INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie A**
**PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**
**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Attention !**

**L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).**

**Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.**

Dans tous les exercices, **R** désigne l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes, et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{1}$$

## Exercice 1

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.
2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.
3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.
4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.
5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.
6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de $f$.

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

9. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{3 - u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite $(u_n)$.

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

**Exercice 2**

1. $a$ étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   (b) Etudier les variations de la fonction $f$ en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de $f$ dans le cas où $a = 4$.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

   (a) Déduire de la question précédente que pour tout $n$, $u_n > \sqrt{a}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

3. On considère désormais la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

   (a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

   (b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que $10^{-4}$ dès la troisième itération.

**Exercice 3**

1. On considère la fonction $\phi$ qui à $x$ associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction $\phi$ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

   (b) Calculer la dérivée $\phi'$ de $\phi$, et en déduire le tableau de variations de $\phi$.

   (c) Faire l'étude des branches infinies de $\phi$

   (d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera $\alpha$, par rapport à $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction $f$ qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{\left(x-x^2\right)\ln x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de $x$.

   (c) Donner la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

   (d) Dresser le tableau de variations de $f$.

   (e) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

   (f) Dessiner la courbe représentative de $f$.

**Exercice 4**

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

1. (a) Calculer $I_0$ et $I_1$ (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

   pour tout $x \in [0,1]$).

   (b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

   (c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

2. Soit $g$ la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   (a) Etudier le signe de $g$ sur $\mathbf{R}^+$.

   (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

**Exercice 5**

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où $\lambda$ désigne un paramètre réel.
2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a) = f(b)$.
   (a) Montrer que $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$.
   (b) En déduire que $a = b$.

**Exercice 6** On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Ecrire $z_1$ sous forme trigonométrique.
2. Ecrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
3. En déduire la forme trigonométrique de $z_2$.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

**Exercice 7** Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à $n$ ont été distribués aléatoirement à $n$ candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis $A$ et $B$ participent à cette épreuve. On note $n_A$ et $n_B$ leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples $(n_A, n_B)$ possibles ?
2. Soit $r$ un entier tel que $1 \leq r \leq n - 1$. Montrer que $2(n - r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.
3. Quel est l'écart le plus probable entre $n_A$ et $n_B$ ?
4. Quel est l'écart moyen entre $n_A$ et $n_B$ ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

## Sujet n° 1

Quel rôle peut jouer l'agriculture sur le continent africain, notamment en termes de développement et d'innovation ?

## Sujet n° 2

Beaucoup de pays occidentaux se convertissent progressivement à l'économie verte et au recyclage, notamment le recyclage des produits manufacturés et des déchets de toutes sortes afin d'en limiter les effets polluants. De quelle façon les pays africains peuvent-ils s'intéresser à l'économie du recyclage ? Pour quels besoins ? Selon quelles modalités ?

## Sujet n° 3

Différents pôles de formation émergent progressivement au sein du continent africain (Enseignement supérieur, Enseignement technique, Recherche et innovation). Quels rôles peuvent-ils jouer pour les pays concernés voire pour une région donnée ?

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

# 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Dans toute l'épreuve, $Ln$ désigne le logarithme népérien, $e$ le nombre de Néper et $R$ l'ensemble des nombres réels.

## Exercice n° 1

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f(x) = x\,Ln\,x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de $f$ et tracer son graphe.

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$, non nul :

$$x\,Ln\,x - (2+a)\,x = 0$$

3. Pour $\alpha > 0$, calculer $\underset{\alpha \to 0}{Lim} \int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx$

## Exercice n° 2

On considère la fonction $f$ définie sur $R$ par : $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de $f$ et tracer son graphe.

2. Etudier la convexité de $f$.

3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

## Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de $x$, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Pour $x$ non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\, dx$

2. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} f(x)\, dx$

3. Expliciter $f$ (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur $R$

## Exercice n° 4

1. Résoudre dans $C$ (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1} = i$

2. Soient $M$, $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z$, 1 et 2. On suppose que $M$ est distinct de $A$ et $B$.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$ ;
- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

3. Résoudre dans $C$, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$

## Exercice n° 5

Pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions $f_n$ sur $R$ par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de $f_1$ et tracer son graphe.

2. Comparer les graphes de $f_{2n}$ et $f_{2n+1}$.

3. Pour $p$ entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

4. Déterminer $\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} f_n(x)\, dx$

## Exercice n° 6

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n + 1)$, où $a$ est un paramètre réel.

1. Déterminer $a$ pour que cette suite soit constante.

2. Déterminer $a$ pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)$ pour $a > 0$.

## Exercice n° 7

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit $X$ la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de $X$.

2. Calculer l'espérance de $X$. Ce résultat était-il prévisible ?

3. Un joueur mise une unité monétaire sur $X$.
Si $X$=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si $X$=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si $X$=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie A

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Yuval Noah Harari intitulé *: « 21 leçons pour le 21ème siècle »* paru aux éditions Albin Michel en 2018.

*Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.*

*Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.*

**Education : La seule constante est le changement**

L'humanité est confrontée à des révolutions sans précédent, tous nos vieux récits s'émiettent, et aucun nouveau récit n'est jusqu'ici apparu pour les remplacer. Comment nous préparer, nous et nos enfants, à ce monde de transformations inédites et d'incertitudes radicales ? Un bébé qui naît aujourd'hui aura trente et quelques années en 2050. Si tout va bien, il sera encore là en 2100 et pourrait bien être un citoyen actif du XXIIème siècle. Que devrions-nous enseigner à ce bébé pour l'aider à survivre et à s'épanouir dans le monde de 2050 ou du XXIIème siècle ? De quel genre de compétences aura-t-il besoin pour trouver un emploi, comprendre ce qui se passe autour de lui et se repérer dans le dédale de la vie.

Hélas, personne ne sachant de quoi le monde aura l'air en 2050 –pour ne pas parler de 2100-, ces questions demeurent sans réponses. Bien entendu, les hommes n'ont jamais su prédire l'avenir avec exactitude. Mais c'est aujourd'hui plus difficile que jamais : en effet, dès lors que la technologie nous permet d'intervenir dans le corps, le cerveau et les esprits, nous ne pouvons plus être sûrs de rien, y compris de ce qui semblait fixe et éternel.

Voici un millier d'années en 1018, il y a beaucoup de choses que les gens ignoraient de l'avenir, mais ils n'en étaient pas moins convaincus que les traits de base de la société humaine n'allaient pas changer. Si vous viviez dans la Chine de 1018, vous saviez qu'en 1050 l'empire des Song pouvait s'effondrer, que les Khitan pouvaient envahir le pays par le nord et que les épidémies pouvaient faire des millions de morts. En revanche, il était clair qu'en 1050, la plupart travailleraient toujours comme paysans et tisserands, que les souverains continueraient de recruter des hommes pour leurs armées et leurs bureaucraties, que les hommes domineraient encore les femmes, que l'espérance de vie tournerait autour de quarante ans et que le corps humain serait exactement le même. Dans la Chine de 1018, donc, les parents pauvres apprenaient à leurs enfants à planter du riz et à tisser la soie ; les plus riches apprenaient aux garçons à lire les classiques confucéens, à pratiquer la calligraphie et à se battre à cheval ; aux filles à être des épouses pudiques et soumises. A l'évidence, ces talents seraient encore nécessaires en 1050.

Aujourd'hui, au contraire, nous n'avons aucune idée de quoi la Chine ou le reste du monde auront l'air en 2050. Nous ne savons pas comment les gens gagneront leur vie, comment les armées ou les bureaucraties fonctionneront, ni à quoi ressembleront les relations entre hommes et femmes. D'aucuns vivront probablement bien plus longtemps qu'aujourd'hui. Du fait du génie biologique et des interfaces directes cerveau-ordinateur, le corps humain lui-même pourrait bien subir une révolution sans précédent. Une bonne partie de ce que les enfants apprennent aujourd'hui n'aura probablement plus aucune pertinence en 2050.

A l'heure actuelle, trop d'écoles privilégient l'accumulation d'information. Cela avait du sens autrefois parce qu'elle était rare et que la censure coupait régulièrement sa lente diffusion. En 1800, l'habitant d'une petite ville provinciale du Mexique ne pouvait pas savoir grand-chose du monde : il n'y avait ni radio, ni télévision, ni quotidiens ni bibliothèques publiques. La situation était largement la même dans les villes de province en Russie, en Inde, en Turquie ou en Chine. Apprenant à chaque enfant à lire et à écrire tout en lui inculquant des rudiments de géographie, d'histoire et de biologie, les écoles modernes représentèrent un immense progrès.

[…] Au XXIème siècle, à l'opposé, nous sommes inondés d'énormes quantités d'informations.

Des habitants du monde entier sont à un clic des toutes dernières informations sur le bombardement d'Alep ou la fonte de la calotte glacière dans l'Arctique, mais les versions contradictoires sont si nombreuses qu'il est difficile de savoir laquelle croire. En outre, bien d'autres choses sont à portée de clic, ce qui ne nous aide pas à nous concentrer. Quand la politique ou la science paraissent trop compliquées, il est tentant de passer à des vidéos amusantes de chats, ou des échos sur les stars.

Dans un tel monde, donner plus d'informations à ses élèves est la dernière chose qu'ait besoin de faire un enseignant. Ils en ont déjà beaucoup trop. Il leur faut plutôt apprendre à en dégager le sens, à distinguer l'important de l'insignifiant, et surtout à associer les multiples bribes d'informations en une vision d'ensemble du monde

[…] Que devrions-nous donc enseigner ? De nombreux spécialistes de pédagogie affirment que les écoles devraient passer à l'enseignement des « quatre C » : pensée critique, communication, collaboration et créativité. Plus généralement les écoles devraient minimiser l'importance des compétences techniques pour privilégier les compétences générales nécessaires dans la vie courante. La plus importante de toutes sera la capacité d'affronter le changement, dans des situations peu familières. Pour être à la hauteur du monde de 2050, il faudra non seulement inventer des idées et des produits, mais d'abord et avant tout se réinventer sans cesse.

En effet, avec l'accélération du changement, l'économie, mais aussi le sens même de « l'être humain » sont susceptibles de se transformer. Dans le Manifeste communiste de 1848, Marx et Engels déclaraient déjà que « tout ce qui est solide se volatilise ». Mais ils pensaient surtout aux structures sociales et économiques. En 2048, les structures physiques et cognitives se volatiliseront elles aussi dans l'air ou dans un cloud de bits de données.

En 1848, des millions de gens quittaient les fermes de leurs villages pour aller travailler en usine dans les grandes villes. Là, il était peu probable de les voir changer de sexe ou ajouter un sixième sens. Et s'ils trouvaient du travail dans une usine textile, ils pouvaient espérer le conserver jusqu'à la fin de leur vie active.

[…] Mais ne prenez pas ce scénario à la lettre. Nul ne saurait prédire les changements précis dont nous serons les témoins. Tout scénario particulier risque d'être bien loin de la vérité. Si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela ait des airs de science-fiction, probablement sa description est-elle fausse. Mais si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela n'ait pas des airs de science-fiction, sa description est certainement fausse. Nous ne pouvons être sûrs des détails ; la seule certitude, c'est le changement. Un tel changement en profondeur peut fort bien transformer la structure élémentaire de la vie et faire de la discontinuité son trait saillant (1). Depuis des temps immémoriaux, la vie se divisait en deux parties complémentaires : une période d'apprentissages, suivie d'une période de travail. Dans la première, vous aviez accumulé des informations, acquis des compétences, élaboré une vision du monde et construit une identité stable. Même si à quinze ans vous passiez le plus clair de votre journée à travailler dans le champ de riz familial (plutôt qu'à l'école), votre activité la plus importante était d'apprendre : à cultiver le riz, à négocier avec les marchands cupides de la grande ville et à résoudre des conflits avec les autres villageois sur des questions de terre et d'eau. Dans la seconde partie, vous vous en remettiez à vos connaissances accumulées pour naviguer dans le monde, gagner votre vie et contribuer à la société. Bien entendu, à cinquante ans, vous continuiez à apprendre des choses nouvelles sur le riz, les marchands et les conflits, mais ce n'étaient que des petits ajustements de capacités bien rodées ?

Au milieu du XXIème siècle, l'accélération du changement et l'allongement de la durée de la vie rendront ce modèle traditionnel obsolète. La vie craquera aux entournures, il y aura de moins en moins de continuité entre les différentes périodes de l'existence. « Qui suis-je ? » sera une question plus urgente et compliquée que jamais.

Cela induira probablement des niveaux de stress considérables. Car le changement est presque toujours stressant. Passé un certain âge la plupart des gens n'aiment pas changer. A quinze ans, votre vie entière est changement. Le corps grandit, l'esprit se développe, les relations s'approfondissent. Tout est en mouvement, tout est nouveau. Vous êtes occupé à vous inventer. La plupart des ados s'en effraient, mais c'est aussi excitant. De nouveaux horizons s'offrent à vous, vous avez un monde à conquérir.

A cinquante ans, vous n'avez pas envie de changement ; la plupart ont alors renoncé à conquérir le monde. J'ai déjà été là, j'ai déjà fait çà, acheté ce T-shirt. Vous préférez de beaucoup la stabilité. Vous avez tellement investi dans vos compétences votre carrière, votre identité et votre vision du monde que vous n'avez aucune envie de tout recommencer. Plus vous avez travaillé dur pour construire quelque chose, plus il vous est difficile de le lâcher pour faire place à du nouveau. Vous pourriez encore apprécier les expériences nouvelles et les petits ajustements, mais à la cinquantaine, la plupart des gens ne sont pas prêts à chambouler les structures profondes de leur identité et de leur personnalité.

Il y a des raisons neurologiques à cela. Bien que le cerveau adulte soit plus flexible et changeant qu'on ne le pensait autrefois, il reste moins malléable que celui d'un adolescent. Reconnecter les neurones et recâbler les synapses est une tâche sacrément difficile. Au XXIème siècle cependant, on ne peut guère se permettre la stabilité. Si vous essayez de vous accrocher à une identité stable, un travail ou une vision du monde, vous risquez fort de vous retrouver en rade tandis que le monde continuera sa course folle. L'espérance de vie étant susceptible d'augmenter, vous pourriez passer des décennies dans un état de fossile paumé. Pour garder une pertinence –économique, mais aussi sociale-, un jeune de cinquante ans devra être capable d'apprendre et de se réinventer constamment.

L'étrangeté devenant la nouvelle norme, vos expériences passées, comme celles de toute l'humanité, deviendront des guides moins fiables. Les individus et l'humanité dans son ensemble devront de plus en plus affronter des choses que personne n'aura encore jamais rencontrées : machines super-intelligentes, corps modifiés, algorithmes capables de manipuler vos émotions avec une mystérieuse précision, enchaînement rapide de cataclysmes climatiques produits par l'homme et nécessité de changer de profession tous les dix ans. Face à une situation totalement inédite, quelle est la bonne attitude ? Comment se conduire quand on est inondé d'énormes quantités d'information et qu'il n'y a absolument aucun moyen de l'absorber et de l'analyser dans sa totalité ? Comment vivre dans un monde où l'incertitude n'est pas un bug, mais un trait caractéristique ?

Pour survivre et s'épanouir dans un monde pareil, il faut beaucoup de souplesse mentales et de grandes réserves d'équilibre émotionnel. Vous devrez vous défaire régulièrement d'une partie de ce que vous connaissez le mieux pour vous sentir à l'aise dans l'inconnu.

[…] Mais alors, à quoi se fier ? A la technologie ? C'est un pari encore plus risqué. Elle peut vous aider beaucoup, mais si elle prend trop d'ascendant dans votre vie, vous pouvez devenir l'otage de son ordre du jour. Voici des milliers d'années, les humains ont inventé l'agriculture, mais cette technologie n'a enrichi qu'une minuscule élite tout en asservissant la majorité. De l'aube au crépuscule, la plupart des gens étaient occupés à arracher des herbes sauvages, à porter des seaux d'eau et à ramasser le blé sous un soleil de plomb. Vous pouvez devenir victime du même schéma.

La technologie n'est pas mauvaise en soi, si vous savez ce que vous voulez dans la vie, elle peut vous aider à l'obtenir. Si vous ne le savez pas, ce sera un jeu d'enfants pour elle de façonner vos objectifs à votre place et de prendre le contrôle de votre existence. La technologie parvenant à mieux comprendre les humains, vous pourriez vous retrouver de plus en plus à son service au lieu d'être servi par elle.

[…] Afin de réussir dans cette tâche aussi redoutable, il vous faudra consentir de gros efforts pour mieux connaître votre système opératoire. Savoir qui vous êtes et ce que vous attendez de la vie. C'est bien entendu le plus vieux conseil du monde : connais-toi toi-même. Depuis des milliers d'années, philosophes et prophètes pressent les gens de se connaître, mais ce conseil n'a jamais été plus impérieux qu'au XXIème siècle parce que la concurrence est autrement plus sérieuse aujourd'hui qu'au temps de Lao-Tseu ou de Socrate. Coca-Cola, Amazon, Baidu et l'Etat sont tous engagés dans une course pour vous hacker, vous pirater. Pas uniquement votre Smartphone, votre ordinateur ou votre compte en banque, mais vous-même et votre système opératoire organique. Sans doute avez-vous entendu dire que nous vivons à l'époque du piratage des ordinateurs, mais ce n'est guère qu'une moitié de la vérité. En vérité, nous sommes entrés dans l'ère du hacking des êtres humains. Dès maintenant, les algorithmes vous surveillent. Ils observent vos déplacements, vos achats, vos rencontres. Bientôt, ils surveilleront vos pas, votre respiration, les battements de votre cœur. Ils s'en remettent aux Big Data et à l'apprentissage automatique pour vous connaitre de mieux en mieux. Et du jour où ces algorithmes vous connaîtront mieux que vous ne vous connaissez vous-mêmes, ils pourront vous contrôler et vous manipuler sans que vous n'y puissiez grand-chose. Vous vivrez dans la matrice (2) ou dans le Truman Show. Somme toute, c'est une simple question empirique : si les algorithmes comprennent ce qui se passe en vous réellement mieux que vous ne le comprenez, c'est à eux que reviendra l'autorité.

Bien entendu, vous pourriez être heureux de céder toute l'autorité aux algorithmes et de les laisser décider pour vous et le reste du monde. En ce cas, détendez-vous, et bon voyage ! Vous n'avez rien à faire. Les algorithmes s'occuperont de tout. Si toutefois, vous voulez garder un certain contrôle sur votre existence personnelle et l'avenir de la vie, vous devez courir plus vite que les algorithmes, plus vite qu'Amazon et l'Etat, et apprendre à vous connaître avant eux. Pour courir vite, ne prenez pas trop de bagages. Abandonnez toutes vos illusions, elles sont trop lourdes.

(1) - saillant : marquant, remarquable.

(2) - matrice : moule qui permet de reproduire une forme.

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA-YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-DAKAR

AVRIL 2019
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie A**
**PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**
**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Attention !**

**L'exercice 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice 1 étant notée sur 1 point).**

**Toutefois cet exercice n'entre que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.**

Dans tous les exercices, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et ln le logarithme népérien. On rappelle l'égalité, pour tout entier $k \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \qquad (1)$$

**Exercice 1**

1. Calculer sous la forme la plus simple possible $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.

   Il vient directement que

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x} &= \ln\ln 4 - \ln\ln 2 \\ &= \ln(2\ln 2) - \ln\ln 2 \\ &= \ln 2 + \ln\ln 2 - \ln\ln 2 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

2. Donner le domaine de définition et la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.

   $f$ est définie sur $]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$ et pour tout $x$ de son domaine de définition,

$$f'(x) = \frac{3}{x\,(\ln x + 1)^2}$$

3. Donner la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{4x^3-1}{x^2}}$.

   Quand $x \to +\infty$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to +\infty$ et donc $f(x) \to +\infty$.

4. Donner la limite en $x = 0$ de la fonction de la question précédente.

   Quand $x \to 0$, $(4x^3 - 1)/x^2 \to -\infty$ et donc $f(x) \to 0$.

5. Ecrire le nombre complexe $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

   $z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

6. Si on vous demande d'étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos x},$$

   expliquer quel intervalle d'étude vous choisissez, et comment vous étendez vos résultats à l'ensemble du domaine de définition de $f$.

   $f$ est de période $\pi$, et impaire. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, d'en déduire par parité l'étude sur $]-\pi/2, 0]$ puis de compléter par périodicité à l'ensemble de définition de $f$ (c'est-à-dire $\mathbf{R}$ privé des points de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec $k$ entier).

7. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10. On sort trois boules simultanément. Donner la probabilité pour que le numéro d'au moins une de ces boules soit un multiple de 5.

   Il existe $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles de 3 de ces 10 boules. Comme les boules 5 et 10 sont les seules dont le numéro est un multiple de 5, il reste 8 boules dont les numéros ne sont pas des multiples de 5, et donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles de 3 boules parmi ces 8. La probabilité qu'au moins une des boules tirées soit un multiple de 5 est donc

$$p = 1 - \frac{336}{720} = \frac{8}{15}.$$

8. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$.

   En multipliant au nominateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve

$$u_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

   et donc la suite $(u_n)$ tend vers $1/2$.

9. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$$

pour $n \geq 1$. On admettra que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique, et en déduire l'étude de la convergence de la suite $(u_n)$.

Un calcul sans problème montre que $v_{n+1} = v_n - 1/2$. Par conséquent, la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique tendant vers $-\infty$, et comme $u_n = 1 + 1/v_n$, on en déduit que $u_n$ tend vers 1.

10. Résoudre l'equation $x^2 + ix + 1 = 0$ dans $\mathbf{C}$, puis dans $\mathbf{R}$.

Le discriminant de cette équation vaut -5 : les solutions dans $\mathbf{C}$ sont donc $i(-1+\sqrt{5})/2$ et $i(-1-\sqrt{5})/2$. Il n'y a pas de solution réelle.

**Exercice 2**

1. $a$ étant un réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie pour tout $x > 0$.

(a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

On se ramène à une équation du second degré dont l'unique solution positive est $x = \sqrt{a}$.

(b) Etudier les variations de la fonction $f$ en précisant notamment la nature de ses branches infinies, et tracer le graphe de $f$ dans le cas où $a = 4$.

La dérivée de $f$, définie pour tout $x > 0$, vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

et est donc négative pour $x < \sqrt{a}$, nulle en $\sqrt{a}$, et positive pour $x > \sqrt{a}$. On en déduit que $f$ est décroissante sur $]0, \sqrt{a}[$, et croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$. Un calcul immédiat montre qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = 0$, et que $f$ tend vers l'infini en l'infini. Comme $f(x) - x/2$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit l'asymptote oblique $y = x/2$, la courbe de $f$ restant au-dessus de l'asymptote. Le graphe de $f$ s'en déduit aisément.

2. On considère un nombre $u_0 > \sqrt{a}$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(a) Déduire de la question précédente que pour tout $n$, $u_n > \sqrt{a}$.

Comme $f$ est croissante sur $]\sqrt{a}, +\infty[$, partant de $u_0 > \sqrt{a}$, une récurrence immédiate prouve que si $u_n > \sqrt{a}$, $u_{n+1} = f(u_n) > f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ d'où le résultat

(b) Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone, et convergente vers une limite qu'on précisera.

D'après la question précédente, $f(u_n) < 1/2(u_n + u_n^2/u_n) = u_n$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers une limite $l$ vérifiant $f(l) = l$, et on tire de la première question que $l = \sqrt{a}$.

3. On considère désormais la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - \sqrt{a}$

(a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$.

Il suffit d'écrire $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de tout mettre au même dénominateur pour obtenir le résultat.

(b) En déduire que $v_n \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{v_0}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

Il suffit d'exprimer que $u_n > a$ dans l'égalité précédente, et de raisonner par induction.

4. Déduire de ce qui précède une méthode pour approcher numériquement la racine carrée d'un nombre donné.

Pour approcher numériquement $\sqrt{a}$, il suffit de partir d'une valeur $u_0 > \sqrt{a}$ (par exemple $a$ si $a > 1$ ou 1 si $a < 1$), et d'itérer la suite $u_n$.

5. Montrer que si on veut approcher $\sqrt{5}$ par cette méthode en partant de $u_0 = 3$, la précision est meilleure que $10^{-4}$ dès la troisième itération.

En utilisant que $\sqrt{5} < 3$ et que $\sqrt{5}^{2^n} = 5^{2^{n-1}}$, on trouve que $v_3 < 3,75 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, d'où le résultat.

**Exercice 3**

1. On considère la fonction $\phi$ qui à $x$ associée

$$\phi(x) = \ln x + \frac{1-x}{1-2x}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction $\phi$ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine de définition.

   $\phi$ est définie sur $]0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$. Elle a pour limites $-\infty$ en $0^+$, $+\infty$ en $1/2^-$, $-\infty$ en $1/2^+$, et $+\infty$ en $+\infty$.

   (b) Calculer la dérivée $\phi'$ de $\phi$, et en déduire le tableau de variations de $\phi$.

   Un calcul standard montre que

$$\phi'(x) = \frac{1-4x+5x^2}{(1-2x)^2}.$$

   Le signe du numérateur est constant, donc on a $phi'(x) > 0$ pour tout $x$ appartenant au domaine de définition de $\phi$. Par suite, $\phi$ est croissante sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$, d'où le tableau de variations.

   (c) Faire l'étude des branches infinies de $\phi$

   $\phi$ admet deux asymptotes verticales, d'équations $x = 0$ et $x = 1/2$. De plus, en $+\infty$, $\phi(x)/x$ tend vers 0 en vertu de la croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissances, donc $\phi$ y admet une branche parabolique de direction l'axe $Ox$.

   (d) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet deux solutions. Donner la solution évidente, et placer l'autre, qu'on notera $\alpha$, par rapport à $1/2$.

   $\phi$ est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc une fois sur chacun de ces intervalles. 1 est une solution évidente de l'équation $\phi(x) = 0$, l'autre solution $\alpha$ se trouve donc entre 0 et $1/2$.

2. On s'intéresse maintenant à la fonction $f$ qui à $x > 0$ associe

$$f(x) = e^{(x-x^2)\ln x}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$.

   Par un calcul standard,

$$f'((x) = [(1-2x)\ln x + 1 - x]\, e^{(x-x^2)\ln x}.$$

(b) En vous aidant de la partie précédente, déterminer le signe de $f'(x)$ selon la valeur de $x$.

$(1-2x)\ln x + 1 - x$ est du même signe que $\phi(x)$ si $x < 1/2$, et de signe contraire si $x > 1/2$. Par suite $f'(x)$ est négatif si $0 < x < \alpha$ ou $x > 1$, positif si $\alpha < x < 1$ (on vérifie directement que $f'(1/2) > 0$).

(c) Donner la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers l'infini, et en déduire la nature de la branche infinie correspondante.

On trouve directement que la limite de $f$ en l'infini vaut 0, et que $f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

(d) Dresser le tableau de variations de $f$.

Il se déduit des question précédentes, en notant que $f(1) = 1$, et que $f(x)$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0.

(e) Montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

comme $x \ln x$ tend vers 0 en 0, la limite de $f'(x)$ à droite de 0 vaut $-\infty$, et on a donc une demi-tangente verticale en ce point.

(f) Dessiner la courbe représentative de $f$.

Elle se déduit de ce qui précède.

**Exercice 4**

On considère la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)dx.$$

1. (a) Calculer $I_0$ et $I_1$ (on pourra remarquer que

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

pour tout $x \in [0, 1]$).

$I_0 = [\ln 2]_0^1 = \ln 2$.
Pour $I_1$, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\ &= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx \\ &= \ln 2 - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \text{ (en utilisant l'indication de l'énoncé)} \\ &= \ln 2 - 1 + \ln 2 \\ &= 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

(b) Monter que, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq I_n \leq \ln 2.$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$. Par suite,

$$\int_0^1 0dx \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2dx$$

d'où le résultat demandé.

(c) Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, et en déduire qu'elle converge.

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ donc $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ d'où $I_{n+1} \leq I_n$ : la suite est décroissante, et comme elle est minorée par 0, elle converge.

2. Soit $g$ la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

(a) Etudier le signe de $g$ sur $\mathbf{R}^+$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

qui est strictement négatif dès que $x > 0$. On en déduit que $g$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$, et comme $g(0) = 0$, $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

(b) En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

Si $x \in [0,1]$, $x^n \in [0,1]$ et d'après ce qui précède, $\ln(1+x^n) \leq x^n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et comme $I_n \geq 0$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

**Exercice 5**

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 2 = 0$, où $\lambda$ désigne un paramètre réel.

Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2+2) = -3\lambda^2 - 8 < 0$. On en déduit que l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. On considère la fonction de la variable réelle $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a) = f(b)$.

(a) Montrer que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0$.

En développant, on trouve que $(a-b)(a^2+ab+b^2+2)=a^3-b^3+2a-2b=0$ puisque $f(a)=f(b)$.

(b) En déduire que $a=b$.

On a donc $f(a)-f(b)=(a-b)(a^2+ab+b^2+2)$. Par suite, si $f(a)=f(b)$, on a soit $a=b$, soit $a^2+ab+b^2+2=0$, ce qui est impossible d'après la première question : on en déduit donc que $a=b$.

**Exercice 6** On considère deux nombres complexes $z_1=1-i$ et $z_2=2+\sqrt{3}+i$.

1. Ecrire $z_1$ sous forme trigonométrique.

   $z_1=\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right)$

2. Ecrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

   En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{(1-i)(2+\sqrt{3}-i)}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)}\\&=\frac{1+\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2+1}\\&=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}i)}{8+4\sqrt{3}}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\left(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\right).\end{aligned}$$

3. En déduire la forme trigonométrique de $z_2$.

   On a $z_2=z_1/(z_1/z_2)$ et donc le module de $z_2$ est le quotient du module de $z_1$ par celui de $z_1/z_2$, et son argument est la différence de l'argument de $z_1$ et de celui de $z_1/z_2$. Tous calculs effectués, on trouve

$$z_2=\frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}\left(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)\right).$$

4. Donner la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

   En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de $z_2$, il vient

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}=\frac{5+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

   et

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$$

**Exercice 7** Dans une épreuve sportive, des dossards numérotés de 1 à $n$ ont été distribués aléatoirement à $n$ candidats, qui passeront l'épreuve dans l'ordre des numéros de dossards. Deux amis $A$ et $B$ participent à cette épreuve. On note $n_A$ et $n_B$ leurs numéros de dossards respectifs.

1. Combien y a-t-il de couples $(n_A, n_B)$ possibles ?

   Il y en a $n(n-1)$.

2. Soit $r$ un entier tel que $1 \leq r \leq n-1$. Montrer que $2(n-r)$ des couples de la question précédente vérifient $|n_A - n_B| = r$.

   Parmi les couples pour lesquels le dossard de $B$ a un numéro inférieur à celui de $A$, pour avoir $n_A - n_B = r$, on a $(1, r+1), (2, r+2), \cdots, (n-r, n)$, soit $n-r$ possibilités. On en a évidemment autant si le dossard de $A$ a un numéro inférieur à celui de $B$, d'où le résultat.

3. Quel est l'écart le plus probable entre $n_A$ et $n_B$ ?

   D'après ce qui précède, la probabilité pour que cet écart soit égal à $r$ est

   $$p_r = \frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

   qui est maximum pour $r = 1$. Le plus probable est donc que les deux candidats partent immédiatement l'un derrière l'autre.

4. Quel est l'écart moyen entre $n_A$ et $n_B$ ?

   L'espérance $E$ de l'écart entre $n_A$ et $n_B$ se calcule comme suit, en utilisant le rappel donné en début de l'énoncé :

   $$\begin{aligned} E &= \sum_{r=1}^{n-1} r \frac{2(n-r)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} r - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{r=1}^{n-1} r^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3}. \end{aligned}$$

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie A**

**Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Dans toute l'épreuve, *Ln* désigne le logarithme népérien, *e* le nombre de Néper et *R* l'ensemble des nombres réels.

## Exercice n° 1

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par :

$$f\ (x) = x\,Ln\,x - 2x + e$$

1. Etudier les variations de $f$ et tracer son graphe.

La dérivée de la fonction est égale à : $f\,'(x) = Ln\,x - 1$ et elle s'annule pour $x = e$. Le graphe de $f$ admet une branche parabolique dans la direction verticale. La fonction est strictement décroissante sur $]0, e]$ et croissante sur $[e, +\infty[$. On a : $f\,(e) = 0$. On peut prolonger la fonction par continuité à droite en zéro, en posant $f\,(0) = e$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante, où $a \in R$ :

$$x\,Ln\,x - (2+a)\,x = 0$$

L'équation devient $x(Ln\,x - (2+a)) = 0$, soit $x = e^{2+a}$, on a donc une solution.

3. Calculer Pour $\alpha > 0$, Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{e} f\,(x)\,dx$

$$\int_{\alpha}^{e} f\,(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}Ln\,x - \frac{x^2}{4} - x^2 + ex\right]_{\alpha}^{e} = \frac{e^2}{4} - \left[\frac{\alpha^2}{2}Ln\,\alpha - \frac{\alpha^2}{4} - \alpha^2 + e\alpha\right] \to \frac{e^2}{4}$$

## Exercice n° 2

On considère la fonction $f$ définie sur $R$ par : $f\ (x) = x - \sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de $f$ et tracer son graphe.

La fonction est bien définie et sa dérivée est égale à :

$$f^{'}\ (x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}+x)} > 0$$

La fonction est donc strictement croissante de $R$ sur $\left]-\infty, 0\right[$. Elle admet l'axe Ox et la droite d'équation y=2x, comme asymptotes ( $f(x) \approx x + x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)$ au voisinage de moins l'infini).

On a : $f(0) = -1$.

2. Etudier la convexité de $f$.

La dérivée seconde de $f$ est égale à : $f^{''}\ (x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} < 0$ et la fonction est donc concave.

3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 \in R$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f\ (u_n)$.

Comme la fonction $f$ est continue, si la suite converge vers une limite $l$, elle est solution de l'équation : $l = f\ (l)$ ou encore $\sqrt{1+l^2} = 0$, ce qui est impossible, donc la suite (qui est décroissante) est divergente.

## Exercice n° 3

Pour $x \in R$, on rappelle que la partie entière de $x$, notée $E(x)$, correspond au plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Pour $x$ non nul, on pose $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Calculer $I = \int_{1/2}^{2} f(x)\ dx$

On a : $I = \int_{1/2}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1/2}^{1} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int_{1}^{2} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{1/2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = 3/8$

2. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \int_{1}^{t} f\ (x)\,dx$

Pour $x$>1, la partie entière $E\left(\frac{1}{x}\right)$ est identiquement nulle, donc la limite demandée est nulle.

3. Expliciter $f$ (sans l'expression de la partie entière) et étudier sa continuité sur $R$

Pour $x>1$, $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $f(x)=0$, donc elle est continue ;

Pour $x<-1$, $E\left(\frac{1}{x}\right)=-1$ et $f(x)=-x$, donc elle est continue ;

En zéro, la fonction n'est pas définie ;

Pour $x\in\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$ avec $k$ entier positif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k$ et $f(x)=kx$, donc elle est continue ;

Pour $x\in\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[$ avec $k$ entier négatif non nul, $E\left(\frac{1}{x}\right)=k+1$ et $f(x)=(k+1)x$, donc elle est continue ;

Pour $x=\frac{1}{k}$, la limite à droite est différente de la limite à gauche et la fonction est non continue.

**Exercice n° 4**

1. Résoudre dans $C$ (ensemble des nombres complexes), l'équation : $\frac{z-2}{z-1}=i$

On pose $z=x+iy$ pour obtenir : $(x-2)+iy=i(x-1)-y$, d'où $x-2=-y; x-1=y$ et $z=\frac{1}{2}(3+i)$

2. Soient $M$, $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z$, 1 et 2. On suppose que $M$ est distinct de $A$ et $B$.

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-2}{z-1}$ ;

Le module correspond au rapport de longueur des deux segments $\frac{BM}{AM}$ et l'argument à l'angle entre $\vec{MB}$ et $\vec{MA}$

- Retrouver géométriquement la solution de la première question.

La solution de l'équation correspond à l'intersection entre la médiatrice de $AB$ ($x$=3/2) et du demi-cercle tel que $(\vec{MA},\vec{MB})=\frac{\pi}{2}$.

3. Résoudre dans $C$, l'équation : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i$

On procède comme dans la première question pour obtenir d'abord $x$ puis $y$. On obtient deux solutions : $z_1=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$; $z_2=\frac{3}{2}+i\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

## Exercice n° 5

Pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, on définit les fonctions $f_n$ sur $R$ par : $f_n(x) = x^n e^{x^2}$

1. Etudier les variations de $f_1$ et tracer son graphe.

La dérivée est égale à : $f_1^{'}(x) = e^{x^2}(2x^2+1) > 0$ et la fonction est impaire et strictement croissante de $R$ sur $R$ avec une branche parabolique dans la direction Oy.

2. Comparer les graphes de $f_{2n}$ et $f_{2n+1}$.

Le graphe de $f_{2n}$ est symétrique par rapport à l'axe Oy et le graphe de $f_{2n+1}$ est symétrique par rapport à l'origine. Les deux graphes admettent une branche parabolique dans la direction Oy.
Une différence : la pente de la tangente à l'origine est égale à 1 pour $f_{2n+1}$ et nulle pour $f_{2n}$.

3. Pour $p$ entier strictement positif fixé, étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 > 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

On a évidemment $u_n > 1$. Si la suite est convergente, $u_n \to l$, alors $l = f_p(l)$ et $l \geq 1$, d'où $l^{p-1} e^{l^2} = 0$ est impossible .La suite $(u_n)$, strictement positive et croissante, ne peut pas converger vers une limite finie, elle tend vers l'infini.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

On a : $0 < \int_0^1 f_n(x)\,dx < e\int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{e}{n+1} \to 0$

## Exercice n° 6

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1)$, où $a$ est un paramètre réel.

1. Déterminer $a$ pour que cette suite soit constante.

Si la suite est constante, on a : $u_n = (a+2)(u_n+1) = (a+2)(2) = 1$, soit $a = -3/2$

2. Déterminer $a$ pour que cette suite soit une suite arithmétique (on en précisera la raison).

Pour une suite arithmétique, on a : $u_{n+1} = (a+2)(u_n+1) = u_n + r$, soit $a = -1; r = 1$

3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)$ pour $a > 0$.

La suite $(u_n)$ est toujours strictement positive et si elle converge, sa limite $l$ vérifie : $l = (a+2)(l+1)$, d'où $l = -\dfrac{a+2}{a+1} < 0$. Par conséquent la suite n'est pas convergente. On peut remarquer qu'elle est croissante $u_{n+1} - u_n = (a+1)u_n + a + 2 > 0$ et non majorée, donc elle tend vers plus l'infini.

**Exercice n° 7**

On dispose de 3 dés (chaque dé a 6 faces) : les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6, le deuxième dé possède trois faces numérotées 1 et 3 faces numérotées 2, enfin le troisième dé a de deux faces avec 1, deux faces avec 2 et deux faces avec 3.
On jette les trois dés ensemble et on suppose que chaque dé tombe sur une face.

1. Soit *X* la variable aléatoire égale à la somme des points des 3 dés. Déterminer la loi de probabilité de *X*.

La loi de probabilité est :

| *X* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *p (X)* | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 6/36 | 6/36 | 6/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 |

2. Calculer l'espérance de *X*. Ce résultat est-il prévisible ?

L'espérance de *X* est donnée par : $E(X) = \sum_{i=3}^{11} x_i \, p(X = x_i) = 7$. Ce résultat était prévisible car cette distribution discrète avec un nombre impair de valeurs est symétrique.

3. Un joueur mise une unité monétaire sur *X*.
Si *X*=3 ou 11, il reçoit 3 unités ;
Si *X*=4 ou 10, il reçoit 1,5 unités ;
Si *X*=5 ou 9, il reçoit 1/2 unité ; sinon il ne reçoit rien.
Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Ce jeu est-il réaliste ?

L'espérance de gain est égale à : $\frac{1}{36}(3\times 2 + 1{,}5\times 6 + 10\times 0{,}5 - 18) = 1/18$

Ce jeu n'est pas réaliste car dans tous les jeux d'argent l'espérance de gain des joueurs est négative.