

CONCOURS IO SESSION 2013 MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

- 1) Démontrer que, pour tout les nombres réel x , $(x-1)(x-100)(x+80) = x^3 - 21x^2 - 7980x + 8000$.
- 2) Résoudre chacune des équations suivantes :
 - a) $(E_1) : x \in \mathbb{R}, (\ln x)^3 - 21(\ln x)^2 - 7980 \ln x + 8000 = 0$;
 - b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}, 2 \ln x + \ln(x-21) = \ln(7980x - 8000)$.

EXERCICE 2

Au terme d'une compétition interne, l'entraîneur du club de Judo a sélectionné :

- 7 filles dont 3 cadettes et 3 juniors ;
- 13 garçons dont 5 cadets et 8 juniors.

L'entraîneur choisit ensuite au hasard parmi ces sélectionnés 5 athlètes pour former une équipe devant participer à une compétition nationale.

- 1) Justifier que le nombre d'équipe qu'il peut former est égal à 15504.

Dans toute la suite on présentera chaque résultat sous forme de fraction.

- 2) a) calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « l'équipe est formée d'athlètes de même sexe » ;

B : « l'équipe ne comporte que des juniors ».

- b) On considère l'événement :

C : « L'équipe comporte exactement deux cadettes ».

Démontrer que la probabilité de C est égale à $\frac{5}{38}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x + \ln x$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe de représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

L'unité graphique est 2cm.

- 1) a) déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
b) Interpréter le résultat graphique.
- 2) En remarquant que $f(x) = x(\frac{3}{x} - 2 + \frac{\ln x}{x})$, déterminer la limite de f en $+\infty$
- 3) a) Justifier que pour tout nombre réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{1-2x}{x}$
b) Etudier les variations de f .
d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle

$[1; 2]$.

- 4) Tracer $(\mathcal{C})$. (On prendra $\alpha = 1,7$)

On donne le tableau de valeur ci-dessus :

x	0,05	0,06	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	3	4
f(x)	-0,1	0,1	0,5	1	1,3	1	0,4	-0,3	-1,9	-3,6