CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2002

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit M la matrice représentant f dans la base canonique et P la matrice de passage, on a :

$$M^{'} = P^{-1}MP = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -20 & -40 & 2 \\ 28 & 42 & 7 \\ 10 & -8 & 48 \end{pmatrix} \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{et } M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2

Les valeurs propres sont 3, k-1, 3-k

Si k est différent de 0, 2, 4 alors A est diagonalisable

Si k=0 alors A est non diagonalisable

Si k=2 alors A est diagonalisable

Si k=4 alors A est non diagonalisable

Exercice n° 3

A partir de la représentation graphique y = $x^2 - 2x+2$, on peut constater et justifier que :

- Si $u_0>2$, la suite est croissante et non majorée donc divergente
- Si $u_0=2$, la suite est stationnaire donc convergente (limite égale 2)
- Si $1<u_0<2$, la suite est décroissante et minorée donc convergente vers 1
- Si $u_0=1$, la suite est stationnaire donc convergente (limite égale 1)
- Si $0<u_0<1$, la suite est décroissante à partir d'un certain rang et minorée donc convergente vers1
- Si $u_0=0$, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang donc convergente (limite égale 1)
- Si $u_0<0$, la suite est croissante et non majorée donc divergente

Exercice n° 4

Par intégration par partie, on montre que :

$$I_{k+1} = \frac{k+8}{k-7} I_k$$

$$I_7 = \frac{2^{15}}{15}$$

$$\text{donc } I_0 = -\frac{7!\ 7!}{15!} 2^{15}$$

Exercice n° 5

En utilisant les développements limités de $(1+x)^m$, de e^x et de $(1+bx)^{-1}$, on obtient le développement limité de la fonction f au voisinage de zéro :

$$f(x) = (1+b-a)x + (\frac{1}{2} - b^2 + ab)x^2 + (\frac{1}{6} + b^3 - ab^2)x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

Pour que le DL soit le d'ordre le plus élevé possible, il faut que :

$1 + b - a = 0$ *et* $\frac{1}{2} - b^2 + ab = 0$

On trouve alors $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = -\frac{1}{2}$

$f(x)$ *est alors égal* (au voisinage de 0) *à* $-\frac{1}{12}x^3 + x^3\varepsilon(x)$