ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

« Le sport est souvent mythifié, à tort. » (Dominique Baudin, *Libération,* 21 Juillet 2018). Vous semble-t-il légitime d'accorder une grande valeur au sport ?

Sujet n° 2

Une œuvre d'art peut-elle vous aider à comprendre le monde dans lequel vous vivez ?

Sujet n° 3

« Le monde régi par la technologie intelligente (…) est un cauchemar dans lequel les humains sont réduits à être des automates. » (Brett M. Frischmann, revue *Scientific American*, 30 juillet 2018).
Partagez-vous cette conception de Brett M. Frischmann sur les technologies intelligentes ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte un exercice et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque au choix des candidats. Le problème comporte trois parties, qu'il est recommandé de traiter dans l'ordre proposé.

Exercice

1) Soit la fonction f de la variable réelle positive x, définie par $x \to f(x)$ avec :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Etudier la fonction f.

2) On considère la suite u_n, n entier naturel positif ou nul, définie par $u_0 = 1$ et de terme général :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$$

Etudier la suite u_n.

3) Donner la forme explicite en fonction de n du terme général u_n.

Notations et valeurs numériques :

Le symbole e désigne la base des logarithmes népériens, notés Ln ; e = 2,718.
Ln 2 = 0,693
$e^{1,5} = 4,482$; $e^{1,6} = 4,953$; $e^{1,7} = 5,474$; $e^{1,8} = 6,050$; $e^{1,9} = 6,686$; $e^{2} = 7,389$
$e^{-0,5} = 0,607$; $e^{-0,6} = 0,549$; $e^{-0,7} = 0,497$; $e^{-0,8} = 0,449$; $e^{-0,9} = 0,407$; $e^{-1} = 0,368$

Partie 1 : Etude des variations d'une fonction

On considère la fonction réelle f, de la variable réelle x, définie par $x \to f(x)$ avec :

$$f(x) = 2x + 2 - e^{x}$$

On veut étudier les variations de f.

1) Calculer les dérivées f' et f'' ; étudier leurs signes.

2) Etudier le comportement de f quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Construire le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions notées α et β, avec α < β. Situer numériquement α et β dans des intervalles de longueur 0,1.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction f aux points A de coordonnées (α, 0), B (β, 0), et C d'abscisse 0.

5) Tracer le plus précisément possible le graphe de f dans un repère orthonormé.

Partie 2 : Intégrales

6) Donner la valeur exacte de l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 f(x)dx$.

7) On rappelle que les nombres réels α et β ont été introduits en Partie 1, question 3.
Donner, en fonction de α, la valeur exacte de l'intégrale J(α) définie par :
$J(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx$.

8) Donner, en fonction de β, la valeur exacte de l'intégrale J(β) définie par :
$J(\beta) = \int_0^{\beta} f(x)dx$.

9) Démontrer que la valeur exacte de J(α, β) définie par $J(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ est :
$J(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

Dans cette partie, on considère la famille F de fonctions réelles f_a de la variable réelle x, définie par $x \to f_a(x)$ avec :

$$f_a(x) = 2x + 2 - e^{ax}$$

où a est un paramètre réel quelconque.
On veut étudier les variations de la fonction f_a selon les valeurs du paramètre a.

10) Etudier le cas $a = 0$.

Dans les quatre questions suivantes, on supposera $a \neq 0$.

11) Etudier le signe de $(f_a)'$ et $(f_a)''$.

12) En déduire le tableau de variation de f_a selon les valeurs du paramètre a.
Montrer qu'il existe un point commun aux courbes des fonctions de la famille F.

13) On note par M(a) le maximum de f_a, lorsque ce maximum existe. Montrer alors que $M(a) > 0$.

14) Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f_a(x) = 0$?

15) Pour k entier strictement positif, calculer la différence $f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x)$.
En déduire l'expression de $f_{a+k}(x) - f_a(x)$ en fonction de a, k et x.

16) Soit l'intégrale J(a) définie par : $J(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$

16a) Donner la valeur de J(0) sans faire le moindre calcul intégral.
16b) Donner, en fonction de a, la valeur exacte de J(a).
16c) Etudier les limites de J(a) quand le paramètre a tend vers $-\infty$, $+\infty$, et 0.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Dans son ouvrage « Le prix de l'inégalité » (2014), Joseph Stiglitz indique *« Laissés à eux-mêmes, les marchés se révèlent souvent incapables de produire des résultats efficaces et souhaitables, et dans ce cas l'Etat a un rôle à jouer : corriger ces échecs du marché, autrement dit concevoir des mesures (impôts et des réglementations) qui alignent les incitations privées sur les rendements sociaux. »*

Après avoir analysé les principales théories sur les défaillances de marchés, vous montrerez quels sont les instruments et les mesures envisageables par la puissance publique pour y remédier.

Sujet 2

Dans une note publiée en août 2018, l'OCDE souligne que « *le commerce international soutient que la prospérité a rarement, voire jamais, été atteinte ou maintenue sans le concours du commerce. Néanmoins, à lui seul, il ne constitue pas une condition suffisante à l'obtention de cette prospérité. Des politiques orientées vers l'emploi, l'éducation, la santé et d'autres domaines encore sont nécessaires pour favoriser le bien-être et s'attaquer aux défis d'une économie mondialisée* ».

Après avoir présenté les théories sur les avantages du commerce international, vous préciserez le double défi politique que pose la mondialisation : en tirer le maximum au profit du plus grand nombre tout en limitant ses effets négatifs.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'épreuve est composée de huit exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Un point M, de coordonnées x et y, décrit une courbe C. Les coordonnées x et y de M dépendent d'un paramètre réel t, selon les relations suivantes :

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$
$$y(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}$$

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ? pour y ?

2) Montrer que le point O (0, 0) appartient à la courbe C.
On rappelle que la pente p de la tangente en un point de coordonnées (x_0, y_0) est telle que $(y - y_0)/(x - x_0) = p$. Quelle est la pente de la tangente à C au point O ?

3) Donner l'équation de la courbe C en coordonnées cartésiennes sous la forme y = g(x).
Calculer y' et donner les variations de g et la forme générale de la courbe C.

Exercice n° 2

Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel n positif ou nul par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1) Montrer que, pour tout entier n : $1 \leq u_n < 2$

2) Etudier le sens de variation de la suite u_n.

3) Montrer que la suite u_n est convergente. Quelle est la valeur de sa limite L ?

Exercice n° 3

1) Soit n un entier naturel strictement positif.
On appelle diviseur strict de n tout nombre strictement positif divisant n, autre que lui-même.
Quels sont les diviseurs stricts de 220 ?

2) On appelle nombres amiables deux entiers n et m tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Les entiers 220 et 284 sont-ils amiables ?

3) On appelle nombre parfait un entier égal à la somme de ses diviseurs stricts. Les nombres 21 et 28 sont-ils parfaits ?

4) On rappelle qu'un nombre entier premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Déterminer la valeur d'un nombre entier premier p tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

5) Soient p un nombre entier premier impair, et n un nombre entier naturel strictement positif. On suppose que le nombre $2^n.p$ est parfait. Exprimer alors p en fonction de n.

Exercice n° 4

1) Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
Donner dans C, corps des nombres complexes, les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

2) z étant un complexe quelconque différent de 1, on définit z* par $z^* = \frac{2z+1}{z-1}$.
Résoudre dans C l'équation $(z^*)^4 = 1$.

Exercice n° 5

1) Pour un examen oral, un étudiant a fait des impasses et n'a préparé que 50 des 100 sujets qu'il doit connaître. Chaque sujet fait l'objet d'une question, écrite sur un papier, les 100 papiers sont dans une urne présentée à l'étudiant.
L'étudiant tire deux papiers au hasard, simultanément.

1a) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ?
1b) Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
1c) Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul des deux sujets ?
1d) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?

2) L'étudiant a préparé n des 100 sujets possibles ($n \leq 100$).
2a) Quelle est la probabilité p(n) qu'il connaisse au moins un des deux sujets tirés ?
2b) Quelle est la plus petite valeur de n pour que p(n) soit supérieur à 0,95 ?

Exercice n° 6

1) Soit la matrice A à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

2) Résoudre le système linéaire suivant, où les inconnues x, y, z sont réelles et m est un paramètre réel :
$x - z = m$
$-2x + 3y + 4z = 1$
$y + z = 2m$

Exercice n° 7

Soit la fonction f définie sur $R^{+*} =]0, +\infty[$ par $x \to f(x) = (\mathrm{Ln}\, x) / x$, où Ln est le symbole des logarithmes népériens.

1) Calculer l'intégrale $J_1 = \int_1^e f(x)dx$.
2) L'intégrale $J_2 = \int_0^1 f(x)dx$ existe-t-elle et, si oui, quelle est sa valeur ?

3) Calculer $J(n) = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$.
Donner le signe de $J(n)$ et calculer la limite de $J(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 8

On se place dans l'espace E des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, n entier strictement positif.
Soit P un polynôme de E : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
P' étant le polynôme dérivé de P, on définit g, application de E dans E, par :
$P \to g(P) = P + (1 - x)P'$

1) Ecrire les coefficients de g(P) en fonctions des coefficients de P

2) Une application f de E dans E est linéaire si pour tous polynômes P et Q de E, et tout réel a, $f(aP + Q) = af(P) + f(Q)$.
L'application g est-elle linéaire ?

AVRIL 2019

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR STATISTICIEN ÉCONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

Exercice

1) Soit la fonction f de la variable réelle positive x, définie par x → f(x) avec :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Etudier la fonction f.

$f'(x) = 1/(x^2 + 1)^{3/2}$, strictement positive sur R^+
f est donc croissante sur R^+
$f(0) = 0$; $\lim f = 1$ quand $x \to +\infty$

2) On considère la suite u_n, n entier naturel positif ou nul, définie par $u_0 = 1$ et de terme général :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}$$

Etudier la suite u_n.

Comme $f(x) - x < 0$, la suite u_n est décroissante.
Elle est minorée par 0, et tend donc vers une limite $l = 0$.

3) Donner la forme explicite en fonction de n du terme général u_n.
Procédons par récurrence.
On sait que $u_0 = 1$; $u_1 = 1/(2)^{1/2}$
Un calcul de réassurance montre que $u_2 = 1/(3)^{1/2}$

Posons $u_n = 1/(n+1)^{1/2}$
On calcule aisément que $u_{n+1} = 1/(n+2)^{1/2}$

La forme explicite de u_n est donc $u_n = 1/(n+1)^{1/2}$

Problème

Notations et valeurs numériques :
Le symbole e désigne la base des logarithmes népériens, notés Ln ; e = 2,718.

Ln 2 = 0,693
$e^{1,5} = 4,482$; $e^{1,6} = 4,953$; $e^{1,7} = 5,474$; $e^{1,8} = 6,050$; $e^{1,9} = 6,686$; $e^{2} = 7,389$
$e^{-0,5} = 0,607$; $e^{-0,6} = 0,549$; $e^{-0,7} = 0,497$; $e^{-0,8} = 0,449$; $e^{-0,9} = 0,407$; $e^{-1} = 0,368$

Partie 1 : Etude des variations d'une fonction

On considère la fonction réelle f, de la variable réelle x, définie par $x \rightarrow f(x)$ avec :

$$f(x) = 2x + 2 - e^{x}$$

On veut étudier les variations de f.

1) Calculer les dérivées f' et f'' ; étudier leurs signes.
$f'(x) = 2 - e^{x}$; $f'(x) = 0$ pour x = Ln2, positive avant, négative après
$f''(x) = - e^{x} < 0$: la fonction est concave

2) Etudier le comportement de f quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
Construire le tableau de variation de f.

$\text{Lim}_{x \to +\infty} f(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{x}/x) = -\infty$
$\text{Lim}_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Asymptotes :
$\text{Lim}_{x \to +\infty} f(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{x}/x) = -\infty$: pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$

$\text{Lim}_{x \to -\infty} f(x)/2 = \lim (2 + 2/x - e^{x}/x) = 2$
$y - 2x = 2 - e^{x} \rightarrow 2$ quand $x \rightarrow -\infty$
La droite $y = 2x + 2$ est asymptote au voisinage de $-\infty$

<u>Tableau de variations</u>

x	0	Ln2	$+\infty$
f'	+	0	-
f_1	$-\infty$ ↗	M	↘ $-\infty$

M = f(Ln2) ≈1,39

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions notées α et β, avec α < β. Situer numériquement α et β dans des intervalles de longueur 0,1.

f continue, M > 0, limites égales à $-\infty$ pour $x \to -\infty$ ou $+\infty$
Il existe donc 2 solutions à f(x) = 0 : α < 0 et β > 0

Positionnement de α et β :
Pour α :
Avec les valeurs données :
$f(-0{,}7) = 0{,}6 - 0{,}497 > 0$
$f(-0{,}8) = 0{,}4 - 0{,}449 < 0$
Donc α est compris entre -0,8 et -0,7

Pour β :
$f(1{,}6) = 5{,}2 - 4{,}953 > 0$
$f(1{,}7) = 5{,}4 - 5{,}474 < 0$
Donc β est compris entre 1,6 et 1,7

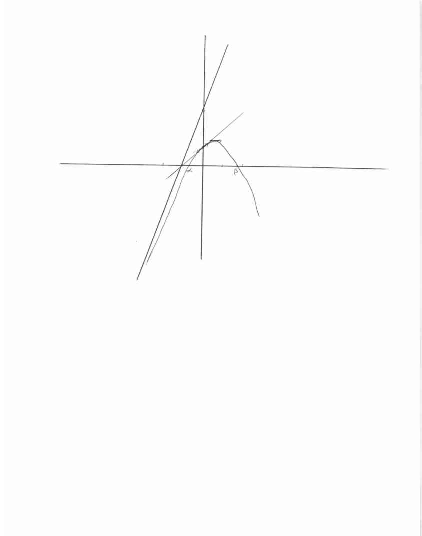
4) Donner les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction f aux points A de coordonnées $(\alpha, 0)$, B $(\beta, 0)$, et C d'abscisse 0.

Tangente en A : $y = (2 - e^{\alpha})(x - \alpha)$
Or $2\alpha + 2 - e^{\alpha} = 0 \rightarrow 2 - e^{\alpha} = -2\alpha$
$y = -2\alpha x + 2\alpha^2$

Tangente en B :
Idem : $y = -2\beta x + 2\beta^2$

Tangente en C :
Quand $x = 0$, $y = 1$
$y = x + 1$

5) Tracer le plus précisément possible le graphe de f dans un repère orthonormé.



Partie 2 : Intégrales

6) Donner la valeur exacte de l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 f(x)dx$.
Une primitive de f est : $x^2 + 2x - e^x$

$J = 4 - e$

7) On rappelle que les nombres réels α et β ont été introduits en Partie 1, question 3.
Donner, en fonction de α, la valeur exacte de l'intégrale J(α) définie par :
$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx.$
$J(\alpha) = (\alpha^2 + 2\alpha - e^\alpha) - (-1) = \alpha^2 + 1 + (2\alpha - e^\alpha)$
Or $2\alpha + 2 - e^\alpha = 0 \rightarrow 2\alpha - e^\alpha = -2$
$J(\alpha) = \alpha^2 - 1$

8) Donner, en fonction de β, la valeur exacte de l'intégrale J(β) définie par :
$J(\beta) = \int_0^\beta f(x)dx.$
$J(\beta) = (\beta^2 + 2\beta - e^\beta) - (-1) = \beta^2 - 1$ car $2\beta - e^\beta = -2$
$J(\beta) = \beta^2 - 1$

9) Démontrer que la valeur exacte de J(α, β) définie par $J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ est :
$J(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)(\beta - \alpha)$

$J(\alpha, \beta) = J(\beta) - J(\alpha) = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$

Partie 3 : Famille paramétrée

Dans cette partie, on considère la famille F de fonctions réelles f_a de la variable réelle x, définie par $x \to f_a(x)$ avec :

$f_a(x) = 2x + 2 - e^{ax}$

où a est un paramètre réel quelconque.
On veut étudier les variations de la fonction f_a selon les valeurs du paramètre a.

10) Etudier le cas a = 0.
On trouve la droite $f_0(x) = 2x + 1$

Dans les quatre questions suivantes, on supposera $a \neq 0$.
11) Etudier le signe de $(f_a)'$ et $(f_a)''$.
$f_a'(x) = 2 - ae^{ax}$
Deux cas à distinguer :
1er cas : a < 0 : la dérivée $f_a'(x)$ est positive pour tout x.
→ la fonction f_a est strictement croissante

2ème cas : a > 0
Alors $f_a'(x) = 0$ pour $x = (\ln(2/a))/a$
$f_a' < 0$ pour $x > (\ln(2/a))/a$
$f_a' > 0$ pour $x < (\ln(2/a))/a$

12) En déduire le tableau de variation de f_a selon les valeurs du paramètre a.
Montrer qu'il existe un point commun aux courbes des fonctions de la famille F.

Limites :

a) Au voisinage de + ∞

Pour a > 0 : $Lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $Lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = +\infty$

b) Au voisinage de - ∞

Pour a > 0 : $Lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $Lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim x(2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Asymptotes éventuelles :

a) Au voisinage de + ∞

Pour a > 0 : $Lim_{x \to +\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = -\infty$

Pour a < 0 : $Lim_{x \to +\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = 2$

Et $Lim_{x \to +\infty}(f_a(x) - 2x) = \lim (2 - e^{ax}) = 2$

La droite y = 2x + 2 est asymptote oblique de f_a au voisinage de + ∞ lorsque a < 0.

b) Au voisinage de - ∞

Pour a > 0 : $Lim_{x \to -\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = 2$

$Lim_{x \to -\infty}(f_a(x) - 2x) = \lim (2 - e^{ax}) = 2$

La droite y = 2x + 2 est asymptote oblique de f_a au voisinage de - ∞ lorsque a > 0 (on retrouve bien le cas de la Partie 1, avec a = 1).

Pour a < 0 : $Lim_{x \to -\infty} f_a(x)/x = \lim (2 + 2/x - e^{ax}/x) = +\infty$

<u>Tableau de variations :</u>

Pour a > 0

x	-∞		(Ln(2/a))/a		+ ∞
f_a'		+	0	-	
f_a	- ∞	↗	M(a)	↘	- ∞

M(a) = 2 + 2(Ln(2/a) – 1)/a

Pour a < 0

x	0	+ ∞

f_a'	+	
f_a	$-\infty$ ↗	$+\infty$

On remarque que pour x = 0, $f_a(0) = 1$ → le point C(0, 1) est un point commun à la famille F.

13) On note par M(a) le maximum de f_a, lorsque ce maximum existe. Montrer alors que M(a) > 0.
D'après la question précédente, M(a) n'existe que pour a > 0 et $M(a) = 2 + 2(\mathrm{Ln}(2/a) - 1)/a$
Pour a > 0, étudions les variations de M(a).
$M'(a) = 2\mathrm{Ln}(a/2)/a^2$
M'(a) = 0 pour a = 2, M'(a) positive pour a > 2, négative pour a < 2.
En outre, lim M(a) = + ∞ pour x → 0 ou 2 pour x → + ∞

a	0		2		$+\infty$
M(a)'		-	0	+	
M(a)	$+\infty$	↘	S	↗	2

Soit S le minimum de M(a), atteint en a = 2.
S = 1, donc S > 0
On en déduit que M(a) est > 0 pour tout a > 0.

14) Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f_a(x) = 0$?
D'après les questions 12 et 13 :
Cas a < 0 :
Il existe un et une seule solution à $f_a(x) = 0$
Cas a > 0 :
Il existe deux solutions à $f_a(x) = 0$.

15) Pour k entier strictement positif, calculer la différence $f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x)$.
En déduire l'expression de $f_{a+k}(x) - f_a(x)$ en fonction de a, k et x.

Soit $D(a, k) = f_{a+k}(x) - f_{a+k-1}(x) = e^{(a+k-1)x} - e^{(a+k)x} = (e^{-x} - 1)e^{ax} e^{kx}$
$f_{a+k}(x) - f_a(x) = \sum_{i=1}^{k} D(a,i) = (e^{-x} - 1)e^{ax} \sum_{i=1}^{k} D(a,i) = (e^{-x} - 1)e^{ax} \sum_{i=1}^{k} e^{ix}$
D'où :
$f_{a+k}(x) - f_a(x) = e^{ax}(1 - e^{kx})$

16) Soit l'intégrale J(a) définie par : $J(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$

16a) Donner la valeur de $J(0)$ sans faire le moindre calcul intégral.

Pour $a = 0$, on a vu en question 10 que pour $a = 0$, on a la droite $y = 2x + 1$.
$J(0)$ est donc la surface du trapèze compris entre la droite $2x + 1$, les droites $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.
La surface d'un trapèze est $(B + b)h/2$ où B est la grande base, b la petite base, h la hauteur. Ici $B = 3$, $b = 1$, $h = 1 \rightarrow J(0) = 2$

16b) Donner, en fonction de a, la valeur exacte de $J(a)$.

Une primitive de f_a est $x^2 + 2x - e^{ax}/a$
$J(a) = 3 + (1 - e^a)/a$

16c) Etudier les limites de $J(a)$ quand le paramètre a tend vers $-\infty$, $+\infty$, et 0.

Quand $a \to +\infty$, $J(a) \to -\infty$
Quand $a \to -\infty$, $J(a) \to 3$
Quand $a \to 0$, $e^a \approx 1 + a$ et donc $\lim_{a \to 0} J(a) = 2$

AVRIL 2019

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR STATISTICIEN ÉCONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

Exercice 1

Un point M, de coordonnées x et y, décrit une courbe C. Ses coordonnées x et y de M dépendent d'un paramètre réel t, selon les relations suivantes :

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$$
$$y(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$$

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ? pour y ?

Il est évident que x(t) ≥ 0 et < 1 ; x varie donc entre 0 et 1.
Et y(t) ϵ R.

2) Montrer que le point O (0, 0) appartient à la courbe C.
On rappelle que la pente p de la tangente en un point de coordonnées (x_0, y_0) est telle que ($y - y_0$)/($x - x_0$) = p. Quelle est la pente de la tangente à C au point O ?
x(t) = 0 ↔ t = 0 et donc si x = 0, alors y = 0.
La courbe C passe par le point O (0, 0).
y/x est donc la pente de la tangente en O à C, et comme y/x = t, t = 0 et la pente est nulle : tangente horizontale en O.

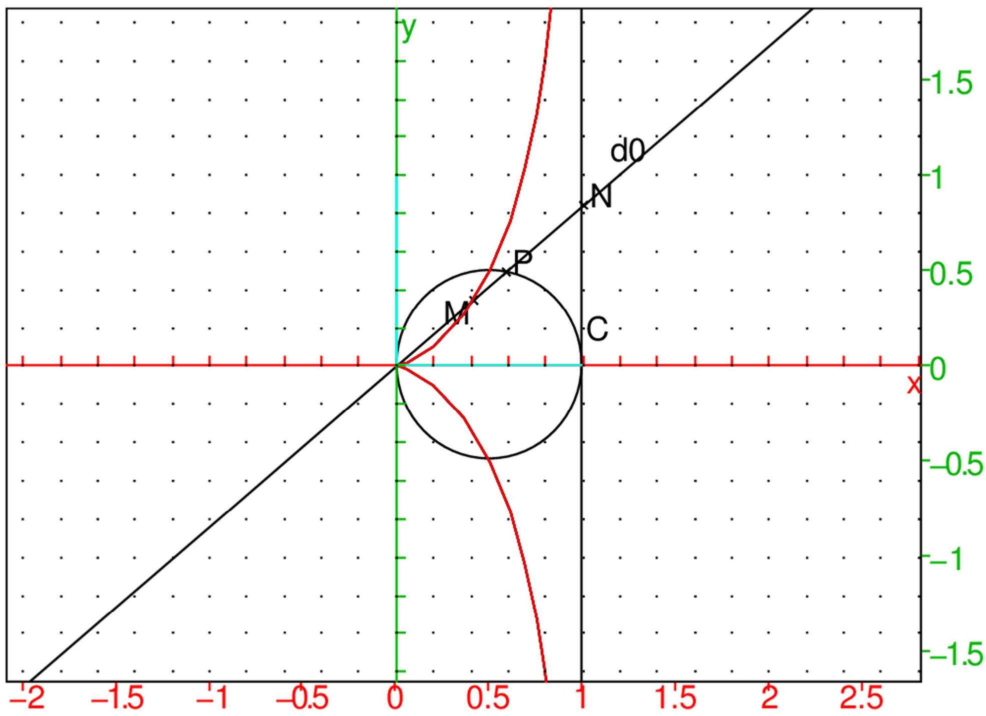
3) Donner l'équation de la courbe C en coordonnées cartésiennes sous la forme y = g(x).
Calculer y' et donner les variations de g et la forme générale de la courbe C.
y(t)/x(t) = t
En reportant dans x(t), on a $x = y^2/(y^2 + x^2)$
Soit : $y^2 = x^3/(1 – x)$, ou encore $y = + - x^{3/2}/(1 – x)^{1/2}$
La courbe C est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

En dérivant : $2yy' = x^2(3 – 2x)/(1 – x^2)$, ou : $y' = x^2(3 – 2x)/2y(1 – x^2)$
y' a donc le signe de y : y' > 0 quand y > 0 y croissante), y' < 0 quand y < 0 (y décroissante)

Quand x tend vers 1, y tend vers ∞.
La droite x = 1 est asymptote à C.
Pour y > 0 :

x	0		1
y'		+	
y	0	↗	+∞

La courbe C est en rouge ci-dessous.



Exercice 2

Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel n positif ou nul par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1) Montrer que, pour tout entier n : $1 \leq u_n < 2$

Par récurrence : $u_0 = 1$.
La propriété est vraie pour n = 0.
Supposons-la vraie au rang n : $1 \leq u_n < 2$
$3 \leq 2 + u_n < 4 \rightarrow (3)^{1/2} \leq (2 + u_n)^{1/2} = u_{n+1} < 2$
Donc vraie au rang n+1.

2) Etudier le sens de variation de u_n.

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = (- u_n^2 + u_n + 2)/(\sqrt{2 + u_n} + u_n)$
Le dénominateur est > 0, et le numérateur a deux racines, - 1 et 2, mais situées hors de l'intervalle [1, 2[, et il est donc > 0 sur cet intervalle.
La suite est croissante.

3) Montrer que la suite u_n est convergente. Quelle est la valeur de sa limite L ?
La suite est croissante et majorée par 2 → elle converge vers une limite L telle que : $L = \sqrt{2 + L}$, ou $L^2 - L - 2 = 0$, qui n'admet comme solution positive que L = 2.

Exercice 3
1) Soit n un entier naturel strictement positif.
On appelle diviseur strict de n tout nombre strictement positif divisant n, autre que lui-même.
Quels sont les diviseurs stricts de 220 ?

Les diviseurs stricts de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

2) On appelle nombres amiables deux entiers n et m tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Les entiers 220 et 284 sont-ils amiables ?

D'après la question 1, la somme des diviseurs stricts de 220 est 284.
Les diviseurs stricts de 284 sont : 1, 2, 4, 71, 142 ; leur somme est 220.
220 et 284 sont donc amiables.

3) On appelle nombre parfait un entier égal à la somme de ses diviseurs stricts. Les nombres 21 et 28 sont-ils parfaits ?

Diviseurs stricts de 21 : 1, 3, 7 : somme = 11, 21 n'est pas parfait
Diviseurs stricts de 28 : 1, 2, 4, 7, 14 : somme = 28, 28 est parfait

4) On rappelle qu'un nombre entier premier n'est divisible que par 1 et par lui-même. Déterminer la valeur d'un nombre entier premier p tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

Diviseurs stricts de $2^4.p = 16p$: 1, 2, 4, 8, 16, p, 2p, 4p, 8p
Somme = 15p + 31
Nombre parfait si 16p = 15p + 31 → p = 31

5) Soient p un nombre entier premier impair, et n un nombre entier naturel strictement positif. On suppose que le nombre $2^n.p$ est parfait. Exprimer alors p en fonction de n.

Puisque p est premier et impair, les diviseurs stricts de $2^n.p$ sont : 1, 2, …, 2^n, p, 2p, …, $2^{n-1}.p$

$2^n.p$ est parfait si $2^n.p = 1 + 2 + \ldots + 2^n + p + 2p + \ldots + 2^{n-1}.p$
$\leftrightarrow 2^n.p = (1 - 2^{n+1})/(1 - 2) + p(1 - 2^n)/(1 - 2)$
$2^n.p = (2^{n+1} - 1) + p(2^n - 1)$

$p = 2^{n+1} - 1$

(Ainsi, on vérifie que pour n = 4, p = 31 : question 4)

Exercice 4
1) Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
Donner dans C, corps des nombres complexes, les solutions de l'équation P(Z) = 0.

$P(Z) = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)$
Solutions : 1, - 1, i, -i

2) z étant un complexe quelconque différent de 1, on définit z* par $z^* = \frac{2z+1}{z-1}$.
Résoudre dans C l'équation $(z^*)^4 = 1$.

Notons de façon générique par a l'un des termes 1, - 1, i, - i.
D'après la 1), on a z* = a, ou (2z + 1)/(z + 1) = a, ce qui conduit à l'écriture générale :
z = (a + 1)/(a – 2)

a = 1 : z = - 2

a = - 1 : z = 0

a = i : z = (i+1)/(i-2) = - (1 + 3i)/5

a = -i : z = (1 - i)/(-i -2) = - (1 - 3i)/5

Exercice 5
1) Pour un examen oral, un étudiant a fait des impasses et n'a préparé que 50 des 100 sujets qu'il doit connaître. Chaque sujet fait l'objet d'une question, écrite sur un papier, les 100 papiers sont dans une urne présentée à l'étudiant.
L'étudiant tire deux papiers au hasard, simultanément.
1a) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ?
P(1) = 49/198 ; car (C^2_{50}/ C^2_{100})

1b) Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
P(2) = 49/198 car aussi (C^2_{50}/ C^2_{100})

1c) Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul des deux sujets ?
P(3) = 50/99 car $(C^1_{50}\, C^1_{50} / C^2_{100})$; on remarque aussi que P(3) = 1 – P(1) – P(2)

1d) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?
P(4) = 1 – P(1) = 149/198

2) L'étudiant a préparé n des 100 sujets possibles (n ≤100).
2a) Quelle est la probabilité p(n) qu'il connaisse au moins un des deux sujets tirés ?
$p(n) = 1 – C^2_{100-n} / C^2_{100} = 1 – (100 – n)(99 – n)/100x99$
$p(n) = n(199 – n)/9900$

2b) Quelle est la plus petite valeur de n pour que p(n) soit supérieur à 0,95 ?
$p(n) \geq 0,95 \leftrightarrow - n^2 + 199\, n – 9405 \geq 0$

d'où $n \geq 78$

Exercice 6
1) Soit la matrice A à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

Det A = 1 → A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre le système linéaire suivant, où les inconnues x, y, z sont réelles et m est un paramètre réel :
$x – z = m$
$– 2x + 3y + 4z = 1$
$y + z = 2m$

On note X le vecteur colonne $(x, y, z)^t$, M le vecteur colonne $(m, 1, 2m)^t$.
Le système revient à AX = M ou encore $X = A^{-1}M$

Ce qui conduit à : $x = 5m – 1$, $y = – 2m + 1$, $z = 4m – 1$

Exercice 7
Soit la fonction f définie sur $R^{+*} =]0, + \infty[$ par $x \to f(x) = (\mathrm{Ln}\, x) / x$, où Ln est le symbole des logarithmes népériens.
1) Calculer l'intégrale $J_1 = \int_1^e f(x)dx$

Une primitive de f est $(\mathrm{Ln} x)^2/2$
$J_1 = 1/2$

2) L'intégrale $J_2 = \int_0^1 f(x)dx$ existe-t-elle et, si oui, quelle est sa valeur ?

Au voisinage de 0, f n'est pas définie (lim f = - ∞ quand x →0)
L'intégrale est non convergente ($J_2 \to -\infty$)

3) Calculer J(n) = $\int_n^{n+1} f(x)dx$.
Donner le signe de J(n), et calculer la limite de J(n) quand n → + ∞.

$J(n) = (Ln^2(n+1) - Ln^2(n))/2$,
$J(n) = (Ln(n+1) - Ln(n))(Ln(n+1) + Ln(n))/2$ et J(n) est donc positive.

Limite de J(n) :
$J(n) = Ln(1 + 1/n).\ Ln(n^2).Ln(1 + 1/n) / 2 = Ln(n).Ln^2(1 + 1 / n)$
$J(n) \approx Ln(n)/n^2$ et donc la limite de J(n) est 0.

Exercice 8
On se place dans l'espace E des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, n entier strictement positif.
Soit P un polynôme de E : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
P' étant le polynôme dérivé de P, on définit g, application de E dans E, par :
$P \to g(P) = P + (1 - x)P'$

1) Ecrire les coefficients de g(P) en fonctions des coefficients de P

Posons $g(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$
$b_n = a_n(1 - n)$
$b_0 = a_0 + a_1$
$b_k = a_k(1 - k) + (k + 1)\ a_{k+1}$

2) Une application f de E dans E est linéaire si pour tous polynômes P et Q de E, et tout réel a, f(aP + Q) = af(P) + f(Q).
L'application g est-elle linéaire ?
Evident