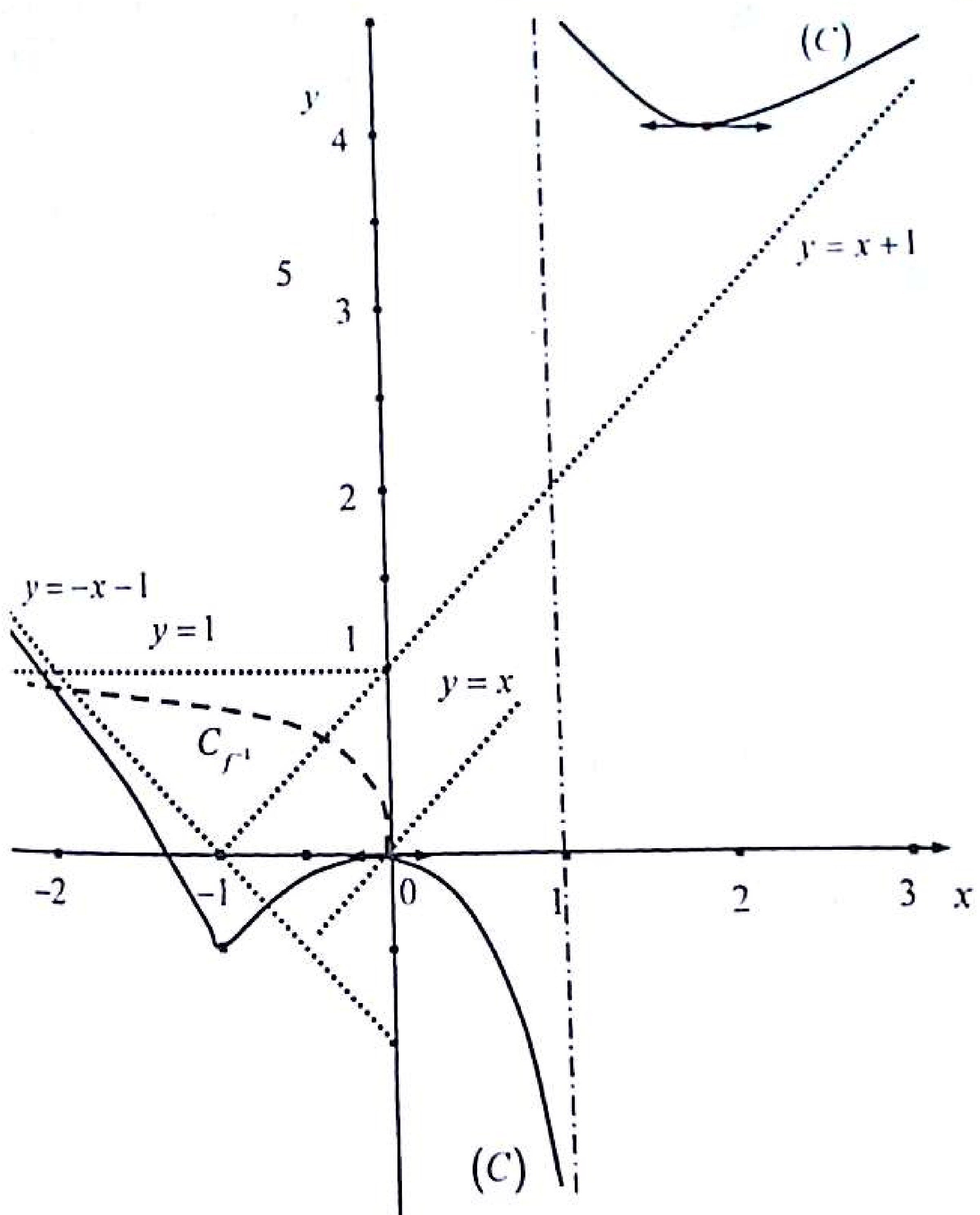
$\forall x \in [-1, +\infty[$: $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0^+$, donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative (C) à $+\infty$.

6) Construisons la courbe représentative (C) de f

Voir à la page 127

7) Montrons que la restriction de f à $[0,1[$ est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Traçons ensuite la courbe $C_{f^{-1}}$ de la réciproque.

D'après le tableau de variations, f est continue et strictement décroissante dans $[0,1[$ et $f([0,1[) =]-\infty,0]$, alors f réalise une bijection de $[0,1[\to]-\infty,0]$. Par conséquent il existe une fonction réciproque f^{-1} dont la courbe est symétrique à celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.


(C)
y
4
y = x + 1
5
3
2
y = −x − 1
y = 1
1
y = x
$C_{f^{-1}}$
−2
−1
0
1
2
3
x
(C)

8) Calcul des intégrale s_1 et s_2

a) $s_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx = \int_{-\sqrt{2}}^{-1}\left(-x-1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-x+\ln|x-1|\right]_{-\sqrt{2}}^{-1}$$

$F(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$

$F\left(-\sqrt{2}\right)=-1+\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

$F(-1)-F\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

$s_1=\int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)\,dx=\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

$s_2=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-\ln 2$$

$s_2=\frac{1}{2}-\ln 2$.

b) Déduisons l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-\sqrt{2}$ et $x=0$.

$Aire=-\int_{-\sqrt{2}}^{0} f(x)\,dx\times\left(4cm^2\right)$

$$=-\left[\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2}-\ln 2\right]\times 4cm^2$$

$= |s_1 + s_2| \times 4cm^2 = \left(2 + \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \times 4cm^2\right)$

B) a) Donnons l'expression du terme général u_n en fonction de n et de r.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1, \left(v_n = ln(u_n - 1)\right)$

$$\Leftrightarrow \left(u_n - 1 = e^{v_n}\right) \Leftrightarrow \left(u_n = e^{v_n} + 1\right)$$

(v_n) suite arithmétique $\Rightarrow v_n = (n-1)r \Rightarrow u_n = e^{(n-1)r} + 1$

b) Choisissons le réel r pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit convergente et dans ce cas donnons la limite.

La suite (u_n) est convergente $\Leftrightarrow r \in \mathbb{R}^*_-$, alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\left(e^{(n-1)r} + 1\right) = 1$

c) Calculons, en fonction de u_n, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, les droites d'équations $y = x+1$, $x = 2$ et $x = u_n$

Aire : $\int_{u_n}^{2}\left(x + 1 + \dfrac{1}{x-1} - (x+1)\right)dx \times 4cm^2 = \left|\int_{u_n}^{2} \dfrac{1}{x-1}dx\right| \times 4cm^2$.

$$= \left|\ln\left(u_n - 1\right)\right| \times 4cm^2$$

Sujet N°13

Session 2011 1er groupe

Exercice N°1

1) Montrons par récurrence que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

Soit $P(n)$ la propriété à démontre par récurrence c'est-à-dire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

Vérifions si $P(1)$ est vraie : donc si $u_1 > 0$

Comme $u_1 = 1 > 0$, alors $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$

Montrons que $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0 \text{ vraie} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n} > 0$$

D'où $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$

2) a) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \frac{-2+u_n}{3+u_n}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{n+1} = \dfrac{-2+u_{n+1}}{3+u_{n+1}} \\ or\ u_{n+1} = \dfrac{6+u_n}{2+u_n} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{-2+\dfrac{6+u_n}{2+u_n}}{3+\dfrac{6+u_n}{2+u_n}},\ \text{avec } u_n \neq -2$$

$$= \frac{-(2-u_n)}{4(3+u_n)} = -\frac{1}{4}v_n$$

Comme $v_{n+1} = -\dfrac{1}{4}v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et on a :

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{-2+u_1}{3+u_1} = \dfrac{-1}{4} \\ q = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\dfrac{1}{4} \\ q = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

b) Donnons l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

(v_n) étant une suite géométrique on a : $v_n = v_1 q^{n-1} = -\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

Donc $v_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{-2+u_n}{3+u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{2+3v_n}{1-v_n} = \dfrac{2+3(-1/4)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{4}\right)^n}$

c) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+3(-1/4)^n}{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}\right) = 2$$ d'après ce qui précède

Exercice N°2

1) "Prélèvement unicolore" : $P(A) = \dfrac{C_3^3 + C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{1+1+1}{84} = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28}$

2) B "Prélèvement tricolore" : $P(B) = \frac{C_3^1 C_3^1 C_3^1}{C_9^3} = \frac{3\times3\times3}{84} = \frac{9}{28}$

3) C "Prélèvement bicolore" : $P(C) = \frac{3 C_3^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3\times3\times6}{84} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

4) D "Prélèvement $2R$/bicolore" :

$$P(D) = \frac{(2R \cap biclore)}{P(bicolore)} = \frac{\frac{C_3^2 C_6^1}{84}}{\frac{9}{14}} = \frac{\frac{3\times6\times14}{84}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Problème

A) 1) $y'' - 2y' + y = x - 1$ soit g solution de cette équation J_1

$g \in J_1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1$

$$\Leftrightarrow (-2a + ax + b = x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ la solution particulière est } g(x) = x$$

Posons J_1 solution particulière avec second membre.

Posons J_2 solution sans second membre.

2) a) Démontrons que

$h \in J_1 \Leftrightarrow h - g \in J_2$ (h solution quelconque avec second membre et g solution particulière avec second membre)

Il suffit de démontrer que $h \in J_{(1)} \Rightarrow (h - g) \in J_{(2)}$ et

$(h - g) \in J_{(2)} \Rightarrow h \in J_{(1)}$

Montrons que $h \in J_{(1)} \Rightarrow (h - g) \in J_{(2)}$

$h \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x - 1$

Et nous avons aussi que $g \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1$

Donc $\left(h''(x) - g''(x)\right) - 2\left(h'(x) - g'(x)\right) + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$\Rightarrow \left(h(x) - g(x)\right)'' - 2\left(h(x) - g(x)\right)' + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$\Rightarrow (h - g) \in \mathcal{J}_{(2)}$.

Montrons aussi que $(h - g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{J}_{(1)}$

$(h - g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow$

$\left(h(x) - g(x)\right)'' - 2\left(h(x) - g(x)\right)' + \left(h(x) - g(x)\right) = 0 \Rightarrow$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - 2\left(h'(x) - g'(x)\right) + \left(h(x) - g(x)\right) = 0$

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

Or $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = x - 1$, donc

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x - 1 \Rightarrow h \in \mathcal{J}_{(1)}$

Ainsi $h \in \mathcal{J}_{(1)} \Leftrightarrow (h - g) \in \mathcal{J}_{(2)}$

b) Résolvons l'équation différentielle (2)

$y'' - 2y' + y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow (r = 1)$

Donc $\mathcal{J}_2 = \left\{ f_1 : x \mapsto (Ax + B)e^x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

$\mathcal{J}_1 = \left\{ h : x \mapsto (Ax + B)e^x + x + 1 \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

d) Trouvons la solution de (1) vérifiant des conditions : $h(0)=0$ et

$h'(0)=0$.

Nous savons que $h(x)=(Ax+B)e^{x}+x+1$

$h(0)=0 \Rightarrow (A\times 0+B)e^{0}+0+1=0$

$\Rightarrow B+1=0$.

Donc $B=-1$

$h'(x)=e^{x}(Ax+A+B)+1$

$h'(0)=0 \Rightarrow A+B+1=0$ et comme $B=-1$, alors $A=0$.

D'où $h(x)=x+1-e^{x}$.

B) $f: x\mapsto x+1-e^{x}$. $\mathscr{C}_f$ la courbe dans $\mathscr{R}=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$

1) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-e^{x}$

f est une composition de deux fonctions d''rivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^{-}, f'\geq 0 \Rightarrow f \text{ croissante sur } \mathbb{R}^{-}\\ \forall x\in\mathbb{R}^{+}, f'\leq 0 \Rightarrow f \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^{+}\end{cases}$$

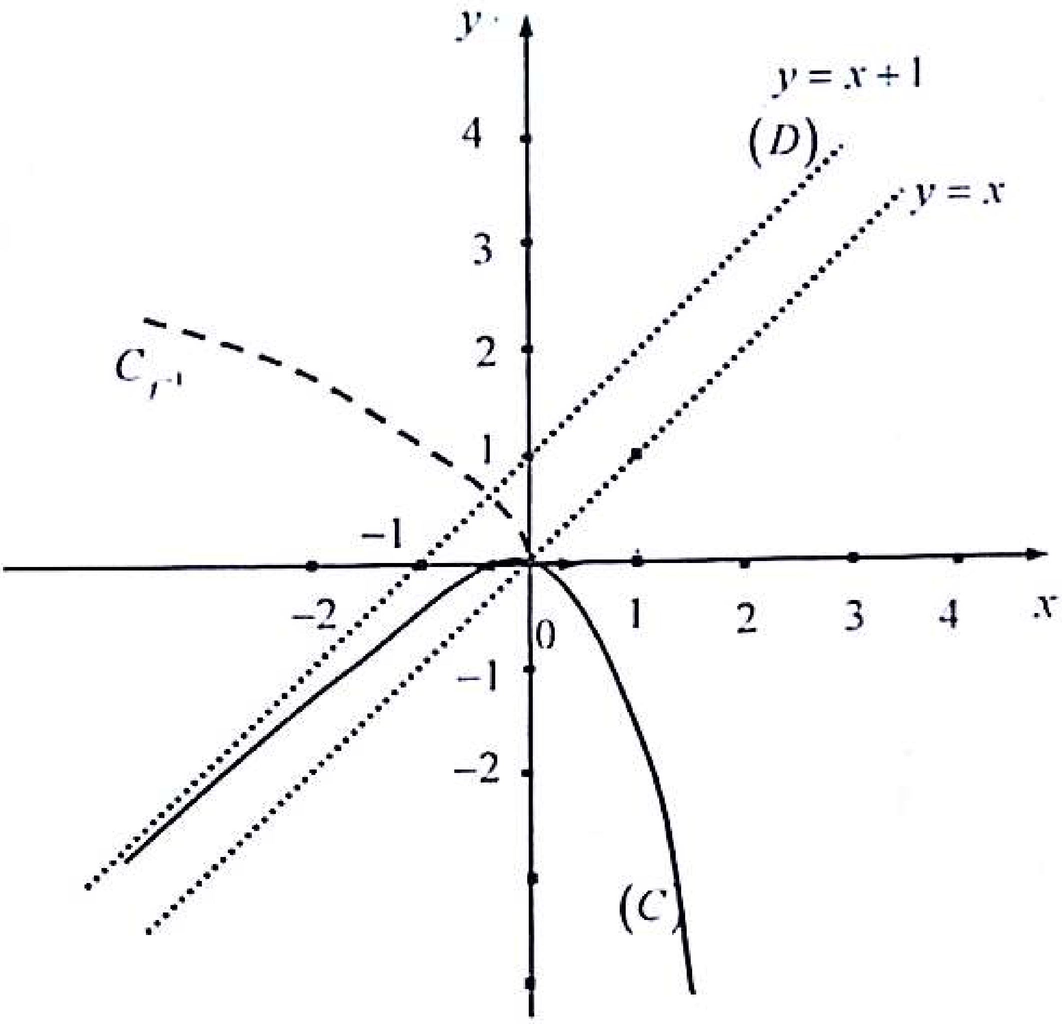
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) Montrons que la droite $(D): y=x+1$ est asymptote oblique à (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x+1-e^{x}-(x+1)]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{x})=0$

D'où $D : y = x + 1$ est asymptote à C_f

3) Tracé de (D) et de (C)



4) a) Calculons l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C) et (D) et les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ et $x = 0$.

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} \left(x + 1 - x - 1 + e^x\right) dx \times u.a$$

$$= \int_{\alpha}^{0} \left(x + 1 - x - 1 + e^x\right) dx \times u.a$$

$= \int_{\alpha}^{0} e^x dx \times u.a = \left[e^x\right]_{\alpha}^{0} = 1 - e^{\alpha}$. Donc $A(\alpha) = \left(1 - e^{\alpha}\right) ua$

b) Calcul de $\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

$\lim_{\alpha \to -\infty}(1-e^{\alpha})u.a = 1\,u.a$.

5) a) Montrons que la restriction de f à $[0,+\infty[$ est une bijection de $[0,+\infty[$

f est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ avec $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_-$. Donc f admet une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi $J=\mathbb{R}_-$.

b) Tracé de la courbe représentative de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C). Voir figure en pointillés.

C) 1) Trouvons l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum.

f admet un maximum en x_0 si $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ sur }]-\infty,x_0[\\ f'(x_0)=0 \\ f'(x)<0 \text{ sur }]x_0,+\infty[\end{cases}$

$f: x \mapsto (x+1)m - e^x$. Γ_m sa courbe dans un repère.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m : x \mapsto m - e^x$

1er cas : $m \leq 0$, $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $m - e^x < 0 \Rightarrow f'_m$ ne change pas de signe $\Rightarrow f_m$ n'admet pas de maximum

2e cas : $m > 0$.

$f'(x) = m - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln m$

$\Rightarrow f'_m$ ne change pas de signe $\Rightarrow f_m$ n'admet pas de maximum

	$\ln m$	
f'	+ 0	-

Alors $f_m(\ln m) = (\ln m + 1)m - m = m\ln m$.

L'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m admet un maximum est l'ensemble des réels m strictement positifs.

2) Donnons une équation de l'ensemble des points M_m.

$$M_m\text{ (maximum)}: \begin{cases} x = \ln m \\ y = m\ln m \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = e^x \\ y = m\ln m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = e^x \\ y = e^x \ln e^x \end{cases}.$$

Or $y = e^x \ln e^x = xe^x$. Donc l'équation de l'ensemble des points M_m est $y = xe^x$.

Sujet N °14

Session 2012 1er groupe

Exercice N°1

1) Donnons la nature de la transformation F.

$$F: \quad P \rightarrow P$$

$$M(z = x + yi) \mapsto M'(z' = x' + y'i) \,/\, z' = m^3 z + m(m+1)$$

où $m \in \mathbb{C}^*$

F est de la forme $z' = az + b$, $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, qui est l'écriture complexe d'une similitude directe plane avec $a = m^3$ et $b = m(m+1)$.

2) Donnons dans ce cas les éléments géométriques de F.

On suppose $m = 1 + i$, alors $z' = (1+i)^3 z + 1 + 3i$

Centre : $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1+3i}{1-(1+i)^3}$

$$\frac{1+3i}{1-(1+i)^3} = \frac{1+3i}{1-(1+3i-3-i)} = \frac{1+3i}{1-1-3i+3+i}$$

$$= \frac{1+3i}{3-2i}$$

$$= \frac{(1+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+9i-6}{9+4}$$

$$= \frac{1}{13}(-3+11i).$$

Donc $\Omega\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{13} \\ \dfrac{11}{13} \end{pmatrix}$.

Rapport $k = |a| = \left|(1+i)^3\right| = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

Angle $\theta = \arg a = \arg(1+i)^3 = 3\arg(1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$

Caractéristique de F : $\left(\Omega\begin{pmatrix} -3/13 \\ 11/13 \end{pmatrix} ; 2\sqrt{2} ; \dfrac{3\pi}{4}\right)$

3) Déterminons l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une translation.

F est une translation $\Leftrightarrow a = 1$

$\Leftrightarrow m^3 = 1$

$\Leftrightarrow m$ est une racine cubique de 1 : $\left\{1 ; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

4) Déterminons l'ensemble des nombres complexes m pour lesquels F est une homothétie de rapport 8.

F est une homothétie de rapport $8 \Leftrightarrow |a| = 8$

$$\Leftrightarrow \left|m^3\right| = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(m^3 = 8\right)$$

$\Leftrightarrow$ m racine cubique de 8

$m \in \left\{2 ; -1-i\sqrt{3} ; -1+i\sqrt{3}\right\}$

Exercice N°2

1) Linéarité l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$

$$f(x) = \sin^3 x\cos x = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^3 \times \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2\times 8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2i\times 8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2i\times 8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2i\times 8}\left[\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) - 2\right]\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2i\times 8}\left[\left(e^{4ix}-e^{-4ix}\right)-2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2i\times 8}\left[2i\times\sin 4x-2\times 2i\times\sin 2x\right]$$

$$f(x)=-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

2) Cherchons une primitive de $f(x)-\frac{1}{4}\sin 2x$

Comme $f(x)=-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$, alors

posons $f(x)-\frac{1}{4}\sin 2x=-\frac{1}{8}\sin 4x$. Donc une primitive de

$f(x)-\frac{1}{4}\sin 2x$ est celle de $\left(-\frac{1}{8}\sin 4x\right)$ qui est $\frac{1}{32}\cos 4x+K$ avec

$K\in\mathbb{R}$.

Problème

A) $(1): y''+y'-2y=-3e^x$

$(2): y''+y'-2y=0$

1) Déterminons le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x)=axe^x$ soit solution de l'équation différentielle (1).

$g(x)=axe^x$

$$g\in S_{(1)}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\left(\left(axe^x\right)''+\left(axe^x\right)'-2\left(axe^x\right)=-3e^x\right)$$

$\Leftrightarrow\left(ae^x=-e^x\right)\Leftrightarrow(a=-1)$ d'où $g(x)=-xe^x$, solution particulière de (1).

2) a) Démontrons qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''+y'-2y=0$ (2)

Il suffit de démontrer que $h \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$ et

$(h-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{J}_{(1)}$

Montrons que $h \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$

$h \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow h''(x)+h'(x)-2h(x)=-3e^x$

Et nous avons aussi que $g \in \mathcal{J}_{(1)} \Rightarrow g''(x)+g'(x)-2g(x)=-3e^x$

Donc $(h''(x)-g''(x))+(h'(x)-g'(x))-2(h(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (h(x)-g(x))''+(h(x)-g(x))'-2(h(x)-g(x))=0$

$\Rightarrow (h-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$.

Montrons aussi que $(h-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{J}_{(1)}$

$(h-g) \in \mathcal{J}_{(2)} \Rightarrow$

$(h(x)-g(x))''+(h(x)-g(x))'-2(h(x)-g(x))=0 \Rightarrow$

$(h''(x)-g''(x))+(h'(x)-g'(x))-2(h(x)-g(x))=0$

$h''(x)+h'(x)-2h(x)=g''(x)+g'(x)-2g(x)$

Or $g''(x)+g'(x)-2g(x)=-3e^x$, donc

$h''(x)+h'(x)-2h(x)=-3e^x \Rightarrow h \in \mathcal{J}_{(1)}$

Ainsi $h \in \mathcal{J}_{(1)} \Leftrightarrow (h-g) \in \mathcal{J}_{(2)}$

b) Résolvons l'équation différentielle (2)

Résolution de $y''+y'-2y=0$

L'équation caractéristique est : $r^2+r-2=0 \Leftrightarrow r \in \{-2,1\}$

Donc $\mathcal{S}_{(2)}=\{f : x \mapsto Ae^{x}+Be^{-2x}, A, B \in \mathbb{R}\}$.

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle(1).

On a : $\mathcal{S}_{(1)}=\{f : x \mapsto Ae^{x}+Be^{-2x}-xe^{x}.$ avec $A, B \in \mathbb{R}\}$

d) Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0)=1$ et

$h'(0)=0$.

$$\begin{cases} h(x)=Ae^{x}+Be^{-2x}-xe^{x}.\ A, B \in \mathbb{R} \\ h(0)=1 \\ h'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-2B-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

Donc $h(x)=(1-x)e^{x}$.

B) 1) Etudions les variation de f et dressons son tableau de variation

f dérivable car produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=-xe^{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow -xe^{x}=0 \Rightarrow x=0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est décroissante

Tableau de variation

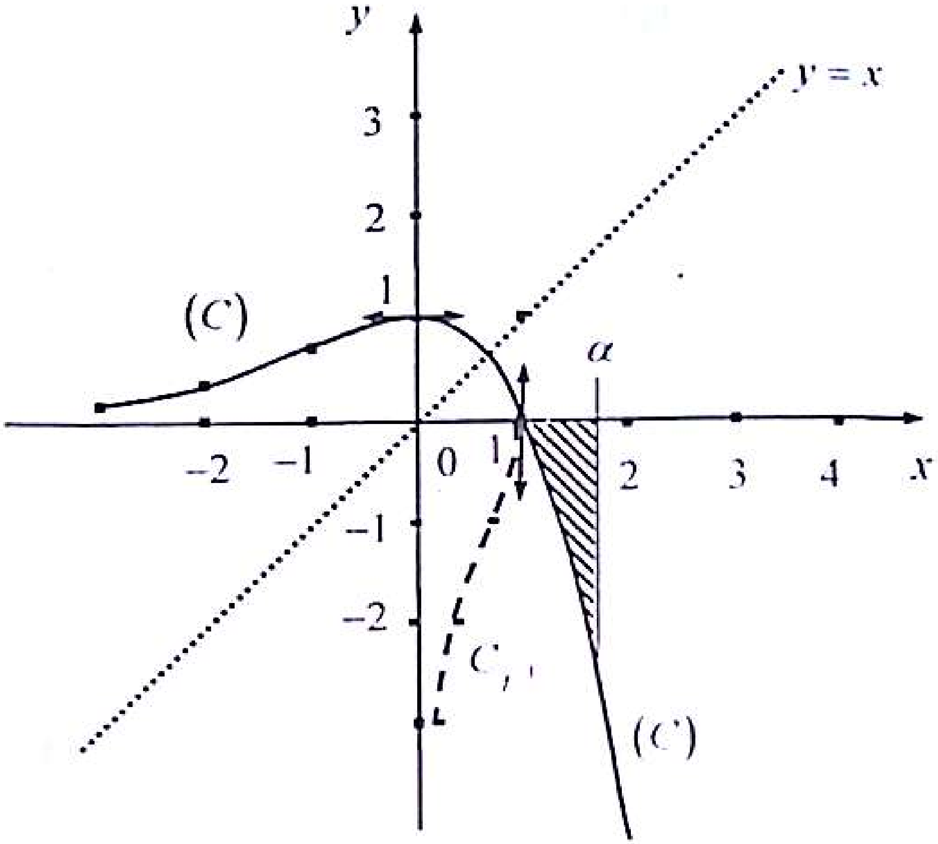
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x=-1$

$$\begin{cases} f'(-1) = e^{-1} \\ f(-1) = 2e^{-1} \end{cases}$$

$T_{-1} : y = e^{-1}(x+3)$ équation de la tangente à C_f en $x_0 = -1$

3) Traçons la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



4) a) Calcul de l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = -\int_1^\alpha f(x)\,dx \times 1cm^2 = \int_1^\alpha (x-1)e^x\,dx \times 1cm^2$$

Posons $\left| \begin{array}{l} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right.$; donc

$$A(\alpha) = \left[\left[e^x(x-1)\right]_1^\alpha - \left[e^x\right]_1^\alpha\right] \times 1cm^2$$

$$A(\alpha) = \left[e^x(x-2)\right]_1^\alpha \text{ en } cm^2$$

$$A(\alpha) = e^\alpha(\alpha-2) + e \text{ en } cm^2$$

b) Calcul de $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} e^\alpha(\alpha-2) + e = +\infty$$

5)a) Montrons que la restriction de f à $]-\infty,0]$ est une bijection

D'après le ableau de variation f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0]$ d'où la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ admet une bijection réciproque $f^{-1}:]0,1]\to\mathbb{R}_-$.

b) Traçons la courbe représentative (Γ) **voir figure en pointillés**

6) Déterminons graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y=m$.

Soit $\Delta_m : y=m$. Δ_m est parallèle à $0x$: lorsque m d'écrit $\mathbb{R}$ sur l'axe des ordonnées relevons les points d'intersection $\Delta_m \cap C_f$

- $m\in\,]-\infty,0]$. il y a un seul point d'intersection ;
- $m\in\,]0,1[$. il y a deux points d'intersection :
- $m=1$. il y a un seul point d'intersection ;
- $m\in\,]1,+\infty[$. il y aucun point d'intersection .

Sujet N °15

Session 2013 1er groupe

Exercice N°1

1) a. Trouvons les racines carrées du nombre complexe $5-12i$

Soit $\delta = x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$

δ Racines carrées de $5-12i \Leftrightarrow \delta^2 = 5-12i$

$$\Leftrightarrow \left((x+yi)^2 = 5-121\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - y^2 + 2xyi = 5-12i\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(13+5) \\ y^2 = \frac{1}{2}(13-5) \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-3, 3\} \\ y \in \{-2, 2\} \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ et } y = 2 \\ x = 3 \text{ et } y = -2 \end{array}\right.$$

Les racines carrées de $5 - 12i$ sont $\delta = \pm(3 - 2i)$

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + 2i)\left(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 4i = 0\right)$

L'équation $(z + 2i)\left(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 4i = 0\right)$ équivaut à

$$\left[\begin{array}{ll} z + 2i = 0 & (1) \\ z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 4i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Résolvons (2) dans $\mathbb{C}$

$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 4i) = 5 - 12i$

Les racines carrées de Δ sont $\delta = \pm(3 - 2i)$ d'après la question 1) a.

Les racines de (2) sont $\nearrow \dfrac{1+4i+3-2i}{2}=2+i$; $\searrow \dfrac{1+4i-3+2i}{2}=-1+3i$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}=\{-2i;2+i;-1+3i\}$$

2). a. Trouvons la relation liant l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image M' par S.

$z_A=2i$, $z_B=2-i$, $z_C=-1-3i$

$$\begin{cases}S(B)=B\\S(A)=C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_B=az_B+b\\z_C=az_A+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_B-z_C=a(z_B-z_A)\\z_B=az_B+b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\\b=z_B-az_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2-i-(-1-3i)}{2-i-2i}\\b=2-i-a(2-i)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=i\\b=1-3i\end{cases}\Rightarrow z'=iz+1-3i$$

b. Ainsi on obtient

$$S:\left(\Omega\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},1,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$\downarrow$ Centre $\quad\downarrow$ Rapport $\quad\searrow$ Angle

Exercice N°2

On considère la suite numérique définie par son premier terme $u_0=1$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 3}$.

1) Calculons u_1 et u_2

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 3} \end{cases}$$

Pour $n = 0,\ u_1 = \dfrac{1}{4}$

Pour $n = 1,\ u_2 = \dfrac{u_1}{u_1 + 3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 3} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{12}{4}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{4}} = \dfrac{1}{13}$

2) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = ln\left(\dfrac{u_n}{u_n + 2}\right)$.

a) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour cela, montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$

$$v_{n+1} - v_n = ln\frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 2} - ln\frac{u_n}{u_n + 2}$$

$$= ln\frac{\frac{u_n}{u_n + 3}}{\frac{u_n}{u_n + 3} + 2} - ln\frac{u_n}{u_n + 2}$$

$$= ln\frac{\frac{u_n}{u_n+3}}{\frac{u_n}{u_n+3}+\frac{2u_n+6}{u_n+3}} - ln\frac{u_n}{u_n+2}$$

$$= ln\frac{\frac{u_n}{u_n+3}}{\frac{3u_n+6}{u_n+3}} - ln\frac{u_n}{u_n+2}$$

$$= ln\frac{\frac{u_n}{u_n+3}}{\frac{3(u_n+2)}{u_n+3}} - ln\frac{u_n}{u_n+2}$$

$$= ln\left(\frac{1}{3}\frac{u_n}{u_n+2}\right) - ln\frac{u_n}{u_n+2} \quad = ln\left[\frac{\frac{1}{3}\frac{u_n}{(u_n+2)}}{\frac{u_n}{u_n+2}}\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = ln\frac{1}{3} = -ln3 \in \mathbb{R}$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique telle que : $(v_n) : \begin{cases} v_0 = -\ln 3 \\ r = -\ln 3 \end{cases}$

b. Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

$v_n = -ln3 - n\,ln3 = (n+1)(-ln3) = (-n-1)ln3$

$v_n = (-n-1)ln3$.

$$v_n = \ln \frac{u_n}{u_n+2} \Leftrightarrow \left(e^{v_n} = \frac{u_n}{u_n+2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left((u_n+2)e^{v_n} = u_n \right)$$

$$\Leftrightarrow u_n e^{v_n} + 2e^{v_n} = u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n\left(e^{v_n} - 1\right) = -2e^{v_n}$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n = \frac{2e^{v_n}}{1-e^{v_n}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n = \frac{2\left(e^{\ln 3}\right)^{-n-1}}{1-\left(e^{\ln 3}\right)^{-n-1}} \right) \text{ comme } v_n = (-n-1)\ln 3$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2\times 3^{-n-1}}{1-3^{-n-1}} = \frac{2}{3^{n+1}\left(1-3^{-n-1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(u_n = \frac{2}{3^{n+1}-1} \right)$$

$$u_n = \frac{2}{3^{n+1}-1}.$$

Problème

A Soit l'équation $y''-2y'+y=-x+3$ (1) et soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solution de (1).

1) Vérifions que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x+1$ est une solution de l'équation différentielle (1).

$$(-x+1)''-2(-x+1)'+(-x+1)\overset{?}{=}-x+3$$

$$0-2\times-1+(-x+1)\overset{?}{=}-x+3$$

$$2-x+1=-x+3 \text{ d'où } g\in\mathscr{S}_1$$

2) a) Démontrons qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$. (2)

Démontrons par équivalence que $h\in\mathscr{S}_1 \Leftrightarrow h-g\in\mathscr{S}_2$

Il suffit de démontrer que $h\in\mathscr{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g)\in\mathscr{S}_{(2)}$ et

$(h-g)\in\mathscr{S}_{(2)} \Rightarrow h\in\mathscr{S}_{(1)}$

Montrons que $h\in\mathscr{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g)\in\mathscr{S}_{(2)}$

$h\in\mathscr{S}_{(1)} \Rightarrow h''(x)-2h'(x)+h(x)=-x+3$

Et nous avons aussi que $g\in\mathscr{S}_{(1)} \Rightarrow g''(x)-2g'(x)+g(x)=-x+3$

Donc $\left(h''(x)-g''(x)\right)-2\left(h'(x)-g'(x)\right)+\left(h(x)-g(x)\right)=0$

$\Rightarrow \left(h(x)-g(x)\right)''-2\left(h(x)-g(x)\right)'+\left(h(x)-g(x)\right)=0$

$\Rightarrow (h-g)\in\mathscr{S}_{(2)}$.

Montrons aussi que $(h-g)\in\mathscr{S}_{(2)} \Rightarrow h\in\mathscr{S}_{(1)}$

$(h-g)\in\mathscr{S}_{(2)} \Rightarrow$

$\left(h(x)-g(x)\right)''-2\left(h(x)-g(x)\right)'+\left(h(x)-g(x)\right)=0 \Rightarrow$

$h''(x)-2h'(x)+h(x)=g''(x)-2g'(x)+g(x)$

Or $g''(x)-2g'(x)+g(x)=-x+3$, donc

$h''(x)-2h'(x)+h(x)=-x+3 \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

Ainsi $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Leftrightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$

b) Résolvons l'équation différentielle

$y''-2y'+y=0 \ (2)$

L'équation caractéristique est : $r^2-2r+1=0$

$\left((r-1)^2=0\right) \Leftrightarrow (r=1)$

$y''-2y'+y=0 \Rightarrow \mathcal{S}_2=\{f : x \mapsto e^x(Ax+B) : A, B \in \mathbb{R}\}$

c) Déduisons – en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1)

D'après 2 a. et 2.b. on a :

$\mathcal{S}_{(1)}=\{f : x \mapsto h(x)=-x+1+e^x(Ax+B) : A, B \in \mathbb{R}\}$

d) Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $h=(0)=0$ et

$h'(0)=-1$

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ h'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+B=0 \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow x \mapsto (x-1)(e^x-1)$$

B. 1) Etudions les variations de u et dresser son tableau de variation.

$u : x \mapsto xe^x-1$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car étant composée de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^{x}(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
u'		1	0	+	
u	-1	↘	$-e^{-1}-1$	↗	$+\infty$

2) a) Montrons que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α.

Nous savons que la fonction u est continue et strictement monotone(ici elle est croissante) sur $[-1 ; +\infty[$, d'où la restriction de u sur $[-1 ; +\infty[$ est bijective et $u(-1)\times u(+\infty) < 0$. Donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α.

L'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, -1]$ car sur cet intervalle $u(x) < 0$.

b) Vérifions que $0,5 < \alpha < 0,6$.

Pour cela calculons $u(0.5)$ et $u(0.6)$, puis calculons leur produit :

$u(0.5)\times u(0.6)$

$u(0.6) = 0.6\times e^{0.6} - 1 = 1.093 - 1 = 0.093$

Donc $u(0.5)\times u(0.6) < 0$, ainsi il existe une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$.

c) Déduisons le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Comme l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α telle $0,5 < \alpha < 0,6$ car $u(0.5)\times u(0.6) < 0$, alors

Pour $x \in]-\infty ; \alpha[$, $u(x) < 0$

Pour $x \in]\alpha\,;+\infty[$, $u(x)>0$

C.

1. a) Calculons la dérivée f' de f et vérifions que, pour tout réel x,

$f'(x)=u(x)$

On a $f(x)=(x-1)(e^x-1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=\big((x-1)(e^x-1)\big)'=1\times(e^x-1)+(x-1)e^x$$

$$=xe^x-1=u(x)$$

b) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Montrons que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

Pour cela calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]$ et étudions son signe.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim_{x\to-\infty}\big((x-1)(e^x-1)-(-x+1)\big)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x-1)(e^x)$$

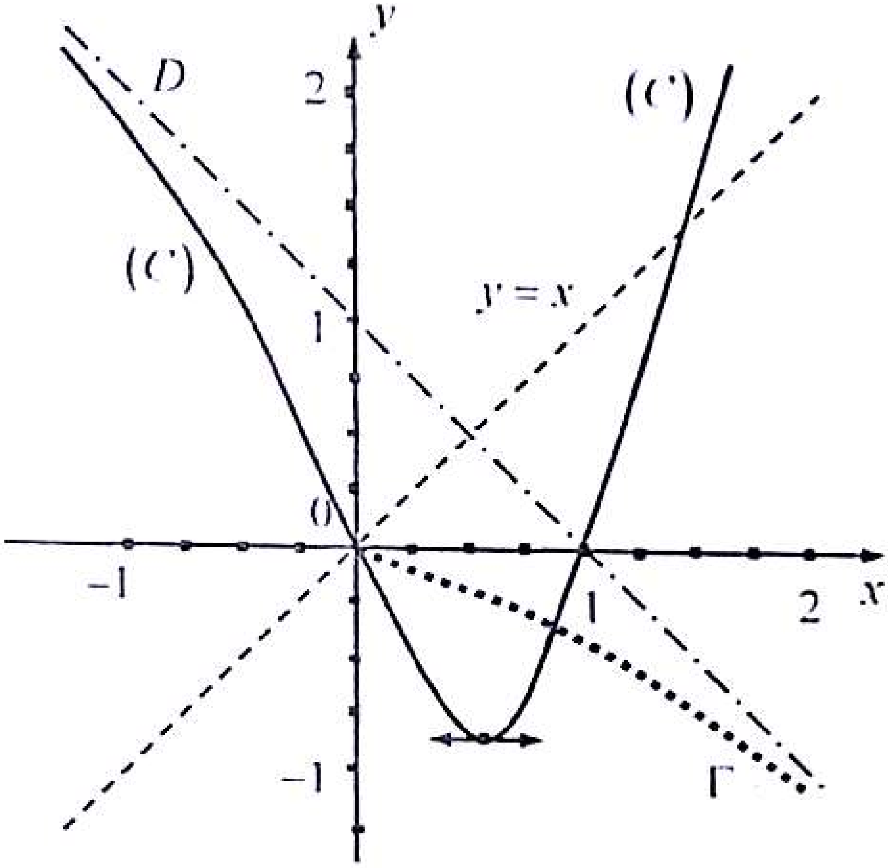
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$$

d'où $D: y=-x+1$ asymptote à (C) en $-\infty$

b) Précisons les positions relatives de (C) et (D).

$\forall x \in]-\infty, 1[, (x-1)e^x < 0$ d'où D au-dessus de .

3) Tracé de la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\alpha = 0,55$)



4) a) Calculons l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$.

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} \left[-x + 1 - (x-1)(e^x - 1)\right] dx . 4\,cm^2 \angle$$

$$= 4cm^2 \int_{\lambda}^{0} -(x-1)e^x \, dx$$

Posons $\begin{cases} u = x-1 & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$A(\lambda) = \left[e^x(x-1) - e^x\right]_0^\lambda \times 4cm^2 = \left(e^\lambda(\lambda-2)+2\right) \times 4cm^2$$

b) Calculons $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(e^\lambda(\lambda-2)+2\right) \times 4cm^2 = 2 \times 4cm^2 = 8cm^2$$

5. a) Montrons que la restriction de f à $]-\infty, 0]$ est une bijection de $]-\infty, 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Nous savons que f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

donc f est bijective de $]-\infty, 0]$ sur l'intervalle $f(]-\infty;0]) = [0;+\infty[$.

donc $J = [0;+\infty[$.

b) Tracé de Γ **voir page précédente**

Sujet N °16

Session 2014 1er groupe

Exercice N°1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 + (-7+2i)z^2 + (15-4i)z - 25 + 10i$

1) a) Vérifions que : $P(5-2i) = 0$.

$$P(5-2i) = (5-2i)^3 + (-7+2i)(5-2i)^2 + (15-4i)(5-2i) - 25 + 10i$$

$$P(5-2i) = (5-2i)^2(5-2i-7+2i) + (15-4i)(5-2i) - 5(5-2i)$$

$P(5-2i)=(5-2i)^2(5-2i-7+2i)+(5-2i)(15-4i-5)$

$P(5-2i)=-2(5-2i)^2+(5-2i)(10-4i)$

$P(5-2i)=-2(5-2i)^2+2(5-2i)(5-2i)=0$

Ainsi $P(5-2i)=0$.

b) Résolvons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

$P(5-2i)=0 \Rightarrow P(z)=(z-5+2i)\times Q(z)$ avec

degré $degréQ = degréP - 1$

Déterminons $Q(z)$.

Soit $Q(z)=(az^2+bz+c)$

$$P(z)=(z-5+2i)Q(z)=(z-5+2i)(az^2+bz+c)$$

$$=(az^3+bz^2+cz)+(-5az^2-5bz-5c)+2aiz^2+2biz+2ic$$

$$=az^3+(b-5a+2ai)z^2+(c-5b+2bi)z-5c+2ic$$

Or $P(z)=z^3+(-7+2i)z^2+(15-4i)z-25+10i$, donc par identification on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-5a+2ia=-7+2i \\ c-5b+2bi=15-4i \\ -5c+2ic=-25+10i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-5+2i=-7+2i \\ c-5b+2bi=15-4i \\ c(-5+2i)=-25+10i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c+10-4i=15+4i \\ c(-5+2i)=-25+10i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \\ c(-5+2i) = -25+10i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

On peut déduire une factorisation de $P(z)$:

$P(z) = [z-(5-2i)](z^2-2z+5)$

$P(z) = (z-5+2i)(z^2-2z+5)$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-5+2i)(z^2-2z+5) = 0$

$\Leftrightarrow (z-5+2i = 0 \text{ ou } z^2-2z+5 = 0)$ ou $(z^2-2z+5) = 0$

Pour $z-5+2i = 0 \Rightarrow z_1 = 5-2i$

Pour $z^2-2z+5 = 0$, posons

$\Delta = (-2)^2 - 4(5)(1) = 4-20$

$= -16$

$\Delta = 16i^2 = (4i)^2$

Donc $z_2 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

$z_3 = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$

$P(z)=0 \Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{5-2i\ ;1-2i\ ;1+2i\}$

2) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I=-3-2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A=1+2i$ en B d'affixe $z_B=5-2i$.

a) Déterminons f, l'application complexe associée à S.

On a $f(z)=az+b$ où a et b sont des nombres complexes.

$$\begin{cases} S(I)=I \\ S(A)=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z_I)=z_I \\ f(z_A)=z_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-3-2i)+b=-3-2i \\ a(1+2i)+b=5-2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a-2ai+b=-3-2i & (1) \\ a+2ai+b=5-2i & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \begin{cases} -4a-4ai=-8 \\ a+2ai+b=5-2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a-4ai=-8 \\ a+2ai+b=5-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+i)=8 \\ a(1+2i)+b=5-2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{1+i} \\ a(1+2i)+b=5-2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ a(1+2i)+b=5-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2-2i}{2} \\ a(1+2i)+b=5-2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ (1-i)(1+2i)+b = 5-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ (1+2i-i+2)+b = 5-2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ 3+i+b = 5-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1-i \\ b = 2-3i \end{cases}$$

L'application complexe f associée à S est :

$f: \quad z \mapsto z' = (1-i)z + 2-3i$

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S.

Centre $I\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ de S

Rapport de S : c'est le module de a. donc $|a| = |1-i|$

$|a| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Argument de S.

C'est l'angle θ tel que : $\theta = \arg(1-i) = \arg\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]$

$$\theta \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Ainsi $S : \left(I\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} ; |1-i| = \sqrt{2} ; \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \right)$

Exercice N°2

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$

On considère la suite réelle (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n + 1)$.

1) Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique et précisons sa raison et son premier terme.

Pour cela montrons que $v_{n+1} = q\, v_n$, $q \in \mathbb{R}$ on a

$v_n = \ln(u_n + 1) \Rightarrow v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 1)$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 1) = \ln(u_n^2 + 2u_n + 1)$$
$$= \ln(u_n + 1)^2$$
$$= 2\ln(u_n + 1)$$
$$= 2v_n$$

$v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 + 1) = \ln 5$

2) Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 2^n \ln 5$

On a $v_n = \ln(u_n + 1) \Rightarrow e^{v_n} = e^{\ln(u_n+1)}$

$$\Rightarrow e^{v_n} = u_n + 1$$
$$\Rightarrow u_n = e^{v_n} - 1$$

Comme $v_n = 2^n \ln 5$, alors

$$u_n = e^{2^n \ln 5} - 1$$

$$u_n = \left(e^{\ln 5}\right)^{2^n} - 1$$

$$u_n = 5^{2^n} - 1$$

3) Calculons la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = (\ln 5)\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (\ln 5)\left(2^{n+1}-1\right)$$

Problème

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - y' = e^x$ (1).

1) Vérifions que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle (1), c'est-à-dire si $g \in \mathcal{S}_{(1)}$.

$$g'(x) = e^x + x\,e^x$$

$$g''(x) = e^x + e^x + x\,e^x = 2e^x + x\,e^x$$

$$g''(x) - g'(x) = 2e^x + x\,e^x - \left(e^x + x\,e^x\right)$$

$$= 2e^x + xe^x - x^x - xe^x$$

$$= e^x$$

$g''(x) - g'(x) = e^x$ donc g est solution de (1) : $g \in \mathcal{S}_{(1)}$

2) a) Démontrons qu'une fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $h-g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ (2) donc $h - g \in \mathcal{S}_{(2)}$.

$$h \in \mathcal{S}_{(1)} \Leftrightarrow h - g \in \mathcal{S}_{(2)}$$

Il suffit de démontrer que $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$ et

$(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

Montrons que $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$

$h \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow h''(x) - h'(x) = e^x$

Et nous avons aussi que $g \in \mathcal{S}_{(1)} \Rightarrow g''(x) - g'(x) = e^x$

Donc $\left(h''(x) - g''(x)\right) - \left(h'(x) - g'(x)\right) = 0$

$\Rightarrow \left(h(x) - g(x)\right)'' - \left(h(x) - g(x)\right)' = 0$

$\Rightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$.

Montrons aussi que $(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

$(h-g) \in \mathcal{S}_{(2)} \Rightarrow \left(h(x) - g(x)\right)'' - \left(h(x) - g(x)\right)' = 0 \Rightarrow$

$\left(h''(x) - g''(x)\right) - \left(h'(x) - g'(x)\right) = 0$

$h''(x) - h'(x) = g''(x) - g'(x)$

Or $g''(x) - g'(x) = e^x$, donc $h''(x) - h'(x) = e^x \Rightarrow h \in \mathcal{S}_{(1)}$

Ainsi $h \in \mathcal{S}_{(1)} \Leftrightarrow (h-g) \in \mathcal{S}_{(2)}$

b) Résolvons l'équation différentielle (2).

$(2) \Rightarrow y'' - y' = 0$

Equation caractéristique : $r^2 - r = 0 \Leftrightarrow r = \{0 ; 1\}$

Donc $y'' - y' = 0 \Rightarrow \mathcal{S}_2 = \{f : x \mapsto A + Be^x, A, B \in \mathbb{R}\}$.

c) Déduisons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

$h - g \in \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow h(x) - g(x) = A + Be^x$

$$\Leftrightarrow h(x)=g(x)+A+Be^{x}$$

$h(x)=xe^{x}+Be^{x}+A$ avec $A, B\in\mathbb{R}$

$\mathcal{S}_1=\{h: x\mapsto xe^{x}+Be^{x}+A,\ A, B\in\mathbb{R}\}$

d) Trouvons la solution de (1) vérifiant les conditions $h(0)=-4$ et $h'(0)=1$.

$h'(x)=e^{x}+xe^{x}+Be^{x}$

$$\begin{cases} h(0)=-4 \\ h'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-4 \\ 1+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=0 \end{cases}$$

Donc $h(x)=xe^{x}-4$

B) On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{x}-4$.

1) Etudions les variations de u et dressons son tableau de variation.

$u(x)=xe^{x}-4$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

$u'(x)=e^{x}+xe^{x}=(x+1)e^{x}$

$\forall x\in\left]-\infty;-1\right]$, $u'(x)<0$ donc u décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]$

$\forall x\in\left[-1;+\infty\right[$, $u'(x)>0$ donc u croissante sur $\left[-1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x}-4=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^{x}}-4=-4$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x}-4=+\infty$$

$f(-1)=-e^{-1}-4$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	
u	-4	$\searrow$	$-e^{-1}-4$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Montrons que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α.

u continue et strictement croissante dans $]-1;+\infty[$, aussi $u(-1)<0$ et

$u(+\infty)>0$ avec $u([-1,+\infty[)=[-e^{-1}-4;+\infty[$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, il existe α unique tel que

$u(\alpha)=0$ avec $\alpha\in]-1;+\infty[$ et $0\in[-e^{-1}-4;+\infty[$

L'équation $u(x)=0$ n'admet pas de solutions dans $]-\infty;-1]$ car

$0\notin]-\infty;-1]$.

b) Vérifions que $1,2<\alpha<1,3$

$u(1,2)=1,2\times e^{1,2}-4\approx-0,016<0$

$u(1,3)=1,3\times e^{1,3}-4\approx 0,77>0$ α

$u(1,2)\times u(1,3)<0\Rightarrow\exists\alpha$ unique tel que $u(\alpha)=0$ et $\alpha\in]1,2;1,3[$

c) Déduisons le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.

$\forall x\in]-\infty;\alpha[$, $u(x)<0$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $u(x)>0$

C) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - 4\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculons la dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x non nul.

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée de deux fonctions, l'une dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'autre sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x - 4\ln x$

$$f'(x) = e^x - \frac{4}{x} = \frac{xe^x - 4}{x} = \frac{u(x)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x}$$

b) Dressons le tableau de variation de f

$f'(x) = \dfrac{u(x)}{x}$ et comme $x > 0$ dans $]0 ; +\infty[$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$. (Voir le signe $u(x)$ à la partie B. 2)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - 4\ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - 4\ln x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{4\ln x}{e^x}\right) = +\infty$$

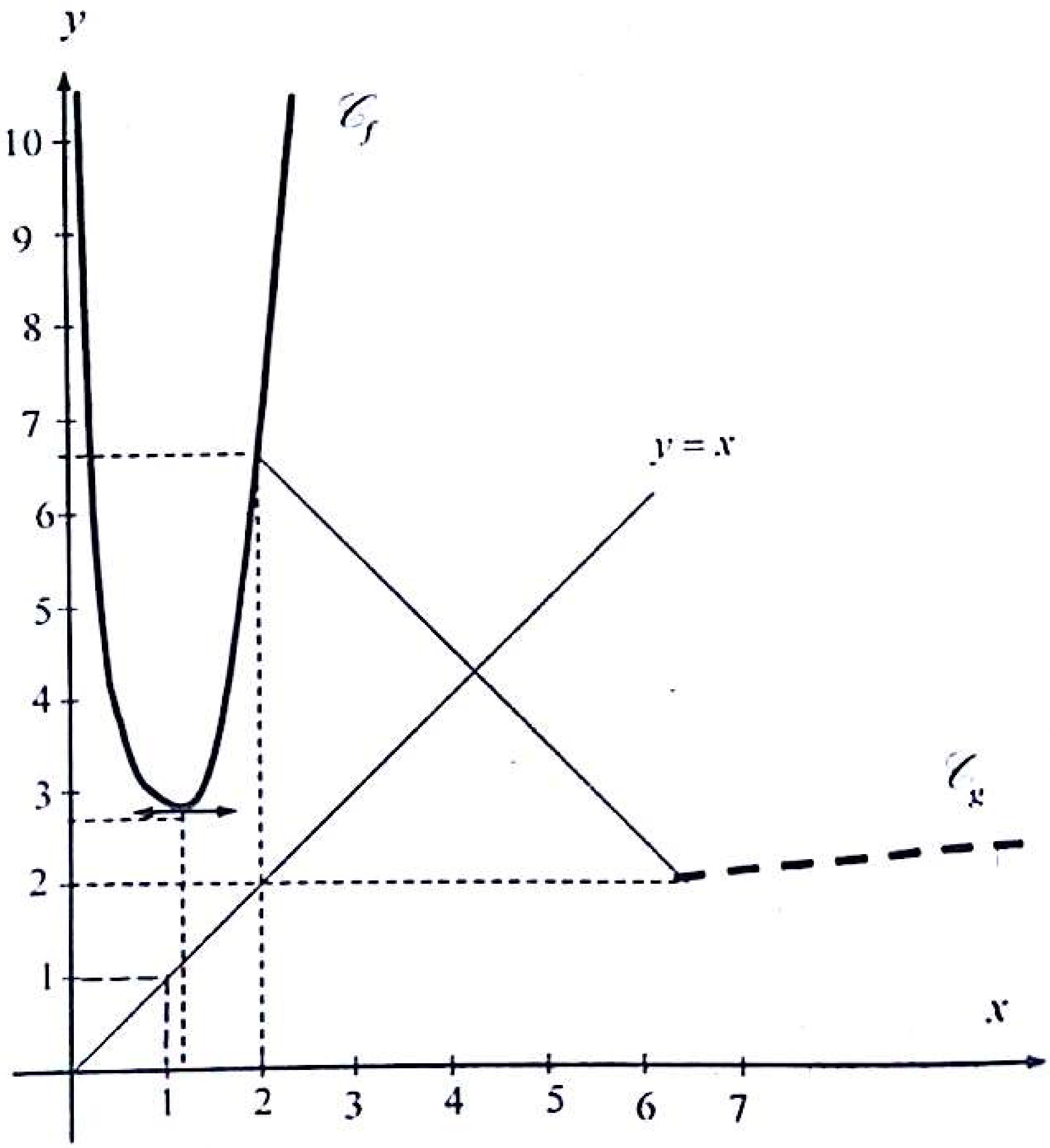
x	0		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Traçons la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on prendra

$\alpha = 1.25$.

$f(1.25) = e^{1.25} - 4\ln 1.25 \approx 2.60$

$f(2) = e^{2} - 4\ln 1.25 \approx 6,50$



y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
$\mathscr{C}_f$
$y = x$
$\mathscr{C}_g$
x
1
2
3
4
5
6
7

3) Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$.

a) Calculons l'air $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \left(e^{x} - 4\ln x\right) dx \; u.a$$

$$= \left(\int_{\lambda}^{1} e^{x} dx - 4\int_{\lambda}^{1} \ln x \, dx \right) \times 1cm^{2}$$

$$= \left(\left[e^{x}\right]_{\lambda}^{1} - 4\left[\left[x \ln x\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} x \cdot \frac{1}{x} dx \right] \right) \times 1\,cm^{2}$$

$$= \left(\left[e^{x}\right]_{\lambda}^{1} - 4\left[\left[x \ln x\right]_{\lambda}^{1} - \left[x\right]_{\lambda}^{1} \right] \right) cm^{2}$$

$$= \left(\left[e^{x} - 4x\,(\ln x - 1)\right]_{\lambda}^{1} \right) cm^{2}$$

$$= \left[e + 4 - e^{\lambda} + 4\lambda(\ln\lambda - 1)\right] cm^{2}$$

$$A(\lambda) = \left(e - e^{\lambda} + 4 + 4\lambda \ln - 4\lambda\right) cm^{2}$$

b) Calculons la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \left(e - e^{\lambda} + 4 + 4\lambda \ln\lambda - 4\lambda\right) cm^{2}$$

$$= (e + 3) cm^{2}$$

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2, +\infty[$.

a) Montrons que g est une bijection de l'intervalle $[2, +\infty[$ vers une intervalle J que nous préciserons dans $[2,+\infty[$ g est continue strictement croissante, donc g est une bijection de $[2,+\infty[$ vers $J=f([2;+\infty[)=[f(2);\lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$f(2)=e^2-4\ln 2$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Donc $J=[e^2-4\ln 2;+\infty[$

b) Traçons la courbe représentative (Γ) de la réciproque de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$. (Voir figure)

5) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$f(x)=m$, où m est un paramètre réel

Si $m\in]-\infty;f(\alpha)[$, l'équation n'admet aucune solution

Si $m=f(\alpha)$, l'équation admet une solution

Si $m>f(\alpha)$, l'équation admet deux solutions

m	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$
nombre de solutions	0 solution	↓ 1 solution	2 solutions

Achevé d'imprimer au Niger
sous les presses de Afr.que Lecture SA
Dépôt légal 4e trimestre 2014

Dans la même collection

Pour la classe de troisième :

Annales de mathématiques 3ème ;
Annales de Physique et Chimie 3ème ;
Annales de Français 3ème ;
Annales de SVT 3ème ;
Annales d'Anglais 3ème ;
Annales d'Histoire géographie 3ème.

Pour les classes des terminales :

Annales de Physique et Chimie TD ;
Annales de SVT TD ;
Annales de Français Tles ;
Annales d'Anglais Tles ;
Annales d'Histoire géographie Tle A ;
Annales de mathématiques Tle A ;
Annales de Philosophie Tles.