Institut Africain d'Informatique **Année académique 2008-2009**
Concour d'Entree en 1^{er} Année Miage
Pour l'année académique 2008-2009

Epreuve de Mathématiques générales
Durée : 4 heures. Sans document.
Ce sujet comporte quatre (04) pages.
N.B. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.

Exercice 1 .
On pose $I_n = \int \cos^n(x)dx,\ n \in \mathbb{N}$

1. (a) *Calculer* I_0 *et* I_1
   (b) *Montrer que*

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Déduire I_2.

Exercice 2 .
Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si vous êtes malade, alors le test est positif avec probabilitée

$$\alpha = 98\%$$

α *est la sensibilit e du test. test), si vous êtes sain, alors le test est positif avec probabilité*

$$\beta = 3\%$$

$1-\beta$ *est est la spécificité du test. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur*

$$\pi^{-1} = 1000 \textit{ personnes}$$

calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif. Calculer la probabilit e d'être malade alors que le test est négatif. Commentaire

Exercice 3 .

Dans tout le problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

Partie I.

1. *Calcul de la somme des n premiers entiers.*

   Justifier les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   et

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. *Fonction génératrice d'une variable aléatoire.*

   On considère un entier naturel p et une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, ..., p\}$. On lui associe la fonction suivante, dite fonction génératrice de X :

$$t \to G_X(t) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k)t^k$$

   Déterminer la fonction génératrice de X lorsque :

   (a) *X suit une loi de Bernoulli de paramètre λ (λ réel tel que $0 < \lambda < 1$).*

   (b) *X suit une loi binomiale de paramètres n et λ (λ réel tel que $0 < \lambda < 1$).*

3. *Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.*

   On considère désormais des entiers naturels $p_1, p_2, ..., p_n$ et des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et à valeurs dans $\{0, 1, ..., p_1\}, ..., \{0, 1, ..., p_n\}$ respectivement. On note alors :

$$Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

   (a) *Etablir que la fonction génératrice de $Y_2 = X_1 + X_2$ est le produit des fonctions génératrices de X_1 et X_2.*

   (b) *Exprimer la fonction génératrice de $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ à l'aide des fonctions génératrices de $X_1, X_2, ..., X_n$. Retrouver le résultat obtenu en 2°)b) à partir du résultat obtenu en 2°)a).*

4. *Etude d'un cas particulier.*

   On suppose de plus que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la variable aléatoire X_k suit une loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k-1\}$, autrement dit :

$$P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = ... = P(X_k = k-1) = \frac{1}{k}$$

   (a) *Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires $X_k (1 \leq k \leq n)$, puis de la somme*

$$Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

   On convient de noter la fonction génératrice G_n de Y_n sous la forme suivante :

$$G_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} c_{n,k} t^k$$

   (b) *En exprimant G_{n+1} en fonction de G_n, déterminer $c_{n+1,k}$ en fonction des coefficients $c_{n,k}, c_{n,k-1}, ..., c_{n,k-n}$.*
   Par convention on posera $c_{n,k} = 0$ lorsque $k < 0$ ou lorsque $k > n(n-1)/2$.

   (c) *Montrer que les coefficients $c_{n,k}$ sont des entiers naturels et calculer leur somme pour $0 \leq k \leq n(n-1)/2$.*

   (d) *Remplir un tableau à 5 lignes où $c_{n,k}$ figure en n-ième ligne et k-ième colonne pour $1 \leq n \leq 5$ et $0 \leq k \leq n(n-1)/2$. Déterminer la loi et retrouver l'espérance de Y_n pour $n \leq 5$.*

Exercice 4 .

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2)e^y$$

.***Partie 1*** *: étude des extrema de $f_{\mathbf{a}}$*

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.

1. (a) *Calculer les dérivées partielles premières de f_a.*

   (b) *En déduire que f_a possède deux points critiques (c'est à dire deux couples de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auxquels f_a est susceptible de présenter un extremum local) et donner leurs coordonnées.*

2. *Calculer les dérivées partielles secondes de* f_a.

   (a) *Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a,* f_a *présente en ces points un extremum local.*

   (b) *Déterminer, en distinguant trois cas, si* f_a *présente sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.*

***Partie 2** : étude d'une fonction définie à l'aide* $f_{\mathbf{a}}$.

1. (a) *Pour tout réel* x *et tout réel* t *inférieur à* x*, calculer*

$$\int_t^x e^y dy.$$

   En déduire que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^x e^y dy$$

   converge et donner sa valeur.

   (b) *Pour tout réel* x*, montrer grâce à une intégration par parties que l'intégrale*

$$J = \int_{-\infty}^x y e^y dy$$

   converge et donner sa valeur.

   (a) *Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction* F_a *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *en posant :*

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(x, y) dy.$$

   (b) *Après avoir écrit* $F_a(x)$ *en fonction de* a *et de* x*, donner le tableau de variation de* F_a*. (On distinguera les trois cas :*$a = -1,\ a < -1,\ a > -1.$*)*