ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Note : l'épreuve est composée de quatre exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

EXERCICE n° 1

On définit la suite (u_n) par son terme initial $u_0=1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

❶ Calculer u_1, u_2, u_3.

❷ Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$.

① Etudier la fonction h et tracer son graphe (C) dans un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

② Tracer la droite (d) d'équation y=x dans le même repère.

③ Construire à l'aide de (C) et de (d) les points de l'axe (O, $\vec{i}$) d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

❸ (v_n) est la suite définie pour tout n par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

① Calculer v_0, v_1, v_2.

② Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

③ Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

❹ Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE n° 2

Le corps de base dans cet exercice est celui des nombres réels. L'espace vectoriel E, de dimension 3, est rapporté à la base B = $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. La représentation du vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de E dans B est donc la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a, b, c étant trois réels, on définit une matrice (3 x 3) par l'égalité :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On rappelle de plus que I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité.

❶ ① Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M(a,b,1).

② M(a,b,1) est-elle diagonalisable ?

③ On pose M(a,b,1) = I + U(a,b). Ecrire la matrice U(a,b). Calculer $U^2(a,b)$ et $U^3(a,b)$. Que remarque-t-on ?

④ En déduire une expression de $M^n(a,b,1)$ en fonction de n, a et b où n est un entier naturel non nul.

❷ On suppose dans la suite de l'exercice que $c \neq 1$.

① Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M(a,b,c).
② A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur le réel a, M(a,b,c) admet-elle un sous-espace propre de dimension 2 ? En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M(a,b,c) soit diagonalisable.

EXERCICE n° 3

Soit n un nombre entier supérieur à 1. On considère une urne dans laquelle se trouvent :

une boule portant le numéro 1 ;
deux boules portant le numéro 2 ;
trois boules portant le numéro 3 ;
...
n boules portant le numéro n.

❶ Calculer le nombre de boules contenues dans l'urne.

❷ On tire au hasard une boule dans l'urne. En supposant que n est pair, exprimer en fonction de n la probabilité de tirer une boule :

① portant un numéro pair.

② portant un numéro impair.

❸ Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est 21. On tire au hasard une boule dans l'urne. Donner la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement inférieur à 4.

EXERCICE n° 4

Donner un développement limité à l'ordre 10 de sin x au point 0 puis de cos x à l'ordre 9. En déduire un développement limité de tg x à l'ordre 7 au point 0.