Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).

Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.
2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.
4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.
6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?
7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).

10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.

2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction

$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$

est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbf{R}$

3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?

4. Tracer le graphe de F.

5. Montrer qu'il existe un unique réel y tel que $F(y) = y$.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.

2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.

3. On suppose désormais que $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.

   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$

   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.

   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $\ln x \leq x/e$.
2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx.$$
3. Calculer I_0 et I_1.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
5. En utilisant la question 1., montrer que
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$
6. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$
$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}.$$
7. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} nI_n = e^3.$$

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 & = & 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 & = & 7 \\ z_1 z_2 z_3 & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -3$.
2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire les solutions du système (2).

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.
3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).
4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Les boules de chaque couleur sont numérotées de 1 à 8. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.
2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.

Fomesoutra.com
ça soutra
Docs à portée de main

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les relations séculaires que l'Afrique du Nord entretient avec l'Afrique par-delà le Sahara semblent connaître un nouvel élan. Selon vous, quels sont les domaines de coopération les plus importants qu'il serait souhaitable de développer entre ces deux zones géographiques du continent africain?

Sujet n° 2

Les progrès de la recherche ont-ils toujours des retombées, notamment technologiques, bénéfiques pour la société dans son ensemble ?

Sujet n° 3

Quel rôle peut-on attribuer aux médias selon vous dans nos sociétés, notamment à l'heure de l'information quasi immédiate diffusée par voie électronique ?

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2\, Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de la fonction f.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n\, Ln(x)\, dx$ pour tout entier n supérieur à 1.

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

4. Pour n entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de n, les variations de f_n et tracer son graphe.

5. Résoudre l'équation $f_n(x) = e^x$ pour n >2 et x >-1.

Exercice n° 4

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x = 1$ et $x = -1$.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n}{a} + \frac{{u_n}^2}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \frac{v_n^{\,2}}{4} + \frac{3}{4}$ et $v_0 \in]1,2]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

Exercice n° 6

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en zéro ?

3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jean-Louis SERVAN-SCHREIBER, intitulé : « C'est la vie ! », paru aux éditions Albin Michel en avril 2015.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

MON MONDE : unique

Même au milieu des autres, j'habite un monde qui n'appartient qu'à moi. Il est contenu en totalité dans mon cerveau et dans mon corps ; il est le produit de mes perceptions, de mes sensations, de mes pensées, de mes sentiments, de mes souvenirs, de mes connaissances et de mes ignorances. Fait de tout ce que je reçois du monde extérieur. Il est mon équipement pour y vivre. Il en est ainsi dans mon rapport à tout autre être humain, comme à tout ce que j'ai rencontré et expérimenté, au gré des jours, depuis que je suis né.

Une illusion est commune à tous : il semble si naturel de croire que les autres perçoivent le même monde que moi. Or ce qui me semble évident, aller de soi, ne l'est pas pour un autre. Comprendre cela désoriente d'abord, remet en cause mes idées reçues. Mais, une fois que je l'ai admis, je suis devenu plus tolérant en même temps que plus intéressé par l'infinie diversité de nos points de vue.

Mon cerveau est fort limité en mémoire comme en capacité à manier les idées. Mais ce qu'il a emmagasiné depuis ma naissance, ou produit en combinant tout ce qu'il a perçu, compris, retenu, est déjà si foisonnant en moi, que je ne peux en exprimer, en décrire, en partager avec d'autres qu'une infime partie. Laquelle est filtrée par celui qui m'écoute ou me lit selon ses propres critères, différents des miens. Je pense souvent que c'est une chance et une prouesse improbable de se comprendre entre nous autrement que par bribes.

Quelle que soit ma richesse intérieure, je ne peux tenter de la communiquer que par le maigre filet de mes mots, mes intonations, mes gestes ou mes intonations de visage. Il en est de même pour chacun de nous, puisque nous sommes tous porteurs de notre univers, complexe, unique, et qui restera largement inexploré, y compris par nous. Je ne prends pourtant pas cette évidence au tragique. Elle est constitutive de nous tous, humains, et nous parvenons bien à

vivre ainsi. Ces mondes élaborés par chaque bipède de notre espèce pour son propre usage, sont plus ou moins originaux, intéressants ou agréables à habiter. Toutefois, c'est là que nous passons nos vies, seuls dans notre monde, mais en compagnie des autres.

Mon monde est l'œuvre de ma vie. Je le meuble, le complète, le modifie chaque jour, au gré de mes expériences et de mes idées. Au début, une cire vierge. Mes premiers souvenirs, à partir de trois ou quatre ans, étaient en forme de point d'interrogation. Qui sont ces gens qui viennent voir mes parents ? Comment répondre à ce que l'on me dit ? Qu'est ce qui est important ? Qu'est-ce que j'ai le droit de faire ? Et toujours et encore : comment ça marche, depuis les rapports avec les autres jusqu'aux objets que je les vois utiliser ?

En thérapie, on commence par explorer l'enfance, car dans nos débuts de la vie tout s'inscrit plus durablement. Puis ce que l'on apprend en vivant s'empile et forme vite un humus si épais que chaque nouvelle couche recouvre et occulte une partie de celles qui l'ont précédée. Mais le socle des impressions d'enfance reste le plus déterminant pour notre avenir.

Etudes, relations, responsabilités, découvertes, déceptions, joies, mon monde s'est ensuite constamment élargi, approfondi. Souvent en désordre et sans que j'aie toujours pu prendre le temps de bien comprendre ou situer ce qui se déposait ainsi en moi. Le résultat de cette imprégnation est forcément personnel, puisque j'en suis l'auteur et l'acteur. En même temps, le processus en est banal, car c'est ainsi que chacun s'élabore lui-même.

Nous construisons tous notre propre monde à partir des éléments communs à tous les autres, ceux du réel extérieur, trié par nos goûts, intérêts et valeurs. Le tout pimenté par les hasards de notre vécu. Comme nous ne pouvons connaître qu'une fraction de la complexité des autres et que nous ne sommes que partiellement conscients de la nôtre, on mesure combien communiquer mobilise une part essentielle de nos énergies et de nos talents. Et que les résultats ne peuvent en être qu'approximatifs.

Ce monde, le mien, est déterminé par mes capacités à savoir, comprendre, mémoriser, voir, écouter. Lesquelles sont restreintes. Nous les humains, qui nous désignons comme des semblables, sommes surtout dissemblables, par nos capacités et nos cheminements si différents.

Nos mondes ont-ils des richesses et des profondeurs variées selon nos aptitudes ? A l'évidence oui. Nous connaissons nombre de nos semblables dont nous admirons l'univers intérieur, plus large et nourri que le nôtre. Mais aussi d'autres dont le monde nous paraît bien étriqué. Chacun se construit une demeure à la mesure de ses moyens et de ce qui l'entoure, comme la chèvre broute autour de son piquet.

Certains astrophysiciens avancent des théories, dites des « multivers », selon lesquelles notre univers ne serait qu'un parmi d'autres. Je le constate à ma toute petite échelle personnelle. Mon propre univers existe dans ma tête, mais il y en a autant que d'humains vivant en même temps que moi. Si je ne pouvais concevoir au-delà du mien, j'y resterais enfermé. Heureusement mon monde personnel tient aussi compte, au moins un peu, de l'existence de ceux de tous mes semblables. Pas étonnant que l'on réalise aujourd'hui qu'il faut prendre de plus en plus en compte la complexité.

Cette singularité me rend unique, donc seul, même si je suis entouré par d'autres, dont la présence m'est agréable autant que vitale. Raison pour laquelle nous parvenons à bien vivre tous côte à côte. Une proximité n'est pas une connaissance, mais elle nous aide à palier notre solitude existentielle. Il n'y a pas là de quoi dramatiser cette condition, puisque la solitude est constitutive de notre condition d'humains autonomes. Mais si nous sommes par nature seuls, nous nous efforçons d'éviter d'être isolés.

En fait cette singularité/solitude est providentielle, car si les autres étaient et voyaient exactement comme moi, que pourraient-ils m'apporter ? Quand on fait une rencontre, on se raconte, on échange des informations et des impressions. C'est alors que je peux choisir soit d'aller plus loin dans la relation, soit, le cas le plus fréquent, d'en rester là. Mais en même temps que j'en apprends plus sur nos différences, j'explore les éventuelles similitudes et affinités. Une relation féconde se nourrit à la fois de nos dissemblances, grâce auxquelles l'autre nous complète, et de nos ressemblances qui rendent tentants les rapprochements. Là, comme dans tant de situations de la vie, j'essaye de trouver le juste équilibre entre des pôles qui peuvent paraître inconciliables.

Cet effort même rend ma vie plus intéressante. Que l'autre vive dans un monde qui lui est propre en fait à la fois sa complexité et sa richesse. Entrer en relation avec quiconque fait de moi un explorateur.

[…] L'AUTRE : un peu moi

Je dois tout aux autres. Parce que certains sont un peu moi, parce que tout ce que je sais, tout ce qui me permet de vivre me vient d'eux. Surtout dans une société d'aujourd'hui, produite et entretenue par un travail collectif incessant de milliards d'entre nous.

Seul, je ne peux pas me nourrir, me loger, me déplacer, m'instruire, me soigner, me divertir, ni surtout échapper à l'isolement. Ceux du passé ont construit ce pays où je me sens à l'aise. Ils m'ont légué des pensées, des traditions, des principes, des inventions qui rendent ma vie agréable ou simplement possible. Mes contemporains créent et fabriquent tout ce dont je peux avoir besoin et que je serais bien incapable de faire seul. Vivre grâce à tout ce qui me vient d'eux me remet à ma juste place : celle d'une minuscule partie d'un ensemble infiniment complexe.

Au-delà de ces évidences utilitaires mais nécessaires, les autres sont surtout pour moi les sources d'émotion, de stimulation, de désirs parfois, bref de vie. Parce qu'ils sont mes semblables, ils me complètent, parce qu'ils sont différents, ils m'enrichissent.

Donc, tout autre m'intrigue et m'importe. Il m'est par nature, inconnaissable. Il me reste à le découvrir constamment, par bribes. En même temps l'autre me permet de mieux me définir ; par effet miroir, par contraste, par comparaison, voire par antagonisme. Le désir que je peux aussi avoir de l'autre comporte l'espoir d'aménager ma solitude, et même, par instants de l'oublier.

D'ailleurs cette solitude existentielle est-elle une infortune ? Il est convenu de s'en plaindre, alors qu'elle découle de ma singularité de naissance, qui fonde ma liberté de vivre. Je suis

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main
seul du fait même que je suis vivant. S'en arranger est la grande affaire. Déplorer l'inévitable ne produit qu'une peine stérile. D'autant que je peux choisir librement d'être seul, quand j'en ressens le besoin. C'est d'être privé de ma solitude qui peut alors devenir une infortune.

Mais l'autre ne m'offre pas seulement sa compagnie, je suis partiellement fait de lui et il est aussi fait de moi. De bien des manières. D'abord génétique puisque, de même que nous sommes tous issus de poussières d'étoiles, je suis un cocktail des gènes de ma chaîne familiale biologique. N'est-il pas toujours troublant de retrouver en soi, dans son aspect ou son comportement, des traits que l'on pouvait constater chez nos ascendants ou collatéraux ? Si j'agis par instants comme mon père, est-ce génétique ou mimétique ? Souvent les deux à la fois. Mais ça signe aussi ce qui, dans mon destin, ne dépend pas de ma seule volonté et assure une continuité, même à mon insu.

L'essentiel de ce que j'ai appris, en bien et en moins bien, m'a été transmis par d'autres. Mes valeurs, mes références, mes exemples me sont venus d'eux, dès le début de mon existence, puis au long de mon parcours. Même en négatif. Ne pas vouloir ressembler à tel autre contribue tout autant à me définir. On se comprend soi-même autant par nos différences avec les autres que par nos similitudes.

[…] LE NOUS : il revient

S'il existe autant de mondes que d'individus singuliers, comment vivre ensemble ? La focalisation de nos contemporains sur la liberté de l'individu comme valeur fondamentale ne trouve-t-elle pas déjà ses limites ? Chacun a l'expérience plus ou moins occasionnelle, que plus je m'affirme comme individu, plus je ressens ma solitude. Cette dernière n'est pas négative par essence, mais demande, au long de ma vie, à être compensée, soutenue, complétée, bref, aménagée.

Le moment semble venu de retrouver le « nous », car l'individu triomphant, dont les droits légitimes ont été enfin reconnus, actés en loi, quasi sacralisés, a peut-être passé son apogée.

Un peu de bon sens suffit pour comprendre que mon autonomie est une fiction. L'individualisme dont se grisent les modernes que nous sommes rappelle nos illusions d'adolescents qui croyaient pouvoir s'affranchir de leurs parents. Il fallait probablement que cette soif d'émancipation s'exprime historiquement dans nos sociétés pour que nous prenions concrètement conscience de ses limites. Le moment semble venu de la dépasser pour aller plus loin en humanité.

[…] Il en était de même dans la principale cellule du nous et du vivre ensemble, la famille. Partout cette dernière reposait sur des hiérarchies méticuleuses, régissant les droits des hommes sur les femmes, comme ceux des parents sur les enfants. Les coutumes comme les religions étaient imposées dès le plus jeune âge et pérennisées une génération après l'autre. La première entrave à toute liberté, en particulier pour les femmes était familiale avant d'être politique ou sociale. Et trop rares encore sont les pays où cette contrainte s'est réellement desserrée. Dans nos nations où la parité entre les hommes et les femmes a fait de réels progrès, nous l'avons un peu vite oublié.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

L'idée neuve que chacun puisse vivre pleinement sa liberté d'être, formulée en Europe dès les Lumières, s'est déployée depuis le milieu du siècle dernier. Au moment même où les idéologies collectives s'effondraient et où les technologies de communication mettaient presque le monde entier à la portée de chacun, l'individualisme trouvait là son terrain fertile. Nous voici d'autant plus autonomes qu'hyperconnectés.

Mais un nouvel isolement en a résulté. Exemple banal : dans nos rapports de travail, les liaisons électroniques sont la règle courante. Nous envoyons couramment un même message à la fois à un collègue basé à Londres et à un autre dans le bureau mitoyen. Pour le premier, c'est une plus grande proximité ; pour le second, une plus grande mise à distance. Les mêmes adolescents qui échangent constamment des messages entre eux se rencontrent moins souvent en personne.

La propagation vertigineuse de nos contacts instantanés s'est faite au détriment de leur profondeur. En s'industrialisant, la relation à l'autre s'est diluée. Notre rayon d'action et notre solitude ont progressé au même rythme. A force de se vouloir cool, le rapport à l'autre s'est refroidi. Pourtant le besoin de chaleur et de proximité humaine reste aussi présent dans chaque individu, même émancipé. Par un habituel balancier de l'histoire, l'heure du retour au « nous » se rapproche. Mais sur des bases à réinventer.

Le nous, le groupe, la communauté, la famille, sont potentiellement, à la fois oppressant et chaleureux. L'individu récemment émancipé n'est pas encore prêt à aliéner sa toute nouvelle liberté, mais commence à ressentir l'attrait de liens non hiérarchiques, non pyramidaux, pour se rapprocher des autres. L'essor actuel des formes associatives et bénévoles en témoigne. D'autant que les Etats se désengagent de plus en plus de leurs tâches et responsabilités. Face à quoi les individus comprennent tout l'intérêt pratique de se regrouper, sur la base d'une coopération librement acceptée. Est-ce si nouveau que ça ?

Comment croire en effet que l'ensemble des créations humaines n'aient pu être réalisées que par des systèmes de contrainte ? Les villages, les villes, toutes les modalités de vie commune regroupant des populations sans cesse croissantes ont demandé une capacité de coopération et une imagination qu'aucune loi, aucune hiérarchie n'aurait pu imposer. Le monde actuel est tissé d'une infinité de cellules humaines de taille variable, non hiérarchisées mais où chacun reconnaît sa dépendance aux autres et en a besoin.

[…] Le nous s'impose là au moi, du simple fait que chacun comprend qu'il en est de son intérêt. Si on y ajoute que les réseaux sociaux permettent de mettre en faisceaux les intelligences et les créativités avec une efficacité sidérante, cette numérisation du nous peut amplifier un pas en avant dans la modernité.

Le progrès de nos sociétés libres passera par l'association d'individus libres dans des actions communes qui surpassent de loin les résultats de chacun. Nous sommes en train de passer des liens imposés par la tradition et la loi, aux associations et coopérations d'autant plus fructueuses qu'elles sont consenties. Dans la morale contemporaine, la prise en compte des autres s'est, heureusement, substituée aux injonctions venues du Ciel.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2018
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - Corrigé
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$.

   On pose $u = e^x$, $du = e^x dx$, et on en tire

   $$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx = \int_1^e \frac{du}{u+5} = \ln(e+5) - \ln 6$$

2. Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(2x)}$.

   En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées pour le dénominateur, puis la règle de dérivation d'un quotient, on trouve que

   $$f'(x) = \frac{\cos x \cos(2x) + 4\sin x \sin(2x)}{\cos^3(2x)}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

   En divisant numérateur et dénominateur par x, il vient immédiatement que la limite demandée est 0.

4. Donner la limite en $x = 1$ de la fonction de la question précédente.

   $$f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}.$$

   On simplifie la fraction par $(\sqrt{x}-1)$ et la limite cherchée est $1/4$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique.

   $$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

6. L'inscription à un concours de tir à l'arc est de 10 francs. Le laureat du concours reçoit 50 francs et gagne donc 40 francs au total ; le second reçoit 20 francs, le troisième 10 francs et les autres ne reçoivent rien (et perdent donc le montant de leur inscription). 10 concurrents de même qualité sont inscrits : quelle est l'espérance du gain de chacun d'eux ?

   Chaque joueur a une probabilité égale à 1/10 de gagner 40 francs, une probabilité égale à 1/10 de gagner 10 francs, une probabilité égale à 1/10 de ne rien gagner, et une probabilité égale à 7/10 de perdre sa mise, soit 10 francs. L'espérance du gain est donc

   $$40 \times \frac{1}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{10} - 10 \times \frac{7}{10} = -2$$

   soit une perte de 2 francs.

7. Donner la limite, si elle existe, de $(x-1)\ln(x^2-1)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

   $$(x-1)\ln(x^2-1) = (x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+1).$$

   Le premier terme tend vers 0 par la règle de comparaison des fonctions logarithme et puissances au voisinage de 0, et le deuxième terme ne pose pas de problème : la limite recherchée est donc 0.

8. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Que pouvez-vous dire de la convergence de la suite (u_n) ?

   $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1$, la suite (u_n^2) est donc une suite arithmétique qui tend vers $+\infty$: la suite (u_n) tend donc elle aussi vers l'infini.

9. Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (v_n) où $v_n = \ln u_n$ est une suite arithmétique. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de celle de (v_n).

   Soit r la raison de la suite (v_n). On a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{v_{n+1}-v_n} = e^r.$$

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = e^r$.

10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

    En posant $y = x^2 > 0$, l'équation devient $y^2 + 3y - 4 = 0$ dont la seule solution positive est $y = 1$. Les solutions réelles de l'équation considérée sont donc $x = 1$ et $x = -1$.

Exercice 2

1. On considère la fonction de la variable réelle

   $$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

   Etudier les variations de la fonction f en précisant notamment la nature de ses branches infinies.

   f est définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$. Par croissance comparée, sa limite à droite de 0 vaut $-\infty$, et il est immédiat sa limite à gauche de 1 vaut $-\infty$, sa limite à droite en 1 vaut $+\infty$, et sa limite

en $+\infty$ est 0. On en déduit que le graphe de f admet les asymptotes verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, ainsi que l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
La dérivée de f vaut

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

qui est donc nulle en $1/e$, positive si $x < 1/e$, et négative si $x > 1/e$. On complète le tableau de variations en remarquant que $f(1/e) = -e$

2. En vous aidant de la question précédente, montrer que la fonction

$$F(x) = \ln(-\ln(x))$$

est une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbf{R}$

Comme $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$, F est bien définie et continue sur $]0, 1[$ et on trouve que $F' = f$. D'après la question précédente, le maximum de f sur $]0, 1[$ est $-e < 0$, donc F est strictement décroissante sur cet intervalle. Enfin, on trouve directement que

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$$

d'où le résultat.

3. Trouver le point x tel que $F(x) = 0$ et écrire l'équation de la tangente en x du graphe de F. Quelle propriété remarquable le graphe a-t-il en ce point ?

Le point en question est $1/e$. Comme $f(1/e) = -e$, l'équation recherchée est

$$y = -e\left(x - \frac{1}{e}\right) = -ex + 1.$$

Enfin, on a vu que f' s'annule en $1/e$ en y changeant de signe : il s'agit donc d'un point d'inflexion de la courbe représentatrice de F.

4. Tracer le graphe de F.

Il se déduit des questions précédentes.

5. Montrer qu'il existe un unique réel $y \in]0, 1[$ tel que $F(y) = y$.

Entre 0 et 1, la fonction $G(x) = F(x) - x$ est continue et décroit strictement de $+\infty$ à $-\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule donc en un point unique, d'où le résultat.

Exercice 3 Soit a un nombre réel. Le but de l'exercice est de déterminer, selon la valeur de a, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{ax} = x + a \tag{1}$$

1. Répondre à la question posée quand $a = 0$.

Dans ce cas, l'équation s'écrit $1 = x$ et donc elle admet l'unique solution $x = 1$!

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2. On suppose $a < 0$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = e^{ax} - x - a$, et en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) dans ce cas.

   $f'(x) = ae^{ax} - 1 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Il est immédiat que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

   et donc f s'annule en un unique point x_0, qui est l'unique solution de l'équation (1) dans ce cas.

3. On suppose désormais que $a > 0$.

   (a) Montrer que la fonction f admet un unique minimum m en un point x_0 qu'on déterminera. Donner l'expression de m en fonction de a.

   On a $f'(x) = 0$ ssi $x = -\ln a/a$, $f'(x) > 0$ ssi $x > -\ln a/a$ et $f'(x) < 0$ ssi $x < -\ln a/a$ d'où le résultat demandé avec $x_0 = -\ln a/a$ et $m = (1 + \ln a - a^2)/a$.

   (b) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction

   $$g(y) = 1 + \ln y - y^2$$

   et montrer que g admet un maximum strictement positif au point $y_0 = \sqrt{2}/2$.

   g est bien définie sur $]0, +\infty[$, avec une asymptote verticale en 0 et une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$. Un calcul de dérivée immédiat prouve que g admet son maximum au point indiqué. Enfin, $g(\sqrt{2}/2) = 1 - \ln 2/2 - 1/4 > 1 - 0,35 - 0,25 = 0,4 > 0$ en utilisant le rappel fait au tout début de l'énoncé.

   (c) En déduire que l'équation $g(y) = 0$ admet deux solutions. L'une d'entre elles est évidente, placer la seconde (qu'on notera α) par rapport à $\sqrt{2}/2$.

   Comme $g(y)$, qui est une fonction continue, tend vers $-\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition, son graphe coupe l'axe des x une fois avant $\sqrt{2}/2$ et une fois après. Par ailleurs, $y = 1$ est une solution évidente de l'équation $g(y) = 0$, et par suite $\alpha < \sqrt{2/2}$.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de m en fonction de la valeur de a, puis le nombre de solutions de l'équation (1).
   Comme $m = -(1 + \ln a - a^2)/a$ avec $a > 0$, $m = -g(a)$ et est donc
   — négatif si $0 < a < \alpha$ ou $a > 1$: dans ce cas, f s'annule deux fois et l'équation (1) admet deux solutions ;
   — positif si $\alpha < a < 1$: dans ce cas, f ,ne s'annule pas et l'équation (1) n'admet pas de solution ;
   — nul si $a = \alpha$ ou $a = 1$: dans ce cas, f s'annule uniquement au point $x_0 = -\ln a/a$.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $\ln x \leq x/e$.

   Un rapide calcul de la dérivée de la fonction

   $$f(x) = \ln x - \frac{x}{e}.$$

   montre que cette fonction atteint son maximum au point e, et que ce maximum vaut 0.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx.$$

Calculer I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3 - 1}{3};$$

Par ailleurs, une intégration par parties prouve que

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^e x^2 (\ln x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

Pour $1 < x < e$, $0 < \ln x < 1$, donc $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ pour tout entier n : on en déduit que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante ; comme par ailleurs $x^2 (\ln x)^n > 0$, on en déduit que $I_n > 0$, et la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est minorée : elle est donc convergente.

4. En utilisant la question 1., montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

D'après la question 1.,

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx \\ &= \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{2+n} dx \\ &= \frac{1}{e^n} \frac{e^{n+3} - 1}{n+3} \\ &\leq \frac{e^3}{n+3}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tendant vers 0 avec n, la positivité de I_n permet de conclure via le théorème "des gendarmes".

5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}.$$

Par intégration par parties, en prenant $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, il vient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n. \end{aligned}$$

6. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} nI_n = e^3.$$

De la question précédente, on tire que

$$nI_n = \frac{3n}{n+1}\left(-I_{n+1} + \frac{e^3}{3}\right)$$

et le résultat s'ensuit dès qu'on se souvient que $I_{n+1} \to 0$.

Exercice 5 Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres réels vérifiant le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + z_3 &=& 1 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &=& 7 \\ z_1 z_2 z_3 &=& 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Montrer que $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -3$.

On part de
$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$$
et en reportant les valeurs des deux premières équations du système on aboutit directement au résultat demandé.

2. Ecrire $(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$ sous la forme $x^3 + ax^2 + bx + c$.
En développant, on trouve l'expression demandée avec $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ et $c = -z_1z_2z_3$.
3. En déduire les solutions du système (2).
D'après la question précédente, z_1, z_2 et z_3 sont donc racines de l'équation $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$. -1 étant une racine évidente de cette équation, il vient $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1) = (x + 1)(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$.
Les solutions du système (2) sont donc les triplets qui s'obtiennent par une permutation interne de $(-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Exercice 6 On considère l'équation

$$z^4 = -4 \tag{3}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est une solution de l'équation (3), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de cette équation.

   $(-z)^4 = z^4$ donc $-z$ est solution de cette équation. De plus, $\overline{z}^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$.

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Montrer de deux façons différentes que z_0 est solution de l'équation (3).

   on peut calculer directement

$$(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$$

   ou en passant par la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

4. Donner trois autres solutions de l'équation (3).

   D'après la première question, $-z_0$, $\overline{z_0}$ et donc $-\overline{z_0}$, c'est-à-dire $-1-i$, $1-i$ et $-1+i$ sont également solutions de l'équation (3).

Exercice 7 Une urne contient 8 boules blanches, 8 boules rouges et 8 boules noires. Pour tout entier k compris entre 1 et 8, une boule de chaque couleur porte le numéro k. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir sorti les boules blanches numérotées 1, 2 et 3.

   Il y a $\binom{24}{3}$ possibilités de tirer 3 boules parmi les 24 que contient l'urne. Un seul de ces tirages correspond au trois premières boules blanches, et la probabilité cherchée est donc $1/\binom{24}{3} = 1/1224$.

2. En déduire la probabilité d'avoir sorti trois boules non nécessairement de la même couleur, mais portant trois numéros consécutifs.

   Les séquences de nombres possibles vont de (1,2,3) à (6,7,8), il y en a donc 6. Pour chacune de ces séquences, chaque boule peut être de 3 couleurs différentes, il y a donc 27 possibilités de couleurs. La probabilité cherchée est donc $162/\binom{24}{3} = 81/1012$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^2\, Ln(x)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

On peut prolonger la fonction par zéro à l'origine. La dérivée de la fonction est égale à : $f'(x) = x(2\,Ln\,x + 1)$ et elle s'annule pour $x = 1/\sqrt{e}$. Le graphe de f admet une branche parabolique dans la direction verticale. De plus on a : $f(1) = 0$ et $\lim_{0} f'(x) = 0$

x	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	0 ↘ 1/2e	-	↗ $+\infty$

2. Etudier la convexité de la fonction f.

La dérivée seconde est égale à : $f''(x) = 2\,Ln\,x + 3$ qui s'annule pour $x = e^{-3/2}$. La fonction est convexe pour $x \geq e^{-3/2}$ et concave dans le cas contraire.

3. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

On procède par intégration par parties en posant : $u' = x^2 ; v = Ln\,x$ et on obtient :

$$I = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\,x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$$

4. Calculer $I_n = \int_1^e x^n\, Ln(x)\, dx$ pour tout entier supérieur à 1.

On procède encore par intégration par parties en posant : $u' = x^n ; v = Ln\,x$ pour obtenir :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\, x\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\, dx = \frac{1+ne^{n+1}}{(n+1)^2}$$

5. Déterminer la valeur du nombre réel α pour laquelle $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = l$, où l est un nombre réel non nul.

On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha I_n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (ne^{n+1}+1)}{e^n (n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1} e + n^\alpha e^{-n}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} e$ et cette limite est égale à e pour $\alpha = 1$

Exercice n° 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est définie sur $[-1,1]$ et elle est paire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe Oy. Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ et la fonction est décroissante sur $[0,1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

On a $I = 2\int_0^1 f(x)\, dx$ et en posant $x = \sin u$, on obtient

$$I = 2\int_0^1 \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\, du = \left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = (1+x)^2 e^{-x}$.

1. Etudier la convexité de f.
On obtient $f'(x) = e^{-x}\left[2(1+x) - (1+x)^2\right] = (1-x^2)e^{-x}$ et $f''(x) = e^{-x}\left[x^2 - 2x - 1\right]$
La dérivée seconde s'annule pour $x = 1 \pm \sqrt{2}$ et la fonction est convexe sur $]-\infty, 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
Cette fonction est toujours positive et nulle en -1. Elle admet une branche parabolique dans la direction Oy quand $x \to -\infty$ et l'axe Ox comme asymptote quand $x \to +\infty$. La fonction est décroissante sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et croissante entre -1 et 1, avec $f(-1) = 0; f(1) = 4/e$

3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

La fonction *f* admet une primitive *F* de la forme : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ et en identifiant les coefficients, on obtient : $F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$, d'où $I = F(1) - F(0) = \frac{-10 + 5e}{e} > 0$

4. Pour *n* entier strictement supérieur à 1, on pose $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$. Etudier, selon les valeurs de *n*, les variations de f_n et tracer son graphe.

La dérivée vaut $f_n'(x) = (1+x)^{n-1} e^{-x}(n-1-x)$ qui s'annule pour $x = -1$ et $x = n-1$;

On peut remarquer que l'expression $(1+x)^{n-1}$ dans la dérivée change de signe pour *n* pair mais ne change pas si *n* est impair pour 1 + x < 0 .

Si *n* est pair, la fonction est décroissante sur $]-\infty,-1[$, croissante sur $]-1,n-1[$ et décroissante sur $]n-1,+\infty[$

Si *n* est impair, la fonction est croissante sur $]-\infty,-1[$, croissante sur $]-1,n-1[$ et décroissante sur $]n-1,+\infty[$

Dans tous les cas, on a une branche parabolique dans la direction verticale à $-\infty$, et l'axe Ox est asymptote à $+\infty$

5. Résoudre l'équation $f_n(x) = e^x$ pour *n* >2 et *x* >-1.

Il faut résoudre $(1+x)^n e^{-x} = e^x$ ou encore $(1+x)^n = e^{2x}$ et par passage au logarithme $y = n\,Ln(1+x) - 2x = 0$

On obtient : $y' = \frac{n}{1+x} - 2$ qui est nulle pour $x = \frac{n-2}{2}$. Posons $a_n = n\,Ln(n/2) - (n-2) > 0$

La fonction *y* est strictement croissante et continue de $\left]-1,\frac{n-2}{2}\right[$ sur $]-\infty,a_n[$, elle est donc bijective et 0 est la seule valeur qui annule *y*.

La fonction *y* est strictement décroissante et continue de $\left]\frac{n-2}{2},+\infty\right[$ sur $]a_n,-\infty[$, elle est donc bijective et admet une unique valeur (qui dépend de *n*) qui annule *y*.

Exercice n° 4

Soit *f* la fonction numérique définie sur $[-1,1]$ par :

$f(-1) = f(1) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in]-1,1[$

1. Etudier la dérivabilité de *f* en $x = 1$ et $x = -1$.

La fonction étant paire, il suffit d'étudier la dérivabilité en $x = 1$

On a : $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{x-1} = \lim_{u\to+\infty} (u\,e^{-u/2}) = 0$, en posant u = 1/(1-x), u tend vers +∞,et la fonction est dérivable.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de f, pour $x \in]-1,1[$, est égale à : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} f(x)$ avec $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$

La fonction est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ et son graphe symétrique par rapport à l'axe Oy.

3. Résoudre l'équation $f(x) = e^x$

On doit résoudre : $\frac{x^2}{x^2-1} = x$, soit $x^3 - x^2 - x = 0$, à savoir $x = 0$ et $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mais $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, donc on a que deux solutions : $x = 0$ et $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Exercice n° 5

Soit a un nombre réel fixé supérieur ou égal à 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1]$ et la relation dé récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n}{a} + \frac{u_n^2}{a^2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée

Il est évident par récurrence que la suite est toujours positive.

Comme $u_0 \leq 1$, on vérifie par récurrence que pour tout n, $u_n \leq 1$;

En effet $u_{n+1} = \frac{u_n}{a} + \frac{u_n^2}{a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$ et cette expression sera inférieure à 1 si $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \leq 1$, à savoir $a^2 - a - 1 \geq 0$, ce qui est vérifié puisque $a \geq 2$

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Comme la suite est à termes positifs, on peut considérer le rapport : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a} + \frac{u_n}{a^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$

donc la suite est décroissante.

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = \frac{l}{a} + \frac{l^2}{a^2}$, d'où $l = 0$ ou $l = a(a-1)$. ? Comme la suite est décroissante, elle converge vers 0.

4. On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{4} + \frac{3}{4}$ et $v_0 \in]1,2]$

Etudier la convergence de la suite (v_n) (On pourra suivre la même démarche que pour la suite précédente (u_n)).

On vérifie par récurrence que la suite est bornée : $1 < v_n \leq 2$

On a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}(v_n-1)(v_n-3)$. Comme $1<v_n\leq 2$, le premier terme est positif et le second est négatif, la suite est donc décroissante.
Comme cette suite est minorée et décroissante, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation : $l=\frac{l^2}{4}+\frac{3}{4}$, d'où $l=1$ ou $l=2$. Comme la suite est décroissante, elle converge vers 1.

Exercice n° 6

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

1. La fonction *f* est-elle prolongeable par continuité à droite en zéro ?

On a : $\lim_{0^+} f(x)=\lim_{0^+}\frac{1+\frac{1}{2}x-1}{x}=\frac{1}{2}$, donc on peut prolonger *f* par continuité en posant $f(0)=1/2$

2. La fonction *f* est-elle dérivable à droite en zéro ?

On a au voisinage de zéro : $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, d'où
$\lim_{0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{0^+}\frac{2(\sqrt{1+x}-1)-x}{x^2}=\lim_{0^+}\frac{2(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-1)-x}{x^2}=-\frac{1}{8}$, donc la fonction est dérivable à droite en zéro.

3. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.
On remarque que $f(x)>0$ et que $\lim_{+\infty} f(x)=0$, donc l'axe Ox est une asymptote au graphe de *f*. La dérivée de *f* est égale à : $f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x}-(2+x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et cette dérivée est du signe de $u(x)=2\sqrt{1+x}-(2+x)$. On a : $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1<0$, donc u est strictement décroissante sur R^+ à valeurs dans R^-, donc u est négative et f' aussi. La fonction *f* est décroissante de ½ à zéro.

4. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$

On remarque que $u_n=f(1/n)$ et donc $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{x\to 0} f(x)=1/2$, la suite est donc convergente vers 1/2
On peut aussi calculer directement la limite en multipliant par la quantité conjuguée.