AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

On note P(n) la proposition à démontrer. Il faut et il suffit de montrer que la proposition est vraie au rang n = 1, puis on suppose la proposition vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est toujours vraie au rang n+1 (pas de difficultés).

Question 2

On trouve a = 2 ; b = - 4 ; c = 6

Question 3

a) La raison est égale à 1/2 et le premier terme est égal à – 9/2.
Noter que $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

b) $v_n = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $u_n = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 4n + 6$

d) La suite (u_n) diverge.

Question 4

$$V_n = -9\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$R_n = \frac{n+1}{3}\left(2n^2-5n+18\right)$$

$$U_n = V_n + R_n$$

Exercice n° 2

Question 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 2

La dimension de Ker f est 1, une base de Ker f est constituée du vecteur de coordonnées (1,1,1).

On en déduit que la dimension de Im f est 2. Par exemple, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_3)$ forment une base de ce sous-espace vectoriel puisqu'ils sont indépendants.

Question 3

a) L'endomorphisme f n'est pas injectif, ni surjectif, ni bijectif car le noyau de f n'est pas réduit à l'élément nul.

b) Le rang de f est la dimension du sous-espace vectoriel « Im f ». Il vaut donc 2.

Question 4

a) Le polynôme caractéristique P(k) de A (ou de f) est le déterminant de la matrice A-kI (I étant la matrice identité). Ce polynôme est nul pour k = 0. En effet, le déterminant de la matrice A est nul puisque ses deux dernières lignes sont identiques.

b) Le vecteur propre associé à la valeur propre 0 est un vecteur de Ker f. Il suffit de prendre le vecteur de coordonnées (1,1,1), base de Ker f.

c) On trouve $P(k) = -k^2(1+k)$. L'autre valeur propre est donc la valeur –1.

d) La valeur propre 0 est d'ordre de multiplicité 2. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est Ker f. Comme la dimension de ce sous-espace est 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Question 5

a) Soit la combinaison linéaire $au_1+bu_2+cu_3=0$. Pour montrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de R^3, il faut et il suffit de montrer que a=b=c=0 (pas de difficultés).

b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\text{Det } P = -1$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) Le rang de la matrice A' est égal au rang de A et vaut donc 2.

Exercice n° 3

Question 1

En utilisant la formule de Mac Laurin, on obtient

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} e(x) = 0$$

Question 2

En utilisant de nouveau la formule de Mac Laurin, on obtient

$$h(x) = 3x^2 + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} e(x) = 0$$

Question 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = -\frac{1}{6}$$

Exercice n° 4

Les points stationnaires annulent les dérivées partielles d’ordre 1. On a donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f_x'(x, y, z) = 2x - y^2 + 2my = 0 \\ f_y'(x, y, z) = -z^2 - 2xy + 2mx = 0 \\ f_z'(x, y, z) = -2yz = 0 \end{cases}$$

La résolution donne le résultat suivant :

- si m = 0 ; il y a un point stationnaire : le point de coordonnées (0,0,0)

- si m est différent de 0, il y a trois points stationnaires dont les coordonnées sont : (0,0,0) ; (0,2m,0) ; ($-m^2/2$,m,0).