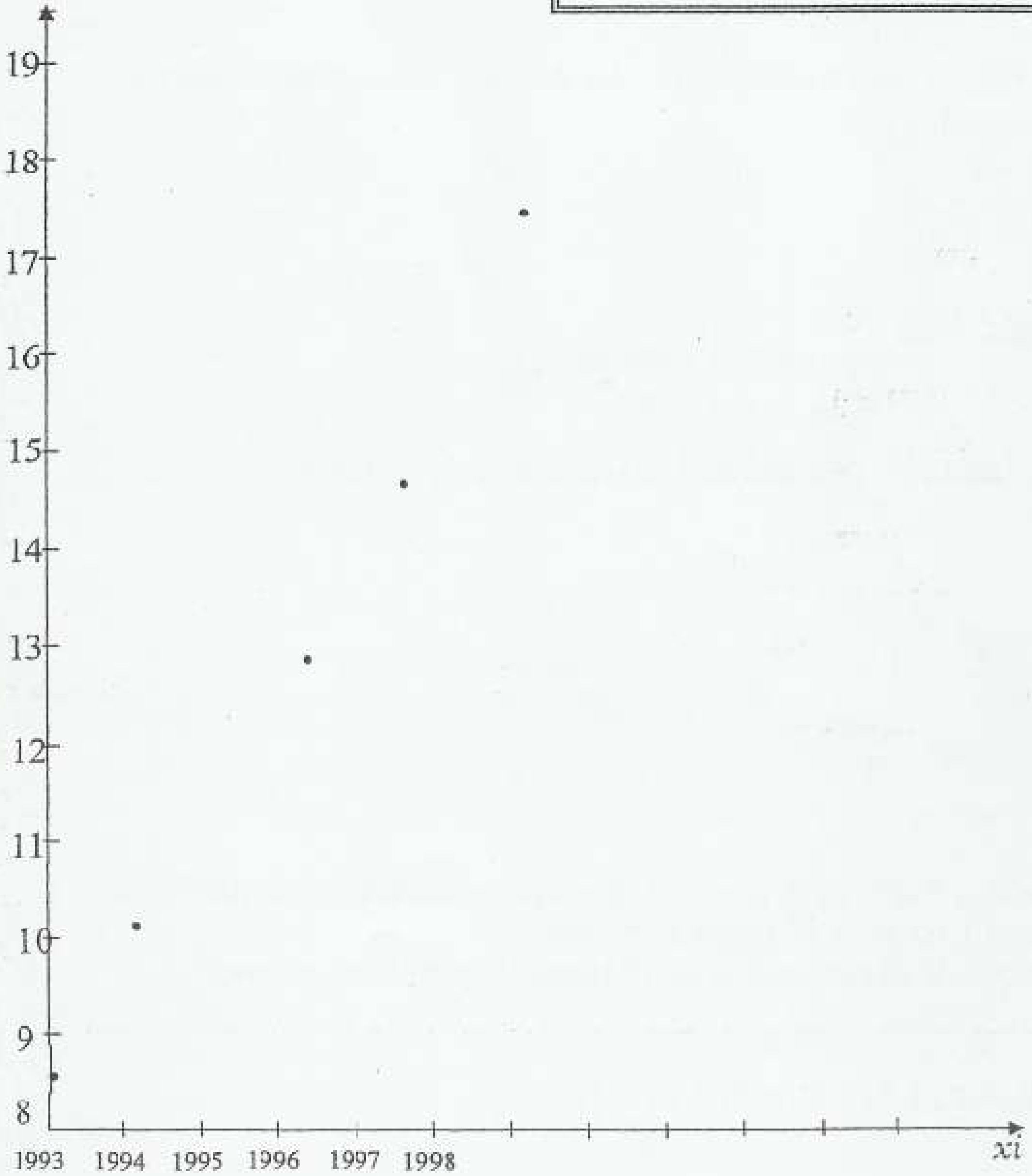
CORRECTION IO 2005
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1



2/ Soit E_1 : Ensemble des 3 premiers points de coordonnées : (1993 ; 850), (1994 ; 1025), (1995 ; 1125).

E_2 : Ensemble des 3 autres points de coordonnées : (1996 ; 1300), (1997 ; 1450), (1998 ; 1750).

Calcul des coordonnées (x_1, y_1) de G_1

$x_1 = \frac{1993+1994+1995}{3}$ $y_1 = \frac{805+1025+1125}{3}$

$x_1 = 1994$ $y_1 = 1000$

Calcul des coordonnées (x_2, y_2) de G_2

$x_2 = \frac{1996+1997+1998}{3}$ $y_2 = \frac{1300+1450+1750}{3}$

$x_2 = 1997$ $y_2 = 1500$

$(G_1 G_2)$ est la droite d'ajustement linéaire de nuage de points, déterminons son équation. Son équation étant de la forme $y = a x + b$, $G_1(1994 ; 1000)$ et $G_2(1997 ; 1500)$ étant des points de cette droite on a :

$$\begin{cases} 1000 = 1994a + b & (1) \\ 1500 = 1997a + b & (2) \end{cases} \Rightarrow (1)-(2) \begin{cases} 500 = 3a \\ 1000 = 1994a + b & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{500}{3} \\ b = 1000 - 1994 \times \frac{500}{3} \\ b = -994000/3 \end{cases}$$

$y = a x + b$

$y = \frac{500}{3} x - 994000 / 3$

$3y = 500x - 994000 \Longrightarrow 500x - 3y - 994000 = 0$ La droite d'ajustement linéaire du nuage de points a donc pour équation :

$(G_1 G_2) : 500x - 3y - 994000 = 0$

3/ $500x - 3y - 994000 = 0$

$3y = 500x - 994000$

$y = (500x - 994000)/3$

Le montant des recettes fiscales de ce pays en l'an 1999 sera :

$y = (500 \times 1999 - 994000)/3 = \frac{5500}{3} \simeq 1833,33$

les recettes fiscales de ce pays en l'an 1999 sera de 1833,33 milliards de francs.

EXERCICE 2

1/ $P_2 = P_1 + P_1 \times 0,03$

$= P_1(1+0,03)$

$P_2 = 1,03\ P_1 = 1,03 \times 3000 = 3\ 090$ tonnes

2/ $P_{n+1} = P_n + P_n \times 0,03$

$= P_n\ (1+ 0,03)$

$= P_n \times 1,03$

Donc $P_{n+1} = 1,03\ P_n$

3/ a) $P_{n+1} = 1,03\ P_n$

Cette expression est la forme $V_{n+1} = qV_n$ avec $q = 1,03$. Nous pouvons donc dire que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de 1[er] terme $P_1 = 3000$.

b) P_n étant une suite géométrique de raison 1,03 et de 1[er] terme $P_1 = 3000$ on a donc

$P_n = (1,03)^{n-1}.\ 3000$

$P_n = 3000.\ (1,03)^{n-1}$

4/ Calculons $X = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10}$

$S_n = [\ (q^n-1)/\ (q-1)].\ P_1$

$X = [[(1,03)^{10}-1] / (1,03-1)] \times 3000 = 34391,64$ tonnes.

La production totale des 10 premières années de fonctionnement est :

$X = 34391,64$ tonnes.

EXERCICE 3

1/ $x - 3 + 8/ (x^2+3) = [(x-3)(x^2+3)+8]/ (x^2+3)$

$= (x^3+3x-3x^2-9+8) / (x^2+3)$

$= (x^3 -3x^2 +3x-1) / (x^2+3) = f(x)$

Donc $f(x) = x-3 + 8 / (x^2+3)$

2/ a) $\lim\limits_{x \Rightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow +\infty} x^3/x^2 = \lim\limits_{x \Rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \Rightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \Rightarrow -\infty} x^3/x^2 = \lim\limits_{x \Rightarrow -\infty} x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \Rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \Rightarrow \infty} 8/ (x^2+3) = 0$.donc la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à (ε) en + ou – l'infini.

3/ Etudions la position de (ε) par rapport à (D)

Etudions donc le signe de $f(x) - y = 8/(x^2+3)$

$8 > 0$ et $x^2 + 3 > 0$ donc $8/(x^2+3) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. On peut donc dire que la courbe (ε) est toujours au dessus de la droite (D).

4/ $f(x) = (x^3-3x^2+3x-1)/(x^2+3)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= [(x^3-3x^2+3x-1)'(x^2+3) - (x^3-3x^2+3x-1)(x^2+3)']/(x^2+3)^2 \\
&= [(3x^2-6x+3)(x^2+3) - (x^3-3x^2+3x-1) \times 2x]/(x^2+3)^2 \\
&= [3(x^2-2x+1)(x^2+3) - (x^3-3x^2+3x-1) \times 2x]/(x^2+3)^2 \\
&= [3(x-1)^2(x^2+3) - (x-1)^3 \times 2x]/(x^2+3)^2 \\
&= (x-1)^2\,[3(x^2+3) - 2x(x-1)]/(x^2+3)^2 \\
&= (x-1)^2\,(3x^2+9-2x^2+2x)/(x^2+3)^2
\end{aligned}
$$

$$f'(x) = (x-1)^2\,(x^2-2x+9)/(x^2+3)^2$$

on peut donc dire que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = [(x-1)^2\,(x^2+2x+9)]/(x^2+3)^2$

5/ Déterminons le signe de $x^2 + 2x + 9$.

$x^2 + 2x + 9 = 0$ $\Delta = 4 - 36 < 0$ donc le signe de ce polynôme est le signe de $a = 1 > 0$

Le polynôme $x^2 + 2x + 9$ est strictement positif pour tout nombre réel x.

on a alors $f'(x) > 0$ car $(x-1)^2 > 0$ et $(x^2+3)^2 > 0$

6/ Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

7/ Démontrons que (T) d'équation $y = x - \frac{1}{3}$ est tangente à (C) au point d'abscisse 0.

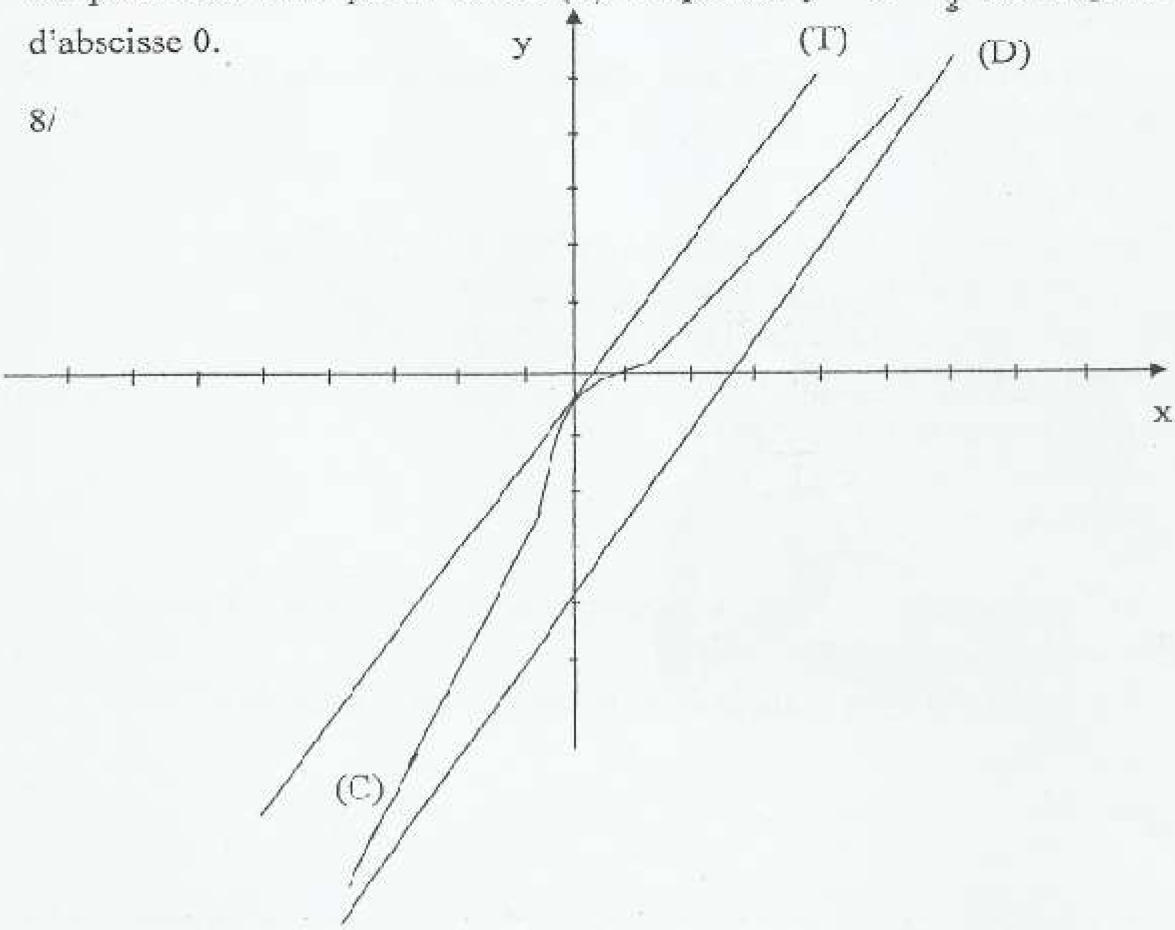
La tangente à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation :

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= f'(0)(x - 0) + f(0) \\
&= 1 \times x + \left(-\tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$y = x - \frac{1}{3}$$

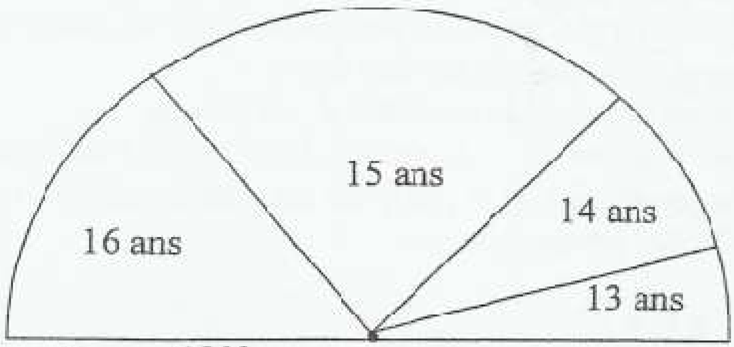
On peut donc dire que la droite (T) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est tangente à (C) un point d'abscisse 0.

8/



EXERCICE 4

1/ Construisons le diagramme semi-circulaire des effectifs.



1/ 60 $\longrightarrow$ 180°

5 $\longrightarrow$ x ? $5 \times 180 / 60 = 15°$

Les élèves de 13 ans seront représentés par un secteur de 15°

$x = 9 \times 180 / 60 = 27°$

Les élèves de 13 ans seront représentés par un secteur de 15°

$x = 9 \times 180 / 60 = 27°$

Ceux de 14 ans par un secteur de 27°

$x = 27 \times 180 / 60 = 81°$

Ceux de 15 ans par un secteur de 81°

$x = 19 \times 180 / 60 = 57°$

Enfin ceux de 16 ans par un secteur de 57°.

2/ $\bar{x} = \Sigma n_i x_i / N = (13x5+14x9+15x27+16x19) / 60 = \frac{900}{60} = 15$

L'âge moyen des élèves est de 15 ans.

PROBLEMES

1/ a) K est le symétrique de B par rapport à A. Donc les points A, K, B sont alignés. [BK] est donc diamètre du cercle (C) de centre A passant par K.
ABC est un triangle équilatéral tel que AB = 3
Donc AB = AC = BC = 3.
K symétrique de B par rapport à A, on a AK = AB. On a finalement AK = AB = AC = 3.
Le cercle (C) de centre A passant par K, passe également par C. donc le triangle BKC est inscrit dans le cercle (C) de plus son côté [BK] est diamètre de (C). On peut donc conclure que BKC est un triangle rectangle en C, car tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté est diamètre de ce cercle est un triangle rectangle.

b) D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BKC rectangle en C on a :

$$CK2 + CB2 = BK2$$
$$CK2 = BK2 - CB2$$
$$CK2 = 62 - 32$$
$$CK2 = 36 - 9 = 27 = 9 \times 3$$
$$CK = \sqrt{9x3} = 3\sqrt{3} \qquad \boxed{CK = 3\sqrt{3}}$$

2/ mes $\widehat{AKC}$ = mes $\widehat{BKC}$

$$\cos BKC = \frac{CK}{BK} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos \widehat{BKC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc mes BKC = 30° = mes $\widehat{AKC}$ on peut donc dire que mes $\widehat{AKC}$ = 30°

3/ L est le symétrique du point C par rapport à la droite (AB). On a donc (AB) $\perp$ (CL)
H est le point d'intersection des droites (CL) et (AB) donc CH = HL
H est milieu de [CL]. (AB) est donc perpendiculaire à [CL] en son milieu. On dit que (AB) est la médiatrice du segment [CL]. Tout point situé sur la médiatrice d'un segment étant équidistant des sommets de ce segment, on peut donc dire que :
BC = BL et AC = AL or ABC étant un triangle équilatéral, on a donc
BC = AC, on a finalement BL = BC = AC = AL. Le quadrilatère BLAC a donc ses 4 côtés qui sont de même mesure et ses diagonales [AB] et [CL] qui sont perpendiculaires, on peut donc affirmer que le quadrilatère BLAC est un losange.

4/ KH = KA + 1/2 AB $\qquad$ KB = 6
= 3 + 3/2 = 9/2 $\qquad$ KC = $3\sqrt{3}$

a)

$$\left.\begin{array}{l} KH / KB = \dfrac{9/2}{6} = 3/4 \\[2ex] KN / KC = [(9\sqrt{3})/4] / 3\sqrt{3} = \dfrac{3 \times 3\sqrt{3}}{4 \times 3\sqrt{3}} = 3/4 \end{array}\right\} KH / KB = KN / KC = 3/4$$

Dans le triangle BKC avec H∈ (BK) et N∈ (CK) on a $\frac{KH}{KB} = \frac{KN}{KC}$ on peut donc dire d'après la réciproque de la propriété de Thalès, que les droites (BC) et (NH) sont parallèles.