CORRECTION IO SESSION 2013
MATHEMATIQUES

EXERCICE I

1) Démontrons que $\forall X \in IR$, $(x-1)(x-100)(x+80)=x^3-21x^2-7980x+8000$

$(x-1)(x-100)(x+80)=(x-1)(x-100)(x+80)$

$=x^3-21x^2-7980x+8000$

$=(x^2-100x-x+100)(x+80)$

$=x^3-100x^2-x^2+100x+80x^2-8000x-80x+8000$

$=x^3-101x^2+80x^2+100x-8080x+8000$

$$\boxed{(x-1)(x-100)(x+80)=x^3-21x^2-7980x+8000}$$

2) Résolvons

a) $x \in IR$

$(lnx)^3-21(lnx)^2-79080lnx+8000=0$

Posons : $X=\ln x$

$X^3-21X^2-7980X+8000=0$

$(X-1)(X-100)(X+80)=0$

$X-1=0$ ou $X-100=0$ ou $X+80=0$

$X=1$ ou $X=100$ ou $X=-80$

On a $X=\ln x$ alors $\ln x=1$ ou $\ln x=100$ ou $\ln x=80$

$X=e$ ou $x=e^{100}$ ou $x=e^{-80}$

$$\boxed{S_{IR}=\{e^{-80}\,;\,e\,;e^{100}\}}$$

b) $2lnx+\ln(x-21)=\ln(7980x-8000)$

$(lnx)^2+\ln(x-21)=\ln(7980x-8000)$

$\ln[x^2(x-21)]=\ln(7980x-8000)$

$x^2(x-21)=7980x-8000$

$x^3-21x^2=7980x-8000$

$x^3-21x^2-7980x+8000=0$

$$\boxed{S_{IR}=\{1\,;\,100\,;-80\}}$$

EXERCICE II

1) Justifions que le nombre d'équipe qu'il peut former est égal à 15504

Sélectionner 5 athlètes revient à faire une combinaison, d'où

$$C_{20}^{5}=15504$$

2) a) la probabilité de (A)

$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(U)}$

$P(A)=\frac{C_7^5+C_{13}^5}{\text{Card(U)}}=\frac{C_7^3+C_{13}^5}{15504}$

$P(B)=\frac{C_{12}^5}{15504}$

c) $P(C)=\frac{C_8^2 x C_{12}^3}{15504}$

Démontrons que P(C)=$\frac{5}{38}$

P(C)=$\frac{C_3^3 x C_5^2+C_3^2+C_5^3}{15504}$

D'où $\boxed{P(C)=\frac{5}{38}}$

EXERCICE III

On considère $f\epsilon]0;+\infty[$ par $f(x)=3-2x+lnx$

1) a) Déterminer de $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty}$

Interprétation graphique : la droite (D) d'équation $x=0$ admet une asymptote horizontale

2) $f(x)=x(\frac{3}{x}-2-\frac{lnx}{x})$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3-2x+lnx)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ car} \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}-2 \\ \lim_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

3) a) justifions que $\forall x\in IR^{+}, f'(x)=\frac{1-2x}{x}$

$f'(x)=(x-2x+lnx)'$

$f'(x)=-2+\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{1-2x}{x}$

b) Etudions les variations de $f'(x)$

x>0 donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2x$

$f'(x)=0\Rightarrow 1-2x=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Si $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow 1-2x=0$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$

$\forall x\in]0;1/2[, f'(x)>0\Rightarrow f$ est strictement croissante sur$]0;1/2[$

$\forall x\in]\frac{1}{2};+\infty[, f'(x)<0\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur$]1/2;+\infty[$

$\forall x=\frac{1}{2}, f'(x)=0$ donc f est constante.

Tableau de signe

x	0		1/2		+∞
$f'(x)$		+	0	—	

c)Tableau de variation

x	0		½		+∞
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$	$-\infty$	↗	(2ln2)	↘	$-\infty$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - ln2$

d) démontrons que *f(x)* admet une solution unique $\alpha \in [1;2]$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(3 - 2x + lnx)$

$\lim_{x\to1} f(x) = 1$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(3 - 2x + lnx)$

$= 1 + lnx$

$\lim_{x\to2} f(x) = ln2 - 1$

4) Représentation graphique