CORRECTION IO 1999
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Soit x l'âge de l'aîné, y l'âge du cadet et z l'âge du dernier.

$x = 2y \implies y = \frac{x}{2}$

$x = 3z \implies z = \frac{x}{3}$

$x + 1 = (y+1) + (z+1)$

$x + 1 - y - 1 - z - 1 = x - y - z - 1 = 0$

$x - x/2 - x/3 - 1 = 0$

$6x - 3x - 2x - 6 = 0$

$x - 6 = 0$ $\quad x = 6$, l'aîné a donc 6 ans

$y = x/2 = 6/2 = 3$ le cadet a 3 ans

$z = x/3 = 6/3 = 2$ le dernier a 2 ans

L'aîné a donc 6 ans, le cadet 3 ans et le dernier 2 ans.

EXERCICE 2

$\mu_0 = 1/2 \qquad 4\,\mu_{n+1} - 2\,\mu_n = 3$

1/ Calculons μ_1, μ_2, μ_3

$4\,\mu_{0+1} - 2\mu_0 = 3$

$4\mu_1 = 3 + 2\mu_0$

$4\mu_1 = 3 + 2 \times 1/2$

$4\mu_1 = 4$

$\boxed{\mu_1 = 1}$

$4\mu_{1+1} - 2\mu_1 = 3$

$4\mu_2 - 2\mu_1 = 3$

$4\mu_2 = 3 + 2\mu_1$

$4\mu_2 = 5$

$\boxed{\mu_2 = 5/4}$

$4\,\mu_{2+1} - 2\mu_2 = 3$

$4\,\mu_3 - 2\mu_2 = 3$

$4\mu_3 = 3 + 2\mu_2$

$4\mu_3 = 3 + 2 \times 5/4$

$4\mu_3 = 3 + 5/2 = 6/2 + 5/2 = 11/2$

$\boxed{\mu_3 = 11/8}$

2/ on pose $\sqrt{n} = 2\mu_n - 3$. Démontrons que $(\sqrt{n})$ est une suite géométrique.

$\surd_{n+1} = 2\mu_{n+1} - 3$

$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = (2\mu_{n+1} - 3) / (2\mu_n - 3)$

$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = [2\,(3+2\mu_n)/4 \; -3\,] / (2\mu_n - 3)$ car $\mu_{n+1} = (3+2\mu_n)/4$

$= (3 + 2\mu_n - 6) / 2(2\mu_n - 3)$

$= (2\mu_n - 3) / (4\mu_n - 6)$

$= (2\mu_n - 3) / 2(2\mu_n - 3)$

$\surd_{n+1} / \surd_n = 1/2$

$4\mu_{n+1} - 2\mu_n = 3$

$4\mu_{n+1} = 3 + 2\mu_n$

$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1/2 \implies \boxed{\surd_{n+1} = \frac{1}{2}\surd_n}$ la suite $(\surd_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$\surd_0 = 2\mu_0 - 3 = 2 \times 1/2 - 3 = -2 \qquad \surd_0 = -2.$

Déduisons-en des expressions de (V_n) et (μ_n).

$V_n = q^n V_0 = (\frac{1}{2})^n \times (-2)$

$V_n = 2^{-n} \times 2 \times (-1) = -2^{-n+1}$

$\boxed{V_n = -2^{-n+1}}$

$V_n = 2\mu_n - 3$

$2\mu_n = V_n + 3$

$\mu_n = \frac{1}{2}(V_n - 3)$

$\mu_n = \frac{1}{2} \times V_n + \frac{3}{2}$

$\mu_n = \frac{1}{2} \times (-2^{-n+1}) + \frac{3}{2}$

$= 2^{-1} \times 2^{-n+1} \times (-1) + \frac{3}{2}$

$= 2^{-n} + \frac{3}{2}$

$\boxed{\mu_n = \frac{3}{2} - 2^{-n}}$

EXERCICE 3

5,61 m = 561 cm et 8,58 m = 858 cm.

Trouvons un diviseur commun à 561 et 858 qui est compris entre 10 et 20 cm.

561 = 3 x 17 x 11 858 = 3 x 2 x 13 x 11

Il y a donc 3 diviseurs communs à 561 et 858, se sont : 3 ; 11 et 11 x 3 = 33

11 cm étant compris entre 10 et 20 cm, 11 cm est donc la dimension d'un carreau.

le nombre de carreaux N utilisés est donc :

N = (3 x 17) x (3 x 2 x 13)

= 51 x 78

= 3. 978 carreaux.

EXERCICE 4

Comme multiples de 9, on peut citer : 9 ; 18 ; 27 …

- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 9$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 7$. On a donc : (7 ; 0), (6 ; 1), (1 ; 6), (5 ; 2), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3).
- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 18$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 16$. On a donc : (8 ; 8), (9 ;7), (7 ; 9) .
- Trouvons les couples $(x ; y)$ tels que $x+2+y = 27$. Cela revient à trouver les couples $(x ; y)$ tels que $x+y = 25$. x et y étant des chiffres, cela est impossible. L'ensemble des

couples $(x ; y)$ pour que A soit divisible par 9 sont :

(7 ; 0), (6 ; 1), (1 ; 6), (5 ; 2), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (8 ; 8), (9 ; 7), (7 ; 9).

NB : Le couple (0 ; 7) ne peut pas être pris en compte, parce que si $x = 0$, A est un nombre à deux chiffres et non 3.