Limites et continuité d'une fonction

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de IR vers IR. Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} + x - 1$;

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+2}$;

e) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$;

f) $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$;

g) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - x + 3$.

Exercice 2

Etudie la nature de la branche parabolique à la courbe représentative (C_f) de f en$+\infty$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$;

b) $f(x) = \frac{2}{x+1} - \sqrt{x+1}$

c) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^3+8}$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $3 < \alpha < 4$.
   b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Trace (C_f).

Exercice 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

1. a) Démontre que l'équation : $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
   b) démontre : $0,77 < \alpha < 0,78$.

2. Démontre que :
$\forall\, x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$,
$\forall\, x \in]\alpha ; +\infty[$ $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2 cm.
1. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2.a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
b) Etudie la position de (C) par rapport à(D).
3.a) Démontre que :
$\forall\, x \in$IR*, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
b) Dresse son tableau de variation.
c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
4. Trace (T), (D) et (C).

Exercice 5

Partie A . g est la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que l'équation $x \in$ IR, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$. 4. Démontre que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ *et* $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B. f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule les limites de f en -1 et en $+\infty$ puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Démontre que : $\forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

3. Trace (T) et (C).

Situation

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.