CORRECTION IO 1994 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Pour que $\overline{3\alpha 4y}$, un nombre dans le système décimal soit divisible par 36 = 9x4, il faut que $y \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ et que $3+\alpha+4+y$ soit un multiple de 9.
Les multiples de 9 sont : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81…

- Trouvons le chiffre α pour que $\overline{3\alpha 40}$ soit multiples de 9.

$3+\alpha+4+0 = 9 \Rightarrow \alpha = 2$

$3+\alpha+4+0 = 18 \Rightarrow \alpha \nexists$

- Trouvons le chiffre α pour que $\overline{3\alpha 42}$ soit multiples de 9

$3+\alpha+4+2 = 9 \Rightarrow \alpha = 0$

$3+\alpha+4+2 = 18 \Rightarrow \alpha = 9$

$3+\alpha+4+2 = 27 \Rightarrow \alpha \nexists$

- Trouvons le chiffre α pour que $\overline{3\alpha 44}$ soit multiples de 9

$3+\alpha+4+4 = 9 \Rightarrow \alpha \nexists$

$3+\alpha+4+4 = 18 \Rightarrow \alpha = 7$

$3+\alpha+4+4 = 27 \Rightarrow \alpha \nexists$

- Trouvons le chiffre α pour que $\overline{3\alpha 46}$ soit multiples de 9

$3+\alpha+4+6 = 9 \Rightarrow \alpha \nexists$

$3+\alpha+4+6 = 18 \Rightarrow \alpha = 5$

$3+\alpha+4+6 = 27 \Rightarrow \alpha \nexists$

- Trouvons le chiffre α pour que $\overline{3\alpha 48}$ soit multiples de 9

$3+\alpha+4+8 = 9 \Rightarrow \alpha \nexists$

$3+\alpha+4+8 = 18 \Rightarrow \alpha = 3$

$3+\alpha+4+8 = 27 \Rightarrow \alpha \nexists$

Les couples $(\alpha ; y)$ solutions sont : (2 ; 0), (9 ; 2), (7 ; 4), (5 ; 6), (3 ; 8), (0 ; 2).

EXERCICE 2

Soit α : Nombre de délégués d'Afrique
y : Nombre de délégués d'Amérique
z : Nombre de délégués d'Asie
t : Nombre de délégués d'Europe
$y+z = 6$; $z+t = 7$

avec
* $\alpha+y+z+t = 15$
* $\alpha \neq y \neq z \neq t$
* $\alpha \geq 1$; $y \geq 1$; $z \geq 1$; $t \geq 1$.
* L'un des continents a envoyé 4 délégués.

Déterminons le nombre de délégués envoyés par chaque continent.

1er cas : Supposons que l'Afrique ait envoyé 4 délégués soit $\alpha = 4$

$\alpha+y+z+t = 15$

$\alpha+(6-z)+z+(7-z) = 15$

$\alpha+6-z+z+7-z = 15$

$\alpha+13-z = 15$

$4+13-z = 15 \Rightarrow \underline{z = 2}$

$y+z = 6 \Rightarrow y = 6-z$

$z+t = 7 \Rightarrow t = 7-z$

$y = 6-z$

$y = 6-2 = 4$ $\underline{y = 4}$ car $z = 2$

$t = 7-z = 7-2 = 5$ $\underline{t = 5}$ car $z = 2$

On a finalement $\alpha = 4$; $y = 4$; $z = 2$ et $t = 5$. Nous remarquons que $\alpha = 4$ et $y = 4$ c'est-à-dire que l'Afrique et l'Amérique ont le même nombre de délégués ce qui n'est pas possible. Donc $x \neq 4$ c'est-à-dire que l'Afrique n'a pas envoyé 4 délégués.

<u>**2ème cas**</u> : Supposons que l'Amérique ait envoyé 4 délégués soit $y = 4$

$Y = 4 \Rightarrow 6 - z = 4 \Rightarrow \underline{z = 2}$

$t = 7 - z \Rightarrow t = 7-2 = 5 \quad \underline{t = 5}$

$x+y+z+t = 15$

$x+4+2+5 = 15 \quad \underline{x = 4}$

on a finalement $x = 4$; $y = 4$; $z = 2$; $t = 5$

$x = y$, impossible. L'Amérique n'a donc pas envoyé 4 délégués.

<u>**3ème cas**</u> : Supposons que l'Europe ait envoyé 4 délégués soit $t = 4$

$z+t = 7 \qquad y = 6-z$

$z = 7-t \qquad y = 6-3$

$z = 7-4 \qquad y = 3 \qquad z = y$, impossible. L'Europe n'a donc pas envoyé 4 délégués.

$\underline{z = 3}$

<u>**4ème cas**</u> : Supposons que l'Asie ait envoyé 4 délégués soit $z = 4$

$Y = 6-z \Rightarrow y = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \underline{y=2} \qquad x + y + z + t = 15$

$t = 7-z \Rightarrow t = 7 - 4 = 3 \Rightarrow \underline{t = 3} \qquad \Rightarrow \qquad x + 2 + 4 + 3 = 15 \qquad \underline{x = 6}$

on a finalement $x = 6$; $y = 2$; $z = 4$; $t = 3$. On remarque que $x \neq y \neq z \neq t$ avec $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$, $t > 1$.

On peut donc conclure en disant que :
- L'Asie envoie 4 délégués
- L'Afrique 6 délégués
- L'Europe 3 délégués
- Et enfin l'Amérique envoie 2 délégués.

EXERCICE 3

Soit L la longueur de ce rectangle, et ℓ sa largeur.

P : Périmètre du rectangle

A : Aire du rectangle

$P = (\ell + L) \times 2 = 130$

$\ell + L = 130/2 = 65 \qquad \underline{L + \ell = 65}$

soit: $L' = L - 1 \qquad A' = A + 14$

$\ell' = \ell + 1 \qquad A' = L \times \ell + 14 = (L-1)(\ell+1)$

$L \times \ell + 14 = L \times \ell + L - \ell - 1 \Rightarrow L - \ell - 1 = 14 \Rightarrow \underline{L - \ell = 15}$

$$\begin{cases} L + \ell = 65 \\ L - \ell = 15 \Rightarrow 2L = 65 + 15 = 80 \Rightarrow \underline{L = 40} \end{cases}$$

$L + \ell = 65 \Rightarrow \ell = 65 - 40 = 25 \Rightarrow \underline{\ell = 25}$

La longueur du rectangle est donc $L = 40$ et sa largeur, $\ell = 25$

EXERCICE 4

a°)

b°) $\cos \hat{C} = HC / BC = HC / 3$

$\cos C = \cos 60° = \sqrt{3} / 2 = HC / 3 \Rightarrow 2HC = 3\sqrt{3} \Rightarrow \underline{HC = 3\sqrt{3} / 2}$

$DC = DH + HC$ donc $DC = AB + HC = 2 \times BC \Rightarrow AB = 2 \times BC - HC = 2 \times 3 - HC$

$AB = 6 - 3\sqrt{3} / 2 = (12 - 3\sqrt{3}) / 2 = 3 (4 - \sqrt{3}) / 2 = 3/2 . (4-\sqrt{3})$ $\quad$ $\underline{\mathbf{AB = 3/2 . (4-\sqrt{3})}}$

EXERCICE 5

Soit x l'âge de Jean, y l'âge de Paul et z mon âge.

$$\begin{cases} y = z - 9 \\ y = 3x + 4 \\ x + y + z = 38 \end{cases}$$

$y = z - 9 \Rightarrow z = y+9$

$y = 3x + 4 \Rightarrow x = (y - 4) / 3$

$x + y + z = 38 \Rightarrow (y - 4) / 3 + y + y + 9 = 38$

$(y - 4) / 3 + 2y + 9 = 38$

$\dfrac{(y - 4) + 3 (2y + 9)}{3} = \dfrac{38 \times 3}{3}$

$y - 4 + 6y + 27 = 114$

$7y = 114 - 23 = 91$

$\underline{y = 13}$

$y = 13$

$z = y+9 = 13 + 9 = 22$ $\quad$ $\underline{z = 22}$

$x + 13 + 22 = 38 \Rightarrow$ $\quad$ $\underline{x = 3}$

$\boxed{x = 3 \quad ; \quad y = 13 \quad ; \quad z = 22}$

Jean a donc 3 ans, Paul 13 ans et moi 22 ans

EXERCICE 6

Résolvons dans N l'équation $a^2 - b^2 = 45$

$a^2 - b^2 = 45$

$(a+b) (a-b) = 45$ or $45 = 9 \times 5 = 15 \times 3$

Donc $a + b = 9$ et $a - b = 5$

Ou $a + b = 5$ et $a - b = 9$

$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow$ $2a = 14$ $\quad$ $\underline{a = 7} \Rightarrow \underline{b = 2}$

$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 9 \end{cases}$ $\Rightarrow 2a = 14$ $\quad$ $a = 7 \Rightarrow b = -2 \notin N$

on a aussi $a + b = 15$ et $a - b = 3$

ou $a + b = 3$ et $a - b = 15$

$\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases}$ $\quad$ $2a = 18$ $\quad$ $\underline{a = 9}$ $\quad$ $a - b = 3$ $\quad$ $b = a-3 = 9-3 = 6$ $\quad$ $\underline{b = 6}$

$S = [(7 ;2), (9 ;6)]$