CORRECTION IO 2006 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Expérience 1

1/ $P(A) = C_4^1 \times C_2^1 / C_9^1 \times C_7^1 = \frac{4 \times 3}{9 \times 7} = \frac{4 \times 3}{3 \times 3 \times 7} = \frac{4}{21}$

La probabilité de l'évènement A est donc $P(A) = \frac{4}{21}$

2/ a) Si les billes tirées sont de même couleurs, c'est qu'on ne pourra avoir que soit 2 billes rouges, soit 2 billes vertes. Il sera impossible d'avoir deux billes bleues ou deux billes blanches car elles ne sont que d'un côté (une seule poche).

$P(B) = C_2^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^1 / C_9^1 \times C_7^1 = \frac{2 \times 2 + 4 \times 3}{9 \times 7} = (4+12)/63 = \frac{16}{63}$

$P(B) = \frac{16}{63}$

b) Déduisons-en la probabilité de l'évènement C.

Les évènements B et C sont des évènements contraires donc on a :

$P(C) + P(B) = 1$

$P(C) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{16}{63} = \frac{63-16}{63} = \frac{47}{63}$

$\boxed{P(C) = \frac{47}{63}}$

Expérience 2

1/ $P(B) = (C_2^2 + C_3^2 + C_4^2) / C_9^2 = \frac{1+3+6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$\boxed{P(B) = \frac{5}{18}}$

2/ Probabilité de l'évènement C

$P(C) = C_2^1 x C_3^1 + C_2^1 x C_4^1 + C_3^1 x C_4^1 / C_9^2 = \frac{6+8+12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

$\boxed{P(C) = \frac{13}{18}}$

Expérience 2

1/ $P(B) = (C_2^2+C_3^2+C_4^2) / C_9^2 = \frac{1+3+6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$\boxed{P(B) = \frac{5}{18}}$

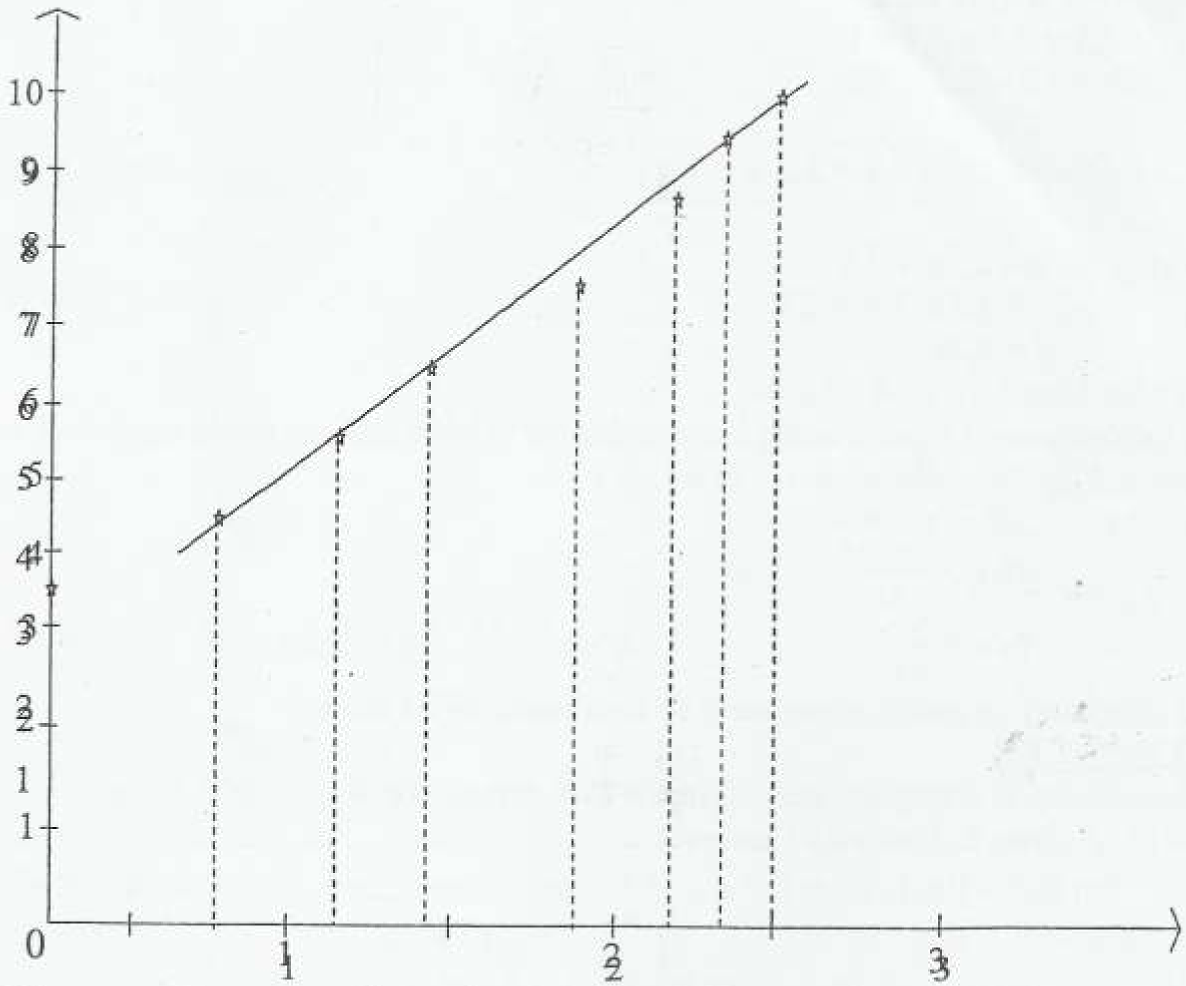
2/ Probabilité de l'évènement C

$P(C) = C_2^1 x C_3^1 + C_2^1 x C_4^1 + C_3^1 x C_4^1 / C_9^2 = \frac{6+8+12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

$\boxed{P(C) = \frac{13}{18}}$

EXERCICE 2

1/



2/ On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i, de coordonnées (x_i, y_i), le point G de coordonnées $(x_G ; y_G)$ telle que : $x_G = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ et $y_G = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$.

$x_G = (0 + 0{,}7 + 1{,}1 + 1{,}4 + 1{,}8 + 2{,}2 + 2{,}3 + 2{,}5) / 8 = 1{,}5$

$y_G = \frac{3.6+4.3+5.2+5.7+6.6+7.8+8.2+8.6}{8} = 6{,}25$

on a donc G(1,5 ; 6,25)

3/ a) Calcul des coordonnées (x_1, y_1) de G_1

$x_1 = \frac{0+0.7+1.1+1.4}{4} = 0{,}8$

$y_1 = \frac{3.6+4.3+5.2+5.7}{4} = 4{,}7$

On a G_1 (0,8 ; 4,7)

Calcul des coordonnées (x_2, y_2) de G_2

$x_2 = \frac{1.8+2.2+2.3+2.5}{4} = 2{,}2$

$y_2 = \frac{6.6+7.8+8.2+8.6}{4} = 7{,}8$

On a G_2 (2,2 ; 7,8)

Les points moyens partiels G_1 et G_2 des deux nuages partiels E_1 et E_2 sont G_1 (0,8 ; 4,7) et G_2 (2,2 ; 7,8).

b) justifions qu'une équation de la droite (D), droite d'ajustement linéaire de y en x par la méthode de mayer est : $y = 2{,}2x + 2{,}9$ soit (D) : $y = ax + b$. (D) passant par G_1 et G_2, déterminons une équation de (D).

Déterminons le coefficient directeur, a, de (D) :

$$a = (y_{G2} - y_{G1}) / (x_{G2} - x_{G1}) = \frac{7.8-4.7}{2.2-0.8} = \frac{3.1}{1.4} \simeq 2{,}2$$

On a donc (D) : $y = 2{,}2x + b$

Déterminons b. G_2 (2,2 ; 7,8) étant un point de (D), ses coordonnées doivent donc vérifier l'équation de (D), on a :

$$7{,}8 = 2{,}2 \times 2{,}2 + b$$
$$b = 7{,}8 - 2{,}2 \times 2{,}2$$
$$b \simeq 2{,}9$$

on a finalement (D) : $\boxed{\mathbf{y = 2{,}2\ x + 2{,}9}}$

4/ a) (D) : $y = 2{,}2x + 2{,}9$

$$= 2{,}2 \times 2{,}9 + 2{,}9$$
$$y = 9{,}28$$

Le bébé aura 9,28 kg à 18 mois

b) Déterminons l'âge en mois, à partir duquel le bébé aura un poids supérieur à 10kg.

Soit ,a, l'âge en mois, avec $x = \ln a$, on a :

$$y = 2{,}2 \ln a + 2{,}9 > 10$$
$$\ln a > \frac{10-2{,}9}{2{,}2}$$
$$\ln a > \frac{7{,}1}{2{,}2} \qquad a > e^{7{,}1/2{,}2} \qquad a > 25{,}21$$

Le bébé aura un poids supérieur à 10 kg à partir de 25 mois.

EXERCICE 3

Considérons la fonction f dérivable sur R et définie par $f(x) = -2x + 1 + e^x$

1/ a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x + 1 + e^x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \to -\infty} (-2x + 1) = +\infty, \text{ et } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

b) Ecrivons $f(x)$ sous la forme : $f(x) = x\left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{ex}{x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{ex}{x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x}\right) = -2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ex}{x} = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{ex}{x}\right) = +\infty$$

2/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x + 1 + e^x) - (-2x+1)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

3/ La position relative de (C) par rapport à (Δ).

$f(x) - (-2x+1) = e^x > 0$ donc (C) est toujours au-dessus de (Δ).

4/ a) $f(x) = -2x + 1 + e^x$

$f'(x) = -2 + e^x$

b) Les variations de f

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + e^x = 0$
$e^x = 2$
$x = \ell n2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 + e^x > 0$
$e^x > 2$
$x > \ell n2$ f croissante

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 + e^x < 0$
$e^x < 2$
$x < \ell n2$ f décroissante

c) Tableau de variation

x	$-\infty$		$\ell n2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$3 - 2\ell n2$	↗	$+\infty$

$f(\ell n2) = -2\ell n2 + 1 + e^{\ell n2}$
$= -2\ell n2 + 1 + 2$
$= 3 - 2\ell n2$

5/ a) L'équation d'une tangente à la courbe (C) un point d'abscisse x_0 est :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- La tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = -2 + e^0 = -1$

$f(0) = -2 \times 0 + 1 + e^0 = 2$

on a donc (D) : $y = -1(x) + 2$

$\boxed{(D) : y = -x + 2}$

- La tangente au point d'abscisse $x_0 = 2\ell n2$ a pour équation :

$y = f'(2\ell n2)(x - 2\ell n2) + f(2\ell n2)$

$f'(2\ell n2) = -2 + e^{2\ell n2}$

$= -2 + e^{\ell n4} = -2 + 4 = 2$

$f'(2\ell n2) = 2$

$f(2\ell n2) = -2(2\ell n2) + 1 + e^{2\ell n2}$

$= -4\ell n2 + 1 + 4 = 5 - 4\ell n2$

$f(2\ell n2) = 5 - 4\ell n2$

on a donc (L) : $y = 2(x - 2\ell n2) + 5 - 4\ell n2 = 2x - 4\ell n2 + 5 - 4\ell n2$.

$\boxed{(L) : y = 2x - 8\ell n2 + 5}$