

CORRECTION IO 2007 MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Soit (E) : $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

1/ Vérifions si $-\ln 2$ et $\ln 3$ sont solutions de l'équation (E)

$$\begin{aligned} E(-\ln 2) &= e^{2x(-\ln 2)} + 2 \cdot e^{-\ln 2} - 15 \\ &= e^{2x \ln 1/2} + 2 \cdot e^{\ln 1/2} - 15 \\ &= e^{\ln 1/4} + 2 \cdot e^{\ln 1/2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 15 \\ &= \frac{1}{4} - 14 = \frac{1}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{55}{4} \neq 0 \text{ donc } -\ln 2 \end{aligned}$$

n'est pas solution de (E).

$$\begin{aligned} E(\ln 3) &= e^{2\ln 3} + 2 \cdot e^{\ln 3} - 15 \\ &= e^{\ln 9} + 2 \cdot e^{\ln 3} - 15 \\ &= 9 + 2 \times 3 - 15 \\ &= 9 + 6 - 15 = 0 \text{ donc } \ln 3 \text{ est solution de (E).} \end{aligned}$$

2/ Résolvons l'équation (E).

Soit $X = e^x$

$$E(X) : X^2 + 2X - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - [4 \times (-15)] = 64$$

$$X_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{-2-8}{2} = -5$$

$$X_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{-2+8}{2} = 3$$

Déterminons les valeurs de x en fonction des valeurs de X

$$X = e^x = -5$$

$e^x = -5$ impossible

$$X = e^x = 3$$

$$e^x = e^{\ln 3}$$

$x = \ln 3$ on a donc $S_R = \{ \ln 3 \}$

EXERCICE 2

1/ a) Le crédit de consommation de Mlle Badou au début du 1^{er} mois

$$C = 5000 \text{ F} + 18\,000 \text{ F}$$

$$= 23\,000 \text{ F}$$

b) Justifions que le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 2^{ème} mois est égal à 20300F.

$$C = 23\,000 \times 10\% + 18\,000$$

$$= 23000 \times 10 / 100 + 18\,000 = 2300 + 18\,000 = 20\,300 \text{ F}$$

On a donc $C = 20\,300 \text{ F}$

2/ Le crédit de consommation dont dispose Mlle Badou au début du 3^{ème} mois.

$$C = 20\,300 \times 10\% + 18\,000$$

$$= 2\,030 + 18\,000$$

$$= 20\,030 \text{ F}$$

3/ a) Précisons les valeurs de U_1, U_2, U_3

$$U_1 = 23\,000 \text{ F} \quad U_2 = 20\,300 \text{ F} \quad U_3 = 20\,030 \text{ F}$$

b) $U_4 = U_3 \times 10\% + 18\,000$

$$= 0,1 U_3 + 18\,000 = 0,1 \times 20\,030 + 18\,000 = 2003 + 18\,000 = 20\,003$$

$$U_4 = 20\,003$$

c) $U_2 = 0,1 U_1 + 18.000$ $U_3 = 0,1 U_2 + 18.000$

$U_4 = 0,1 U_3 + 18.000$ on peut donc conclure que pour tout nombre entier naturel non nul n , on a : $U_{n+1} = (0,1) U_n + 18.000$

4/ Pour tout entier naturel non nul n , on pose $V_n = U_n - 20.000$

a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et précisons le premier terme.

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 20.000$$

$$= (0,1) U_n + 18.000 - 20.000$$

$$V_{n+1} = (0,1) U_n - 2.000$$

$$V_{n+1} = (0,1) U_n - 2.000 \text{ et } V_n = U_n - 20.000 \text{ on remarque que}$$

$$V_{n+1} = 0,1 V_n \text{ on peut donc conclure que la suite } V_n \text{ est une suite géométrique de raison } 0,1.$$

Précisons le premier terme :

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$V_1 = U_1 - 20.000$$

$$V_1 = 23.000 - 20.000 = 3.000$$

V_n est donc une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $V_1 = 3.000$

b) Exprimons V_n en fonction de n .

La suite géométrique V_n de raison $q = 0,1$ et de premier terme $V_1 = 3.000$ est définie par : $q^{n-1} \cdot V_1$

$$V_n = (0,1)^{n-1} \cdot 3.000 \quad \boxed{V_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1}}$$

c) Déduisons-en U_n en fonction de n .

$$V_n = U_n - 20.000$$

$$U_n = V_n + 20.000$$

$$\boxed{U_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000}$$

d) Justifions que le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 F.

Le crédit de consommation de Mlle Badou est représenté ici par U_n . Vérifions donc si U_n est toujours supérieur à 20.000

$$U_n = 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000$$

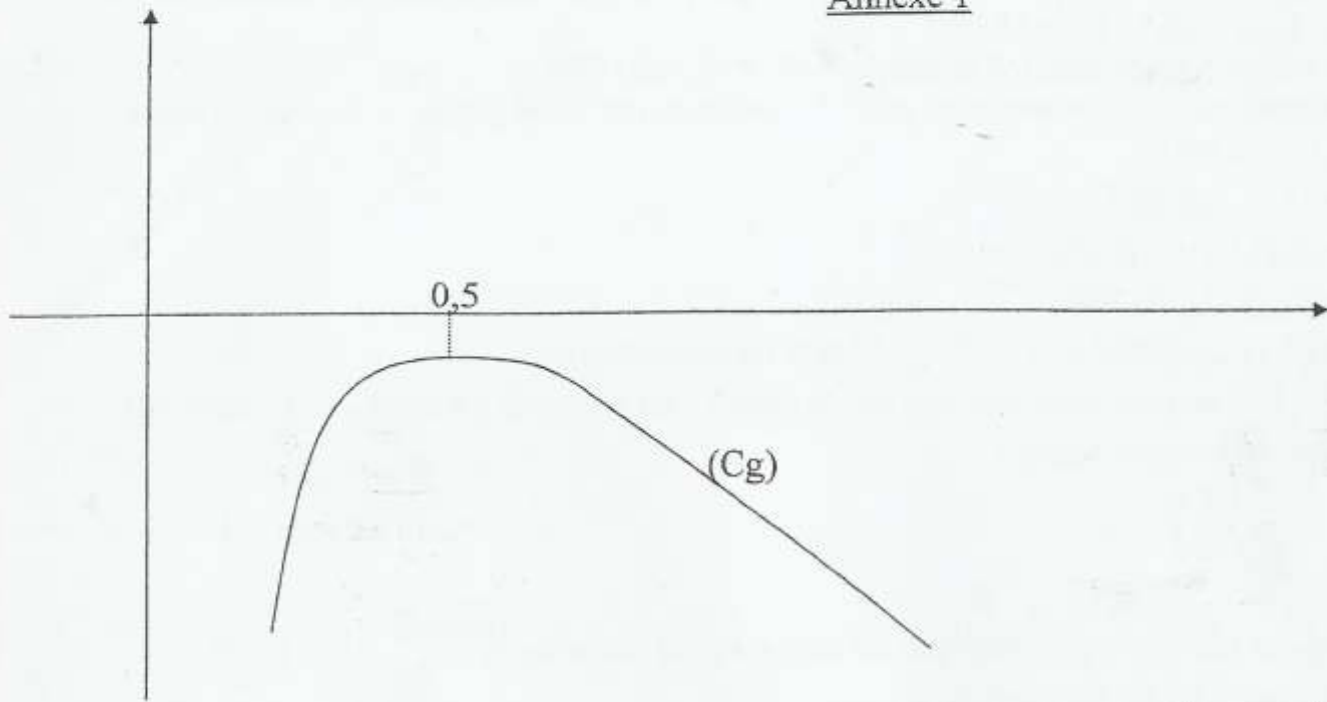
$$(0,1)^{n-1} > 0 \text{ donc } 3.000 \cdot (0,1)^{n-1} > 0$$

$$3.000 \cdot (0,1)^{n-1} + 20.000 > 20.000$$

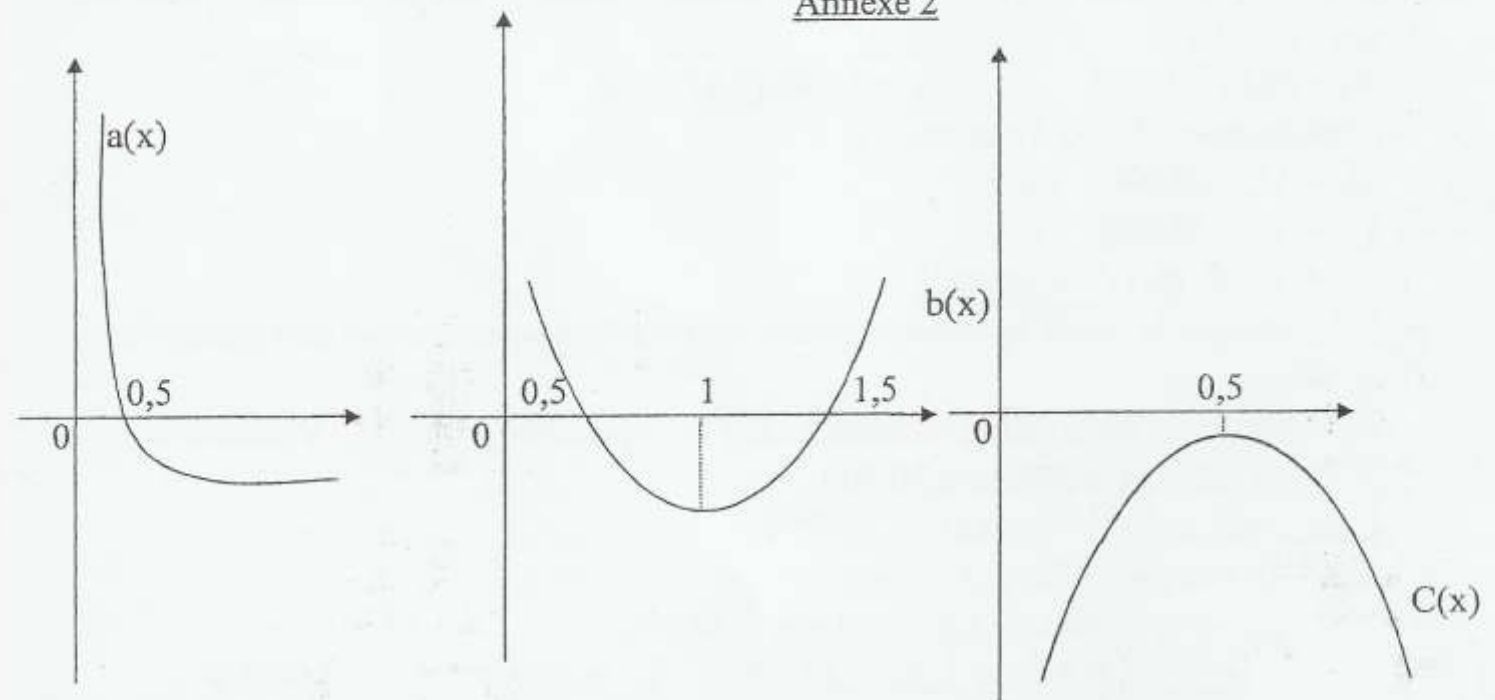
On a donc $\boxed{U_n > 20.000}$. Le crédit de consommation de Mlle Badou reste toujours supérieur à 20.000 F.

EXERCICE 3

Annexe 1



Annexe 2



PARTIE A

tableau de variation de $g(x)$

1/

x	0	0,5	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$g(0,5)$	

2/

a /

α	0	0,5	$+\infty$
$a(\alpha)$		+	-

α	0	0,5	1,5	$+\infty$		
$b(\alpha)$		+	0	-	0	+

α	0	$+\infty$
$c(\alpha)$		-

b/ C'est $a(x)$ qui coïncide avec g' sur l'intervalle $]0; +\infty[$ car $a(x)$ s'annule pour l'unique valeur $x = 0,5$

PARTIE B

Considérons la fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et définie par : $f(x) = \frac{1-2x}{x}$

1/ Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est une asymptote à (ε) .

$$f(x) = \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x} = \frac{1}{x} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$$

$$x \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à (ε) en $+\infty$ ou $-\infty$

2/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ graphiquement cela traduit que la droite d'équation $x = 0$

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow 0 & x \rightarrow 0 \\ x > 0 & x > 0 \end{array}$$

est asymptote verticale à (ε) en $+\infty$

3/ Démontrons que le point $A(0 ; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (ε) .

Pour le faire démontrons que la fonction $g(x) = f(x+\alpha) - b$ dont la représentation graphique est l'image de (ε) par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est impaire.

Avec $A(\alpha ; b)$ dans notre cas, $A(0 ; -2)$.

$$g(x) = f(x + \alpha) - b$$

$$= f(x+0) + 2$$

$$= f(x) + 2$$

$$= \frac{1-2x}{x} + 2$$

$$= \frac{1-2x+2x}{x}$$

$$g(x) = 1/x$$

Montrons que $g(x)$ est impaire.

$$g(-x) = 1/(-x) = -1/x = -g(x)$$

$g(-x) = -g(x)$ la fonction $g(x)$ est donc impaire. On peut donc dire que le point

$A(0 ; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe (ε) .

4/ On donne $g(x) = -2x + 1 + \ln x$

Démontrons que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $g'(x) = f(x)$.

$$g'(x) = -2 + 1/x = \frac{1-2x}{x} = f(x).$$

5/

