ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Pour l'écrivain français Paul Valéry *« Tout état social exige des fictions »*. Selon vous, une société a-t-elle besoin de fictions, de rêves, d'utopies ?

Sujet n° 2

Léopold Sédar Senghor, poète et homme d'état sénégalais a dit : *« La francophonie, c'est cet humanisme intégral qui se tisse autour de la terre »*. Qu'en pensez-vous ?

Sujet n° 3

Emmanuel Macron, président de la République française affirme : *« Je n'aime pas le terme (de pénibilité) car il induit que le travail est une douleur »*. Pensez-vous que le travail est nécessairement une douleur ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque. Le problème comporte trois parties, qu'il est recommandé de traiter dans l'ordre proposé.
Dans toute l'épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels et R l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Déterminer au moins un entier naturel x, strictement supérieur à 1, tel que le nombre entier $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.
Même question, pour que n soit divisible par 7.

Exercice n° 2

Déterminer le polynôme P de degré 2, à coefficients entiers naturels, tel que pour tout $x \in N$, on a l'égalité :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [P(x)]^2$$

Problème

Ln désigne le symbole des logarithmes népériens ; le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue.
On donne e = 2,718 et 1/e = 0,368.

Partie A

Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans R définie par : $x \rightarrow g(x) = x \operatorname{Ln}x$.
A1) Etudier précisément les variations de g.
A2) Donner une primitive G de g.

Partie B

Soit f l'application de $R^{+*} =]0, +\infty[$ dans R^+ définie par : $x \rightarrow f(x) = |x \operatorname{Ln}x|$.

B1) Calculer la limite de f quand x tend vers 0_+. On prolongera f sur R^+ par la valeur ainsi trouvée.

B2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f ; on étudiera particulièrement les points $x = 0_+$ et $x = 1$.

B3) Etudier très précisément les variations de f et tracer son tableau de variations.

B4) Montrer qu'existent deux points a et b appartenant à l'intervalle $]1, e[$ vérifiant :
$f(a) = 1/e$ et $f(b) = 1$.
Donner les valeurs approchées de a et b à 0,01 près.

B5) Etudier le signe de $v(x) = f(x) - x$.

B6) Tracer le plus précisément possible la courbe C représentant f dans un repère orthonormé.

Partie C

u(0) étant un réel positif ou nul, on considère la suite à termes positifs ou nuls $\{u(n)\}$, $n \geq 0$, définie par u(0) et $u(n+1) = f(u(n))$.

C1) Déterminer les valeurs de u(0) pour lesquelles la suite u(n) est constante.

C2) Dans cette question, on considère que $0 < u(0) < 1/e$.

2a – Montrer que $0 < u(n) < 1/e$ pour tout $n \in N$.
2b – Montrer que la suite u(n) est croissante.
2c – La suite u(n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

C3) Dans cette question, on considère que $1/e < u(0) < 1$.

3a – Montrer que $0 < u(1) < 1/e$.

3b – La suite u(n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

C4) Dans cette question, on considère que $u(0) > e$.

4a – Montrer que la suite u(n) est croissante.

Nous allons montrer par deux approches différentes que la suite {u(n)} est divergente.

4b – Première approche : en raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u(n) = +\infty$.

4c – Deuxième approche :

- Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a $f'(x) \geq 2$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$
- En déduire que $u(n+1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))(2^{n+1} - 1)$
- Retrouver le résultat de la question 4b.

C5) Dans cette question, on considère que $1 < u(0) < e$.

5a – Supposons qu'il existe un entier n^* tel que $u(n^*) = b$ (b a été défini à la Partie B, question 4).

Quelle est alors la nature de la suite {u(n)} ?

5b – On suppose maintenant que $u(n) \neq b$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un entier $n°$ tel que $u(n°) < b$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Etudier alors la convergence de la suite u(n).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Dans un document intitulé « *Les infrastructures à l'horizon 2030* », l'OCDE note que « Les réseaux d'infrastructure jouent un rôle vital dans le développement économique et social. De plus en plus interdépendants, ils constituent un moyen d'assurer la fourniture et la prestation de biens et de services qui concourent à la prospérité et à la croissance économique et contribuent à la qualité de vie. La demande d'infrastructure est appelée à sensiblement augmenter dans les décennies à venir, sous l'impulsion de facteurs majeurs de changement comme la croissance économique mondiale, le progrès technologique, le changement climatique, l'urbanisation et l'intensification de la congestion. Toutefois, les défis à relever sont multiples (…) ».

Après avoir rappelé les théories relatives à la croissance, vous préciserez le rôle des infrastructures et les défis auxquels sont confrontées les nations à différents niveaux de croissance pour en assurer la pérennité et le développement.

Sujet 2

Le monde du travail est en mutation, sous l'effet de la numérisation de l'économie et du changement technologique global. Ces processus, associés à la mondialisation et les changements dans l'organisation du travail vont façonner le monde du travail et poseront des défis inédits aux politiques publiques.

Après avoir rappelé les différentes théories permettant d'expliciter les dysfonctionnements du marché du travail, vous présenterez les principaux dilemmes des politiques de l'emploi.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de sept exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit la fonction f de R dans R définie par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice n° 2

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $C = A^3 - A$

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice n° 3

Pour tout n entier naturel strictement positif, on définit la somme S(n) par :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1) z désigne le nombre complexe $z = \cos(\pi/n) + i.\sin(\pi/n)$.

On considère la somme $Z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$

Ecrire Z(n) en fonction de z et n sous forme de fraction rationnelle.

2) En déduire l'expression de S(n) en fonction de $\tan(\pi/2n)$.

3) Déterminer la limite de S(n)/n quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 4

On considère la fonction $f : R \to R^+$, définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = ke^{-ax}$, pour $x \geq 0$, où a est un paramètre réel strictement positif et k une constante à déterminer.

1) Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité sur R^+.

2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet pour densité la fonction déterminée à la question 1.

Donner la fonction de répartition F de X.

3) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de X.

4) Soient deux réels positifs u et v tels que $v > u$.

Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > v / X > u)$.

Exercice n° 5

On considère la suite {u(n)}, $n \in N$, définie par :

$u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u(n+1) = 7u(n) + 8u(n-1)$

1) Pout tout $n \in N$, on définit la suite $s(n) = u(n) + u(n+1)$.

Déterminer la nature de la suite $\{s(n)\}$.

Donner l'expression générale de $s(n)$ en fonction de n.

Que vaut la limite de $s(n)$ quand $n \to +\infty$?

2) On pose $v(n) = (-1)^n u(n)$, et on définit la suite $\{t(n)\}$, $n \in N$, par :

$t(n) = v(n+1) - v(n)$

Exprimer $t(n)$ en fonction de $s(n)$.

3) Donner les expressions de $v(n)$ et $u(n)$ en fonction de n.

4) Que vaut la limite de $u(n)/s(n)$ quand $n \to +\infty$?

Exercice n° 6

Pour tout entier naturel n, on note par F(n) l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle, infiniment dérivables, vérifiant la relation suivante pour tout x réel :

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0$$

1) Montrer que, $\forall n \in N$, $F(n)$ n'est pas vide.

2) Soit la fonction $f_0(x) = e^{x/2}$

Montrer que $f_0 \in F(0)$.

3) Soit une fonction f_n appartenant à $F(n)$.

On définit la fonction f_{n+1} par : $f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$

3a – Etablir la relation :

$f_{n+1}'(x) = - x\, f_n(x)/2$

3b – Montrer que $f_{n+1} \in F(n+1)$.

(deux questions indépendantes)

1) On rappelle que le polynôme réel B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ.

Soit le polynôme A défini sur R, à coefficients réels, par : $A(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$

A quelles conditions sur les paramètres a, b et c le polynôme A est-il divisible par le polynôme B défini par $B(x) = x^2 + x + 1$?

2) Déterminer la valeur du réel v telle que le polynôme $P(x) = (x + 1)^7 - x^7 - v$ admet une racine réelle multiple.

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème (en trois parties) indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Déterminer au moins un entier naturel x strictement supérieur à 1, tel que le nombre entier $n = x^2 + x - 2$ soit divisible par 3.
Même question, pour que n soit divisible par 7.

Divisibilité par 3 :
$x^2 + x - 2 = 3q$, q entier
$\Delta = 9 + 12q$
$x = [(9 + 12q)^{1/2} - 1]/2$
9 + 12q doit être un carré parfait et x un nombre entier.
Pour q = 1 à 5, échec
q = 6 donne $\Delta = 81 = 9^2$ et x = 4

Divisibilité par 7 :
$x^2 + x - 2 = 7q$, q entier
$\Delta = 9 + 28q$
$x = [(9 + 28q)^{1/2} - 1]/2$
9 + 28q doit être un carré parfait et x un nombre entier.
Pour q = 1 à 3, échec
q = 4 donne $\Delta = 121 = 11^2$ et x = 5

Exercice 2

Déterminer le polynôme P de degré 2, à coefficients entiers naturels, tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = [P(x)]^2$$

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$
On peut remarquer que $P(0)=1=c$
En développant les deux termes, on trouve :
$a^2 = 1$
$2ab = 6$ ie $ab = 3$
$b^2 + 2ac = 11$
$2bc = 6$ ie $bc = 3$
$c^2 = 1$

On en déduit :
Pour $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$
Et pour $a = -1$, $b = -3$, $c = -1$

$P(x) = x^2 + 3x + 1$ ou $P(x) = -x^2 - 3x - 1$
La deuxième solution n'est pas admissible puisque P doit être car à coefficients entiers naturels).
Donc $P(x) = x^2 + 3x + 1$

Problème
Ln désigne le symbole des logarithmes népériens ; le symbole | | désigne la valeur absolue.
On donne e = 2,718 et 1/e = 0,368.

Partie A

Soit g l'application de]0, + ∞ [dans R définie par : $x \to g(x) = x \text{ Ln}x$.
A1) Etudier précisément les variations de g.

Lim $g(x) = 0$ qd $x \to 0$
Lim $g(x) = +\infty$ qd x tend vers $+\infty$
Branche parabolique

Pente en 0 : $(g(x) - 0)/(x - 0) = \text{Ln}x \to -\infty$ qd $x \to 0$
$g'(x) = 1 + \text{Ln}x$
S'annule en $x = 1/e$; $g(1/e) = -1/e$
Pente en 1/e : 0
$g''(x) = 1/x > 0$ et g est convexe
On remarque que $g(1) = 0$ et $g(e) = e$ (intersection avec la bissectrice).

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
f'		$-$	0		$+$		
f	0	$\searrow$	$-0,368$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A2) Donner une primitive G de g.

$G(x) = (x^2 \text{Ln}x)/2 - x^2/4 + \text{constante} = x^2(2\text{Ln}x - 1)/4 + C$

Partie B

Soit f l'application de $R^{+*} =]0, +\infty[$ dans R^+ définie par : $x \to f(x) = |x \text{ Ln}x| = |g(x)|$.

B1) Calculer la limite de f quand x tend vers 0_+. On prolongera f sur R^+ par la valeur ainsi trouvée.
Lim $f(x) = 0$ qd $x \to 0$
On peut donc prolonger f en 0 par $f(0) = 0$ et $f(x) = |x \text{ Ln}x|$ pour x strictement positif.

B2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f ; on étudiera particulièrement les points $x = 0_+$ et $x = 1$.
Continuité :
Les fonctions $g(x) = x\text{Ln}x$ est continue, ainsi que la fonction « valeur absolue ».
Donc f est continue en tout point $x > 0$.
Par la prolongation de la question 1, f est continue sur R^+.

Dérivabilité :
En tout point différent de 1, pas de problème. Etude en 1.
$x < 1$ $f(x) = -x\text{Ln}x$
$x \geq 1$ $f(x) = x\text{Ln}x$

$(f(x) - 0)/(x-1) = -x\text{Ln}x/(x-1) \to -1$ qd $x \to 1_-$

$(f(x) - 0)/(x-1) = x\text{Ln}x/(x-1) \to 1$ qd $x \to 1_+$

Le point $x = 1$ et $y = 0$ est donc un point de rebroussement ; f n'est pas dérivable en 1.

Puisqu'on a prolongé f en 0 par $f(0) = 0$, la pente en 0 est $f(x)/x = -\text{Ln}x$ donc la tangente en $x = 0$ est verticale.

B3) Etudier très précisément les variations de f et tracer son tableau de variations.
De façon évidente on a :
$x < 1$ $f(x) = - xLnx$, $f'(x) = - 1 - Lnx$
$x \geq 1$ $f(x) = xLnx$, $f'(x) = 1 + Lnx$

$f''(x) = -1/x$ ou $1/x$ selon la position par rapport à 1, donc pas de point d'inflexion.

x	0		1/e		1		e		+ ∞
f'		+	0	-	-1 | +1		+		
f	0	↗	1/e	↘	0	↗	e	↗	+ ∞

On peut remarquer que f(x)=Sup(g(x), -g(x))

B4) Montrer qu'existent deux points a et b appartenant à l'intervalle]1, e[vérifiant :
$f(a) = 1/e$ et $f(b) = 1$.
Donner les valeurs approchées de a et b à 0,01 près.

f est strictement croissante et continue de]1, e[dans]0, e[(bijection). Donc pour tout y dans]0, e[il existe un et un seul x de]1, e[vérifiant $y = f(x)$.

Or $0 < 1/e < e \Rightarrow \exists$ a tel que $f(a) = 1/e$

De même, $0 < 1 < e \Rightarrow \exists$ b tel que $f(b) = 1$

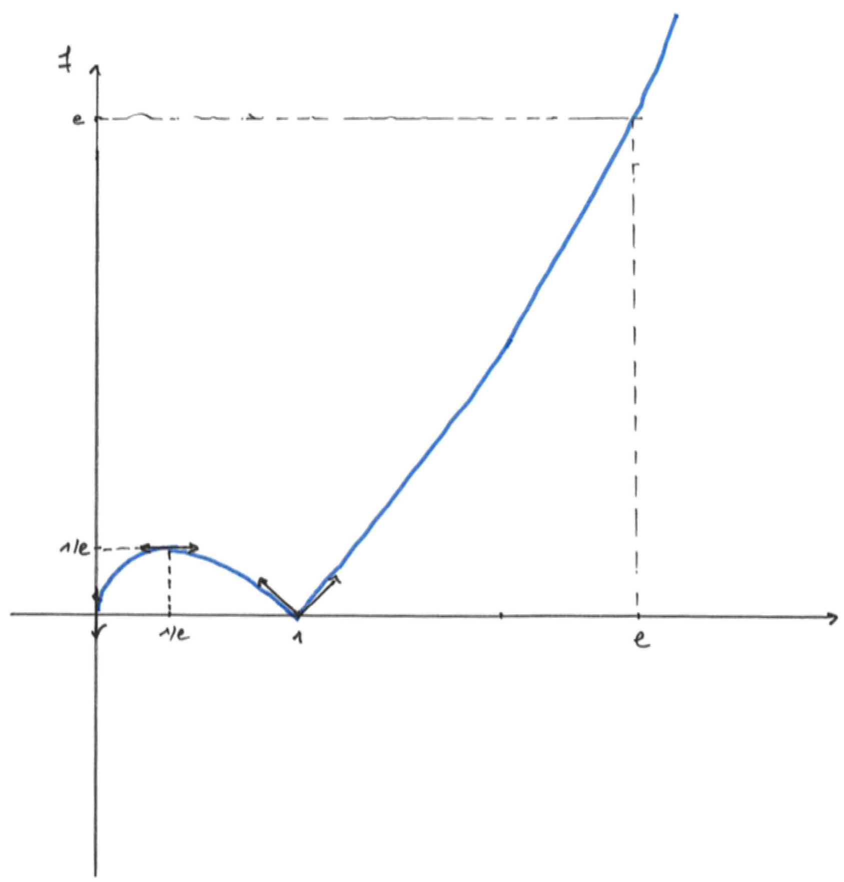
$1/e = 0,368$
$f(1,32) = 0,366$ et $f(1,33) = 0,379 \Rightarrow 1,32 < a < 1,33$

$f(1,76) = 0,995$ et $f(1,77) = 1,011 \Rightarrow 0,99 < b < 1,01$

B5) Etudier le signe de $v(x) = f(x) – x$.
$v(x) = - x(Lnx + 1)$ si $x < 1$ et $x(Lnx – 1)$ si $x \geq 1$
$v(x) = 0$ en $x = 0$, $x = 1/e$ et $x = e$

x	0		1/e		1		e		+ ∞
v		+	0	-	|	-	0	+	

B6) Tracer le plus précisément possible la courbe C représentant f dans un repère orthonormé.



Partie C

$u(0)$ étant un réel positif ou nul, on considère la suite à termes positifs ou nuls $\{u(n)\}$, $n \geq 0$, définie par $u(0)$ et $u(n+1) = f(u(n))$.

C1) Déterminer les valeurs de $u(0)$ pour lesquelles la suite $u(n)$ est constante.
Ce sont les points fixes de f, à savoir : 0, e et 1/e
Supposons $u(n)$ constante.
Alors $u(1) = u(0)$, ie $f(u(0)) = u(0)$
D'après la question B5, $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e.
Inversement, si $u(0) = 0$ ou $1/e$ ou e, $f(u(0)) = u(1) = 0$ et donc $f(u(n)) = 0\ \forall\ n$

C2) Dans cette question, on considère que $0 < u(0) < 1/e$.

2a – Montrer que $0 < u(n) < 1/e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question B3 et l'étude des variations de f, on établit que $\forall\ x \in (0, 1/e)$, $f(x)$ est aussi dans $(0, 1/e)$.
Par récurrence immédiate, on en déduit que $0 < u(n) < 1/e$.

2b – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

D'après B5, sur $(0, 1/e)$, $v(x) > 0 \Rightarrow f(u(n)) - u(n) > 0 \Rightarrow u(n+1) > u(n)$.

2c – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

La suite $u(n)$ est donc croissante et majorée par $1/e$, donc est convergente vers une limite L, telle que $L = f(L) \Rightarrow L = 1/e$.

C3) Dans cette question, on considère que $1/e < u(0) < 1$.

3a – Montrer que $0 < u(1) < 1/e$.

D'après B3, f décroit de $1/e$ à 0, et d'après B5 $v(x) < 0$.
Donc $0 < u(1) < 1/e$.
Et donc pour tout $n \geq 1$, $u(n)$ est entre 0 et $1/e$.

3b – La suite $u(n)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

D'après la question C2, à partir de $n = 1$, $u(N)$ est croissante, convergente de limite $1/e$.

C4) Dans cette question, on considère que $u(0) > e$.

4a – Montrer que la suite $u(n)$ est croissante.

$u(0) > e \Rightarrow u(1) > e$ et donc $u(n) > e$
$v(x) > 0 \Rightarrow u(n)$ croissante
Nous allons montrer par deux approches différentes que la suite $\{u(n)\}$ est divergente.

4b – Première approche : en raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u(n) = +\infty$.

Supposons que u(n) converge vers une limite notée L.
On a (puisque u(n) est croissante) : $L \geq u(0)$
Or f est continue en L, donc $L = f(L)$ c'est-à-dire que $L = 0$ ou $1/e$ ou e (B5).
Comme $L \geq u(0) > e$, c'est impossible.
$\Rightarrow$ u(n) diverge

4c – Deuxième approche :

- Montrer que, pour tout $x \geq e$, on a $f'(x) \geq 2$.

$f'(x) = \text{Ln}x + 1$; pour $x \geq e$, $\text{Ln}x \geq 1$ et donc $f'(x) \geq 2$.

- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - f(u(n-1))$
f étant continue et dérivable sur l'intervalle proposé dans cette question, d'après les accroissements finis, il existe un point c (le point c dépend de n, donc c'est un c(n)) tel que $f(u(n)) - f(u(n-1)) = (u(n) - u(n-1))f'(c)$
ie $f(u(n)) - f(u(n-1)) = u(n+1) - u(n) \geq 2(u(n) - u(n-1))$

- En déduire que $u(n+1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))(2^{n+1} - 1)$

On a de façon évidente : $u(n+1) - u(n) \geq 2^n(u(1) - u(0))$
ou $u(n+1) \geq u(n) + 2^n(u(1) - u(0))\ \forall n$
En écrivant cette inégalité jusqu'à $n = 0$, ie $u(1) \geq u(0) + (u(1) - u(0))$, et en sommant, on obtient :
$u(n+1) \geq u(0) + (2^{n+1} - 1)(u(1) - u(0))$

- Retrouver le résultat de la question 4b.

Et donc $\lim u(n+1) = +\infty$ quand $n \to +\infty$

C5) Dans cette question, on considère que $1 < u(0) < e$.

5a – Supposons qu'il existe un entier n* tel que u(n*) = b défini à la Partie B, question 4.
Quelle est alors la nature de la suite {u(n)} ?

Sur (1, e), f croît de 0 à e, et v < 0.
Soit n* tel que u(n*) = b, f(b) = 1.
u(n*+1) = f(u(n*)) = f(b) = 1
Et donc pour tout n > n*+1 (n ≥ n*+2) f(u(n)) = 0.
La suite est donc constante ou stationnaire à partir du rang n*+1, de limite 0.

5b – On suppose maintenant que $u(n) \neq b$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un entier n° tel que u(n°) < b (on pourra raisonner par l'absurde).
Etudier alors la convergence de la suite u(n).

Supposons, par exemple, que u(n) > b pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
Alors pour tout $x \in]b, e[$, $f(x) \in]1, e[$
$\Rightarrow \forall n$, $u(n) < e$ et donc $b < u(n) < e$

$u(n+1) - u(n) = f(u(n)) - u(n) < 0$ (car $v < 0$), donc $u(n)$ décroît ; comme elle minorée par b, la suite est convergente.
Sa limite L est telle que $1/e < b \leq L \leq u(0) < e$
Or $L = 0$ ou $1/e$ ou e, $\Rightarrow$ impossibilité.
Donc l'hypothèse $\forall n\ u(n) > b$ est fausse.
Il existe donc au moins un entier n° tel que $u(n) < b$.
$\forall\ x < b$, $f(x) \leq 1$.

On distingue alors 3 cas :

a) Soit $0 < u(n°+1) < 1/e$: alors $u(n)$ tend vers $1/e$ (C2)
b) Soit $u(n°+1) = 1/e$: la suite est stationnaire de limite $1/e$
c) Soit $1/e < u(n°+1) < 1$: cas C3 ; $u(n)$ converge vers $1/e$

Donc dans tous les cas, la suite converge vers $L = 1/e$

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Soit la fonction f de R dans R définie par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$

$f(x) = (4e^x – e^x – 1)/(e^x + 1) = (4e^x/(e^x + 1)) – 1$

On pose $u = e^x + 1$; $x = 0 \Rightarrow u = 2$ et $x = 1 \Rightarrow u = 1 + e$

$I = 4(\mathrm{Ln}(1+e) – \mathrm{Ln}2) – 1$

$I = 4\ \mathrm{Ln}[(1+e)/2] – 1 \sim 0,077$

Exercice 2

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $C = A^3 – A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$C = A^3 – A = 4I$, où I est la matrice identité de dimension 3.

2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

$A^3 – A = 4I = A(A^2 - I) = 4I$

$A(A^2 - I)/4 = I$

D'où : $A^{-1} = (A^2 - I)/4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Pour tout n entier naturel strictement positif, on définit la somme S(n) par :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$$

1) z désigne le nombre complexe z = cos(π/n) + i.sin(π/n).
On considère la somme $Z(n) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$
Ecrire Z(n) en fonction de z et n sous forme de fraction rationnelle.

$z = e^{i\pi/n}$
$Z(n) = (1 - z^n)/(1 - z)$

2) En déduire l'expression de S(n) en fonction de tan(π/2n).
S(n) est la partie imaginaire de Z(n).
$Z(n) = (1 - e^{i\pi})/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/(1 - e^{i\pi/n}) = 2/\ e^{i\pi/2n}\ (e^{-i\pi/2n} - e^{i\pi/2n}) = 1 + i\ /\tan(\pi/2n)$
$\Rightarrow S(n) = 1/\ \tan(\pi/2n)$

3) Déterminer la limite de S(n)/n quand n →+ ∞.
$S(n)/n = 1/\ n.\tan(\pi/2n) \sim 2/\pi$

Exercice 4

On considère la fonction f : R → R^+, définie par f(x) = 0 pour x < 0 et $f(x) = ke^{-ax}$, pour x ≥ 0, où a est un paramètre réel strictement positif et k une constante à déterminer.
1) Trouver la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité sur R^+.
En écrivant que l'intégrale de f sur R vaut 1, on trouve k = a
$f(x) = ae^{-ax}$ pour x > 0
2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité admet pour densité la fonction déterminée à la question 1.
Donner la fonction de répartition F de X.
F(x) = P(X < x) = 0 pour x < 0
$F(x) = 1 - e^{-ax}$ pour x ≥ 0

3) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de X.
Calcul : On rappelle que $E(X) = \int_0^{\circ\infty} xf(x)dx$ et que $V(X) = \int_0^{\circ\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$

E(X) = 1/a et $V(X) = 1/a^2$.

4) Soient deux réels positifs u et v tels que v > u.
Calculer la probabilité conditionnelle P(X > v / X > u).
$P(X > v / X > u) = P(X > v)/P(X > u) = e^{-av}/e^{-au} = e^{-a(v-u)}$

Exercice 5

On considère la suite {u(n)}, n ϵ N, définie par :
u(0) = 0, u(1) = 1 et u(n+1) = 7u(n) + 8u(n-1)

1) Pout tout n ϵ N, on définit la suite s(n) = u(n) + u(n+1).
Déterminer la nature de la suite {s(n)}.
Donner l'expression générale de s(n) en fonction de n.
Que vaut la limite de s(n) quand n →+ ∞ ?
u(n) + u(n+1) = 8u(n) + 8u(n-1) ⇒ s(n) = 8s(n-1)
s(0) = 1 ⇒ s(n) = 8^ns(0) = 8^n
s(n) →+ ∞ quand n →+ ∞

2) On pose v(n) = $(-1)^n$u(n), et on définit la suite {t(n)}, n ϵ N, par :
t(n) = v(n+1) – v(n)
Exprimer t(n) en fonction de s(n).
t(n) = $(-1)^{n+1}$s(n).

3) Donner les expressions de v(n) et u(n) en fonction de n.
On a :
t(n-1) = v(n) – v(n-1)
…….
t(0) = v(1) – v(0)
En sommant : t(0) + t(1) + … + t(n-1) = v(n) – v(0) = v(n) (car v(0) = 0)
v(n) somme d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison (-8) :
v(n) = $[1 + (-1)^{n+1}8^n]/9$
u(n) = $(-1)^n$v(n) = $[(-1)^n - 8^n]/9$

4) Que vaut la limite de u(n)/s(n) quand n →+ ∞ ?
u(n)/s(n) = u(n)/8^n = $[(-1)^n - 8^n]/9.8^n$ → - 1/9 quand n →+ ∞

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, on note par F(n) l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle, infiniment dérivables, vérifiant la relation suivante pour tout x réel :

$$4xf''(x) - 8nf'(x) - xf(x) = 0$$

1) Montrer que, ∀n ϵ N, F(n) n'est pas vide.
La fonction nulle appartient à F(n), quel que soit n.

2) Soit la fonction $f_0(x) = e^{x/2}$
Montrer que f_0 ϵ F(0).
$f'_0(x) = e^{x/2}/2$
$f_0(x) = e^{x/2}/4$

Puisque n = 0, $4xf''(x) - xf(x) = 4x(e^{x/2}/4) - x.e^{x/2} = 0$, d'où le résultat

3) Soit une fonction f_n appartenant à F(n).
On définit la fonction f_{n+1} par : $f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
3a – Etablir la relation :
$f_{n+1}'(x) = - x f_n(x)/2$
$f_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f_n(x) - xf'(x)] \Rightarrow f'_{n+1}(x) = 2[(2n + 1)f'_n(x) - f'_n(x) - xf_n''(x)]$
$\Rightarrow f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - 2xf_n''(x)$
Or $f_n \in F(n) \Rightarrow 4xf_n''(x) - 8nf_n'(x) = xf_n(x)$
$2xf_n''(x) = 4nf_n'(x) + xf_n(x)/2$
En reportant dans l'expression de $f'_{n+1}(x)$: $f'_{n+1}(x) = 4nf'_n(x) - [4nf_n'(x) + xf_n(x)/2]$
D'où $f_{n+1}'(x) = - x f_n(x)/2$

3b – Montrer que $f_{n+1} \in F(n+1)$.
En dérivant le résultat de (3a), on a : $f_{n+1}''(x) = - f_n(x)/2 - x f_n'(x)/2$
$4xf_{n+1}''(x) - 8(n+1)f_{n+1}'(x) - xf_{n+1}(x)$
$= 4x[- f_n(x)/2 - x f_n'(x)/2] - 8(n+1) (- x f_n(x)/2) - 2x[(2n + 1)f_n(x) - xf_n'(x)]$
= 0 en développant
D'où le résultat

Exercice 7 *(deux questions indépendantes)*
1) On rappelle que le polynôme réel B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ.
Soit le polynôme A défini sur R, à coefficients réels, par : $A(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$
A quelles conditions sur les paramètres a, b et c le polynôme A est-il divisible par le polynôme B défini par $B(x) = x^2 + x + 1$?
$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a +1)x + (c - a)$
A divisible par B si $b - a + 1 = 0$ et $c - a = 0$

2) Déterminer la valeur du réel v telle que le polynôme $P(x) = (x + 1)^7 - x^7 - v$ admet une racine réelle multiple.
x est racine multiple de P si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$
Soit :
$(x + 1)^7 - x^7 - v = 0$ et $7(x + 1)^6 - 7x^6 = 0$ $((x + 1)^6 - x^6 = 0)$
Ou :
$(x + 1)x^6 - x^7 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Ou :
$x^6 - v = 0$ et $(x + 1)^6 = x^6$
Or $(x + 1)^6 = x^6 \Leftrightarrow (x + 1) = +/- x$
$\Rightarrow x = - ½$
Et donc $v = 1/64$